

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES SEM
SOLUÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Lucélia Kowalski Pinheiro

Santa Maria, RS, Brasil

2014

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES SEM SOLUÇÃO

Lucélia Kowalski Pinheiro

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS, Brasil

2014

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES SEM SOLUÇÃO

elaborada por
Lucélia Kowalski Pinheiro

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Maurício Fronza da Silva, Dr.
(Orientador)

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)

Marcio Violante Ferreira, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 27 de fevereiro de 2014.

Agradecimentos

À Deus, por todas as realizações alcançadas até o momento e por ter me dado força para a concretização de todos os meus objetivos.

Aos meus pais, Geni e Gilberto, por todo amor, esforço e dedicação dispensados para que eu alcançasse este objetivo. Por sempre terem feito o melhor, principalmente no que diz respeito à minha formação.

Ao meu namorado e amigo Francisco, pela dedicação, compreensão, apoio e principalmente força nos momentos de maior dificuldade. Também pelos momentos de descontração e diversão.

À todos os meus familiares que, de uma forma ou outra, torceram e contribuíram para que eu tivesse sucesso no caminho que escolhi seguir.

Ao meu orientador, professor Maurício, pela dedicação e eficiência com que conduziu este trabalho. Obrigado pelo esforço dispensado para que minha formação fosse a melhor possível.

À todos os meus amigos. Em especial, aos amigos do Mestrado pela amizade, apoio e, principalmente, pelos momentos de alegria e descontração proporcionados no decorrer destes dois anos. Também aos amigos da Pensão da Dona Nilma pelos momentos de conversa e descontração.

Aos professores da banca examinadora, pelas correções e sugestões.

Ao professor José Ruidival pela sugestão do tema desta dissertação.

À todos os professores que de alguma forma contribuíram positivamente para que eu chegasse até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES SEM SOLUÇÃO

AUTOR: LUCÉLIA KOWALSKI PINHEIRO

ORIENTADOR: MAURÍCIO FRONZA DA SILVA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 27 de fevereiro de 2014.

Nesse trabalho apresentaremos a demonstração de um resultado devido à Lars Hörmander, que estabelece uma condição necessária para que um operador linear com coeficientes variáveis seja globalmente resolúvel.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Equações Diferenciais Parciais Lineares. Resolubilidade Global.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITHOUT SOLUTIONS

AUTHOR: LUCÉLIA KOWALSKI PINHEIRO

ADVISOR: MAURÍCIO FRONZA DA SILVA

Date and Location of Defense: Santa Maria, February 27, 2014.

In this work we present the proof of a result due to Lars Hörmander which establishes a necessary condition for a linear operator with variable coefficients is globally resolvable.

Keywords: Partial Differential Equations. Linear Partial Differential Equations. Global Solvability.

SUMÁRIO

Introdução	7
1 Resultados Preliminares	8
1.1 Multi-índice	8
1.2 Notação O e o	9
2 Espaços Vetoriais Topológicos	12
2.1 Seminorma	12
2.2 Espaços Vetoriais Topológicos e Espaços Localmente Convexos	16
2.3 Metrização de ELC's	22
2.4 Algumas propriedades do espaço $C^\infty(\Omega)$	27
2.5 A topologia de $C_c^\infty(\Omega)$	29
2.6 Teorema de Hahn-Banach	37
2.7 Topologia Fraca em um EVT	40
2.8 O Teorema de Baire	42
2.9 Continuidade de Aplicações Bilineares	45
3 O Teorema Principal	47
3.1 Introdução	47
3.2 Notas históricas e exemplos	49
3.3 Resultados auxiliares	54
3.4 Demonstração do Teorema 3.1.4	71
Conclusão	81
Referências Bibliográficas	82
A Apêndice	85
A.1 Resultados de Medida e Integração	85
A.2 Resultados de Distribuições	93

Introdução

Um dos principais problemas abordados na área de Equações Diferenciais Parciais é decidir se uma dada equação, ou classe de equações, admite ou não solução, seja ela local ou global. Um dos trabalhos mais famosos em se tratando de resolubilidade local é o Teorema de Cauchy-Kovalevsky, que garante a existência e a unicidade de solução local analítica para uma equação diferencial parcial com coeficientes e dados iniciais analíticos.

Se tratando de resolubilidade global, Leon Ehrenpreis (1954) e Bernard Malgrange (1955) provaram, de modo independente, a existência de uma solução fundamental para um operador linear de coeficientes constantes, não identicamente nulo. Combinando esse resultado com a noção de convolução de distribuições, torna-se bastante simples obter soluções globais para equações lineares com coeficientes constantes.

Também em 1955, Lars Hörmander demonstrou que a classe de equações lineares envolvendo operadores do tipo principal real tem solução local.

Assim, até meados da década de 1950, existiam vários resultados provando a existência de soluções para determinadas classes de Equações Diferenciais Parciais. Mas em 1957, Hans Lewy apresentou um exemplo de uma equação diferencial linear com coeficientes variáveis que não tem solução.

Baseado neste exemplo, Lars Hörmander estabeleceu, em 1960, o resultado que é o objetivo do presente trabalho. Ele provou uma condição necessária para que um operador linear com coeficientes variáveis tenha uma solução global.

Para a compreensão deste resultado foi necessário um estudo preliminar envolvendo Teoria de Medida e Integração, Espaços Vetoriais Topológicos, Distribuições e por fim alguns resultados de Análise Funcional.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1 introduzimos as notações de multi-índice, o e O . No Capítulo 2 tratamos dos resultados de Espaços Vetoriais Topológicos e Espaços Localmente Convexos, estabelecendo as principais propriedades das topologias dos espaços C^∞ e C_c^∞ . Ao final do Capítulo 2, introduzimos resultados de Análise Funcional necessários para a compreensão do capítulo subsequente. O Capítulo 3 é exclusivamente dedicado à demonstração do teorema principal, dando ainda alguns exemplos de aplicações deste resultado. Por fim, no Apêndice listamos os resultados pertinentes de Teoria da Medida e Integração, e de Distribuições, com o objetivo de dar o suporte que se faça necessário no decorrer do texto.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Esse capítulo tem por objetivo fixar a notação usada no decorrer do texto. Em particular, introduziremos a notação de multi-índice e uma expressão conveniente para a Fórmula de Taylor.

1.1 Multi-índice

Neste texto, Ω denota um aberto de \mathbb{R}^n e o símbolo $K \subset\subset \Omega$ significa que K é um subconjunto compacto de Ω . Falaremos nesta seção sobre a notação de multi-índice que tem por objetivo simplificar a maneira como são denotadas as derivadas de ordens altas para funções de várias variáveis.

Definição 1.1.1 *Um n -multi-índice α é uma n -upla de inteiros não-negativos. O comprimento de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é definido por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.*

Sempre que for conveniente, escrevemos multi-índice no lugar de n -multi-índice. Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, denotemos

$$\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Ou seja, o número $|\alpha|$ diz a ordem de derivação de f e cada coordenada α_j explicita o número de derivadas na direção de x_j que estão sendo calculadas.

Definição 1.1.2 *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dois multi-índices, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos:*

- (i) $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$;
- (ii) $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$;
- (iii) $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_j \leq \beta_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$;

$$(iv) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix};$$

$$(v) x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Observação 1.1.3 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vale $|x^\alpha| \leq |x|_M^{|\alpha|}$, onde $|\cdot|_M$ denota a norma do máximo em \mathbb{R}^n .*

Definição 1.1.4 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos o suporte de f como o conjunto $S(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$.*

Definição 1.1.5 (i) *Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, o espaço vetorial de todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que têm derivadas de ordem m contínuas em Ω é denotado por $C^m(\Omega)$.*

(ii) *Definimos $C^\infty(\Omega)$ como o espaço vetorial das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que têm derivadas de qualquer ordem contínuas em Ω .*

(iii) *Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o subespaço vetorial de $C^\infty(\Omega)$ formado pelas funções que tem suporte compacto.*

O teorema seguinte nos fornece uma importante relação para o cálculo da derivada do produto. Sua demonstração é feita por indução sobre $|\alpha|$.

Teorema 1.1.6 (Regra de Leibniz) *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Se $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ tem-se:*

$$\partial^\alpha (fg)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f(x) \partial^{\alpha-\beta} g(x), \forall x \in \Omega.$$

1.2 Notação O e o

Nesta seção apresentamos as noções O e o , que medem o crescimento de uma função com relação à outra. Elas permitem uma escrita conveniente da Fórmula de Taylor.

Definição 1.2.1 *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n , $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $a \in \Omega$. Escrevemos*

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

se existem constantes $C, \delta > 0$ tais que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C.$$

A definição de $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow \infty$ é análoga.

Observação 1.2.2 *Vejamos algumas propriedades de O , todas de fácil verificação:*

- (i) Se $f_1(x) = O(g(x))$ e $f_2(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$, então $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$;
- (ii) Se $f_1(x) = O(g_1(x))$ e $f_2(x) = O(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, então $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$, $x \rightarrow a$;
- (iii) Se $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$, dado $k \in \mathbb{C}$ temos $(k \cdot f)(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$;
- (iv) Se $f(x) = O(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$, para $q = 0, 1, 2, \dots$, então $f(x) = O(\|x\|^p)$, $x \rightarrow 0$, para $0 \leq p \leq q$.

Definição 1.2.3 Com a mesma notação da definição anterior escrevemos

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

quando

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Valem propriedades análogas as vistas na Observação 1.2.2 para o . Também vale a seguinte relação entre as duas definições anteriores, cuja recíproca não é verdadeira: Se $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ então $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$.

A notação de o e O expressa o quão mais rápido f vai à zero com relação a g . No caso em que g é uma função potência, a notação o significa simplesmente, o número de derivadas de f que se anulam na origem, como mostra o lema seguinte cuja demonstração segue da Desigualdade do Valor Médio e pode ser encontrada em [13].

Lema 1.2.4 Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n e $f \in C^q(\Omega)$, $q = 0, 1, 2, \dots$, então

$$f(x) = o(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \partial^\alpha f(0) = 0, \quad |\alpha| \leq q.$$

Daí segue

Teorema 1.2.5 (Fórmula de Taylor) Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com $0 \in \Omega$ e $f \in C^q(\Omega)$. Para todo $x \in \Omega$ vale

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq q} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + r(x)$$

sendo $r \in C^q(\Omega)$ tal que

$$r(x) = o(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0.$$

Desses dois resultados seguem alguns corolários bastante utilizados nos capítulos seguintes.

Corolário 1.2.6 Dado $q = 1, 2, \dots$, se $f \in C^q(\Omega)$ então:

$$f(x) = O(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) = o(\|x\|^{q-1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Se $f(x) = O(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$, então existem constantes $C, \delta > 0$ tais que $\|x\| < \delta$ implica em $\frac{|f(x)|}{\|x\|^q} \leq C$. Então

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|^{q-1}} \leq C \cdot \|x\|, \quad \text{se } \|x\| < \delta.$$

Fazendo $x \rightarrow 0$, temos que $\frac{|f(x)|}{\|x\|^{q-1}} \rightarrow 0$, donde $f(x) = o(\|x\|^{q-1})$, $x \rightarrow 0$.

(\Leftarrow) Pela fórmula de Taylor de ordem q da aplicação f , temos

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq q} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + r(x),$$

onde $r(x) = o(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$.

Por hipótese, $f(x) = o(\|x\|^{q-1})$, $x \rightarrow 0$, logo pelo Lema 1.2.4 todas as derivadas de ordem menores ou iguais à $q - 1$ de f se anulam na origem. Então a fórmula de Taylor se reduz à

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=q} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + r(x).$$

Assim,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|^q} \leq \sum_{|\alpha|=q} \frac{|\partial^\alpha f(0)|}{\alpha!} \cdot \frac{|x^\alpha|}{\|x\|^q} + \frac{|r(x)|}{\|x\|^q},$$

onde, utilizando a Observação 1.1.3, vemos que a primeira parcela é limitada e a segunda converge para 0 já que $r(x) = o(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$. Daí concluímos que $f(x) = O(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$. ■

Corolário 1.2.7 Dado $q = 1, 2, \dots$, se $f \in C^q(\Omega)$ então:

$$f(x) = O(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = O(\|x\|^{q-1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Demonstração. Do corolário anterior temos:

$$f(x) = O(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) = o(\|x\|^{q-1}), \quad x \rightarrow 0$$

e pelo Lema 1.2.4 segue que $\partial^\alpha f(0) = 0$, quando $|\alpha| \leq q - 1$, donde $\partial^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, quando $|\alpha| \leq q - 2$. Novamente pelo Lema 1.2.4, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = o(\|x\|^{q-2})$, $x \rightarrow 0$. Do corolário anterior, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = O(\|x\|^{q-1})$, $x \rightarrow 0$. ■

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Topológicos

Nesse capítulo construiremos a topologia dos espaços $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$, bem como deduziremos suas principais propriedades. Isso permite-nos demonstrar alguns resultados úteis sobre dualidade e continuidade de aplicações bilineares. Embora os resultados das primeiras seções tenham sido recentemente listados em [1], eles serão aqui demonstrados a título de completude. Maiores detalhes podem ser encontrados em [11], [15] e [17].

O símbolo E denota um espaço vetorial sobre um corpo de escalares \mathbb{K} que consideraremos \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1 Seminorma

Definição 2.1.1 *Uma seminorma em E é uma aplicação $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:*

- (i) $p(x) \geq 0, \forall x \in E$;
- (ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$;
- (iii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Observação 2.1.2 *Se p também satisfaz*

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

então p é uma norma.

Toda norma é uma seminorma, mas a recíproca não é verdadeira, pois a aplicação nula é um exemplo de uma seminorma que não é norma. A seguir apresentamos alguns exemplos de seminormas que não são normas.

Exemplo 2.1.3 *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Para cada $K \subset\subset \Omega$ a aplicação $p : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$p(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

é uma seminorma em $C(\Omega)$.

Exemplo 2.1.4 Fixados $m = 0, 1, 2, \dots$ e Ω um aberto de \mathbb{R}^n , para cada $K \subset\subset \Omega$, a aplicação $p_K : C^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p_K(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(x)| \quad (2.1)$$

é uma seminorma em $C^m(\Omega)$.

Exemplo 2.1.5 Fixado Ω aberto de \mathbb{R}^n , para cada $K \subset\subset \Omega$ e $m = 0, 1, \dots$, a aplicação $p_{K,m} : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p_{K,m}(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(x)| \quad (2.2)$$

é uma seminorma em $C^\infty(\Omega)$.

Se p é uma seminorma no espaço vetorial E , então p possui as propriedades listadas abaixo. As demonstrações são análogas ao caso em que p é uma norma.

- (i) $p(0) = 0$;
- (ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$, $\forall x, y \in E$;
- (iii) $p^{-1}(\{0\})$ é um subespaço vetorial de E .

Definição 2.1.6 Sejam p uma seminorma em E , $a \in E$ e $r > 0$. A bola aberta com centro em a e raio r com relação a seminorma p é o conjunto:

$$B_p(a, r) = \{x \in E; p(x - a) < r\}.$$

Analogamente, definimos a bola fechada $B[a, r]$.

Observação 2.1.7 Sejam p e q seminormas em E . Dados $a \in E$ e $r > 0$ tem-se:

- (i) $a + B_p(0, r) = B_p(a, r)$ e $a + B_p[0, r] = B_p[a, r]$;
- (ii) $r \cdot B_p\left(\frac{a}{r}, 1\right) = B_p(a, r)$ e $r \cdot B_p\left[\frac{a}{r}, 1\right] = B_p[a, r]$;
- (iii) $p \leq q \Rightarrow B_q(a, r) \subset B_p(a, r)$ e $B_q(0, 1) \subset B_p(0, 1) \Rightarrow p \leq q$.

Definição 2.1.8 Um subconjunto A de um espaço vetorial E sobre \mathbb{K} é dito

- (i) convexo se, dados dois pontos $x, y \in A$, o segmento de reta que os une está contido em A , isto é,

$$(1 - t)x - ty \in A, \forall x, y \in A, \text{ e } \forall t \in [0, 1];$$

(ii) equilibrado se

$$x \in A, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in A;$$

(iii) absorvente se, para todo $x \in E$, existe $\rho > 0$ tal que $|\lambda| < \rho \Rightarrow \lambda x \in A$.

Teorema 2.1.9 *Sejam E, F espaços vetoriais, $A \subset E$, $B \subset F$ e $u : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Valem as seguintes afirmações:*

(i) se A é convexo e $\lambda \in \mathbb{K}$ então λA é convexo;

(ii) intersecção arbitrária de convexos (equilibrados, respectivamente) é convexo (equilibrado, respectivamente);

(iii) se B é convexo (equilibrado, absorvente, respectivamente) então $u^{-1}(B)$ é convexo (equilibrado, absorvente, respectivamente);

(iv) se $r, s \geq 0$ então $(r + s)A \subset rA + sA$; se A é convexo então $rA + sA = (r + s)A$;

(v) se p é uma seminorma em E então $B_p(0, r)$ e $B_p[0, r]$ são equilibrados e absorventes. Além disso, $B_p(a, r)$ e $B_p[a, r]$ são convexos, quaisquer que sejam $a \in E$, $r > 0$.

Demonstração. As demonstrações dos itens (i), (ii) e (iii) são imediatas a partir das definições.

(iv) A primeira inclusão é imediata. Supondo A convexo, caso $r = 0$ ou $s = 0$ segue a igualdade de modo imediato. Suponhamos portanto que $r, s > 0$. Dados $x, y \in A$ podemos escrever

$$rx + sy = (r + s) \left(\frac{r}{r + s}x + \frac{s}{r + s}y \right).$$

Como $\frac{r}{r + s} + \frac{s}{r + s} = 1$ e A é convexo segue que $\left(\frac{r}{r + s}x + \frac{s}{r + s}y \right) \in A$. Segue, portanto, a inclusão $rA + sA \subset (r + s)A$ donde segue a igualdade.

(v) A convexidade segue de maneira análoga à convexidade das bolas em espaços normados. O restante segue diretamente da definição. ■

Definição 2.1.10 *Seja $A \subset E$ um conjunto convexo e absorvente. A função $p_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$p_A(x) = \inf\{\rho > 0; x \in \rho A\} \tag{2.3}$$

é chamada de funcional de Minkowski do conjunto A .

Teorema 2.1.11 *Na notação da definição acima, para cada $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, valem as seguintes condições:*

(i) p_A está bem definida;

(ii) $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$;

(iii) $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$, se $\lambda \geq 0$;

(iv) se $B = \{x \in E; p_A(x) < 1\}$ e $C = \{x \in E; p_A(x) \leq 1\}$ então $B \subset A \subset C$;

(v) se A é equilibrado então p_A é uma seminorma em E . Em particular,

$$B_{p_A}(0, 1) \subset A \subset B_{p_A}[0, 1].$$

Demonstração. (i) Decorre do fato de A ser absorvente.

(ii) Como A é convexo, dados $r, s > 0$, $x \in rA$ e $y \in sA$, segue do Teorema 2.1.9 item (iv), que

$$x + y \in (r + s)A,$$

donde

$$p_A(x + y) \leq r + s.$$

Como esta desigualdade é válida para todo $r, s > 0$ tais que $x \in rA$, $y \in sA$, segue que $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

(iii) Se $\lambda = 0$ então $p_A(\lambda x) = p_A(0) = 0 = 0 \cdot p_A(x)$, uma vez que $p_A(0) = 0$. Se $\lambda > 0$ então

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf \{ \rho > 0; \lambda x \in \rho A \} \\ &= \inf \left\{ \rho > 0; x \in \frac{\rho}{\lambda} A \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \frac{\rho}{\lambda} > 0; x \in \frac{\rho}{\lambda} A \right\} \\ &= \lambda p_A(x). \end{aligned}$$

(iv) Seja $x \in B$, então $p_A(x) < 1$, donde existe $0 < \rho < 1$ tal que $\frac{1}{\rho}x \in A$. Como $0, \frac{1}{\rho}x \in A$, $\frac{1}{\rho} > 1$ e A é convexo, segue que o segmento de reta de extremidades 0 e $\frac{1}{\rho}x$ está contido em A e contém x , ou seja, $x \in A$. Portanto, $B \subset A$.

Se $x \in A$, $x \in \rho A$, para $\rho = 1$. Assim $p_A(x) \leq 1$, donde $x \in C$. Portanto, $A \subset C$.

(v) A primeira condição para p_A ser uma seminorma é óbvia. Do item (ii) segue a segunda condição. Resta provar a terceira condição da definição de seminorma.

Se $\lambda \neq 0$, $\left| \frac{|\lambda|}{\lambda} \right| = 1$. Sendo A equilibrado

$$\lambda x \in \rho A \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{\lambda} \lambda x \in \rho A \Leftrightarrow |\lambda|x \in \rho A \Leftrightarrow x \in \frac{\rho}{|\lambda|} A.$$

Então

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda x) &= \inf \{ \rho > 0; \lambda x \in \rho A \} \\
&= \inf \left\{ \rho > 0; x \in \frac{\rho}{|\lambda|} A \right\} \\
&= \inf \left\{ |\lambda| \frac{\rho}{|\lambda|} > 0; x \in \frac{\rho}{|\lambda|} A \right\} \\
&= |\lambda| \cdot p_A(x).
\end{aligned}$$

Daí segue que p_A é uma seminorma em E . Do item (iv) acima segue a relação $B_{p_A}(0, 1) \subset A \subset B_{p_A}[0, 1]$. ■

2.2 Espaços Vetoriais Topológicos e Espaços Localmente Convexos

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades dos EVT's e dos ELC's, dando destaque ao Teorema 2.2.8 que é a principal ferramenta para a construção de exemplos de ELC's.

Definição 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo de escalares \mathbb{K} . Suponha que existe uma topologia definida em E . Dizemos que essa topologia é compatível com a estrutura de espaço vetorial de E se as aplicações:*

$$\begin{aligned}
s : E \times E &\longrightarrow E & e & \quad m : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\
(x, y) &\longmapsto x + y & & \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x
\end{aligned}$$

são contínuas.

Definição 2.2.2 *Um espaço vetorial equipado com uma topologia compatível com a estrutura de espaço vetorial é dito um Espaço Vetorial Topológico (EVT).*

Exemplo 2.2.3 *Todo espaço normado é um EVT.*

Teorema 2.2.4 *Seja E um EVT.*

(i) *para cada $x \in E$ e $\lambda \neq 0$, as aplicações $T_x : E \rightarrow E$ e $m_\lambda : E \rightarrow E$ dadas por*

$$T_x(y) = x + y \quad e \quad m_\lambda(y) = \lambda y$$

são homeomorfismos;

(ii) se \mathcal{B}_0 é uma base local na origem, então

$$\mathcal{B} = \{a + V; a \in E, V \in \mathcal{B}_0\}$$

é uma base para a topologia de E ;

(iii) toda vizinhança da origem é absorvente;

(iv) toda vizinhança da origem contém uma vizinhança equilibrada da origem.

Demonstração. (i) Decorre obviamente do fato de E ser um EVT.

(ii) Decorre da seguinte afirmação: Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$, dizemos que $\beta_x \subset \tau$ é uma base local para x se e, somente se, dado $U \in \tau$ com $x \in U$ existe $B \subset \beta_x$ tal que $x \in B \subset U$.

(iii) Sejam U uma vizinhança da origem e $x \in E$. Como $0 \cdot x = 0$ e a multiplicação por escalar é uma aplicação contínua, existem $\rho > 0$ e uma vizinhança V de x tais que

$$|\lambda| < \rho, y \in V \Rightarrow \lambda y \in U.$$

Como $x \in V$ segue que $\lambda x \in U$, donde U é absorvente.

(iv) Seja U uma vizinhança da origem. Da mesma forma que no item (iii), como $0 \cdot 0 = 0$ e a multiplicação por escalar é contínua, existem $\rho > 0$ e uma vizinhança V da origem tais que

$$|\lambda| < \rho \Rightarrow \lambda \cdot V \subset U.$$

Definimos $W = \bigcup_{|\lambda| < \rho} \lambda \cdot V$. Temos que $W \subset U$ e W é uma vizinhança da origem. Mostremos que W é equilibrado.

Seja $x \in W$, então $x \in \lambda \cdot V$, para algum λ satisfazendo $|\lambda| < \rho$. Seja $v \in V$ tal que $x = \lambda v$. Tomemos $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu| \leq 1$, mostremos que $\mu x = \mu \lambda v \in W$. De fato,

$$|\mu \cdot \lambda| = |\mu| |\lambda| \leq |\lambda| < \rho.$$

Como $v \in V$, $\mu x \in W$. Logo, W é equilibrado. ■

As propriedades (i) e (ii) implicam que a topologia de um EVT é invariante por translação. Por isso, basta considerarmos as bases locais na origem de um EVT.

Definição 2.2.5 Um espaço vetorial topológico E que possui uma base local na origem cujos elementos são conjuntos convexos é chamado de Espaço Localmente Convexo (ELC). Nesse caso, dizemos que a topologia de E é uma topologia localmente convexa.

