

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTUDO DAS VIBRAÇÕES
TRANSVERSAIS EM UM SISTEMA
VISCOELÁSTICO ACOPLADO DE DUAS
CORDAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Vinicius Weide Rodrigues

Santa Maria, RS, Brasil

2013

**ESTUDO DAS VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM
UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ACOPLADO DE
DUAS CORDAS**

Vinicius Weide Rodrigues

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Profa. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti

Santa Maria, RS, Brasil

2013

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**ESTUDO DAS VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM UM
SISTEMA VISCOELÁSTICO ACOPLADO DE DUAS
CORDAS**

elaborada por
Vinicius Weide Rodrigues

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Rosemaira Dalcin Copetti, Dr.
(Orientador)

Julio Cesar Ruiz Claeysen , Dr.

João Kaminski Junior, Dr.

Santa Maria, 22 de novembro de 2013.

À minha família

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Iria de Fátima Weide Rodrigues e Rogenio Rodrigues por tudo o que já fizeram por mim, pelos ensinamentos, pelo respeito, pelo apoio e por me ajudarem a conquistar esse objetivo de forma incondicional.

À Professora Rosemaira Dalcin Copetti, pela ajuda, ensinamentos e dedicação nesse período de estudos.

Ao Professor Julio Cesar Ruiz Clayessen, pela ajuda e ensinamentos na reta final deste trabalho.

A todos os meu colegas do mestrado, pelo companheirismo, amizade e auxílio, durante esse tempo, tornando os desafios muito mais fáceis e prazerosos de serem enfrentados.

Ao PPGMat e à Capes, pela oportunidade e pela ajuda financeira.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

ESTUDO DAS VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ACOPLADO DE DUAS CORDAS

AUTOR: VINICIUS WEIDE RODRIGUES

ORIENTADOR: ROSEMAIRA DALCIN COPETTI

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 22 de novembro de 2013.

Neste trabalho é realizado um estudo sobre as vibrações transversais de um sistema formado por duas cordas paralelas, de mesmo comprimento, acopladas através de um elemento viscoelástico do tipo Winkler. As frequências e os modos de vibração são obtidos utilizando-se a análise modal e uma formulação matricial em blocos para o sistema. Os modos de vibração são escritos através da base dinâmica, composta pela solução de um problema de segunda ordem com condições iniciais impulsivas, e sua primeira derivada. No caso não amortecido são considerados diferentes casos para o problema, variando-se os parâmetros das cordas. A ortogonalidade dos modos e a resposta impulso matricial são usadas para resolver o caso forçado sem amortecimento. No caso amortecido, é apresentado um problema desacoplado a partir de simplificações nos parâmetros do sistema. As vibrações forçadas com amortecimento são estudadas usando-se o método modal adjunto, a partir do qual, existe uma ortogonalidade entre os modos de vibração do sistema original e os modos de vibração do sistema adjunto, possibilitando o desacoplamento e resolução do sistema. A resposta forçada é determinada usando a resposta fundamental matricial.

Palavras-chave: Cordas. Base dinâmica. Frequências e modos de vibração. Resposta impulso matricial. Método modal adjunto.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

STUDY OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF A COUPLED VISCOELASTIC SYSTEM OF TWO STRINGS

AUTHOR: VINICIUS WEIDE RODRIGUES
ADVISOR: ROSEMAIRA DALCIN COPETTI

Date and Location of Defense: Santa Maria, November 22, 2013.

In this work, it is developed a study of the transverse vibrations of a system composed by two parallel strings of equal length, coupled by a viscoelastic element. The frequencies and mode shapes are obtained using modal analysis and a block matrix formulation for the system. The mode shapes are written by the dynamic basis, composed by the solution of a second order problem with impulsive initial conditions, and its first derivative. In the undamped case, different cases of the problem are considered by varying the parameters of the strings. The orthogonality of the mode shapes and the impulse response matrix are used to solve the undamped forced case. In the damped case, it is considered again the matrix formulation and use dynamic basis, and we present an uncoupled problem from simplifications of the system parameters. The damped forced vibrations are studied using the adjoint modal method, from which there is an orthogonality between the mode shapes of the original system and the mode shapes of the adjoint system associated, allowing the uncoupling and solvability of the system. The forced response is determined by using the matrix fundamental response.

Keywords: Strings. Dynamic Basis. Frequences and mode shapes. Impulse Response. Adjoint modal method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Corda vibrante	17
Figura 1.2	Corda com extremidades fixas	21
Figura 1.3	Corda com extremidades livres	21
Figura 1.4	Corda com massas anexadas na extremidades	22
Figura 1.5	Corda com molas anexadas nas extremidades	22
Figura 1.6	Corda com amortecedores anexados nas extremidades	23
Figura 2.1	Duas cordas anexadas elasticamente	24
Figura 2.2	Modos de vibração associados às frequências (a) ω_{11} , (b) ω_{12} , (c) ω_{21} , (d) ω_{22} , (e) ω_{31} e (f) ω_{32}	47
Figura 2.3	Modos de vibração associados às frequências (g) ω_{41} , (h) ω_{42} , (i) ω_{51} , (j) ω_{52} , (k) ω_{61} e (l) ω_{62}	48
Figura 2.4	Parte real da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 5$	49
Figura 2.5	Parte imaginária da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 5$	50
Figura 2.6	Corte em $x = 0,5$ na parte real da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 0,1$	51
Figura 2.7	Corte em $x = 0,5$ na parte imaginária da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 0,1$	52
Figura 2.8	Carga em um ponto específico da primeira corda	53
Figura 2.9	Resposta forçada para uma força constante $P_0 = 4$ em $x_L = 0,2$ no intervalo $0 \leq t \leq 3$ na (a) primeira e (b) segunda corda	53
Figura 2.10	Corte em $x = 0,2$ na resposta forçada com força externa constante P_0 no no intervalo $0 \leq t \leq 0,3$ para a (a) primeira corda e (b) segunda corda	54
Figura 2.11	Corte em $x = 0,8$ na resposta forçada com força externa constante P_0 no no intervalo $0 \leq t \leq 0,3$ para a (a) primeira corda e (b) segunda corda	54
Figura 2.12	Resposta forçada para um força externa harmônica no ponto $x_L = 0,8$ intervalo $0 \leq t \leq 3$ para (a) a primeira corda e (b) a segunda corda.	55

Figura 2.13	Corte em $x = 0,8$ na resposta forçada com força externa harmônica no intervalo $0 \leq t \leq 3$ na (a) primeira corda (b) segunda corda.	55
Figura 3.1	Duas cordas anexadas viscoelasticamente	56
Figura 3.2	Componente real dos modos de vibração do sistema amortecido associados aos autovalores (a) λ_{11} , (b) λ_{12} , (c) λ_{21} , (d) λ_{22} , (e) λ_{31} e (f) λ_{32}	68
Figura 3.3	Componente real da resposta amortecida no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$	69
Figura 3.4	Corte em $x = 0,5$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ da componente real da resposta amortecida	69
Figura 3.5	Componente imaginária da resposta amortecida no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$	70
Figura 3.6	Corte em $x = 0,5$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ da componente imaginária da resposta amortecida	70
Figura 4.1	Componente real da resposta amortecida sob a ação de um forçante harmônico no intervalo $0 \leq t \leq 10$	79
Figura 4.2	Componente imaginária da resposta amortecida sob a ação de um forçante harmônico no intervalo $0 \leq t \leq 10$	80
Figura 4.3	Comparação entre a resposta forçada com amortecimento e sem amortecimento	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros para o sistema dupla-corda	44
Tabela 2.2	Comparação entre as frequências naturais do sistema nos casos 1,2 e 3, entre o Método Proposto (M.P.) e a literatura.	45
Tabela 3.1	Parâmetros para o sistema dupla-corda com amortecimento	67
Tabela 3.2	Autovalores do sistema amortecido (λ_a) e não amortecido (λ_{na}) . .	67

LISTA DE SÍMBOLOS

A_i	Área da seção transversal
A_{ij}, B_{ij}	Matrizes constantes
B	Matriz de contorno
C	Matriz de amortecimento
c, c_1, c_2, C	Constantes de amortecimento
$\mathbf{f}(t, x), f_1(t, x), f_2(t, x)$	Forças externas
$\mathbf{h}(x), \hat{\mathbf{h}}(x)$	Solução fundamental matricial
$\mathbf{h}_{ij}, \hat{\mathbf{h}}_{ij}$	Componentes da solução fundamental matricial
\mathbf{h}_k	Solução da equação matricial em diferenças
$h_i(t)$	Resposta impulso temporal
$\mathbf{h}(t, x, \xi)$	Resposta impulso matricial
i	Unidade imaginária
I	Matriz identidade
k	Constante elástica da mola
K_k, \mathcal{K}_k	Matriz de rigidez
K_o, \mathcal{K}_o	Operador matricial
K_S, \mathcal{K}_S	Matriz das tensões
L, l	Comprimento da corda
M, M, \mathcal{M}	Matriz de Massa
m, m_i	Massa por unidade de comprimento da corda
0	Zero, Matriz nula
0	Vetor nulo
$P(s)$	Polinômio característico
\mathbf{c}, \mathbf{C}	Vetor de constantes
t	Coordenada temporal
$\mathbf{X}(x), \mathbf{Y}(x), \mathbf{U}(x)$	Modos de vibração
$X_i(x), Y_i(x), U_i(x)$	Modos de vibração na corda i
$\mathbf{w}(t, x), w_1(t, x), w_2(t, x)$	Deslocamento transversal
x	Coordenada espacial
a, b, P_0	Constantes reais
ρ_i	Densidade de massa
δ	Delta de Dirac
S, S_i	Tensão
η_i	Coefficiente temporal
λ, β, γ	Autovalores
δ	Delta de Dirac

S, S_i	Tensão
η_i	Coefficiente temporal
λ, β, γ	Autovalores
ξ	Coordenada espacial
Φ	Matriz modal
ω, ω_i	Frequências naturais
$M^*, M^*, C^*, C^*, K^*, K_o^*, K_k^*$	Operadores adjuntos associados
u, v	Vetores
P, R, D	Matrizes
$w_{i0}(x), v_{i0}(x)$	condições iniciais
Γ, Λ, Ω	Matrizes diagonais
σ	Constante real

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA CORDA ELÁSTICA	17
1.1 Introdução	17
1.2 Modelo matemático para uma corda vibrante	17
1.3 Condições iniciais e de contorno	20
1.4 Equação adimensional	23
2 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS NÃO AMORTECIDAS	24
2.1 Introdução	24
2.2 Descrição do modelo	24
2.3 Análise Modal	25
2.4 Base fundamental	26
2.4.1 Cálculo da resposta impulso matricial	28
2.5 A solução $d(x)$ da equação diferencial	31
2.5.1 Caso 1: Se $\omega^2 > \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 > 0$	32
2.5.2 Caso 2: Se $\omega^2 < \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 < 0$	34
2.5.3 Caso 3: Se $\omega^2 = \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 = 0$	35
2.5.4 Resumo	35
2.6 Frequências e modos de vibração	36
2.6.1 Modos de vibração para o caso 1	36
2.6.2 Modos de vibração para o caso 2	38
2.6.3 Modos de vibração para o caso 3	39
2.7 Resposta Forçada	41
2.8 Exemplos numéricos	44
2.8.1 Vibrações livres	45
2.8.2 Vibrações Forçadas	53
3 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS AMORTECIDAS	56
3.1 Introdução	56
3.2 Descrição do modelo	56

3.3	Sistema desacoplável	61
3.4	Exemplos Numéricos	67
4	O MÉTODO MODAL ADJUNTO	71
4.1	Introdução	71
4.2	Problema do desacoplamento	71
4.3	O método modal adjunto	72
4.4	Cálculo da resposta impulso matricial	75
4.5	Sistema dupla corda amortecido forçado	77
4.6	Exemplos numéricos	79
	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82

INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo vibrações são assuntos importantes em diversas áreas, como engenharia, física e matemática, [21], [3]. Sistemas envolvendo cordas, cabos e correntes, mesmo sendo sistemas mais simples, são constantemente utilizados em estruturas modernas de engenharia, aeronáutica, entre outros, ressaltando a importância de estudos envolvendo elementos deste tipo [12], [16], [19].

O estudo das vibrações de uma corda teve início no século XVIII pelo matemático Brook Taylor (1685-1731) que apresentou em 1713 uma solução teórica para o problema de uma corda vibrante. Além de Taylor, outros importantes matemáticos dedicaram estudos a este problema, tais como D’Lambert, Euler, Lagrange e Fourier. Este último provou, usando o princípio da superposição, que uma função poderia ser expressa usando-se uma série infinita de senos e cossenos, abrindo caminho para estudos mais aprofundados de sistemas vibratórios, [26]. Já a equação diferencial parcial de segunda ordem para o movimento de uma corda, hoje conhecida como equação da onda, foi apresentado por D’Lambert em suas memórias publicadas pela Academia de Berlin em 1750, [26].

A análise das vibrações transversais de uma corda, embora seja um assunto recorrente em cursos de equações diferenciais, [26], [17], é tema de diversos trabalhos mais avançados, que envolvem, desde diferentes tipos de modelos, até diferentes técnicas de resolução de equações diferenciais, [36], [30].

O acoplamento de estruturas como cordas, vigas, cabos, é frequentemente usado em estruturas como pontes, prédios e edificações em geral. O estudo de sistemas desse tipo, é importante não só em engenharia civil, mas também nas engenharias mecânicas e aeronáuticas, motivo pelo qual, existem vários estudos sobre esse tema, [14], [22], [18].

A análise modal e o uso da base dinâmica têm sido frequentemente usadas no cálculo das frequências e modos de vibração de sistema envolvendo tanto vigas do tipo Euler-Bernoulli como Timoshenko, [5]. A base dinâmica, gerada pela resposta impulso, é usada para escrever os modos de vibração do sistema, a partir dos quais é possível encontrar a resposta livre e forçada de sistemas discretos, concentrados e distribuídos, [7].

Neste trabalho é apresentado um sistema formado por duas cordas acopladas através de uma camada viscoelástica, as frequências e modos de vibração são encontrados usando-se a análise modal e a base dinâmica.

Revisão bibliográfica

Wolfert et al. [35], [34], usaram a equação da onda para estudar a radiação de onda em uma corda infinita apoiada elasticamente devido a uma mudança brusca de velocidade de uma carga em movimento constante. Vesnitskii e Metrikin [33] usaram uma formulação semelhante para estudar o movimento de um corpo ao longo de uma corda com uma base elástica, apresentando uma formulação geral para a interação no movimento de um objeto com uma camada elástica não uniforme.

Em [12], um estudo sobre a qualidade de cordas de violão foi realizado escrevendo a solução através de uma soma infinita de senos e cossenos para uma corda dedilhada, a qualidade do som é investigada para cada tipo de componente usando a frequência corresponde a uma nota musical para cada corda estudada. Krenk e Nielsen [19] apresentaram o efeito de um amortecedor viscoso localizado próximo a extremidade de um cabo curto através da análise modal complexa. Já Leissa [20] apresentou um método direto para analisar as vibrações de um sistema contínuo com amortecimento. As vibrações transversais de uma corda viscoelástica apoiada por uma camada parcial viscoelástica foi investigada por [16] usando um método de múltiplas escalas nas equações do movimento.

Kelly [18] apresentou a resposta livre e forçada para um sistema com n estruturas elasticamente acopladas usando a ortogonalidade dos modos de vibração com operadores autoadjuntos em relação ao produto interno padrão. Um sistema com duas cordas elasticamente acopladas sobre ação de uma força externa movendo-se a uma velocidade constante foi apresentado em [27], onde o autor considerou a forma adimensional do sistema e supôs uma solução em série de senos para o sistema desacoplado. A função de Green foi usada no cálculo das autofunções de um sistema formado por duas cordas paralelas em movimento, acopladas por um elemento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt [14]. Um sistema formado por duas cordas anexadas por uma camada elástica do tipo Winkler foi apresentado por Oniszcuk [22], que utilizou o método de Bernoulli-Fourier e obteve uma expressão para as frequências naturais e os modos de vibração do sistema livre. O sistema forçado foi resolvido utilizando-se a ortogonalidade das autofunções para diferentes tipos de forças externas, [23]. Em [24], o método de separação de variáveis e a expansão modal foi usada no modelo simplificado para o sistema viscoelástico de duas cordas anexadas obtendo expressões para o caso amortecido livre e com ação de forças externas.

Em [11], a base dinâmica, gerada a partir da solução de uma equação diferencial de quarta ordem é usada para obter os modos de vibração e as frequências de uma viga Euler-Bernoulli segmentada, que possui amortecimento interno e amortecimento viscoso externo nas seções da viga. Tsukazan [32] considerou o problema de uma viga Euler-Bernoulli com seção transversal descontínua e usou essa mesma metodologia para o encontrar os modos de vibração do sistema. O uso da base dinâmica tem se mostrado eficiente no cálculo das

frequências e modos de vibração de sistemas com e sem amortecimento. Em trabalhos recentes, Tolfo [31] apresentou um estudo sobre o segundo espectro de frequências para o modelo matricial de uma viga Timoshenko bi-apoiada considerando a base fundamental gerada a partir da solução da equação modal de segunda ordem. Seibel [28] determinou as frequências e modos de vibração de um sistema formado por duas vigas acopladas por uma camada viscoelástica, usando a base dinâmica, obtida a partir da solução de uma equação diferencial de quarta ordem com condições impulsivas. Em [8], os modos de vibração de um sistema composto por nanotubos de carbono acoplados através de forças de Van der Waals são escritas em termos da base dinâmica. Já em [9] a resposta forçada para um nanotubo de carbono de uma única camada é avaliada usando a resposta impulso fundamental.

Objetivos

Neste trabalho é considerado um sistema formado por duas cordas de mesmo comprimento, paralelas, apoiadas em suas extremidades e anexadas por uma camada viscoelástica. O objetivo deste trabalho é estender a metodologia que usa a base dinâmica para escrever a solução da equação modal e a solução fundamental para a resposta forçada desenvolvida para vigas, à problemas envolvendo cordas. A análise modal e uma formulação matricial em blocos são utilizadas para determinar as frequências naturais e os modos de vibração. Os modos de vibração do sistema são escritos usando-se a resposta impulso para compor a base de soluções [4], [6]. A ortogonalidade dos modos é usada no caso forçado para desacoplar o sistema considerado. O problema amortecido não-clássico com ação de uma carga externa é resolvido utilizando-se o método modal adjunto [10], obtendo uma ortogonalidade entre os modos de vibração do sistema direto e adjunto.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 1, é apresentado o modelo matemático para uma corda vibrante. São apresentadas também, diferentes condições de contorno e a equação adimensional da onda. No Capítulo 2, é apresentada a metodologia para obter as frequências e modos de vibração do sistema de duas cordas acopladas elasticamente. Os modos de vibração são escritos em função da base dinâmica composta pela solução de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem com condições iniciais impulsivas. O caso forçado é resolvido usando o Teorema dos Modos Normais que possibilita desacoplar o sistema não amortecido. No Capítulo 3, esta metodologia é usada para o sistema de duas cordas anexadas por uma camada viscoelástica. Um sistema mais simples é considerado a partir da simplificação dos parâmetros, encontrando uma expressão para os modos de vibração do sistema. No Capítulo 4, o método modal adjunto é utilizado para resolver o problema forçado amortecido não-clássico de duas cordas anexadas, obtendo-se uma ortogonalidade entre os modos de vibração do sistema direto e do sistema adjunto.

Capítulo 1

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA CORDA ELÁSTICA

1.1 Introdução

Nesse capítulo é apresentado o modelo matemático para o sistema formado por uma corda elástica vibrante considerando oscilações transversais pequenas. O modelo é obtido a partir da análise das forças em pontos da corda, do uso da segunda lei de Newton, além de conceitos físicos, como densidade linear e de área. São apresentadas diferentes condições de contorno para o sistema e a equação adimensional correspondente.

1.2 Modelo matemático para uma corda vibrante

Suponha que uma corda elástica de comprimento L seja esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que a corda vibre em torno da posição de repouso ao longo do eixo x , como mostra a Figura 1.1. Considera-se ainda, que o movimento das partículas que compõem a corda movimentam-se apenas na direção vertical e que a corda não oferece resistência ao ser dobrada. Para a dedução do modelo, são consideradas apenas as pequenas vibrações transversais da corda, [25], [13].

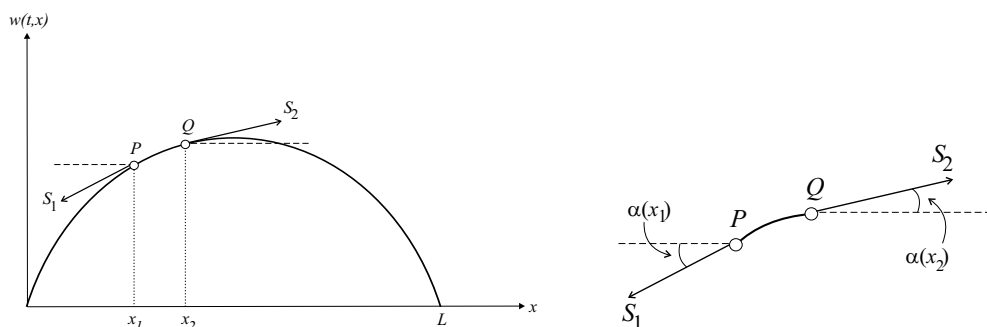


Figura 1.1: Corda vibrante

Sejam,

- $w(t, x)$ a posição no instante de tempo t do ponto x da corda.
- \widehat{PQ} o arco no qual se deformou o segmento $\overline{x_1x_2}$ no instante t fixo.
- $S_i = S(t, x_i)$ a força de tração na corda i no instante de tempo t no ponto x_i .

