UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PARES ADMISSÍVEIS, SISTEMAS ADMISSÍVEIS E BIÁLGEBRAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Larissa Hagedorn Vieira

Santa Maria, RS, Brasil

2014

PARES ADMISSÍVEIS, SISTEMAS ADMISSÍVEIS E BIÁLGEBRAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

Larissa Hagedorn Vieira

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Bagio

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

PARES ADMISSÍVEIS, SISTEMAS ADMISSÍVEIS E BIÁLGEBRAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

elaborada por
Larissa Hagedorn Vieira

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Dirceu Bagio, Dr. (UFSM)
(Orientador)

Iván Ezequiel Angiono, Dr. (UNC - Argentina)
(Coorientador)

Daiana Aparecida Da Silva Flôres, Dr[a].(UFSM)

Santa Maria, 19 de março de 2014.

Aos meus avós

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Cara lá de cima que cuida da gente o tempo todo.

À minha família por me ajudar de todas as maneiras possíveis para este trabalho ser concluído, além das visitas que me fizeram em todos os lugares. Em especial ao Vanderlei que, mesmo longe, foi companheiro de todos os dias, me escutando sempre e ainda por ter lido o texto.

Ao pessoal do PPGMAT, em especial ao professor Dirceu que me aceitou como orientanda, me ajudou com muita paciência e atenção, durante esses dois anos de mestrado, e por ter me aguentado. À professora Daiana, que além de aceitar fazer parte da banca, me ensinou a base para este trabalho. Aos amigos do Tchucupim, pois com eles o mestrado foi mais divertido, em especial ao Tiago pela parceira, inclusive nas madrugadas mal dormidas.

Agradezco a las personas que conocí en Argentina. Especialmente a las chicas de la “resi” y a las del fútbol que hicieron mis días más divertidos. Al profesor Nicolás por haber proporcionado la oportunidad y por sus clases. Y al profesor Iván, por su atención y dedicación durante más de seis meses de estudios.

Aos meus amigos de longe, que mesmo com minhas muitas ausências sabem que sempre podem contar comigo.

A CAPES que me deu condições de estar no mestrado em Santa Maria e na Argentina.

Meu muito obrigada a todos vocês.

"... e ele simplesmente fez um gesto de cabeça.
Will sabia que isso equivalia a vários vivas de Halt."
(Ruínas de Gorlan - Jonh Flanagan)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

PARES ADMISSÍVEIS, SISTEMAS ADMISSÍVEIS E BIÁLGEBRAS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS DE YETTER-DRINFELD

AUTORA: LARISSA HAGEDORN VIEIRA
ORIENTADOR: DIRCEU BAGIO
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 19 de março de 2014.

O objetivo deste trabalho é estudar as relações entre pares admissíveis, sistemas admissíveis e biálgebras na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, bem como algumas propriedades da álgebra de Hopf associada (via bosonização) a um par admissível. Finalizamos esta dissertação com uma família de exemplos de pares admissíveis.

Palavras-chave: par admissível, sistema admissível, biálgebra na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, álgebra tensorial, álgebras de Hopf.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

ADMISSIBLE PAIR, ADMISSIBLE SYSTEM AND BIALGEBRA IN CATEGORY OF MODULES OF YETTER-DRINFELD

AUTHOR: LARISSA HAGEDORN VIEIRA
ADVISOR: DIRCEU BAGIO
Location and Date of Defense: Santa Maria, March 19, 2014.

The purpose of this work is to study the relationships between admissible pairs, systems admissible and bialgebras in the category of Yetter-Drinfeld modules, as well as some properties of the Hopf algebra associated (via bosonization) to an admissible pair. We end this dissertation with a family of examples of admissible pairs.

Keywords: admissible pair, admissible system, bialgebras in category of modules of Yetter-Drinfeld, tensor algebra, Hopf algebras.

SUMÁRIO

Introdução

Uma das questões mais relevantes na área de álgebras de Hopf é o problema de classificação. Um método eficiente (para uma determinada classe de álgebras de Hopf) é o método de *lifting*, descrito em [AS]. Uma ferramenta indispensável para este método é o biproduto de Radford ou bosonização. Esta ferramenta será apresentada e estudada nesta dissertação.

O objetivo inicial do trabalho era entender e apresentar completamente os resultados de [R2], onde na última seção é dado um exemplo de par admissível. No entanto, tal exemplo é construtivo e não agrega conhecimentos matemáticos novos. Isso nos motivou a uma mudança em relação ao planejamento inicial: não apresentar a última seção de [R2] e, em vez disso, estudar a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, a qual está intimamente ligada ao trabalho de Radford, [R2], mas não é abordada no mesmo. A inserção deste tema nos permitiu dar exemplos de pares admissíveis de uma maneira bem natural.

De forma resumida, neste trabalho estudamos o biproduto de Radford e buscamos condições para que exista uma correspondência um-a-um entre: pares admissíveis, sistemas admissíveis e biálgebras na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

O Capítulo 1, de preliminares, traz as definições básicas da teoria de álgebras de Hopf necessárias para o restante do trabalho. Alguns exemplos relevantes para esta dissertação também são apresentados.

No Capítulo 2, o mais longo desta dissertação, iniciamos com a noção de par admissível. Em seguida, definimos sistemas admissíveis e provamos que a cada par admissível existe um único sistema admissível associado, a menos de isomorfismo. Terminamos o capítulo estudando propriedades dos pares admissíveis.

No Capítulo 3 apresentamos uma recíproca da construção dada no Capítulo 2. Mais precisamente, estudamos condições para que a um determinado diagrama possamos associar um sistema admissível que provém de um par admissível.

No Capítulo 4 consideramos a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre H e provamos que a existência de um par admissível (H, B) é equivalente a B ser uma biálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

No último capítulo construímos a álgebra tensorial $T(V)$ de um espaço vetorial V qualquer. Por fim, provamos que se V é um módulo de Yetter-Drinfeld então $T(V)$ é uma biálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Particularmente, temos exemplos de pares admissíveis.

Convenções

Nesta dissertação,

- $\Bbbk$ denotará um corpo;
- $\otimes$ significará $\otimes_{\Bbbk}$, salvo mencionado ao contrário;
- Usaremos a seguinte variante da notação de Sweedler:

  - para coálgebra: $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$ e;

  - para comódulo à esquerda: $\rho(x) = x_{-1} \otimes x_0$;
- O produto convolução é denotado por $*$; lembremos que se C é uma coálgebra, A uma álgebra e $f, g \in Hom_{\Bbbk}(C, A)$, então $(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$, para qualquer $c \in C$;
- "Álgebra"significará "álgebra associativa com unidade";
- $\sim$ denotará os isomorfismos naturais de espaços vetoriais $\Bbbk \otimes V \sim V \sim V \otimes \Bbbk$; onde V é um espaço vetorial sobre $\Bbbk$;
- ${}_H\mathcal{M}$ denota a categoria dos H-módulos à esquerda;
- ${}^H\mathcal{M}$ denota a categoria dos H-comódulos à esquerda;
- id_X denota a função $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x$, para qualquer conjunto X.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, são estabelecidos os conceitos básicos para a leitura desta dissertação. Inicia-se com uma introdução sobre álgebras, coálgebras e biálgebras, através de suas definições e exemplos. Em seguida, mostram-se alguns resultados que serão utilizados durante as outras seções. Esta seção será concluída definindo álgebras de Hopf e exemplicando-a.

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção, o objetivo é familiarizar o leitor com as notações, definições e resultados básicos que serão utilizados durante toda a dissertação.

Definição 1.1.1 *Uma $\Bbbk$-álgebra A é uma tripla (A, m, u) onde:*

(i) A é um $\Bbbk$-espaço vetorial, e

(ii) $m : A \otimes A \to A$ e $u : \Bbbk \to A$ são aplicações $\Bbbk$-lineares, chamadas multiplicação e unidade, respectivamente, as quais satisfazem a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A \arrow[r, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

A seguir, são apresentados exemplos clássicos de álgebras, cujas demonstrações são facilmente realizadas mostrando a comutatividade dos diagramas acima.

Exemplo 1.1.2

1. *Dado um grupo G, considere o $\Bbbk$-espaço vetorial $\Bbbk G$ com base G, isto é, os elementos de $\Bbbk G$ são da forma $\sum_{g\in G} k_g g$, onde $k_g \in \Bbbk$ para todo $g \in G$. Então, $\Bbbk G$ tem estrutura*

de álgebra dada por:

$$m(kg \otimes k'g') = (kk')(gg') \quad e \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{\Bbbk G} = 1_{\Bbbk} 1_G, \quad k, k' \in \Bbbk, \quad g, g' \in G.$$

2. *Seja G um grupo. Considere $\Bbbk^G$ o $\Bbbk$-espaço vetorial formado pelas funções de G em $\Bbbk$. Então, $\Bbbk^G$ tem estrutura de álgebra dada por:*

$$m(s \otimes t)(g) = s(g)t(g) \quad e \quad u(1_{\Bbbk})(g) = 1_{\Bbbk}, \quad s, t \in \Bbbk^G,\ g \in G.$$

   Mais ainda, se G é finito, pode-se verificar que $\Bbbk^G$ tem uma base dada pelos idempotentes centrais e_g com $g \in G$, onde $e_g(h) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$.

3. *O anel de polinômios $\Bbbk[x]$ é uma álgebra com produto e unidade usuais.*

4. *Seja $q \in \Bbbk^*$ uma raiz primitiva de 1 de ordem $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$.*

   Considere a $\Bbbk$-álgebra $T_q(N)$ gerada por x e g e com as seguintes relações: $x^N = 0$, $g^N = 1$ e $xg = qgx$. Esta álgebra é denominada álgebra de Taft.

   Mais ainda, pode-se verificar que a álgebra de Taft tem uma base dada pelo seguinte conjunto $B = \{g^i x^j; 0 \leq i, j < N\}$.

5. *Seja $M_n(\Bbbk)$ o $\Bbbk$-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\Bbbk$ e base $\{e_{ij}; 1 \leq i, j \leq n\}$. $M_n(\Bbbk)$ tem estrutura de álgebra onde a multiplicação é a usual de matrizes e a unidade, $u : \Bbbk \to M_n(\Bbbk)$, é definida como $u(\lambda) = \lambda I$, onde I é a matriz identidade de ordem n.*

6. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras. Então $A \otimes B$ tem uma estrutura de álgebra dada por:*

$$m((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = aa' \otimes bb' \quad e \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_A \otimes 1_B, \quad a, a' \in A,\ b, b' \in B.$$

Pode-se relacionar álgebras através dos chamados *morfismos de álgebras*, os quais são aplicações $\Bbbk$-lineares, as quais são multiplicativas e associam unidade com unidade. De maneira mais formal, tem-se:

Definição 1.1.3 *Dadas (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras, diz-se que f é morfismo de álgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \Bbbk \arrow[u, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

A noção de coálgebra apresentada a seguir aparece naturalmente como a versão dual da noção de álgebra.

Definição 1.1.4 *Uma $\Bbbk$-coálgebra C é uma tripla (C, Δ, ε) onde:*

(i) C é um $\Bbbk$-espaço vetorial, e

(ii) $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \Bbbk$ são aplicações $\Bbbk$-lineares, chamadas comultiplicação e counidade, respectivamente, que satisfazem os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Abaixo apresentam-se alguns exemplos de coálgebras, cuja verificação é imediata.

Exemplo 1.1.5

1. *Seja G um grupo. Então $\Bbbk G$ é uma coálgebra com as seguintes estruturas:*

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad e \quad \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}, \quad g \in G.$$

2. *Seja G um grupo finito. Sabe-se que $\Bbbk^G$ possui uma base $\{e_g;\ g \in G\}$; ver Exemplo 1.1.2, item 2. Com isto, $\Bbbk^G$ tem uma estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(e_g) = \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \quad e \quad \varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}.$$

3. *O anel de polinômios $\Bbbk[x]$ tem estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(x^n) = \sum \tbinom{n}{k} x^n \otimes x^{n-k} \quad e \quad \varepsilon(x^n) = 0, \text{ para } n > 1$$
$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad e \quad \varepsilon(1) = 1.$$

4. *A álgebra de Taft é uma coálgebra com as seguintes estruturas:*

$$\Delta(g^i x^j) = \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i}_q g^{j+i} x^{j-i} \otimes g^j x^i \qquad e \qquad \varepsilon(g^i x^j) = \begin{cases} 0, \text{ se } & i = 0 \\ 1, \text{ se } & i \geq 1 \end{cases},$$

onde $\tbinom{j}{i}_q = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad m < 0 \text{ ou } n < m \\ q^m \tbinom{n-1}{m}_q + \tbinom{n-1}{m-1}_q & , \text{ se } \quad 0 \leq m < n \end{cases}.$

5. $M_n(\Bbbk)$ *tem estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} e_{il} \otimes e_{lj} \quad e \quad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}, \quad \text{onde } e_{ij} \in C \text{ denota a matriz elementar.}$$

6. *Sejam* $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ *e* $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *coálgebras. Então* $A \otimes B$ *tem uma estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(a \otimes b) = (id_A \otimes \tau_{flip} \otimes id_B) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B)(a \otimes b) \quad e \quad \varepsilon(a \otimes b) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b) \quad a \in A,\ b \in B.$$

Aqui $\tau_{flip}(a \otimes b) = b \otimes a$*, ou seja,* τ_{flip} *é o isomorfismo linear twist.*

Apresenta-se agora a versão dual de morfismo de álgebras.

Definição 1.1.6 *Sejam* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *duas coálgebras, então uma aplicação* $\Bbbk$*-linear* $g : C \to D$ *é dita um morfismo de coálgebras se os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

Nos exemplos anteriores, foram apresentados espaços vetoriais que possuem estruturas tanto de álgebras quanto de coálgebras. O próximo resultado diz quando estas estruturas são compatíveis.

Proposição 1.1.7 *Seja* B *um* $\Bbbk$*-espaço vetorial tal que* (B, m, u) *é uma álgebra e* (B, Δ, ε) *é uma coálgebra. Então, as aplicações* Δ *e* ε *são morfismos de álgebras se e somente se as aplicações* m *e* u *são morfismos de coálgebras, [DNR, p.157].*

A proposição acima permite a definição de biálgebra.

Definição 1.1.8 *Uma biálgebra é uma quíntupla* $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *onde*

(i) (B, m, u) *é uma álgebra;*

(ii) (B, Δ, ε) *é uma coálgebra;*

(iii) Δ *e* ε *são morfismos de álgebras (ou equivalentemente,* m *e* u *são morfismos de coálgebras).*

Dos exemplos apresentados anteriormente, os quatro primeiros são biálgebras. O conjunto $M_n(\Bbbk)$ das matrizes não possui nenhuma estrutura de biálgebra, [DNR, p.173]. No último exemplo, se A e B são biálgebras, então $A \otimes B$ é biálgebra.

Definição 1.1.9 *Sejam A e B duas biálgebras. Então uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : A \to B$ é dita um morfismo de biálgebras se f é morfismo de álgebras e de coálgebras.*

Abaixo é definido H-módulo e H-comódulo, ambos à esquerda. Nota-se que definições análogas pode ser realizadas se forem considerados à direita.

Definição 1.1.10 *Um H-módulo à esquerda é um par (M, τ), onde M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\tau : H \otimes M \to M$ é um morfismo linear tal que os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes M \arrow[r, "id_H \otimes \tau"] \arrow[d, "m_H \otimes id_M"'] & H \otimes M \arrow[d, "\tau"] \\
H \otimes M \arrow[r, "tau"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & H \otimes M \arrow[dd, "\tau"] \\
\Bbbk \otimes M \arrow[ur, "u_H \otimes id_M"] \arrow[dr, "\sim"'] & \\
 & M
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.11

1. *Seja A uma álgebra. Então A é um módulo sobre si mesma com a estrutura dada pela multiplicação.*

2. *Seja H uma biálgebra. Qualquer espaço vetorial V sobre $\Bbbk$, pode ser considerado como H-módulo via ação trivial $\tau(h \otimes v) = \varepsilon_H(h)v$. Em particular, $\Bbbk$ é um H-módulo via $h \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon_H(h)1_{\Bbbk}$.*

Definição 1.1.12 *Um H-comódulo à esquerda é um par (M, ρ), onde M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : M \to H \otimes M$ é um morfismo linear tal que os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & H \otimes M \arrow[d, "\Delta_H \otimes id_M"] \\
H \otimes M \arrow[r, "id_H \otimes \rho"'] & H \otimes H \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd, "\rho"] \\
\Bbbk & \\
 & H \otimes M \otimes M \arrow[ul, "\varepsilon_H \otimes id_M"]
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.13

1. *Seja C uma coálgebra. Então C é um comódulo sobre si mesma com a estrutura dada pela comultiplicação.*

2. *Seja H uma biálgebra. Qualquer espaço vetorial V sobre $\Bbbk$, pode ser considerado como H-comódulo via coação trivial $\rho(v) = 1_H \otimes v$. Em particular, $\Bbbk$ é um H-comódulo via $\rho(1_{\Bbbk}) = 1_H \otimes 1_{\Bbbk}$.*

Daqui por diante, a menos que seja mencionado, H denota uma biálgebra. Em todo este capítulo, onde estiver escrito H-módulo entenda-se H-módulo à esquerda. Analogamente, para H-comódulo à esquerda. Mas, deve-se salientar que é possível obter os resultados que serão apresentados aqui considerando-os com as estruturas de H-módulo e H-comódulo à direita.

Se $B \in {}_H\mathcal{M}$ e $B \in {}^H\mathcal{M}$, então

$$\begin{array}{rcl} \tau : H \otimes B & \to & B \\ h \otimes b & \mapsto & h \cdot b \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \rho : B & \to & H \otimes B \\ b & \mapsto & b_{-1} \otimes b_0 \end{array}$$

denotam as estruturas de H-módulo e de H-comódulo, respectivamente.