Teorema 2.2.6 Todo ELC tem uma base local na origem cujos elementos são convexos, equilibrados e absorventes.

Demonstração. Seja E um ELC. Pelo item (iii) do Teorema 2.2.4 toda vizinhança da origem é absorvente, por isso, é suficiente mostrar que toda vizinhança convexa da origem contém uma vizinhança convexa equilibrada da origem.

Seja U uma vizinhança convexa da origem. Tomemos $V = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U$. Como U é convexo, pelo Teorema 2.1.9, V é convexo. Mostremos que V é vizinhança da origem.

Do item (iv) do Teorema 2.2.4, U contém uma vizinhança equilibrada da origem W . Assim, como W é equilibrado:

$$|\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha^{-1}W = W \Rightarrow \alpha^{-1}W \subset U \Rightarrow W \subset \alpha U$$

o que implica que $W \subset V$. Como W é uma vizinhança da origem, V também é uma vizinhança da origem.

Mostremos que V é equilibrado. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfazendo $|\lambda| \leq 1$. Tomemos $x \in V$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| = 1$ temos que $x \in \alpha \cdot U$. Então $\lambda x \in \alpha \lambda U$.

Como U é convexo que contém a origem e $|\lambda| \leq 1$, segue que $\lambda \cdot U \subset U$. Assim

$$\lambda x \in \alpha U, \forall \alpha \in \mathbb{K}; |\alpha| = 1 \Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = V.$$

Logo, $\lambda V \subset V$, donde V é equilibrado. ■

Teorema 2.2.7 *Sejam E um EVT, $A \subset E$ um subconjunto convexo, equilibrado e absorvente e p_A o funcional de Minkowski de A . Se A é aberto, então $B_{p_A}(0, 1) = A$ e se A é fechado, então $B_{p_A}[0, 1] = A$.*

Demonstração. Do item (v) do Teorema 2.1.11, valem as inclusões

$$B_{p_A}(0, 1) \subset A \subset B_{p_A}[0, 1].$$

Mostremos que $A \subset B_{p_A}(0, 1)$, caso A seja aberto. Dado $x \in A$, da definição de p_A segue que $p_A(x) \leq 1$. Como A é aberto e a multiplicação por escalar é contínua segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$|\lambda - 1| < \delta \Rightarrow \lambda x \in A.$$

Em particular, $\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)x \in A$, donde $p_A(x) < 1$. A prova da outra afirmação é análoga. ■

O próximo resultado relaciona os conceitos de seminorma e ELC. Ele mostra que é possível definir uma topologia que torne E um ELC a partir de uma coleção qualquer de seminormas. Além disso, ele nos permitirá dar os exemplos mais importantes de ELC's.

Teorema 2.2.8 (i) Se Σ é uma coleção não-vazia qualquer de seminormas em um espaço vetorial E então

$$\mathcal{B} = \left\{ B_p \left(a, \frac{1}{j} \right); p \in \Sigma, a \in E, j \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.4)$$

é uma sub-base para uma topologia em E de modo que E é um ELC e cada elemento de Σ é uma aplicação contínua.

(ii) Reciprocamente, se E é um ELC, então existe uma coleção Σ de seminormas em E tal que a coleção \mathcal{B} é uma base para a topologia de E e cada elemento de Σ é uma aplicação contínua.

Demonstração. (i) É fácil ver que a coleção \mathcal{B} é uma sub-base para uma topologia em E . Mostremos inicialmente que E é um EVT, ou seja, que as operações de soma e produto por escalar são contínuas nessa topologia.

Seja $B_p(c, r)$ com $c \in E$, $r > 0$, $p \in \Sigma$, um aberto qualquer nesta topologia. Tomemos $a, b \in E$ tais que $a + b = c$. Da propriedade (ii) da definição de seminorma segue que $B_p \left(a, \frac{r}{2} \right) + B_p \left(b, \frac{r}{2} \right) \subset B_p(c, r)$, o que prova a continuidade da soma.

Tomemos agora $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$ tal que $\lambda x = c$. Consideremos $\delta_1, \delta_2 > 0$ satisfazendo:

$$\delta_1 < \min \left\{ 1, \frac{r}{2(p(x) + 1)} \right\}, \quad \delta_2 < \frac{r}{2(|\lambda| + 1)}.$$

Escrevendo

$$p(\lambda'x' - \lambda x) = p(\lambda'(x' - x) + (\lambda' - \lambda)x),$$

e utilizando o fato de que, $|\lambda' - \lambda| < \delta_1$ implica em $|\lambda'| < 1 + |\lambda|$, segue que $(\lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1) \cdot B_p(x, \delta_2) \subset B_p(c, r)$. Logo, a multiplicação por escalar é uma aplicação contínua.

Pelo Teorema 2.1.9, cada $B_p \left(a, \frac{1}{j} \right)$ é um conjunto convexo, donde segue que E é um ELC. Pela própria definição da topologia de E segue que cada $p \in \Sigma$ é contínua.

(ii) Seja τ a topologia de E . Pelo Teorema 2.2.6 existe uma base local na origem \mathcal{B}' formada por conjuntos convexos, equilibrados e absorventes. Pelo item (ii) do Teorema 2.2.4, temos que o conjunto

$$\mathcal{B}'' = \{a + A; a \in E, A \in \mathcal{B}'\}$$

é uma base de τ .

Definimos $\Sigma = \{p_A; A \in \mathcal{B}'\}$, onde p_A é o funcional de Minkowski de A . Da Observação 2.1.7 e dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.7 segue que

$$\left\{ B_{p_A} \left(a, \frac{1}{j} \right); p_A \in \Sigma, a \in E, j \in \mathbb{N} \right\} = \{a + jA; A \in \mathcal{B}', a \in E, j \in \mathbb{N}\}.$$

Pelo item (i) segue que o conjunto do lado direito na igualdade acima é sub-base para uma topologia localmente convexa τ' em E . Na verdade, como a interseção finita de elementos de \mathcal{B}' pertence à \mathcal{B}' temos que o conjunto

$$\{a + jA; A \in \mathcal{B}', a \in E, j \in \mathbb{N}\}$$

é uma base de τ' .

Obviamente $\tau \subset \tau'$, mostremos que $\tau' \subset \tau$. Como a translação e a multiplicação por escalar são homeomorfismos, os abertos são invariantes por essas aplicações. Assim, se $A \in \tau$, então $a + jA \in \tau$. Dado $\beta \in \tau'$, temos que existem $a \in E$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que $\beta = a + jA$, donde segue que $\tau' \subset \tau$. ■

Definição 2.2.9 *Nas condições do Teorema 2.2.8 dizemos que a família de seminormas Σ define a topologia de E .*

Vejamos agora alguns exemplos de ELC's utilizando o Teorema 2.2.8.

Exemplo 2.2.10 *Sejam E um espaço vetorial qualquer e $\|\cdot\|$ uma norma em E . A topologia definida por $\Sigma = \{\|\cdot\|\}$ é a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|$.*

Os próximos exemplos nos fornecem ELC's que não são normados.

Exemplo 2.2.11 *Seja E um espaço vetorial qualquer. A topologia localmente convexa definida por $\Sigma = \{0\}$ é a topologia caótica.*

Nos próximos dois exemplos definimos as topologias dos espaços $C^m(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Já na seção 2.5 vamos definir a topologia do espaço $C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 2.2.12 $C^m(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, é um ELC cuja topologia é definida pela família de seminormas $\Sigma = \{p_K; K \subset\subset \Omega\}$, onde p_K são as seminormas definidas em (2.1).

Exemplo 2.2.13 $C^\infty(\Omega)$ é um ELC cuja topologia é definida pela família $\Sigma = \{p_{K,m}; K \subset\subset \Omega, m = 0, 1, 2, \dots\}$, onde $p_{K,m}$ são as seminormas definidas em (2.2).

A partir de agora sempre que fizermos menção aos espaços $C^m(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, estaremos considerando as topologias definidas nos dois exemplos acima.

O próximo resultado estabelece uma condição para que um ELC seja um espaço de Hausdorff.

Teorema 2.2.14 *Sejam E um ELC e Σ a família de seminormas que define a topologia de E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é espaço de Hausdorff;

$$(ii) \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Para qualquer seminorma $p \in \Sigma$, temos que $p(0) = 0$, assim $0 \in \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\})$.

Dado qualquer $x \in E$, vamos mostrar que, se $x \neq 0$, então $x \notin \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\})$. Suponhamos $x \neq 0$, como E é um espaço de Hausdorff, existe uma vizinhança de x que não contém a origem. Podemos tomar essa vizinhança da forma $B_p(x, \varepsilon)$, para alguma seminorma $p \in \Sigma$ e algum $\varepsilon > 0$. Então $p(x) > 0$, pois se ocorresse $p(x) = 0$ teríamos $0 \in B_p(x, \varepsilon)$. Assim $x \notin \bigcap_{p \in \Sigma} p^{-1}(\{0\})$.

(ii) \Rightarrow (i) Tomemos $x, y \in E$, $x \neq y$. Temos que mostrar que existem abertos disjuntos que separam esses dois pontos. Temos que $y - x \neq 0$, donde, pela hipótese, existem $p \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ tal que $p(y - x) = \varepsilon$. Consideremos $V_x = B_p\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e $V_y = B_p\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Mostremos que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Se existisse $z \in V_x \cap V_y$, então:

$$p(x - z) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad p(y - z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, da condição (ii) da definição de seminorma, segue que

$$\varepsilon = p(x - y) = p(x - z + z - y) \leq p(x - z) + p(y - z) < \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, $V_x \cap V_y = \emptyset$ e daí E é espaço de Hausdorff. ■

Conforme veremos abaixo a definição de subconjunto limitado em um ELC é análoga a definição natural de subconjunto limitado.

Definição 2.2.15 *Seja E um ELC cuja topologia é definida pela família de seminormas Σ . Dizemos que $A \subset E$ é limitado se para cada $p \in \Sigma$, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset B_p(0, \lambda)$.*

Também a definição de continuidade uniforme de uma aplicação entre ELC's é análoga a definição de continuidade uniforme para aplicações em espaços normados.

Definição 2.2.16 *Sejam E e F ELC's cujas topologias são definidas pelas famílias de seminormas Σ_1 e Σ_2 , respectivamente. Uma aplicação $u : E \rightarrow F$ é uniformemente contínua quando dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \Sigma_2$, existem $\delta > 0$ e $p \in \Sigma_1$ tais que*

$$(y - x) \in B_p(0, \delta) \Rightarrow (u(y) - u(x)) \in B_q(0, \varepsilon).$$

Vejam agora algumas propriedades de transformações lineares contínuas entre ELC's que nos serão úteis nos capítulos subsequentes.

Teorema 2.2.17 *Sejam E e F ELC's cujas topologias são definidas pelas famílias de seminormas Σ_1 e Σ_2 , respectivamente. As seguintes condições sobre uma aplicação linear $u : E \rightarrow F$ são equivalentes:*

(i) *u é uniformemente contínua;*

(ii) *u é contínua;*

(iii) *u é contínua na origem;*

(iv) *para todo $q \in \Sigma_2$ existem $p \in \Sigma_1$ e $M > 0$ tais que $q \circ u \leq M \cdot p$.*

Demonstração. As implicações (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) são imediatas.

(iii) \Rightarrow (iv) Por hipótese, u é contínua na origem, então dado $B_q(0, 1)$ aberto em F , $u^{-1}(B_q(0, 1))$ é aberto em E . Logo existem $p \in \Sigma_1$ e $\delta > 0$ tais que $B_p(0, \delta) \subset u^{-1}(B_q(0, 1))$, então

$$p(x) < \delta \Rightarrow q(u(x)) < 1,$$

e conseqüentemente,

$$\frac{1}{\delta}p(x) < 1 \Rightarrow q(u(x)) < 1.$$

Notemos que $\frac{1}{\delta}p$ e $q \circ u$ são seminormas em E e a expressão acima pode ser escrita como

$$B_{\frac{1}{\delta}p}(0, 1) \subset B_{q \circ u}(0, 1).$$

Da Observação 2.1.7, item (iii), segue o resultado com $M = \frac{1}{\delta}$.

(iv) \Rightarrow (i) Devemos mostrar que, para quaisquer $q \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U da origem tal que se $y - x \in U$ então $q(u(y - x)) < \varepsilon$, ou ainda, $x \in U$ implica que $q(u(x)) < \varepsilon$.

Se tomarmos $U = B_p\left(0, \frac{\varepsilon}{M}\right)$, onde p e M são dados conforme a hipótese, é fácil ver que segue o resultado. ■

2.3 Metrização de ELC's

Nessa seção vamos estabelecer condições suficientes para que um ELC seja metrizable e dar alguns exemplos de ELC's metrizáveis. Primeiramente vejamos que, dada uma família enumerável Σ de seminormas, é possível obter outra família enumerável de seminormas que é monótona e que define a mesma topologia que Σ .

Observação 2.3.1 *Seja $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de seminormas que define a topologia do ELC E . Definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$*

$$p_1 = q_1, p_2 = \max\{q_1, q_2\}, p_3 = \max\{q_1, q_2, q_3\}, \dots$$

Então:

- (i) $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$;
- (ii) $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ define a topologia de E .

O item (i) decorre da maneira como as seminormas foram definidas. Vejamos a justificativa do item (ii).

Sejam τ e τ' as topologias definidas pelas seminormas $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Vamos mostrar que $\tau = \tau'$.

Sejam B um aberto básico de τ e $a \in B$. Vamos mostrar que existe um aberto básico na topologia τ' que está contido em B , ou seja, vamos mostrar que existem $j \in \mathbb{N}$ e $r_0 > 0$ tais que $B_{p_j}(a, r_0) \subset B$. Vamos mostrar para o caso em que $B = B_{q_j}(0, r)$, com $r > 0$, já que os outros casos decorrem deste, uma vez que a soma e a multiplicação por escalar são homeomorfismos em E . Como $q_j \leq p_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, pela Observação 2.1.7, item (iii), segue que $\tau \subset \tau'$.

Utilizaremos a mesma ideia do parágrafo acima. Sejam $B = B_{p_j}(a, r)$ um aberto básico de τ' e $b \in B$. Vamos mostrar que existe um aberto básico C na topologia τ que está contido em B . Tomemos $C = B_{q_1}(b, R) \cap B_{q_2}(b, R) \cap \dots \cap B_{q_j}(b, R)$, com $R = r - p_j(b - a)$. Temos que C é um aberto de τ uma vez que $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ define a topologia τ . Mostremos que $C \subset B$.

Seja $y \in C$, temos que $q_1(y - b) < R$, $q_2(y - b) < R, \dots, q_j(y - b) < R$. Para cada $k = 1, \dots, j$, vale

$$\begin{aligned} q_k(y - a) &\leq q_k(y - b + b - a) \\ &= q_k(y - b) + q_k(b - a) \\ &< R + p_k(b - a) \\ &\leq R + p_j(b - a) \\ &= r \end{aligned}$$

donde $q_k(y - a) < r$, para todo $k = 1, \dots, j$. Como $p_j = \max\{q_1, \dots, q_j\}$, segue que $p_j(y - a) < r$, e conseqüentemente $y \in B$.

Teorema 2.3.2 *Seja E um ELC Hausdorff. Se existe uma família enumerável de seminormas que define a topologia de E , então E é metrizável.*

Demonstração. À fim de mostrar que E é metrizable vamos mostrar que existe uma métrica em E tal que os abertos segundo essa métrica coincidem com os abertos segundo a topologia de E . Seja $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a família de seminormas que define a topologia de E . Suponhamos que $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ satisfaz as condições (i) e (ii) da observação acima. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} d: E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned} \quad ,$$

onde

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}. \quad (2.5)$$

Mostremos que essa aplicação define uma métrica em E . A série em (2.5) converge pois seu j -ésimo termo é menor ou igual à 2^{-j} .

Como $p_j(x-y) \geq 0$, segue que $d(x-y) \geq 0$, para quaisquer $x, y \in E$. Se $x = y$, então $p_j(x-y) = p_j(0) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Se $x \neq y$, como E é espaço de Hausdorff, pelo Teorema 2.2.14, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x-y) \neq 0$, conseqüentemente $d(x, y) \neq 0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sendo p_j uma seminorma em E , vale $p_j(x-y) = p_j(y-x)$, donde vale $d(x, y) = d(y, x)$, para quaisquer $x, y \in E$.

Resta ainda mostrar que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para quaisquer $x, y, z \in E$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)} \right).$$

Para isso é suficiente mostrar que, para quaisquer $x, y, z \in E$ vale

$$\frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)},$$

ou, simplificando um pouco a escrita, mostraremos que se $0 \leq a, b, c$ e $a \leq b+c$, vale

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Suponhamos $a > 0$. Das hipóteses acima segue que $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a}$, daí

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a} &= \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{b+c} + 1} \\ &= \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \\ &\leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}. \end{aligned}$$

Os outros casos são justificados de modo análogo à esse. Temos assim que d é uma métrica. Seja τ a topologia de E definida pelas seminormas p_j e τ' a topologia induzida pela métrica d em E . Mostremos que $\tau = \tau'$.

Primeiramente, dado um aberto em τ' mostraremos que existe um aberto em τ que está contido nele. Seja $B_d(0, r) = \{x \in E; d(x, 0) < r\}$, $r > 0$, um aberto de τ' . Tomemos $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^k}$ seja menor que r . Mostremos que $B_{p_{k+1}}\left(0, \frac{1}{2^{k+2}}\right) \subset B_d\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$.

Seja $x \in B_{p_{k+1}}\left(0, \frac{1}{2^{k+2}}\right)$. Da definição de p_k segue que, $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots \leq p_k(x) \leq p_{k+1}(x) < \frac{1}{2^{k+2}}$.

Como $\frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} \leq p_j(x)$ e $\frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

e

$$\sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+k+2}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Assim,

$$d(x, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

ou seja, $x \in B_d\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$. Assim $\tau' \subset \tau$.

Utilizando a mesma ideia, vamos mostrar que dado um aberto em τ existe um aberto em τ' que está contido nele. Assim, para cada p_j e cada $r > 0$, consideremos o aberto de τ , $B_{p_j}(0, r)$. Tomando $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^k}$ é menor que r , vamos mostrar que

$$B_d\left(0, \frac{1}{2^{j+k+1}}\right) \subset B_{p_j}(0, r).$$

Seja $x \in B_d\left(0, \frac{1}{2^{j+k+1}}\right)$, então $d(x, 0) < \frac{1}{2^{j+k+1}}$. Logo,

$$\frac{1}{2^j} \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} < \frac{1}{2^{j+k+1}} \Rightarrow \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} < \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow p_j(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Consequentemente,

$$p_j(x) < \frac{1}{2^{k+1} - 1} \leq \frac{1}{2^k} < r,$$

ou seja, $x \in B_{p_j}(0, r)$, o que prova que $\tau \subset \tau'$.

■

Vamos utilizar este teorema para mostrar que os espaços $C^m(\Omega)$, $m = 1, 2, \dots, \infty$ são metrizáveis.

Exemplo 2.3.3 *Os espaços $C^m(\Omega)$, $m = 1, 2, \dots, \infty$, são metrizáveis.*

De fato, vamos mostrar que $C^\infty(\Omega)$ é metrizável e os outros casos serão análogos. Já sabemos que $C^\infty(\Omega)$ é um ELC. Mostremos, primeiramente, que existe uma família enumerável de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Como Ω é um aberto de \mathbb{R}^n pelo Teorema A.2.1 existe uma sequência de compactos $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ que esgota Ω , ou seja, $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$.

Consideremos as duas famílias de seminormas em $C^\infty(\Omega)$ dadas por

$$\Sigma = \{p_{K,m}; K \subset\subset \Omega, m = 0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

e

$$\Sigma' = \{p_{K_j,m}; K_j \text{ esgotam } \Omega, m = 0, 1, 2, \dots, \infty\}.$$

Sejam τ e τ' as topologias definidas por Σ e Σ' , respectivamente. Mostremos que $\tau = \tau'$. Obviamente, o conjunto Σ contém o conjunto Σ' , donde $\tau' \subset \tau$.

Dado um aberto em τ , vamos mostrar que existe um aberto em τ' que está contido nele. Sejam $p \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, $B_p(f, \varepsilon) \in \tau$. Tomemos $\psi \in B_p(f, \varepsilon)$, vamos mostrar então, que existem $p' \in \Sigma'$ e $\varepsilon' > 0$ tais que $B_{p'}(\psi, \varepsilon') \subset B_p(f, \varepsilon)$.

Existem $K \subset\subset \Omega$ e $m = 0, 1, \dots, \infty$, tal que $p = p_{K,m}$. Além disso, pelo Teorema A.2.1, existe $j \in \mathbb{N}$ de modo que $K \subset K_j$. Temos então que vale

$$p_{K,m}(f) \leq p_{K_j,m}(f), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Tomemos $p' = p_{K_j,m}$ e $\varepsilon' = \varepsilon - p_{K,m}(f - \psi)$. Assim, se $\varphi \in B_{p'}(\psi, \varepsilon')$, utilizando o item (ii) da definição de seminorma é fácil ver que, $\varphi \in B_p(f, \varepsilon)$, completando a prova de que $\tau \subset \tau'$. Assim $\tau' = \tau$, donde existe uma família enumerável de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$.

Vamos mostrar agora que $C^m(\Omega)$, para todo $m = 1, 2, \dots, \infty$, é um espaço de Hausdorff, utilizando o Teorema 2.2.14.

Se $f \equiv 0$ então $p_{K_j,m}(f) = 0$, para todo $K_j \subset\subset \Omega$. Como $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$, $p_{K_j,m}(f) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Assim, $0 \in \bigcap_{p_{K_j,m} \in \Sigma'} p_{K_j,m}^{-1}(\{0\})$.

Seja $f \in \bigcap_{p_{K_j,m} \in \Sigma'} p_{K_j,m}^{-1}(\{0\})$. Para todo $K_j \subset\subset \Omega$ e $m = 0, 1, \dots, \infty$, vale $p_{K_j,m}(f) = 0$, donde $f \equiv 0$ em Ω . Logo, $\bigcap_{p_{K_j,m} \in \Sigma'} p_{K_j,m}^{-1}(\{0\}) \subset \{0\}$.

Portanto, $C^\infty(\Omega)$ é um espaço de Hausdorff e pelo Teorema 2.3.2 $C^\infty(\Omega)$ é metrizável.

2.4 Algumas propriedades do espaço $C^\infty(\Omega)$

No Exemplo 2.2.13 vimos uma família de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Nesta seção apresentamos algumas propriedades topológicas úteis deste espaço, começando com uma importante caracterização de convergência em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.1 *A sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para $\partial^\alpha \phi$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω .*

Demonstração. Utilizando a família de seminormas do Exemplo 2.2.13, segue do Teorema 2.2.8 que ϕ_j converge para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, dados $p \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow p(\phi_j - \phi) < \varepsilon.$$

Por definição, existem $K \subset\subset \Omega$ e $m = 0, 1, \dots$, tais que $p = p_{K,m}$, donde

$$\begin{aligned} j > j_0 &\Rightarrow p_{K,m}(\phi_j - \phi) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \phi_j - \partial^\alpha \phi| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí segue que a sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para $\partial^\alpha \phi$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω . ■

A convergência em $C^m(\Omega)$, para todo $m = 0, 1, \dots$, tem caracterização análoga à feita acima para $C^\infty(\Omega)$. O próximo resultado nos fornece outra propriedade importante dos espaços $C^m(\Omega)$, para todo $m = 0, 1, \dots, \infty$, que é a completude.

Teorema 2.4.2 *Para cada $m = 0, 1, \dots, \infty$, o espaço $C^m(\Omega)$ é completo.*

Demonstração. Faremos a demonstração utilizando indução sobre m . Seja Σ a família dada no exemplo 2.2.12. Para $m = 0$, usaremos o fato de que $C(K)$ é completo, para todo $K \subset\subset \Omega$ com a métrica do supremo.

Sejam $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de compactos que esgota Ω e (ϕ_k) uma sequência de Cauchy em $C(\Omega)$. Pela definição da topologia em $C(\Omega)$ segue que (ϕ_k) é uma sequência de Cauchy em $C(K_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como cada $C(K_j)$ é completo, segue que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $(\psi_j) \subset K_j$ tal que (ϕ_k) converge para ψ_j em K_j .

Como os compactos K_j são encaixados e o limite de uma sequência é único, segue que (ϕ_k) converge para ψ , onde $\psi|_{K_j} = \psi_j$, e conseqüentemente $C(K)$ é completo.