O comprimento l de \widehat{PQ} é dado por

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (1.1)$$

Considerando-se apenas as oscilações pequenas da corda, pode-se considerar que

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx 0, \quad (1.2)$$

de modo que,

$$l \approx \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1} dx = x_2 - x_1, \quad (1.3)$$

isto é, o comprimento l é dado por

$$l = x_2 - x_1, \quad (1.4)$$

o quer dizer que, durante o movimento da corda, não há variação no comprimento do segmento $\overline{x_1x_2}$

A tensão S , desta forma, pode ser tomada independentemente da posição x da corda. De fato, como o arco \widehat{PQ} não possui aceleração na direção x , a tensão resultante nessa direção é nula, isto é,

$$S(t, x_1) \cos \alpha(x_1) - S(t, x_2) \cos \alpha(x_2) = 0, \quad (1.5)$$

onde $\alpha(x_i)$ é o ângulo de inclinação da componente de tensão no ponto x_i da corda.

Além disso, usando-se a identidade trigonométrica, dada a partir da relação trigonométrica fundamental, obtém-se

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}}. \quad (1.6)$$

de modo que, a partir de (1.2)

$$\cos \alpha(x) = 1, \quad (1.7)$$

assim, em (1.5),

$$S(t, x_1) = S(t, x_2) = S(t), \quad (1.8)$$

ou seja, a tensão não varia em função da posição x da corda.

Considere, agora, as componentes na direção do movimento da corda,

a) Resultante das tensões

A tensão resultante na direção do movimento da corda no segmento $\overline{x_1x_2}$ é

$$F_1 = S(t) \operatorname{sen} \alpha(x_2) - S(t) \operatorname{sen} \alpha(x_1). \quad (1.9)$$

Usando-se a identidade,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad (1.10)$$

e (1.2), obtém-se

$$\operatorname{sen} \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Assim, substituindo-se (1.11) em (1.9),

$$\begin{aligned} F_1 &= S(t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right), \\ &= S(t) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx, \\ &= S(t) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (1.12)$$

b) Forças externas

Seja $p(t, x)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, então a força resultante que atua sobre \widehat{PQ} é dada por

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(t, x) dx. \quad (1.13)$$

c) Força de inércia

Seja $m(x)$ a densidade linear de massa da corda, então a massa do segmento Δx da corda é dado por

$$m(x) \Delta x, \quad (1.14)$$

e, a força de inércia sobre esse segmento é

$$-m(x) \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.15)$$

Portanto, a força F_3 sobre o arco \widehat{PQ} é dada pela expressão abaixo

$$F_3 = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{\Delta x} m(x) \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \int_{x_1}^{x_2} m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx. \quad (1.16)$$

Usando-se o fato de que o somatório das forças atuando no sistema é igual a zero, isto é,

$$\sum_{i=1}^3 F_i = 0, \quad (1.17)$$

obtem-se,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(S(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(t, x) - m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx = 0, \quad (1.18)$$

quaisquer que sejam x_1, x_2 e $t \geq 0$, logo,

$$S(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(t, x) = 0, \quad (1.19)$$

que é a equação diferencial para pequenas vibrações de uma corda elástica flexível.

Considerando-se pequenas vibrações de uma corda homogênea, isto é, $m(x)$ e $S(t)$ são constantes, a equação torna-se,

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(t, x), \quad (1.20)$$

para o caso livre, isto é, sem forças externas atuando ($p(t, x) = 0$), a equação se reduz a sua forma mais simples,

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1.21)$$

Na literatura [13], [1], a equação acima é comumente escrita introduzindo uma nova variável c , tal que,

$$\sigma^2 = \frac{S}{m}, \quad (1.22)$$

de modo que (1.21) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.23)$$

1.3 Condições iniciais e de contorno

O movimento vibratório de uma corda, dado pela equação (1.21) está interligado às condições iniciais ao qual o sistema está sujeito, isto é, a deflexão da corda no instante de tempo $t = 0$, denotado por $w_0(x)$ e a velocidade inicial, $\dot{w}_0(x)$, dadas por

$$w(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = v_0(x). \quad (1.24)$$

Em aplicações físicas, não apenas as condições iniciais do sistema são importantes, em muitos casos o valor da variável independente w ou de sua derivada em dois pontos diferentes é considerado, são as chamadas condições de contorno do sistema. Em geral, as condições de contorno de um sistema são classificadas como clássicas e não-clássicas, dependendo de sua natureza. Condições de contorno clássicas são aquelas que surgem de maneira natural na dedução do problema que está sendo considerado, enquanto que condições não-clássicas são aquelas em que são feitas modificações nas extremidades do sistema, em relação ao sistema original, geralmente anexando-se dispositivos ou mecanismos às extremidades da corda. Abaixo são apresentadas algumas figuras ilustrando possíveis condições de contorno para uma corda.

(i) **Extremidades fixas ou apoiadas**

Sem deslocamento nem velocidade nas extremidades da corda, como mostra a Figura 1.2, as condições de contorno são

$$w(t, 0) = 0, \quad w(t, L) = 0. \quad (1.25)$$

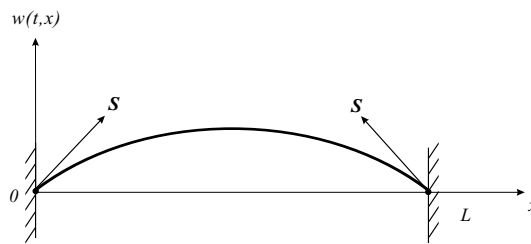


Figura 1.2: Corda com extremidades fixas

(ii) **Extremidades livres**

No caso em que ambas as extremidades da corda são livres, como mostra a Figura 1.3, as condições de contorno são dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (1.26)$$

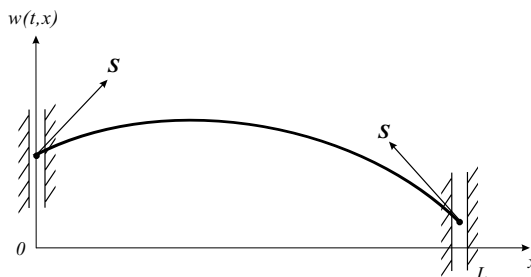


Figura 1.3: Corda com extremidades livres

(iii) **Extremidades anexadas a uma massa**

Quando são anexados objetos de massa, M_1 e M_2 , às extremidades da corda, como mostra a Figura 1.4, as condições de contorno são

$$M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, 0) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0), \quad -M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, L) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, L). \quad (1.27)$$

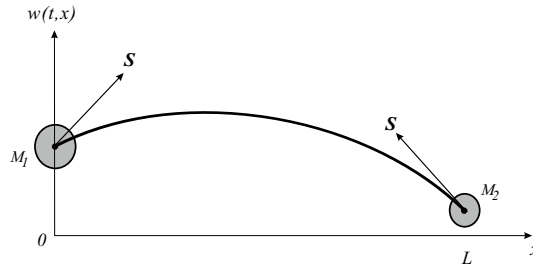


Figura 1.4: Corda com massas anexadas nas extremidades

(iv) **Extremidades anexadas a molas**

Quando molas de constantes elásticas k_1 e k_2 são anexadas às extremidades da corda, como mostra a Figura 1.5, as condições de contorno são dadas por

$$k_1 w(t, 0) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0), \quad -k_2 w(t, L) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, L). \quad (1.28)$$

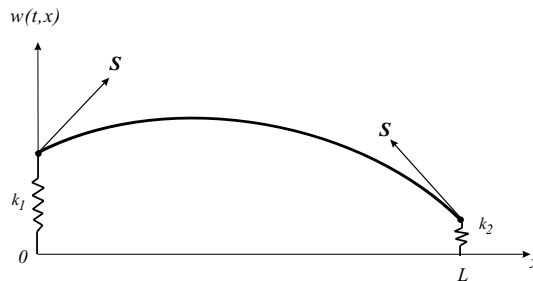


Figura 1.5: Corda com molas anexadas nas extremidades

(v) **Extremidades anexadas a amortecedores**

Anexando amortecedores viscoelásticos, com constantes c_1 e c_2 às extremidades da corda, como mostra a Figura 1.6, as condições de contorno são dadas por,

$$c_1 \frac{\partial w}{\partial t}(t, 0) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0), \quad -c_2 \frac{\partial w}{\partial t}(t, L) = S \frac{\partial w}{\partial x}(t, L). \quad (1.29)$$

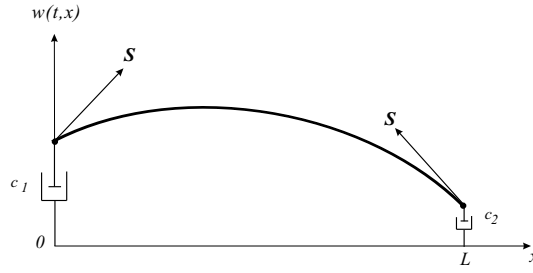


Figura 1.6: Corda com amortecedores anexados nas extremidades

1.4 Equação adimensional

A introdução de variáveis adimensionais é frequentemente usada em problemas físicos. O uso da análise adimensional é útil pois permite uma representação mais simples de fenômenos complexos e a generalização dos mesmos. Além disso, facilita a apresentação e interpretação de dados experimentais e a resolução de problemas físicos que não possuem uma solução analítica. A adimensionalização da equação (1.23) com condições iniciais (1.24), para uma corda de comprimento L , é feita introduzindo-se as variáveis adimensionais

$$\hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T_*}, \quad \hat{w}(\hat{t}, \hat{x}) = \frac{w(t, x)}{L_*}, \quad \hat{u}_0 = \frac{w_0}{L_*}, \quad \hat{v}_0 = \frac{T_* v_0}{L_*}, \quad (1.30)$$

sendo, $L_* = L$ e $T_* = \frac{L}{c}$. Da regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial x} = L_* \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = L_* \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{L_*}{T_*} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}}. \quad (1.31)$$

de forma que, as derivadas de segunda ordem são dadas por,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{L_*}{T_*} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2}. \quad (1.32)$$

Assim, substituindo (1.32) em (1.23), obtém-se a equação adimensional da onda,

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}, \quad 0 < \hat{x} < 1, \quad \hat{t} > 0, \quad (1.33)$$

com condições iniciais, dadas por

$$\hat{w}(0, \hat{x}) = \hat{u}_0(\hat{x}), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, \hat{x}) = \hat{v}_0(\hat{x}), \quad 0 < \hat{x} < 1. \quad (1.34)$$

Capítulo 2

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS NÃO AMORTECIDAS

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o sistema composto por duas cordas anexadas elasticamente. É desenvolvida uma metodologia para o cálculo das frequências e modos de vibração do sistema. A ortogonalidade dos modos é usada para encontrar a resposta forçada do sistema. Os resultados são ilustrados com exemplos numéricos.

2.2 Descrição do modelo

Considere o modelo formado por duas cordas de mesmo comprimento L anexadas por um elemento elástico do tipo Winkler. As duas cordas possuem suas extremidades fixadas e estão esticadas a uma tensão constante,

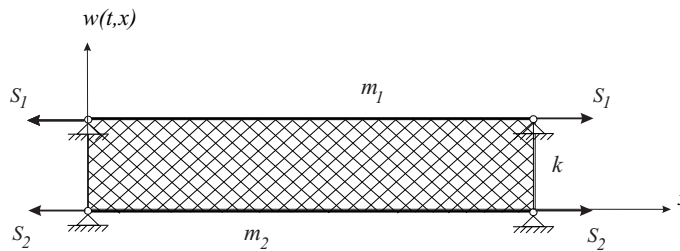


Figura 2.1: Duas cordas anexadas elasticamente

A deflexão transversal da corda i é representada por $w_i = w_i(t, x)$, para $i = 1, 2$ e o sistema é modelado pelas equações: [22]

$$m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}(t, x) - S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(t, x) + k[w_1(t, x) - w_2(t, x)] = 0, \quad (2.1)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(t, x) - S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(t, x) + k[w_2(t, x) - w_1(t, x)] = 0, \quad (2.2)$$

onde,

- t, x são as coordenadas temporal e espacial, respectivamente;
- k é a constante de rigidez do elemento elástico;
- S_i é a força de tração da corda i , $i = 1, 2$;
- $m_i = \rho_i A_i$, sendo que ρ_i é a massa específica do material da corda e A_i é a área da seção transversal, para $i = 1, 2$.

As condições iniciais desse sistema são dadas de forma geral por

$$w_i(0, x) = w_{i0}(x), \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0, x) = v_{i0}(x), \quad (2.3)$$

e as condições de contorno do sistema apoiado são

$$w_i(t, 0) = w_i(t, L) = 0. \quad (2.4)$$

2.3 Análise Modal

Nesta seção, o sistema (2.1)-(2.2) é escrito em sua forma matricial, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_k)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

onde,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

\mathbf{K}_o é um operador espacial matricial de segunda ordem

$$\mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} -S_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

e, $\mathbf{0}$ é o vetor nulo de ordem (2×1) . A análise modal consiste em supor uma solução para o sistema considerado envolvendo as frequências e os modos de vibração do mesmo, isto é, supor uma solução da forma

$$\mathbf{w}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x), \quad (2.9)$$

o vetor $\mathbf{X}(x)$ representa os modos de vibração do sistema, e é da forma

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde, $X_1(x)$ e $X_2(x)$ são os modos de vibração referentes às cordas superior e inferior, a partir de agora denominadas primeira corda e segunda corda, respectivamente.

Substituindo a solução (2.9) no sistema (2.5) obtém-se um problema de autovalor quadrático envolvendo os modos de vibração $\mathbf{X}(x)$ do sistema,

$$[M\lambda^2 + (K_k + K_o)]\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

Desenvolvendo a equação (2.11) a partir de (2.7) e (2.8), obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$K_S \mathbf{X}''(x) + (\lambda^2 M + K_k) \mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

onde,

$$K_S = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & -S_2 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$\mathbf{0}$ é o vetor nulo de ordem (2×1) e \mathbf{X}'' é a derivada de segunda ordem espacial. As matrizes M e K_k são dadas em (2.7).

As condições de contorno do sistema (2.12) são

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}(L) = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

dadas a partir das condições de contorno (2.4) e da solução (2.9).

2.4 Base fundamental

A solução do sistema (2.12) pode ser encontrada escrevendo-se os modos $\mathbf{X}(x)$ em função da base matricial fundamental, [6], [4]. Seja $\phi = \{\mathbf{h}(x), \mathbf{h}'(x)\}$ esta base,

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{h}(x)$ é solução do problema

$$K_S \mathbf{h}'' + (\lambda^2 M + K_k) \mathbf{h} = \mathbf{0}; \quad (2.16)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad K_S \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}, \quad (2.17)$$

onde, I é a matriz identidade de ordem 2.

Assim, $\mathbf{X}(x)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos dessa base, isto é, existem vetores constantes \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 , tais que

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (2.18)$$

onde,

$$\mathbf{c}_i = [c_{i1} \quad c_{i2}]^T, \quad i = 1, 2. \quad (2.19)$$

As condições gerais de contorno podem ser escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_{11}\mathbf{X}(0) + B_{11}\mathbf{X}'(0) &= \mathbf{0}, \\ A_{21}\mathbf{X}(L) + B_{21}\mathbf{X}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

com, A_{ij} , B_{ij} são matrizes de ordem (2×2) , $i, j = 1, 2$.

Substituindo-se (2.18) em (2.20), obtém-se

$$\begin{aligned} A_{11}[c_1\mathbf{h}(0) + c_2\mathbf{h}'(0)] + B_{11}[c_1\mathbf{h}'(0) + c_2\mathbf{h}''(0)] &= \mathbf{0}, \\ A_{21}[c_1\mathbf{h}(L) + c_2\mathbf{h}'(L)] + B_{21}[c_1\mathbf{h}'(L) + c_2\mathbf{h}''(L)] &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

cujos elementos arranjados de forma conveniente levam ao sistema matricial em blocos

$$B\Phi\mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

A matriz B é de ordem (4×8) e seus elementos são os coeficientes associados às condições de contorno do sistema

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & B_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

A matriz Φ é de ordem (8×4) com os valores da base de soluções aplicada nas extremidades da corda, isto é,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

e, \mathbf{C} é o vetor com constantes dadas a partir de (2.19),

$$\mathbf{C} = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}]^T. \quad (2.25)$$

A partir de (2.15) pode-se escrever Φ na sua forma expandida,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}(0) & \mathbf{h}_{12}(0) & \mathbf{h}'_{11}(0) & \mathbf{h}'_{12}(0) \\ \mathbf{h}_{21}(0) & \mathbf{h}_{22}(0) & \mathbf{h}'_{21}(0) & \mathbf{h}'_{22}(0) \\ \mathbf{h}''_{11}(0) & \mathbf{h}''_{12}(0) & \mathbf{h}''_{11}(0) & \mathbf{h}''_{12}(0) \\ \mathbf{h}''_{21}(0) & \mathbf{h}''_{22}(0) & \mathbf{h}''_{21}(0) & \mathbf{h}''_{22}(0) \\ \mathbf{h}_{11}(L) & \mathbf{h}_{12}(L) & \mathbf{h}'_{11}(L) & \mathbf{h}'_{12}(L) \\ \mathbf{h}_{21}(L) & \mathbf{h}_{22}(L) & \mathbf{h}'_{21}(L) & \mathbf{h}'_{22}(L) \\ \mathbf{h}''_{11}(L) & \mathbf{h}''_{12}(L) & \mathbf{h}''_{11}(L) & \mathbf{h}''_{12}(L) \\ \mathbf{h}''_{21}(L) & \mathbf{h}''_{22}(L) & \mathbf{h}''_{21}(L) & \mathbf{h}''_{22}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Para encontrar soluções não-nulas do sistema (2.22), é necessário que

$$\det(\mathbf{B}\Phi) = 0. \quad (2.27)$$

As soluções da equação acima são os autovalores λ do problema (2.11). As autofunções $\mathbf{X}(x)$ podem ser encontradas resolvendo o sistema (2.22) a partir da substituição dos valores de λ na matriz $\mathbf{B}\Phi$.

2.4.1 Cálculo da resposta impulso matricial

À primeira vista, o cálculo da componente $\mathbf{h}(x)$ parece ser tão difícil quanto calcular diretamente a solução do problema, no entanto, o processo para encontrar a componente da base dinâmica é simplificado utilizando-se de uma fórmula fechada para calcular $\mathbf{h}(x)$ em função das matrizes que compõem o sistema, [4]. Considere o cálculo para encontrar a matriz fundamental $\mathbf{h}(x)$, componente da base dinâmica, para o caso geral de um sistema matricial de segunda ordem

$$Mq''(x) + Cq'(x) + Kq(x) = f(x), \quad (2.28)$$

com M , C e K matrizes de ordem n , é feito usando-se a seguinte fórmula [4], [6]

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(x) \mathbf{h}_{2n-j}, \quad (2.29)$$

onde, b_i são os coeficientes do polinômio característico associado, $P(s)$, dado por

$$P(s) = \det[s^2M + sC + K] = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^{2n-k}, \quad (2.30)$$

h_k é uma matriz que satisfaz a equação em diferenças

$$\begin{aligned} Mh_{k+2} + Ch_{k+1} + Kh_k &= \mathbf{0}, \\ h_0 &= 0, Mh_1 = I, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde I é a matriz identidade e 0 a matriz nula, ambas de ordem 2, e $d(x)$ é a solução da equação diferencial

$$b_0 d^{(2n)}(x) + b_1 d^{(2n-1)}(x) + \cdots + b_{2n-1} d'(x) + b_{2n} d(x) = 0, \quad (2.32)$$

com condições iniciais

$$b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1, \quad d^{(2n-2)}(0) = \cdots = d'(0) = d(0) = 0. \quad (2.33)$$

Para o sistema (2.12), $n = 2$ e $C = 0$, de forma que o polinômio característico (2.30) se reduz a

$$P(s) = \det[s^2 K_S + (\lambda^2 M + K_k)] = \sum_{k=0}^4 b_k s^{4-k}, \quad (2.34)$$

onde,

$$\begin{aligned} b_0 &= S_1 S_2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -S_1(m_2 \lambda^2 + k) - S_2(m_1 \lambda^2 + k), \\ b_3 &= 0, \quad b_4 = \lambda^2 [m_1 m_2 \lambda^2 + (m_1 + m_2)k]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Da equação em diferenças (2.31) vem que

$$h_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S_2} \end{bmatrix}, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \begin{bmatrix} -\frac{m_1 \lambda^2 + k}{S_1^2} & \frac{k}{S_1 S_2} \\ \frac{k}{S_1 S_2} & -\frac{m_2 \lambda^2 + k}{S_2^2} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

A equação diferencial (2.32), a partir dos coeficientes do polinômio característico, dados em (2.35) é dada por

$$\begin{aligned} b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d'''(x) + b_4 d(x) &= 0, \\ b_0 d'''(0) = 1, \quad d''(0) = d'(0) = d(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

As soluções $d(x)$ do problema (2.37) dependem do sinal dos coeficientes b_i dados em (2.35), estes por sua vez, dependem dos parâmetros do sistema. Assim, $d(x)$ pode assumir mais de uma forma, dependendo dos parâmetros considerados. O cálculo de $d(x)$ para os casos possíveis é apresentado em detalhes na próxima seção.