Observação 1.1.14

(1) *Se M e N são H-módulos, tem-se que $M \otimes N$ é um H-módulo pela ação dada por $\tau(h \otimes m \otimes n) = h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$. De fato, para $h, h' \in H$, $m \in M$ e $n \in N$ tem-se $\tau \circ (u_H \otimes id_{M \otimes N})(1_{\Bbbk} \otimes m \otimes n) = \tau(1_H \otimes m \otimes n) \simeq m \otimes n$ e*

$$\begin{aligned} \tau \circ (m_H \otimes id_{M\otimes N})(h \otimes h' \otimes (m \otimes n)) &= \tau(hh' \otimes m \otimes n) = (hh')_1 \cdot m \otimes (hh')_2 \cdot n \\ &= (h_1 h'_1) \cdot m \otimes (h_2 h'_2) \cdot n \\ &= h_1 \cdot (h'_1 \cdot m) \otimes h_2 \cdot (h'_2 \cdot n) \\ &= \tau(h \otimes (h'_1 \cdot m \otimes h'_2 \cdot n)) \\ &= \tau(id_H \otimes \tau)(h \otimes h' \otimes (m \otimes n)). \end{aligned}$$

(2) *Se M e N são H-comódulos, tem-se que $M \otimes N$ é um H-comódulo pela coação dada por $\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0$. De fato, para todo $m \in M$ e $n \in N$ tem-se*

$$\begin{aligned} (\varepsilon_H \otimes id_{M\otimes N})\rho(m \otimes n) &= \varepsilon_H(m_{-1}n_{-1}) \otimes m_0 \otimes n_0 = \varepsilon_H(m_{-1})\varepsilon_H(n_{-1}) \otimes m_0 \otimes n_0 \\ &= 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon_H(m_{-1})m_0 \otimes \varepsilon_H(n_{-1})n_0 \simeq m \otimes n, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (id_H \otimes \rho) \circ \rho(m \otimes n) &= (id_H \otimes \rho)(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\ &= m_{-1}n_{-1} \otimes (m_0)_{-1}(n_0)_{-1} \otimes (m_0)_0 \otimes (n_0)_0 \\ &\overset{(*)}{=} (m_{-1})_1(n_{-1})_1 \otimes (m_{-1})_2(n_{-1})_2 \otimes m_0 \otimes n_0 \\ &= (\Delta_H \otimes id_{M\otimes N})(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\ &= (\Delta_H \otimes id_{M\otimes N}) \circ \rho(m \otimes n). \end{aligned}$$

As próximas subseções apresentam alguns resultados de álgebras e coálgebras que auxiliam nas demonstrações futuras.

1.2 Álgebra nas categorias de módulos e comódulos

Nesta seção consideram-se álgebras nas categorias de H-módulos e H-comódulos (Um pequeno estudo sobre categorias é realizado no Capítulo 4). São estabelecidas equivalências úteis para as próximas seções, bem como um exemplo importante para esta dissertação.

Definição 1.2.1 *Uma álgebra A é um H-módulo álgebra, se A é um H-módulo à esquerda e, além disso, m e u são morfismos de H-módulos.*

Com a definição acima, dizer que a álgebra A é um H-módulo álgebra, é equivalente a A ser uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$. A proposição abaixo tem como objetivo apresentar uma maneira equivalente de dizer que m e u são morfismos de H-módulos.

Proposição 1.2.2 *Seja A um H-módulo álgebra. Considerar que m e u são morfismos de H-módulos é equivalente a dizer que satizfazem, respectivamente:*

$$h \cdot (bb') = (h_1 \cdot b)(h_2 \cdot b') \qquad e \qquad h \cdot 1_B = \varepsilon(h)1_B,$$

para $h \in H$ e $b, b' \in B$.

Demonstração. A partir da definição de m ser um morfismo de H-módulos, tem-se que m deve satisfazer $h \cdot (m(b \otimes b')) = m(h \cdot (b \otimes b'))$. Mas isto é equivalente a dizer que $h \cdot (bb') = m(h_1 \cdot b \otimes h_2 \cdot b') = (h_1 \cdot b)(h_2 \cdot b')$, de onde procede a primeira parte da proposição.

Além disso, dizer que u é morfismo de H-módulos é afirmar que $u(1_{\Bbbk}) = 1_B$ e que $h \cdot u(1_{\Bbbk}) = u(h \cdot 1_{\Bbbk})$, que por sua vez é equivalente a $h \cdot 1_B = u(\varepsilon(h)1_{\Bbbk}) = \varepsilon(h)u(1_{\Bbbk}) = \varepsilon(h)1_B$. □

Observação 1.2.3 *Se f é um morfismo de H-módulos, e além disso f é bijetora, então f^{-1} também é um morfismo de H-módulos.*

O exemplo abaixo mostra que sendo B uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$ e H uma biálgebra, se B tiver uma estrutura de H-módulo, então pode-se munir o produto tensorial $B \otimes H$ de uma estrutura de álgebra.

Exemplo 1.2.4 *Sendo B uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$, o produto smash $B\#H$ pode ser visto como uma álgebra considerando-se $B\#H = B \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial, a multiplicação dada por $m((b\#h)\otimes(b'\#h'))=(b\#h)(b'\#h')=b(h_1 \cdot b')\#h_2h'$ e a unidade por $u(1_{\Bbbk})=1_B\#1_H$.*

De fato, $B\#H$ com as estruturas acima, é uma álgebra. Por um lado tem-se

$$\begin{aligned} m \circ (id_{B\#H} \otimes m)((b\#h)\otimes(b'\#h')\otimes(b''\#h'')) &= m((b\#h)\otimes(b'(h'_1 \cdot b'')\#h'_2h'')) \\ &= b(h_1 \cdot (b'(h'_1 \cdot b'')))\otimes h_2h'_2h'' \\ &= b((h_1)_1 \cdot b')((h_1)_2 \cdot (h'_1 \cdot b''))\otimes h_2h'_2h'' \\ &= b(h_1 \cdot b')(h_2 \cdot (h'_1 \cdot b''))\otimes h_3h'_2h''. \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
m\circ(m\otimes id_{B\#H})((b\#h)\otimes(b'\#h')\otimes(b''\#h'')) &= m((b(h_1\cdot b')\#h_2h')\otimes(b''\#h''))\\
&= b(h_1\cdot b')((h_2h')_1\cdot b'')\otimes(h_2h')_2h''\\
&= b(h_1\cdot b')(((h_2)_1h'_1)\cdot b'')\otimes(h_2)_2h'_2h''\\
&= b(h_1\cdot b_1)(h_2\cdot(h'_1\cdot b''))\otimes h_3h'_2h''.
\end{aligned}$$

E, além disso

$$\begin{aligned}
m(id_{B\#H}\otimes u)((b\#h)\otimes 1_{\Bbbk}) &= m((b\#h)\otimes 1_B\#1_H) = b(h_1\cdot 1_B)\otimes h_2 1_H\\
&= b\varepsilon_H(h_1)1_B\otimes h_2 = b\otimes\varepsilon_H(h_1)h_2\\
&= b\otimes h\\
&\simeq ((b\#h)\otimes 1_{\Bbbk}).
\end{aligned}$$

Analogamente, $m(u\otimes id_{B\#H}) =\sim$.

Definição 1.2.5 *Uma álgebra A é dita um H-comódulo álgebra se A for um H-comódulo e, além disso, m e u forem morfismos de H-comódulos. Equivalentemente, um H-comódulo álgebra é uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$.*

Proposição 1.2.6 *Seja B uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$. São equivalentes:*

(i) m e u são morfismos de H-comódulos.

(ii) $\rho(bb') = b_{-1}b'_{-1}\otimes b_0b'_0$ e $\rho(1_B) = 1_H\otimes 1_B$, para todo $b, b'\in B$.

(iii) ρ é um morfismo de álgebras.

Demonstração. A equivalência entre (i) e (ii) segue da definição de morfismo de H-comódulos. Então, resta mostrar que $(ii)\Leftrightarrow(iii)$.
$(ii)\Rightarrow(iii)$ Considerando (ii), obtém-se que $\rho(bb') = b_{-1}b'_{-1}\otimes b_0b'_0 = \rho(b)\rho(b')$. Além disso, $\rho(u_B(1_{\Bbbk})) = \rho(1_B) = 1_H\otimes 1_B = u_{B\otimes H}(1_{\Bbbk})$. Portanto, ρ é morfismo de álgebras.
$(iii)\Rightarrow(ii)$ Pela hipótese, $\rho(bb') = \rho(b)\rho(b') = b_{-1}b'_{-1}\otimes b_0b'_0$. Além disso, tem-se que $\rho(u_B(1_B)) = u_{B\otimes H}(1_{\Bbbk})$, ou seja, $\rho(1_B) = 1_H\otimes 1_B$. □

Observação 1.2.7 *Se f é um morfismo de H-comódulos e além disso f é bijetora, então f^{-1} também é um morfismo de H-comódulos.*

1.3 Coálgebra nas categorias de módulos e comódulos

Nesta seção apresentam-se definições "duais" daquelas apresentadas na seção anterior. Também é apresentado um exemplo relevante para esta dissertação.

Definição 1.3.1 *A coálgebra C é dita um H-comódulo coálgebra, se C é um H-comódulo e, além disso, Δ e ε são morfismos de H-comódulos. Equivalentemente, um H-comódulo coálgebra é uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$.*

A proposição a seguir apresenta uma equivalência de Δ e ε serem morfismos de H-comódulos.

Proposição 1.3.2 *Seja C um H-comódulo coálgebra. Dizer que Δ e ε são morfismos de H-comódulos é equivalente a Δ e ε satisfazerem, respectivamente,*

$$(c_1)_{-1}(c_2)_{-1} \otimes (c_1)_0 \otimes (c_2)_0 = c_{-1} \otimes (c_0)_1 \otimes (c_0)_2 \quad e \quad c_{-1}\varepsilon(c_0) = \varepsilon(c)1_H, \quad c \in C.$$

Demonstração. Tem-se que

$$\begin{aligned}(id_H \otimes \Delta) \circ (\rho(c)) = \rho_{C\otimes C}(\Delta(c)) \;&\Leftrightarrow\; (id_H \otimes \Delta)(c_{-1} \otimes c_0) = \rho_{C\otimes C}(c_1 \otimes c_2)\\ &\Leftrightarrow\; c_{-1} \otimes (c_0)_1 \otimes (c_0)_2 = (c_1)_{-1}(c_2)_{-1} \otimes (c_1)_0 \otimes (c_2)_0.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\rho_{\Bbbk}(\varepsilon_C(c)) = (id_H \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_C(c) \;&\Leftrightarrow\; \varepsilon_C(c)(\rho_{\Bbbk}(1_{\Bbbk})) = (id_H \otimes \varepsilon_C)(c_{-1} \otimes c_0)\\ &\Leftrightarrow\; \varepsilon_C(c)(1_H \otimes 1_{\Bbbk}) = c_{-1} \otimes \varepsilon_C(c_0)\\ &\Leftrightarrow\; \varepsilon_C(c)1_H \otimes 1_{\Bbbk} = c_{-1}\varepsilon_C(c_0) \otimes 1_{\Bbbk}.\end{aligned}$$

De onde segue que $\varepsilon_C(c)1_H = c_{-1}\varepsilon_C(c_0)$. □

Nota-se que, se C é um H-comódulo, então $(id_H \otimes \rho) \circ \rho(c) = (\Delta_H \otimes id_C) \circ \rho(c)$, para todo $c \in C$. Logo,

$$c_{-1} \otimes (c_0)_{-1} \otimes (c_0)_0 = (c_{-1})_1 \otimes (c_{-1})_2 \otimes c_0. \tag{1.1}$$

Além disso, da Proposição 1.3.2, considerando C uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$, tem-se que, para todo $c \in C$, Δ satisfaz $(id \otimes \Delta) \circ \rho_C(c) = \rho_{C\otimes C} \circ \Delta(c)$. Aplicando $id_H \otimes id_C \otimes \rho$ em ambos os lados da igualdade acima, $(id_H \otimes id_C \otimes \rho) \circ (id_H \otimes \Delta) \circ \rho_C(c) = (id_C \otimes id_C \otimes \rho) \circ (\rho_{C\otimes C}) \circ \Delta(c)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}&c_{-1} \otimes (c_0)_1 \otimes ((c_0)_2)_{-1} \otimes ((c_0)_2)_0 =\\ &\qquad (c_1)_{-1}(c_2)_{-1} \otimes (c_1)_0 \otimes ((c_2)_0)_{-1} \otimes ((c_2)_0)_0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Agora pode-se apresentar um exemplo que será muito utilizado no decorrer do trabalho.

Exemplo 1.3.3 *Seja B uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$. O coproduto smash $B\#H$ é uma coálgebra considerando-se $B\#H = B \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial, $\varepsilon_{B\#H}(b\#h) = \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)$ a counidade e $\Delta_{B\#H}(b\#h) = (b_1\#(b_2)_{-1}h_1) \otimes ((b_2)_0\#h_2)$ a comultiplicação.*

De fato, usando (1.1) e (1.2) para b_2, tem-se

$$\begin{aligned}
(id_{B\#H}\otimes\Delta_{B\#H})\circ\Delta_{B\#H}(b\#h) &= (id_{B\#H}\otimes\Delta_{B\#H})(b_1\#(b_2)_{-1}h_1\otimes(b_2)_0\#h_2)\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}h_1\otimes((b_2)_0)_1\#(((b_2)_0)_2)_{-1}(h_2)_1\otimes(((b_2)_0)_2)_0\#(h_2)_2\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}h_1\otimes((b_2)_0)_1\#(((b_2)_0)_2)_{-1}h_2\otimes(((b_2)_0)_2)_0\#h_3\\
&\overset{(1.2)}{=} b_1\#((b_2)_1)_{-1}((b_2)_2)_{-1}h_1\otimes((b_2)_1)_0\#(((b_2)_2)_0)_{-1}h_2\otimes(((b_2)_2)_0)_0\#h_3\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}(b_3)_{-2}h_1\otimes(b_2)_0\#(b_3)_{-1}h_2\otimes(b_3)_0\#h_3.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
(\Delta_{B\#H}\otimes id_{B\#H})\circ\Delta_{B\#H}(b\#h) &= (\Delta_{B\#H}\otimes id_{B\#H})(b_1\#(b_2)_{-1}h_1\otimes(b_2)_0\#h_2)\\
&= (b_1)_1\#((b_1)_2)_{-1}((b_2)_{-1}h_1)_1\otimes((b_1)_2)_0\#((b_2)_{-1}h_1)_2\otimes(b_2)_0\#h_2\\
&= (b_1)_1\#((b_1)_2)_{-1}((b_2)_{-1})_1(h_1)_1\otimes((b_1)_2)_0\#((b_2)_{-1})_2(h_1)_2\otimes(b_2)_0\#h_2\\
&\overset{(1.1)}{=} (b_1)_1\#((b_1)_2)_{-1}(b_2)_{-1}h_1\otimes((b_1)_2)_0\#((b_2)_0)_{-1}h_2\otimes((b_2)_0)_0\#h_3\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}(b_3)_{-2}h_1\otimes(b_2)_0\#(b_3)_{-1}h_2\otimes(b_3)_0\#h_3.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{B\#H}\otimes id_{B\#H})\circ\Delta_{B\#H}(b\#h) &= (\varepsilon_{B\#H}\otimes id_{B\#H})(b_1\#(b_2)_{-1}h_1\otimes(b_2)_0\#h_2)\\
&= \varepsilon_{B\#H}(b_1\#(b_2)_{-1}h_1)\otimes(b_2)_0\#h_2\\
&= \varepsilon_B(b_1)\varepsilon_H((b_2)_{-1}h_1)\otimes(b_2)_0\#h_2\\
&= 1_{\Bbbk}\otimes\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_2)_0\#\varepsilon_H(h_1)h_2\\
&= 1_{\Bbbk}\otimes\varepsilon_B(b_1)(b_2)\#h\\
&= 1_{\Bbbk}\otimes b\#h\\
&= \sim(b\#h).
\end{aligned}$$

Analogamente, é possível mostrar que $(id_{B\#H}\otimes\varepsilon_{B\#H})\circ\Delta_{B\#H}=\sim$. Portanto, $(B\#H,\Delta_{B\#H},\varepsilon_{B\#H})$ é uma coálgebra.

Definição 1.3.4 *Uma coálgebra C é dita um H-módulo coálgebra ou, equivalentemente, uma coálgebra em ${}_H\mathcal{M}$, se C é um H-módulo e, além disso, Δ e ε são morfismos de H-módulos.*

O objetivo da proposição a seguir é dar algumas equivalências de quando Δ e ε são morfismos de H-módulos.

Proposição 1.3.5 *Seja C uma coálgebra em ${}_H\mathcal{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Δ *e* ε *são morfismos de H-módulos;*

(ii) τ *é um morfismo de coálgebras;*

(iii) $\Delta(h\cdot c)=h_1\cdot c_1\otimes h_2\cdot c_2$ *e* $\varepsilon_C(h\cdot c)=\varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$*, para todo $h\in H$ e $c\in C$.*

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ Sabe-se que a estrutura de H-módulo de $\Bbbk$ é dada por $h \cdot k = \varepsilon_H(h)k$ e $\varepsilon_C(c) \in \Bbbk$, segue que $\varepsilon(h \cdot c) = h \cdot \varepsilon(c) \Leftrightarrow \varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$. Além disso, $\Delta(h \cdot c) = h \cdot \Delta(c) \Leftrightarrow \Delta(h \cdot c) = h \cdot (c_1 \otimes c_2) \Leftrightarrow \Delta(h \cdot c) = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ De (iii) decorre que

$$\begin{aligned} (\tau \otimes \tau) \circ (\Delta_{H \otimes C}(h \otimes c)) &= (\tau \otimes \tau)((h \otimes c)_1 \otimes (h \otimes c)_2) = (\tau \otimes \tau)((h_1 \otimes c_1) \otimes (h_2 \otimes c_2)) \\ &= h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2 = \Delta_C(h \cdot c) \\ &= \Delta_C(\tau(h \otimes c)), \end{aligned}$$

e

$$\varepsilon_C(\tau(h \otimes c)) = \varepsilon_C(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c) = \varepsilon_{H \otimes C}(h \otimes c).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se τ é um morfismo de coálgebras, então $(\tau \otimes \tau) \circ (\Delta_{H \otimes C}(h \otimes c)) = \Delta_C(\tau(h \otimes c))$, ou seja, $h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2 = \Delta(h \cdot c)$. Além disso, $\varepsilon_C(\tau(h \otimes c)) = \varepsilon_{H \otimes C}(h \otimes c)$. Ou seja, $\varepsilon_C(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$. $\square$

Qualquer álgebra A sobre $\Bbbk$ é um H-módulo álgebra com a estrutura trivial, ou seja, com a estrutura $h \cdot a = \varepsilon_H(h)a$, com $h \in H$ e $a \in A$. E qualquer coálgebra C é um H-comódulo coálgebra se for considerada a estrutura $\rho_C(c) = 1_H \otimes c$, chamada trivial.