Suponhamos que $C^m(\Omega)$ é completo e mostremos que $C^{m+1}(\Omega)$ é completo. Seja (ϕ_k) uma sequência de Cauchy em $C^{m+1}(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $p_j \in \Sigma$

tais que

$$\begin{aligned} l, k > k_0 &\Rightarrow \phi_k - \phi_l \in B_{p_j}(0, \varepsilon) \\ &\Rightarrow \sup_{|\alpha| \leq m+1, y \in K_j} |\partial^\alpha \phi_k(y) - \partial^\alpha \phi_l(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq m+1$, suponhamos que $\alpha = \beta - e_i$, com $|\beta| \leq m$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Da equação acima ficamos com:

$$l, k > k_0 \Rightarrow \sup_{y \in K_j} |\partial^\beta \phi_k(y) - \partial^\beta \phi_l(y)| < \varepsilon.$$

Da hipótese de indução segue que existe $\phi \in C^m(\Omega)$ tal que ϕ_k converge para ϕ em $C^m(\Omega)$. Em particular, $(\partial^\beta \phi_k)$ converge uniformemente em K_j para $\partial^\beta \phi$.

Também vale

$$l, k > k_0 \Rightarrow \sup_{|\beta| \leq m, y \in K_j} |\partial_i \partial^\beta \phi_k(y) - \partial_i \partial^\beta \phi_l(y)| < \varepsilon,$$

ou seja, a sequência $\partial_i \partial^\beta \phi_k$ é uma sequência de Cauchy em $C(\Omega)$. Portanto, existe $\psi \in C(\Omega)$ tal que $\partial_i \partial^\beta \phi_k$ converge para ψ uniformemente em K_j .

Das equações acima podemos concluir que $\partial_i \partial^\beta \phi = \psi$, ou seja, $\partial^\alpha \phi = \psi$, e consequentemente, $C^{m+1}(\Omega)$ é completo. ■

Definição 2.4.3 *Seja E um espaço vetorial. Uma métrica d em E é dita invariante se satisfaz*

$$d(x+z, y+z) = d(x, y), \forall x, y, z \in E.$$

Definição 2.4.4 *Se E é um espaço vetorial que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) E é um ELC,
- (ii) a topologia de E é induzida por uma métrica invariante, e
- (iii) E é completo,

dizemos que E é um espaço de Fréchet.

Exemplo 2.4.5 *Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.*

Um exemplo mais interessante dentro dos nossos propósitos decorre do Exemplo 2.3.3 combinado com os teoremas 2.3.2 e 2.4.2:

Exemplo 2.4.6 *Para cada $m = 0, 1, \dots, \infty$, o espaço $C^m(\Omega)$ é um espaço de Fréchet.*

O próximo resultado nos fornece condições necessárias e suficientes para que um funcional em $C^\infty(\Omega)$ seja contínuo.

Teorema 2.4.7 *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) u é contínuo;
- (ii) para toda sequência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$ tem-se que $u(\phi_j) \rightarrow 0$ em \mathbb{K} ;
- (iii) existem $K \subset\subset \Omega, C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \forall \phi \in C^\infty(\Omega). \quad (2.6)$$

Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii) Como $C^\infty(\Omega)$ é metrizável temos que existe uma métrica d que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Assim (ϕ_j) , convergir para 0 em $C^\infty(\Omega)$ é o mesmo que $d(\phi_j - 0) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, e $(u(\phi_j))$ convergir para 0 em \mathbb{K} é o mesmo que $|u(\phi_j) - 0| < \delta$, para todo $\delta > 0$. Portanto, o item (ii) equivale à mostrar que u é contínuo na origem. Do Teorema 2.2.17 segue, portanto, a equivalência (i) \Leftrightarrow (ii).

(i) \Leftrightarrow (iii) Mostremos que esta equivalência decorre do Teorema 2.2.17 para $E = C^\infty(\Omega)$, $F = \mathbb{K}$, Σ_1 a família de seminormas que define a topologia de $C^\infty(\Omega)$ e $\Sigma_2 = \{|\cdot|\}$. Para isso, vamos mostrar que o item (iii) é equivalente ao item (iv) do Teorema 2.2.17.

Dado $q \in \Sigma_2$, temos que $q = |\cdot|$ e assim, $q \circ u = |u|$. Para $p \in \Sigma_1$, temos que existem $K \subset\subset \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$ de modo que $p = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|$, para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Assim, para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$,

$$q \circ u(\phi) \leq M \cdot p(\phi) \Leftrightarrow |u(\phi)| \leq M \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

Para concluir o resultado basta tomar $C = M$. ■

2.5 A topologia de $C_c^\infty(\Omega)$

Para cada $K \subset\subset \Omega$, o símbolo $C_c^\infty(K)$ denota o subespaço constituído pelas funções de $C^\infty(\Omega)$ cujo suporte está contido em K . Nesta seção introduzimos uma topologia localmente convexa em $C_c^\infty(\Omega)$ a partir das topologias localmente convexas definidas em cada $C_c^\infty(K)$. Obviamente vale:

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset\subset \Omega} C_c^\infty(K).$$

Em cada $C_c^\infty(K)$ consideremos a topologia localmente convexa definida pela família de seminormas $\Sigma_K = \{p_{K,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, sendo:

$$p_{K,m}(\phi) = \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \quad \phi \in C_c^\infty(K). \quad (2.7)$$

Consideremos os seguintes subconjuntos de $C_c^\infty(K)$

$$\mathcal{B}_0 = \{V \subset C_c^\infty(\Omega); V \text{ é convexo, equilibrado e } V \cap C_c^\infty(K) \text{ é aberto de } C_c^\infty(K), \forall K \subset\subset \Omega\}$$

e

$$\mathcal{B} = \{\phi + V; \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } V \in \mathcal{B}_0\}.$$

No próximo teorema vamos estabelecer a topologia de $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.5.1 (i) \mathcal{B} é base para uma topologia τ em $C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $C_c^\infty(\Omega)$ equipado com a topologia τ é um ELC;

(iii) para cada $K \subset\subset \Omega$ temos que a topologia de $C_c^\infty(K)$ coincide com a topologia de subespaço induzida por $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(K)$.

Demonstração. (i) Dados $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_0$ e $\phi \in (\phi_1 + V_1) \cap (\phi_2 + V_2)$, mostraremos que existe $V \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$\phi + V \subset (\phi_1 + V_1) \cap (\phi_2 + V_2). \quad (2.8)$$

Consideremos $K \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi_1), S(\phi_2), S(\phi) \subset K$. Logo, $\phi_1, \phi_2, \phi \in C_c^\infty(K)$ e sendo $V_1 \cap C_c^\infty(K)$ aberto de $C_c^\infty(K)$, $\phi - \phi_1 \in V_1$. Além disso, a multiplicação por escalar é contínua em $C_c^\infty(K)$ donde temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\lambda - 1| < \delta_1 \Rightarrow \lambda(\phi - \phi_1) \in V_1 \Rightarrow \phi - \phi_1 \in \frac{1}{\lambda}V_1.$$

Fixando $\lambda = \lambda_1$ obtemos

$$\phi - \phi_1 \in \frac{1}{\lambda_1}V_1,$$

e sendo V_1 convexo, pelo Teorema 2.1.9, item (iv), segue que

$$\phi - \phi_1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \subset \frac{1}{\lambda_1}V_1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 = V_1,$$

Daí resulta que

$$\phi + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \subset \phi_1 + V_1.$$

Analogamente ao raciocínio anterior, utilizando agora o fato de que $\phi \in \phi_2 + V_2$, obtemos λ_2 tal que

$$\phi + \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)V_2 \subset \phi_2 + V_2.$$

Tomando

$$V = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)V_1 \cap \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)V_2,$$

obtemos (2.8).

(ii) Começaremos mostrando que a soma é contínua em $C_c^\infty(\Omega)$. Para isso, dados $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $V \in \mathcal{B}_0$, devemos exibir $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_0$ tais que

$$(\phi_1 + V_1) + (\phi_2 + V_2) \subset \phi_1 + \phi_2 + V.$$

Mas isso, decorre diretamente da convexidade de V e do Teorema 2.1.9, item (iv), tomando

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V.$$

Mostraremos agora que a multiplicação por escalar é contínua em $C_c^\infty(\Omega)$. Dados $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $V \in \mathcal{B}_0$, vamos exibir $\delta > 0$ e $U \in \mathcal{B}_0$ tais que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \phi \in \phi_0 + U \Rightarrow \lambda\phi - \lambda_0\phi_0 \in V. \quad (2.9)$$

Seja $K \subset\subset \Omega$ tal que $\phi_0 \in C_c^\infty(K)$. Como V é equilibrado segue que $0 \in V$ e dessa forma $0\phi_0 \in V$. Pela continuidade da multiplicação por escalar em $C_c^\infty(K)$ decorre que existe $\delta > 0$ tal que $\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}V$, o que implica pelo fato de V ser equilibrado que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\delta} < 1 \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{\delta}\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}V,$$

isto é,

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)\phi_0 \in \frac{1}{2}V. \quad (2.10)$$

Escolhendo $c > 0$ de modo que $c(|\lambda_0| + \delta) = \frac{1}{2}$, vem que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow |\lambda| - |\lambda_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\lambda}{|\lambda_0| + \delta} \right| < 1.$$

Da expressão anterior e do fato de V ser equilibrado, podemos inferir que cV é equilibrado e daí vale

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \phi \in \phi_0 + cV \Rightarrow \frac{\lambda}{|\lambda_0| + \delta}(\phi - \phi_0) \in cV,$$

e então,

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \phi \in \phi_0 + cV \Rightarrow \lambda(\phi - \phi_0) \in \frac{1}{2}V.$$

Combinando o fato de que

$$\lambda\phi - \lambda_0\phi_0 = \lambda(\phi - \phi_0) + (\lambda - \lambda_0)\phi_0,$$

com a relação (2.10) e a convexidade de V obtemos a implicação (2.9) com $U = cV$.

Para concluir que $C_c^\infty(\Omega)$ é um ELC, basta observarmos que, por definição, todo $V \in \mathcal{B}_0$ é um conjunto convexo.

(iii) Sejam τ_K a topologia de $C_c^\infty(K)$ e τ'_K a topologia de $C_c^\infty(K)$ como subespaço de $C_c^\infty(\Omega)$. Pela definição de \mathcal{B}_0 , segue que $\mathcal{B}_0 \subset \tau_K$, logo $\mathcal{B} \subset \tau_K$ e dessa forma $\tau'_K \subset \tau_K$.

Para provarmos a inclusão contrária, consideremos $E \in \tau_K$ qualquer. Vamos mostrar que existe um aberto V de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $E = V \cap C_c^\infty(K)$. Dada $\phi \in E$, tomemos $K \subset\subset \Omega$, tal que $\phi \in C_c^\infty(K)$. Logo da definição de τ_K , existem $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$B_{p_{K,m}}(\phi, \varepsilon) = \{\psi \in C_c^\infty(K); p_{K,m}(\psi - \phi) < \varepsilon\} \subset E.$$

Definimos o seguinte conjunto aberto de $C_c^\infty(\Omega)$

$$V_\phi = \{\psi \in C_c^\infty(\Omega); p_{K,m}(\psi - \phi) < \varepsilon\}.$$

Notemos que

$$V_\phi \cap C_c^\infty(K) = B_{p_{K,m}}(\phi, \varepsilon).$$

Logo, fazendo ϕ percorrer E obtemos

$$\left(\bigcup_{\phi \in E} V_\phi \right) \cap C_c^\infty(K) = E.$$

Desta forma, basta considerarmos $V = \bigcup_{\phi \in E} V_\phi$, o que conclui a prova de que $\tau_K \subset \tau'_K$.

Assim, a topologia de $C_c^\infty(K)$ coincide com a topologia de subespaço induzida por $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(K)$. ■

À seguir vamos caracterizar a convergência em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.5.2 *Uma sequência (ϕ_j) converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe $K \subset\subset \Omega$ tal que:*

- (i) *o suporte de toda função ϕ_j está contido em K ;*
- (ii) *para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para zero uniformemente em K .*

Demonstração. (\Rightarrow) (i) Seja $(K'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de compactos que esgota Ω . Da hipótese temos que, dada qualquer vizinhança V da origem em $C_c^\infty(\Omega)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in V.$$

Suponhamos por absurdo que não vale o item (i). Assim, existe ϕ_1 tal que $S(\phi_1)$ não está contido em K'_1 . Logo, existe $x_1 \in S(\phi_1) - K'_1$. Como K'_1 é compacto, existe uma vizinhança V_1 de x_1 tal que $V_1 \cap K'_1 = \emptyset$. Mas $S(\phi_1)$ é fechado, donde existe $y_1 \in V_1$ satisfazendo $\phi_1(y_1) \neq 0$.

Tomemos $K_2 = K'_2 \cup \{y_1\}$. Existe ϕ_2 tal que $S(\phi_2)$ não está contido em K_2 , donde existe $x_2 \in S(\phi_2)$ mas, $x_2 \notin K_2$. Do fato de K_2 ser compacto, existe V_2 vizinhança de x_2 tal que $\phi_2(y_2) \neq 0$. Utilizando esse argumento, obtemos uma subsequência ϕ_j , uma sequência K_j de compactos que esgota Ω e uma sequência (y_j) de pontos tal que

$$y_j \in K_{j+1} - K_j \text{ e } \phi_j(y_j) \neq 0, \forall j \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

Definimos a aplicação

$$p(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in (K_{j+1} - K_j)} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|}.$$

Pelo Teorema A.2.1, para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_1 + 1$ implica que $S(\phi) \subset K_j$, ou seja, a soma acima tem no máximo $j_1 + 1$ parcelas não nulas. Logo, p está bem definida. Além disso, é fácil ver que p é uma seminorma em $C_c^\infty(\Omega)$.

Mostraremos através do Teorema 2.5.1 que $B_p(0, 1)$ é uma vizinhança da origem em $C_c^\infty(\Omega)$. Dado $K \subset\subset \Omega$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_l$, então, para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$ vale

$$\begin{aligned} p(\phi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in (K_{j+1} - K_j)} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} = \sum_{j=1}^l \sup_{x \in (K_{j+1} - K_j)} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} \\ &\leq \sum_{j=1}^l \sup_{x \in K} \frac{|\phi(x)|}{|\phi_j(y_j)|} \\ &\leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| \cdot \sum_{j=1}^l \frac{1}{|\phi_j(y_j)|}, \end{aligned}$$

fazendo $M = \sum_{j=1}^l \frac{1}{|\phi_j(y_j)|}$, obtemos $p(\phi) \leq M \cdot \sup_{x \in K} |\phi(x)|$.

Logo, $p(\phi) \leq M \cdot p_{K,0}(\phi)$, para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$, onde $p_{K,0}$ é uma seminorma em $C_c^\infty(K)$. Mas isso implica que $M \cdot B_{p_{K,0}}(0, 1) \subset B_p(0, 1) \cap C_c^\infty(K)$. Assim $B_p(0, 1) \cap C_c^\infty(K)$ é uma vizinhança da origem em $C_c^\infty(K)$. Logo, $B_p(0, 1) \in \mathcal{B}_0$. No entanto, é fácil ver

que $\phi_j \notin B_p(0, 1)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, pois (2.11) implica $\sup_{x \in (K_{j+1} - K_j)} \frac{|\phi_j(x)|}{|\phi_j(y_j)|} \geq 1$, e isso contradiz o fato de (ϕ_j) convergir para zero em $C_c^\infty(\Omega)$.

(ii) Do item (i) temos que existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\phi_j \in C_c^\infty(K)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e tomemos $m = |\alpha|$. Seja

$$B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon) = \{\psi \in C_c^\infty(K); p_{K,m}(\psi) < \varepsilon\}$$

aberto de $C_c^\infty(K)$. Pelo Teorema 2.5.1 existe um aberto V de $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon) = C_c^\infty(K) \cap V$. Além disso, por hipótese, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0$ implica em $\phi_j \in V$.

Logo, se $j > j_0$ então $\phi_j \in C_c^\infty(K) \cap V = B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon)$. Assim, $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_j(x)| < \varepsilon$, ou seja, a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para zero uniformemente em K .

(\Leftarrow) Vamos mostrar que (ϕ_j) converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, dada uma vizinhança V da origem em $C_c^\infty(\Omega)$, mostremos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_0$, então $\phi_j \in V$.

Pelo item (i), $\phi_j \in C_c^\infty(K)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Existem $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon) \subset C_c^\infty(K) \cap V \subset V$.

Do item (ii) temos que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\alpha| \leq m$, existe $j_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_\alpha$, então $\phi_j \in B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon)$. Tomando $j_0 = \max\{j_\alpha; |\alpha| \leq m\}$, obtemos

$$j > j_0 \Rightarrow \phi_j \in B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon) \subset V.$$

■

Obtemos o seguinte corolário que decorre diretamente do teorema, uma vez que, se (ϕ_j) converge para ϕ , então $(\phi_j - \phi)$ converge para zero.

Corolário 2.5.3 *Uma sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C_c^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe $K \subset\subset \Omega$ tal que:*

(i) *o suporte de toda função ϕ_j está contido em K ;*

(ii) *para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge para $\partial^\alpha \phi$ uniformemente em K .*

Abaixo veremos que $C_c^\infty(\Omega)$ não é metrizável, caracterizando assim a propriedade de que nem todo ELC é metrizável.

Observação 2.5.4 *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ não é metrizável.*

De fato, suponhamos, por absurdo, que existe uma métrica d em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que para toda sequência (ϕ_j) em $C_c^\infty(\Omega)$ que converge para zero, vale $d(\phi_j, 0) \rightarrow 0$.

Seja $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de compactos que esgota Ω e pelo Teorema A.2.9, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j = 1$ em K_j . Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, mostremos que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \phi_j = 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, utilizando o Teorema 2.5.2.

Obviamente $S(\delta \phi_j) \subset S(\phi_j)$, para todo $\delta > 0$. Além disso, considerando $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos que

$$\sup_{x \in S(\phi_j)} |\partial^\alpha \delta \phi_j(x)| = \delta \sup_{x \in S(\phi_j)} |\partial^\alpha \phi_j(x)| \rightarrow 0,$$

quando $\delta \rightarrow 0$, uma vez que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Conforme supomos anteriormente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} d(\delta \phi_j, 0) = 0,$$

e dessa forma para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\delta_j > 0$ tal que $d(\delta_j \phi_j, 0) < \frac{1}{j}$. Logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(\delta_j \phi_j, 0) = 0.$$

No entanto, a sequência $(\delta_j \phi_j)$ não pode convergir para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ pois $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S(\delta_j \phi_j) = \Omega$ e daí não existe compacto que contenha o suporte de toda ϕ_j . Portanto, $C_c^\infty(\Omega)$ não é metrizável.

Vejamos agora duas propriedades que relacionam os espaços $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.5.5 *A aplicação identidade $i : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ é contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.17, como i é linear, basta mostrar que i é contínua na origem. Dado o aberto $B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon)$ em $C^\infty(\Omega)$, sendo $K \subset\subset \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que $i^{-1}(B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon))$ é um aberto de $C_c^\infty(\Omega)$. Para isso, utilizando o Teorema 2.5.1, vamos mostrar que $i^{-1}(B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon)) \cap C_c^\infty(K)$ é um aberto de $C_c^\infty(K)$.

Mas $i^{-1}(B_{p_{K,m}}(0, \varepsilon)) \cap C_c^\infty(K) = \{\phi \in C_c^\infty(K); p_{K,m}(\phi) < \varepsilon\}$, e esse conjunto é um aberto de $C_c^\infty(K)$. Portanto, i é contínua. ■

Teorema 2.5.6 *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$, isto é, para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$ existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \rightarrow \phi$ em $C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de compactos que esgota Ω . Pelo Teorema A.2.9, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $\psi_j = 1$ em uma vizinhança de K_j .

Seja $\phi \in C^\infty(\Omega)$, então $\phi \psi_j \in C_c^\infty(\Omega)$. Mostremos que $\phi \psi_j \rightarrow \phi$ em $C^\infty(\Omega)$.

Fixemos $K \subset\subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Temos que

$$\phi \psi_j - \phi = \phi(\psi_j - 1) = 0 \text{ em } K_j, \forall j \in \mathbb{N},$$

donde,

$$\partial^\alpha \phi \psi_j - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } K_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{j_0}$, então para todo $j > j_0$, $K \subset K_j$ e daí,

$$\partial^\alpha \phi \psi_j - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } K,$$

donde, $\partial^\alpha \phi \psi_j \rightarrow \partial^\alpha \phi$ em K , ou seja, $\phi \psi_j \rightarrow \phi$ em $C^\infty(\Omega)$. ■

Teorema 2.5.7 *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear u em $C_c^\infty(\Omega)$ são equivalentes:*

- (i) u é contínuo na origem;
- (ii) $u|_{C_c^\infty(K)}$ é contínuo na origem, para todo $K \subset\subset \Omega$.

Demonstração. Basta observarmos que dados $\varepsilon > 0$ e $K \subset\subset \Omega$,

$$(u|_{C_c^\infty(K)})^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = u^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \cap C_c^\infty(K).$$
■

Podemos caracterizar a continuidade dos funcionais lineares em $C_c^\infty(\Omega)$ através de seqüências, analogamente ao feito no Teorema 2.4.7 para o espaço $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.5.8 *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear u em $C_c^\infty(\Omega)$ são equivalentes:*

- (i) u é contínuo;
- (ii) para toda seqüência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ temos que $u(\phi_j) \rightarrow 0$ em \mathbb{K} ;
- (iii) para todo $K \subset\subset \Omega$, existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Esta implicação é válida para qualquer espaço topológico.

(ii) \Rightarrow (iii) Suponhamos por absurdo que (iii) não seja verdadeira. Desta forma, para $C = m = j$, podemos encontrar ψ_j tal que $u(\psi_j) = 1$, $S(\psi_j) \subset K$ e $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \psi_j| < \frac{1}{j}$. Então (ψ_j) converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ mas $(u(\psi_j))$ não converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$, o que é uma contradição.

(iii) \Rightarrow (i) O item (iii) implica que a condição (iv) do Teorema 2.2.17 é válida. Assim, decorre que $u|_{C_c^\infty(K)}$ é contínuo, para todo $K \subset\subset \Omega$, em particular é contínuo na origem, donde pelo Teorema 2.5.7, u é contínuo na origem e, portanto, u é contínuo. ■

2.6 Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção abordamos o Teorema de Hahn-Banach e uma consequência dele que será útil nos próximos capítulos. Utilizamos [15] como referência para esse estudo.

Definição 2.6.1 *Seja E um EVT sobre o corpo \mathbb{K} . O dual E' de E é o espaço vetorial composto de todas as aplicações lineares e contínuas definidas em E , ou seja,*

$$E' = \{u : E \rightarrow \mathbb{K}; u \text{ é uma aplicação linear e contínua}\}.$$

Vejamos algumas observações importantes para a compreensão ao Teorema de Hahn-Banach. Obviamente todo espaço vetorial complexo é também um espaço vetorial real e é conveniente diferenciar aqui o seguinte: um funcional Λ em um espaço vetorial complexo E é chamado real-linear (complexo-linear) se $\Lambda(\alpha x) = \alpha \Lambda(x)$, para cada $x \in E$ e cada escalar real (complexo) α .

Além disso, se u é a parte real de um funcional complexo-linear f em E , então u é real-linear e $f(x) = u(x) - iu(ix)$, para todo $x \in E$, uma vez que, se $z \in \mathbb{C}$ então $z = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Re} (iz)$. Reciprocamente, se $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ é real-linear em um espaço vetorial complexo E então $f(x) = u(x) - iu(ix)$ é complexo-linear.

Suponhamos então que E é um EVT complexo. As observações feitas acima garantem que um funcional complexo-linear em E está em E' se, e somente se, sua parte real é contínua e todo funcional real-linear contínuo $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ é a parte real de uma única $f \in E'$.

Vamos ver primeiramente a versão real do Teorema de Hahn-Banach e posteriormente a versão complexa.

Teorema 2.6.2 (Teorema de Hahn-Banach Real) *Sejam E um espaço vetorial real e M um subespaço de E . Suponhamos que a aplicação $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz:*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad e \quad p(tx) = tp(x),$$

para todo $x, y \in E$ e $t \geq 0$.

Além disso, suponhamos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda(x) = f(x), \quad \forall x \in M$$

e

$$-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Demonstração. Suponhamos $E \neq M$, seja $x_1 \in E$ tal que $x_1 \notin M$. Definimos

$$M_1 = \{x + tx_1; x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Obviamente M é um espaço vetorial. Se $x, y \in M$, então temos

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

e, consequentemente

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y).$$

Seja α o supremo do lado esquerdo da relação acima, à medida que x percorre M .

Então

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1), \quad \forall x \in M \quad (2.12)$$

e

$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_1), \quad \forall y \in M. \quad (2.13)$$

Definimos em M_1 a seguinte aplicação

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha,$$

para cada $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que $f_1 = f$ em M e f_1 é linear em M_1 .