Desenvolvendo-se a fórmula (2.29) obtém-se uma expressão para a resposta impulso matricial $\mathbf{h}(x)$

$$\mathbf{h}(x) = (b_0 h_3 + b_2 h_1) d(x) + b_0 h_3 d''(x), \quad (2.38)$$

de modo que, usando (2.36) e os coeficientes dados em (2.35), a matriz $\mathbf{h}(x)$ pode ser escrita de forma simplificada como

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} (\lambda^2 m_2 + k)d(x) - S_2 d''(x) & kd(x) \\ kd(x) & (\lambda^2 m_1 + k)d(x) - S_1 d''(x) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

O uso da base dinâmica faz com que a matriz Φ em (2.26) tenha, dentre seus elementos, um grande número de zeros, isto é, a base dinâmica, devido suas condições iniciais, transforma a matriz Φ numa matriz esparsa, o que reduz o número de cálculos na solução do sistema. Para o sistema (2.12) com as condições de contorno dadas em (2.14), a matriz B dada em (2.23) é dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 2, enquanto que a matriz Φ se reduz a

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{K}_S^{-1} & 0 \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Além disso, quando considera-se os modos $\mathbf{X}(x)$ como combinação linear dos elementos da base dinâmica,

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (2.42)$$

as condições de contorno (2.14) do sistema, juntamente com as propriedades da matriz $\mathbf{h}(x)$ dadas em (2.17) implicam que o vetor \mathbf{c}_2 em (2.42) é nulo, ou seja, os modos podem ser escritos de forma mais simples

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}, \quad (2.43)$$

onde, $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2]^T$. A matriz $\mathbf{B}\Phi$ pode ser simplificada, usando-se (2.17), obtendo-se

$$\mathbf{B}\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

de modo que a equação característica (2.27) é dada por

$$\det(\mathbf{h}(L)) = 0, \quad (2.45)$$

isto é, para encontrar os autovalores de (2.11), basta substituir $x = L$ na matriz dada por (2.39) e resolver (2.45). Além disso, é possível mostrar que os autovalores λ , raízes da

equação acima são imaginários puros, isto é, são da forma

$$\lambda = \omega i. \quad (2.46)$$

Com efeito, em (2.12), multiplicando-se à esquerda por \mathbf{X}^T e tomando a integral de 0 a L , obtém-se,

$$\lambda^2 = -\frac{\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{K}_k \mathbf{X} \, dx + \int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{K}_S \mathbf{X}'' \, dx}{\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \, dx}, \quad (2.47)$$

onde, \mathbf{K}_k e \mathbf{K}_S são dadas em (2.7) e (2.13), respectivamente. Utilizando-se integração por partes e as condições de contorno (2.14), segue que

$$\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{K}_S \mathbf{X}'' \, dx = -\int_0^L (\mathbf{X}^T)' \mathbf{K}_S \mathbf{X}' \, dx > 0, \quad (2.48)$$

pois, \mathbf{K}_S é definida negativa. Além disso,

$$\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{K}_k \mathbf{X} \, dx, \quad (2.49)$$

são números positivos, pois \mathbf{M} é definida positiva e \mathbf{K}_k é positiva semidefinida, para k não negativo. Daí decorre que,

$$\lambda^2 < 0, \implies \lambda = \omega i, \omega > 0, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.50)$$

2.5 A solução $d(x)$ da equação diferencial

Como foi mencionado anteriormente, a equação diferencial característica (2.37) pode ter diferentes soluções dependendo dos parâmetros do sistema, já que ela depende diretamente dos coeficientes b_i do polinômio característico (2.34). O cálculo dos diferentes casos para $d(x)$ é feita a seguir, supondo-se uma solução na forma

$$d(x) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{ir_j t}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.51)$$

onde, C_j são coeficientes reais determinados a partir das condições iniciais e r_j é solução da equação característica associada à equação diferencial, isto é,

$$b_0 r^4 - b_2 r^2 + b_4 = 0, \quad (2.52)$$

onde, b_0 , b_2 e b_4 são dados em (2.35). As raízes de (2.52), em sua forma simplificada, são dadas por

$$r_{1,2}^2 = \frac{b_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2b_0}, \quad \Delta = b_2^2 - 4b_0b_4. \quad (2.53)$$

O discriminante Δ dessa equação biquadrada é sempre positivo. De fato, substituindo-se os coeficientes b_i de (2.35) e usando-se (2.50), obtém-se

$$\Delta = [S_2(m_1\omega^2 - k) - S_1(m_2\omega^2 - k)]^2 + 4k^2(S_1S_2) > 0. \quad (2.54)$$

Desta forma, existem duas raízes reais diferentes para esta equação, representadas abaixo,

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(S_1S_2)^{-1} \{ [S_2(m_1\omega^2 - k) + S_2(m_1\omega^2 - k)] \pm \{ [S_1(m_2\omega^2 - k) + S_2(m_1\omega^2 - k)]^2 - 4S_1S_2\omega^2[m_1m_2\omega^2 - k(m_1 + m_2)] \}^{1/2} \}, \quad (2.55)$$

O sinal das raízes da equação biquadrada, r_1^2 e r_2^2 , depende da relação entre a frequência ω do sistema com a frequência natural ω_0 , que denota a frequência natural de um sistema com dois graus de liberdade discreto, isto é, um sistema formado por dois sólidos rígidos representando as duas cordas, anexados por um elemento elástico, dada por

$$\omega_0^2 = k \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2} \right), \quad (2.56)$$

onde k é a constante de rigidez do elemento elástico, m_i a massa dos elementos rígidos, $i = 1, 2$.

Existem três possíveis casos envolvendo as frequências ω e ω_0 :

- $\omega^2 > \omega_0^2$;
- $\omega^2 < \omega_0^2$;
- $\omega^2 = \omega_0^2$.

Em cada caso, as raízes r_i da equação (2.52) podem ser reais ou imaginárias puras, dependendo dos parâmetros do sistema. A seguir, cada caso será considerado em detalhes, mostrando que r_1^2 é sempre positiva, enquanto que r_2^2 pode ser positiva, negativa ou igual a zero.

2.5.1 Caso 1: Se $\omega^2 > \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 > 0$

Para demonstrar que tanto r_1^2 quanto r_2^2 são números positivos, serão examinados os sinais dos coeficientes b_0 , b_2 e b_4 .

Considerando-se a hipótese de que $\omega^2 > \omega_0^2$ e a relação entre λ e ω dada em (2.50),

o coeficiente b_2 pode ser escrito como

$$b_2 = S_1(m_2\omega^2 - k) + S_2(m_1\omega^2 - k). \quad (2.57)$$

A partir de (2.56) em (2.57), obtém-se,

$$b_2 = \frac{S_1[m_2^2\omega^2 + m_1m_2(\omega^2 - \omega_0^2)]}{m_1 + m_2} + \frac{S_2[m_1^2\omega^2 + m_1m_2(\omega^2 - \omega_0^2)]}{m_1 + m_2}, \quad (2.58)$$

de onde conclui-se, usando a hipótese de que $\omega^2 > \omega_0^2$ e o fato de que os parâmetros, S_i e m_i , são positivos, que

$$b_2 > 0. \quad (2.59)$$

O coeficiente b_4 pode ser simplificado de modo análogo ao coeficiente b_2 , obtendo-se

$$b_4 = m_1m_2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2), \quad (2.60)$$

de onde observa-se, para $\omega^2 > \omega_0^2$,

$$b_4 > 0. \quad (2.61)$$

O coeficiente b_0 depende apenas dos parâmetros positivos S_1 e S_2 , portanto,

$$b_0 > 0. \quad (2.62)$$

As desigualdades (2.59), (2.61) e (2.62) implicam que

$$\sqrt{b_2^2 - 4b_0b_4} < \sqrt{b_2^2} = b_2, \quad (2.63)$$

de modo que,

$$r_1^2 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0b_4}}{2b_0} > 0, \quad (2.64)$$

$$r_2^2 = \frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0b_4}}{2b_0} > 0. \quad (2.65)$$

Denotando as soluções acima como

$$r_s = \xi, -\xi, \delta, -\delta, \quad (2.66)$$

a solução $d(x)$ da equação diferencial, dada em (2.51), pode ser escrita na forma

$$d(x) = C_1 \cos(\xi x) + C_2 \sin(\xi x) + C_3 \cos(\delta x) + C_4 \sin(\delta x). \quad (2.67)$$

A partir das condições iniciais, dadas em (2.37), obtém-se

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}. \quad (2.68)$$

Dessa forma,

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\text{sen}(\delta x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}. \quad (2.69)$$

Além disso, observe que, devido à (2.35) e (2.54),

$$\xi^2 - \delta^2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2b_0} > 0, \quad (2.70)$$

de modo que, os denominadores em (2.69) não se anulam.

2.5.2 Caso 2: Se $\omega^2 < \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 < 0$

Neste caso, o coeficiente b_0 é o mesmo, portanto, positivo, e o coeficiente b_4 , dado em (2.60),

$$b_4 = m_1 m_2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2), \quad (2.71)$$

é sempre negativo, quando considera-se a hipótese $\omega^2 < \omega_0^2$. Por outro lado, o coeficiente b_2 , dado em (2.57), pode assumir tanto valores positivos quanto negativos, de modo que, vale a seguinte desigualdade

$$\sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4} > \sqrt{b_2^2} = |b_2|, \quad (2.72)$$

- Se $b_2 > 0$ ocorre,

$$|b_2| = b_2 \implies b_2 - \sqrt{b_2^2 - b_0 b_4} < 0, \quad (2.73)$$

assim,

$$r_1^2 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0} > 0, \quad r_2^2 = \frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0} < 0. \quad (2.74)$$

- Se $b_2 < 0$ ocorre

$$|b_2| = -b_2 \implies b_2 + \sqrt{b_2^2 - b_0 b_4} > 0, \quad (2.75)$$

assim,

$$r_1^2 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0} > 0, \quad r_2^2 = \frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0} < 0. \quad (2.76)$$

Portanto, independentemente do sinal do coeficiente b_2 , obtém-se uma raiz positiva ($r_1^2 > 0$) e uma raiz negativa ($r_2^2 < 0$) para a equação biquadrada (2.52).

Desta forma, a solução $d(x)$ da equação diferencial dada em (2.51), pode ser escrita na forma

$$d(x) = C_1 \cos(\xi x) + C_2 \text{sen}(\xi x) + C_3 \cosh(\delta x) + C_4 \sinh(\delta x). \quad (2.77)$$

A partir das condições iniciais, dadas em (2.37), obtém-se

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\xi}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\delta}, \quad (2.78)$$

de modo que,

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\xi} + \frac{\text{sinh}(\delta x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\delta}. \quad (2.79)$$

2.5.3 Caso 3: Se $\omega^2 = \omega_0^2$ então $r_1^2 > 0$ e $r_2^2 = 0$

Neste caso, a hipótese, $\omega^2 = \omega_0^2$, implica que b_4 , dado em (2.60) é igual a zero, enquanto que, b_2 , dado em (2.58), pode ser escrito na forma

$$b_2 = \frac{\omega^2(S_1 m_2^2 + S_2 m_1^2)}{m_1 + m_2}, \quad (2.80)$$

de onde decorre que $b_2 > 0$, pois, os parâmetros do sistema são todos positivos.

Assim,

$$r_1^2 = \frac{b_2}{2b_0} > 0, \quad r_2^2 = 0. \quad (2.81)$$

Desta forma, a solução $d(x)$ da equação diferencial dada em (2.51), pode ser escrita na forma

$$d(x) = C_1 \cos(\xi x) + C_2 \text{sen}(\xi x) + C_3 x + C_4. \quad (2.82)$$

A partir das condições iniciais, dadas em (2.37), obtém-se

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{b_0 \xi^3}, \quad C_3 = \frac{1}{b_0 \xi^2}, \quad C_4 = 0, \quad (2.83)$$

de modo que,

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0 \xi^3} + \frac{x}{b_0 \xi^2}. \quad (2.84)$$

2.5.4 Resumo

A solução $d(x)$ da equação diferencial (2.32) pode assumir três diferentes formas, dependendo da relação entre a frequência ω do sistema considerado com a frequência natural ω_0 de um sistema discreto com dois graus de liberdade, com dois sólidos rígidos representando cordas rígidas, anexados por um elemento elástico. De forma resumida,

pode-se representar este resultado da seguinte forma

$$d(x) = \begin{cases} -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\text{sen}(\delta x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}, & \omega^2 > \omega_0^2; \\ -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\xi} + \frac{\sinh(\delta x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\delta}, & \omega^2 < \omega_0^2; \\ -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0\xi^3} + \frac{x}{b_0\xi^2}, & \omega^2 = \omega_0^2. \end{cases} \quad (2.85)$$

2.6 Frequências e modos de vibração

Observe que os modos $\mathbf{X}(x)$ escritos em função da base dinâmica, como em (2.43),

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}, \quad (2.86)$$

satisfazem a condição de contorno $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$, para qualquer vetor $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2]^T$, pois a matriz fundamental $\mathbf{h}(x)$, componente da base dinâmica, é tal que $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$. No entanto, é necessário que em $x = L$ isto também aconteça, isto é, $\mathbf{X}(L) = \mathbf{0}$, para um vetor não-nulo \mathbf{c} . Isto pode ser feito considerando-se os três casos de soluções examinados anteriormente, já que os elementos da matriz $\mathbf{h}(x)$ são dependentes da solução $d(x)$.

2.6.1 Modos de vibração para o caso 1

No primeiro caso, a solução $d(x)$ é dada pela expressão

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\text{sen}(\delta x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}. \quad (2.87)$$

Substituindo-se (2.87) em (2.39), os modos, $\mathbf{X}(x)$, em (2.86), são da forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(x) \\ \mathbf{X}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta k}{a_1} \text{sen}(\xi x) + \frac{\xi k}{a_2} \text{sen}(\delta x) & -\delta k \text{sen}(\xi x) + \xi k \text{sen}(\delta x) \\ -\delta k \text{sen}(\xi x) + \xi k \text{sen}(\delta x) & -\delta k a_1 \text{sen}(\xi x) + \xi k a_2 \text{sen}(\delta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_1 &= (S_1\xi^2 + k - m_1\omega^2)k^{-1} = k(S_2\xi^2 + k - m_2\omega^2)^{-1}, \\ a_2 &= (S_1\delta^2 + k - m_1\omega^2)k^{-1} = k(S_2\delta^2 + k - m_2\omega^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

A condição de contorno $\mathbf{X}(L) = \mathbf{0}$, em (2.88), leva a um sistema de duas equações para as constantes desconhecidas c_1 e c_2 . Para a existência de soluções não-triviais é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Essa condição implica

nas seguintes equações características

$$\text{sen}(\xi L) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sen}(\delta L) = 0, \quad (2.90)$$

Decorre das relações acima que

$$\xi = r_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{ou} \quad \delta = r_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.91)$$

Considerando-se o caso em que $\text{sen}(\xi L) = 0$, e substituindo-se (2.91) em (2.55), obtém-se a equação para a frequência do problema considerado

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 (r_n^2 S_2 + k) + m_2 (r_n^2 S_1 + k)] \omega^2 + r_n^2 [S_1 S_2 r_n^2 + k (S_1 + S_2)] = 0. \quad (2.92)$$

As frequências naturais para o sistema dupla-corda são calculadas a partir da fórmula

$$\omega_{1,2n}^2 = \frac{1}{2} \{ [(S_2 r_n^2 + k) m_1^{-1} + (S_1 r_n^2 + k) m_2^{-1}] \mp \{ [(S_2 r_n^2 + k) m_1^{-1} + (S_1 r_n^2 + k) m_2^{-1}]^2 - 4 r_n^2 [S_1 S_2 r_n^2 + k (S_1 + S_2)] (m_1 m_2)^{-1} \}^{1/2} \}, \quad (2.93)$$

$$\omega_{1n} < \omega_{2n}. \quad (2.94)$$

Usando-se o fato de que $\xi \neq \delta$, e resolvendo o sistema (2.88) para $\text{sen}(\delta L)$, obtém-se a relação entre os coeficientes c_1 e c_2 , dada por

$$c_1 = -a_{in} c_2, \quad (2.95)$$

onde,

$$a_{in} = (S_1 r_n^2 + k - m_1 \omega_{in}^2) k^{-1} = k (S_2 r_n^2 + k - m_2 \omega_{in}^2)^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.96)$$

Assim, os modos de vibração do sistema, associado a frequência ω_{in} , podem ser escritos de forma simplificada como,

$$\mathbf{X}_{in}(x) = \begin{bmatrix} X_{1in}(x) \\ X_{2in}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

onde,

$$X_{1in}(x) = X_n(x) = \text{sen}(r_n x), \quad X_{2in}(x) = a_{in} X_n(x) = a_{in} \text{sen}(r_n x), \quad (2.98)$$

O caso $\text{sen}(\delta L) = 0$ é análogo, obtendo-se a mesma expressão acima para os modos.

Observe agora que, a partir das expressões (2.96) e (2.93), obtém-se

$$\begin{aligned}
a_{1n} + a_{2n} &= (S_1 r_n^2 + k - m_1 \omega_{1n}^2) k^{-1} + (S_1 r_n^2 + k - m_1 \omega_{2n}^2) k^{-1}, \\
&= m_1 k^{-1} [(2S_1 r_n^2 + k) m_1^{-1} - (\omega_{1n}^2 + \omega_{2n}^2)], \\
&= m_1 k^{-1} [(S_1 r_n^2 + k) m_1^{-1} - (S_2 r_n^2 + k) m_2^{-1}],
\end{aligned} \tag{2.99}$$

e,

$$\begin{aligned}
a_{1n} a_{2n} &= (S_1 r_n^2 + k - m_1 \omega_{1n}^2) k^{-1} k (S_2 r_n^2 + k - m_2 \omega_{2n}^2), \\
&= \frac{m_1 [(S_1 r_n^2 + k) m_1^{-1} - \omega_{1n}^2]}{m_2 [(S_2 r_n^2 + k) m_2^{-1} - \omega_{2n}^2]}, \\
&= -\frac{m_1}{m_2}.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Assim, utilizando-se das relações (2.99) e (2.100), os coeficientes a_{in} podem ser obtidos da seguinte forma, [22]

$$\begin{aligned}
a_{1,2n} &= \frac{1}{2} m_1 k^{-1} \{ [(S_1 r_n^2 + k) m_1^{-1} - (S_2 r_n^2 + k) m_2^{-1}] \pm \{ [(S_1 r_n^2 + k) m_1^{-1} \\
&\quad - (S_2 r_n^2 + k) m_2^{-1}]^2 + 4k^2 (m_1 m_2)^{-1} \}^{\frac{1}{2}} \}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Decorre das relações (2.99), (2.100) e (2.101) que os coeficientes a_{in} são tais que,

$$a_{1n} > 0, \quad a_{2n} < 0, \tag{2.102}$$

de onde conclui-se que os modos de vibração para o sistema dupla corda, dados em (2.98), executam dois tipos de movimento: movimentos síncronos, para frequências mais baixas, ω_{1n} , e movimentos assíncronos para frequências mais altas, ω_{2n} .

2.6.2 Modos de vibração para o caso 2

No segundo caso, a solução $d(x)$ é dada pela expressão

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\xi} + \frac{\text{sinh}(\delta x)}{b_0(\xi^2 + \delta^2)\delta}. \tag{2.103}$$

Substituindo-se (2.103) em (2.39), os modos, $\mathbf{X}(x)$, em (2.86), são da forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(x) \\ \mathbf{X}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi k}{a_2} \text{sinh}(\delta x) + \frac{\delta k}{a_1} \text{sen}(\xi x) & -\xi k \text{sinh}(\delta x) + \delta k \text{sen}(\xi x) \\ -\xi k \text{sinh}(\delta x) + \delta k \text{sinh}(\xi x) & -\xi a_2 k \text{sen}(\delta x) + \delta a_1 k \text{sen}(\xi x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{2.104}$$

onde,

$$\begin{aligned}
a_1 &= (S_1 \xi^2 + k - m_1 \omega^2) k^{-1} = k(S_2 \xi^2 + k - m_2 \omega^2)^{-1}, \\
a_2 &= (k - S_1 \delta^2 - m_1 \omega^2) k^{-1} = k(k - S_2 \delta^2 - m_2 \omega^2).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, a condição $\mathbf{X}(L) = \mathbf{0}$, leva a seguinte equação característica,

$$\text{sen}(\xi L) = 0, \quad (2.106)$$

de onde decorre,

$$\xi = r_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.107)$$

Também é possível mostrar que a relação entre os coeficientes c_1 e c_2 é a mesma dada em (2.95), assim, os modos de vibração são encontrados da mesma forma que no caso 1, bem como as frequências, que podem ser encontradas através da expressão dada em (2.93).

2.6.3 Modos de vibração para o caso 3

No terceiro caso, a solução $d(x)$ é dada pela expressão

$$d(x) = \frac{x}{b_0\xi^2} - \frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0\xi^3}. \quad (2.108)$$

Substituindo-se (2.108) em (2.39), os modos, $\mathbf{X}(x)$, em (2.86), são da forma

$$\begin{bmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi k}{a_2}x + \frac{k}{a_1}\text{sen}(\xi x) & -\xi kx + k\text{sen}(\xi x) \\ -\xi kx + k\text{sen}(\xi x) & -\xi ka_2x + ka_1\text{sen}(\xi x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

onde,

$$a_1 = m_2 S_1 (m_1 S_2)^{-1}, \quad a_2 = -m_1 m_2^{-1}, \quad (2.110)$$

$$\xi^2 = k[m_1(m_2 S_1)^{-1} + m_2(m_1 S_2)^{-1}]. \quad (2.111)$$

A condição de contorno $\mathbf{X}(L) = 0$ neste caso, implica que as constantes c_1 e c_2 em (2.109) são ambas iguais a zero. Isto significa que as condições de contorno do sistema tornam impossível a execução do movimento de vibração de um sistema formado por duas cordas anexadas elasticamente com a frequência natural $\omega = \omega_0$.

Além disso, os casos em que as raízes $r_2^2 \leq 0$ são desinteressantes para o estudo das vibrações livres do sistema considerado. Isto é, as vibrações livres do sistema estão baseadas nos casos em que as raízes r_1^2 e r_2^2 são ambas positivas. As vibrações livres do sistema são dadas abaixo

$$\mathbf{w}(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \mathbf{X}_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \text{sen}(\omega_j t) + B_i \text{cos}(\omega_j t)] \mathbf{X}_j(x), \quad (2.112)$$

onde, $\mathbf{X}_j(x)$, representa o i -ésimo modo de vibração associado a $\lambda_j = i\omega_j$, i unidade imaginária.