1.4 Álgebra de Hopf

Apresenta-se agora a noção de álgebra de Hopf bem como alguns exemplos. Além disso, serão enunciadas as principais propriedades da antípoda.

Definição 1.4.1 *Seja H uma biálgebra. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $S : H \to H$ é chamada antípoda de H se S é o inverso de id_H com relação ao produto convolução, ou seja, se S satisfaz*

$$S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H \text{ , para todo } h \in H.$$

Uma biálgebra H com antípoda é chamada uma álgebra de Hopf.

Exemplo 1.4.2 *Já foi visto que os itens de* (1) *a* (4) *do Exemplo 1.1.2 são exemplos de biálgebras. Na verdade, estes são exemplos de álgebras de Hopf com as seguintes antípodas:*

1. *Em $\Bbbk G$, $S(g) = g^{-1}$.*
2. *Em $\Bbbk^G$, $S(e_g) = e_{g^{-1}}$.*
3. *Em $\Bbbk[x]$, $S(x) = -x$.*
4. *Em $T_q(N)$, $S(x) = -g^{N-1}x$ e $S(g) = g^{N-1}$.*

A seguir estão algumas das propriedades da antípoda de uma álgebra de Hopf, que auxiliarão em demonstrações futuras.

Proposição 1.4.3 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então é válido que:*

(i) S é um antimorfismo de álgebras, ou seja, $S(1_H) = 1_H$ e $S(gh) = S(h)S(g)$, para quaisquer $h, g \in H$;

(ii) S é um antimorfismo de coálgebras, ou seja, para todo $h \in H$ tem-se $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$ e $\varepsilon_H(S(h)) = \varepsilon_H(h)$, [DNR, p.153].

Proposição 1.4.4 *Sejam A e B duas álgebras de Hopf com antípodas S_A e S_B, respectivamente. Se $f : A \to B$ é um morfismo de biálgebras, então $S_B \circ f = f \circ S_H$, [DNR, p.152].*

Com esta proposição, segue que a definição de morfismo de álgebras de Hopf.

Definição 1.4.5 *Sejam A e B duas álgebras de Hopf. Então $f : A \to B$ é dito um morfismo de álgebras de Hopf se é um morfismo de biálgebras.*

Nos próximos exemplos serão consideradas as ações adjunta e coadjunta de uma álgebra de Hopf.

Exemplo 1.4.6 *Sejam H uma álgebra de Hopf e $f : H \to B$ um morfismo de álgebras. Então B é um H-módulo álgebra através da ação adjunta $ad_f : H \otimes B \to B$ definida por $ad_f(h \otimes b) = h \cdot b = f(h_1)bf(S(h_2))$.*

De fato, B é um H-módulo pois para todo $h, h' \in H$ e $b \in B$ tem-se

$$\begin{aligned}
ad_f \circ (id_H \otimes ad_f)(h' \otimes h \otimes b) &= ad_f(h' \otimes f(h_1)bf(S(h_2))) \\
&= f(h'_1)f(h_1)bf(S(h_2))f(S(h'_2)) \\
&= f(h'_1h_1)bf(S(h_2)S(h'_2)) \\
&= f(h'_1h_1)bf(S(h'_2h_2)) \\
&= f((h'h)_1)bf(S((h'h)_2)) \\
&= ad_f(h'h \otimes b) \\
&= ad_f \circ (m_H \otimes id_B)(h' \otimes h \otimes b),
\end{aligned}$$

e, $ad_f \circ (u_H \otimes id_B)(1_{\Bbbk} \otimes b) = ad_f(1_H \otimes b) = f(1_H)bf(S(1_H)) = b \simeq (1_{\Bbbk} \otimes b)$.
Para mostrar que m e u são morfismos de H-módulos, usa-se a Proposição 1.2.2. Nota-se que

$$\begin{aligned}
ad_f(h_1 \otimes b)ad_f(h_2 \otimes b') &= f((h_1)_1)bf(S((h_1)_2))f((h_2)_1)b'f(S((h_2)_2)) \\
&= f(h_1)bf(S(h_2))f(h_3)b'f(S(h_4)) \\
&= f(h_1)bf(S((h_2)h_3))b'f(S((h_4)) \\
&= f(h_1)bf(\varepsilon_H(h_2))b'f(S((h_3)) \\
&= f(h_1)bf(1_H)b'f(S(\varepsilon_H(h_2)h_3)) \\
&= f(h_1)bb'f(S(h_2)) \\
&= ad_f(h \otimes bb').
\end{aligned}$$

E u é morfismo de H-módulos, pois

$$\begin{aligned} ad_f(h\otimes 1_B) &= f(h_1)1_B f(S(h_2)) = f(h_1)f(S(h_2)) \\ &= f(h_1S(h_2)) = f(\varepsilon(h)1_H) \\ &= \varepsilon(h)f(1_H) = \varepsilon(h)1_B. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.7 *Se H é uma álgebra de Hopf e $g : C \to H$ é um morfismo de coálgebras, então C é um H-comódulo coálgebra via a ação coadjunta, $co_g : C \to H\otimes C$ definida por $co_g(c) = c_{-1}\otimes c_0 = g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2$.*

De fato, C é um H-comódulo pois, por um lado tem-se que

$$\begin{aligned} (id_H\otimes co_g)\circ co_g(c) &= (id_H\otimes co_g)(g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2) \\ &= g(c_1)S(g(c_3))\otimes g((c_2)_1)S(g((c_2)_3))\otimes (c_2)_2 \\ &= g(c_1)S(g(c_5))\otimes g(c_2)S(g(c_4))\otimes c_3, \end{aligned}$$

e, por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} (\Delta_H\otimes id_C)\circ co_g(c) &= (\Delta_H\otimes id_C)(g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2) \\ &= (g(c_1))_1(S(g(c_3)))_1\otimes (g(c_1))_2(S(g(c_3)))_2\otimes c_2 \\ &= g((c_1)_1)S(g(c_3)_2)\otimes g((c_1)_2)S(g(c_3)_1)\otimes c_2 \\ &= g(c_1)S(g(c_5))\otimes g(c_2)S(g(c_4))\otimes c_3. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_H\otimes id_C)\circ co_g(c) &= (\varepsilon_H\otimes id_C)(g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2) \\ &= \varepsilon_H(g(c_1))\varepsilon_H(S(g(c_3)))\otimes c_2 \\ &= \varepsilon_H(g(c_1))\varepsilon_H(g(c_3))\otimes c_2 \\ &\overset{(*)}{=} \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_C(c_3)\otimes c_2 \\ &= 1_{\Bbbk}\otimes \varepsilon_C(c_1)c_2\varepsilon_C(c_3) \\ &= 1_{\Bbbk}\otimes c \\ &= \sim(c). \end{aligned}$$

Tem-se que $(*)$ é válido já que $\varepsilon_H\circ g = \varepsilon_C$, pois g é morfismo de coálgebras. O morfismo Δ_C é de H-comódulos, pois por um lado tem-se

$$\begin{aligned} (id_H\otimes \Delta_C)\circ co_g(c) &= (id_H\otimes \Delta_C)(g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2) \\ &= g(c_1)S(g(c_3))\otimes (c_2)_1\otimes (c_2)_2 \\ &= g(c_1)S(g(c_4))\otimes c_2\otimes c_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $\rho_{C\otimes C}(c\otimes c') = c_{-1}c'_{-1}\otimes c_0\otimes c'_0$, segue que

$$\begin{aligned}
(co_g)_{C\otimes C}\circ\Delta_C(c) &= (co_g)_{C\otimes C}(c_1\otimes c_2)\\
&= g((c_1)_1)S(g((c_1)_3))g((c_2)_1)S(g((c_2)_3))\otimes(c_1)_2\otimes(c_2)_2\\
&= g(c_1)S(g(c_3))g(c_4)S(g(c_6))\otimes c_2\otimes c_5\\
&= g(c_1)S((g(c_3)_1))g((c_3)_2)S(g(c_5))\otimes c_2\otimes c_4\\
&= g(c_1)\varepsilon_H(g(c_3))S(g(c_5))\otimes c_2\otimes c_4\\
&= g(c_1)\varepsilon_C(c_3)S(g(c_5))\otimes c_2\otimes c_4\\
&= g(c_1)S(g(c_5))\otimes c_2\otimes\varepsilon_C(c_3)c_4\\
&= g(c_1)S(g(c_4))\otimes c_2\otimes c_3.
\end{aligned}$$

Além disso, ε_C é morfismo de H-comódulos, pois

$$\begin{aligned}
(id_H\otimes\varepsilon_C)\circ co_C(c) &= (id_H\otimes\varepsilon_C)(g(c_1)S(g(c_3))\otimes c_2) = g(c_1)S(g(c_3))\otimes\varepsilon_C(c_2)\\
&= g(c_1)S(g(\varepsilon_C(c_2)c_3))\otimes 1_{\Bbbk} = g(c_1)S(g(c_2))\otimes 1_{\Bbbk}\\
&= (g(c))_1S((g(c)_2))\otimes 1_{\Bbbk} = \varepsilon_H\circ g(c)\otimes 1_{\Bbbk}\\
&= \varepsilon_C(c)1_H\otimes 1_{\Bbbk}\\
&= \rho_{\Bbbk}\circ\varepsilon_C(c).
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Biproduto de Radford

O biproduto de Radford, também chamado bozonização é uma ferramenta importante na classificação das álgebras de Hopf. Por conta disso estuda-se propriedades desta ferramenta.

2.1 Par admissível

Neste capítulo, considera-se H uma biálgebra e B uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$ e uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$. Além disso, estabelece-se que $\tau : H \otimes B \to B$ e $\rho : B \to H \otimes B$ são as estruturas de H-módulo e H-comódulo, respectivamente.

Lembra-se que $(B\#H, m, u)$ é álgebra com as estruturas

$$m((b\#h)(b'\#h')) = b(h_1 \cdot b')\#h_2h' \qquad \text{e} \qquad u(1_{\Bbbk}) = 1_B\#1_H,$$

e que $(B\#H, \Delta_{B\#H}, \varepsilon_{B\#H})$ é uma coálgebra com as estruturas

$$\Delta_{B\#H}(b\#h) = b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2 \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{B\#H}(b\#h) = \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h).$$

O objetivo deste capítulo é fornecer as condições necessárias e suficientes para que $B\#H$ seja uma biálgebra. Para isto, primeiramente, serão apresentados alguns resultados auxiliares. Para simplificar a notação, usa-se $\varepsilon_{B\#H} = \varepsilon$ e $\Delta_{B\#H} = \Delta$.

Proposição 2.1.1 *A aplicação ε é um morfismo de álgebras se e somente se ε_B é um morfismo de álgebras e $\varepsilon_B(h \cdot b) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b)$, para todo $h \in H$ e $b \in B$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como a aplicação ε é morfismo de álgebras, é válido que $\varepsilon(1_B\#1_H) = 1_{\Bbbk}$, ou seja, $\varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(1_H) = 1_{\Bbbk}$. Desde que H é biálgebra, $\varepsilon_H(1_H) = 1_{\Bbbk}$ e consequentemente $\varepsilon_B(1_B) = 1_{\Bbbk}$.
Para mostrar que ε_B é morfismo de álgebras basta verificar que é multiplicativo.

Do fato que ε é morfismo de álgebras, segue que $\varepsilon((b\#h)(b\#h')) = \varepsilon(b\#h)\varepsilon(b\#h')$, para quaisquer $b, b' \in B$, $h, h' \in H$. Em particular, para $b'\#h' = b'\#1_H$ segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b') &= \varepsilon((b\#h)(b'\#1_H)) = \varepsilon(b(h_1 \cdot b')\#(h_2)1_H) \\ &= \varepsilon(b(h_1 \cdot b')\#h_2) = \varepsilon_B(b(h_1 \cdot b'))\varepsilon_H(h_2) \\ &= \varepsilon_B(b(h_1\varepsilon_H(h_2) \cdot b')) \\ &= \varepsilon_B(b(h \cdot b')). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b') = \varepsilon_B(b(h \cdot b')). \tag{2.1}$$

Logo, $\varepsilon_B(bb') = \varepsilon_B(b(1_H \cdot b')) = \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(1_H)\varepsilon_B(b') = \varepsilon_B(b)\varepsilon_B(b')$. Portanto, ε_B é morfismo de álgebras. Além disso, tomando $b = 1_B$ em (2.1), segue que $\varepsilon_B(h \cdot b') = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b)$.
($\Leftarrow$) Considerando que ε_B é um morfismo de álgebras e $\varepsilon_B(h \cdot b) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b)$, para todo $h \in H$ e $b \in B$ tem-se que $\varepsilon(1_B\#1_H) = \varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(1_H) = 1_{\Bbbk}$ e

$$\begin{aligned} \varepsilon((b\#h)(b\#h')) &= \varepsilon(b(h_1 \cdot b')\#h_2h') = \varepsilon_B(b(h_1 \cdot b'))\varepsilon_H(h_2h') \\ &= \varepsilon_B(b)\varepsilon_B(h_1 \cdot b')\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H(h') \\ &= \varepsilon_B(b)\varepsilon_B(h_1\varepsilon_H(h_2) \cdot b')\varepsilon_H(h') \\ &= \varepsilon_B(b)\varepsilon_B(h \cdot b')\varepsilon_H(h') \\ &= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b')\varepsilon_H(h') \\ &= \varepsilon(b\#h)\varepsilon(b'\#h'). \end{aligned}$$

Logo, ε é um morfismo de álgebras. $\square$

Observa-se que é válida a equação

$$b_{-1} \otimes b_0 = \varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0, \quad b \in B. \tag{2.2}$$

De fato, $b_{-1} \otimes b_0 = \rho(b) = \rho(\varepsilon_B(b_1)b_2) = \varepsilon_B(b_1)\rho(b_2) = \varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0$. Além disso, tem-se

$$b_1 \otimes b_2 = b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0. \tag{2.3}$$

Pois, pelo fato de que B é H-comódulo, é válido que $\varepsilon_H(b_{-1})b_0 = b$. Portanto, tem-se que $\Delta(b) = b_1 \otimes b_2 = b_1 \otimes \varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_2)_0 = b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0$.

Seja C uma coálgebra. Recordando que um elemento não nulo $c \in C$ é um *grouplike* se e somente se $\Delta_C(c) = c \otimes c$, o que implica que $\varepsilon_C(c) = 1_{\Bbbk}$, tem-se que um elemento $b\#h \in B\#H$ é um *grouplike* se e somente se

$$\Delta(b\#h) = b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2 = b\#h \otimes b\#h. \tag{2.4}$$

Proposição 2.1.2 *A unidade $1_B\#1_H$ é um grouplike se e somente se $\rho(1_B) = 1_H\#1_B$ e $\Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sabendo que $1_B\#1_H$ é um *grouplike* e tomando $b = 1_B$ em (2.4), tem-se que

$$b_1\#(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0\#1_H = (1_B\#1_H) \otimes (1_B\#1_H). \tag{2.5}$$

Aplicando $id_B \otimes \varepsilon_H \otimes id_B \otimes \varepsilon_H$ em (2.5), segue que

$$b_1\#\varepsilon_H((b_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0\#\varepsilon_H(1_H) = 1_B\#\varepsilon_H(1_H) \otimes 1_B\#\varepsilon_H(1_H).$$

Usando o isomorfismo $\sim$ segue que $b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0 = 1_B\otimes, 1_B$. Logo, de (2.3), $\Delta_B(b) = \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$.O que também resulta em $\varepsilon_B(1_B) = 1_{\Bbbk}$.