Tomando $t > 0$ e trocando x por $t^{-1}x$ na equação (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} f(t^{-1}x) - \alpha &\leq p(t^{-1}x - x_1) \\ tf\left(\frac{1}{t}x\right) - t\alpha &\leq tp\left(\frac{1}{t}x - x_1\right) \\ f(x) - t\alpha &\leq p(x - tx_1) \\ f_1(x - tx_1) &\leq p(x - tx_1). \end{aligned}$$

Analogamente, trocando y por $t^{-1}y$ na equação (2.13), obtemos:

$$f_1(y + tx_1) \leq p(y + tx_1).$$

Isto prova que $f_1 \leq p$ em M_1 .

Seja \mathcal{P} a coleção de todos pares ordenados (M', f') , onde M' é um subespaço de E que contém M e f' é um funcional linear em M' que estende f e satisfaz $f' \leq p$ em M' . Vamos estabelecer uma ordenação parcial em \mathcal{P} pondo $(M', f') \leq (M'', f'')$ sempre que $M' \subset M''$ e $f' = f''$ em M' .

Seja $C \subset \mathcal{P}$ um subconjunto totalmente ordenado. Para cada $(M', f') \in C$, definimos $g(x) = f'(x)$, para cada $x \in M'$. Temos que g é um funcional linear cujo domínio é $M_g = \bigcup_{(M', f') \in C} M'$ o qual é um espaço vetorial. É fácil ver que g está bem definida. Além disso, para todo $(M', f') \in C$ vale $(M', f') \leq (M_g, g)$, uma vez que $M' \subset M_g$. Portanto, (M_g, g) é uma cota superior para o conjunto C .

Pelo Lema de Zorn existe $(M_\Lambda, \Lambda) \in \mathcal{P}$ elemento máximo de \mathcal{P} . Assim, Λ é uma extensão de f que satisfaz $\Lambda \leq p$ em M_Λ . Mostremos que $M_\Lambda = E$.

Suponhamos que $M_\Lambda \neq E$, então pela primeira parte da demonstração existiria uma extensão própria de Λ que pertenceria à \mathcal{P} , mas isso contradiz a minimalidade de Λ . Assim, $M_\Lambda = E$.

Por fim, como $\Lambda \leq p$ em E segue que

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x),$$

para todo $x \in E$.

Concluimos então que $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\Lambda(x) = f(x)$, para todo $x \in M$ e $-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. ■

Teorema 2.6.3 (Teorema de Hahn-Banach Complexo) *Sejam M um subespaço de um espaço vetorial E , p uma seminorma em E e f um funcional linear em M que satisfaz $|f(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in M$. Então existe uma extensão linear Λ de f em E que satisfaz $|\Lambda(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. Caso o corpo de escalar for \mathbb{R} recaímos no caso anterior, pois p agora satisfaz $p(-x) = p(x)$. Vamos assumir que o corpo de escalar é \mathbb{C} . Colocando $u = \operatorname{Re} f$, pela versão real provada acima temos que existe um funcional real-linear U em E tal que $U = u$ em M e $U \leq p$ em E .

Seja Λ um funcional complexo-linear em E cuja parte real é U . Conforme o que colocamos antes da demonstração da versão real do Teorema de Hahn-Banach, concluimos que $\Lambda = f$ em M . Além disso, para cada $x \in E$ corresponde um $\alpha \in \mathbb{C}$, com $|\alpha| = 1$, tal que $\alpha\Lambda(x) = |\Lambda(x)|$. Assim,

$$|\Lambda(x)| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

■

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [15].

Teorema 2.6.4 *Sejam E um EVT e $A, B \subset E$ conjuntos disjuntos, não-vazios e convexos.*

(i) *Se A é aberto, então existem $\Lambda \in E'$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\operatorname{Re} \Lambda(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} \Lambda(y),$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$.

(ii) Se A é compacto, B é fechado e E é localmente convexo, então existem $\Lambda \in E'$, γ_1 e γ_2 constantes reais tais que

$$\operatorname{Re} \Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda(y),$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$.

O próximo resultado nos dá uma condição para que um ponto $x_0 \in E$ esteja no fecho de um subespaço M de E .

Teorema 2.6.5 *Sejam E um ELC, M um subespaço de E e $x_0 \in E$. Se $x_0 \notin \overline{M}$, então existe $\Lambda \in E'$ tal que $\Lambda(x_0) = 1$ e $\Lambda(x) = 0$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Aplicando o item (ii) do Teorema 2.6.4 com $A = \{x_0\}$ e $B = \overline{M}$, obtemos $\Lambda_1 \in E'$ tal que $\Lambda_1(x_0)$ e $\Lambda_1(M)$ são disjuntos. Assim, $\Lambda_1(M)$ é um subespaço próprio do espaço de escalares. Mas o único subespaço próprio de \mathbb{K} é $\{0\}$. Logo, $\Lambda_1(M) = \{0\}$ e $\Lambda_1(x_0) \neq 0$. Se dividirmos o funcional Λ_1 por $\Lambda_1(x_0)$ obtemos um novo funcional Λ que satisfaz as condições desejadas. ■

2.7 Topologia Fraca em um EVT

A definição da topologia fraca apresentada nessa seção segue [15].

Definição 2.7.1 *Seja E um EVT, cuja topologia será chamada de topologia original de E , e E' o seu dual. Definimos a topologia fraca em E como a topologia menos fina na qual cada elemento de E' é contínuo. Assim, uma sub-base da topologia fraca é dada por*

$$\{u^{-1}(U); u \in E', U \subset K \text{ aberto de } \mathbb{K}\}.$$

Resulta imediatamente da Definição 2.7.1 que a topologia original é mais fina do que a topologia fraca da E . Pela linearidade dos elementos de E' segue que a topologia fraca de E é invariante por translação.

Como uma sub-base local na origem para a topologia de \mathbb{K} é dada por $\{B(0, \epsilon); \epsilon > 0\}$, segue que uma base local na origem para a topologia fraca de E é dada por

$$\{u^{-1}(B(0, \epsilon)); u \in E', \epsilon > 0\}.$$

Mas observe que

$$u^{-1}(B(0, \epsilon)) = \{x \in E; |u(x)| < \epsilon\}.$$

Assim, definindo para cada $u \in E'$ a seminorma em E dada por

$$p_u(x) = |u(x)|, \quad \forall x \in E,$$

temos que a topologia fraca de E é a topologia localmente convexa em E definida pela família de seminormas

$$\Sigma = \{p_u; u \in E'\}.$$

Definição 2.7.2 Para cada $A \subset E$ definimos:

- (i) $\text{span } A$ é o subespaço gerado por A ;
- (ii) $A^\perp = \{u \in E'; u(a) = 0, \forall a \in A\}$.

Lema 2.7.3 Seja E um EVT. Aqui \overline{A} denotará o fecho de A na topologia fraca de E . Valem as seguintes afirmações:

- (i) Se $A \subset B \subset E$, então $B^\perp \subset A^\perp$;
- (ii) $E^\perp = \{0\}$;
- (iii) $A^\perp = (\text{span } A)^\perp = (\overline{\text{span } A})^\perp$;
- (iv) se A é um subespaço vetorial de E , então

$$A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{A} = E.$$

Demonstração. Os itens (i) e (ii) são de fácil verificação.

(iii) Como $A \subset \text{span } A$, pelo item (i) vale, $(\text{span } A)^\perp \subset A^\perp$. Mostremos que vale a inclusão contrária. Sejam $u \in A^\perp$ e $b \in \text{span } A$. Temos que b é uma combinação linear de elementos de A e uma vez que u é linear, segue que $u(b) = 0$. Valendo portanto, $A^\perp = (\text{span } A)^\perp$.

Vale a inclusão $\text{span } A \subset \overline{\text{span } A}$, donde pelo item (i) segue que $(\overline{\text{span } A})^\perp \subset (\text{span } A)^\perp$. Mostremos a inclusão contrária.

Sejam $u \in (\text{span } A)^\perp$ e $b \in \overline{\text{span } A}$. Suponhamos, por absurdo, que $u(b) \neq 0$. Pela continuidade na topologia fraca, existe uma vizinhança V de b na topologia fraca tal que $u(x) \neq 0$, para todo $x \in V$. Mas existe $a \in \text{span } A$ tal que $a \in V$ e daí $u(a) = 0$, o que é um absurdo.

(iv) (\Rightarrow) Suponhamos, por absurdo, $\overline{A} \neq E$. Assim, existe $x_0 \notin \overline{A}$ tal que $x_0 \in E$. Então, pelo Teorema 2.6.5, existe $u \in E'$ tal que $u(x_0) = 1$, mas $u(x) = 0$, para todo $x \in A$. Assim, $u \in A^\perp$ o que implica em $u \equiv 0$, o que é um absurdo.

(\Leftarrow) Seja $u \in A^\perp$, então $u(a) = 0$, para todo $a \in A$. Pela continuidade de u , $u(a) = 0$, para todo $a \in \overline{A}$. Assim, $u(a) = 0$, para todo $a \in E$, donde $A^\perp = \{0\}$.

■

Definição 2.7.4 *Sejam E e F espaços vetoriais e $L : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Definimos a aplicação ${}^tL : F' \rightarrow E'$ da seguinte forma: para cada $v \in F'$, pomos ${}^tL(v)(x) = v(L(x))$, para todo $x \in E$.*

Observação 2.7.5 *tL é injetora se, e somente se, $\ker {}^tL = \{0\}$.*

Teorema 2.7.6 *$\overline{L(E)} = F \Leftrightarrow {}^tL$ é injetora. Aqui o fecho é tomado na topologia fraca de F .*

Demonstração. Utilizando o item (iv) do Lema 2.7.3 e a observação acima obtemos

$$\begin{aligned} \overline{L(E)} = F &\Leftrightarrow L(E)^\perp = \{0\} \\ &\Leftrightarrow u(y) = 0, \forall y \in L(E) \text{ e } u \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow u(L(x)) = 0, \forall x \in E \text{ e } u \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tL(u) = 0 \text{ e } u \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \ker {}^tL = \{0\} \\ &\Leftrightarrow {}^tL \text{ é injetora.} \end{aligned}$$

■

2.8 O Teorema de Baire

A referência utilizada para essa seção foi [15]. Começamos estudando a noção de conjunto magro e não-magro.

Definição 2.8.1 *Seja E um espaço topológico. Um subconjunto $S \subset E$ é dito raro se seu fecho \overline{S} tem interior vazio. Dizemos que um conjunto S é de primeira categoria (magro) em E se S pode ser escrito como união enumerável de conjuntos raros. Qualquer conjunto que não é de primeira categoria é dito de segunda categoria (não-magro) em E .*

Teorema 2.8.2 (Teorema de Baire) *Se E é um espaço métrico completo ou E é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então a interseção de qualquer coleção enumerável de subconjuntos densos de E é denso em E .*

Demonstração. Sejam V_1, V_2, \dots , subconjuntos abertos e densos em S . Mostremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ é um subconjunto denso em S . Para isso vamos mostrar que cada subconjunto aberto não-vazio de S intercepta o subconjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Seja B_0 um subconjunto aberto não-vazio arbitrário em S .

Como V_1 é denso em S , $V_1 \cap B_0 \neq \emptyset$, donde segue que existe um aberto $B_1 \neq \emptyset$ tal que $\overline{B_1} \subset V_1 \cap B_0$. Como cada V_n é denso em S , dados $n \geq 1$ e $B_{n-1} \neq \emptyset$, podemos

obter, recursivamente, um subconjunto aberto $B_n \neq \emptyset$ satisfazendo $\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}$. Seja $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$.

Se S é um espaço métrico completo, B_n pode ser tomado como uma bola de raio menor que $\frac{1}{n}$. Neste caso, os centros $(x_n) \in S$ dessas bolas formam uma sequência de Cauchy e, sendo S completo, (x_n) converge para um ponto $x \in S$. Dado $p \in \mathbb{N}$ qualquer, para todo $n > p$, temos que $x_n \in \overline{B_p}$. Como $\overline{B_p}$ é fechado, $x \in \overline{B_p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$ e, portanto $x \in K$. Além disso, como vale a relação $\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $x \in B_0$ e $x \in V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde B_0 intercepta $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Se S é um espaço de Hausdorff localmente compacto, podemos escolher B_n de modo que $\overline{B_n}$ seja compacto. Pela propriedade dos compactos encaixados, segue que $K \neq \emptyset$. Assim $K \subset \overline{B_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $K \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$ e $K \subset B_0$. Logo B_0 intercepta $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. ■

Definição 2.8.3 *Sejam X e Y EVT's e Γ uma coleção de aplicações lineares de X em Y . Dizemos que Γ é equicontínua se, para cada vizinhança W de 0 em Y , corresponde uma vizinhança V de 0 em X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.*

A definição acima exige, essencialmente, que a vizinhança V seja independente de Λ . Se Γ contém somente um elemento Λ , equicontinuidade é equivalente à continuidade.

Teorema 2.8.4 *Sejam X e Y EVT's, Γ uma coleção equicontínua de aplicações lineares de X em Y e E um subconjunto limitado de X . Então Y contém um subconjunto limitado F tal que $\Lambda(E) \subset F$, para cada $\Lambda \in \Gamma$.*

Demonstração. Tomemos

$$F = \bigcup_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda(E).$$

Seja W uma vizinhança de 0 em Y . Como Γ é equicontínua, existe uma vizinhança V de 0 em X tal que $\Lambda(V) \subset W$, para todo $\Lambda \in \Gamma$. Sendo E limitado, $E \subset tV$ para algum t suficientemente grande. Então:

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW, \forall \Lambda \in \Gamma$$

donde $F \subset tW$. Portanto, F é limitado em Y com $\Lambda(E) \subset F$, para todo $\Lambda \in \Gamma$. ■

Observação 2.8.5 *Seja X um EVT. Se W é uma vizinhança de 0 em X , então existe uma vizinhança U de 0 em X que satisfaz $U + U \subset W$. Além disso, U é simétrica com relação à origem.*

De fato, como $0 + 0 = 0$ e a adição é uma aplicação contínua em X , existem vizinhanças V_1 e V_2 de 0 em X tal que

$$V_1 + V_2 \subset W.$$

Tomando $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$, temos que U é uma vizinhança da origem e é simétrica. Além disso, $U + U \subset V_1 + V_2 \subset W$.

Teorema 2.8.6 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam X e Y EVT's, Γ uma coleção de aplicações lineares contínuas de X em Y e B o conjunto de todos $x \in X$ cujas órbitas*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x; \Lambda \in \Gamma\}$$

são limitadas em Y . Se B é de segunda categoria em X , então $B = X$ e Γ é equicontínua.

Demonstração. Seja W uma vizinhança equilibrada da origem em Y . Pela observação acima existe uma vizinhança simétrica U da origem em Y satisfazendo $U + U \subset W$. Podemos considerar U suficientemente pequena de modo que $\bar{U} + \bar{U} \subset W$. Tomemos

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\bar{U}).$$

Se $x \in B$, como $\Gamma(x)$ é limitado em Y , para algum $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vale $\Gamma(x) \subset nU \subset n\bar{U}$. Então:

$$\Lambda(x) \in n\bar{U}, \forall \Lambda \in \Gamma$$

$$x \in \Lambda^{-1}(n\bar{U}), \forall \Lambda \in \Gamma$$

$$x \in n\Lambda^{-1}(\bar{U}), \forall \Lambda \in \Gamma$$

$$x \in n \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\bar{U})$$

$$x \in nE.$$

Assim, $B \subset nE$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e daí $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE$. Como B é de segunda categoria em X , pelo menos um nE é de segunda categoria em X .

Uma vez que a aplicação $x \mapsto nx$ é um homeomorfismo de X em X , E é de segunda categoria em X , ou seja, \bar{E} não tem interior vazio. Como \bar{U} é fechado e Λ é contínua segue que $\Lambda^{-1}(\bar{U})$ é fechado. Então E é fechado e daí E não tem interior vazio. Tomemos $x \in \text{int } E$.

Então E contém uma vizinhança de x em X , ou seja, o conjunto $x - E$ contém uma vizinhança V de 0 em X . Assim, para cada $\Lambda \in \Gamma$, vale:

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(x - E) = \Lambda x - \Lambda(E) \subset \bar{U} - \bar{U} \subset W.$$

Logo, Γ é equicontínua. Pelo teorema anterior, Γ é uniformemente limitada. Em particular, para cada $x \in X$, $\Gamma(x)$ é limitado em Y , donde $B = X$. ■

2.9 Continuidade de Aplicações Bilineares

O principal objetivo desta seção é mostrar que, em determinadas condições, uma aplicação separadamente contínua é contínua. Nessa seção seguimos [15].

Definição 2.9.1 *Sejam X, Y, Z espaços vetoriais e B uma aplicação de $X \times Y$ em Z . Para cada $x \in X$ e $y \in Y$ consideremos as aplicações:*

$$B_x : Y \rightarrow Z \quad e \quad B^y : X \rightarrow Z$$

dadas por:

$$B_x(y) = B(x, y) = B^y(x).$$

Se as aplicações B_x e B^y são lineares, então B é dita bilinear.

Se X, Y e Z são EVT's e cada uma das aplicações B_x e B^y são contínuas, então B é dita separadamente contínua.

Se B é contínua (realtivamente à topologia produto de $X \times Y$), então B é separadamente contínua. Sob certas condições, utilizando o Teorema de Banach-Steinhaus, pode ser provado que a recíproca é válida, como veremos no próximo resultado.

Teorema 2.9.2 *Sejam X um EVT completo cuja topologia é induzida por uma métrica invariante e Y e Z EVT's. Se $B : X \times Y \rightarrow Z$ é bilinear e separadamente contínua, então*

$$B(x_n, y_n) \rightarrow B(x_0, y_0) \text{ em } Z$$

sempre que $x_n \rightarrow x_0$ em X e $y_n \rightarrow y_0$ em Y . Se Y é metrizável, então B é contínua.

Demonstração. Sejam U e W vizinhanças de 0 em Z tal que $U + U \subset W$. Definimos

$$b_n(x) = B(x, y_n), \quad x \in X, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como B é contínua como função de Y vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = B(x, y_0), \quad x \in X.$$

Então $\{b_n(x)\}$ é um conjunto limitado de Z , para cada $x \in X$. Como cada b_n é uma aplicação linear contínua de X , do Teorema de Banach-Steinhaus segue que $\{b_n\}$ é

equicontínua. Portanto, existe uma vizinhança V de 0 em X tal que

$$b_n(V) \subset U, \quad n = 1, 2, \dots$$

Utilizando a linearidade de b_n e a bilinearidade de B obtemos

$$\begin{aligned} B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) &= B(x_n, y_n) - B(x_0, y_n) + B(x_0, y_n) - B(x_0, y_0) \\ &= b_n(x_n) - b_n(x_0) + B(x_0, y_n) - B(x_0, y_0) \\ &= b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \end{aligned}$$

Se tomarmos n suficientemente grande, $x_n \in x_0 + V$, donde $b_n(x_n - x_0) \in U$. Como B é contínua e linear na variável y , então $B(x_0, 0) = 0$ e existe uma vizinhança U_1 de 0 em Y tal que $y_n - y_0 \in U_1$ e $B(x_0, U_1) \subset U$, donde $B(x_0, y_n - y_0) \in U$. Portanto, $B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) \in U + U \subset W$, para n suficientemente grande. Daí $B(x_n, y_n) \rightarrow B(x_0, y_0)$ em Z .

Se Y é metrizável, então $X \times Y$ é metrizável. Como B é sequencialmente contínua, segue que B é contínua. ■

Capítulo 3

O Teorema Principal

3.1 Introdução

O objetivo do presente capítulo é demonstrar e apresentar exemplos do principal resultado desse texto. Esse teorema consiste em uma condição necessária para que um operador linear de coeficientes variáveis seja globalmente resolúvel. Ele foi demonstrado por Lars Hörmander em 1960 e consiste em uma generalização do Exemplo de Lewy.

O enunciado preciso do teorema requer algumas definições preliminares. Embora o teorema principal tenha sido publicado pela primeira vez em [8], seguiremos a demonstração apresentada em [9] e, para manter os símbolos utilizados nessa referência, consideramos aqui a seguinte notação para a derivação:

$$D_j = -i\partial_j, j = 1, 2, \dots, n$$

e

$$D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Todos os resultados provados anteriormente para ∂^α continuam válidos quando trocamos por D^α , já que ∂^α e D^α diferem somente por uma constante multiplicativa.

Definição 3.1.1 *Um operador diferencial linear $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ em Ω é uma aplicação*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)D^\alpha u \end{aligned} \tag{3.1}$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ fixos. Cada a_α é chamado de coeficiente de P .

Para simplificar a escrita, escreveremos somente operador P , sempre que possível.

Definição 3.1.2 A ordem do operador P é o maior inteiro m tal que

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \neq 0,$$

para algum $x \in \Omega$. A ordem de um operador $P \equiv 0$ é definida como sendo zero.

Definição 3.1.3 Para cada operador P de ordem finita m , definimos a aplicação

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

chamada de símbolo do operador P . O símbolo principal de P é definido por

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos $\bar{p}_m(x, \xi)$ por

$$\bar{p}_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \overline{a_\alpha(x)} \xi^\alpha, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, n$ definimos

$$p_m^{(j)}(x, \xi) = \frac{\partial p_m(x, \xi)}{\partial \xi_j} \quad \text{e} \quad p_{m,j}(x, \xi) = \frac{\partial p_m(x, \xi)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando essa notação apresentamos o resultado principal desse texto (veja Teorema 1 de [8] ou Teorema 6.1.1 de [9]).

Teorema 3.1.4 Seja P um operador diferencial linear com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$. Se para cada $f \in C_c^\infty(\Omega)$ existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$Pu = f \text{ em } \Omega, \tag{3.2}$$

então

$$C_{2m-1}(x, \xi) = 0 \text{ sempre que } p_m(x, \xi) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

onde

$$C_{2m-1}(x, \xi) = i \cdot \sum_{j=1}^n \left(p_m^{(j)}(x, \xi) \cdot \bar{p}_{m,j}(x, \xi) - p_{m,j}(x, \xi) \cdot \bar{p}_m^{(j)}(x, \xi) \right). \tag{3.4}$$

Na próxima seção do capítulo ilustraremos o Teorema 3.1.4 com alguns exemplos relevantes. Alguns lemas que facilitarão a demonstração do teorema principal serão provados na Seção 3.3. Por fim, na Seção 3.4 concluiremos o capítulo com a demonstração do Teorema 3.1.4.

3.2 Notas históricas e exemplos

Até a década de 1950 existiam resultados de existência de soluções para diversas classes de equações diferenciais parciais. Nessa seção veremos alguns exemplos dessas classes bem como daremos duas aplicações do Teorema 3.1.4.

Os próximos resultados dessa seção são historicamente anteriores ao Exemplo de Lewy e alguns deles serão usados no decorrer do texto sem demonstração. Maiores detalhes dos três primeiros podem ser encontrados em [9].

Começamos apresentando uma versão do Teorema de Cauchy-Kovalevsky para equações lineares. Uma primeira versão do resultado foi provada por Augustin Cauchy por volta do ano de 1842 e posteriormente próximo ao ano de 1875, Sophie Kovalevsky completou este resultado.

Teorema 3.2.1 (Cauchy-Kovalevsky) *Considere uma equação diferencial de ordem m dada por:*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u = f, \quad (3.5)$$

onde os coeficientes a_α e a função f são analíticos em uma vizinhança da origem e o coeficiente que acompanha D_n^m é não nulo quando $x = 0$. Aqui D_n^m denota a derivada de ordem $m \in \mathbb{N}$ com relação à n -ésima coordenada. Então, para cada função φ que é analítica em uma vizinhança da origem, existe uma única solução u de (3.5), a qual é analítica em uma vizinhança da origem e satisfaz as condições:

$$D_n^j(u - \varphi) = 0, \text{ quando } x_n = 0 \text{ e } j < m.$$

No caso de equações de ordem um, esse resultado se reduz ao seguinte corolário, que será a versão utilizada para os nossos propósitos

Corolário 3.2.2 *Considere a equação diferencial de ordem um dada por:*

$$\sum_{j=1}^n a_j D_j u + a_0 u = f, \quad (3.6)$$

onde os coeficientes a_j e a função f são analíticos em uma vizinhança da origem. Se $a_n(0) \neq 0$ então, para cada função φ que é analítica em uma vizinhança da origem, existe uma única solução u de (3.6), a qual é analítica em uma vizinhança da origem e satisfaz a condição:

$$u = \varphi, \text{ quando } x_n = 0.$$

O próximo resultado de existência será útil na demonstração do Teorema 3.1.4.