Os modos $\mathbf{X}_i(x)$, dados em (2.97) e (2.98), satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade,

$$\int_0^L \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j dx = c(1 + a_{in}^2) \delta_{ij}, \quad (2.113)$$

$$c = \int_0^L \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i dx = \int_0^L \text{sen}^2(r_n x) dx = \frac{L}{2}, \quad (2.114)$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker, definida na seguinte forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2.115)$$

Considerando as condições iniciais para o problema,

$$\mathbf{w}(0, x) = \mathbf{w}_0, \quad \dot{\mathbf{w}}(0, x) = \mathbf{v}_0, \quad (2.116)$$

e substituindo em (2.112), obtém-se

$$\mathbf{w}_0 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \mathbf{X}_j, \quad \mathbf{v}_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j A_j \mathbf{X}_j. \quad (2.117)$$

Multiplicando as relações acima por $\mathbf{X}_i^T(x)$, integrando para x de 0 a L , e usando a relação de ortogonalidade (2.113), encontra-se os coeficientes A_i e B_i , dados por

$$A_i = \frac{1}{c\omega_i(a_{in}^2 + 1)} \int_0^L \mathbf{X}_i^T \mathbf{v}_0 dx, \quad B_i = \frac{1}{c(a_{in}^2 + 1)} \int_0^L \mathbf{X}_i^T \mathbf{w}_0 dx. \quad (2.118)$$

2.7 Resposta Forçada

Nesta seção é considerado o sistema formado por duas cordas anexadas elasticamente, sujeito a ação de uma força externa ou carga agindo nas cordas. As equações que governam o movimento são dadas abaixo

$$m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}(t, x) - S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(t, x) + k[w_1(t, x) - w_2(t, x)] = f_1(t, x), \quad (2.119)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(t, x) - S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(t, x) + k[w_2(t, x) - w_1(t, x)] = f_2(t, x), \quad (2.120)$$

matricialmente,

$$M\ddot{\mathbf{w}} + (K_k + K_o)\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (2.121)$$

onde, M , K_k e K_o são dados em (2.7) e (2.8), respectivamente, e

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

onde, f_1 é a força externa na primeira corda e f_2 , a força externa na segunda corda.

Uma solução para esse problema pode ser escrita em termos da integral de convolução

$$\mathbf{w}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (2.123)$$

onde, $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ é a resposta impulso matricial, solução do problema

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{h}} + (K_k + K_o)\mathbf{h} &= 0, \quad x \neq \xi, \\ \mathbf{h}(0, x, \xi) &= 0, \quad M\dot{\mathbf{h}}(0, x, \xi) = \delta(x - \xi)\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Para determinar a matriz \mathbf{h} em (2.124), supõe-se uma solução para o problema (2.121) da forma

$$\mathbf{w}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \mathbf{X}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

onde, X_{1i} é o i -ésimo modo de vibração da primeira corda e X_{2i} o i -ésimo modo de vibração da segunda corda, ambos associados a frequência ω_i . Como as matrizes M e $K = K_o + K_k$ são simétricas e M é definida positiva, então o Teorema dos Modos Normais, o qual é enunciado a seguir, pode ser usado, [15]

Teorema 2.7.1. *Dadas duas matrizes M e K , de ordem $n \times n$, reais simétricas e M positiva definida, então existe uma matriz não-singular V que diagonaliza simultaneamente M e K , isto é, considerando-se o produto interno padrão*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f^T g dx, \quad (2.126)$$

então, é sempre possível obter uma matriz V tal que

$$\begin{aligned}\langle MV, V \rangle &= I, \\ \langle KV, V \rangle &= \Omega^2,\end{aligned}\tag{2.127}$$

onde

$$\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2],\tag{2.128}$$

é a matriz espectral diagonal, V é a matriz modal cujas colunas são vetores v_k , normalizados com respeito a M e satisfazendo

$$Kv_k = \omega_k^2 Mv_k,\tag{2.129}$$

com ω_k^2 real, $k = 1, 2, \dots, n$.

Em outras palavras, o teorema acima garante que,

$$\langle M\mathbf{X}_j(x), \mathbf{X}_i(x) \rangle = \int_0^L \mathbf{X}_j^T M \mathbf{X}_i dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases},\tag{2.130}$$

$$\langle K\mathbf{X}_j(x), \mathbf{X}_i(x) \rangle = \int_0^L \mathbf{X}_j^T K \mathbf{X}_i dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \omega_i^2, & i = j, \end{cases},\tag{2.131}$$

onde, $K = K_k + K_o$.

Substituindo-se, então, (2.125) em (2.121), obtém-se,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) M \mathbf{X}_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) K \mathbf{X}_i(x) = \mathbf{f},\tag{2.132}$$

multiplicando-se a equação (2.132) à esquerda por $\mathbf{X}_j^T(x)$ e tomando a integral definida de 0 a L , obtém-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \langle M \mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \langle K \mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i \rangle = \mathcal{F}(t),\tag{2.133}$$

onde,

$$\mathcal{F}(t) = \langle \mathbf{X}_j, \mathbf{f} \rangle.\tag{2.134}$$

Utilizando-se as equações (2.130) e (2.131), obtém-se a equação desacoplada

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = \mathcal{F}(t).\tag{2.135}$$

A solução da equação (2.135), considerando dados iniciais nulos, pode ser escrita

a partir da integral de convolução

$$\eta_i(t) = \int_0^t h(t - \tau) \mathcal{F}(t) dt, \quad (2.136)$$

onde $h(t)$ é a resposta impulso temporal, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) + \omega_i^2 h(t) &= 0, \\ \dot{h}(0) &= 1, \quad h(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.137)$$

de modo que,

$$h(t) = \frac{\text{sen}(\omega_i t)}{\omega_i}. \quad (2.138)$$

Substituindo (2.136) em (2.125), obtém-se

$$\mathbf{w}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^t h_i(t - \tau) \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{f} \rangle d\tau \right) \mathbf{X}_i(x), \quad (2.139)$$

ou ainda,

$$\mathbf{w}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t - \tau) \mathbf{X}_i(x) \mathbf{X}_i^T(\xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (2.140)$$

Comparando (2.123) com (2.140) obtém-se a expressão para a resposta impulso matricial $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, dada por

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) \mathbf{X}_i(x) \mathbf{X}_i^T(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.141)$$

Dessa forma, a resposta forçada em cada uma das cordas pode ser escrita em função das componentes da matriz resposta impulso matricial $\mathbf{h}(t, x, \xi)$. De fato, considere uma força externa

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad (2.142)$$

de (2.123), a resposta forçada em cada corda é dada por

$$w_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L (\mathbf{h}_{11} f_1 + \mathbf{h}_{12} f_2) d\xi d\tau, \quad (2.143)$$

$$w_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L (\mathbf{h}_{21} f_1 + \mathbf{h}_{22} f_2) d\xi d\tau. \quad (2.144)$$

As expressões acima podem ser simplificadas se a força externa for aplicada apenas em uma das cordas ou até mesmo pelo tipo de força externa considerada. Por exemplo, no caso em que a força externa é dependente apenas do tempo e é aplicada em um ponto específico, $x = x_L$, apenas na primeira corda, é possível escrever f_1 em termos da função

Delta de Dirac, isto é,

$$f_1(t, x) = f(t)\delta(x - x_L), \quad f_2(t, x) = 0, \quad (2.145)$$

a resposta forçada do sistema é simplificada utilizando-se a propriedade da função Delta de Dirac,

$$w_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}_{11} f(t) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau = \int_0^t f(t) \mathbf{h}_{11}(t - \tau, x, x_L) d\tau, \quad (2.146)$$

$$w_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}_{21} f(t) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau = \int_0^t f(t) \mathbf{h}_{21}(t - \tau, x, x_L) d\tau. \quad (2.147)$$

De maneira análoga, se na primeira corda não for aplicada nenhuma força e na segunda um força externa dependendo apenas do tempo, aplicado em um ponto específico $x = x_L$,

$$f_1(t, x) = 0, \quad f_2(t, x) = f(t)\delta(x - x_L), \quad (2.148)$$

obtém-se,

$$w_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}_{12} f(t) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau = \int_0^t f(t) \mathbf{h}_{12}(t - \tau, x, x_L) d\tau, \quad (2.149)$$

$$w_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}_{22} f(t) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau = \int_0^t f(t) \mathbf{h}_{22}(t - \tau, x, x_L) d\tau. \quad (2.150)$$

2.8 Exemplos numéricos

Com o objetivo de apresentar algumas simulações e comprovar a efetividade e a aplicabilidade do método proposto, considere a Tabela 2.1 com parâmetros para o sistema composto por duas cordas anexadas por um elemento elástico, como em [23].

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Comprimento L	1	m
Área da seção transversal A_1	2×10^{-6}	m^2
Massa específica ρ_1	5×10^3	kgm^{-3}
Massa por unidade de comprimento $m_1 = \rho_1 A_1$	1×10^{-2}	kgm^{-1}
Tração S_1	50	N
Constante elástica k	2×10^2	Nm^{-2}

Tabela 2.1: Parâmetros para o sistema dupla-corda

Com exceção do comprimento, que é o mesmo nas duas cordas, são apresentados parâmetros referentes a primeira corda, os parâmetros referentes a segunda corda serão tomados variando-se os da primeira.

2.8.1 Vibrações livres

Nas simulações envolvendo vibrações livres do sistema, são considerados três diferentes casos variando-se os parâmetros da segunda corda.

Caso 1: A massa e a tensão aplicada na segunda corda são iguais às aplicadas na primeira.

$$m_2 = m_1 = 10^{-2} \text{ kgm}^{-1} \quad \text{e} \quad S_2 = S_1 = 50 \text{ N.}$$

Caso 2: A massa da segunda corda é igual a da primeira, mas a tensão aplicada na segunda corda é o dobro da aplicada na primeira.

$$m_2 = m_1 = 10^{-2} \text{ kgm}^{-1} \quad \text{e} \quad S_2 = 2S_1 = 100 \text{ N.}$$

Caso 3: A massa da segunda corda é o dobro da massa da primeira, mas a tensão aplicada na segunda corda é igual a tensão aplicada na primeira.

$$m_2 = 2m_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ kgm}^{-1} \quad \text{e} \quad S_2 = S_1 = 50 \text{ N.}$$

A Tabela 2.2 apresenta as doze primeiras frequências naturais do sistema para os Casos 1, 2 e 3. As frequências estão agrupadas em pares, cada par possui uma frequência mais baixa (ω_{i1} , $i = 1, 2, \dots, 6$) e uma frequência mais alta (ω_{i2} , $i = 1, 2, \dots, 6$). As diferenças relativas (ΔR) em relação ao Caso 1, evidenciam que, no caso 2, as frequências mais baixas de cada par se aproximam das frequências mais baixas do Caso 1 quando i aumenta, o que não acontece com as frequências mais altas. .

	Caso 1		Caso 2			Caso 3 ²	
	M.P.	[23]	M.P.	[23]	ΔR	M.P.	ΔR
w_{11}	222,14	221,1 ¹	249,52	249,5	0,1232	172,15	-0,2250
w_{12}	298,91	298,9	354,66	354,7	0,1865	272,73	-0,0875
w_{21}	444,28	444,3	464,09	464,1	0,0445	326,93	-0,2641
w_{22}	487,22	487,2	645,59	645,6	0,03250	468,19	-0,0390
w_{31}	666,43	666,4	680,61	680,6	0,0212	480,84	-0,2784
w_{32}	695,79	695,8	953,50	953,5	0,3703	681,90	-0,0199
w_{41}	888,57	888,6	899,47	899,5	0,0122	635,83	-0,2894
w_{42}	910,80	910,8	1264,76	1264,2	0,3886	900,03	-0,0118
w_{51}	1110,72	1110,7	1119,54	1119,5	0,079	791,53	-0,2873
w_{52}	1128,58	1128,6	1577,25	1577,3	0,3975	1119,83	-0,0077
w_{61}	1332,86	1332,9	1340,26	1340,3	0,0055	947,65	-0,2891
w_{62}	1347,78	1347,8	1890,31	1890,3	0,4025	1340,42	-0,0054

Tabela 2.2: Comparação entre as frequências naturais do sistema nos casos 1,2 e 3, entre o Método Proposto (M.P.) e a literatura.

¹Embora em [23] o autor apresente este valor para a frequência ω_{11} , realizando-se os cálculos através do método proposto em [22] obtém-se $\omega_{11} = 222,1$

²Não há comparação para esse caso na literatura.

Já no caso 3, é possível observar o contrário, as frequências mais altas de cada par se aproximam das frequências mais altas de cada par do caso 1 quando i aumenta, a medida que as frequências mais baixas afastam-se em comparação ao caso 1. Os modos de vibração do sistema executam dois tipos de movimento, síncronos e assíncronos, dependendo da frequência considerada. Frequências mais baixas de cada par (ω_{i1}) geram modos síncronos, enquanto que as frequências mais altas (ω_{i2}) geram modos assíncronos. Nas Figuras 2.2 e 2.3 são apresentados os doze primeiros modos de vibração do sistema, para os Casos 1, 2 e 3. Os modos estão normalizados a partir de (2.130) e classificados em modos síncronos e assíncronos, conforme a frequência a qual se referem. É possível observar que modos referentes a frequências correspondentes possuem o mesmo formato nos três casos considerados, o que os diferencia é a amplitude. Nas Figuras 2.2 e 2.3, observa-se que, no Caso 1, a amplitude dos modos é sempre a mesma, independentemente se o modo é síncrono ou assíncrono tanto na primeira como na segunda corda. No Caso 2, os modos apresentam uma amplitude maior que nos demais casos para modos síncronos na primeira corda e modos assíncronos na segunda. Ainda no Caso 2, a amplitude apresentou-se menor que nos demais casos para modos síncronos da segunda corda e modos assíncronos da primeira. No Caso 3, a amplitude dos modos apresenta uma amplitude menor que os demais casos para modos síncronos da primeira corda e modos assíncronos da segunda, ao passo que a amplitude foi maior que os demais em modos assíncronos da primeira corda. Ainda no Caso 3, a amplitude dos modos síncronos da segunda corda, com exceção do primeiro modo, apresentou-se a mesma que os modos do Caso 2.

A Figura 2.4 apresenta a parte real da resposta livre do sistema considerado para os Casos 1, 2 e 3, que foi calculada utilizando-se a expressão (2.9) e superposição dos doze modos de vibração encontrados. A amplitude de vibração das cordas não varia consideravelmente nos casos considerados, com exceção do instante $t = 0$, em que a amplitude de oscilação da primeira corda é relativamente maior que a segunda em todos os casos, devido as condições iniciais impostas ao sistema. A parte imaginária da resposta livre nos três casos manteve, em geral, o mesmo comportamento da parte real, como mostra a Figura 2.5. A exceção acontece no caso 2, onde a amplitude na segunda corda mostrou-se ligeiramente maior que na primeira. Na Figura 2.6 é apresentado um corte no ponto $x = 0,5$ na parte real da resposta livre de cada corda. Observou-se que na primeira corda, a oscilação possui uma amplitude quase idêntica nos casos 1 e 2 e um pouco menor no caso 3, embora o formato da oscilação seja praticamente o mesmo. Na segunda corda, é possível observar uma variação tanto na amplitude de vibração, quanto no formato de oscilação de cada caso. A amplitude de vibração da segunda corda no caso 2 é maior que nos demais casos, e a corda oscila mais no intervalo considerado. Nos casos 1 e 3, embora a amplitude não tenha variado consideravelmente, observa-se uma diferença no formato de oscilação. O corte na parte imaginária da resposta livre é apresentado na Figura 2.7 e mantém o mesmo padrão de comportamento apresentado na parte real.

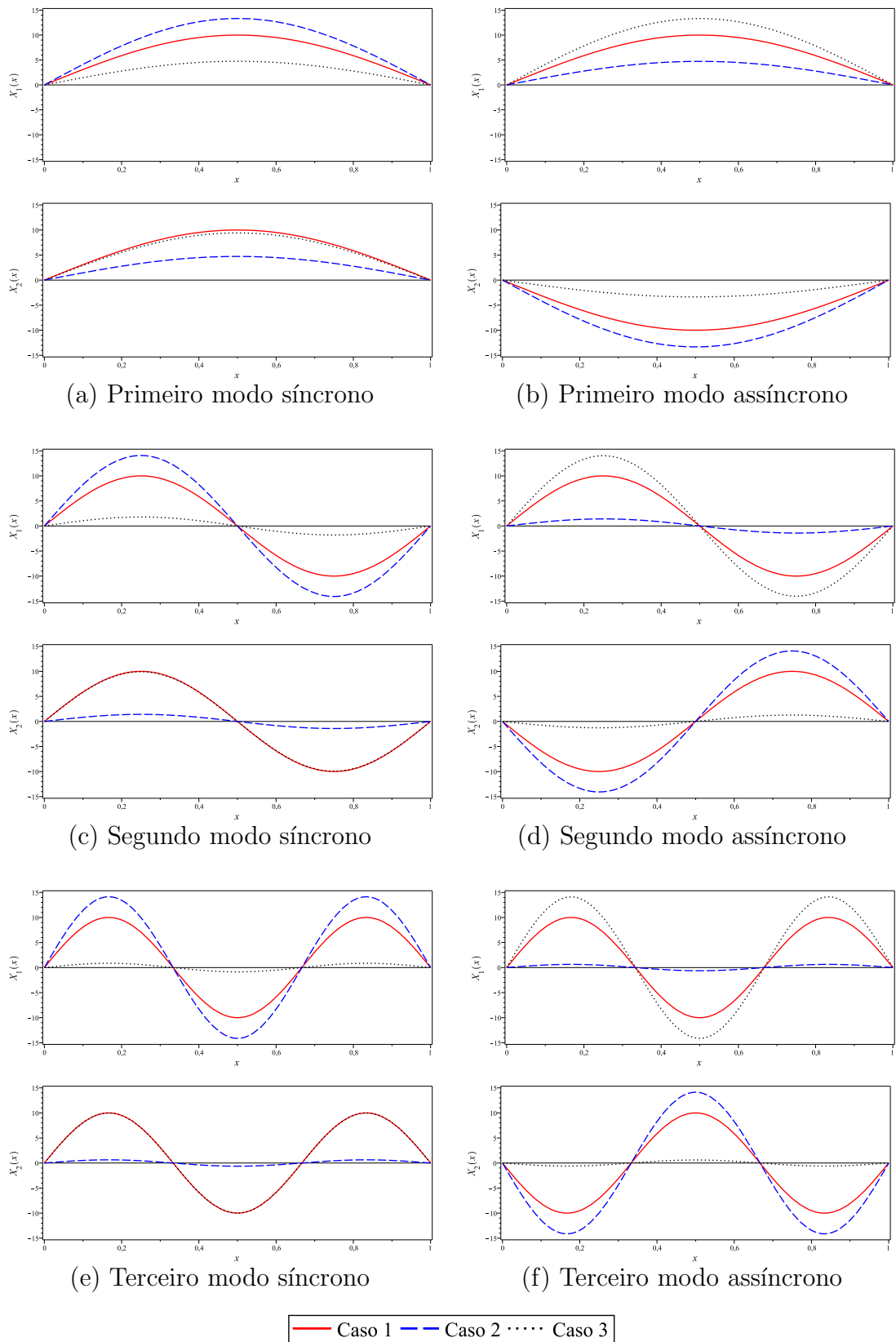


Figura 2.2: Modos de vibração associados às frequências (a) ω_{11} , (b) ω_{12} , (c) ω_{21} , (d) ω_{22} , (e) ω_{31} e (f) ω_{32}

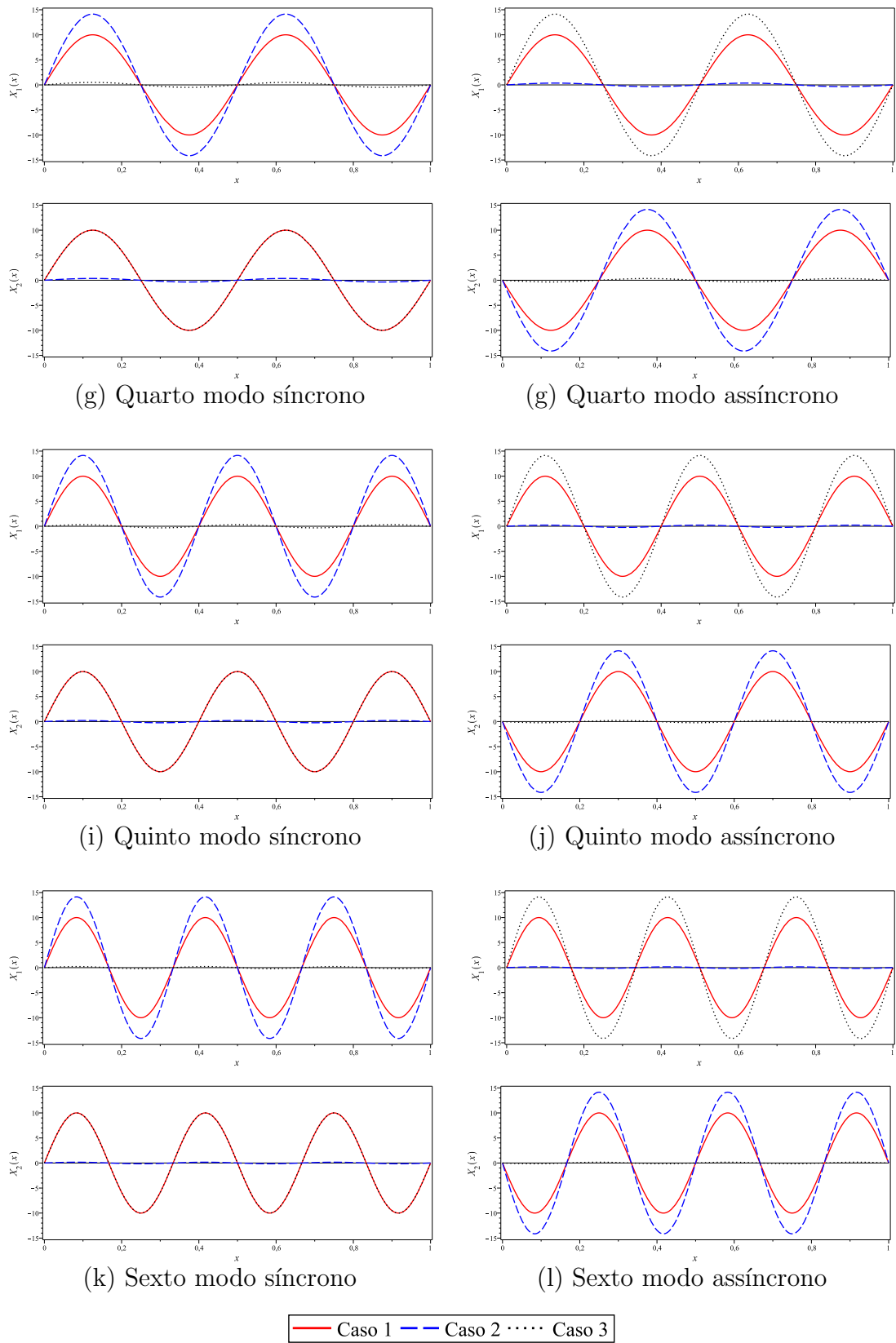
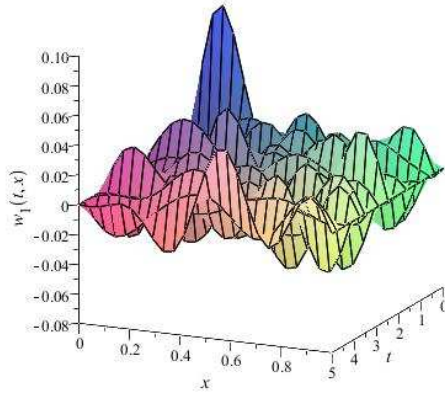
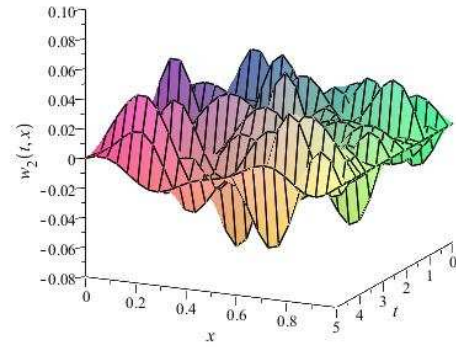
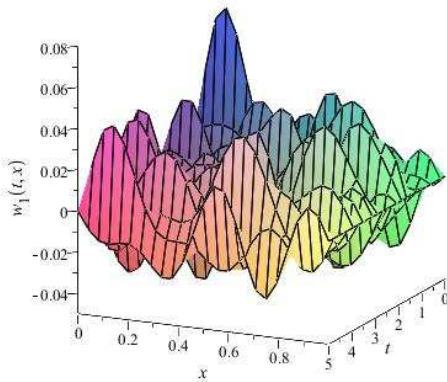
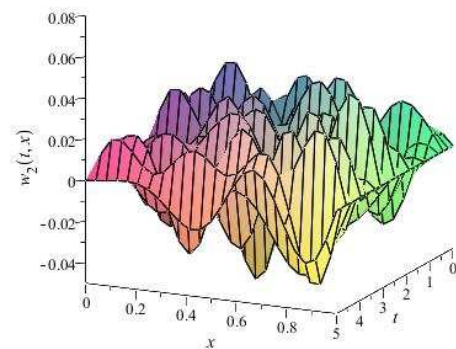