Se for aplicado $\varepsilon_B \otimes id_H \otimes id_B \otimes \varepsilon_H$ em (2.5) tem-se

$$\varepsilon_B(b_1)\#(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0\#\varepsilon_H(1_H) = \varepsilon_B(1_B)\#1_H \otimes 1_B\#\varepsilon_H(1_H).$$

Assim, desde que $\varepsilon_B(1_B) = 1_{\Bbbk}$ vem que $\varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0 = 1_H \otimes 1_B$. Por (2.2) segue que $\rho(b) = \rho(1_B) = 1_H \otimes 1_B$.
($\Leftarrow$) Se $\rho(b) = \rho(1_B) = 1_H \otimes 1_B$ e $\Delta_B(b) = \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\Delta(1_B\#1_H) &= (1_B)_1\#((1_B)_2)_{-1}(1_H)_1 \otimes ((1_B)_2)_0\#(1_H)_2 \\
&= (1_B)_1\#(1_H)(1_H) \otimes (1_B)_2\#(1_H) \\
&= 1_B\#1_H \otimes 1_B\#1_H.
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.1.3

(i) Para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta((b\#h)(b'\#h')) &= \Delta(b(h_1 \cdot b')\#h_2h') \\
&= (b(h_1 \cdot b'))_1\#((b(h_1 \cdot b'))_2)_{-1}(h_2h')_1 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0\#(h_2h')_2 \\
&= (b(h_1 \cdot b'))_1\#((b(h_1 \cdot b'))_2)_{-1}h_2h'_1 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0\#h_3h'_2,
\end{aligned}$$

(ii) Para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta(b\#h)\Delta(b'\#h') &= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2)(b'_1\#(b'_2)_{-1}h'_1 \otimes (b'_2)_0\#h'_2) \\
&= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1)(b'_1\#(b'_2)_{-1}h'_1) \otimes ((b_2)_0\#h_2)((b'_2)_0\#h'_2) \\
&= b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2((b'_2)_{-1}h'_1) \otimes (b_2)_0((h_2)_1 \cdot (b'_2)_0)\#(h_2)_2h'_2 \\
&= b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2((b'_2)_{-1}h'_1) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0)\#h_3h'_2.
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.4 *A aplicação Δ é multiplicativa se e somente se para quaisquer $h \in H$, $b, b' \in B$,*

$$\begin{aligned}
&(b(h_1 \cdot b'))_1\#\,(b(h_1 \cdot b')_2)_{-1}h_2 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0 = \\
&\qquad (b_1(((b_2)_{-1})h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2(b'_2)_{-1} \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tomando $h' = 1_H$ em $\Delta((b\#h)(b'\#h')) = \Delta(b\#h)\Delta(b'\#h')$, usando a Observação 2.1.3 e o fato de que $\Delta_H(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, obtém-se que

$$(b(h_1 \cdot b'))_1\#((b(h_1 \cdot b'))_2)_{-1}h_2 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0\#h_3 =$$
$$b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2((b'_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0)\#h_3.$$

Aplicando $id_B \otimes id_H \otimes id_B \otimes \varepsilon_H$ na equação acima, segue que

$$(b(h_1 \cdot b'))_1\#((b(h_1 \cdot b'))_2)_{-1}h_2 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0 =$$
$$b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2((b'_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0).$$

($\Leftarrow$) Usando a hipótese, segue que

$$\begin{aligned}\Delta((b\#h)(b'\#h')) &= (b(h_1 \cdot b'))_1\#((b(h_1 \cdot b'))_2)_{-1}h_2h'_1 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0\#h_3h'_2 \\ &= b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2((b'_2)_{-1}h'_1) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0)\#h_3h'_2 \\ &= \Delta(b\#h)\Delta(b'\#h').\end{aligned}$$

□

Os resultados abaixo apresentam condições que auxiliam concluir que Δ é multiplicativo sem a necessidade de recorrer à proprosição anterior. Aplicando $\varepsilon_B \otimes id_H \otimes id_B$ na equação (2.6) resulta que

$$\varepsilon_B((b(h_1 \cdot b'))_1)\#((b(h_1 \cdot b')_2)_{-1}h_2) \otimes (((b(h_1 \cdot b'))_2)_0) =$$
$$\varepsilon_B((b_1(((b_2)_{-1})h_1)_1 \cdot b'_1))\#(((b_2)_{-1}h_1)_2(b'_2)_{-1}) \otimes ((b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0)),$$

Supondo que ε é morfismo de álgebras. Então, por (2.2) e pela Proposição 2.1.1 tem-se

$$(b(h_1 \cdot b'))_{-1}h_2 \otimes (b(h_1 \cdot b'))_0 =$$
$$\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_H((((b_2)_{-1})h_1)_1)\varepsilon_B(b'_1)((b_2)_{-1}h_1)_2(b'_2)_{-1} \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}(b(h_1 \cdot b'))_{-1}h_2 \otimes (b(h_1 \cdot b'))_0 &= \varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b'_1)(b_2)_{-1}h_1(b'_2)_{-1} \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0) \\ &\overset{(2.2)}{=} b_{-1}\varepsilon_B(b'_1)h_1(b'_2)_{-1} \otimes b_0(h_2 \cdot (b'_2)_0) \\ &\overset{(2.2)}{=} b_{-1}h_1b'_{-1} \otimes b_0(h_2 \cdot b'_0).\end{aligned}$$

Portanto,

$$(b(h_1 \cdot b'))_{-1}h_2 \otimes (b(h_1 \cdot b'))_0 = b_{-1}h_1b'_{-1} \otimes b_0(h_2 \cdot b'_0). \tag{2.7}$$

Proposição 2.1.5 *Se $\rho(bb') = b_{-1}b'_{-1} \otimes b_0b'_0$ e $(h_1 \cdot b)_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot b)_0 = h_1b_{-1} \otimes (h_2 \cdot b_0)$, então a equação (2.7) é válida.*

Demonstração. Utilizando a hipótese, segue que

$$\begin{aligned}b_{-1}h_1b'_{-1} \otimes b_0(h_2 \cdot b'_0) &= b_{-1}(h_1 \cdot b')_{-1}h_2 \otimes b_0(h_1 \cdot b')_0 \\ &= (b(h_1 \cdot b'))_{-1}h_2 \otimes (b(h_1 \cdot b'))_0.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.6 *A recíproca da proposição acima é válida se $\rho(1_B) = 1_H \otimes 1_B$.*

Demonstração. Tomando $h = 1_H$ em (2.7) tem-se

$$\rho(bb') = (bb')_{-1} \otimes (bb')_0 = b_{-1}b'_{-1} \otimes b_0b'_0.$$

Tomando $b = 1_B$ em (2.7) tem-se

$$\begin{aligned}(1_B(h_1 \cdot b'))_{-1}h_2 \otimes (1_B(h_1 \cdot b'))_0 &= (1_B)_{-1}h_1b'_{-1} \otimes (1_B)_0(h_2 \cdot b'_0)\\ \Rightarrow (h_1 \cdot b')_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot b')_0 &= (1_H)h_1b'_{-1} \otimes (1_B)(h_2 \cdot b'_0)\\ \Rightarrow (h_1 \cdot b')_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot b')_0 &= h_1b'_{-1} \otimes (h_2 \cdot b'_0).\end{aligned}$$

□

Num processo análogo ao anterior, aplicando $id_B \otimes \varepsilon_H \otimes id_B$ em (2.6) obtém-se $(b(h_1 \cdot b'))_1 \# \varepsilon_H((b(h_1 \cdot b')_2)_{-1})\varepsilon_H(h_2) \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0 =$

$$(b_1(((b_2)_{-1})h_1)_1 \cdot b'_1)\#\varepsilon_H(((b_2)_{-1}h_1)_2)\varepsilon_H((b'_2)_{-1}) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0).$$

Consequentemente,

$$(b(h_1 \cdot b'))_1\varepsilon_H(h_2) \otimes (b(h_1 \cdot b'))_2 = b_1(((b_2)_{-1}h_1) \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot b'_2).$$

Portanto,

$$(b(h \cdot b'))_1 \otimes (b(h \cdot b'))_2 = b_1(((b_2)_{-1}h_1) \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot b'_2). \tag{2.8}$$

Proposição 2.1.7 *Se $\Delta_B(bb') = b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0b'_2$ e $\Delta_B(h \cdot b) = h_1 \cdot b_1 \otimes h_2 \cdot b_2$, ou seja, se Δ_B é multiplicativo e de H-módulos, então a equação (2.8) é válida.*

Demonstração. O resultado é demonstrado diretamente usando as equações da hipótese:

$$\begin{aligned}(b(h \cdot b'))_1 \otimes (b(h \cdot b'))_2 &= b_1((b_2)_{-1} \cdot (h \cdot b')_1) \otimes (b_2)_0(h \cdot b')_2\\ &= b_1((((b_2)_{-1})h_1) \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot b'_2).\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.8 *A recíproca da proposição acima é verdadeira se $\rho(1_B) = 1_H \otimes 1_B$ e $\Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$.*

Demonstração. Tomando $h = 1_H$ em (2.8) tem-se

$$\begin{aligned}(bb')_1 \otimes (bb')_2 &= b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0b'_2\\ \Delta_B(bb') &= b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0b'_2.\end{aligned}$$

Tomando $b = 1_B$ em (2.8) tem-se

$$\Delta_B(h \cdot b') = (1_B)_1((((1_B)_2)_{-1}h_1) \cdot b'_1) \otimes ((1_B)_2)_0(h_2 \cdot b'_2) = h_1 \cdot b'_1 \otimes h_2 \cdot b'_2.$$

$\square$

A partir destes resultados é possível enunciar o teorema a seguir.

Teorema 2.1.9 *Seja H uma biálgebra sobre o corpo $\Bbbk$, e suponha que B seja uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$ e uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$. Sejam $\tau : H \otimes B \to B$ e $\rho : B \to H \otimes B$ as estruturas de módulo e comódulo, respectivamente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *$(B\#H, m_{B\#H}, u_{B\#H}, \Delta_{B\#H}, \varepsilon_{B\#H})$ é uma biálgebra, isto é, (H, B) é um par admissível;*

(*b*) *B é uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$ e uma coálgebra em ${}_H\mathcal{M}$, ε_B é um morfismo de álgebras, $\Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ e vale as identidades:*

(*i*) *$\Delta_B(bb') = b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0 b'_2$ e*

(*ii*) *$(h_1 \cdot b)_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot b)_0 = h_1 b_{-1} \otimes (h_2 \cdot b_0)$,*

para quaisquer $b, b' \in B$ e $h \in H$;

(*c*) *A aplicações ε_B e ρ são morfismos de álgebras, $\Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$, τ é morfismo de coálgebras e são válidos (i) e (ii) do item (b).*

Demonstração. A equivalência $(b) \Leftrightarrow (c)$ segue diretamente das Proposições 1.2.6 e 1.3.5.

$(a) \Rightarrow (b)$ Como (H, B) é um par admissível, então Δ e ε são morfismos de álgebras. Pela Proposição 2.1.2, $\rho(1_B) = 1_h \otimes 1_B$ e pela Proposição 2.1.6 tem-se $\rho(bb') = b_{-1}b'_{-1} \otimes b_0 b'_0$. Pela Proposição 1.2.6 m e u são morfismos de H-comódulos. Portanto, B é uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$. Analogamente, pela Proposição 2.1.1 tem-se $\varepsilon_B(h \cdot b) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b)$ e pela Proposição 2.1.8 tem-se $\Delta_B(h \cdot b) = h_1 \cdot b_1 \otimes h_2 \cdot b_2$. Logo, segue pela Proposição 1.3.5 que B é uma coálgebra em ${}_H\mathcal{M}$.

Além disso, ε_B é morfismo de álgebras pela Proposição 2.1.1; $\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ pela Proposição 2.1.4; e (i) e (ii) são válidos pelas Proposições 2.1.8 e 2.1.6, respectivamente.

$(b) \Rightarrow (a)$ Para provar que (H, B) é um par admissível é necessário mostrar que:

- $(B\#H, m, u)$ é uma álgebra;
- $(B\#H, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra;
- Δ e ε são morfismos de álgebras.

Os dois primeiros itens foram provados anteriormente, no Capítulo 1, nos Exemplos 1.2 e 1.3. Como ε_B é morfismo de álgebras e de H-módulos, segue pela Proposição 2.1.1 que ε é morfismo de álgebras.

Resta mostrar que Δ é morfismo de álgebras. Desde que m e u são morfismos de H-comódulos, segue da Proposição 1.2.6 que $\rho(1_B) = 1_H \otimes 1_B$. Assim, pela Proposição 2.1.2 sabe-se que $\Delta(1_B\#1_H) = 1_B\#1_H \otimes 1_B\#1_H$. Portanto, basta mostrar que Δ é multiplicativo. Note que

$(b(h_1 \cdot b'))_1\#(b(h_1 \cdot b')_2)_{-1}h_2 \otimes ((b(h_1 \cdot b'))_2)_0 =$

$$\begin{array}{cl} \overset{(2.8)}{=} & b_1(((b_2)_{-1}(h_1)_1) \cdot b'_1)\#((b_2)_0((h_1)_2 \cdot b'_2))_{-1}h_2 \otimes ((b_2)_0((h_1)_2 \cdot b'_2))_0 \\ = & b_1(((b_2)_{-1}h_1) \cdot b'_1)\#((b_2)_0(h_2 \cdot b'_2))_{-1}h_3 \otimes ((b_2)_0(h_2 \cdot b'_2))_0 \\ \overset{(2.7)}{=} & b_1(((b_2)_{-1}h_1) \cdot b'_1)\#((b_2)_0)_{-1}h_2(b'_2)_{-1} \otimes ((b_2)_0)_0(h_3 \cdot (b'_2)_0) \\ = & b_1((((b_2)_{-1})_1(h_1)_1) \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1})_2(h_1)_2(b'_2)_{-1} \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0) \\ = & (b_1(((b_2)_{-1})h_1)_1 \cdot b'_1)\#((b_2)_{-1}h_1)_2(b'_2)_{-1} \otimes (b_2)_0(h_2 \cdot (b'_2)_0). \end{array}$$

Nas duas últimas igualdades foi utilizado o fato de ρ ser coassociativo e Δ_H ser multiplicativo. O resultado segue pela Proposição 2.1.4. $\square$

2.2 Sistema admissível

Esta seção tem por objetivo definir sistema admissível e fornecer as condições necessárias para que, a partir de um par admissível, seja possível obter um sistema admissível.

Será considerado (H, B) um par admissível, A uma biálgebra sobre $\Bbbk$ e o diagrama $A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$, onde i e π são morfismos de biálgebras.

Então A é um H-módulo à esquerda via $\tau_l(h \otimes a) = h \cdot a = i(h)a$, $h \in H$, $a \in A$. De fato, τ_l torna A um H-módulo à esquerda, pois para quaisquer $h, h' \in H$ e $a \in A$ tem-se $\tau_l \circ (u_H \otimes id_A)(1_\Bbbk \otimes a) = \tau_l(1_H \otimes a) = i(1_H)a = a =\sim (1_K \otimes a)$ e

$$\begin{aligned} \tau_l \circ (m_H \otimes id_A)(h \otimes h' \otimes a) &= \tau_l(hh' \otimes a) = i(hh')a \\ &= i(h)i(h')a = \tau_l(h \otimes i(h')a) \\ &= \tau_l \circ (id_H \otimes \tau_l)(h \otimes h \otimes a). \end{aligned}$$

Analogamente, A é um H-módulo à direita via $\tau_r(a \otimes h) = ai(h)$. Portanto, como

$$\begin{aligned} \tau_r \circ (\tau_l \otimes id_H)(h \otimes a \otimes h') &= \tau_r(i(h)a \otimes h') = (i(h)a)i(h') \\ &= i(h)(ai(h')) = \tau_l(h \otimes ai(h')) \\ &= \tau_l \circ (id_H \otimes \tau_r)(h \otimes a \otimes h'), \end{aligned}$$

resulta que A é um H-bimódulo com as ações definidas acima.

Além disso, A é um H-bicomódulo através das coações dadas por $\rho_r(a) = a_1 \otimes \pi(a_2)$ e $\rho_l(a) = \pi(a_1) \otimes a_2$, à direita e à esquerda, respectivamente. De fato, A é um H-comódulo à direita via $\rho_r(a) = a_1 \otimes \pi(a_2)$, pois

$$\begin{aligned}(id_A \otimes \Delta) \circ \rho_r(a) &= (id_A \otimes \Delta)(a_1 \otimes \pi(a_2)) = a_1 \otimes (\pi(a_2))_1 \otimes (\pi(a_2))_2 \\ &= a_1 \otimes \pi((a_2)_1) \otimes \pi((a_2)_2) = a_1 \otimes \pi(a_2) \otimes \pi(a_3) \\ &= (a_1)_1 \otimes \pi((a_1)_2) \otimes \pi(a_2) = (\rho_r \otimes id_H)(a_1 \otimes \pi(a_2)) \\ &= (\rho_r \otimes id_H) \circ \rho_r(a).\end{aligned}$$

E, $(id_A \otimes \varepsilon_H)(\rho_r(a))(a \otimes h) = (id_A \otimes \varepsilon_H)(a_1 \otimes \pi(a_2)) = a_1 \otimes \varepsilon_H(\pi(a_2)) = a_1 \otimes \varepsilon_A(a_2) =\sim a$, para todo $a \in A$. Analogamente, mostra-se que A é um H-comódulo à esquerda. E como para todo $a \in A$

$$\begin{aligned}(\rho_l \otimes id_H)\rho_r(a) &= (\rho_l \otimes id_H)(a_1 \otimes \pi(a_2)) = \pi(a_1) \otimes a_2 \otimes \pi(a_3) \\ &= (id_H \otimes \rho_r)(\pi(a_1) \otimes a_2) \\ &= (id_H \otimes \rho_r)\rho_l(a).\end{aligned}$$

Resulta que A é um H-bicomódulo.

Definição 2.2.1 *Diz-se que* $B \underset{j}{\overset{\Pi}{\leftrightarrows}} A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$ *é um sistema admissível se satisfaz as seguintes condições:*

(*i*) $\Pi \circ j = id_B$ *e* $\pi \circ i = id_H$*;*

(*ii*) *As aplicações* i *e* π *são morfimos de biálgebras,* j *é morfismo de álgebras e* Π *é morfismo de coálgebras;*

(*iii*) *A aplicação* Π *é um morfismo de* H*-bimódulos considerando em* A *as estruturas de* H*-bimódulo apresentadas acima e, em* B *a estrutura de* H*-módulo à direita trivial, e à esquerda a estrutura dada pelo par admissível;*

(*iv*) *O conjunto* $j(B)$ *é um* H*-sub-bicomódulo de* A *e* $\Pi|_{j(B)}$ *é um morfismo de* H*-bicomódulos considerando, em* A*, a estrutura de* H*-bicomódulo acima e, em* B*, a estrutura trivial de* H*-comódulo à direita, e à esquerda a estrutura dada pelo par admissível; e*

(*v*) $(j \circ \Pi) * (i \circ \pi) = id_A$.

Antes de apresentar resultados que envolvem sistema admissível, serão analisadas algumas aplicações particulares, relevantes para o primeiro resultado. Considerando H uma biálgebra e B uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$ e uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$, tem-se que as aplicações

$$\begin{aligned} j_B : B &\to B\#H \\ b &\mapsto b\#1_H \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} i_H : H &\to B\#H \\ h &\mapsto 1_B\#h \end{aligned}$$

são monomorfismos de álgebras. De fato, $j_B(u_B(1_{\Bbbk})) = j_B(1_B) = 1_B\#1_H = u_{B\#H}(1_{\Bbbk})$ e

$$\begin{aligned} m_{B\#H}(j_B \otimes j_B)(b \otimes b') &= m_{B\#H}(b\#1_H \otimes b'\#1_H) = b(1_H \cdot b')\#1_H 1_H \\ &= bb' \otimes 1_H = j_B(bb') \\ &= (j_B \circ m_B)(b \otimes b'). \end{aligned}$$

Logo j_B é um morfismo de álgebras. Além disso, j_B é injetor, pois se $b\#1_H = b'\#1_H$, aplicando $id_B \otimes \varepsilon_H$ segue, pelo isomorfismo de B com $B\#1_{\Bbbk}$, que $b\varepsilon_H(1_H) = b'\varepsilon_H(1_H)$, de onde obtém-se $b = b'$, pois H é uma biálgebra.