Teorema 3.2.3 *Seja p_m com coeficientes C^∞ reais em uma vizinhança Ω de $x = 0$ em \mathbb{R}^n . Se ψ é uma função real de classe C^∞ definida em Ω tal que existe uma raiz real simples η_n da equação*

$$p_m(0, (\partial_1\psi(0), \partial_2\psi(0), \dots, \partial_{n-1}\psi(0), \eta_n)) = 0,$$

então em uma vizinhança Ω' de 0 existe uma única solução real $\varphi \in C^\infty(\Omega')$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} p_m(x, \nabla\varphi) = 0 \\ \varphi(x) = \psi(x) \text{ quando } x_n = 0 \\ \nabla\varphi(0) = \eta \end{cases},$$

sendo

$$\eta = (\partial_1\psi(0), \partial_2\psi(0), \dots, \partial_{n-1}\psi(0), \eta_n).$$

Observação 3.2.4 *Se os coeficientes de p_m bem como a função ψ são analíticos mas não necessariamente reais em uma vizinhança de 0, o mesmo teorema de existência é válido em um domínio complexo com uma solução analítica φ .*

Um dos casos para o qual se provou a existência de soluções é quando P é um operador de coeficientes constantes, conforme descrevemos a seguir. Nos anos de 1954 e 1955, Leon Ehrenpreis [3] e Bernard Malgrange [14] publicaram (respectivamente), de modo independente, o seguinte resultado, onde δ denota a distribuição Delta de Dirac:

Teorema 3.2.5 *Todo operador diferencial linear de coeficientes constantes P , não identicamente nulo, tem uma solução fundamental, isto é, existe $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$PE = \delta.$$

Então, dado o operador diferencial linear de coeficientes constantes P , se E é uma solução fundamental de P e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$u = E * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

satisfaz a equação

$$Pu = f,$$

ou seja, a equação $Pu = f$ tem solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualquer que seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nosso próximo objetivo é descrever outro resultado de resolubilidade local anterior ao Exemplo de Lewy.

Definição 3.2.6 *Seja P um operador definido em Ω . Dizemos que P é elíptico em $x_0 \in \Omega$ se*

$$p_m(x_0, \xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

O mais conhecido exemplo de operador elíptico é o Laplaciano. Mais geralmente temos a seguinte classe de operadores.

Definição 3.2.7 *Seja P um operador definido em Ω . Dizemos que P é do tipo principal em $x_0 \in \Omega$ se*

$$\xi \neq 0, p_m(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow p_m^{(j)}(x_0, \xi) \neq 0, \text{ para alguma } j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Observe que todo operador elíptico em x_0 é do tipo principal em x_0 . No caso em que P é um campo de vetores, é possível verificar com facilidade que a condição (3.7) significa que x_0 não é uma singularidade de P . Em 1955, L. Hörmander demonstrou um resultado de existência local de solução para operadores do tipo principal real, conforme descrevemos a seguir. Para maiores detalhes veja [10].

Teorema 3.2.8 *Seja P um operador diferencial linear definido em Ω . Suponha que P tem símbolo principal real e P é do tipo principal em x_0 . Então, para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ existe uma vizinhança V de x_0 tal que a equação $Pu = f$ tem solução $u \in \mathcal{D}'(V)$.*

Listamos até aqui, alguns resultados de existência de solução já conhecidos em 1957. No entanto, nesse mesmo ano, H. Lewy [12] publicou um resultado no qual exibe um operador linear P de ordem um e uma função f tais que a equação $Pu = f$ não tem solução u . Nesse artigo o espaço das soluções é formado pelas funções cujas derivadas de primeira ordem satisfazem uma determinada condição de Hölder. Este exemplo serviu de inspiração para L. Hörmander estabelecer o Teorema 3.1.4. A seguir, provamos que o exemplo de Lewy não tem solução, mesmo no sentido das distribuições, utilizando o Teorema 3.1.4.

Exemplo 3.2.9 (Operador de Lewy) *Consideremos o operador de Lewy dado por*

$$P = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. Então:

$$p_1(x, \xi) = -i\xi_1 + \xi_2 - 2(x_1 + ix_2)\xi_3,$$

$$\bar{p}_1(x, \xi) = i\xi_1 + \xi_2 - 2(x_1 - ix_2)\xi_3$$

donde, derivando em relação a cada coordenada de x e ξ essas duas aplicações, obtemos

$$C_1(x, \xi) = -8\xi_3.$$

Se tomarmos

$$\xi_1 = -2x_2, \quad \xi_2 = 2x_1 \quad e \quad \xi_3 = 1$$

temos que, para $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $p_1(x, \xi) = 0$, mas $C_1(x, \xi) \neq 0$.

Então pelo Teorema 3.1.4 existe $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que a equação $Pu = f$ não tem solução $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Isso implica que o operador de Lewy não é localmente resolúvel em \mathbb{R}^3 .

Uma simplificação do Operador de Lewy foi dada em 1970 por Garabedian [5] e em 1971 por Grushin [6].

Exemplo 3.2.10 (Operador de Grushin-Garabedian) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Consideremos o operador:*

$$P = iD_1 - x_1D_2.$$

Temos que:

$$p_1(x, \xi) = i\xi_1 - x_1\xi_2,$$

$$\bar{p}_1(x, \xi) = -i\xi_1 - x_1\xi_2$$

donde, derivando com relação às coordenadas de x e ξ , obtemos

$$C_1(x, \xi) = 2\xi_2.$$

Então:

$$C_1(x, \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi_2 = 0 \quad e \quad p_1(x, \xi) = 0 \Leftrightarrow i\xi_1 - x_1\xi_2 = 0.$$

Assim, para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que intercepte o eixo vertical (de modo que $x_1 = 0$) e tomando $\xi = (0, \xi_2)$, com $\xi_2 \neq 0$, temos que $p_1(x, \xi) = 0$ mas $C_1(x, \xi) \neq 0$. Pelo Teorema 3.1.4 existe $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que a equação $Pu = f$ não tem solução $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Isso implica que o operador de Grushin-Garabedian não é localmente resolúvel em nenhum aberto de \mathbb{R}^2 que intercepte o eixo vertical.

Observe que o Exemplo de Lewy trata de um campo de vetores complexo não-singular. O próximo exemplo mostra que se P é um campo de vetores real não-singular então sempre existe solução local para a equação $Pu = f$.

Exemplo 3.2.11 *Dado o operador*

$$P = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3.8}$$

de classe C^∞ , não-singular no aberto Ω de \mathbb{R}^n . Tomemos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. A esse operador podemos associar o campo:

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

$$X_1(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)).$$

Então existe um aberto $V \subset \Omega$ tal que a equação $Pu = f$ tem uma solução $u \in C^\infty(V)$, para toda $f \in C^\infty(V)$.

De fato, como o campo X_1 é não singular, pelo Teorema do Fluxo Tubular, para cada $x_0 \in \Omega$ existe uma vizinhança V de x_0 em Ω e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem, tal que h é uma C^∞ -conjugação entre $X_1|_V$ e o campo constante

$$X_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que

$$X_2(x) = (1, 0, \dots, 0).$$

Tomemos $(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Temos que vale o seguinte resultado sobre conjugação de campos: h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se, $Jh(x) \cdot X_1(x) = X_2(h(x)), \forall x \in \Omega$.

A ideia para resolver a equação $Pu = f$ é transformá-la em uma equação mais fácil de ser resolvida através da conjugação estabelecida acima.

Usando a Regra da Cadeia e o resultado acima obtemos:

$$P(v \circ h) = \left(\frac{\partial}{\partial t} v \right) \circ h, \quad \forall v \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times B).$$

É fácil resolver a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} v = f \circ h^{-1},$$

basta integrá-la em t .

Temos que $u = v \circ h$ satisfaz a equação $Pu = f$. De fato,

$$\begin{aligned} Pu &= P(v \circ h) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} v \right) \circ h \\ &= (f \circ h^{-1}) \circ h \\ &= f. \end{aligned}$$

Finalizamos a seção com uma observação de [2], p. 57. A condição que resultou ser necessária e suficiente para a resolubilidade local de um operador parcial linear do tipo principal foi enunciada em 1970 por Nirenberg e Treves e hoje é conhecida como Condição P de Nirenberg-Treves. A suficiência da condição P foi demonstrada em 1972 por Beals e Fefferman, enquanto que sua necessidade foi provada por Moyer em 1980.

3.3 Resultados auxiliares

Nesta seção provaremos cinco lemas que têm por objetivo simplificar a demonstração do teorema principal.

Definição 3.3.1 Dado um operador $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ em Ω , definimos o operador transposto tP de P através da relação

$$\langle {}^tPu, \varphi \rangle = \langle u, P\varphi \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Assim,

$${}^tPu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \cdot u)$$

De fato, essa relação decorre das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \langle {}^tPu, \varphi \rangle &= \langle u, P\varphi \rangle \\ &= \langle u, \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha \cdot u, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \cdot u), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Este primeiro lema estabelece algumas propriedades do termo C_{2m-1} .

Lema 3.3.2 Seja P um operador em Ω e C_{2m-1} dado em (3.4). Então C_{2m-1} é um polinômio homogêneo de grau $2m - 1$ na variável ξ , com coeficientes reais. Se p_m tem coeficientes constantes, coeficiente reais ou coeficientes imaginários puros, então $C_{2m-1} \equiv 0$.

Demonstração. Da definição de C_{2m-1} segue que se p_m tem coeficientes constantes, reais ou imaginários puros, então C_{2m-1} é identicamente nulo.

Observe que cada parcela de C_{2m-1} é da forma $i(\bar{z}_j - z_j)$, onde $z_j = p_{m,j}(x, \xi) \cdot \bar{p}_m^{(j)}(x, \xi)$. Mas $\bar{z}_j - z_j = -2i \operatorname{Im} z_j$. Assim

$$C_{2m-1}(x, \xi) = -2 \cdot \operatorname{Im} \sum_{j=1}^n p_{m,j}(x, \xi) \cdot \bar{p}_m^{(j)}(x, \xi), \quad (3.9)$$

donde C_{2m-1} é um polinômio na variável ξ com coeficientes reais.

Para provar que C_{2m-1} é um polinômio homogêneo de grau $2m - 1$ na variável ξ , fixados $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever a aplicação C_{2m-1} como segue:

$$C_{2m-1}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n i \left[\left(\alpha_j \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^{\alpha-e_j} \right) \left(\sum_{|\alpha|=m} (\partial_j \bar{a}_\alpha) \xi^\alpha \right) - \left(\sum_{|\alpha|=m} (\partial_j a_\alpha) \xi^\alpha \right) \left(\alpha_j \sum_{|\alpha|=m} \bar{a}_\alpha \xi^{\alpha-e_j} \right) \right],$$

ou seja,

$$C_{2m-1}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n i \alpha_j \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} [a_\alpha (\partial_j \bar{a}_\beta) - (\partial_j a_\alpha) \bar{a}_\beta] \xi^{\alpha+\beta-e_j}.$$

Decorre da igualdade acima que, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, a j -ésima parcela de C_{2m-1} é um polinômio homogêneo de grau $2m - 1$ na variável ξ . ■

O próximo lema tem por objetivo reduzir a prova do Teorema 3.1.4 à uma desigualdade.

Lema 3.3.3 *Suponha que todas as hipóteses do Teorema 3.1.4 são satisfeitas. Seja ω um subconjunto aberto de Ω tal que $\bar{\omega} \subset\subset \Omega$. Então existem constantes $C > 0$ e $k, N \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left| \int f v dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha f| \sum_{|\beta| \leq N} \sup |D^\beta {}^t P v|; \quad f, v \in C_c^\infty(\omega). \quad (3.10)$$

Demonstração. Consideremos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B : C_c^\infty(\bar{\omega}) \times C_c^\infty(\omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, v) &\longmapsto \int f v dx \end{aligned}$$

A estratégia da demonstração consiste em definir topologias localmente convexas convenientes em $C_c^\infty(\bar{\omega})$ e em $C_c^\infty(\omega)$. Depois provamos que B é separadamente contínua e, então utilizamos o Teorema 2.9.2 para concluir que B é contínua. Dessa continuidade segue o lema.

Afirmamos que $C_c^\infty(\bar{\omega})$ é um espaço de Fréchet com a topologia definida pela família $\Sigma = \{q_m, m = 0, 1, 2, \dots\}$ de seminormas dadas por

$$q_m(f) = \sup_{\substack{x \in \bar{\omega} \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C_c^\infty(\bar{\omega}).$$

Devemos mostrar que $C_c^\infty(\bar{\omega})$ é um espaço localmente convexo, metrizável e completo.

Pelo Teorema 2.2.8 a coleção Σ de seminormas define uma topologia em $C_c^\infty(\bar{\omega})$ que torna este espaço localmente convexo.

Temos que a coleção Σ é enumerável e além disso, usando o Teorema 2.2.14 podemos verificar que $C_c^\infty(\bar{\omega})$ é um espaço de Hausdorff. Assim, pelo Teorema 2.3.2 concluímos que $C_c^\infty(\bar{\omega})$ é metrizable. Por indução sobre m podemos concluir que $C_c^m(\bar{\omega})$, $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ é completo. Isso conclui a prova de que $C_c^\infty(\bar{\omega})$ é um espaço de Fréchet com a topologia definida pela família Σ .

Utilizando o Teorema 2.3.2, vamos mostrar que $C_c^\infty(\omega)$ é metrizable com a topologia definida pela família $\Sigma' = \{p_m; m = 0, 1, 2, \dots\}$ de seminormas dadas por

$$p_m(v) = \sup_{\substack{x \in \omega \\ |\beta| \leq m}} |D^\beta {}^t P v(x)|, \quad \forall v \in C_c^\infty(\omega).$$

Para isso precisamos mostrar que $C_c^\infty(\omega)$ é Hausdorff. Como o operador P é sobrejetor, $P(C_c^\infty(\Omega)) = C_c^\infty(\Omega)$. Assim, $\overline{P(C_c^\infty(\Omega))} = C_c^\infty(\Omega)$, onde o fecho é tomado na topologia fraca. Pelo Teorema 2.7.6 segue que ${}^t P$ é injetora e pela Observação 2.7.5 temos que $\ker {}^t P = \{0\}$. Logo, pelo Teorema 2.2.14 segue que $C_c^\infty(\omega)$ é Hausdorff com a topologia definida por Σ' .

Mostraremos a seguir que a forma bilinear B é separadamente contínua. Fixado $v \in C_c^\infty(\omega)$ mostremos que B é contínua na variável f , ou seja, a aplicação

$$\begin{aligned} B_v : C_c^\infty(\bar{\omega}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int f v \, dx \end{aligned}$$

é contínua.

Utilizaremos o Teorema 2.2.17 com a família unitária de seminormas $\Sigma_2 = \{|\cdot|\}$ em \mathbb{C} . Como $v \in C_c^\infty(\omega) \subset C_c^\infty(\Omega)$, segue que:

$$|B_v(f)| = \left| \int_{\bar{\omega}} f \cdot v \, dx \right| \leq \int_{\bar{\omega}} |v| \cdot |l| \, dx \leq \int_{\bar{\omega}} |v| \cdot \sup |l| \, dx = \int_{\bar{\omega}} |v| \cdot q_0(l), \quad \forall l \in C_c^\infty(\omega).$$

Logo, pelo Teorema 2.2.17 segue que B_v é contínua.

Para mostrar que, fixado $f \in C_c^\infty(\bar{\omega})$, a aplicação

$$\begin{aligned} B_f : C_c^\infty(\omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \int f v \, dx \end{aligned}$$

é contínua basta proceder analogamente ao feito acima, lembrando que $Pu = f$, donde vale a igualdade:

$$\left| \int f \cdot v \, dx \right| = \left| \int Pu \cdot v \, dx \right| = |\langle Pu, v \rangle| = |\langle u, {}^t P v \rangle|.$$

Concluimos então que B é separadamente contínua e pelo Teorema 2.9.2 segue que B é contínua.

Dado o aberto $(-1, 1)$ de \mathbb{C} existem $A_1 \subset C_c^\infty(\bar{\omega})$ e $A_2 \subset C_c^\infty(\omega)$ subconjuntos abertos tais que:

$$B(A_1 \times A_2) \subset (-1, 1)$$

Podemos supor que A_1 e A_2 são abertos básicos, ou seja,

$$B(B_q(0, \delta_1) \times B_p(0, \delta_2)) \subset (-1, 1),$$

onde $q \in \Sigma$, $p \in \Sigma'$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$. Assim, dado $(l, v) \in B_q(0, \delta_1) \times B_p(0, \delta_2)$, segue que $|B(l, v)| < 1$.

Agora dados (l, v) quaisquer temos que:

$$\begin{aligned} |B(l, v)| &= \left| B \left(\frac{l}{q(l)} q(l) \cdot \frac{\delta_1}{2}, \frac{v}{p(v)} p(v) \cdot \frac{\delta_2}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{q(l)}{\frac{\delta_1}{2}} \right| \cdot \left| \frac{p(v)}{\frac{\delta_2}{2}} \right| \cdot \left| B \left(\frac{l}{q(l)} \cdot \frac{\delta_1}{2}, \frac{v}{p(v)} \cdot \frac{\delta_2}{2} \right) \right|, \end{aligned}$$

onde o termo entre parentêses na última expressão pertence à $B_q(0, \delta_1) \times B_p(0, \delta_2)$, donde

$$\left| B \left(\frac{l}{q(l)} \cdot \frac{\delta_1}{2}, \frac{v}{p(v)} \cdot \frac{\delta_2}{2} \right) \right| < 1,$$

e assim,

$$|B(l, v)| < \left| \frac{q(l)}{\frac{\delta_1}{2}} \right| \cdot \left| \frac{p(v)}{\frac{\delta_2}{2}} \right|. \quad (3.11)$$

Segue portanto o resultado, basta considerar $C = \frac{4}{\delta_1 \cdot \delta_2}$ e substituir as seminormas q e p por alguma q_m e p_m , respectivamente. ■

No próximo resultado utilizamos argumentos de Álgebra Linear para produzir uma matriz simétrica, cuja parte imaginária é definida positiva, com uma propriedade adicional. Essa matriz será útil na obtenção do Lema 3.3.6.

Lema 3.3.4 *Dados dois vetores (a_1, \dots, a_n) e (f_1, \dots, f_n) com componentes complexas e algum $a_j \neq 0$, existe uma matriz simétrica $[\alpha_{jk}]$ com parte imaginária definida positiva satisfazendo as equações*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} a_j = f_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

se, e somente se,

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^n f_k \bar{a}_k > 0. \quad (3.13)$$

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ tais que $a_j = b_j + ic_j$, para cada $j = 1, \dots, n$. Então, da equação (3.12), temos:

$$\sum_{k=1}^n f_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} a_j \bar{a}_k.$$

Como $[\alpha_{jk}]$ é simétrica segue que:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} a_j \bar{a}_k = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{kj} b_j b_k + \sum_{j,k=1}^n \alpha_{kj} c_j c_k.$$

Como algum dos a_j 's é não-nulo, os vetores reais (b_1, \dots, b_n) e (c_1, \dots, c_n) não são ambos nulos. Além disso, $\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]$ é definida positiva, então:

$$z^T \cdot (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) \cdot z > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad z \neq 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n f_k \bar{a}_k &= \operatorname{Im} \left(\sum_{j,k=1}^n \alpha_{kj} b_j b_k + \sum_{j,k=1}^n \alpha_{kj} c_j c_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) b_j b_k + \sum_{j,k=1}^n (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) c_j c_k. \end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{j,k=1}^n b_j (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) b_k = b^T \cdot (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) \cdot b > 0$$

e

$$\sum_{j,k=1}^n c_j (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) c_k = c^T \cdot (\operatorname{Im} [\alpha_{kj}]) \cdot c > 0,$$

donde

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^n f_k \bar{a}_k > 0.$$

(\Leftarrow) Vamos separar em dois casos:

- 1º) a é proporcional à um vetor real;
- 2º) a não é proporcional à um vetor real.

Caso a seja proporcional à um vetor real, multiplicando a e f pelo mesmo número complexo podemos assumir que a é real.

Tomando $\alpha = [\alpha_{kj}]$, a equação (3.12) em termos de matrizes se escreve como:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \text{e} & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \frac{(h, a)}{(2a, a)}x & & y & \longmapsto & \frac{(y, t)}{(a, t)}t \end{array}.$$

É fácil ver que A e B são matrizes simétricas, donde γ é uma matriz simétrica. Além disso, dado $z \in \mathbb{R}^n$, não-nulo, vale

$$z^T \gamma z = \frac{(h, a)}{(2a, a)}(z, z) + \frac{(z, t)^2}{(a, t)} > 0,$$

ou seja, γ é definida positiva. Assim α tem parte imaginária definida positiva. Isso conclui a prova do lema no caso em que a é proporcional à um vetor real.

Caso a não seja proporcional à um vetor real, mostremos que

$$\alpha = i \frac{\text{Im}(f, a)}{(a, a)} I + \beta, \quad (3.14)$$

onde I é a matriz identidade, satisfaz (3.12) para alguma matriz real simétrica β .

Para que essa matriz α satisfaça as equações (3.12) é necessário que

$$\alpha a = f,$$

donde devemos ter

$$\beta a = f - ai \frac{\text{Im}(f, a)}{(a, a)}.$$

Pondo $l = f - ai \frac{\text{Im}(f, a)}{(a, a)}$ temos:

$$(l, a) = (f, a) - i \text{Im}(f, a)$$

e daí

$$\text{Im}(l, a) = 0.$$

Mostremos então que existe β satisfazendo

$$\beta a = l.$$

Notemos que o conjunto de todos os vetores $z \in \mathbb{C}^n$ tais que $z = \beta a$, para alguma matriz β real e simétrica, é um subespaço vetorial. A equação de um hiperplano contendo este conjunto pode ser escrita da forma $\text{Im}(z, g) = 0$ para algum $g \in \mathbb{C}^n$.

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, a matriz definida por $\beta x = \xi(x, \xi)$ é real e simétrica, e $\beta a = \xi(a, \xi)$. Substituindo $z = \beta a$ em $\text{Im}(z, g) = 0$, devemos ter

$$\operatorname{Im} ((\xi, g) \cdot (a, \xi)) = 0. \quad (3.15)$$

Utilizando o fato de que a não é proporcional à um vetor real, mostraremos que g é um múltiplo real de a . Escrevendo $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$ e $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$, a equação (3.15) equivale à

$$(\xi, \operatorname{Re} g) \cdot (\operatorname{Im} a, \xi) = (\xi, \operatorname{Im} g) \cdot (\operatorname{Re} a, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

É fácil ver que a hipótese de a não ser proporcional à um vetor real é equivalente ao fato de que o conjunto de vetores $\{\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a\}$ é linearmente independente.

Seja π_1 o hiperplano de \mathbb{R}^n cuja equação é $(\operatorname{Re} a, \xi) = 0$. Do fato de $\operatorname{Re} a$ e $\operatorname{Im} a$ serem linearmente independentes, segue que $(\operatorname{Im} a, \xi) \neq 0, \forall \xi \in \pi_1$. Assim, de (3.16) temos que $(\xi, \operatorname{Re} g) = 0, \forall \xi \in \pi_1$, ou seja, $\operatorname{Re} g$ é um vetor ortogonal à π_1 . Logo, existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re} g = r_1 \cdot \operatorname{Re} a$.

Considerando agora o hiperplano π_2 dado pela equação $(\operatorname{Im} a, \xi) = 0$, concluímos que existe $r_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im} g = r_2 \cdot \operatorname{Im} a$.

Voltando na equação (3.16) obtemos

$$r_1 \cdot (\xi, \operatorname{Re} a)(\xi, \operatorname{Im} a) = r_2 \cdot (\xi, \operatorname{Im} a)(\operatorname{Re} a, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Escolhendo ξ de modo que $(\xi, \operatorname{Re} a) \neq 0$ e $(\xi, \operatorname{Im} a) \neq 0$, obtemos que $r_1 = r_2$. Portanto, g é múltiplo real de a .

Pondo $g = r \cdot a, r \in \mathbb{R}$, a equação $\operatorname{Im} ((\xi, g) \cdot (a, \xi)) = 0$ se resume à $\operatorname{Im} ((a, \xi) \cdot (\xi, a)) = 0$ que é exatamente a mesma coisa que $\operatorname{Im} (z, a) = 0$. Portanto, a equação $\operatorname{Im} (z, g) = 0$ decorre como uma consequência da equação $\operatorname{Im} (z, a) = 0$.

Assim, da equação $\operatorname{Im} (l, a) = 0$ decorre que podemos encontrar uma matriz real simétrica β satisfazendo

$$\beta a = l.$$

Mostremos que a matriz α definida acima é simétrica com parte imaginária definida positiva. Como β e I são simétricas, segue que α é simétrica. A parte imaginária de α é

$$\frac{\operatorname{Im} (f, a)}{(a, a)} I = \frac{\operatorname{Im} \sum_{k=1}^n f_k \bar{a}_k}{\sum_{k=1}^n a_k \bar{a}_k} I,$$

donde, da hipótese, segue que $\frac{\operatorname{Im} (f, a)}{(a, a)} > 0$, ou seja, α tem parte imaginária definida positiva. Assim, em qualquer caso segue o resultado. ■

Observação 3.3.5 *A demonstração do Teorema 3.1.4 será feita por redução ao absurdo. Mais precisamente, vamos supor que (3.3) não é válida e com isso violaremos a desigualdade (3.10).*

A negação de (3.3) significa que existe $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ tal que $p_m(x, \xi) = 0$, mas $C_{2m-1}(x, \xi) \neq 0$. Para simplificar a notação, podemos supor que $x = 0$. Mas C_{2m-1} é um polinômio homogêneo de grau ímpar na variável ξ , logo podemos supor que

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } p_m(0, \xi) = 0 \text{ mas } C_{2m-1}(0, \xi) < 0. \quad (3.17)$$

No próximo resultado produzimos uma função que tem papel fundamental na negação da desigualdade (3.10).