Figura 2.3: Modos de vibração associados às frequências (g) ω_{41} , (h) ω_{42} , (i) ω_{51} , (j) ω_{52} , (k) ω_{61} e (l) ω_{62}

 Caso 1

(a) $w_1(t, x)$ (b) $w_2(t, x)$

 Caso 2

(c) $w_1(t, x)$ (d) $w_2(t, x)$

 Caso 3

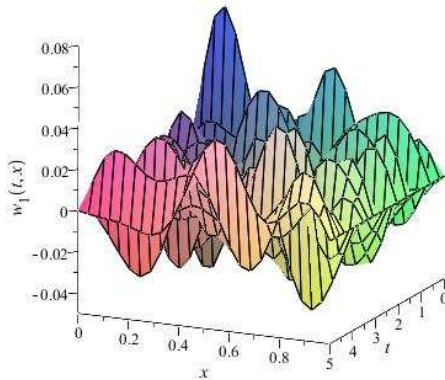
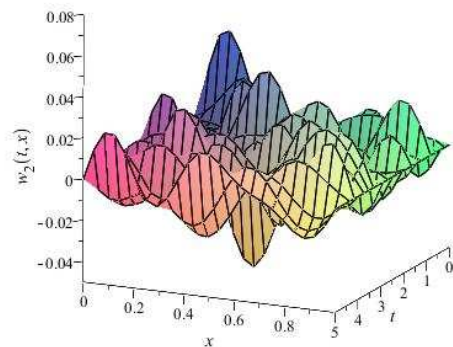
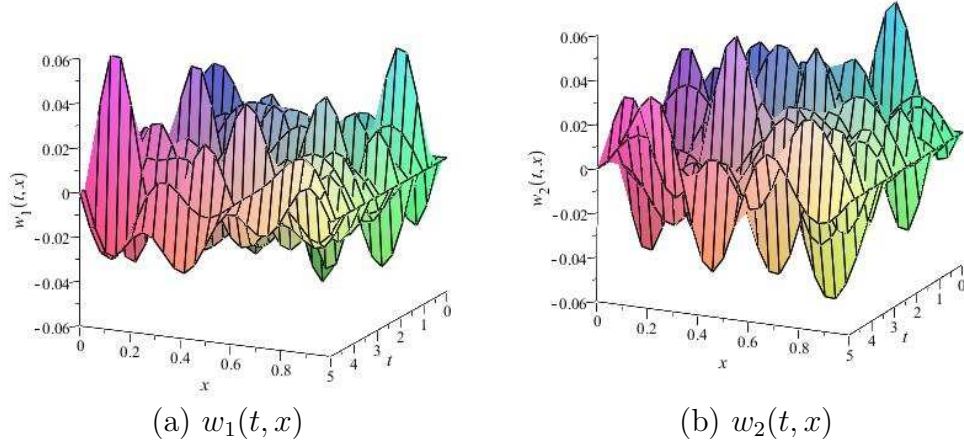
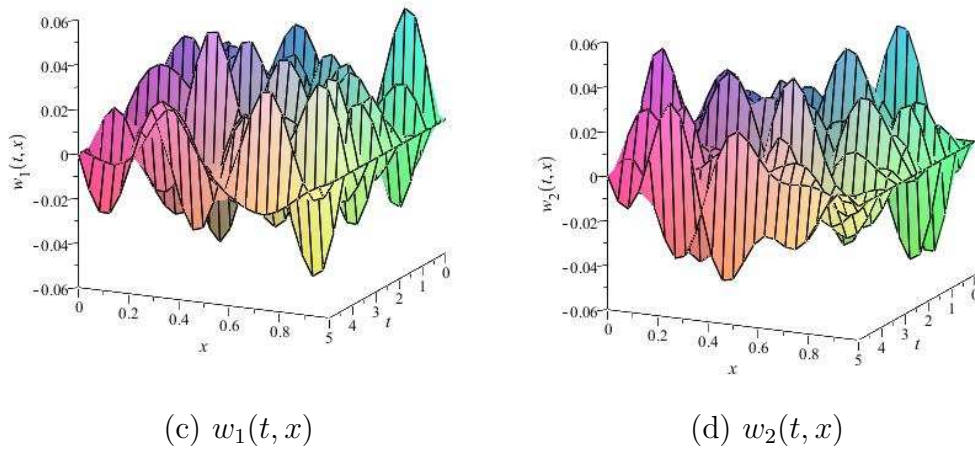
(e) $w_1(t, x)$ (f) $w_2(t, x)$

Figura 2.4: Parte real da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 5$

Caso 1



Caso 2



Caso 3

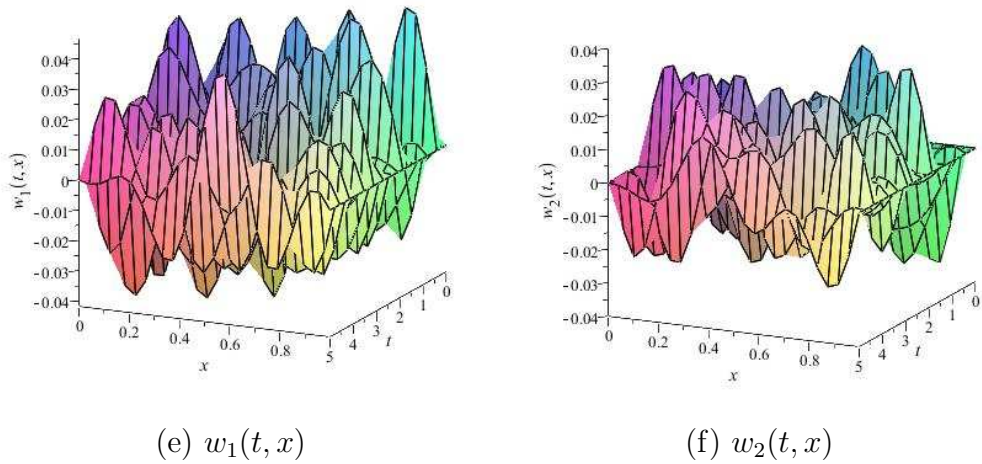


Figura 2.5: Parte imaginária da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 5$

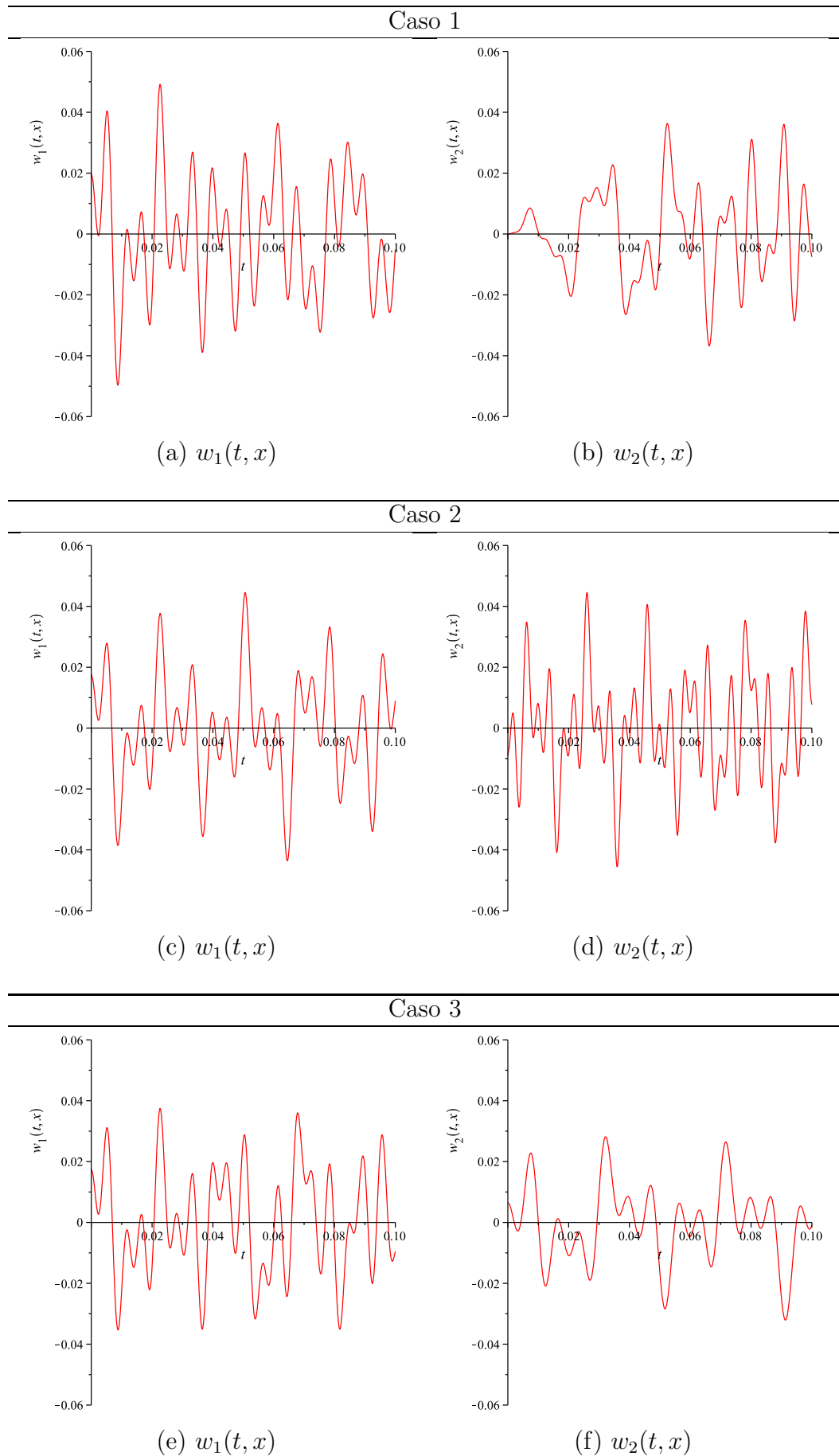


Figura 2.6: Corte em $x = 0,5$ na parte real da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 0,1$

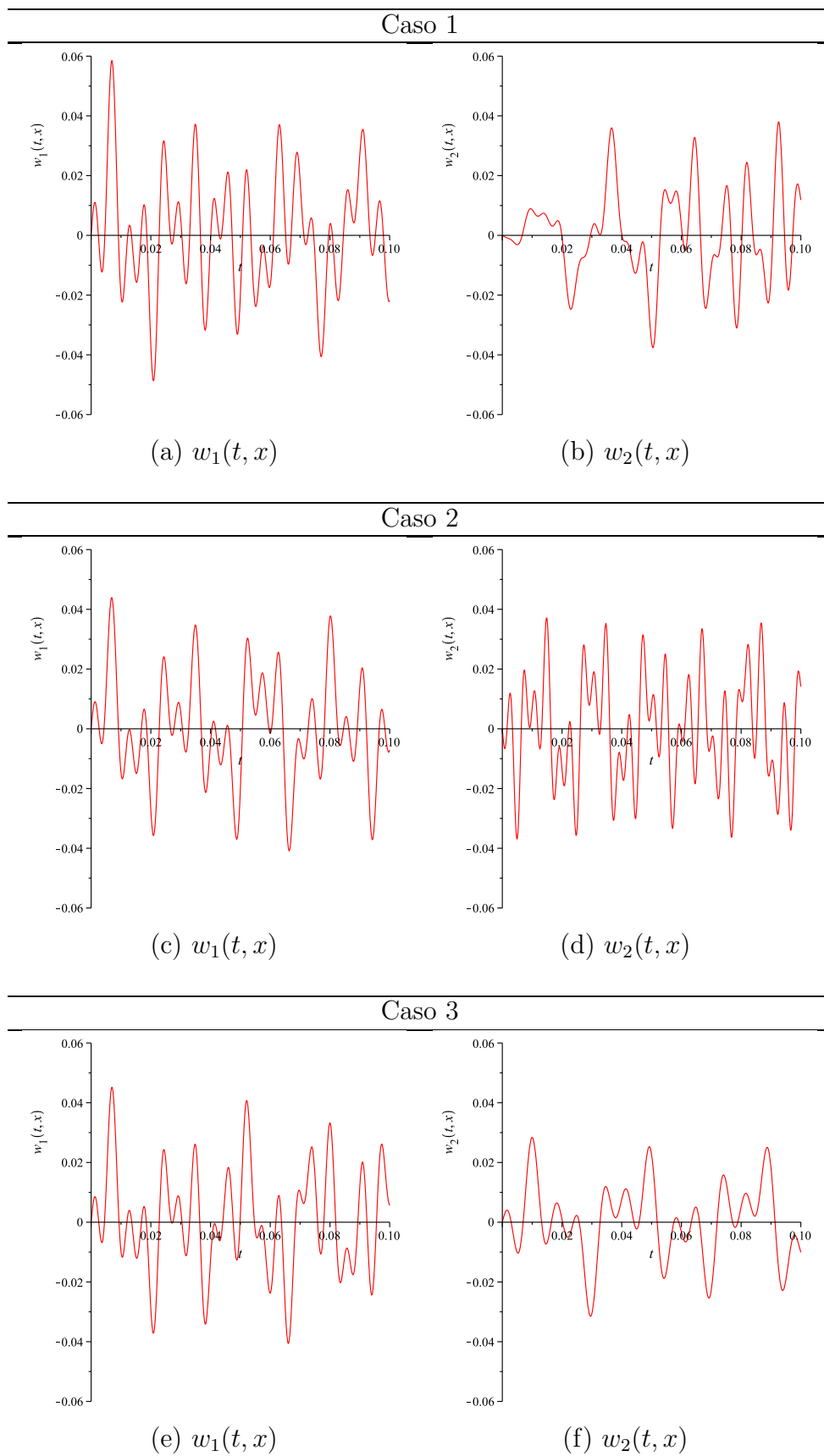


Figura 2.7: Corte em $x = 0,5$ na parte imaginária da resposta livre do sistema para os Casos 1, 2 e 3 no intervalo $0 \leq t \leq 0,1$

2.8.2 Vibrações Forçadas

Nesta seção são apresentadas algumas simulações para o caso forçado do sistema formado por duas cordas anexadas elasticamente. Os parâmetros do sistema são os mesmos que os apresentados na Tabela 2.1. As simulações são referentes ao Caso 1, considerado na seção anterior, isto é, para vibrações forçadas, as cordas do sistema são consideradas idênticas e a força externa será aplicada apenas em um ponto $x = x_L$ da primeira corda, como mostra a Figura 2.8.

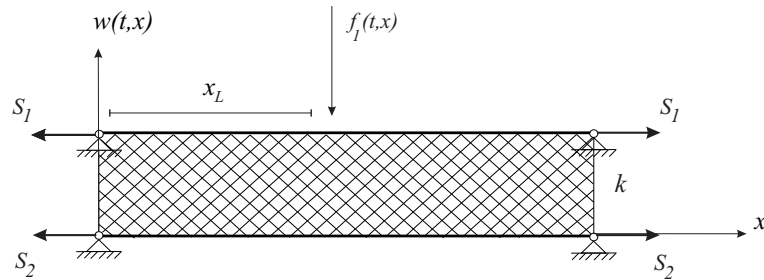


Figura 2.8: Carga em um ponto específico da primeira corda

Força constante: Considere o caso de uma força constante agindo sobre um ponto específico da primeira corda

$$f_1(t, x) = P_0 \delta(x - x_L), \quad f_2(t, x) = 0. \quad (2.151)$$

A Figura 2.9 apresenta a resposta forçada do sistema, calculada a partir das equações (2.146) e (2.147), para $P_0 = 4$ e $x_L = 0,2$. A ação da força externa no ponto específico da primeira corda se mostra evidente. A amplitude naquele ponto é maior que em qualquer outro. A segunda corda oscilou de maneira mais distribuída em seus pontos e a amplitude de vibração apresentou-se menor comparado à primeira.

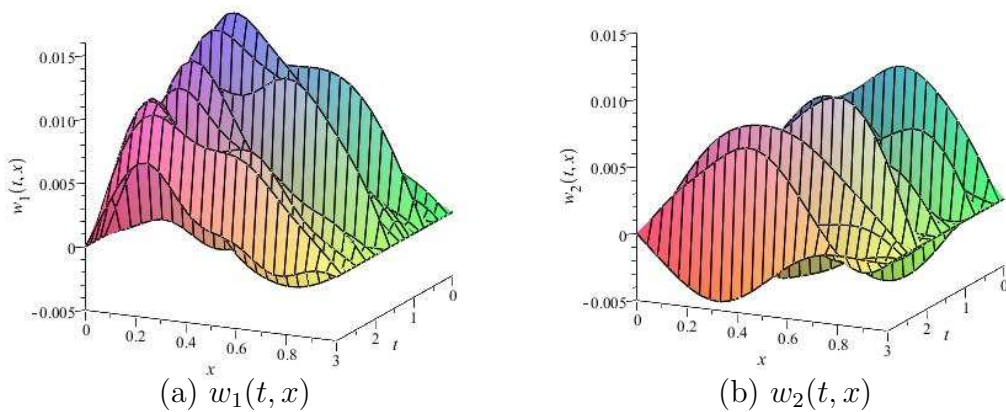


Figura 2.9: Resposta forçada para uma força constante $P_0 = 4$ em $x_L = 0,2$ no intervalo $0 \leq t \leq 3$ na (a) primeira e (b) segunda corda

A Figura 2.10 apresenta um corte em $x = 0,2$ na resposta forçada do sistema onde é possível observar que a oscilação na primeira corda ocorre acima do ponto de equilíbrio, enquanto que na segunda corda a oscilação acontece tanto acima quanto para baixo. Observa-se ainda que, neste ponto, a amplitude de vibração da primeira corda é aproximadamente o dobro da amplitude de vibração da segunda.

A Figura 2.11 apresenta um corte no ponto $x = 0,8$, relativamente distante de onde foi aplicada a força. É possível observar que a amplitude de vibração da primeira corda diminuiu, comparada a amplitude no ponto $x = 0,2$. Além disso, a oscilação, que antes era apenas acima do ponto de equilíbrio, agora também ocorre abaixo do mesmo. Na segunda corda, observa-se que a amplitude de vibração em $x = 0.8$ é ligeiramente maior do que em $x = 0,2$.