Analogamente, i_H é um morfismo de álgebras, pois $(id_H \circ u_H)(1_{\Bbbk}) = i_H(1_H) = 1_B \otimes 1_H = u_{B\#H}(1_{\Bbbk})$ e, para quaisquer $h, h' \in H$, tem-se

$$\begin{aligned} m_{B\#H} \circ (i_H \otimes i_H)(h \otimes h') &= m(1_B\#h \otimes 1_B\#h') = 1_B(h_1 \cdot 1_B)\#h_2h' \\ &= \varepsilon_H(h_1)1_B\#h_2h' = 1_B \otimes hh' = i_H(hh') \\ &= (i_H \circ m_H)(h \otimes h'). \end{aligned}$$

Tem-se que i_H é injetor se e somente se $i_H(h) = 0$ implica que $h = 0$. Supondo que $h \neq 0$, então $\{1_B \otimes h\}$ é linearmente independente. Isso implica que $i_H(h) \neq 0$. Portanto,i_H é injetor.

Já as aplicações

$$\begin{array}{rrcl} \Pi_B : & B\#H & \to & B \\ & b\#h & \mapsto & b\varepsilon_H(h) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} \pi_H : & B\#H & \to & H \\ & b\#h & \mapsto & \varepsilon_B(b)h \end{array}$$

são epimorfismos de coálgebras. De fato, tem-se que para quaisquer $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned} (\Pi_B \otimes \Pi_B) \circ \Delta(b\#h) &= (\Pi_B \otimes \Pi_B)(b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2) \\ &= b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1})\varepsilon_H(h_1) \otimes (b_2)_0\varepsilon_H(h_2) \\ &\overset{(2.3)}{=} b_1\varepsilon_H(h_1) \otimes b_2\varepsilon_H(h_2) \\ &= \varepsilon_H(h)b_1 \otimes b_2 \\ &= \varepsilon_H(h)\Delta_B(b) \\ &= \Delta_B(\varepsilon_H(h)b) \\ &= \Delta_B(\Pi_B(b\#h)). \end{aligned}$$

E, $\varepsilon_B \circ \Pi_B(b\#h) = \varepsilon_B(b\varepsilon_H(h)) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b) = \varepsilon(b\#h)$. Portanto Π_B é um morfismo de coálgebras. Observa-se que Π_B é sobrejetor. De fato dado $b \in B$, toma-se $b\#1_H \in B\#H$. Logo, $\Pi_B(b\#1_H) = b\varepsilon_H(1_H) = b$.

Analogamente, tem-se que π_H é morfismo de coálgebras, pois para quaisquer $b \in B$ e $h \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
(\pi_H \otimes \pi_H) \circ \Delta(b\#h) &= (\pi_H \otimes \pi_H)(b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2) \\
&= \varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1}h_1 \otimes \varepsilon_B((b_2)_0)h_2 \\
&= \varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1}\varepsilon_B((b_2)_0)h_1 \otimes h_2 \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)h_1 \otimes h_2 \\
&= \varepsilon_B(b_1\varepsilon_B(b_2))h_1 \otimes h_2 \\
&= \varepsilon_B(b)h_1 \otimes h_2 \\
&= \varepsilon_B(b)\Delta_H(h) \\
&= \Delta_H(\varepsilon_B(b)h) \\
&= \Delta_H(\pi_H(b\#h)).
\end{aligned}$$

Nota-se que $(*)$ vale pois ε_B é morfismo de H-comódulos. E, $\varepsilon_H \circ \pi_H(b\#h) = \varepsilon_H(\varepsilon_B(b)h) = \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h) = \varepsilon(b\#h)$.

Para mostrar que π_H é sobrejetor, observa-se primeiramente que existe $b \in B$ tal que $\varepsilon_B(b) \neq 0$. Pois, caso contrário, $\varepsilon_B(b) = 0$ para qualquer $b \in B$. Mas como B é coálgebra, $b = \varepsilon_B(b_1)b_2 = 0b_2 = 0$. Então $B = 0$, o que é um absurdo. Portanto, considera-se $b \in B$ tal que $\varepsilon_B(b) \neq 0$. Então, para qualquer $h \in H$, tem-se $\frac{1_{\Bbbk}}{\varepsilon_B(b)}b\#h \in B\#H$, satisfazendo $\pi_H\left(\frac{1_{\Bbbk}}{\varepsilon_B(b)}b\#h\right) = \frac{1_{\Bbbk}}{\varepsilon_B(b)}\pi_H(b\#h) = h$.

Agora, dispondo das aplicações acima, segue o primeiro resultado sobre sistema admissível.

Teorema 2.2.2 *Seja (H, B) um par admissível. Então* $B \underset{j_B}{\overset{\Pi_B}{\leftrightarrows}} B\#H \underset{i_H}{\overset{\pi_H}{\rightleftarrows}} H$ *é um sistema admissível.*

Demonstração. Serão consideradas em B, as estruturas triviais de H-módulo e H-comódulo à direita, as quais serão representadas por τ_{Br} e ρ_{Br}, respectivamente. Além disso, as estruturas de H-módulo e H-comódulo à esquerda, dadas pela definição de par admissível, serão representadas por τ_{Bl} e ρ_{Bl}. Usando as aplicações π_H e i_H, tem-se que a estrutura de H-bimódulo, em $B\#H$, é dada por:

$$\tau_l(h' \otimes (b\#h)) = (h'_1 \cdot b)\#h'_2h \qquad \text{e} \qquad \tau_r((b\#h) \otimes h') = b\#hh',\ b \in B,\ h, h' \in H.$$

A estrutura de H-bicomódulo, em $B\#H$, é dada por:

$$\rho_l(b\#h) = b_{-1}h_1 \otimes b_0\#h_2 \qquad \text{e} \qquad \rho_r(b\#h) = b\#h_1 \otimes h_2,\ b \in B,\ h \in H.$$

Agora verifica-se os cinco itens que caracterizam um sistema admissível (Definição 2.2.1).
(i) Tem-se que

$$(\Pi_B \circ j_B)(b) = \Pi_B(b\#1_H) = b\varepsilon_H(1_H) = b \quad e \quad (\pi_H \circ i_H)(h) = \pi_H(1_B\#h) = \varepsilon_B(1_B)h = h;$$

(ii) Antes desta demonstração foi provado que a aplicação i_H é morfismo de álgebras. Note que i_H é também um morfismo de coálgebras, afinal para todo $h \in H$ tem-se que $\varepsilon(i_H(h)) = \varepsilon(1_B \# h) = \varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(h) = \varepsilon_H(h)$ e

$$(\Delta \circ i_H)(h) = \Delta(1_B \# h) = 1_B \# h_1 \otimes 1_B \# h_2 = (i_H \otimes i_H)(h_1 \otimes h_2) = ((i_H \otimes i_H) \circ \Delta)(h).$$

Portanto, i_H é morfismo de biálgebras. Além disso, sabe-se que π_H é morfismo de coálgebras. Agora observa-se que π_H também é morfismo de álgebras. De fato, tem-se que $\pi_H(u(1_{\Bbbk})) = \pi_H(1_B \# 1_H) = \varepsilon_B(1_B)1_H = 1_H = u_H(1_{\Bbbk})$ e, para todo $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$

$$\begin{aligned}
(\pi_H \circ m)((b\#h) \otimes (b'\#h')) &= \pi_H(b(h_1 \cdot b')\#h_2h') = \varepsilon_B(b(h_1 \cdot b'))h_2h' \\
&= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_B(b')h_2h' = \varepsilon_B(b)\varepsilon_B(b')hh' \\
&= \varepsilon_B(b)h\varepsilon_B(b')h' = \pi_H(b\#h)\pi_H(b'\#h') \\
&= (m \circ (\pi_H \otimes \pi_H))((b\#h) \otimes (b'\#h')),
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que π_H é morfismo de biálgebras.

Como demonstrado acima, antes de enunciar o teorema, j_B é um morfismo de álgebras e Π_B é morfismo de coálgebras.

(iii) A aplicação Π_B é morfismo de H-módulos à esquerda, pois dados $b \in B$ e $h, h' \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
(\tau_{Bl} \circ (id_H \otimes \Pi_B))(h' \otimes (b\#h)) &= \tau_{Bl}(h' \otimes b\varepsilon_H(h)) = (h' \cdot b)\varepsilon_H(h) \\
&= (h'_1\varepsilon_H(h'_2) \cdot b)\varepsilon_H(h) = (h'_1 \cdot b)\varepsilon_H(h'_2)\varepsilon_H(h) \\
&= (h'_1 \cdot b)\varepsilon_H(h'_2h) = \Pi_B((h'_1 \cdot b)\#h'_2h) \\
&= (\Pi_B \circ \tau_l)(h' \otimes (b\#h)).
\end{aligned}$$

Além disso, Π_B é morfismo de H-módulos à direita, pois para quaisquer $b \in B$ e $h, h' \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
(\Pi_B \circ \tau_r)((b\#h) \otimes h') &= \Pi_B(b\#hh') = b\varepsilon_H(hh') \\
&= b\varepsilon_H(h)\varepsilon_H(h') = \tau_{Br}(b\varepsilon_H(h) \otimes h') \\
&= (\tau_{Br} \circ (\Pi_B \otimes id_H))((b\#h) \otimes h').
\end{aligned}$$

Portanto, Π_B é de H-bimódulos.

(iv) Para todo $b \in B$, tem-se $j_B(b) = b\#1_H$. Logo, $j(B) = B\#1_H$. Lembrando que para mostrar que o conjunto $j_B(B)$ é um H-sub-bicomódulo em $B\#H$, basta mostrar que $\rho_r(j_B(B)) \subset j_B(B)\#H$ e $\rho_l(j_B(B)) \subset H\#j_B(B)$. Mas, para qualquer $b \in B$, tem-se $\rho_r(b\#1_H) = b\#1_H \otimes 1_H$ e $\rho_l(b\#1_H) = b_{-1} \otimes b_0\#1_H$. Segue que $j_B(B)$ é um H-sub-bicomódulo em $B\#H$. Mais ainda, $\Pi_B|_{j_B(B)}$ é um morfismo de H-comódulos à direita.

De fato, para $b \in B$

$$\begin{array}{rcl}(\Pi_B \otimes id_H) \circ \rho_r(b\#1_H) & = & (\Pi_B \otimes id_H)(b\#1_H \otimes 1_H) = b\varepsilon_H(1_H) \otimes 1_H \\ & = & b \otimes 1_H = \rho_{Br}(b) = \rho_{Br}(b\varepsilon_H(1_H)) \\ & = & (\rho_{Br} \circ \Pi_B)(b\#1_H).\end{array}$$

Também, $\Pi_B|_{j_B(B)}$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda, pois

$$\begin{array}{rcl}(id_H \otimes \Pi_B) \circ \rho_l(b\#1) & = & (id_H \otimes \Pi_B)(b_{-1} \otimes b_0 \otimes 1_H) = b_{-1} \otimes b_0\varepsilon_H(1_H) \\ & = & b_{-1} \otimes b_0 = \rho_{Bl}(b) \\ & = & (\rho_{Bl} \circ \Pi_B)(b\#1_H).\end{array}$$

Portanto, segue que $\Pi_B|_{j(B)}$ é um morfismo H-bicomódulos.
(v) Tem-se que, para todo $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{array}{rcl}[(j_B \circ \Pi_B) * (i_H \circ \pi_H)](b\#h) & = & (j_B \circ \Pi_B)(b_1\#(b_2)_{-1}h_1)(i_H \circ \pi_H)((b_2)_0\#h_2) \\ & = & j_B(b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1})\varepsilon_H(h_1))i_H(\varepsilon_B((b_2)_0)h_2) \\ & = & \varepsilon_H((b_2)_{-1})\varepsilon_H(h_1)j_B(b_1)\varepsilon_B((b_2)_0)i_H(h_2) \\ & = & \varepsilon_H(h_1)j_B(b_1)\varepsilon_B(\varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_2)_0)i_H(h_2) \\ & = & \varepsilon_H(h_1)\varepsilon_B(b_2)j_B(b_1)i_H(h_2) \\ & = & j_B(b_1\varepsilon_B(b_2))i_H(\varepsilon_H(h_1)h_2) \\ & = & j_B(b)i_H(h) \\ & = & (b\#1_H)(1_B\#h) \\ & = & b(1_H \cdot 1_B)\#h \\ & = & id_{B\#H}(b\#h).\end{array}$$

Portanto $\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift right, "j_B"'] & B\#H \arrow[l, shift right, "\Pi_B"'] \arrow[r, shift left, "\pi_H"] & H \arrow[l, shift left, "i_H"] \end{tikzcd}$ é um sistema admissível.

□

O resultado a seguir afirma que dado um par admissível (H, B) tem-se que seu sistema admíssivel é, a menos de isomorfismo, o apresentado no Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3 *Sejam (H, B) um par admissível, A uma biálgebra sobre $\Bbbk$ e $\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift right, "j"'] & A \arrow[l, shift right, "\Pi"'] \arrow[r, shift left, "\pi"] & H \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$ um sistema admissível. Então:*

(a) *existe um único morfismo de álgebras $f : B\#H \to A$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B\#H \arrow[dd, dashed, "f"] & \\ B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[dr, "j"'] & & H \arrow[ul, "i_H"'] \arrow[dl, "i"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

é comutativo. Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & B\#H \arrow[dl, "\Pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_H"] \arrow[dd, dashed, "f"'] & \\ B & & H \\ & A \arrow[ul, "\Pi"] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

é comutativo e f é um isomorfismo de biálgebras;

(b) *existe um único morfismo de coálgebras $g : A \to B\#H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} & B\#H \arrow[dl, "\Pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_H"] & \\ B & & H \\ & A \arrow[ul, "\Pi"] \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[uu, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & B\#H & \\ B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[dr, "j"'] & & H \arrow[ul, "i_H"'] \arrow[dl, "i"] \\ & A \arrow[uu, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

é comutativo e g é um isomorfismo de biálgebras. Mais ainda, f e g são morfismos inversos.

Demonstração. Seja $f\colon B\#H \to A$ definida por $f(b\#h) = j(b)i(h)$. Observa-se que:

$$\begin{aligned}
i(h)j(b) &= id_A(i(h)j(b)) = ((j \circ \Pi) * (i \circ \pi))(i(h)j(b)) \\
&= ((j \circ \Pi)(i(h)j(b))_1)((i \circ \pi)(i(h)j(b))_2) \\
&= ((j \circ \Pi)(i(h_1)j(b)_1))((i \circ \pi)(i(h_2)j(b)_2)) \\
&= j(\Pi(i(h_1)j(b)_1))i(\pi(i(h_2)j(b)_2)) \\
&\overset{(1)}{=} j(h_1 \cdot \Pi(j(b)_1))i(\pi(i(h_2))i(\pi(j(b)_2)) \\
&\overset{(2)}{=} j(h_1 \cdot \Pi(j(b)_1))i(h_2)i(\pi(j(b)_2)) \\
&\overset{(3)}{=} j(h_1 \cdot b)i(h_2)i(1_H) \\
&= j(h_1 \cdot b)i(h_2).
\end{aligned}$$

Acima, (1) vale pois Π é morfismo de H-módulos à esquerda e que i e π são morfismos de biálgebras; (2) vale porque $\pi \circ i = id_H$; e, (3) vale já que $j(B)$ é um H-sub-bicomódulo e $\Pi|_{j(B)}$ é morfismo de H-bicomódulos. Assim, f é um morfismo de álgebras, pois $f(1_B\#1_H) = 1_A$ e, para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$

$$\begin{aligned} f((b\#h)(b'\#h')) &= f(b(h_1 \cdot b')\#h_2h') = j(b(h_1 \cdot b'))i(h_2h') \\ &= j(b)j(h_1 \cdot b')i(h_2)i(h') = j(b)i(h)j(b')i(h') \\ &= f(b\#h)f(b'\#h'). \end{aligned}$$

Claramente, por definição, f satisfaz a comutatividade de (2.9). Além disso, supondo que t satisfaz a comutatividade de (2.9) e t é morfismo de álgebras, então é válido que $j(b) = t \circ j_B(b) = t(b\#1_H)$, para $b \in B$ e também que $i(h) = t \circ i_H(h) = t(1_B\#h)$, $h \in H$. Logo, $t(b\#h) = t((b\#1_H)(1_B\#h)) = t(b\#1_H)t(1_B\#h) = j(b)i(h) = f(b\#h)$. Portanto, f é única.

Seja $g\colon A \to B\#H$, definida por $g(a) = \Pi(a_1)\#\pi(a_2)$. Dado $a \in A$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(b\#h) &= g(j(b)i(h)) = \Pi((j(b)i(h))_1)\#\pi((j(b)i(h))_2) \\ &= \Pi(j(b)_1 i(h_1))\#\pi(j(b)_2 i(h_2)) \\ &= \Pi(j(b)_1 \cdot h_1)\#\pi(j(b)_2)\pi(i(h_2)) \\ &\overset{(1)}{=} \Pi(j(b)_1) \cdot h_1\#\pi(j(b)_2)\pi(i(h_2)) \\ &= \Pi(j(b)_1)\varepsilon_H(h_1)\#\pi(j(b)_2)h_2 \\ &= \Pi(j(b)_1)\#\pi(j(b)_2)\varepsilon_H(h_1)h_2 \\ &= \Pi(j(b)_1)\#\pi(j(b)_2)h \\ &\overset{(2)}{=} b\#1_H h \\ &= b\#h. \end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale pois Π é morfismo de H-módulos à direita e (2) vale pois $j(B)$ é um H-sub-bicomódulo e $\Pi|_{j(B)}$ é morfismo de H-comódulos à direita. Tem-se também que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a) &= f(\Pi(a_1)\#\pi(a_2)) = j(\Pi(a_1))i(\pi(a_2)) \\ &= ((j \circ \Pi) * (i \circ \pi))(a) = id_A(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Assim, g e f são inversas, o que assegura que g é única.

Observa-se que o diagrama (2.11) comuta, para todo $a \in A$. De fato,

$$\begin{aligned} (\Pi_B \circ g)(a) &= \Pi_B(\Pi(a_1)\#\pi(a_2)) = \Pi(a_1)\varepsilon_H(\pi(a_2)) \\ &= \Pi(a_1)\varepsilon_A(a_2)) = \Pi(a_1\varepsilon_A(a_2)) \\ &= \Pi(a). \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $(\pi_H \circ g)(a) = \pi(a)$. Desde que f e g são inversas uma da outra, ao mostrar que g é morfismo de coálgebras, resulta que f e g são isomorfismos de biálgebras.