Lema 3.3.6 *Suponha que a condição (3.17) é satisfeita e seja q um inteiro positivo. Então existe uma função $w \in C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$p_m(x, \nabla w(x)) = O(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

e

$$w(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

onde a matriz $[\alpha_{jk}]$ é simétrica e tem parte imaginária definida positiva.

Vejamos algumas considerações a fim de simplificar a demonstração desse resultado.

Observação 3.3.7 *Se $w \in C^\infty(\Omega)$ satisfaz (3.19) então $w(0) = 0$, $\nabla w(0) = \xi$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k}(0) = \alpha_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$. Isto decorre do fato de que o último termo do lado direito de (3.19), juntamente com suas derivadas de ordem ≤ 2 , se anula na origem.*

Observação 3.3.8 *Fixado $q = 1, 2, \dots$, definimos:*

$$Q = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[\sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta \right] D^\alpha,$$

isto é, Q é o operador que obtemos ao substituírmos os coeficientes a_α de P por seus respectivos polinômios de Taylor de grau q . Seja q_m o símbolo principal de Q e

$$\tilde{C}_{2m-1}(x, \xi) = i \cdot \sum_{j=1}^n (q_m^{(j)}(x, \xi) \cdot \bar{q}_{m,j}(x, \xi) - q_{m,j}(x, \xi) \cdot \bar{q}_m^{(j)}(x, \xi)), \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Os itens abaixo nos garantem que q_m satisfaz uma condição análoga à (3.17) e que, se vale (3.18) para q_m , então a mesma igualdade também vale para p_m .

(i) Vale a seguinte relação: $p_m(x, \xi) - q_m(x, \xi) = o(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$.

De fato, escrevendo a Fórmula de Taylor dos coeficientes a_α em torno da origem, temos:

$$a_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta + r_\alpha(x),$$

onde $r_\alpha(x) = o(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$, para cada α satisfazendo $|\alpha| \leq m$. Assim:

$$\begin{aligned} p_m(x, \xi) - q_m(x, \xi) &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha - \sum_{|\alpha|=m} \left[\sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta \right] \xi^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \left(\sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta + r_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta \right) \xi^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=m} r_\alpha(x) \xi^\alpha. \end{aligned}$$

Como $r_\alpha(x) = o(\|x\|^q)$, $x \rightarrow 0$, para cada α , da Observação 1.2.2 segue o resultado.

(ii) Se $p_m(0, \xi) = 0$ então $q_m(0, \xi) = 0$. De fato, do item anterior $q_m(0, \xi) = o(\|x\|^q)$. Logo, $q_m(0, \xi) = 0$.

(iii) Decorrem do item (i) acima, as seguintes relações: $q_m^{(j)}(0, \xi) = p_m^{(j)}(0, \xi)$ e $q_{m,j}(0, \xi) = p_{m,j}(0, \xi)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Relações análogas valem para \bar{p}_m e \bar{q}_m . Para demonstrá-las basta derivar em x e em ξ a expressão do item (i).

(iv) Dos itens anteriores podemos concluir que $\tilde{C}_{2m-1}(0, \xi) = C_{2m-1}(0, \xi)$.

(v) Se vale (3.17) então

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } q_m(0, \xi) = 0 \text{ mas } \tilde{C}_{2m-1}(0, \xi) < 0. \quad (3.20)$$

Observação 3.3.9 Se $f, g \in C^\infty(\Omega)$ com $f = g$ no plano $x_n = 0$, então $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$ no plano $x_n = 0$, para $j = 1, 2, \dots, n-1$. Para demonstrar este fato basta aplicar a definição de derivada.

Demonstração do Lema 3.3.6. Para explicitar o papel do Lema 3.3.4 nessa demonstração vejamos separadamente os casos $q = 1$, $q = 2$ e $q > 2$ qualquer. Para $q = 1$ tomemos a Fórmula de Taylor de ordem um da aplicação $(x, y) \mapsto p_m(x, y)$ em torno do ponto $(0, \xi)$. Como $p_m(0, \xi) = 0$ ficamos com

$$p_m(x, y) = \sum_{j=1}^n p_{m,j}(0, \xi) \cdot (x_j - 0) + \sum_{j=1}^n p_m^{(j)}(0, \xi) \cdot (y_j - \xi_j) + r((x, y) - (0, \xi)),$$

com $r((x, y) - (0, \xi)) = o(\|(x, y) - (0, \xi)\|)$, $(x, y) \rightarrow (0, \xi)$.

Seja A uma matriz real simétrica definida positiva e considere $[\alpha_{jk}] = iA$. Definimos

$$w(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k, \quad x \in \Omega. \quad (3.21)$$

Para esse w vale (3.19), mostremos que vale (3.18). Temos que

$$p_m(x, \nabla w(x)) = \sum_{j=1}^n p_{m,j}(0, \xi) \cdot x_j + \sum_{j=1}^n p_m^{(j)}(0, \xi) \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} x_k + r(x, \nabla w(x) - \xi), \quad (3.22)$$

onde $r(x, \nabla w(x) - \xi) = o(\|(x, \nabla w(x) - \xi)\|)$, $x \rightarrow 0$.

Como cada uma das parcelas dos somatórios acima é da forma *constante* · x_j , segue que cada uma dessas parcelas é $O(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$. Mostremos que $r(x, \nabla w(x) - \xi) = O(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$. De fato,

$$\frac{|r(x, \nabla w(x) - \xi)|}{\|x\|} = \frac{|r(x, \nabla w(x) - \xi)|}{\|(x, \nabla w(x) - \xi)\|} \cdot \frac{\|(x, \nabla w(x) - \xi)\|}{\|x\|}.$$

Da observação 3.3.7 resulta que $\lim_{x \rightarrow 0} \nabla w(x) = \xi$ e $\nabla w(x) - \xi = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{1k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^n \alpha_{nk} x_k \right)$, segue que $r(x, \nabla w(x) - \xi) = O(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$. Vale portanto, (3.18).

Caso $q = 2$, consideremos ainda a Fórmula de Taylor de ordem um dada anteriormente:

$$p_m(x, y) = \sum_{j=1}^n p_{m,j}(0, \xi) \cdot (x_j - 0) + \sum_{j=1}^n p_m^{(j)}(0, \xi) \cdot (y_j - \xi_j) + r((x, y) - (0, \xi)),$$

onde $r((x, y) - (0, \xi)) = o(\|(x, y) - (0, \xi)\|) = O(\|(x, y) - (0, \xi)\|^2)$, $(x, y) \rightarrow (0, \xi)$.

Como estamos considerando o caso $q = 2$, precisamos anular o termo da igualdade acima que tem potências de x de ordem um. Para isso, utilizaremos uma forma quadrática especial.

Mais precisamente, de (3.9) temos que

$$C_{2m-1}(0, \xi) = -2 \cdot \operatorname{Im} \sum_{j=1}^n p_{m,j}(0, \xi) \cdot \bar{p}_m^{(j)}(0, \xi).$$

Como $C_{2m-1}(0, \xi) \neq 0$, segue que $p_m^{(j)}(0, \xi) \neq 0$, para algum j , digamos para $j = n$. Vamos aplicar o Lema 3.3.4 para $a_j = p_m^{(j)}(0, \xi)$ e $f_j = -p_{m,j}(0, \xi)$, obtendo uma matriz simétrica $[\alpha_{jk}]$ com parte imaginária definida positiva que satisfaz:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} p_m^{(k)}(0, \xi) = -p_{m,j}(0, \xi), \quad j = 1, \dots, n,$$

donde,

$$p_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} p_m^{(k)}(0, \xi) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.23)$$

Definimos:

$$w(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k, \quad x \in \Omega.$$

Obviamente w satisfaz (3.19). Mostremos que w satisfaz (3.18).

Temos que a equação (3.23) implica que $\nabla p_m(x, \nabla w(x))|_{x=0} = 0$. De fato, usando a Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x, \nabla w(x)) &= p_{m,j}(x, \nabla w(x)) + \sum_{k=1}^n p_m^{(k)}(x, \nabla w(x)) \alpha_{jk} + O(\|(x, y) - (0, \xi)\|), \quad x \rightarrow 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$, temos então:

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(0, \xi) = p_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n p_m^{(k)}(0, \xi) \alpha_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, por hipótese, segue que

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(0, \xi) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\nabla p_m(x, \nabla w(x))|_{x=0} = 0$.

Trocando a ordem dos somatórios em (3.22) ficamos com:

$$p_m(x, \nabla w(x)) = \sum_{j=1}^n \left[p_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n p_m^{(k)}(0, \xi) \alpha_{jk} \right] x_k + r(x, \nabla w(x) - \xi),$$

onde $r(x, \nabla w(x) - \xi) = O(\|(x, \nabla w(x) - \xi)\|^2)$, $x \rightarrow 0$. Da equação (3.23), o termo entre colchetes acima é nulo. Logo:

$$p_m(x, \nabla w(x)) = r(x, \nabla w(x) - \xi).$$

Analogamente ao feito no caso $q = 1$, obtemos que $p_m(x, \nabla w(x)) = O(\|x\|^2)$, $x \rightarrow 0$, concluindo a prova no caso $q = 2$.

Caso $q > 2$, pela Observação 3.3.8, se trocarmos p_m por q_m , onde

$$q_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \left[\sum_{|\beta| \leq q} \frac{\partial^\beta a_\alpha(0)}{\beta!} x^\beta \right] \xi^\alpha,$$

vale a condição (3.20). Logo argumentando como no caso $q = 2$, obtemos que existe uma matriz simétrica $[\alpha_{jk}]$ com parte imaginária definida positiva que satisfaz

$$q_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \cdot q_m^{(k)}(0, \xi) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.24)$$

e podemos supor $q_m^{(n)}(0, \xi) \neq 0$.

Como os coeficientes de q_m são analíticos, vamos aplicar o Teorema 3.2.3 juntamente com a observação subsequente à ele para $\eta = \xi$ e $\psi(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k$. Encontramos então uma solução W para a equação

$$q_m(x, \nabla W(x)) = 0 \text{ em uma vizinhança de } 0,$$

de modo que, $\nabla W(0) = \xi$ e $W(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k$, quando $x_n = 0$.

Pela Observação 3.3.9 temos que $\frac{\partial^2 W(0)}{\partial x_j \partial x_k} = \alpha_{jk}$ se $j, k < n$. Além disso, usando a Regra da Cadeia temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} q_m(x, \nabla W(x)) = q_{m,j}(x, \nabla W(x)) + \sum_{k=1}^n q_m^{(k)}(x, \nabla W(x)) \cdot \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_k \partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Para $x = 0$, $\nabla W(0) = \xi$, donde

$$\frac{\partial}{\partial x_j} q_m(0, \xi) = q_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n q_m^{(k)}(0, \xi) \cdot \frac{\partial^2 W(0)}{\partial x_k \partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como queremos que W satisfaça (3.18) devemos exigir, como argumentado no caso $q = 2$, que $\nabla q_m(x, \nabla W(x))|_{x=0} = 0$, ou seja, vamos exigir que

$$q_{m,j}(0, \xi) + \sum_{k=1}^n q_m^{(k)}(0, \xi) \cdot \frac{\partial^2 W(0)}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Usando a equação (3.24) e a relação obtida acima temos que, para $k = n$ e $j < n$, $\frac{\partial^2 W(0)}{\partial x_j \partial x_n} = \alpha_{jn}$, uma vez que $q_m^{(n)}(0, \xi) \neq 0$. Da mesma forma, considerando $j = n$,

obtemos $\frac{\partial^2 W(0)}{\partial x_n^2} = \alpha_{nn}$.

Assim, pela fórmula de Taylor de grau três de W em torno da origem, segue que:

$$W(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Como $q_m(x, \nabla W(x)) = 0$ na vizinhança onde W está definida, voltando para p_m , da Observação 3.3.8, obtemos:

$$p_m(x, \nabla W(x)) = O(\|x\|^q), \quad x \rightarrow 0.$$

Assim, W satisfaz (3.18) e (3.19).

Como queremos estender W para todo o conjunto Ω , procedemos da seguinte maneira: multiplicamos W por uma função C_c^∞ com suporte contido na vizinhança da origem onde W está definida, e que é igual à 1 em outra vizinhança da origem. O produto w obtido satisfaz as propriedades requeridas. ■

Lema 3.3.10 *Seja ω uma vizinhança suficientemente pequena da origem. Consideremos $\psi \in C_c^\infty(\omega)$ tal que para algum inteiro $s \geq 0$ vale*

$$\psi(x) = O(\|x\|^{2s}), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Então, para w dado pelo Lema 3.3.6, vale

$$\sup |D^\alpha(\psi e^{i\tau w})| = O(\tau^{|\alpha|-s}), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Demonstração. Temos que w é dado por

$$w(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Então,

$$\operatorname{Im} w(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Im} (\alpha_{jk}) x_j x_k + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Assim, a fórmula de Taylor de $\operatorname{Im} w$ em torno do 0 começa com uma forma quadrática definida positiva.

Denotando $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Im} (\alpha_{jk}) x_j x_k$, temos que f é obviamente contínua.

Seja $S^{n-1} \subset \subset \mathbb{R}^n$. Da continuidade da f obtemos

$$\inf_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in S^{n-1}.$$

Como $x_0 \neq 0$ (pois, $x_0 \in S^{n-1}$), $f(x_0) \neq 0$, donde $f(x_0) > 0$. Assim, $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in S^{n-1}$.

Agora, dado $x \neq 0$ qualquer, vale:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\|^2 \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\|^2 \cdot f(x_0),$$

colocando $f(x_0) = 2a$, obtemos então $f(x) \geq 2a\|x\|^2$.

Existe uma vizinhança V da origem tal que $\text{Im } w(x) \geq a\|x\|^2, \forall x \in V$. De fato, pelo Corolário 1.2.7 podemos escrever

$$\text{Im } w(x) = f(x) + u(x), x \in \Omega,$$

com $u(x) = o(\|x\|^2), x \rightarrow 0$. Logo, existe uma vizinhança V da origem tal que

$$x \in V \Rightarrow \frac{|u(x)|}{\|x\|^2} < a,$$

ou seja, $|u(x)| < a\|x\|^2$. Assim, se $x \in V$, $u(x) \geq -a\|x\|^2$. Concluimos então que $\text{Im } w(x) \geq a\|x\|^2, \forall x \in V$.

Pela fórmula de Leibniz temos que:

$$\begin{aligned} \sup |D^\alpha(\psi e^{i\tau w})| &= \sup \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi \cdot D^{\alpha-\beta} e^{i\tau w} \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \sup |D^\beta \psi \cdot D^{\alpha-\beta} e^{i\tau w}|. \end{aligned}$$

Não vamos calcular explicitamente o termo $D^{\alpha-\beta} e^{i\tau w}$ pois requer a fórmula para derivadas de ordem arbitrárias para a composição de duas funções, a qual não faz parte dos objetivos desta dissertação. Mas podemos observar que essa derivada é um somatório cujas parcelas são da forma $(i\tau)^{\gamma_1} \cdot D^{\gamma_2} w \cdot e^{i\tau w}$, com $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}^n$ tais que $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq \alpha - \beta$. Se mostrarmos que $\sup (i\tau)^{|\alpha-\beta|} \cdot D^{\alpha-\beta} w \cdot e^{i\tau w} = O(\tau^{|\alpha|-s}), \tau \rightarrow \infty$, para os outros termos do somatório valerá o mesmo.

Se valer

$$\sup |e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi| = O(\tau^{|\beta|-s}), \tau \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

então

$$\sup |D^\beta \psi \cdot D^{\alpha-\beta} e^{i\tau w}| = O(\tau^{|\alpha|-s}), \tau \rightarrow \infty.$$

De fato, para qualquer $x \in \omega$ e considerando τ suficientemente grande, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|i^{|\alpha-\beta|} \cdot \tau^{|\alpha-\beta|} \cdot D^{\alpha-\beta} w \cdot e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\alpha|-s}} &= \frac{|i^{|\alpha-\beta|} \cdot D^{\alpha-\beta} w \cdot e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\beta|-s}} \\
&= |i^{|\alpha-\beta|}| \cdot |D^{\alpha-\beta} w| \cdot \frac{|e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\beta|-s}} \\
&\leq |i^{|\alpha-\beta|}| \cdot |D^{\alpha-\beta} w| \cdot C_1 \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

esta última desigualdade decorre do fato de w ter suporte compacto e não depender de τ . Pela comentário que fizemos acima segue, portanto que

$$\sup |D^\beta \psi \cdot D^{\alpha-\beta} e^{i\tau w}| = O(\tau^{|\alpha|-s}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Assim, para mostrar que vale (3.26) é suficiente mostrar que vale (3.27). Como vale (3.25), pelo Corolário 1.2.7, vale:

$$D^\beta \psi = O(\|x\|^{2s-|\beta|}), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
|e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi| &= |e^{i\tau \operatorname{Re} w - \tau \operatorname{Im} w}| \cdot |D^\beta \psi| \\
&= e^{-\tau \operatorname{Im} w} \cdot |D^\beta \psi| \\
&= \frac{|D^\beta \psi|}{e^{\tau \operatorname{Im} w}}.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{Im} w \geq 0$ em ω , obtemos, quando $x \rightarrow 0$, utilizando (3.28):

$$\begin{aligned}
\frac{|e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\beta|-s}} &= \frac{|D^\beta \psi|}{e^{\tau \operatorname{Im} w} \cdot \tau^{|\beta|-s}} \\
&\leq \frac{M_1 \cdot \|x\|^{2s-|\beta|}}{e^{\tau \operatorname{Im} w} \cdot \tau^{|\beta|-s}},
\end{aligned}$$

onde M_1 é uma constante positiva.

Vamos considerar 2 casos: $|\beta| \geq s$ e $|\beta| < s$. Caso $|\beta| \geq s$, o numerador obtido acima não depende de τ enquanto o denominador tende ao infinito conforme τ tende ao infinito. Assim, vale:

$$\sup |e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi| = O(\tau^{|\beta|-s}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Caso $|\beta| < s$, temos que $0 < 2(s - |\beta|) \leq 2s - |\beta|$ e da Observação 1.2.2, segue que:

$$D^\beta \psi = O(\|x\|^{2(s-|\beta|)}), \quad x \rightarrow 0,$$

donde temos que:

$$\begin{aligned} \frac{|e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\beta|-s}} &= \tau^{s-|\beta|} \cdot |e^{i\tau w}| \cdot |D^\beta \psi| \\ &\leq \tau^{s-|\beta|} \cdot M_2 \cdot \|x\|^{2(s-|\beta|)} \cdot e^{-\tau \operatorname{Im} w} \\ &= M_2 \cdot (\tau \|x\|^2)^{s-|\beta|} \cdot e^{-\tau \operatorname{Im} w}, \end{aligned}$$

onde M_2 é uma constante positiva. Como $\operatorname{Im} w(x) \geq a \cdot \|x\|^2$ e a exponencial é uma aplicação não-decrescente, segue que:

$$\frac{|e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi|}{\tau^{|\beta|-s}} \leq M_2 \cdot (\tau \|x\|^2)^{s-|\beta|} \cdot e^{-\tau a \cdot \|x\|^2}.$$

A expressão do lado direito da desigualdade acima é uma função limitada de $\tau \|x\|^2$, donde vale:

$$\sup |e^{i\tau w} \cdot D^\beta \psi| = O(\tau^{|\beta|-s}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Portanto, em qualquer caso vale o resultado. ■

Vejamos ainda mais uma observação que será utilizada na próxima seção.

Observação 3.3.11 *Dados $w \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\tau \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\partial^\alpha e^{i\tau w} = \begin{cases} (i\tau \nabla w)^\alpha e^{i\tau w} + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \tau^{|\beta|} R_\beta(x), & \text{se } |\alpha| \geq 1 \\ e^{i\tau w}, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases},$$

onde R_β não depende de τ .

De fato, vamos mostrar que vale esta fórmula através de indução sobre $|\alpha|$. Caso $|\alpha| = 1$, temos

$$\partial_j e^{i\tau w} = e^{i\tau w} (i\tau) \partial_j w = (i\tau \nabla w)^1 e^{i\tau w},$$

assim, vale a fórmula com $R_\beta = 0$.

Suponhamos válida a fórmula para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| > 1$ e mostremos que vale para $\alpha + e_j$, com $j = 1, \dots, n$. Como vale

$$\partial^\alpha e^{i\tau w} = (i\tau \nabla w)^\alpha e^{i\tau w} + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \tau^{|\beta|} R_\beta(x),$$

derivando com relação à x_j obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_j \partial^\alpha e^{i\tau w} &= e^{i\tau w} (i\tau)^\alpha \partial_j (\nabla w)^\alpha + (i\tau \nabla w)^\alpha (i\tau) (\nabla w)^{e_j} e^{i\tau w} + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \tau^{|\beta|} R_\beta(x) \\ &= i(\tau \nabla w)^{\alpha+e_j} e^{i\tau w} + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \tau^{|\beta|} R_\beta(x). \end{aligned}$$

Vale, portanto, a fórmula requerida.

3.4 Demonstração do Teorema 3.1.4

Esta seção está integralmente dedicada à demonstração do Teorema 3.1.4.

Demonstração do Teorema 3.1.4. Suponhamos, por absurdo, que (3.3) não é satisfeita. Então, conforme argumentamos na Observação 3.3.5, vamos supor que vale (3.17). Vamos mostrar que esta última afirmação implica que a equação (3.10) não é satisfeita para qualquer escolha de C , k e N , se ω é uma vizinhança da origem.

Primeiramente considerando $q = 2r$, com $r = n + m + k + N + 1$, pelo Lema 3.3.6, existe $w \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$p_m(x, \nabla w(x)) = O(\|x\|^{2r}), \quad x \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

e

$$w(x) = \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + O(\|x\|^3), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.30)$$

onde $[\alpha_{jk}]$ é simétrica com parte imaginária definida positiva.

Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1} \in C_c^\infty(\omega)$ e $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ funções ainda por serem determinadas. Definimos as aplicações

$$v_\tau(x) = \tau^{n+1+k} e^{i\tau w(x)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu(x) \tau^{-\nu} \quad \text{e} \quad f_\tau(x) = \tau^{-k} F(\tau x),$$

onde τ é um parâmetro que faremos tender ao infinito.

Como as funções φ_ν , para $\nu = 0, \dots, r-1$, tem suporte compacto em ω , segue que $v_\tau \in C_c^\infty(\omega)$, para qualquer τ . Como F tem suporte compacto em \mathbb{R}^n , para τ suficientemente grande, segue que $f_\tau \in C_c^\infty(\omega)$, uma vez que ω é uma vizinhança da origem.

Temos que:

$$\int_{S(F)} f_\tau(x) v_\tau(x) dx = \int_{S(F)} \tau^{n+1} F(\tau x) e^{i\tau w(x)} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu(x) \tau^{-\nu} \right) dx. \quad (3.31)$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \tau x$ na integral da direita e aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis obtemos

$$\int_{S(F)} \tau^{n+1} F(\tau x) e^{i\tau w(x)} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu(x) \tau^{-\nu} \right) dx = \int_{S(F)} \tau^{n+1} F(y) e^{i\tau w\left(\frac{y}{\tau}\right)} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu\left(\frac{y}{\tau}\right) \tau^{-\nu} \right) \tau^{-n} dy.$$

Voltando para a variável x , a igualdade em (3.31) se reduz à

$$\int f_\tau(x)v_\tau(x)dx = \tau \int_{S(F)} F(x)e^{i\tau w(\frac{x}{\tau})} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu \left(\frac{x}{\tau} \right) \tau^{-\nu} \right) dx.$$

Vamos mostrar que

$$F(x)e^{i\tau w(\frac{x}{\tau})} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu \left(\frac{x}{\tau} \right) \tau^{-\nu} \right) \longrightarrow F(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} \varphi_0(0)$$

uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$.

Primeiramente mostremos que $\tau w \left(\frac{x}{\tau} \right)$ converge uniformemente para $\langle x, \xi \rangle$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Temos que

$$\tau w \left(\frac{x}{\tau} \right) = \tau \left[\langle \frac{x}{\tau}, \xi \rangle + \frac{1}{2\tau^2} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + r \left(\frac{x}{\tau} \right) \right],$$

onde $r(x) = O(\|x\|^3)$, $x \rightarrow 0$. Donde

$$\tau w \left(\frac{x}{\tau} \right) - \langle x, \xi \rangle = \frac{1}{2\tau} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k + \tau r \left(\frac{x}{\tau} \right).$$

Verifiquemos que o lado direito da expressão acima converge uniformemente para zero quando $\tau \rightarrow \infty$.