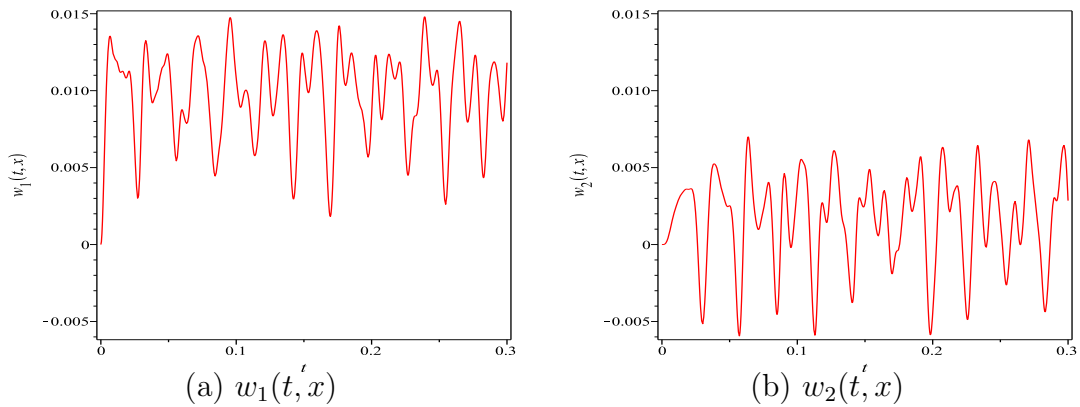


Figura 2.10: Corte em $x = 0,2$ na resposta forçada com força externa constante P_0 no intervalo $0 \leq t \leq 0,3$ para a (a) primeira corda e (b) segunda corda

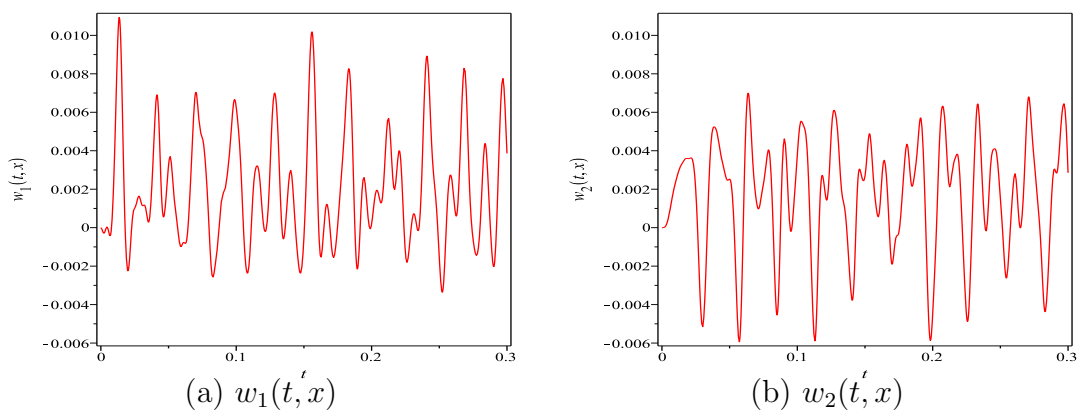


Figura 2.11: Corte em $x = 0,8$ na resposta forçada com força externa constante P_0 no intervalo $0 \leq t \leq 0,3$ para a (a) primeira corda e (b) segunda corda

Força externa harmônica: Considere o caso de uma força harmônica agindo sobre um ponto específico da primeira corda

$$f_1(t, x) = P_0 \operatorname{sen}(bt)\delta(x - x_L), \quad f_2(t, x) = 0. \quad (2.152)$$

A Figura 2.12 apresenta a resposta forçada do sistema, calculada a partir das equações (2.146) e (2.147), para $P_0 = 4$, $x_L = 0,8$ e $b = 4$. Observa-se, novamente, que no ponto de aplicação da força a amplitude de vibração é maior na primeira corda, e que a vibração está mais distribuída na segunda.

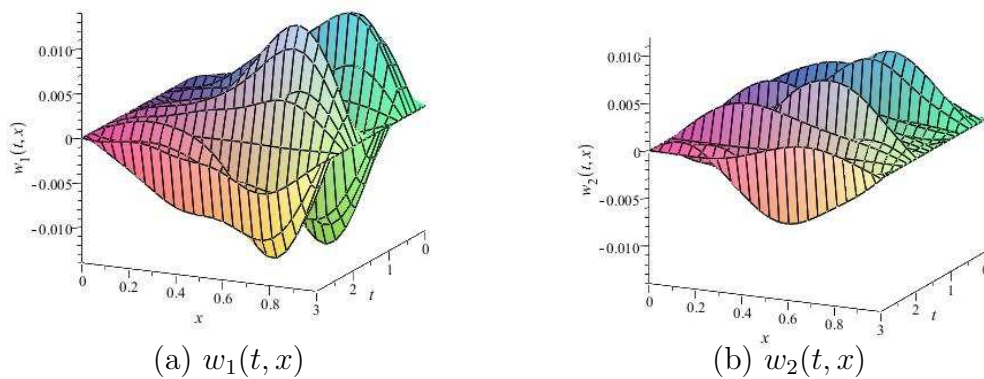


Figura 2.12: Resposta forçada para um força externa harmônica no ponto $x_L = 0,8$ intervalo $0 \leq t \leq 3$ para (a) a primeira corda e (b) a segunda corda.

A ação do força externa harmônica na primeira corda pode ser observada na resposta do sistema a partir de um corte em $x = 0.8$ como mostra a Figura 2.13. Observa-se também que a amplitude de vibração na primeira corda é aproximadamente igual ao dobro da amplitude da segunda, o que era esperado devido a aplicação da força na corda superior.

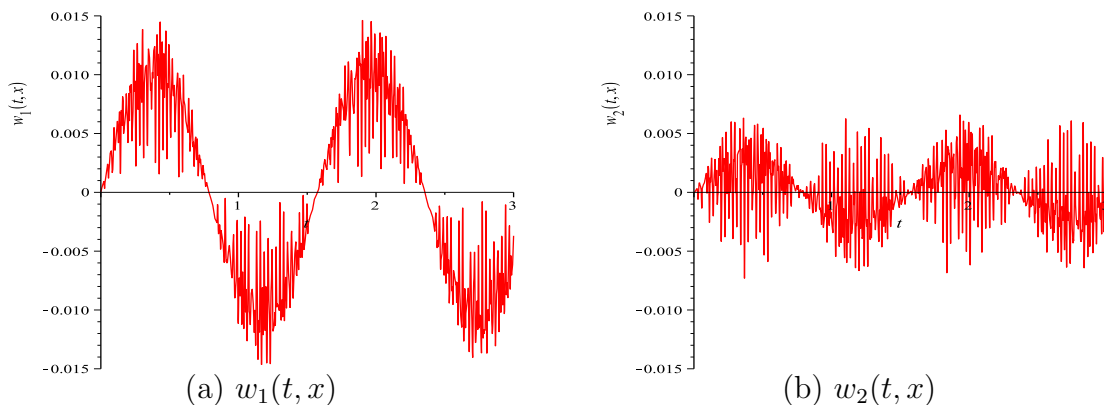


Figura 2.13: Corte em $x = 0,8$ na resposta forçada com força externa harmônica no intervalo $0 \leq t \leq 3$ na (a) primeira corda (b) segunda corda.

Capítulo 3

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS AMORTECIDAS

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o sistema formado por duas cordas anexadas por um elemento viscoelástico, isto é, com amortecimento, tanto na camada, como nas próprias cordas. Os autovalores do sistema são encontrados supondo-se uma solução exponencial e envolvendo os modos de vibração do sistema, que são escritos em função da base dinâmica. Um sistema desacoplável é apresentado a partir de algumas simplificações nas hipóteses do problema, tornando as matrizes do sistema mutuamente diagonalizáveis, permitindo encontrar uma solução analítica para as autofrequências e autofunções do sistema amortecido. Os resultados estão ilustrados através de exemplos numéricos.

3.2 Descrição do modelo

Considere o sistema formado por duas cordas apoiadas de mesmo comprimento anexadas por uma camada viscoelástica, como mostra a Figura 3.1,

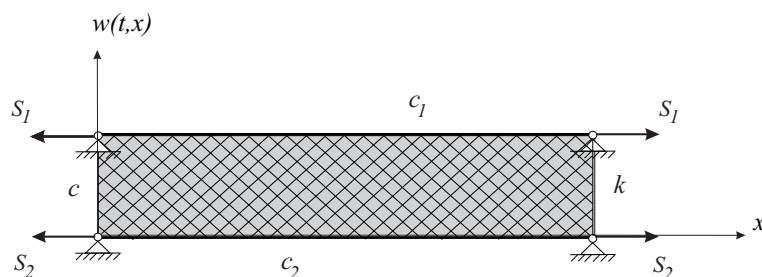


Figura 3.1: Duas cordas anexadas viscoelasticamente

As duas cordas estão esticadas a uma tensão constante e são modeladas pelas

equações, [24]

$$m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + c \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) - S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k(w_1 - w_2) = 0, \quad (3.1)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + c \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) - S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k(w_2 - w_1) = 0, \quad (3.2)$$

onde,

- t, x são as coordenadas temporal e espacial, respectivamente;
- k é a constante de rigidez do elemento elástico;
- S_i é a tensão da corda i , $i = 1, 2$;
- $m_i = \rho_i A_i$, sendo que ρ_i é a massa específica da corda i e A_i é a área da seção transversal, para $i = 1, 2$;
- c_i é o amortecimento na corda i , $i = 1, 2$;
- c é o amortecimento na camada elástica.

As condições iniciais desse sistema são dadas de forma geral por

$$w_i(0, x) = w_{i0}(x), \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0, x) = v_{i0}(x), \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

e as condições de contorno, para o sistema apoiado, são da forma

$$w_i(t, 0) = w_i(t, L) = 0, \quad (3.4)$$

Para encontrar as vibrações livres amortecidas do sistema (3.1)-(3.2) considera-se, primeiramente, o sistema em sua forma matricial, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_k)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

onde,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c + c_1 & -c \\ -c & c + c_2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} -S_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

Seja,

$$\mathbf{w}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x), \quad (3.8)$$

uma solução para o sistema (3.5), onde, λ é o autovalor e $\mathbf{X}(x)$ a autofunção correspondente.

Substituindo (3.8) em (3.5) obtém-se o problema de autovalor quadrático

$$[\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_o)]\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

Desenvolvendo a equação acima a partir do operador matricial de segunda ordem \mathbf{K}_o , obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem envolvendo os modos de vibração do sistema,

$$\mathbf{K}_S\mathbf{X}''(x) + [\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}_k]\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

onde,

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & -S_2 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

com condições de contorno

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}(L) = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Os modos $\mathbf{X}(x)$ são escritos em função da base dinâmica, composta pela matriz $\mathbf{h}(x)$ e sua derivada $\mathbf{h}'(x)$, onde $\mathbf{h}(x)$ satisfaz a equação (3.10) com condições impulsivas, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_S\mathbf{h}''(x) + (\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}_k)\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{K}_S\mathbf{h}'(0) &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem (2×2) . O cálculo da base dinâmica é feito de maneira análoga ao caso não amortecido, utilizando-se a fórmula (2.29) do capítulo anterior, dada por

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(x) \mathbf{h}_{2n-j}. \quad (3.14)$$

Os coeficientes do polinômio característico (2.30)

$$P(s) = \det[s^2\mathbf{K}_S + (\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})], \quad (3.15)$$

dados em função dos parâmetros do sistema são

$$\begin{aligned}
b_0 &= S_1 S_2, \\
b_1 &= 0, \\
b_2 &= -S_1[m_2 \lambda^2 + (c + c_2)\lambda + k] - S_2[m_1 \lambda^2 + (c + c_1)\lambda + k], \\
b_3 &= 0, \\
b_4 &= \lambda^2[m_1 m_2 \lambda^2 + (m_1 + m_2)k + c(c_1 + c_2) + c_1 c_2] \\
&\quad + [m_2(c + c_1) + m_1(c + c_2)]\lambda^3 + k(c_1 + c_2)\lambda.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Da equação em diferenças

$$\begin{aligned}
K_S h_{k+2} + (\lambda^2 M + \lambda C + K) h_k &= 0, \\
h_0 &= 0, \quad K_S h_1 = I,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

obtém-se,

$$h_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S_2} \end{bmatrix}, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \begin{bmatrix} -\frac{m_1 \lambda^2 + \lambda(c + c_1) + k}{S_1^2} & \frac{\lambda c + k}{S_1 S_2} \\ \frac{\lambda c + k}{S_1 S_2} & -\frac{m_2 \lambda^2 + \lambda(c + c_2) + k}{S_2^2} \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

A solução da equação diferencial (2.32)

$$b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d''(x) + b_4 = 0, \tag{3.19}$$

com condições iniciais

$$b_0 d'''(0) = 1, \quad d''(0) = d'(0) = d(0) = 0, \tag{3.20}$$

é obtida supondo-se uma solução da forma (2.51), de modo que,

$$d(x) = \frac{\text{sen}(\xi x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\text{sen}(\delta x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}, \tag{3.21}$$

onde,

$$\xi = \sqrt{\frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0}}. \tag{3.22}$$

As componentes da matriz $\mathbf{h}(x)$, de ordem 2, para o caso amortecido, podem ser escritas usando (3.16) e (3.18) e desenvolvendo a fórmula (3.14),

$$\mathbf{h}_{11} = (\lambda^2 m_2 + \lambda(c + c_2) + k)d(x) - S_2 d''(x), \tag{3.23}$$

$$\mathbf{h}_{12} = \mathbf{h}_{21} = (\lambda c + k)d(x), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{h}_{22} = (\lambda^2 m_1 + \lambda(c + c_1) + k)d(x) - S_1 d''(x). \quad (3.25)$$

Considerando-se vetores constantes, \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 de ordem (2×1) , os modos $\mathbf{X}(x)$ podem ser escritos como,

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (3.26)$$

devido as condições de contorno (3.12), em (3.26)

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

de modo que, $\mathbf{X}(x)$ em função da base dinâmica é dado por

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}. \quad (3.28)$$

O fato de as condições de contorno (3.12) serem as mesmas do caso sem amortecimento, implica que a formulação matricial em blocos do sistema é a mesma,

$$\mathbf{B}\Phi\mathbf{C} = 0, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]^T, \quad (3.29)$$

onde,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{K}_S^{-1} & 0 \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Assim, o sistema (3.29) pode ser simplificado da mesma forma (2.44),

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Soluções não-nulas do sistema ocorrem quando

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.33)$$

ou seja, quando,

$$\det(\mathbf{h}(L)) = 0. \quad (3.34)$$

As raízes da equação (3.34) são os autovalores λ do problema amortecido. No caso

geral, o cálculo dos autovalores precisa ser realizado utilizando-se softwares matemáticos e métodos numéricos. No entanto, considerando-se algumas simplificações no problema, é possível encontrar, da mesma forma como foi feito no caso não amortecido, uma forma analítica para o cálculo das frequências e modos de vibração do problema.

3.3 Sistema desacoplável

O modelo descrito pelas equações (3.1)-(3.2) da seção anterior, constitui um sistema acoplado de equações diferenciais de duas funções desconhecidas, $w_1(t, x)$ e $w_2(t, x)$, o que dificulta a sua resolução. Uma maneira de resolver tais sistemas é operar as equações de modo que os fatores de acoplamento sejam eliminados. No entanto, para um sistema geral, nem sempre é possível fazer tal procedimento, às vezes são necessárias algumas hipóteses que simplifiquem o problema, de modo que as equações sejam desacopláveis, ou no caso matricial, que as matrizes do problema sejam mutuamente diagonalizáveis. A seguir, é considerada uma simplificação para o sistema (3.1) e (3.2) obtendo-se matrizes diagonalizáveis. Para isso, primeiramente considere os seguinte resultados

Lema 3.3.1. *Considere as matrizes M e K dadas abaixo*

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

então, definindo

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

decorre que,

$$\lambda^2 P^T M P + P^T K P = \lambda^2 M_d + K_d, \quad (3.37)$$

onde, M_d e K_d são matrizes diagonais.

Demonstração. A partir do teorema dos modos normais, como M e K_k são matrizes simétricas, com M definida positiva, então existe uma matriz P que diagonaliza M e K_k simultaneamente. As colunas de P são os autovetores do problema

$$\Lambda(\lambda) \mathbf{u} = 0, \quad (3.38)$$

onde,

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^2 M + K_k. \quad (3.39)$$

Para $\mathbf{u} \neq 0$, deve-se ter

$$\det(\lambda^2 M + K_k) = 0. \quad (3.40)$$

As raízes da equação (3.40), dadas por

$$0, i\sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad (3.41)$$

são os autovalores do problema (3.38). Os autovetores, são calculados substituindo-se os valores de λ na equação (3.38).

Para $\lambda = 0$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

de modo que, o autovetor unitário \mathbf{u} , associado ao autovalor $\lambda = 0$ é da forma

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 1]^T. \quad (3.43)$$

Para $\lambda = i\sqrt{\frac{2k}{m}}$, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

de modo que, o autovetor unitário \mathbf{u} , associado ao autovalor $\lambda = i\sqrt{\frac{2k}{m}}$ é da forma

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad -1]^T. \quad (3.45)$$

Portanto, a matriz P que diagonaliza M e K_k é da forma

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

□

Corolário 3.3.2. *Dadas as matrizes*

$$D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r & -r \\ -r & r \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

a transformação,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

é tal que

- $P^T = P^{-1}$

- $P^T DP = D$
- $P^T RP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}$

Demonstração. A demonstração é imediata. \square

Em [24], o sistema de duas cordas anexadas viscoelaticamente foi tomado de um modo simplificado, considerando-se os coeficientes de amortecimento viscoso, c_i , de unidade de massa, m_i e de tensão, S_i , como sendo os mesmos, isto é,

$$c_i = C, \quad m_i = m, \quad S_i = S, \quad i = 1, 2. \quad (3.49)$$

Dessa forma, o sistema (3.5) é dado por

$$M\ddot{\mathbf{w}} + C\dot{\mathbf{w}} + (K_k + K_o)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.50)$$

onde,

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c + C & -c \\ -c & c + C \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$K_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad K_o = \begin{bmatrix} -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Os operadores matriciais, M , K_k e K_o satisfazem as hipóteses do Lema 3.3.1 e, portanto, são diagonalizáveis. Observe que o operador C pode ser escrito da forma

$$C = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

ou seja, C é uma combinação linear das matrizes M e K_k , portanto, também pode ser diagonalizado pela transformação P . Este amortecimento é conhecido na literatura como amortecimento de Rayleigh, [17], [21].

Considere a seguinte mudança de variáveis para o sistema amortecido (3.50),

$$\mathbf{w}(t, x) = P\mathbf{u}(t, x), \quad (3.54)$$

onde P é dado por (3.36). Substituindo-se (3.54) no sistema (3.50), e multiplicando-se à esquerda por P , obtém-se,

$$P^T MP\ddot{\mathbf{u}} + P^T CP\dot{\mathbf{u}} + (P^T K_k P + P^T K_o P)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

ou, desenvolvendo o operador de K_o ,

$$P^T MP\ddot{\mathbf{u}} + P^T CP\dot{\mathbf{u}} + P^T K_k P\mathbf{u} + P^T K_S P\mathbf{u}'' = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

onde,

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Desta forma, utilizando-se (3.53) e o Corolário 3.3.2, obtém-se a diagonalização das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K}_k e \mathbf{K}_S , resultando no seguinte sistema desacoplado, [24]

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathcal{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathcal{K}_k + \mathcal{K}_o)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.58)$$

onde,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C + 2c \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\mathcal{K}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_o = \begin{bmatrix} -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Supondo uma solução exponencial para o sistema (3.58), da forma

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{\gamma t}\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

obtém-se o problema de autovalor

$$[\gamma^2\mathcal{M} + \gamma\mathcal{C} + (\mathcal{K}_k + \mathcal{K}_o)]\mathbf{U}(x) = \mathbf{0}, \quad (3.62)$$

de onde decorre o sistema de equações diferenciais envolvendo os modos $\mathbf{U}(x)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S\mathbf{U}''(x) + (\gamma^2\mathcal{M} + \gamma\mathcal{C} + \mathcal{K}_k)\mathbf{U}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}(L) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Os modos $\mathbf{U}(x)$ são, então, escritos em função da base dinâmica, composta pela matriz $\widehat{\mathbf{h}}(x)$, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S\widehat{\mathbf{h}}''(x) + (\gamma^2\mathcal{M} + \gamma\mathcal{C} + \mathcal{K}_k)\widehat{\mathbf{h}}(x) &= \mathbf{0}, \\ \widehat{\mathbf{h}}(0) &= \mathbf{0}, \quad \mathcal{K}_S\widehat{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

e sua derivada, $\widehat{\mathbf{h}}'(x)$. A partir das condições de contorno (3.63) do sistema, obtém-se,

$$\mathbf{U}(x) = \widehat{\mathbf{h}}(x)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2]^T. \quad (3.65)$$

O cálculo de $\widehat{\mathbf{h}}(x)$ é feito utilizando-se a fórmula (3.14), obtendo-se, a matriz diagonal com componentes

$$\widehat{\mathbf{h}}_{11}(x) = [\gamma^2 m + (C + 2c)\gamma + 2k]d(x) - Sd''(x), \quad (3.66)$$

$$\widehat{\mathbf{h}}_{12} = \widehat{\mathbf{h}}_{21} = 0, \quad (3.67)$$

$$\widehat{\mathbf{h}}_{22} = (\gamma^2 m + \gamma C)d(x) - Sd''(x), \quad (3.68)$$

onde,

$$d(x) = -\frac{\text{sen}(\xi x)}{S^2(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\text{sen}(\delta x)}{S^2(\xi^2 - \delta^2)\delta}, \quad (3.69)$$

com ξ e δ soluções de

$$b_0 r^4 - b_2 r^2 + b_4 = 0, \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= S^2; \\ b_2 &= -2S(\lambda^2 m + (C + c)\lambda + K); \\ b_4 &= (\lambda^2 m + \lambda C)[\lambda^2 m + (C + 2c)\lambda + 2k], \end{aligned} \quad (3.71)$$

de modo que,

$$\xi = \frac{\sqrt{-S[\lambda^2 m + (C + 2c)\lambda + 2k]}}{S}, \quad \delta = \frac{\sqrt{-\lambda S(\lambda m + C)}}{S}. \quad (3.72)$$

Usando (3.72) nas equações (3.66) e (3.68), componentes da matriz $\widehat{\mathbf{h}}(x)$, obtém-se,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{h}}_{11}(x) &= -2(k + \lambda c)\xi \text{sen}(\delta x), & \widehat{\mathbf{h}}_{22}(x) &= -2(k + \lambda c)\delta \text{sen}(\xi x), \\ \mathbf{h}_{12} &= \mathbf{h}_{21} = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Decorre de (3.73) e das condições de contorno dadas em (3.63), que soluções não nulas para \mathbf{c} em (3.65) ocorrem quando

$$\text{sen}(\delta L) = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}(\xi L) = 0. \quad (3.74)$$

Da relação acima decorre que

$$\delta = \delta_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{e} \quad \xi = \xi_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.75)$$

Para $\delta_n = \frac{n\pi}{L}$, então os autovalores podem ser calculados através da fórmula

$$\lambda_{1n} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mS\delta_n^2}}{2m}, \quad (3.76)$$

e os modos de vibração $U_1(x)$ possuem a seguinte forma

$$U_1(x) = \widehat{\mathbf{h}}_{11}(x)c_1. \quad (3.77)$$

Para $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$, os autovalores são dados por

$$\lambda_{2n} = \frac{-(C + 2c) \pm \sqrt{(C + 2c)^2 - 2m(2k + S\xi^2)}}{2m}, \quad (3.78)$$

e os modos de vibração $U_1(x)$ são da forma

$$U_2(x) = \hat{\mathbf{h}}_{22} c_2. \quad (3.79)$$

ou seja, os modo de vibração $\mathbf{U}(x)$ do sistema desacoplado (3.58) são as componentes da matriz $\hat{\mathbf{h}}(x)$ para cada autovalor γ encontrado.