Para isto, primeiramente considera-se $a \in j(B)$. Como $\Pi|_{j(B)}$ é morfismo de H-comódulos à direita, tem-se $\Pi(a)\otimes 1_H = \Pi(a_1)\otimes\pi(a_2)$, ou seja, $(\rho_{B_r}\circ\Pi)(a) = (\Pi\otimes\pi)\circ\Delta(a)$. Assim,

$$\begin{aligned}(\Pi(a_1))_{-1}\pi(a_2)\otimes(\Pi(a_1))_0 &= (m_H\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\tau_{flip})\circ(\rho_{B_l}\otimes id_H)\circ(\Pi\otimes\pi)\circ\Delta(a)\\ &= (m_H\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\tau_{flip})\circ(\rho_{B_l}\otimes id_H)\circ(\rho_{B_r}\circ\Pi)(a)\\ &= (m_H\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\tau_{flip})\circ(\rho_{B_l}\otimes id_H)(\Pi(a)\#1_H)\\ &= (\Pi(a))_{-1}\otimes(\Pi(a))_0.\end{aligned}$$

Mas, $\Pi|_{j(B)}$ é de H-comódulos à esquerda, ou seja,

$$(\Pi(a))_{-1}\otimes(\Pi(a))_0 = \pi(a_1)\otimes\Pi(a_2).$$

De onde resulta que para todo $a \in j(B)$,

$$(\Pi(a_1))_{-1}\pi(a_2)\otimes(\Pi(a_1))_0 = \pi(a_1)\otimes\Pi(a_2). \tag{2.13}$$

Seja $a' \in i(H)$, ou seja, $a' = i(h')$, para algum $h' \in H$. Como Π é de H-módulos à direita, $\Pi(aa') = \Pi(ai(h')) = \Pi(\tau_r(a\otimes h')) = \Pi(a)\varepsilon_H(h') = \Pi(a)\varepsilon_A(i(h')) = \Pi(a)\varepsilon_A(a')$. Como f é sobrejetiva, $A = j(B)i(H)$. Logo, se $a \in A$, então $a = j(b)i(h)$, com $b \in B$ e $h \in H$. Assim, por um lado tem-se que

$$\begin{aligned}(\Pi(a_1))_{-1}\pi(a_2)\otimes(\Pi(a_1))_0 &= (\Pi(j(b)_1 i(h)_1))_{-1}\pi(j(b)_2 i(h)_2)\otimes(\Pi(j(b)_1 i(h)_1))_0\\ &= (\Pi(j(b)_1)\varepsilon_A(i(h)_1))_{-1}\pi(j(b)_2)\pi(i(h)_2)\otimes(\Pi(j(b)_1)\varepsilon_A(i(h)_1))_0\\ &= (m\otimes id_B)\circ(\tau_{flip}\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\rho_B)(\pi(j(b)_2)\pi(i(h)_2)\otimes\Pi(j(b)_1)\varepsilon_A(i(h)_1))\\ &= (m\otimes id_B)\circ(\tau_{flip}\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\rho_B)(\pi(j(b)_2)\pi(\varepsilon_A(i(h)_1)i(h)_2)\otimes\Pi(j(b)_1))\\ &= (m\otimes id_B)\circ(\tau_{flip}\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\rho_B)(\pi(j(b)_2)\pi(i(h))\otimes\Pi(j(b)_1))\\ &= (m\otimes id_B)\circ(\tau_{flip}\otimes id_B)\circ(id_H\otimes\rho_B)(\pi(j(b)_2)h\otimes\Pi(j(b)_1))\\ &= (m\otimes id_B)\circ(\tau_{flip}\otimes id_B)(\pi(j(b)_2)h\otimes(\Pi(j(b)_1))_{-1}\otimes(\Pi(j(b)_1))_0)\\ &= (m\otimes id_B)((\Pi(j(b)_1))_{-1}\otimes\pi(j(b)_2)h\otimes(\Pi(j(b)_1))_0)\\ &= (\Pi(j(b)_1))_{-1}\pi(j(b)_2)h\otimes(\Pi(j(b)_1))_0.\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\pi(a_1)\otimes\Pi(a_2) &= \pi(j(b)_1 i(h)_1)\otimes\Pi(j(b)_2 i(h)_2)\\
&= \pi(j(b)_1 i(h)_1)\otimes\Pi(j(b)_2)\varepsilon_A(i(h)_2)\\
&= \pi(j(b)_1 i(h)_1\varepsilon_A(i(h)_2))\otimes\Pi(j(b)_2)\\
&= \pi(j(b)_1 i(h))\otimes\Pi(j(b)_2)\\
&= \pi(j(b)_1)\pi(i(h))\otimes\Pi(j(b)_2)\\
&= \pi(j(b)_1)h\otimes\Pi(j(b)_2)\\
&\overset{(2.13)}{=} (\Pi(j(b)_1))_{-1}\pi(j(b)_2)h\otimes(\Pi(j(b)_1))_0.
\end{aligned}$$

Logo, decorre que $(\Pi(a_1))_{-1}\pi(a_2)\otimes(\Pi(a_1))_0=\pi(a_1)\otimes\Pi(a_2)$ é válido para todo $a\in A$. Com essas informações, tem-se que g é morfismo de coálgebras, pois

$$\begin{aligned}
\Delta(g(a)) &= \Delta(\Pi(a_1)\otimes\pi(a_2)) = (\Pi(a_1))_1\#((\Pi(a_1))_2)_{-1}(\pi(a_2))_1\otimes((\Pi(a_1))_2)_0\#(\pi(a_2))_2\\
&= \Pi((a_1)_1)\#(\Pi((a_1)_2))_{-1}\pi((a_2)_1)\otimes(\Pi((a_1)_2))_0\#\pi((a_2)_2)\\
&= \Pi(a_1)\#(\Pi(a_2))_{-1}\pi(a_3)\otimes(\Pi(a_2))_0\#\pi(a_4)\\
&= \Pi(a_1)\#\pi(a_2)\otimes\Pi(a_3)\#\pi(a_4)\\
&= \Pi((a_1)_1)\#\pi((a_1)_2)\otimes\Pi((a_2)_1)\#\pi((a_2)_2)\\
&= g(a_1)\otimes g(a_2)\\
&= (g\otimes g)\circ\Delta(a).
\end{aligned}$$

Dessa forma, para concluir a demonstração do teorema resta mostrar a comutatividade dos diagramas (2.10) e (2.12). Para tanto, as equações

$$(\Pi\circ f)(b\#h)=\Pi(j(b)i(h))=\Pi(j(b))\varepsilon_A(i(h))=b\varepsilon_H(h)=\Pi_B(b\#h),$$

e

$$\begin{aligned}
(\pi\circ f)(b\#h) &= \pi(j(b)i(h)) = \pi_H\circ g(j(b)i(h))\\
&= \pi_H(\Pi(j(b)_1 i(h_1))\otimes\pi(j(b)_2 i(h_2)))\\
&= \pi_H(\Pi(j(b)_1 i(h_1))\otimes\pi(j(b)_2)h_2)\\
&= \pi_H(\Pi(j(b)_1)\cdot h_1\otimes\pi(j(b)_2)h_2)\\
&\overset{(*)}{=} \pi_H(b\cdot h_1\otimes 1_H h_2)\\
&= \pi_H(b\varepsilon_H(h_1)\otimes h_2)\\
&= \pi_H(b\#h),
\end{aligned}$$

onde $(*)$ vale pois $j(B)$ é um H-sub-bicomódulo e $\Pi|_{j(B)}$ é morfismo de H-comódulos à direita, garantem a comutatividade do diagrama (2.10). Além disso, as equações $(g\circ j)(b)=(g\circ f)(j_B(b))=j_B(b)$ e $(g\circ i)(h)=(g\circ f)(i_H(h))=i_H(h)$ garantem a comutatividade do diagrama (2.12). $\square$

2.2.1 Propriedades dos pares admissíveis

Agora serão apresentadas algumas propriedades sobre pares admissíveis. Entre outras coisas, busca-se relacionar as integrais do par admissível (H, B) com as integrais de H e B.

A primeira propriedade apresenta resultados sobre comutatividade e cocomutatividade, portanto, primeiramente exibe-se uma observação que é relevante sobre cocomutatividade.

Observação 2.2.4 *Sejam C e D coálgebras e $f : C \to D$ um epimorfismo de coálgebra. Se C é cocomutativo, então D também é cocomutativo.*

Demonstração. Seja $d \in D$, como f é sobrejetiva existe $c \in C$ tal que $f(c) = d$. Assim,

$$\begin{aligned} d_1 \otimes d_2 &= \Delta_C(d) = \Delta_c(f(c)) = f(c)_1 \otimes f(c)_2 \overset{(1)}{=} f(c_1) \otimes f(c_2) \\ &\overset{(2)}{=} f(c_2) \otimes f(c_1) \overset{(1)}{=} f(c)_2 \otimes f(c)_1 \\ &= d_2 \otimes d_1. \end{aligned}$$

Onde (1) é válido pois f é morfismo de coálgebra e (2) vale pois C é cocomutativo. □

Proposição 2.2.5 *Seja (H, B) um par admissível. Então,*

(a) $B\#H$ é comutativo se e somente se B e H são comutativos e τ é trivial.

(b) $B\#H$ é cocomutativo se e somente se B e H são cocomutativos e ρ é trivial.

Demonstração.
(a) $(\Rightarrow)$ Se $B\#H$ é comutativo, então que $m((b\#h) \otimes (b'\#h')) = m((b'\#h') \otimes (b\#h))$, para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$. Logo,

$$b(h_1 \cdot b')\#h_2h' = b'(h'_1 \cdot b)\#h'_2h. \tag{2.14}$$

Tomando $h = h' = 1_H$ em (2.14), tem-se $bb'\#1_H = b'b\#1_H$. Daí $bb' = b'b$, ou seja, B é comutativo. Tomando $b = b' = 1_B$ em (2.14), tem-se $1_B\varepsilon_H(h_1)\#h_2h' = 1_B\varepsilon_H(h_1)\#h'_2h$. Aplicando $\varepsilon_B \otimes id_H$ na igualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(h_1)\#h_2h' = \varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(h_1)\#h'_2h \quad &\Leftrightarrow \quad \varepsilon_H(h_1)\#h_2h' = \varepsilon_H(h'_1)\#h'_2h \\ &\Leftrightarrow \quad 1_{\Bbbk}\#hh' = 1_{\Bbbk}\#h'h. \end{aligned}$$

Logo, $hh' = h'h$, de onde segue que H é comutativa.
Considerando agora $b = 1_B$ e $h' = 1_H$, na equação (2.14), tem-se que

$$h_1 \cdot b'\#h_2 = b'(1_H \cdot 1_B)\#h = b'\#h = b'\#\varepsilon_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h_1)b'\#h_2.$$

Aplicando $id_B \otimes \varepsilon_H$ segue que $h \cdot b'\#1_{\Bbbk} = \varepsilon_H(h)b'\#1_{\Bbbk}$. Desta forma, $h \cdot b' = \varepsilon_H(h)b'$, de onde segue que τ é trivial.
($\Leftarrow$) Como B e H são comutativos, segue que $bb' = b'b$ e $h'h = hh'$ para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$. Além disso, tem-se que τ é trivial, ou seja, $h \cdot b = \varepsilon_H(h)b$. Assim,

$$(b\#h)(b'\#h') = b(h_1 \cdot b')\#h_2h' = b\varepsilon_H(h_1)b'\#h_2h' = bb'\#hh'.$$

Por outro lado,

$$(b'\#h')(b\#h) = b'(h'_1 \cdot b)\#h'_2h = b'\varepsilon_H(h'_1)b\#h'_2h = b'b\#h'h.$$

Logo, $(b\#h)(b'\#h') = (b'\#h')(b\#h)$, ou seja, $B\#H$ é comutativo.
(b) ($\Rightarrow$) Sabe-se que Π e π são epimorfismo de coálgebras. Da hipótese que $B\#H$ é cocomutativo, segue da Observação 2.2.4 que B e H são cocomutativos. Além disso, como $B\#H$ é cocomutativo, então

$$b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2 = (b_2)_0\#h_2 \otimes b_1\#(b_2)_{-1}h_1. \tag{2.15}$$

Aplicando $\pi_H \otimes \Pi_B$ na equação (2.15), usando (2.2) e considerando $h = 1_H$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\,\varepsilon_H\,(h_2) &= \varepsilon_B((b_2)_0)h_2 \otimes b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1})\varepsilon_H(h_1) \\
&\Rightarrow \varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1} \otimes (b_2)_0 = \varepsilon_B((b_2)_0)1_H \otimes b_1\varepsilon_H((b_2)_{-1}) \\
&\Rightarrow \rho(b) = 1_H \otimes b_1\varepsilon_B(b_2) \\
&\Rightarrow \rho(b) = 1_H \otimes b.
\end{aligned}$$

Portanto, ρ é trivial.
($\Leftarrow$) É válido que $\rho(b) = 1_H \otimes b$, $b_1 \otimes b_2 = b_2 \otimes b_1$ e $h_1 \otimes h_2 = h_2 \otimes h_1$, para quaisquer $b \in B$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\Delta(b\#h) &= b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \otimes (b_2)_0\#h_2 = b_1\#1_Hh_2 \otimes b_2\#h_1 \\
&= b_2\#h_2 \otimes b_1\#1_Hh_1 = (b_2)_0\#h_2 \otimes b_1\#(b_2)_{-1}h_1 \\
&= \tau(\Delta(b\#h)).
\end{aligned}$$

Ou seja, $B\#H$ é cocomutativo. $\square$

A proposição abaixo relaciona as antípodas entre H, B e $B\#H$.

Proposição 2.2.6 *Suponha que (H, B) é um par admissível.*

(a) *Se $B\#H$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S, então H é uma álgebra de Hopf e id_B possui um inverso em relação ao produto convolução, na álgebra $Hom_{\Bbbk}(B, B)$.*

(*b*) *Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda S_H e $S_B \in Hom(B,B)$ é o inverso de id_B (em relação ao produto convolução), então $B\#H$ é uma álgebra de Hopf com antípoda dada por: $S(b\#h) = (1_B\#S_H(b_{-1}h))(S_B(b_0)\#1_H)$, para todo $h \in H$ e $b \in B$.*

Demonstração.
(*a*) Suponha que $B\#H$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Mostra-se que H possui uma antípoda dada por $S_H = \pi_H \circ S \circ i_H$, ou seja, H é uma álgebra de Hopf. De fato, tem-se S_H é a inversa da id_H à esquerda em relação ao produto convolução, pois dado $h \in H$

$$\begin{aligned}
(S_H * id_H)(h) &= S_H(h_1)h_2 = (\pi_H \circ S \circ i_H)(h_1)h_2 = (\pi_H \circ S \circ i_H)(h_1)(\pi_H \circ i_H)(h_2) \\
&= \pi_H((S \circ i_H)(h_1)(i_H(h_2))) = \pi_H(S(1_B\#h_1)(1_B\#h_2)) \\
&= \pi_H(\varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(h)1_B\#1_H) \overset{(*)}{=} \varepsilon_H(h)\pi_H(1_B\#1_H) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(1_B)1_H = \varepsilon_H(h)1_H \\
&= \varepsilon_H(h)u_H(1_{\Bbbk}) = u_H(\varepsilon_H(h)1_{\Bbbk}) \\
&= (u_H \circ \varepsilon_H)(h).
\end{aligned}$$

Observa-se $(*)$ vale pois, pelo Teorema 2.1.9, tem-se $\varepsilon_B(1_B) = 1_{\Bbbk}$. Num processo análogo, mostra-se que S_H é a inversa da id_H à direita em relação ao produto convolução. Portanto, H é álgebra de Hopf.

Resta mostrar que id_B possui um inverso, em $Hom(B,B)$, em relação ao produto convolução. Através do isomorfismo de álgebras $j_B : B \to B\#1_H$, pode-se usar $B\#1_H$ em vez de B. Neste caso, $\Delta(b\#1_H) = (b_1\#1_H) \otimes (b_2\#1_H)$. Além disso, denota-se $\pi = i_H \circ \pi_H$ e $\Pi = j_B \circ \Pi_B$.
Assim, seja $S' \in End_{\Bbbk}(B\#H)$ definido por $S' = \pi * S$. Então, para $b \in B$

$$\begin{aligned}
S'(b\#1_H) &= \pi((b\#1_H)_1)S((b\#1_H)_2) = \pi(b_1\#(b_2)_{-1})S((b_2)_0\#1_H) \\
&= i_H(\varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1})S((b_2)_0\#1_H) \overset{2.2}{=} i_H(b_{-1})S(b_0\#1_H) \\
&= (1_B\#b_{-1})S(b_0\#1_H).
\end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $b\#1_H \in B\#1_H$ é válido que

$$\begin{aligned}
(id * S')(b\#1_H) &= (b_1\#1_H)S'(b_2\#1_H) = (b_1\#1_H)(1_B\#(b_2)_{-1})S((b_2)_0\#1_H) \\
&= (b_1\#(b_2)_{-1})S((b_2)_0\#1_H) = (b\#1_H)_1S((b\#1_H)_2) \\
&= \varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H).
\end{aligned}$$

Ou seja, $S'|_{B\#1_H}$ é inverso à direita da $id_{B\#1_H}$, em $Hom_{\Bbbk}(B\#1_H, B\#H)$, em relação ao produto convolução.

Além disso, para quaisquer $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned}
S'(b\#h) &= \pi(b_1\#(b_2)_{-1}h_1)S((b_2)_0\#h_2) = i_H(\varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1}h_1)S((b_2)_0\#h_2) \\
&\overset{2.2}{=} i_H(b_{-1}h_1)S(b_0\#h_2) = i_H(b_{-1})i_H(h_1)S((b_0\#1_H)(1_B\#h_2)) \\
&= (1_B\#b_{-1})(1_B\#h_1)S(1\#h_2)S(b_0\#1_H) \\
&\overset{(*)}{=} (1\#b_{-1})\varepsilon_B(1_B)\varepsilon_H(h)(1_B\#1_H)S(b_0\#1_H) \\
&= (1\#b_{-1})S(b_0\#1_H)\varepsilon_H(h) \\
&= S'(b\#1_H)\varepsilon_H(h).
\end{aligned}$$

Observe que $(*)$ é válido pois S é a antípoda de $B\#H$.