Tomemos $C_1 = \sup_{x \in S(F)} \left| \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k \right|$, donde obtemos

$$\frac{1}{\tau} \left| \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k \right| \leq \frac{1}{\tau} C_1.$$

Provemos que $\tau r \left(\frac{x}{\tau} \right) = O \left(\left\| \frac{x}{\tau} \right\|^3 \right)$, $x \rightarrow 0$. Temos que existem constantes $M, \delta > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|^3} &\leq M, \text{ se } \|x\| < \delta \\ \left\| r \left(\frac{x}{\tau} \right) \right\| &\leq M, \text{ se } \left\| \frac{x}{\tau} \right\| < \delta \\ \frac{\left\| r \left(\frac{x}{\tau} \right) \right\|}{\left\| \frac{x}{\tau} \right\|^3} &\leq M, \text{ se } \left\| \frac{x}{\tau} \right\| < \delta \\ \left\| \tau r \left(\frac{x}{\tau} \right) \right\| &\leq M \frac{\|x\|^3}{\tau^2}, \text{ se } \left\| \frac{x}{\tau} \right\| < \delta \end{aligned}$$

Tomando $x \in S(F)$, $R > 0$ tal que $S(F) \subset B(0, R)$ e $\frac{R}{\delta} \leq \tau$, realmente conseguimos que

$\left\| \frac{x}{\tau} \right\| < \delta$. Logo,

$$r\left(\frac{x}{\tau}\right) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Daí segue que,

$$\tau w\left(\frac{x}{\tau}\right) \rightarrow \langle x, \xi \rangle$$

uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$.

Mostremos agora que

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_{\nu}\left(\frac{x}{\tau}\right) \tau^{-\nu} \rightarrow \varphi_0(0)$$

uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$.

Pela Fórmula de Taylor de ordem 1 de φ_0 em torno da origem, temos

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(0) + r(x),$$

onde $r(x) = o(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$.

Logo, $\varphi_0\left(\frac{x}{\tau}\right) = \varphi_0(0) + r\left(\frac{x}{\tau}\right)$. Mostremos que $r\left(\frac{x}{\tau}\right) = o\left(\left\|\frac{x}{\tau}\right\|\right)$, $x \rightarrow 0$.

Tomemos x tal que $\|x\| < R$, para algum $R > 0$ e consideremos $\tau > 1$. Então $\left\|\frac{x}{\tau}\right\| < \frac{R}{\tau} < R$, e, conseqüentemente, se $x \in B(0, R)$ e $\tau > 1$ então $\frac{x}{\tau} \in B(0, R)$. Então, do fato de $r(x) = o(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$, segue que $r\left(\frac{x}{\tau}\right) = o\left(\left\|\frac{x}{\tau}\right\|\right)$, $x \rightarrow 0$.

Assim, $\varphi_0\left(\frac{x}{\tau}\right) \rightarrow \varphi_0(0)$, uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$. Além disso, para cada $\nu = 1, \dots, r-1$, como φ_{ν} é contínua, temos que

$$\left\| \varphi_{\nu}\left(\frac{x}{\tau}\right) \right\| \leq C_{\nu}, \quad \forall x \in S(F) \text{ e } \tau \text{ suficientemente grande.}$$

Portanto,

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_{\nu}\left(\frac{x}{\tau}\right) \tau^{-\nu} \rightarrow \varphi_0(0),$$

uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$, concluindo assim a prova da convergência requerida.

Como a convergência obtida acima é uniforme temos que:

$$\int F(x) e^{i\tau w\left(\frac{x}{\tau}\right)} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_{\nu}\left(\frac{x}{\tau}\right) \tau^{-\nu} \right) dx \rightarrow \int F(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} \varphi_0(0) dx,$$

quando $\tau \rightarrow \infty$. Mas,

$$\int F(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} \varphi_0(0) dx = \hat{F}(-\xi) \varphi_0(0),$$

onde \hat{F} é a transformada de Fourier de F .

Assim,

$$\int f_\tau(x)v_\tau(x)dx \longrightarrow \tau \hat{F}(-\xi)\varphi_0(0),$$

quando $\tau \rightarrow \infty$.

Se escolhermos φ_0 e F de modo que $\varphi_0(0) = 1$ e $\hat{F}(-\xi) \neq 0$, obtemos que

$$\int f_\tau(x)v_\tau(x)dx \rightarrow \infty, \quad (3.32)$$

quando $\tau \rightarrow \infty$.

Por outro lado, se $|\alpha| \leq k$ e $\tau \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \sup |D^\alpha f_\tau| &= \sup |D^\alpha(\tau^{-k}F(\tau x))| \\ &= \sup |\tau^{-k}D^\alpha F(\tau x)| \\ &\leq \sup |D^\alpha F(\tau x)|. \end{aligned}$$

Como F tem suporte compacto, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup |D^\alpha f_\tau| \leq C_2, \quad |\alpha| \leq k, \quad \tau \geq 1. \quad (3.33)$$

Para provar que (3.10) não é válida resta mostrar que, para uma escolha adequada das funções $\varphi_0, \dots, \varphi_{r-1}$ e de uma constante C , teremos

$$\sup |D^\alpha {}^t P v_\tau| \leq C, \quad \tau \geq 1, \quad |\alpha| \leq N. \quad (3.34)$$

Se tomarmos ψ uma função qualquer em C^∞ , utilizando a Regra de Leibniz dada no Teorema 1.1.6, obtemos

$${}^t P(\psi e^{i\tau w}) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \psi e^{i\tau w}) \quad (3.35)$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} (a_\alpha \psi) \cdot D^\beta e^{i\tau w} \quad (3.36)$$

Notemos que cada parcela de $D^\beta e^{i\tau w}$ pode ser escrita da forma:

$$(i\tau)^{\gamma_1} \cdot e^{i\tau w} \cdot D^{\gamma_2} w \cdot (\nabla w)^{\gamma_3}, \quad (3.37)$$

onde $0 \leq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leq \beta$.

Assim, (3.36) fica

$${}^t P(\psi e^{i\tau w}) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} (a_\alpha \psi) \cdot \left(\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leq \beta} (i\tau)^{\gamma_1} e^{i\tau w} D^{\gamma_2} w \cdot (\nabla w)^{\gamma_3} \right).$$

Podemos escrever essa última expressão como:

$${}^tP(\psi e^{i\tau w}) = \sum_{l=0}^m c_l \tau^l e^{i\tau w}, \quad (3.38)$$

onde, para cada $l = 0, \dots, m$, $c_l \in C^\infty$ e reúne todos os termos que não dependem de τ .

Utilizando a relação obtida em (3.35) e trocando D^α por $(-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$, obtemos:

$${}^tP(\psi e^{i\tau w}) = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}(a_\alpha \psi) \cdot \partial^\beta e^{i\tau w}. \quad (3.39)$$

Estamos interessados em explicitar os coeficientes de $\tau^m e^{i\tau w}$ e $\tau^{m-1} e^{i\tau w}$ na igualdade (3.39), por isso analisaremos as parcelas referentes aos casos em que $|\beta| = m$ e $|\beta| = m - 1$. Temos assim três casos à considerar:

- (i) $|\alpha| = m$ e $|\beta| = m$, donde $\alpha = \beta$;
- (ii) $|\alpha| = m$ e $|\beta| = m - 1$, donde $\alpha = \beta + e_j$, para algum $j = 1, \dots, n$;
- (iii) $|\alpha| = m - 1$ e $|\beta| = m - 1$, donde $\alpha = \beta$.

Reescrevendo o somatório em (3.39) separando nas parcelas que nos interessam segue

$$\begin{aligned} {}^tP(\psi e^{i\tau w}) &= \sum_{|\alpha|=m} i^m a_\alpha \psi \partial^\alpha e^{i\tau w} + \sum_{|\alpha|=m} i^m \sum_{j=1}^n \partial_j(a_\alpha \psi) \partial^{\alpha-e_j} e^{i\tau w} + \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m-1} i^{m-1} a_\alpha \psi \partial^\alpha e^{i\tau w} + R_1 \\ &= \psi \cdot \sum_{|\alpha|=m} i^m a_\alpha \partial^\alpha e^{i\tau w} + \psi \cdot \sum_{|\alpha|=m} i^m \sum_{j=1}^n \partial_j a_\alpha \partial^{\alpha-e_j} e^{i\tau w} + \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} i^m \sum_{j=1}^n a_\alpha \partial_j \psi \partial^{\alpha-e_j} e^{i\tau w} + \psi \cdot \sum_{|\alpha|=m-1} i^{m-1} a_\alpha \partial^\alpha e^{i\tau w} + R_1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde R_1 é um termo que contém todas as potências de τ de ordem menor que $m - 1$.

O coeficiente de $\tau^m e^{i\tau w}$ é calculado usando o primeiro somatório em (3.40). Utilizando a Observação 3.3.11 podemos reescrever este primeiro somatório como

$$\psi \cdot \left(\sum_{|\alpha|=m} i^m a_\alpha (i\tau \nabla w)^\alpha e^{i\tau w} + R_2 \right),$$

onde R_2 contém todas as potências de τ de ordem menor que m .

Assim, o coeficiente que acompanha o termo $\tau^m e^{i\tau w}$ é dado por

$$\begin{aligned} \psi \cdot \sum_{|\alpha|=m} i^m a_\alpha i^m (\nabla w)^\alpha &= \psi \cdot \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (-\nabla w)^\alpha \\ &= \psi p_m(x, -\nabla w). \end{aligned}$$

Já o coeficiente que acompanha o termo $\tau^{m-1} e^{i\tau w}$ é calculado analisando todos os termos que aparecem em (3.40), excluindo obviamente o resto R_1 . Mas os coeficientes de $\tau^{m-1} e^{i\tau w}$ presentes nos primeiro, segundo e quarto termos em (3.40) podem ser escritos da forma

$$B\psi, \tag{3.41}$$

onde B depende somente dos coeficientes a_α 's e de w , não dependendo de ψ . Além disso, obviamente $B \in C^\infty$.

Pela Observação 3.3.11, o terceiro somatório em (3.40) pode ser escrito como

$$\sum_{|\alpha|=m} i^m \sum_{j=1}^n a_\alpha \partial_j \psi \left((i\tau \nabla w)^{\alpha-e_j} e^{i\tau w} + R_3 \right).$$

Consequentemente, o coeficiente que acompanha $\tau^{m-1} e^{i\tau w}$ nesta parcela é dado por

$$\sum_{|\alpha|=m} i^{2m-1} \sum_{j=1}^n a_\alpha \partial_j \psi (\nabla w)^{\alpha-e_j},$$

trocando a ordem dos somatórios, ficamos com

$$\begin{aligned} (-1)^m (-i) \sum_{j=1}^n \partial_j \psi \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (\nabla w)^{\alpha-e_j} &= (-1)^{m-1} (-1) \sum_{j=1}^n D_j \psi \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (\nabla w)^{\alpha-e_j} \\ &= (-1) \sum_{j=1}^n D_j \psi \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (-\nabla w)^{\alpha-e_j} \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \psi \left(- \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (-\nabla w)^{\alpha-e_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \psi \left(-p_m^{(j)}(x, -\nabla w) \right). \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente que acompanha $\tau^{m-1} e^{i\tau w}$ é dado por

$$\sum_{j=1}^n D_j \psi \left(-p_m^{(j)}(x, -\nabla w) \right) + B\psi. \tag{3.42}$$

Notemos que tendo estabelecidos estes coeficientes temos quem são os termos c_m

e c_{m-1} em (3.38):

$$c_m = A\psi \quad \text{e} \quad c_{m-1} = \sum_{j=1}^n A_j D_j \psi + B\psi, \quad (3.43)$$

onde $A = p_m(x, -\nabla w(x))$ e $A_j = -p_m^{(j)}(x, -\nabla w(x))$, para cada $j = 1, \dots, n$.

Notemos que se $p_m(x, \nabla w(x)) = O(\|x\|^{2r})$, $x \rightarrow 0$, então $p_m(x, -\nabla w(x)) = O(\|x\|^{2r})$, $x \rightarrow 0$. De fato, como

$$p_m(x, -\nabla w(x)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} (\nabla w)^\alpha,$$

o termo $(-1)^{|\alpha|}$ é 1 ou -1 em todos os termos do somatório, uma vez que $|\alpha|$ está fixo igual à m . Mas em qualquer um dos casos, $|p_m(x, \nabla w(x))| = |p_m(x, -\nabla w(x))|$, donde segue a afirmação.

Assim, de (3.29) segue que

$$A(x) = O(\|x\|^{2r}), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.44)$$

Como o termo C_{2m-1} é homogêneo de grau $2m - 1$ na variável ξ , temos que $C_{2m-1}(x, -\xi) = -C_{2m-1}(x, \xi)$. Como estamos supondo $C_{2m-1}(0, \xi) \neq 0$, segue que $C_{2m-1}(0, -\xi) \neq 0$. Assim podemos admitir que $p_m^{(j)}(0, -\xi) \neq 0$, para algum $j = 1, \dots, n$, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Lema 3.3.6. Logo, $A_j(0) \neq 0$, para algum $j = 1, \dots, n$.

Temos que

$$\begin{aligned} {}^t P v_\tau &= {}^t P \left(\tau^{n+1+k} e^{i\tau w(x)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_\nu(x) \tau^{-\nu} \right) \\ &= \tau^{n+1+k} \left({}^t P(\varphi_0 e^{i\tau w}) + {}^t P \left(\frac{\varphi_1}{\tau} e^{i\tau w} \right) + \dots + {}^t P \left(\frac{\varphi_{r-1}}{\tau^{r-1}} e^{i\tau w} \right) \right). \end{aligned}$$

Usaremos (3.38) substituindo ψ por cada uma das aplicações φ_ν , $\nu = 1, \dots, r - 1$. Lembrando que $r = n + m + k + N + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \tau^{n+1+k} {}^t P(\varphi_0 e^{i\tau w}) &= \tau^{r-N-m} e^{i\tau w} \sum_{l=0}^m c_l^0 \tau^l \\ &= \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{l=-m}^0 c_{-l}^0 \tau^{-l-m}. \end{aligned}$$

Tomando $\mu = m + l$ e $a_\mu^0 = c_{-l}^0$, o somatório acima ficará:

$$\tau^{n+1+k} {}^tP(\varphi_0 e^{i\tau w}) = \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{\mu=0}^m a_\mu^0 \tau^{-\mu}.$$

Analisemos agora a parcela em que aparece φ_1 , temos

$$\begin{aligned} \tau^{n+1+k} \cdot \frac{1}{\tau} {}^tP(\varphi_1 e^{i\tau w}) &= \tau^{r-N-m-1} e^{i\tau w} \sum_{l=0}^m c_l^1 \tau^l \\ &= \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{l=-m}^0 c_{-l}^1 \tau^{-l-m-1}. \end{aligned}$$

Tomemos $\mu = l + m + 1$ e $a_\mu^1 = c_{-l}^1$, e o somatório acima ficará:

$$\tau^{n+1+k} {}^tP\left(\frac{\varphi_1}{\tau} e^{i\tau w}\right) = \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{\mu=1}^{m+1} a_\mu^1 \tau^{-\mu}.$$

Prosseguindo desta maneira até o caso φ_{r-1} , obtendo:

$$\begin{aligned} \tau^{n+1+k} \cdot \frac{1}{\tau^{r-1}} {}^tP(\varphi_{r-1} e^{i\tau w}) &= \tau^{r-N-m-r+1} e^{i\tau w} \sum_{l=0}^m c_l^{r-1} \tau^l \\ &= \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{l=-m}^0 c_{-l}^{r-1} \tau^{-l-m-r+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $\mu = l + m + r - 1$ e $a_\mu^{r-1} = c_{-l}^{r-1}$, ficando a expressão anterior reduzida à

$$\tau^{n+1+k} {}^tP\left(\frac{\varphi_{r-1}}{\tau^{r-1}} e^{i\tau w}\right) = \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{\mu=r-1}^{m+r-1} a_\mu^{r-1} \tau^{-\mu}.$$

Assim,

$${}^tPv_\tau = \tau^{r-N} e^{i\tau w} \sum_{\mu=0}^{m+r-1} a_\mu \tau^{-\mu}, \quad (3.45)$$

onde a_μ é uma combinação dos termos a_μ^ν , para $\nu = 0, \dots, r-1$. Vejamos uma fórmula explícita para estes termos.

Como $c_m^\nu = A\varphi_\nu$ e $c_{m-1}^\nu = \sum_{j=1}^n A_j D_j \varphi_\nu + B\varphi_\nu$, para todo $\nu = 0, \dots, r-1$, temos que

$$a_0 = a_0^0 = c_m^0 = A\varphi_0,$$

$$a_1 = a_1^0 + a_1^1 = c_{m-1}^0 + c_m^1 = \sum_{j=1}^n A_j D_j \varphi_0 + B\varphi_0 + A\varphi_1$$

e

$$a_2 = a_2^0 + a_2^1 + a_2^2 = c_{m-2}^0 + c_{m-1}^1 + c_m^2 = c_{m-2}^0 + \sum_{j=1}^n A_j D_j \varphi_1 + B\varphi_1 + A\varphi_2,$$

onde c_{m-2}^0 é uma combinação de φ_0 e suas derivadas.

Caso $\nu \geq r$, vamos interpretar φ_ν como 0, e assim podemos obter uma fórmula geral para os coeficientes a_μ que é dada por

$$a_\mu = A\varphi_\mu + \sum_{j=1}^n A_j D_j \varphi_{\mu-1} + B\varphi_{\mu-1} + L_\mu, \quad (3.46)$$

onde L_μ é uma combinação linear de funções φ_ν , com $\nu < \mu - 1$, e suas derivadas.

Vamos agora escolher as funções $\varphi_\nu \in C_c^\infty(\omega)$ de modo que $\varphi_0(0) = 1$ e ocorra

$$a_\mu(x) = O(\|x\|^{2(r-\mu)}), \quad x \rightarrow 0, \quad \mu \leq r. \quad (3.47)$$

Caso $\mu = 0$, tomemos $\varphi_0 \in C_c^\infty(\omega)$ qualquer satisfazendo $\varphi_0(0) = 1$. Como $a_0 = A\varphi_0$ e de (3.44) vale $A(x) = O(\|x\|^{2r})$, $x \rightarrow 0$, obtemos que existem constantes $C_3, \delta > 0$ tais que, se $\|x\| < \delta$, vale

$$\begin{aligned} \frac{|a_0(x)|}{\|x\|^{2r}} &= \frac{|A(x)||\varphi_0(x)|}{\|x\|^{2r}} \\ &\leq \frac{C_4|A(x)|}{\|x\|^{2r}} \\ &\leq C_4 \cdot C_3 = K_1, \end{aligned}$$

onde, $C_4 = \sup_{x \in \omega} |\varphi_0(x)|$. Assim,

$$a_0(x) = O(\|x\|^{2r}), \quad x \rightarrow 0.$$

Como vamos escolher todas φ_μ de modo que $\varphi_\mu \in C_c^\infty(\omega)$ e também sempre vale (3.44), temos que, se $\|x\| < \delta$,

$$\begin{aligned} \frac{|A(x)||\varphi_\mu(x)|}{\|x\|^{2r}} &= \frac{|A(x)|}{\|x\|^{2r}} |\varphi_\mu(x)| \\ &\leq C_3 \cdot C_5 = K_2, \end{aligned}$$

onde $C_5 = \sup_{x \in \omega} |\varphi_\mu(x)|$. Donde

$$A\varphi_\mu = O(\|x\|^{2r}), \quad \forall \mu = 0, 1, \dots$$

Assim, o termo $A\varphi_\mu$ é irrelevante na obtenção de (3.47). Vamos, portanto, escolher as aplicações $\varphi_{\mu-1}$ de modo que

$$\sum_{j=1}^n A_j D_j \varphi_{\mu-1} + B\varphi_{\mu-1} + L_\mu = O(\|x\|^{2(r-\mu)}), \quad \mu \leq r, \quad x \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Faremos a escolha das φ_ν por indução. Suponhamos que todas as φ_ν , com $\nu < \mu-1$ já foram escolhidas e que $1 \leq \mu \leq r$. Para escolhermos $\varphi_{\mu-1}$ podemos assumir que os termos A_j , B e L_μ são analíticos. Isto decorre do fato que (3.48) não muda se trocarmos essas funções infinitamente diferenciáveis por suas fórmulas de Taylor de ordem $2r$ em torno da origem (analogamente ao que argumentamos na Observação 3.3.8).

Assim pelo Corolário 3.2.2 do Teorema de Cauchy-Kovalevsky encontramos uma solução para a equação

$$\sum_{j=1}^n A_j D_j \Phi_{\mu-1} + B\Phi_{\mu-1} + L_\mu = 0 \quad (3.49)$$

em uma vizinhança V da origem.

O mesmo argumento utilizado na prova do Lema 3.3.6 nos garante que se multiplicarmos a solução obtida $\Phi_{\mu-1}$ por uma função em $C_c^\infty(\omega \cap V)$ que é igual à 1 em outra vizinhança da origem, obteremos uma função $\varphi_{\mu-1} \in C_c^\infty(\omega)$ que satisfaz (3.48).

Notemos que:

$$\begin{aligned} \sup |D^\alpha {}^t P v_\tau(x)| &= \sup \left| D^\alpha \left(\tau^{r-N} e^{i\tau w(x)} \sum_{\mu=0}^{m+r-1} a_\mu(x) \tau^{-\mu} \right) \right| \\ &= \tau^{r-N} \cdot \sup \left| D^\alpha \left(\sum_{\mu=0}^{m+r-1} a_\mu(x) \tau^{-\mu} e^{i\tau w(x)} \right) \right| \\ &= \tau^{r-N} \cdot \sup \left| \sum_{\mu=0}^{m+r-1} D^\alpha (a_\mu(x) \tau^{-\mu} e^{i\tau w(x)}) \right| \\ &\leq \tau^{r-N} \cdot \sup \sum_{\mu=0}^{m+r-1} \tau^{-\mu} \cdot |D^\alpha (a_\mu(x) e^{i\tau w(x)})| \\ &\leq \tau^{r-N} \cdot \sum_{\mu=0}^{m+r-1} \tau^{-\mu} \cdot \sup |D^\alpha (a_\mu(x) e^{i\tau w(x)})|. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Logo, para mostrarmos que vale (3.34), basta mostrar que $\sup |D^\alpha (a_\mu(x) e^{i\tau w(x)})|$ existe. Combinando o Lema 3.3.10 com a equação (3.47), obtemos que

$$\sup |D^\alpha (a_\mu(x) e^{i\tau w(x)})| = O(\tau^{|\alpha|-r+\mu}), \quad \mu \leq r, \quad |\alpha| \leq N, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (3.51)$$

ou seja,

$$\sup |D^\alpha(a_\mu(x)e^{i\tau w(x)})| \leq C_6 \cdot \tau^{|\alpha|-r+\mu}, \quad \mu \leq r, \quad |\alpha| \leq N, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (3.52)$$

onde, C_6 é uma constante positiva.

Considerando τ suficientemente grande, de (3.50) resulta que

$$\begin{aligned} \sup |D^\alpha {}^t P v_\tau(x)| &\leq \tau^{r-N} \cdot \sum_{\mu=0}^{m+r-1} \tau^{-\mu} \cdot C_6 \cdot \tau^{|\alpha|-r+\mu} \\ &= \tau^{r-N} \sum_{\mu=0}^{m+r-1} C_6 \cdot \tau^{|\alpha|-r} \\ &= \tau^{r-N} \cdot (m+r-1) \cdot C_6 \cdot \tau^{|\alpha|-r} \\ &= (m+r-1) \cdot C_6 \cdot \tau^{|\alpha|-N} \\ &= \frac{(m+r-1) \cdot C_6}{\tau^{N-|\alpha|}} \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Combinando as equações (3.32), (3.33) e (3.53) chegamos em uma contradição com a equação (3.10).

■

Conclusão

Neste trabalho fizemos a abordagem de um teorema de Lars Hörmander que fornece uma condição necessária para a resolubilidade global de Operadores Diferenciais Lineares com coeficientes variáveis. Esse resultado apresenta uma explicação do fenômeno detectado por Hans Lewy alguns anos antes.

Sua demonstração começa utilizando resultados da teoria de espaços localmente convexos para provar que a resolubilidade global de um operador linear implica em uma desigualdade envolvendo o transposto do operador. A segunda parte é mais elaborada e consiste em violar tal desigualdade.

Notamos que apesar da dificuldade na demonstração do resultado principal, ele é de fácil aplicação para determinar que alguns operadores historicamente relevantes não são resolúveis.