Observe ainda que, a transformação P dada em (3.36), diagonaliza a matriz $\mathbf{h}(x)$, componente da base dinâmica para o caso amortecido acoplado, dado por (3.23), (3.24) e (3.25), quando considera-se as hipóteses (3.49), além disso, a matriz diagonal correspondente é exatamente igual à matriz $\hat{\mathbf{h}}(x)$, isto é,

$$P^T \mathbf{h}(x) P = \hat{\mathbf{h}}(x), \quad (3.80)$$

no caso em que são consideradas as hipóteses (3.49).

Dessa forma, a partir de (3.54) e (3.80), observa-se que denotando-se por $\mathbf{X}(x)$ os modos do sistema original acoplado (3.50), vale a seguinte relação,

$$\mathbf{X}(x) = P\mathbf{U}(x), \quad (3.81)$$

ou seja, os modos de vibração do sistema geral podem ser calculados a partir dos modos de vibração do sistema desacoplado associado, a resposta amortecida para o sistema, dada em (3.54), pode ser escrita na forma

$$\mathbf{w}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\gamma_i t} P\mathbf{U}_i(x), \quad (3.82)$$

ou ainda,

$$\mathbf{w}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\text{Re}(\gamma_i)t} (A_i \cos(\text{Im}(\gamma_i)) + iB_i \text{sen}(\text{Im}(\gamma_i))) P\mathbf{U}_i(x), \quad (3.83)$$

onde, $\mathbf{U}_i(x)$ representa o i -ésimo modo de vibração associado ao autovalor λ_i .

As constantes A_i e B_i podem ser calculadas a partir das condições iniciais do problema e do uso da ortogonalidade dos modos, analogamente ao procedimento apresentado no capítulo anterior.

3.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico para o sistema de duas cordas anexadas por uma camada viscoelástica. Nesta simulação são consideradas cordas com mesma massa por unidade de comprimento e sujeitas a mesma tensão, como foi feito no Caso 1 da seção anterior. A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros considerados nas simulações, que são os mesmos usados nas simulações para o caso não amortecido.

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Comprimento L	1	m
Área da seção transversal A_i	2×10^{-6}	m ²
Massa específica ρ_i	5×10^3	kgm ⁻³
Massa por unidade de comprimento $m_i = \rho_i \times A_i$	1×10^{-2}	kgm ⁻¹
Tração S_i	50	N
Constante elástica k	2×10^2	Nm ⁻²
Coefficiente amortecimento da corda c_i	1×10^{-1}	Nsm ⁻¹
Coefficiente amortecimento da camada c	6×10^{-1}	Nsm ⁻¹

Tabela 3.1: Parâmetros para o sistema dupla-corda com amortecimento

A Tabela 3.2 apresenta os seis primeiros autovalores para o problema amortecido. Eles são enumerados comparando-se a parte imaginária com as frequências naturais encontrados no caso sem amortecimento, de onde pode ser observado a proximidade da parte imaginária dos autovalores amortecidos (λ_a) com as frequências do caso sem amortecimento (λ_{na}), isto ocorre devido ao tipo de amortecimento escolhido para as simulações.

λ_{ij}	λ_a	λ_{na}
λ_{11}	-5,00 + 222,08i	222,14i
λ_{12}	-65,00 + 291,75i	298,91i
λ_{21}	-5,00 + 444,26i	444,28i
λ_{22}	-65,00 + 482,87i	487,22i
λ_{31}	-5,00 + 666,41i	666,43i
λ_{32}	-65,00 + 692,75i	695,79i

Tabela 3.2: Autovalores do sistema amortecido (λ_a) e não amortecido (λ_{na})

Cada par de autovalores na tabela acima possui um autovalor com parte imaginária mais baixa (λ_{i1} , $i = 1, 2, 3$), e outro com a parte imaginária mais alta (λ_{i2} , $i = 1, 2, 3$), denominados a partir de agora como *primeiro autovalor* e *segundo autovalor* de cada par, respectivamente. A Figura 3.2 apresenta a componente real dos modos de vibração do sistema amortecido considerado. Observa-se que o comportamento dos modos de vibração segue o mesmo padrão do caso não amortecido, isto é, executam dois tipos de movimento, síncrono e não-síncrono, dependendo do autovalor ao qual estão associados. *Os primeiros*

autovalores de cada par geram modos síncronos, enquanto que, *os segundos autovalores* geram modos assíncronos.

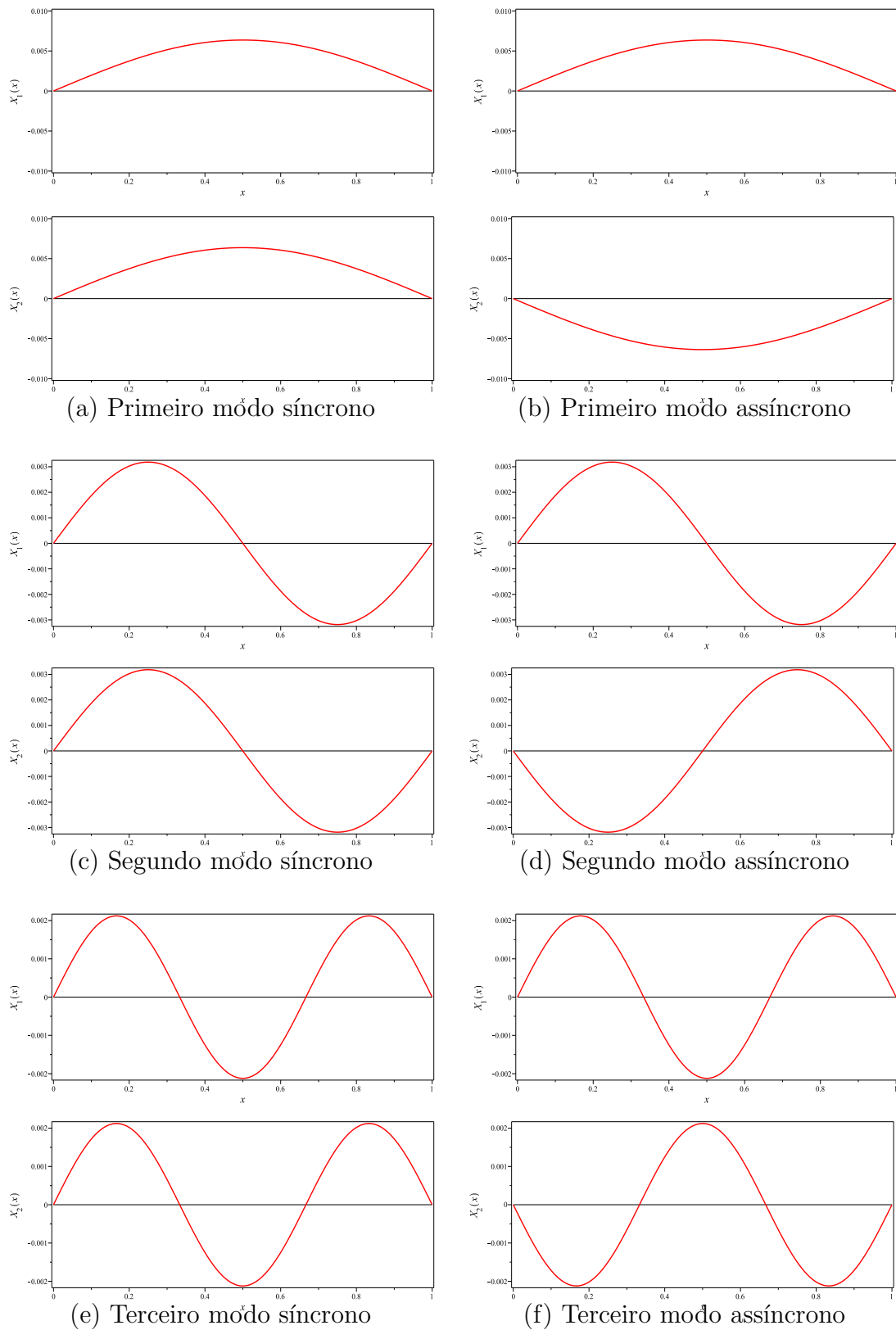


Figura 3.2: Componente real dos modos de vibração do sistema amortecido associados aos autovalores (a) λ_{11} , (b) λ_{12} , (c) λ_{21} , (d) λ_{22} , (e) λ_{31} e (f) λ_{32}

A amplitude de cada modo é relativamente igual para cada par de autovalores, λ_{i1} e λ_{i2} . A Figura 3.3 apresenta a resposta livre amortecida para a primeira e segunda corda.

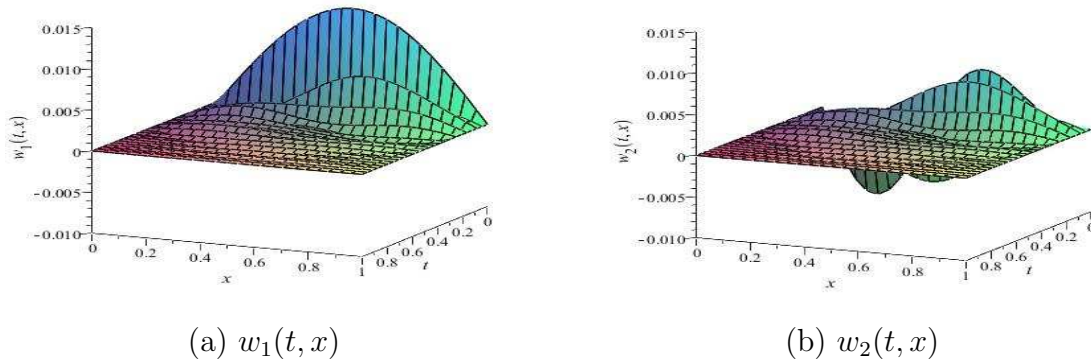


Figura 3.3: Componente real da resposta amortecida no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$

Da mesma forma que no caso não amortecido, a amplitude de vibração da primeira corda apresentou-se relativamente maior que na segunda corda no caso considerado. A ação do amortecimento na vibração do sistema pode ser observada, isto é, a amplitude da resposta diminui com o passar do tempo, tanto na primeira, como na segunda corda. Um corte em $x = 0.5$ na resposta livre é apresentado na Figura 3.4, onde é possível observar o efeito do amortecimento fazendo com que o sistema retorne à posição de equilíbrio.

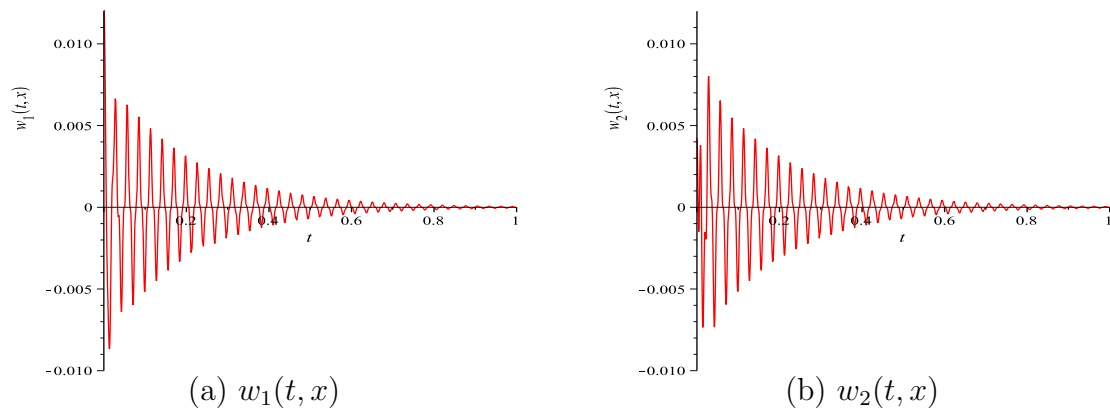


Figura 3.4: Corte em $x = 0,5$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ da componente real da resposta amortecida

A Figura 3.5 apresenta a parte oscilatória (imaginária) da resposta livre amortecida do sistema. Novamente, a amplitude de vibração da primeira corda apresentou-se relativamente maior comparado com a segunda. A primeira corda também oscila mais no intervalo de tempo, isto é, a segunda corda retorna à posição de equilíbrio mais rapidamente que a primeira.

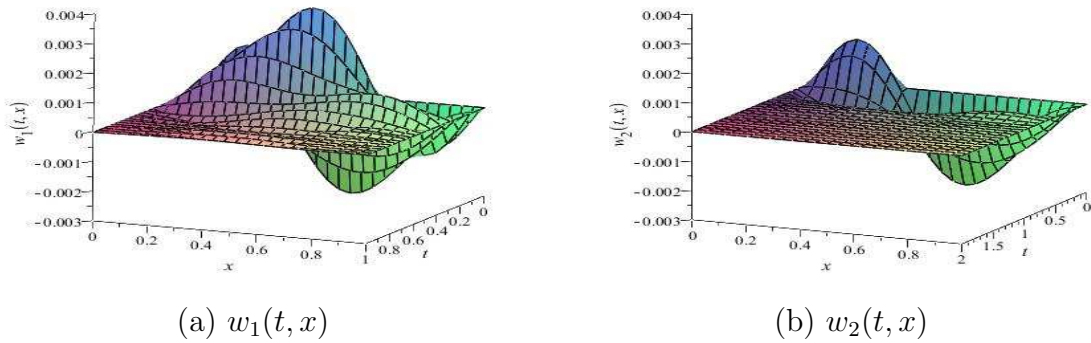


Figura 3.5: Componente imaginária da resposta amortecida no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$

A Figura 3.6 apresenta um corte em $x = 0.5$ na parte oscilatória da resposta livre amortecida de cada corda no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$. Como foi mencionado anteriormente, é possível observar a maior amplitude de vibração da primeira corda e a ação do amortecimento no sistema. O sistema retorna ao equilíbrio rapidamente.

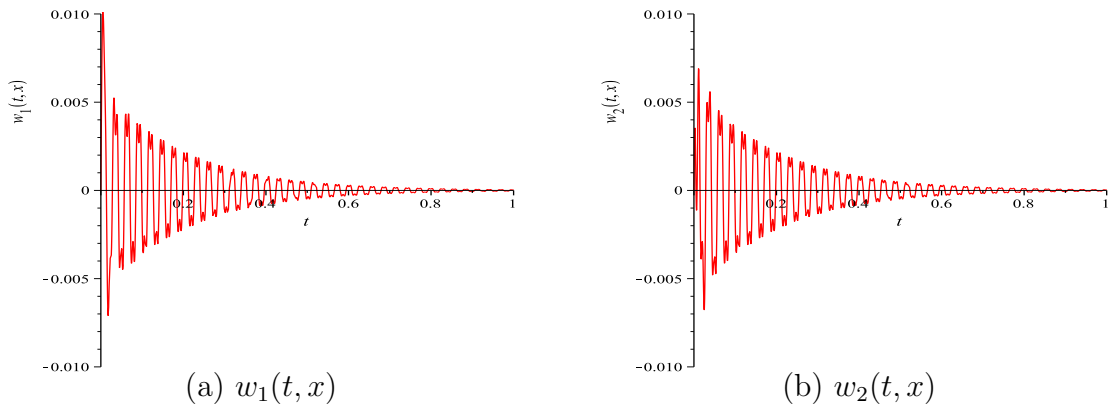


Figura 3.6: Corte em $x = 0,5$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ da componente imaginária da resposta amortecida

Capítulo 4

O MÉTODO MODAL ADJUNTO

4.1 Introdução

Neste capítulo é desenvolvido um método para a resolução do sistema formado por duas cordas anexadas por uma camada viscoelástica com a ação de uma força externo. O método empregado aqui utiliza o sistema adjunto associado ao sistema original, que permite encontrar uma relação de ortogonalidade entre os modos de vibração, tornando possível o desacoplamento, mesmo em casos mais gerais de amortecimento.

4.2 Problema do desacoplamento

As equações do movimento para um sistema com n graus de liberdade, com um amortecimento viscoso qualquer, são expressas pela equação

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

onde, M , C e K são matrizes quadradas de ordem n , M não-singular, denominadas

- M : Matriz de massa;
- C : Matriz de amortecimento;
- K : Matriz de rigidez;
- \mathbf{u} : Vetor de incógnitas;
- \mathbf{f} : Força externa.

O sistema (4.1) representa um sistema de equações independentes se, e somente se, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez forem diagonais. Caso contrário, o sistema possui termos que tornam as equações dependentes entre si, os quais são denominados sistemas acoplados. Um sistema da forma (4.1) é dito desacoplável se existem

transformações P e Q não singulares que diagonalizam, simultaneamente, as matrizes M , C e K , isto é,

$$\begin{aligned} PMQ &= \Gamma, \\ PCQ &= \Lambda, \\ PKQ &= \Omega, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde, Σ , Λ e Ω são matrizes diagonais de ordem n . Nestes casos, o sistema amortecido pode ser desacoplado, transformando-se num sistema com equações independentes facilitando sua resolução.

Quando as matrizes M e K são simétricas, com M definida positiva, o caso não amortecido pode ser desacoplado utilizando-se a análise modal e o Teorema dos Modos Normais, que foi o método utilizado para desacoplar o sistema no Capítulo 2 e resolver o problema forçado. No entanto, a diagonalização da matriz C , utilizando-se modos normais, funciona apenas em alguns casos particulares, como por exemplo,

- **Amortecimento de Rayleigh:** quando a matriz de amortecimento C é uma combinação linear das matrizes de massa M e de rigidez K [2], [29], isto é,

$$C = \alpha M + \beta K, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

- **Amortecimento fraco:** quando o nível de amortecimento no sistema é fraco [3], ou seja, quando é possível desprezar os termos fora da diagonal principal.

Nos demais casos, o Teorema dos Modos normais não diagonaliza a matriz C . É necessário, para tanto, encontrar algum tipo de ortogonalidade entre os modos, com o objetivo de desacoplar o sistema considerado. Isto pode ser feito utilizando o sistema adjunto associado ao sistema original, [10].

4.3 O método modal adjunto

Considere um sistema distribuído de segunda ordem dado abaixo

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = 0, \tag{4.4}$$

onde, M , C e K são operadores diferenciais de ordem n . O sistema adjunto associado a (4.4) é dado por

$$M^*\ddot{\mathbf{v}} - C^*\dot{\mathbf{v}} + K^*\mathbf{v} = 0 \tag{4.5}$$

onde, M^* , C^* e K^* , são os operadores adjuntos associados a M , C e K , respectivamente, com relação ao produto interno definido por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{v} \, dx, \tag{4.6}$$

isto é, as seguintes igualdade são válidas

$$\langle \mathbf{M}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{M}^*\mathbf{v} \rangle, \quad \langle \mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{C}^*\mathbf{v} \rangle, \quad \langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{K}^*\mathbf{v} \rangle. \quad (4.7)$$

Sejam,

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{-\beta t} \mathbf{Y}(x), \quad (4.9)$$

soluções de (4.4) e (4.5), respectivamente. Substituindo-se cada uma das soluções em seus respectivos sistemas, obtém-se os seguintes problemas de autovalor quadrático

$$(M\lambda^2 + C\lambda + K)\mathbf{X}(x) = 0, \quad (4.10)$$

$$(M^*\beta^2 + C^*\beta + K^*)\mathbf{Y}(x) = 0. \quad (4.11)$$

Soluções não-nulas para $\mathbf{X}(x)$ e $\mathbf{Y}(x)$ em (4.10) e (4.11) ocorrem quando

$$D_1 = \det(M\lambda^2 + C\lambda + K) = 0, \quad (4.12)$$

$$D_2 = \det(M^*\beta^2 + C^*\beta + K^*) = 0. \quad (4.13)$$

de modo que, a partir de uma propriedade de determinantes, tomando a transposta e conjugando D_1 em (4.12), a seguinte relação é obtida,

$$\overline{D_1} = \det(M^*\overline{\lambda}^2 + C^*\overline{\lambda} + K) = 0. \quad (4.14)$$

Dessa forma, comparando-se (4.14) com (4.13), observa-se que se λ é autovalor do problema direto (4.10), então $\overline{\lambda}$ é autovalor do problema adjunto associado (4.11), ou seja, os autovalores do problema direto e adjunto estão relacionados da seguinte forma,

$$\overline{\lambda}_k = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

Os autovalores dos problemas direto e adjunto podem ser enumerados conforme a tabela abaixo, para $n = 1, 2, \dots$,

		Problema direto								
Autovalores		λ_1	λ_2	λ_3	\dots	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	$\overline{\lambda}_3$	\dots	(4.16)
Autovetores		\mathbf{X}_1	\mathbf{X}_2	\mathbf{X}_3	\dots	\mathbf{X}_n	\mathbf{X}_{n+1}	\mathbf{X}_{n+2}	\dots	

		Problema adjunto								
Autovalores		β_1	β_2	β_3	\dots	$\overline{\beta}_1$	$\overline{\beta}_2$	$\overline{\beta}_3$	\dots	(4.17)
Autovetores		\mathbf{Y}_1	\mathbf{Y}_2	\mathbf{Y}_3	\dots	\mathbf{Y}_n	\mathbf{Y}_{n+1}	\mathbf{Y}_{n+2}	\dots	

Observe que, a relação (4.15) é válida apenas para os autovalores dos problemas considerados, isto é, os autovetores associados a autovalores conjugados não são, necessariamente conjugados entre si.