Desde que $\Pi(b\#h) = j_B \circ \Pi_B(b\#h) = j_B(b\varepsilon_H(h)) = \varepsilon_H(h)(b\#1_H)$, segue que $S' \circ \Pi = S'$. Assim, para todo $b\#1_H \in B\#1_H$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(S' * id)(b\#1_H) &= S'(b_1\#1_H)(b_2\#1_H) = S'(b_1\#1_H)(\varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_2)_0\#1_H) \\
&= S'(\varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_1\#1_H))((b_2)_0\#1_H) = S' \circ \Pi(b_1\#(b_2)_{-1})((b_2)_0\#1_H) \\
&= S'(b_1\#(b_2)_{-1})((b_2)_0\#1_H) = S'((b\#1_H))_1(b\#1_H)_2 \\
&= (S' * id)(b\#1_H) \overset{(*)}{=} \pi(b\#1_H) \\
&= i_H(\varepsilon_B(b)) = \varepsilon_B(b)(1_B\#1_H) \\
&= \varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H),
\end{aligned}$$

com $(*)$ válido pois restringido a $B\#1_H$ tem-se $S' * id = \pi * S * id = \pi * \varepsilon = \pi$. Portanto, $S'|_{B\#1_H}$ é inverso à esquerda da $id_{B\#1_H}$, em $Hom(B\#1_H, B\#H)$ em relação ao produto convolução.

Resta mostrar que $S'(B\#1_H) \subset B\#1_H$. Mas $(\Pi \circ S')(B\#1_H) \subset B\#1_H$. Então é suficiente mostrar que $\Pi \circ S'|_{B\#1_H} = S'|_{B\#1_H}$. Para isto, observa-se primeiramente que para quaisquer $b, b' \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned}
(b\#1_H)\Pi(b'\#h) &= (b\#1_H)(\varepsilon_H(h)(b'\#1_H)) = \varepsilon_H(h)(b\#1_H)(b'\#1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)(bb'\#1_H) = \Pi(bb'\#h) \\
&= \Pi((b\#1_H)(b'\#1_H)).
\end{aligned}$$

Assim, aplicando Π em $(id * S')(b\#1_H) = \varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H)$, segue que para $b \in B$

$$\begin{aligned}
\Pi((id * S')(b\#1_H)) = \Pi\ (\varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H))& \\
&\Rightarrow \Pi((b_1\#1_H)S'(b_2\#1_H)) = \varepsilon(b\#1_H)\Pi(1_B\#1_H) \\
&\Rightarrow (b_1\#1_H)\Pi(S'(b_2\#1_H)) = \varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H) \\
&\Rightarrow (id * (\Pi \circ S'))(b\#1_H) = \varepsilon(b\#1_H)(1_B\#1_H).
\end{aligned}$$

Desta forma, $\Pi \circ S'|_{B\#1_H} = S'|_{B\#1_H}$, pois $S'|_{B\#1_H}$ também é o inverso da $id_{B\#1_H}$ à direita, em relação ao produto convolução.

Consequentemente, id_B possui um inverso, em $Hom(B,B)$, em relação ao produto convolução.
(b) Sejam S_H a antípoda de H, S_B o inverso de id_B em relação à convolução e id a identidade de $B\#H$. Para mostrar que $S(b\#h) = (1_B\#S_H(b_{-1}h))(S_B(b_0)\#1_H)$ é a antípoda de $B\#H$, basta ver que S satisfaz $(S*id)(b\#h) = (u\circ\varepsilon)(b\#h) = (id*S)(b\#h)$ para qualquer $b\in B$ e $h\in H$. Primeiro, nota-se que:

$$\begin{aligned}
(S*id)(b\#h) &= S((b\#h)_1)id((b\#h)_2) = S(b_1\#(b_2)_{-1}h_1)((b_2)_0\#h_2)\\
&= (1_B\#S_H((b_1)_{-1}(b_2)_{-1}h_1))(S_B((b_1)_0)\#1_H)((b_2)_0\#h_2)\\
&\overset{(1)}{=} (1_B\#S_H(b_{-1}h_1))(S_B((b_0)_1)\#1_H)((b_0)_2\#h_2)\\
&\overset{(2)}{=} (1_B\#S_H(b_{-1}h_1))(\varepsilon_B(b_0)1_B\#h_2)\\
&\overset{(3)}{=} (1_B\#S_H(\varepsilon_B(b)h_1))(1_B\#h_2)\\
&= \varepsilon_B(b)(1_B\#S_H(h_1))(1_B\#h_2)\\
&= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)(1_B\#1_H)\\
&= u\circ\varepsilon(b\#h).
\end{aligned}$$

Observa-se que (1) segue do fato de Δ ser um morfismo de H-comódulos; (2) segue pois S_B é o inverso de id_B com relação ao produto convolução; (3) segue pois ε_B é morfismo de H-comódulos.

Por fim,

$$\begin{aligned}
(id*S)(b\#h) &= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1)S((b_2)_0\#h_2)\\
&= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1)(1_B\#S_H(((b_2)_0)_{-1}h_2))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&= (b_1(((b_2)_{-1}h_1)_1\cdot 1_B)\#((b_2)_{-1}h_1)_2S_H(((b_2)_0)_{-1}h_2))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&= (b_1\#\varepsilon_H((b_2)_{-1}h_1)_1((b_2)_{-1}h_1)_2S_H(((b_2)_0)_{-1}h_2))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1S_H(((b_2)_0)_{-1}h_2))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1S_H(h_2)S_H(((b_2)_0)_{-1}))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&= (b_1\#(b_2)_{-1}\varepsilon_H(h)S_H(((b_2)_0)_{-1}))(S_B(((b_2)_0)_0)\#1_H)\\
&\overset{(*)}{=} (b_1\#((b_2)_{-1})_1S_H(((b_2)_{-1})_2))(S_B((b_2)_0)\#1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= (b_1\#1_H\varepsilon_H((b_2)_{-1}))(S_B((b_2)_0)\#1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= (b_1\#1_H)(S_B(\varepsilon_H((b_2)_{-1})(b_2)_0)\#1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= (b_1\#1_H)(S_B(b_2)\#1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= (b_1S_B(b_2)\#1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)(1_B\#1_H).
\end{aligned}$$

Note que $(*)$ vale, pois ρ é morfismo de H-comódulos. □

As integrais desempenham um papel importante no estudo de álgebras de Hopf de dimensão finita, por exemplo, nas questões de semissimplicidade e cossemissimplicidade.

Definição 2.2.7 *Seja H uma álgebra de Hopf. Diz-se que $t\in H$ é uma integral à es-*

querda de H, se $ht = \varepsilon(h)t$ para todo $h \in H$. Analogamente, diz-se que $t' \in H$ é uma integral à direita de H, se $t'h = \varepsilon(h)t'$ para todo $h \in H$.

Agora, serão provadas duas proposições que relacionam as integrais de H, B e$B\#H$.

Proposição 2.2.8 *Seja (H, B) um par admissível, onde H é uma álgebra de Hopf. Então:*

(a) *Se $x_B \in B$ e $x_H \in H$ são integrais à direita, então $x_B\#x_H$ é uma integral à direita de $B\#H$.*

(b) *Suponha que $B\#H$ é uma álgebra de Hopf. Então $B\#H$ é semissimples se e somente se existem integrais à esquerda $x_B \in B$ e $x_H \in H$ tal que $\varepsilon_B(x_B) = 1 = \varepsilon_H(x_H)$ e $h \cdot x_B = \varepsilon_H(h)x_B$ para todo $h \in H$. Neste caso, $x_B\#x_H$ é uma integral à esquerda de $B\#H$ satisfazendo $\varepsilon(x_B\#x_H) = 1$.*

(c) *Suponha que B é uma álgebra de Hopf e que $x_B \in B$ e $x_H \in H$ são integrais à esquerda não nulas. Então existe um morfimo de álgebras $\eta : H \to \Bbbk$ tal que $h \cdot x_B = \eta(h)x_B$ para todo $h \in H$ e $x_B\#(\eta \rightharpoonup x_H)$ é uma integral à esquerda não nula de $B\#H$, onde $\eta \rightharpoonup x = x_1\eta(x_2)$, para todo $x \in H$.*

Demonstração.
(a) Se $x_B \in B$ é uma integral à direita, então $x_Bb = \varepsilon_B(b)x_B$, para qualquer $b \in B$. Analogamente, se $x_H \in H$ é uma integral à direita, então $x_Hh = \varepsilon_H(h)x_H$, para qualquer $h \in H$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
(x_B\#x_H)(b\#h) &= x_B((x_H)_1 \cdot b)\#(x_H)_2h = x_B\varepsilon_B((x_H)_1 \cdot b)\#(x_H)_2h \\
&\overset{(*)}{=} x_B\varepsilon_H((x_H)_1)\varepsilon_B(b)\#(x_H)_2h = x_B\varepsilon_B(b)\#\varepsilon_H((x_H)_1)(x_H)_2h \\
&= x_B\varepsilon_B(b)\#x_Hh = x_B\varepsilon_B(b)\#\varepsilon_H(h)x_H \\
&= \varepsilon(b\#h)x_B\#x_H.
\end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ é válido pela Proposição 2.1.1. Portanto, $x_B\#x_H$ é uma integral à direita de $B\#H$.
(b) ($\Rightarrow$) Se $B\#H$ é semissimples, então por [DNR, Teorema 5.2.10] $B\#H$ possui uma integral à esquerda, denotada por x, tal que $\varepsilon(x) = 1$.

Toma-se $x_B = \Pi_B(x)$ e $x_H = \pi_H(x)$. Pelo Teorema 2.1.9, Π_B e π_H são morfismos de coálgebras. Logo, $\varepsilon_B(x_B) = 1 = \varepsilon_H(x_H)$. Novamente pelo Teorema 2.1.9, Π_B é morfismo de H-módulos à esquerda. Isso implica que para $h \in H$

$$\begin{aligned} h \cdot x_B &= h \cdot \Pi_B(x) = \Pi_B(h \cdot x) = \Pi_B(i_H(h)x) \\ &= \Pi_B(\varepsilon(i_H(h))x) = \varepsilon(i_H(h))\Pi_B(x) \\ &= \varepsilon(1_B\#h)x_B \\ &= \varepsilon_H(h)x_B. \end{aligned}$$

Observa-se que para quaisquer $b, b' \in B$ e $h, h' \in H$

$$\begin{aligned} b'(\Pi_B((1_B\#h')(b\#h))) &= b'(\Pi_B(1_B(h'_1 \cdot b)\#h'_2h)) \\ &= b'(h'_1 \cdot b)\varepsilon_H(h'_2)\varepsilon_H(h) \\ &= \Pi_B(b'(h'_1 \cdot b)\#h'_2h) \\ &= \Pi_B((b'\#h')(b\#h)). \end{aligned}$$

Consequentemente, para $b \in B$

$$bx_B = b\Pi_B(x) = \Pi_B((b\#1_H)x) = \Pi_B(\varepsilon_B(b)x) = \varepsilon_B(b)\Pi_B(x) = \varepsilon_B(b)x_B.$$

Finalmente, para $h \in H$

$$\begin{aligned} hx_H &= h\pi_H(x) = \pi_H(1_B\#h)\pi_H(x) = \pi_H((1_B\#h)x) \\ &= \pi_H(\varepsilon(1_B\#h)x) = \pi_H(\varepsilon_H(h)x) = \varepsilon_H(h)\pi_H(x) \\ &= \varepsilon_H(h)x_H. \end{aligned}$$

Portanto, $x_B \in B$ e $x_H \in H$ são integrais à esquerda.
($\Leftarrow$) Sejam x_B e x_H integrais de B e H, respectivamente, tais que $\varepsilon_B(x_B) = 1_{\Bbbk} = \varepsilon_H(x_H)$ e $h \cdot x_B = \varepsilon_H(h)x_B$. Então, para $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned} (b\#h)(x_B\#x_H) &= b(h_1 \cdot x_B)\#h_2x_H = b\varepsilon_H(h_1)x_B\#\varepsilon_H(h_2)x_H \\ &= \varepsilon_H(h)bx_B\#x_H = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b)x_B\#x_H \\ &= \varepsilon(b\#h)(x_B\#x_H). \end{aligned}$$

Portanto, $x_B\#x_H$ é uma integral à esquerda tal que $\varepsilon(x_B\#x_h) = 1_{\Bbbk}$. Logo, por [DNR, Teorema 5.2.10], $B\#H$ é semissimples.
(c) Desde que $x_H \in H$ é uma integral à esquerda, não nula, segue por [R3, Proposição 10.2.1], que H tem dimensão finita. Por [Mo, Teorema 2.1.3] S_H é bijetiva, onde denota-se o inverso de S_H por S_H^{-1}. Do fato de S_H ser antimorfismo de álgebras, tem-se que S_H^{-1} também o é. Assim, para $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned} b(h\cdot x_B) &= b(\varepsilon_H(h_1)h_2\cdot x_B)=\varepsilon_H(h_1)b(h_2\cdot x_B)=(\varepsilon_H(h_1)1_H\cdot b)(h_2\cdot x_B)\\ &= (h_2S_H^{-1}(h_1)\cdot b)(h_3\cdot x_B)=(h_2\cdot(S_H^{-1}(h_1)\cdot b))(h_3\cdot x_B)\\ &= h_2\cdot((S_H^{-1}(h_1)\cdot b)x_B)=h_2\cdot(\varepsilon_B(S_H^{-1}(h_1)\cdot b)x_B)\\ &\overset{(*)}{=} h_2\cdot(\varepsilon_H(S_H^{-1}(h_1))\varepsilon_B(b)x_B)=h_2\cdot(\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_B(b)x_B)\\ &= \varepsilon_B(b)(h\cdot x_B). \end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ vale pela Proposição 2.1.1. Logo, $h\cdot x_B$ também é uma integral à esquerda de B.

Como $x_B\neq 0$, por [Mo, Teorema 2.1.3], o conjunto das integrais à esquerda de B, denotado por $I_l(B)$, possui dimensão 1. Logo, $I_l(B)=\Bbbk\{x_B\}$. Portanto, $h\cdot x_B=\eta(h)x_B$, onde $\eta: H\to\Bbbk$ é uma função. Mais ainda, η é morfismo de álgebras. De fato, como $1_H\cdot x_B = x_B = 1_\Bbbk x_B$, então $\eta(1_H)=1_\Bbbk$. Além disso,

$$\begin{aligned} \eta(hl)x_B &= (hl)\cdot x_B = h\cdot(l\cdot x_B)=h\cdot(\eta(l)x_B)\\ &= \eta(l)(h\cdot x_B)=\eta(l)\eta(h)x_B\\ &= \eta(h)\eta(l)x_B, \end{aligned}$$

ou seja, $\eta(hl)=\eta(h)\eta(l)$. Portanto η é morfismo de álgebras. Com isto, segue que η é um *grouplike* em H^*. Logo, tem-se que η possui um inverso em relação ao produto convolução, o qual será denotado η^{-1}.

Agora, definindo $\eta \rightharpoonup: H\to H$ por $\eta\rightharpoonup h = h_1\eta(h_2)$ e $\eta^{-1}\rightharpoonup: H\to H$ por $\eta^{-1}\rightharpoonup h = h_1\eta^{-1}(h_2)$ é fácil verificar que estas aplicações são morfismos de álgebras. Assim, tem-se que dado $h\in H$

$$\begin{aligned} \eta\rightharpoonup(\eta^{-1}\rightharpoonup h) &= \eta\rightharpoonup(h_1\eta^{-1}(h_2))=(\eta\rightharpoonup h_1)\eta^{-1}(h_2)=h_1\eta(h_2)\eta^{-1}(h_3)\\ &= h_1(\eta*\eta^{-1}(h_2))=h_1\varepsilon_H(h_2)\\ &= h. \end{aligned}$$

Da mesma forma define-se o morfismo de álgebras $\leftharpoonup\eta: H\to H$ por $h\leftharpoonup\eta=$

$\eta(h_1)h_2$. Logo, para quaisquer $b \in B$ e $h \in H$

$$\begin{aligned}
(b\#h)(x_B\#(\eta \rightharpoonup x_H)) &= b(h_1 \cdot x_B)\#h_2(\eta \rightharpoonup x_H) = b(\eta(h_1)x_B)\#h_2(\eta \rightharpoonup x_H)\\
&= bx_B\#\eta(h_1)h_2(\eta \rightharpoonup x_H) = bx_B\#(h \leftharpoonup \eta)(\eta \rightharpoonup x_H)\\
&= bx_B\#(\eta \rightharpoonup (\eta^{-1} \rightharpoonup (h \leftharpoonup \eta)))(\eta \rightharpoonup x_H)\\
&\overset{(1)}{=} bx_B\#\eta \rightharpoonup ((\eta^{-1} \rightharpoonup (h \leftharpoonup \eta))x_H)\\
&= bx_B\#\eta \rightharpoonup ((\eta^{-1} \rightharpoonup (\eta(h_1)h_2))x_H)\\
&= bx_B\#\eta \rightharpoonup (\eta(h_1)h_2\eta^{-1}(h_3)x_H)\\
&= bx_B\#\eta \rightharpoonup (\eta(h_1)\eta^{-1}(h_3)h_2x_H)\\
&\overset{(2)}{=} bx_B\#\eta \rightharpoonup (\eta(h_1)\eta^{-1}(h_3)\varepsilon_H(h_2)x_H)\\
&= bx_B\#\eta \rightharpoonup (\eta(h_1)\eta^{-1}(h_2)x_H)\\
&= bx_B\#\eta \rightharpoonup (\eta^*\eta^{-1}(h)x_H)\\
&= \varepsilon_B(b)(x_B)\#\varepsilon_H(h)\eta \rightharpoonup (x_H)\\
&= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h)(x_B)\#\eta \rightharpoonup (x_H)\\
&= \varepsilon(b\#h)(x_B)\#\eta \rightharpoonup (x_H).
\end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale pois $\eta \rightharpoonup$ é morfismo de álgebras; (2) vale pois x_H é uma integral à esquerda de H. Portanto, $x_B\#(\eta \rightharpoonup x_H)$ é uma integral à esquerda de $B\#H$. $\square$

Recorda-se que $\lambda \in H^*$ é uma integral à esquerda de H^* se e somente se, para todo $h \in H$, $h_1\lambda(h_2) = \lambda(h)1_H$. Analogamente, $\lambda \in H^*$ é uma integral à direita de H^* se e somente se $\lambda(h_1)h_2 = \lambda(h)1_H$, para todo $h \in H$.