Para que o objetivo principal fosse alcançado, foi necessário o estudo de muitos resultados de diversas áreas da Análise, como Medida e Integração, Espaços Vetoriais Topológicos, Análise Funcional, Distribuições, além de Topologia Geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CARPES, H. P. **Resolubilidade global de operadores lineares com coeficientes constantes**. 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.
- [2] CORDARO, P. D. **Resolubilidade das Equações Diferenciais Parciais Lineares**. *Matemática Universitária*, N° 14, 51-67, 1992.
- [3] EHRENPREIS, L. **Solutions some problems division: Part I. Division by a polynomial of derivation**. *American Journal of Mathematics*, vol 76, 4, 883-903, 1954.
- [4] FOLLAND, G. **Real Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [5] GARABEDIAN, P. R. **An unsolvable equation**. *American Mathematical Society*, Vol 25, 207-208, 1970.
- [6] GRUSHIN, V. V. **A differential equation without a solution**. *Mat. Zametki*, 10, 125-128, 1971.
- [7] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [8] HÖRMANDER, L. **Differential Equations without Solutions**. *Math. Annalen*, 140, 169-173, 1960.
- [9] HÖRMANDER, L. **Linear Partial Differential Operators**. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [10] HÖRMANDER, L. **On the theory of general Partial Differential Operators**. *Acta Mathematica*, 94, 162-248, 1955.
- [11] HORVÁTH, J. **Topological Vector Spaces and Distributions**. New York: Addison-Wesley, 1966.
- [12] LEWY, H. **An example of a smooth Linear Partial Differential Equation without solution**. *Annals of Mathematics*, Vol 66, 1, 155-158, 1957.
- [13] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11. ed. Vol.2, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

- [14] MALGRANGE, B. **Existence et approximation des solutions des equations aux dérivées partielles et des équations de convolution.** Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 6, 271-335, 1955-56.
- [15] RUDIN, W. **Functional Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1973.
- [16] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1970.
- [17] TREVES, F. **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.** San Diego: Academic Press, 1967.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Resultados de Medida e Integração

Para maiores detalhes sobre a Teoria da Medida e demonstrações dos resultados, consultar [4] e [16].

Definição A.1.1 *Seja X um conjunto não-vazio.*

(i) *Uma álgebra em X é uma coleção não-vazia \mathcal{A} de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:*

(a) *se $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$;*

(b) *se $E \in \mathcal{A}$ então $E^c \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Uma σ -álgebra em X é uma álgebra em X que é fechada com relação à união enumerável, isto é, se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma coleção de elementos de \mathcal{A} então $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathcal{A}$.*

Observação A.1.2 (i) *As álgebras (respectivamente σ -álgebras) são também fechadas com relação à interseção finita (respectivamente enumerável);*

(ii) *a interseção de uma família qualquer de σ -álgebras em X é ainda uma σ -álgebra em X .*

Definição A.1.3 *Se \mathcal{C} é uma coleção de subconjuntos de X , então a interseção de todas as σ -álgebras em X que contém \mathcal{C} é chamada σ -álgebra gerada por \mathcal{C} .*

Definição A.1.4 *Se X é um espaço métrico, ou mais geralmente, um espaço topológico, então a σ -álgebra gerada pela coleção de conjuntos abertos de X é chamada σ -álgebra de Borel em X e é denotada por \mathcal{B}_X .*

Definição A.1.5 *Seja $\{X_\alpha\}$ uma coleção de conjuntos não-vazios, $X = \prod_{\alpha} X_\alpha$ e $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ a aplicação projeção ($\pi_\alpha(x) = x_\alpha$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots)$). Se, para cada*

α , \mathcal{M}_α é uma σ -álgebra em X_α , definimos a σ -álgebra produto em X como a σ -álgebra gerada por:

$$\{(\pi_\alpha(E_\alpha))^{-1}; E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}.$$

Denotamos essa σ -álgebra por $\bigotimes_\alpha \mathcal{M}_\alpha$.

Teorema A.1.6 *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n espaços métricos e $X = \prod_{j=1}^n X_j$ equipado com a métrica do produto. Então $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. Se cada X_j é separável, então $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.*

Corolário A.1.7 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Definição A.1.8 *Se \mathcal{M} é uma σ -álgebra no conjunto não vazio X , então (X, \mathcal{M}) é dito um espaço mensurável. Uma medida em (X, \mathcal{M}) é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) se $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em \mathcal{M} , então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j).$$

Neste caso, (X, \mathcal{M}, μ) é chamado um espaço de medida.

Definição A.1.9 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.*

- (i) se $\mu(X) < \infty$, então μ é chamada uma medida finita;
- (ii) se $X = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, onde $E_j \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_j) < \infty$, para todo j , então μ é chamada uma medida σ -finita.

Teorema A.1.10 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.*

- (i) se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- (ii) se $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, então $\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$;
- (iii) se $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ e $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, então $\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$;
- (iv) se $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu\left(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$.

Definição A.1.11 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.

- (i) um conjunto $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ é chamado conjunto de medida nula;
- (ii) se uma afirmação sobre pontos $x \in X$ é verdade exceto para x em algum conjunto de medida nula, dizemos que essa afirmação é verdade μ -q.t.p.. Aqui q.t.p. é a abreviação de quase todo ponto;
- (iii) seja $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) = 0$. Se $F \subset E$ implicar $F \in \mathcal{M}$ então μ é chamada medida completa.

Teorema A.1.12 Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função crescente, contínua à direita, existe uma única medida de Borel μ_F em \mathbb{R} (medidas em \mathbb{R} cujo domínio é a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) tal que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$, para todo a, b . Se G é outra função com as mesmas propriedades de F então $\mu_F = \mu_G \Leftrightarrow F - G$ é constante.

Definição A.1.13 O complemento da medida de Borel em \mathbb{R} citada no Teorema A.1.12 é uma medida completa em \mathbb{R} , denotada por $\overline{\mu}_F$, cujo domínio é denotado por \mathcal{M}_{μ} . Esta medida completa é chamada de medida de Lebesgue-Stieltjes associada à F .

Lema A.1.14 Para cada $E \in \mathcal{M}_{\mu}$ vale:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)); E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]); E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\}.$$

Teorema A.1.15 Se $E \in \mathcal{M}_{\mu}$, então:

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U); U \supset E \text{ e } U \text{ é aberto} \} = \sup \{ \mu(K); K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto} \}.$$

Definição A.1.16 A medida completa $\overline{\mu}_F$ associada à função $F(x) = x$ é chamada medida de Lebesgue e é denotada por m . O domínio de m é chamado de σ -álgebra de Lebesgue em \mathbb{R} e é denotado por \mathcal{L} .

Exemplo A.1.17 Todo conjunto formado somente por um ponto em \mathbb{R} tem medida de Lebesgue nula. Portanto, o mesmo ocorre para qualquer conjunto enumerável.

Definição A.1.18 Se (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) são espaços mensuráveis e f é uma aplicação de X em Y , então f é chamada mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, para todo $E \in \mathcal{N}$.

Por vezes é conveniente considerar funções com valores em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Definimos os conjuntos de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$ como

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{ E \subset \overline{\mathbb{R}}; E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}.$$

Se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável, uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ será chamada mensurável se f for mensurável quando consideramos em $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} suas respectivas σ -álgebras de Borel.

Teorema A.1.19 *Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável.*

- (i) *se $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ são mensuráveis então também o são $f + g$ e $f \cdot g$;*
- (ii) *se (f_j) é uma sequência de funções mensuráveis em (X, \mathcal{M}) , tais que $f_j : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, então são mensuráveis as funções:*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sup_j f_j(x) & g_2(x) &= \inf_j f_j(x) \\ g_3(x) &= \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x) & g_4(x) &= \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x). \end{aligned}$$

Se $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x)$ existe para cada $x \in X$, então f é mensurável.

Definição A.1.20 *Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Se $E \subset X$, a função característica χ_E de E é definida por:*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}.$$

Definição A.1.21 *Uma função $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável cuja imagem é um subconjunto finito de \mathbb{C} é chamada de função simples. Logo, se a imagem de ϕ é igual a $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ então*

$$\phi = \sum_1^n z_j \chi_{E_j}, \text{ onde } E_j = \phi^{-1}(\{z_j\}).$$

Teorema A.1.22 *Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável então existe uma sequência de funções simples (ϕ_j) tal que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$, $\phi_j \rightarrow f$ pontualmente e $\phi_j \rightarrow f$ uniformemente em cada conjunto no qual f é limitada.*

Teorema A.1.23 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas se a medida μ é completa:*

- (i) *se f é mensurável e $f = g, \mu - q.t.p.$, então g é mensurável;*
- (ii) *se f_j é mensurável para cada $j \in \mathbb{N}$ e $f_j \rightarrow f, \mu - q.t.p.$, então f é mensurável.*

Definição A.1.24 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Definimos:*

- (i) L^+ *como o espaço de todas as funções mensuráveis $f : X \rightarrow [0, \infty]$;*

(ii) seja ϕ uma função simples em L^+ como na definição A.1.21. Escrevendo

$$\phi = \sum_{j=1}^n z_j \chi_{E_j},$$

definimos a integral de ϕ com relação à medida μ como

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n z_j \mu(E_j);$$

(iii) se $A \in \mathcal{M}$ então

$$\int_A \phi \, d\mu = \int \phi \chi_A \, d\mu;$$

(iv) se $f \in L^+$ definimos

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu; \phi \in L^+ \text{ é uma função simples com } 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Teorema A.1.25 (Teorema da Convergência Monótona) *Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, (f_j) uma seqüência de funções em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j (= \sup_j f_j)$ pontualmente. Então f é mensurável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \, d\mu.$$

Lema A.1.26 (Lema de Fatou) *Se (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida e (f_j) é uma seqüência em L^+ , então*

$$\int \liminf f_j \, d\mu \leq \liminf \int f_j \, d\mu.$$

Definição A.1.27 *Se $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, definimos as partes positiva e negativa de f , respectivamente, por:*

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Definição A.1.28 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.*

(i) *Seja $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Dizemos que f é integrável se ambas as integrais $\int f^+ \, d\mu$ e $\int f^- \, d\mu$ são finitas. Nesse caso definimos a integral de f por*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu;$$

(ii) seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável. Dizemos que f é integrável se funções $Re(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $Im(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis. Nesse caso definimos

$$\int f \, d\mu = \int Re(f) d\mu + i \int Im(f) \, d\mu.$$

Denotamos o conjunto das funções integráveis por $L^1(\mu)$.

Teorema A.1.29 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e (f_j) uma sequência de funções em $L^1(\mu)$ que cumpre as seguintes condições:*

(i) $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ q.t.p.;

(ii) existe uma função $g \in L^1(\mu)$ não-negativa tal que $|f_j| \leq g$ q.t.p., para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\mu)$ e

$$\int f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \, d\mu.$$

Teorema A.1.30 *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Suponha que $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que para cada $t \in [a, b]$ a aplicação $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável. Para cada $t \in [a, b]$ defina $F(t) = \int_X f(x, t) \, d\mu$.*

(i) *Suponha que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$.*

Se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$, para cada $x \in X$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(x, t) \, d\mu = \int_X \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) \, d\mu.$$

(ii) *Suponha que $\frac{df}{dt}$ existe em todos os pontos de $X \times [a, b]$ e existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\left| \frac{df}{dt}(x, t) \right| \leq g(x)$, para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Então F é diferenciável e*

$$F'(t) = \int_X \frac{df}{dt}(x, t) \, d\mu,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x, t) \, d\mu = \int_X \frac{df}{dt}(x, t) \, d\mu.$$

Definição A.1.31 Se f é uma aplicação definida em $X \times Y$, definimos a seção- x f_x e a seção- y f^y de f por:

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Teorema A.1.32 (Teorema de Fubini) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espaços de medida σ -finitos.

(i) Se $f \in L^+(X \times Y)$, então as funções $g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ e $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ estão em $L^+(X)$ e $L^+(Y)$, respectivamente, e

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \, d\nu \right] d\mu = \int_Y \left[\int_X f(x, y) \, d\mu \right] d\nu;$$

(ii) Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$ então $f_x \in L^1(\nu)$ para q.t.p. $x \in X$ e $f^y \in L^1(\mu)$ para q.t.p. $y \in Y$ e as funções $g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ e $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ estão em $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$, respectivamente, e permanece válido

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \, d\nu \right] d\mu = \int_Y \left[\int_X f(x, y) \, d\mu \right] d\nu.$$

Definição A.1.33 Definimos a medida de Lebesgue m^n em \mathbb{R}^n como o complemento de $m \times \dots \times m$. O domínio \mathcal{L}^n de m^n é a classe de conjuntos em \mathbb{R}^n mensuráveis à Lebesgue. Para não carregar a notação, usaremos a partir daqui m em vez de m^n .

Todos os resultados colocados acima continuam válidos para a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n .

Teorema A.1.34 Sejam Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 . Valem:

(i) se f é uma função mensurável à Lebesgue em $G(\Omega)$, então $f \circ G$ é mensurável à Lebesgue em Ω . Se $f \geq 0$ ou $f \in L^1(G(\Omega), m)$, então

$$\int_{G(\Omega)} f(x) \, dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(x) |\det D_x G| \, dx,$$

onde $D_x G$ é a matriz jacobiana da aplicação G ;

(ii) se $E \subset \Omega$ e $E \in \mathcal{L}^n$, então $G(E) \in \mathcal{L}^n$ e

$$m(G(E)) = \int_E |\det D_x G| \, dx.$$

Definição A.1.35 *Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável e $1 \leq p < \infty$. Defina:*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

e $L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}$. Abreviamos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p(\mu)$, $L^p(X)$ ou L^p quando isto não causar confusão.

Temos que $\|f\|_p$ não define uma norma em L^p (pode ocorrer que $\|f\|_p = 0$ sem que $f \equiv 0$). Para definir uma norma em L^p usamos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ q.t.p..}$$

Consideramos o espaço vetorial quociente L^p / \sim e $[f]$ a classe da função $f \in L^p$. Então L^p / \sim é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Para não carregar a notação, a partir de agora denotaremos $[f]$ por f e L^p / \sim por L^p .

Definição A.1.36 *Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável, definimos:*

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0; \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

$\|f\|_\infty$ é chamado de supremo essencial de $|f|$. Definimos $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}$.

Teorema A.1.37 (Desigualdade de Hölder) *Sejam (X, M, μ) um espaço de medida, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ funções mensuráveis. Se p e q são tais que $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Em particular, se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$.

Definição A.1.38 *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então a sua Transformada de Fourier é a aplicação $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \cdot f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema A.1.39 (Plancherel) *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\hat{f}\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \|f\|_2$.*

Teorema A.1.40 *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \cdot \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A.2 Resultados de Distribuições

Nesta seção veremos noções básicas referente às distribuições. Usamos como referência [7].

Teorema A.2.1 *Para cada aberto Ω de \mathbb{R}^n existe uma sequência $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de Ω com as seguintes propriedades:*

$$(i) \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega;$$

$$(ii) K_j \subset \text{int}K_{j+1}, j = 1, 2, \dots;$$

$$(iii) \text{ para cada } K \subset\subset \Omega, \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } j \geq j_0 \Rightarrow K \subset K_j.$$

Neste caso, dizemos que a sequência de compactos $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ esgota Ω . No estudo de distribuições, é usual chamar os elementos de $C_c^\infty(\Omega)$ de funções teste. O próximo exemplo ilustra a existência de funções teste.

Exemplo A.2.2 *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{|x|^2 - 1}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

então $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi \leq 1$ e $S(\phi) = B[0, 1]$.

Dividindo a aplicação ϕ , definida no exemplo acima, por sua integral obtemos uma nova aplicação, que continuaremos a denotar por ϕ , com as seguintes propriedades:

$$\phi \geq 0, S(\phi) = B[0, 1] \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1.$$

Considerando essa nova ϕ e para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^n.$$

Assim, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, a aplicação

$$x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{A.1}$$

é não negativa, tem suporte igual a $B[0, \varepsilon]$ e integral igual a 1.

Veremos a seguir que as funções teste podem ser utilizadas para regularizar funções descontínuas.

Definição A.2.3 Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ se f é mensurável à Lebesgue e para todo $K \subset\subset \Omega$ vale

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Definição A.2.4 Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução de f e g como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se, para cada $\varepsilon > 0$, tomarmos g igual a aplicação de A.1, obtemos uma família de funções (f_ε) dadas por

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y) dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.2})$$

As aplicações (f_ε) são chamadas de regularizadas de f .

Teorema A.2.5 Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ valem:

- (i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) $S(f_\varepsilon) \subset S(f) + B[0, \varepsilon]$. Em particular, se $S(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$, então $f_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$;
- (iii) se f é contínua e $S(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ então $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observação A.2.6 O resultado acima justifica denominarmos a família de funções f_ε de regularizadas de f .

Corolário A.2.7 Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então suas regularizadas têm as seguintes propriedades adicionais:

- (i) $\|f_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1$;
- (ii) $\|f_\varepsilon - f\|_1 \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (iii) $\|f_\varepsilon\|_1 \rightarrow \|f\|_1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Teorema A.2.8 Se $1 \leq p < \infty$ então $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

Teorema A.2.9 Seja $K \subset\subset \Omega$. Existe $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ em uma vizinhança de K .

A convergência de uma sequência no espaço $C^\infty_c(\Omega)$ é dada no Teorema 2.5.2.

Definição A.2.10 Um funcional linear contínuo $u : C^\infty_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω . O espaço das distribuições em Ω será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A definição de distribuição significa que se $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2)$$

e

$$\phi_j \rightarrow 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\phi_j) \rightarrow 0 = u(0).$$

Quando conveniente escreveremos $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

O próximo exemplo mostra que o espaço das distribuições é suficientemente grande de modo a conter todas as funções localmente integráveis.

Exemplo A.2.11 Dada $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, defina

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f\phi \, dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tem-se que T_f é uma distribuição.

Exemplo A.2.12 Seja μ uma medida definida na σ -álgebra de Borel de Ω . Suponha que para cada $K \subset\subset \Omega$, $\mu(K) < \infty$ e defina

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \, d\mu.$$

Temos que μ é uma distribuição.

Esse exemplo prova que todas as medidas localmente integráveis são distribuições. A seguir, apresentamos um exemplo de distribuição que não é dada por funções localmente integráveis.

Exemplo A.2.13 Tome $\Omega = \mathbb{R}^n$ e defina $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Não é difícil verificar que δ é, de fato, uma distribuição. Essa distribuição é chamada de delta de Dirac.

Nosso próximo objetivo é definir operações com distribuições. De um modo geral, as definições são adotadas de modo a estender propriedades válidas para funções.

Definição A.2.14 Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, definimos a derivada de u por:

$$\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle.$$

Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ então $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Vamos agora relacionar a derivada tradicional de f com a derivada no sentido das distribuições, uma vez que segundo o exemplo A.2.11, f gera uma distribuição T_f dada por:

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi \, dx, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Derivando essa distribuição segundo o exemplo acima obtemos

$$\langle (T_f)', \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi' \, dx.$$

Por outro lado, temos que $f' \in C(\mathbb{R})$ e daí $f' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Portanto, pelo exemplo A.2.11 definimos a distribuição

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f' \cdot \phi \, dx.$$

Usando integração por partes obtem-se

$$\int_{\mathbb{R}} f' \cdot \phi \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi' \, dx$$

logo, $\langle (T_f)', \phi \rangle = \langle T_{f'}, \phi \rangle$.

Portanto, para funções suficientemente regulares, as derivadas no sentido usual e no sentido das distribuições coincidem.

Exemplo A.2.15 *Seja $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Heaviside dada por:*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Essa função apresenta uma descontinuidade de 1ª espécie na origem, mas mesmo assim $f \in L_{loc}^1$ já que ela é C^∞ fora da origem. Vamos calcular a derivada de T_H .

Temos que $\langle T_H, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H \cdot \phi \, dx, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Derivando essa distribuição temos:

$$\langle (T_H)', \phi \rangle = -\langle T_H, \phi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H \cdot \phi' \, dx.$$

Supondo $S(\phi) \subset [-a, a]$ tem-se

$$\langle (T_H)', \phi \rangle = - \int_{-a}^a H \cdot \phi' \, dx.$$

Uma vez que H não está definida na origem a integral acima é escrita como

$$\langle (T_H)', \phi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} H \cdot \phi' \, dx + \int_{\varepsilon}^a H \cdot \phi' \, dx \right).$$

Como $H \equiv 0$ em $[-a, -\varepsilon]$ e $H \equiv 1$ em $[\varepsilon, a]$ ficamos com

$$\langle (T_H)', \phi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi' dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(x)|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\phi(\varepsilon) = -(-\phi(0)) = \phi(0)$$

ou seja, $\langle (T_H)', \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$, e daí $(T_H)' = \delta$, onde δ é a distribuição delta de Dirac.

A Definição A.2.14 pode ser generalizada para o caso em \mathbb{R}^n .

Definição A.2.16 *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \text{ onde } \phi \in C_c^\infty(\Omega), x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definição A.2.17 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice, definimos a derivada $\partial^\alpha u$ como*

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle.$$

Exemplo A.2.18 *A derivada da distribuição delta de Dirac é dada por: Seja tem-se:*

$$\langle \partial^\alpha \delta, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \delta, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^\alpha \phi(0), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Definição A.2.19 *Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, define-se a multiplicação de u por f como:*

$$\langle u \cdot f, \phi \rangle = \langle u, \phi \cdot f \rangle.$$

Mostremos que $u \cdot f$ é, de fato, uma distribuição. A linearidade é imediata e a continuidade segue da Regra de Leibniz conforme segue abaixo. Seja $\phi_j \rightarrow 0$ uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$ devemos mostrar que $\phi_j \cdot f \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Pela definição de convergência devemos mostrar que, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha(\phi_j \cdot f) \rightarrow 0$ uniformemente em qualquer $K \subset\subset \Omega$. Mas

$$|\partial^\alpha(\phi_j \cdot f)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta \phi_j(x)| \cdot |\partial^{\alpha-\beta} f(x)|.$$

Como existem finitos multi-índices β que satisfazem $\beta \leq \alpha$ e f é contínua, consideremos

$$M = \max \left\{ \binom{\alpha}{\beta}; \beta \leq \alpha \right\}; M_\beta = \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha-\beta} f(x)| \text{ e } N = \sup \{M_\beta; \beta \leq \alpha\}.$$

Usando essas simplificações ficamos com:

$$|\partial^\alpha(\phi_j \cdot f)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} M \cdot N \cdot |\partial^\beta \phi_j(x)| = M \cdot N \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta \phi_j(x)|.$$

Como $\phi_j \rightarrow 0$ segue que $\partial^\beta \phi_j \rightarrow 0$ uniformemente em qualquer compacto e a soma que aparece na última expressão acima é finita. Portanto,

$$M \cdot N \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta \phi_j(x)| \rightarrow 0.$$

Assim $\partial^\beta(\phi_j \cdot f) \rightarrow 0$ e daí $\partial^\alpha(\phi_j \cdot f) \rightarrow 0$ uniformemente em qualquer compacto. Logo, $u \cdot f$ é contínuo.

A Regra de Leibniz é ainda válida para a multiplicação de uma função $C^\infty(\Omega)$ por uma distribuição em Ω .

Teorema A.2.20 *Se $f \in C^\infty(\Omega)$, $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então*

$$\partial^\alpha(f \cdot u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Definição A.2.21 *Duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais em um aberto $U \subset \Omega$ se*

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Como $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$ esta definição faz sentido.

Teorema A.2.22 *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω .*

Definição A.2.23 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos o suporte de u , $S(u)$, como a interseção de todos os subconjuntos fechados F de Ω fora dos quais u é nulo, ou seja,*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - F).$$

Denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Exemplo A.2.24 *A distribuição Delta de Dirac tem suporte igual a $\{0\}$, logo tem suporte compacto. Por outro lado, seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f \equiv 1$, então a distribuição $\langle T_f, \phi \rangle$ não tem suporte compacto.*

Veremos agora alguns resultados que nos permitem identificar $\mathcal{E}'(\Omega)$ com o subespaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema A.2.25 *Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, então existe um único funcional linear $v : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$(i) \quad v(\phi) = u(\phi), \quad \text{para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega);$$

(ii) $v(\phi) = 0$, se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Teorema A.2.26 *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, ou seja, $S(u) \subset\subset \Omega$;

(ii) *existe um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.*

O funcional v do teorema acima é único. Logo, podemos identificar $\mathcal{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Se f e g são funções contínuas em \mathbb{R}^n e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g é dada por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Isto nos leva à seguinte definição

Definição A.2.27 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ($u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$) definimos $u * \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por*

$$u * \phi(a) = \langle u, \check{\phi}_a \rangle,$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \phi(a-x)$.

Exemplo A.2.28 *Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, a distribuição delta de Dirac é o elemento neutro da convolução, pois*

$$\delta * \phi(a) = \langle \delta, \phi(a-x) \rangle = \phi(a).$$

Teorema A.2.29 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e as suas derivadas são dadas por*

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi).$$