Multiplicando-se a equação (4.10) por

$$\bar{\beta} \mathbf{Y}^*(x), \quad (4.18)$$

onde β é autovalor do problema adjunto e $\mathbf{Y}(x)$ autovetor associado a β obtém-se,

$$\lambda^2 \bar{\beta} \mathbf{Y}^* M \mathbf{X} + \lambda \bar{\beta} \mathbf{Y}^* C \mathbf{X} + \bar{\beta} \mathbf{Y}^* K \mathbf{X} = 0, \quad (4.19)$$

analogamente, multiplicando a equação (4.11) por

$$\bar{\lambda} \mathbf{X}^*(x), \quad (4.20)$$

e tomando a transposta conjugada da equação resultante, obtém-se

$$\lambda \bar{\beta}^2 \mathbf{Y}^* M \mathbf{X} + \bar{\beta} \lambda \mathbf{Y}^* C \mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y}^* K \mathbf{X} = 0, \quad (4.21)$$

onde, λ é autovalor do problema direto e $\mathbf{X}(x)$ autofunção associada a λ .

Subtraindo a equação (4.19) de (4.21), obtém-se

$$\lambda \bar{\beta} (\lambda - \bar{\beta}) \mathbf{Y}^* M \mathbf{X} - (\lambda - \bar{\beta}) \mathbf{Y}^* K \mathbf{X} = 0, \quad (4.22)$$

de modo que se,

$$\lambda \neq \bar{\beta}, \quad (4.23)$$

a equação (4.22) pode ser escrita de forma simplificada como

$$\lambda \bar{\beta} \mathbf{Y}^* M \mathbf{X} - \mathbf{Y}^* K \mathbf{X} = 0. \quad (4.24)$$

Tomando-se a integral definida com relação a x no intervalo de 0 a L na equação acima, tem-se, pelo produto interno definido em (4.6) uma relação de ortogonalidade envolvendo os modos de vibração do sistema direto com os modos de vibração do sistema adjunto, chamada *Relação de biortogonalidade modal* [10],

$$\langle \mathbf{Y}, (\lambda \bar{\beta} M - K) \mathbf{X} \rangle = 0. \quad (4.25)$$

4.4 Cálculo da resposta impulso matricial

A solução para o sistema forçado (4.4) pode ser escrita em função da integral de convolução,

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ é a resposta impulso matricial, solução do problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{h}(t, x, \xi) + C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(t, x, \xi) + K \mathbf{h}(t, x, \xi) &= 0, \\ \mathbf{h}(0, x, \xi) &= 0, \quad M \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(0, x, \xi) = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 2.

Para determinar $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ em (4.26), supõe-se uma solução da seguinte forma,

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) e^{\lambda_k t} \mathbf{X}_k(x), \quad (4.28)$$

onde, λ_k é um autovalor do problema direto e $\mathbf{X}_k(x)$ o autovetor correspondente.

Utilizando-se o método de variação dos parâmetros e a hipótese de Lagrange obtém-se,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \mathbf{X}_k(x) = 0, \quad (4.29)$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} M \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{f}. \quad (4.30)$$

Tomando-se o produto interno definido em (4.6) na equação (4.29) por $\mathbf{Y}_j K^*$, onde K^* é o operador adjunto de K , e \mathbf{Y}_j é o j -ésimo autovetor do problema adjunto associado ao autovalor β_j , obtém-se

$$\langle \mathbf{Y}_j(x) K^*, \sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \mathbf{X}_k(x) \rangle = 0. \quad (4.31)$$

A equação (4.31) pode ser escrita na forma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{Y}_j K^*, \mathbf{X}_k \rangle = 0, \quad (4.32)$$

ou ainda, pelo produto interno definido em (4.6),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{Y}_j, K \mathbf{X}_k \rangle = 0. \quad (4.33)$$

De maneira análoga, tomando-se o produto interno, em (4.30) por $\beta_j \mathbf{Y}_j$, onde $\beta_j = \bar{\lambda}_j$ por (4.15), obtém-se,

$$\langle \bar{\lambda}_j \mathbf{Y}_j, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} M \mathbf{X}_k \rangle = \langle \bar{\lambda}_j \mathbf{Y}_j, \mathbf{f} \rangle, \quad (4.34)$$

ou ainda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{Y}_j, \lambda_j \lambda_k M \mathbf{X}_k \rangle = \langle \bar{\lambda}_j \mathbf{Y}_j, \mathbf{f} \rangle. \quad (4.35)$$

Subtraindo a equação (4.35) de (4.33), segue que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{Y}_j, (\lambda_j \lambda_k M - K) \mathbf{X}_k \rangle = \langle \bar{\lambda}_j \mathbf{X}_i, \mathbf{f} \rangle. \quad (4.36)$$

Pela relação de biortogonalidade dada em (4.25),

$$\langle \mathbf{Y}_j, (\lambda_j \lambda_k M - K) \mathbf{X}_k \rangle = 0, \quad j \neq k, \quad (4.37)$$

a equação (4.36) pode ser escrita na forma simplificada

$$\dot{b}_k(t) e^{\lambda_k t} \langle \mathbf{Y}_k, (\lambda_k^2 M - K) \mathbf{X}_k \rangle = \langle \bar{\lambda}_k \mathbf{X}_k, \mathbf{f} \rangle. \quad (4.38)$$

Denotando,

$$\gamma_k = \langle \mathbf{Y}_k, (\lambda_k^2 M - K) \mathbf{X}_k \rangle, \quad (4.39)$$

usando a propriedade do produto interno e rearranjando os elementos da equação, tem-se

$$\dot{b}_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{-\lambda_k t} \langle \mathbf{X}_k, \mathbf{f} \rangle, \quad (4.40)$$

de modo que,

$$b_k(t) = \int_0^t \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{-\lambda_k \tau} \langle \mathbf{X}_k, \mathbf{f}(\tau, x) \rangle d\tau. \quad (4.41)$$

Desenvolvendo o produto interno e reagrupando os elementos na equação (4.41), encontra-se uma expressão para $c_k(t)$, dada por

$$b_k(t) = \int_0^t \int_0^L \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{-\lambda_k \tau} \mathbf{X}_k^*(\xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (4.42)$$

Dessa forma, a solução $\mathbf{w}(t, x)$ em (4.28), pode ser escrita da forma,

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k(t-\tau)} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{X}_k^*(\xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (4.43)$$

Comparando-se a equação (4.43) com a equação (4.26) obtém-se a expressão para a resposta impulso matricial $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, dada por

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{X}_k^*(\xi). \quad (4.44)$$

4.5 Sistema dupla corda amortecido forçado

Considere o sistema formado por duas cordas de mesmo comprimento apoiadas nas extremidades, anexadas por uma camada viscoelástica e sujeitas a ação de forças externas. As equações que modelam esse problema são dadas abaixo

$$m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + c \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) - S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k(w_1 - w_2) = f_1(t, x) \quad (4.45)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + c \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) - S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k(w_2 - w_1) = f_2(t, x) \quad (4.46)$$

onde,

- t, x são as coordenadas temporal e espacial, respectivamente;
- k é a constante de rigidez do elemento elástico;
- S_i é a força de tração na corda i , $i = 1, 2$;
- $m_i = \rho_i A_i$, sendo que ρ_i é a massa específica do material da corda i e A_i é a área da seção transversal, para $i = 1, 2$;
- c_i é o amortecimento na corda i , $i = 1, 2$;
- c é o amortecimento na camada elástica;
- $f_i(t, x)$ é a força externa atuando na corda i , para $i = 1, 2$.

Com condições iniciais gerais

$$w_i(0, x) = w_{i0}(x), \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0, x) = v_{i0}(x), \quad (4.47)$$

e condições de contorno dadas por

$$w_i(t, 0) = w_i(t, L) = 0. \quad (4.48)$$

A forma matricial do sistema (4.45)-(4.46) é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_k)\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (4.49)$$

onde,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c + c_1 & -c \\ -c & c + c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} -S_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Considere agora, o sistema direto e o sistema adjunto associados a (4.49), dados por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_k)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{K}_o^* + \mathbf{K}_k^*)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.53)$$

Como as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K}_k e operador \mathbf{K}_o são simétricos então,

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{K}_k^* = \mathbf{K}_k, \quad \mathbf{K}_o^* = \mathbf{K}_o. \quad (4.54)$$

Supondo soluções como em (4.8) e (4.9), dadas por

$$\mathbf{w}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x), \quad (4.55)$$

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{-\beta t} \mathbf{Y}(x), \quad (4.56)$$

para os problemas (4.52) e (4.53), respectivamente, e substituindo cada uma das soluções em seus respectivos sistemas, obtém-se os problemas de autovalor

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K})\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \quad (4.57)$$

$$(\mathbf{M}^*\beta^2 + \mathbf{C}^*\beta + \mathbf{K}^*)\mathbf{Y}(x) = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$

Observe que devido (4.54), os problemas de (4.57) e (4.58) acima são idênticos, isto é, geram autovalores e autovetores iguais. Mesmo assim, a biortogonalidade modal (4.25) pode ser obtida considerando-se a enumeração proposta em (4.16). Ou seja, a relação de biortogonalidade modal para esse sistema ocorre entre um modo associado a um autovalor λ e o modo associado ao conjugado $\bar{\lambda}$

A resposta forçada para o sistema (4.49) é, então, dada por

$$\mathbf{w}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (4.59)$$

onde,

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{X}_k^*(\xi), \quad (4.60)$$

e,

$$\gamma_k = \langle \mathbf{Y}_k, (\lambda_k^2 M - K) \mathbf{X}_k \rangle. \quad (4.61)$$

4.6 Exemplos numéricos

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico para o sistema formado por duas cordas do mesmo comprimento apoiadas nas extremidades e anexadas por uma camada viscoelástica com ação de uma força externo. Os parâmetros do sistema são os mesmos considerados no caso livre amortecido, dados pela Tabela 3.1. Para as simulações foi considerado um carga agindo em um ponto específico da primeira corda, o que simplifica os cálculos.

Considere o sistema amortecido (4.45) e (4.46) com a ação de um forçante harmônico na primeira corda, idêntico ao forçante considerado no caso anterior, sem amortecimento. Isto é,

$$f_1(t, x) = P_0 \text{sen}(bt) \delta(x - x_L), \quad f_2(t, x) = 0, \quad (4.62)$$

onde, $P_0 = 4$, $b = 4$ e o ponto de aplicação da força é $x_L = 0.8$. As simulações foram realizadas utilizando-se os três primeiros modos de vibração, associados aos três primeiros autovalores, λ_{11} , λ_{12} e λ_{21} , dados na Tabela 3.2. A Figura 4.1 apresenta a componente real da resposta amortecida com a ação do forçante considerado. É possível observar que no ponto de aplicação do forçante a amplitude de vibração nas duas corda é maior que nos demais pontos.

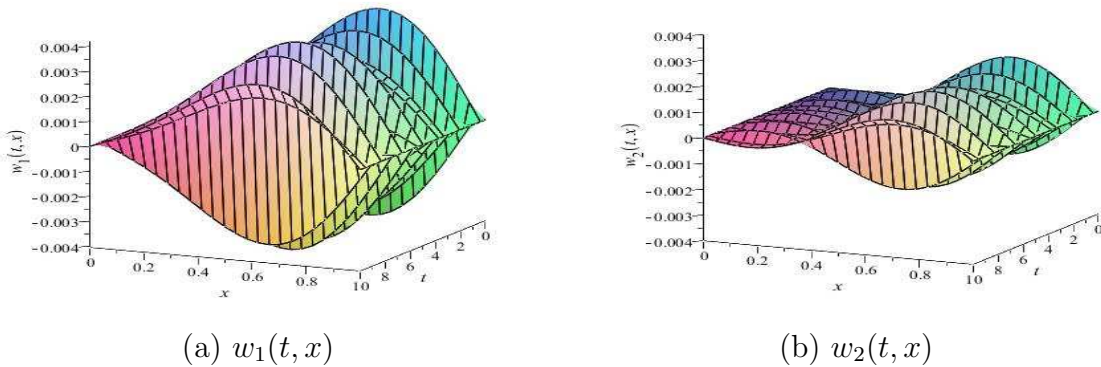


Figura 4.1: Componente real da resposta amortecida sob a ação de um forçante harmônico no intervalo $0 \leq t \leq 10$

A componente imaginária da resposta amortecida forçada é apresentada na Fi-

gura 4.2, observa-se que a amplitude das vibrações na primeira corda é, novamente, maior comparada com a amplitude de vibração da segunda tanto na componente real, como na componente imaginária.

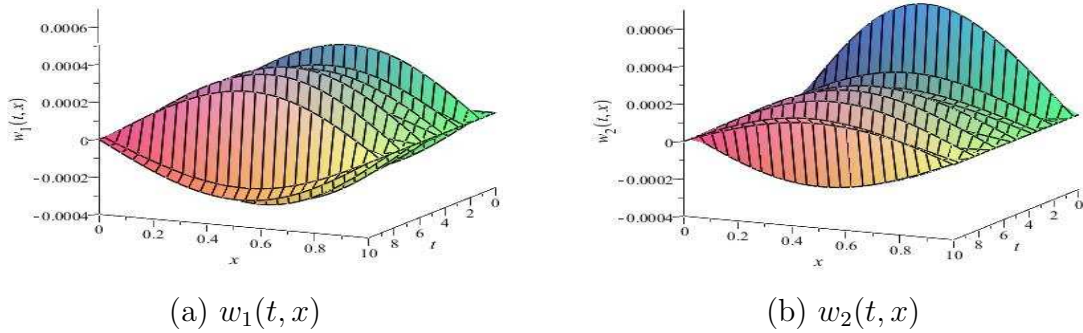


Figura 4.2: Componente imaginária da resposta amortecida sob a ação de um forçante harmônico no intervalo $0 \leq t \leq 10$

A ação do amortecimento no sistema pode ser vista comparando-se a resposta do sistema forçado amortecido com a resposta do sistema sem amortecimento como mostra a Figura 4.3. A ação do amortecimento pode ser observada tanto na primeira quanto na segunda corda, isto é, a amplitude da resposta amortecida é menor bem como o número de oscilações de vibração do sistema.

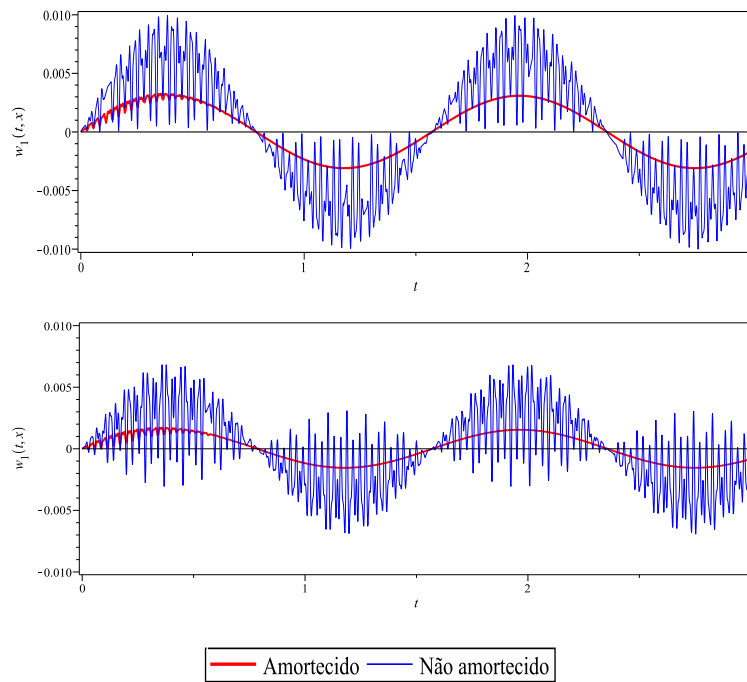


Figura 4.3: Comparação entre a resposta forçada com amortecimento e sem amortecimento

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi considerado um sistema composto por duas cordas de mesmo comprimento, acopladas através de uma camada viscoelástica. A partir da formulação matricial em blocos e do uso da análise modal encontrou-se uma equação diferencial de segunda ordem, cujas soluções são os modos ou autofunções do sistema. Os modos foram escritos em função da base dinâmica, composta pela solução de um problema de segunda ordem com condições iniciais impulsivas e sua primeira derivada. Uma expressão para as frequências naturais foi encontrada a partir da formulação matricial em blocos e das condições de contorno do sistema.

No caso não amortecido, as frequências naturais apresentaram-se em pares, cada par contendo uma frequência mais baixa e uma mais alta. Os modos de vibração foram classificados em síncronos e assíncronos dependendo da frequência ao qual estão associados. Observou-se que frequências mais baixas de cada par geram modos síncronos, enquanto que as frequências mais altas, modos assíncronos. A resposta forçada do sistema não amortecido foi calculada utilizando-se o Teorema dos Modos Normais.

No caso amortecido livre, um sistema desacoplável foi encontrado a partir de simplificações nos parâmetros do problema, possibilitando encontrar uma expressão para o cálculo dos autovalores e autofunções do sistema. Os autovalores foram tomados em pares comparando-se as suas partes imaginárias com as frequências naturais do caso sem amortecimento. Já o caso amortecido forçado geral, foi desacoplado considerando-se o sistema adjunto associado ao problema direto e uma relação de ortogonalidade entre os modos de vibração do problema direto e do problema adjunto, denominada biortogonalidade modal.

Além da generalização do cálculo da resposta livre do sistema para diversos tipos de condições de contorno, o método proposto também generaliza a resposta forçada, uma vez que esta é escrita como uma integral de convolução envolvendo a resposta impulso matricial e a força externa, de modo que para calculá-la, basta identificar a resposta impulso matricial associada ao problema.

Na continuação deste trabalho, pretende-se investigar a ação de diferentes condições de contorno e o acoplamento de n cordas.

As simulações foram realizadas usando o software matemático Maple 11.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., AND DE MAGALHÃES IÓRIO, V. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- [2] CAUGHEY, T. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics* 27 (1960), 269.
- [3] CHOPRA, A. K. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*, vol. 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] CLAEYSSSEN, J. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration* 140, 1 (1990), 73–84.
- [5] CLAEYSSSEN, J., AND SODER, R. A dynamical basis for computing the modes of euler-bernoulli and timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 259, 4 (2003), 986–990.
- [6] CLAEYSSSEN, J. R., CANAHUALPA, G., AND JUNG, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30, 1 (1999), 65–78.
- [7] CLAEYSSSEN, J. R., MORAES FERREIRA, I., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied numerical mathematics* 47, 3 (2003), 391–405.
- [8] CLAEYSSSEN, J. R., TSUKAZAN, T., AND COPETTI, R. D. Eigenanalysis of an euler-bernoulli model coupled with van der waals forces for carbon nanotubes. *IMA Journal of Applied Mathematics* (2012).
- [9] CLAEYSSSEN, J. R., TSUKAZAN, T., AND COPPETI, R. D. Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. *Mechanical Systems and Signal Processing* (2013).

- [10] COPETTI, R. D. Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta. Tese (doutorado em engenharia mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- [11] COPETTI, R. D., CLAEYSSEN, J. R., AND TSUKAZAN, T. Modal formulation of segmented euler-bernoulli beams. *Mathematical Problems in Engineering 2007*, ID 36261 (2007), 18 pages.
- [12] DE DAYAN, H., AND BEHAR, A. The quality of strings for guitars: an experimental study. *Journal of Sound and Vibration 64*, 3 (1979), 421–431.
- [13] DE FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- [14] FODA, M. A. Transverse vibration control of translating visco-elastically connected double-string-like continua. *Journal of Vibration and Control 19*, 9 (2013), 1316–1332.
- [15] GANTMACHER, F. The theory of matrices, vol. i. *Chelsea, New York 220* (1959).
- [16] GHAYESH, M. H. Nonlinear transversal vibration and stability of an axially moving viscoelastic string supported by a partial viscoelastic guide. *Journal of Sound and Vibration 314*, 3 (2008), 757–774.
- [17] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, 2001.
- [18] KELLY, S. G. Free and forced vibrations of elastically connected structures. *Advances in Acoustics and Vibration 2010* (2011).
- [19] KRENK, S., AND NIELSEN, S. R. Vibrations of a shallow cable with a viscous damper. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 458*, 2018 (2002), 339–357.
- [20] LEISSA, A. A direct method for analyzing the forced vibrations of continuous systems having damping. *Journal of Sound and Vibration 56*, 3 (1978), 313–324.
- [21] MEIROVITCH, L. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice Hall New Jersey, 1997.
- [22] ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part i: free vibrations. *Journal of sound and vibration 232*, 2 (2000), 355–366.
- [23] ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part ii: forced vibrations. *Journal of sound and vibration 232*, 2 (2000), 367–386.

- [24] ONISZCZUK, Z. Damped vibration analysis of an elastically connected complex double-string system. *Journal of sound and vibration* 264, 2 (2003), 253–271.
- [25] RAO, S. S. *Vibration of continuous systems*. Wiley, 2007.
- [26] RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. Pearson Prentice Hall, 2009.
- [27] RUSIN, J., ŚNIADY, P., AND ŚNIADY, P. Vibrations of double-string complex system under moving forces. closed solutions. *Journal of Sound and Vibration* 330, 3 (2011), 404–415.
- [28] SEIBEL, A. B. Uso da base dinâmica em um sistema de duas vigas acopladas. Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal de Santa Maria, 2013.
- [29] STRUTT, J. W., RAYLEIGH, B., AND LINDSAY, R. B. *The theory of sound*, vol. 1. Dover New York, 1945.
- [30] TAN, C., AND YING, S. Active wave control of the axially moving string: theory and experiment. *Journal of sound and vibration* 236, 5 (2000), 861–880.
- [31] TOLFO, D. D. R. Sobre o espectro de frequências do modelo de timoshenko para uma viga bi-apoiada. Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.
- [32] TSUKAZAN, T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound Vibration* 281 (2005), 1175–1185.
- [33] VESNITSKII, A., AND METRIKIN, A. Transition radiation in one-dimensional elastic systems. *Journal of applied mechanics and technical physics* 33, 2 (1992), 202–207.
- [34] WOLFERT, A., DIETERMAN, H., AND METRIKINE, A. Passing through the “elastic wave barrier” by a load moving along a waveguide. *Journal of Sound and Vibration* 203, 4 (1997), 597–606.
- [35] WOLFERT, A., METRIKINE, A., AND DIETERMAN, H. Wave radiation in a one-dimensional system due to a non-uniformly moving constant load. *Wave motion* 24, 2 (1996), 185–196.
- [36] XU, Y., YU, Z., AND KO, J. Forced vibration studies of sagged cables with oil damper using a hybrid method. *Engineering structures* 20, 8 (1998), 692–705.