Proposição 2.2.9 *Seja (H, B) um par admissível, onde H é uma álgebra de Hopf.*

- (a) *Se $\lambda_B \in B^*$ e $\lambda_H \in H^*$ são integrais à direita de B^* e H^*, respectivamente, então $\lambda_B\#\lambda_H$, definida por $\lambda_B\#\lambda_H(b\#h) = \lambda_B(b)\lambda_H(h)$ para todo $b\#h \in B\#H$, é uma integral à direita de $(B\#H)^*$.*

- (b) *Suponha que $B\#H$ é uma álgebra de Hopf. Então $B\#H$ é cossemissimples se e somente se existem integrais à esquerda $\lambda_B \in B^*$ e $\lambda_H \in H^*$ satisfazendo, para todo $b \in B$, $\lambda_B(1_B) = 1_{\Bbbk} = \lambda_H(1_H)$ e $b_{-1}\lambda_B(b_0) = \lambda_B(b)1_H$. Neste caso, $\lambda_B\#\lambda_H$ é uma integral à esquerda de $(B\#H)^*$ satisfazendo $\lambda_B\#\lambda_H(1_B\#1_H) = 1_{\Bbbk}$.*

Demonstração.
(a) Definindo $\lambda_B\#\lambda_H : B\#H \to \Bbbk$ por $\lambda_B\#\lambda_H(b\#h) = \lambda_B(b)\lambda_H(h)$, é válido que

$$\lambda_B(b)1_H\#1_B = \rho(\lambda_B(b)1_B) = \rho(\lambda_B(b_1)b_2) = \lambda_B(b_1)(b_2)_{-1}\#(b_2)_0. \tag{2.16}$$

Assim, multiplicando $h \otimes 1_B$ em ambos os lados de (2.16), tem-se

$$\lambda_B(b_1)(b_2)_{-1}h\#(b_2)_0 = \lambda_B(b)h\#1_B.$$

Aplicando $\lambda_H \otimes id_B$ tem-se que

$$1_H\#\lambda_B(b_1)\lambda_H((b_2)_{-1}h)(b_2)_0 = 1_H\#\lambda_B(b)\lambda_H(h)1_B$$

e, consequentemente,

$$\lambda_B(b_1)\lambda_H((b_2)_{-1}h)(b_2)_0 = \lambda_B(b)\lambda_H(h)1_B.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
[(\lambda_B\#\lambda_H)(b\#h)_1](b\#h)_2 &= [(\lambda_B\#\lambda_H)(b_1\#(b_2)_{-1}h_1)]((b_2)_0\#h_2)\\
&= \lambda_B(b_1)\lambda_H((b_2)_{-1}h_1)(b_2)_0\#h_2\\
&= \lambda_B(b)\lambda_H(h_1)1_B\#h_2\\
&= \lambda_B(b)1_B\#\lambda_H(h_1)h_2\\
&= \lambda_B(b)1_B\#\lambda_H(h)1_H\\
&= \lambda_B(b)\lambda_H(h)(1_B\#1_H)\\
&= [(\lambda_b\#\lambda_H)(b\#h)](1_B\#1_H).
\end{aligned}$$

Desta forma, $\lambda_B\#\lambda_H$ é uma integral à direita de $(B\#H)^*$.
(b) $(\Rightarrow)$ Se $B\#H$ é cossemissimples, então, por [Mo, Teorema 2.4.6], tem-se que existe $\lambda : (B\#H)^* \to \Bbbk$ integral à esquerda de $(B\#H)^*$ tal que $\lambda(1_B\#1_H) = 1_\Bbbk$. Define-se $\lambda_B : B \to \Bbbk$ por $\lambda_B = \lambda \circ j_B$ e $\lambda_H : H \to \Bbbk$ por $\lambda_H = \lambda \circ i_H$. Então, para todo $h \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
h_1\lambda_H(h_2) &= \pi_H \circ i_H(h_1\lambda_H(h_2)) = \pi_H(i_H(h_1)\lambda_H(h_2))\\
&= \pi_H(1_B\#h_1\lambda_H(h_2)) = \pi_H(1_B\#h_1\lambda \circ i_H(h_2))\\
&= \pi_H(1_B\#h_1\lambda(1_B\#h_2)) \overset{(*)}{=} \pi_H(\lambda(1_B\#h)1_B\#1_H)\\
&= \lambda(1_B\#h)\pi_H(1_B\#1_H) = \lambda_H(h)1_H.
\end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ vale pois λ é uma integral à esquerda de $(B\#H)^*$. Logo, λ_H é uma integral à esquerda de H. Analogamente, identificando B como $B\#1_H$ como foi feito na demonstração da Proposição 2.2.6, segue que λ_B é uma integral à esquerda de B.

Desde que j_B e i_H são morfismos de álgebras, tem-se

$$\lambda_B(1_B) = \lambda \circ j_B(1_B) = \lambda(1_B\#1_H) = 1_\Bbbk \text{ e } \lambda_H(1_H) = \lambda \circ i_H(1_H) = \lambda(1_B\#1_H) = 1_\Bbbk.$$

Também, como λ é uma integral à esquerda de $(B\#H)^*$, então $(b_1\#(b_2)_{-1}h_2)\lambda((b_2)_0\#h_2) = \lambda(b\#h)(1_B\#1_H)$, para todo $b\#h \in B\#H$. Assim, para $b\#1_H \in B\#H$

$$b_1\#(b_2)_{-1}\lambda_B((b_2)_0) = \lambda_B(b)1_B\#1_H.$$

Aplicando $\varepsilon_B \otimes id_H$, na igualdade acima obtém-se, para todo $b \in B$

$$\varepsilon_B(b_1)(b_2)_{-1}\lambda_B((b_2)_0) = \lambda_B(b)\varepsilon_B(1_B)1_H.$$

Logo, por (2.2) segue que,

$$b_{-1}\lambda_B(b_0) = \lambda_B(b)1_H.$$

($\Leftarrow$) Sejam $\lambda_B \in B^*$ e $\lambda_H \in H^*$ integrais à esquerda, com $\lambda_B(1_B) = 1_{\Bbbk} = \lambda_H(1_H)$ e $b_{-1}\lambda_B(b_0) = \lambda_B(b)1_H$. Define-se $\lambda_B\#\lambda_H\colon (B\#H)^* \to \Bbbk$ por $(\lambda_B\#\lambda_H)(b\#h) = \lambda_B(b)\lambda_H(h)$. Então,

$$\begin{aligned}
(b\#h)_1(\lambda_B\#\lambda_H)(b\#h)_2 &= (b_1\#(b_2)_{-1}h_1)(\lambda_B\#\lambda_H)((b_2)_0\#h_2)\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}h_1\lambda_B((b_2)_0)\lambda_H(h_2)\\
&= b_1\#(b_2)_{-1}\lambda_B((b_2)_0)h_1\lambda_H(h_2)\\
&= b_1\#\lambda_B(b_2)1_H\lambda_H(h)1_H\\
&= \lambda_H(h)b_1\lambda_B(b_2)\#1_H\\
&= \lambda_H(h)\lambda_B(b)1_B\#1_H\\
&= [(\lambda_B\#\lambda_H)(b\#h)]1_B\#1_H.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_B\#\lambda_H$ é uma integral à esquerda de $(B\#H)^*$ e $(\lambda_B\#\lambda_H)(1_B\#1_H) = 1_{\Bbbk}$. Por [Mo, Teorema 2.4.6], $B\#H$ é cossemissimples. $\square$

Capítulo 3

Biálgebra com uma projeção numa álgebra de Hopf

No capítulo anterior foi visto que se (H, B) é um par admissível, então tem-se um diagrama $B\#H \underset{i_H}{\overset{\pi_H}{\rightleftarrows}} H$, onde π_H e i_H são morfismos de biálgebras e $\pi_H \circ i_H = id_H$. O propósito deste capítulo é apresentar uma recíproca para esta situação.

3.1 O Teorema 3.1.1

Nesta seção será provado um teorema que diz, entre outras coisas, como obter um par admissível a partir de um diagrama $A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$, onde A é uma biálgebra, H é uma álgebra de Hopf e os morfismos i e π são de biálgebras tal que $\pi \circ i = id_H$.

Teorema 3.1.1 *Sejam H uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ com antípoda S_H e A uma $\Bbbk$-biálgebra. Suponha que $A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$ é um diagrama de morfismos de biálgebras satisfazendo $\pi \circ i = id_H$. Considere $\Pi = id_A * (i \circ S_H \circ \pi)$, $B = \Pi(A)$ e $j : B \to A$ a inclusão natural. Então:*

(a) *B é uma subálgebra de A e tem uma única estrutura de coálgebra tal que Π é um morfismo de coálgebras;*

(b) *B é um H-submódulo à esquerda via ad_i (consequentemente B é uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$). E, B é um H-subcomódulo à esquerda via co_π (consequentemente B é uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$);*

(c) *com as estruturas de (b), (H, B) é um par admissível e $B \underset{j}{\overset{\Pi}{\leftrightarrows}} A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$ é um sistema admissível.*

(d) *O morfismo $f : B\#H \to A$, dado por $f(b\#h) = bi(h)$, com $b \in B$ e $h \in H$, é um isomorfismo de biálgebras.*

Demonstração. Note que $j \circ \Pi = \Pi$, visto que j é a inclusão natural. Então, para $a \in A$

$$\begin{aligned}(j \circ \Pi) * (i \circ \pi)(a) &= \Pi * (i \circ \pi)(a) = (id_A * (i \circ S_H \circ \pi)) * (i \circ \pi)(a)\\ &= id_A(a_1)(i \circ S_H \circ \pi)(a_2)(i \circ \pi)(a_3) = a_1 i(S_H(\pi(a_2))\pi(a_3))\\ &= a_1 i(S_H(\pi(a)_2)\pi(a)_3) = a_1 i(\varepsilon_H(\pi(a)_2)1_H)\\ &= a_1 \varepsilon_A(a_2) i(1_H) = a1_A\\ &= id_A(a).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(j \circ \Pi) * (i \circ \pi) = id_A. \tag{3.1}$$

Apresentam-se agora várias equações que serão úteis na demonstração do teorema. Para $a, a' \in A$, tem-se

$$\begin{aligned}\Pi(aa') &= id_A * (i \circ S_H \circ \pi)(aa') = a_1 a'_1 (i \circ S_H \circ \pi)(a_2 a'_2)\\ &\overset{(*)}{=} a_1 a'_1 (i \circ S_H \circ \pi)(a'_2)(i \circ S_H \circ \pi)(a_2)\\ &= a_1 \Pi(a')(i \circ S_H \circ \pi)(a_2).\end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ vale pois S_H é antimorfismo de álgebras. Logo, para $a, a' \in A$

$$\Pi(aa') = a_1 \Pi(a')(i \circ S_H \circ \pi)(a_2). \tag{3.2}$$

Além disso, para $a \in A$ tem-se que

$$\begin{aligned}\Delta(\Pi(a)) &= \Delta(a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_2)) = (a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_2))_1 \otimes (a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_2))_2\\ &\overset{(*)}{=} a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_4) \otimes a_2(i \circ S_H \circ \pi)(a_3)\\ &= a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_3) \otimes \Pi(a_2).\end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ vale pois S_H é antimorfismo de coálgebras. Logo, dado $a \in A$

$$\Delta(\Pi(a)) = a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_3) \otimes \Pi(a_2). \tag{3.3}$$

Para todo $h \in H$, tem-se

$$\begin{aligned}\Pi(i(h)) &= i(h)_1(i \circ S_H \circ \pi)(i(h)_2) = i(h_1)(i \circ S_H \circ \pi \circ i)(h_2)\\ &= i(h_1)(i \circ S_H(h_2)) = i(h_1 S_H(h_2))\\ &= i(\varepsilon_H(h)1_H)\\ &= \varepsilon_H(h)1_A.\end{aligned}$$

Desta forma, para $h \in H$

$$\Pi(i(h)) = \varepsilon_H(h)1_A. \tag{3.4}$$

Para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\pi \circ \Pi(a) &= \pi(a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_2)) = \pi(a_1)\pi((i \circ S_H \circ \pi)(a_2)) \\
&= \pi(a_1)(S_H \circ \pi)(a_2)) = \pi(a)_1(S_H(\pi(a)_2)) \\
&= \varepsilon_H(\pi(a))1_H \\
&= \varepsilon_A(a)1_H.
\end{aligned}$$

Ou seja, para $a \in A$

$$\pi \circ \Pi(a) = \varepsilon_A(a)1_H. \tag{3.5}$$

Por (3.2) e (3.4), deduz-se que

$$\begin{aligned}
\Pi(ai(h)) &= a_1\Pi(i(h))(i \circ s_H \circ \pi)(a_2) = a_1\varepsilon_H(h)(i \circ s_H \circ \pi)(a_2) \\
&= \varepsilon_H(h)a_1(i \circ s_H \circ \pi)(a_2) \\
&= \varepsilon_H(h)\Pi(a).
\end{aligned}$$

Então, para quaisquer $h \in H$ e $a \in A$ tem-se

$$\Pi(ai(h)) = \varepsilon_H(h)\Pi(a). \tag{3.6}$$

Além disso, dado $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\Pi(a) = b$. Daí, de (3.3) e (3.5) segue que

$$\begin{aligned}
b_1 \otimes \pi(b_2) &= \Pi(a)_1 \otimes \pi(\Pi(a)_2) = a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_3) \otimes \pi(\Pi(a_2)) \\
&= a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_3) \otimes \varepsilon_A(a_2)1_H = a_1(i \circ S_H \circ \pi)(\varepsilon_A(a_2)a_3) \otimes 1_H \\
&= a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_2) \otimes 1_H = \Pi(a) \otimes 1_H \\
&= b \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Portanto, para $b \in B$

$$b_1 \otimes \pi(b_2) = b \otimes 1_H. \tag{3.7}$$

Usando as equações (3.1) e (3.7), obtém-se que

$$b = [(j \circ \Pi) * (i \circ \pi)](b) = \Pi(b_1)i(\pi(b_2)) = \Pi(b)i(1_H) = \Pi(b).$$

Assim, para todo $a \in A$, $\Pi \circ \Pi(a) = \Pi(a)$. Além disso, $(\Pi \circ j)(b) = \Pi(j(b)) = \Pi(b) = b$, para todo $b \in B$. Então $\Pi \circ j = id_B$. Também, seja $a \in A$. Se $a_1 \otimes \pi(a_2) = a \otimes 1_H$, então segue de (3.1) que $a = \Pi(a_1)i(\pi(a_2)) = \Pi(a)i(1_H) = \Pi(a)$. Logo, $a \in B$. Portanto, $B = \{a \in A;\ a_1 \otimes \pi(a_2) = a \otimes 1_H\}$. Ou seja, $B = \{a \in A;\ (id \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1_H\}$, onde abaixo é provado que é uma subálgebra de A na qual chama-se coinvariante à esquerda, denotada por $A^{co\pi}$.

Observa-se que B é uma subálgebra de A. De fato, $\Pi(1_A) = 1_A(i \circ S_H \circ \pi)(1_A) = 1_A$. Logo, $1_A \in B$. Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
((id \otimes \pi) \circ \Delta)(bb') &= ((id \otimes \pi)(b_1b'_1 \otimes b_2b'_2) = b_1b'_1 \otimes \pi(b_2b'_2) \\
&= b_1b'_1 \otimes \pi(b_2)\pi(b'_2) = (b_1 \otimes \pi(b_2))(b'_1 \otimes \pi(b'_2)) \\
&= (b \otimes 1_H)(b' \otimes 1_H) \\
&= bb' \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Assim, $bb' \in B$ e consequentemente, B é uma subálgebra de A.

Como ε_H é um morfismo de coálgebras, por [DNR, Proposição 1.4.9] segue que $Ker(\varepsilon_H)$, denotado por H^+, é um coideal da álgebra de Hopf H. Além disso, como i é morfismo de biálgebras, é fácil ver que $Ai(H^+)$ é um coideal de A. Desta forma, dado $ai(h) \in Ai(H^+)$, com $a \in A$ e $h \in H^+$, tem-se $\Pi(ai(h)) = \Pi(a)\varepsilon_H(h) = \Pi(a)0 = 0$. Ou seja, $Ai(H^+) \subset Ker(\Pi)$. Por outro lado, se $\Pi(a) = 0$, então $\Pi(a_1)\varepsilon_A(a_2)1_A = \Pi(a_1\varepsilon_A(a_2)) = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
a &= id_A(a) - 0 \overset{(3.1)}{=} [(j \circ \Pi) * (i \circ \pi)](a) - 0 \\
&= \Pi(a_1)i(\pi(a_2)) - \Pi(a_1)\varepsilon_A(a_2)1_A = \Pi(a_1)[i(\pi(a_2)) - \varepsilon_A(a_2)1_A] \\
&= \Pi(a_1)[i(\pi(a_2)) - \varepsilon_A(a_2)i(1_H)] = \Pi(a_1)[i(\pi(a_2)) - i(\varepsilon_A(a_2)1_H)] \\
&= \Pi(a_1)[i(\pi(a_2) - \varepsilon_A(a_2)1_H)].
\end{aligned}$$

Logo, $a \in Ai(H^+)$, pois $\pi(a_2) - \varepsilon_A(a_2)1_H \in H^+$. Assim, segue que $Ai(H^+) = Ker(\Pi)$. Ou seja, $Ker(\Pi)$ é um coideal de A. Observa-se que o morfismo $\Bbbk$-linear $\Pi : A \to \Pi(A) = B$ induz um isomorfismo $\Bbbk$-linear $A/Ker(\Pi) \simeq B$. Portanto, por [DNR, Teorema 1.4.10], segue que B tem uma única estrutura de coálgebra, que é dada por $\delta : B \to B \otimes B$, $\delta(\Pi(a)) = \Pi(a_1) \otimes \Pi(a_2)$ tal que Π é um morfismo de coálgebras e $\varepsilon_B = \varepsilon_A|_B$.

Considerando $h \cdot a = ad_i(h \otimes a) = i(h_1)a(i \circ S_H)(h_2)$, B é um H-submódulo de A. De fato,

$$\begin{aligned}
h \cdot \Pi(a') &= i(h_1)\Pi(a')(i \circ S_H)(h_2) = i(h_1)a'_1(i \circ S_H \circ \pi)(a'_2)(i \circ S_H \circ \pi \circ i)(h_2) \\
&= i(h_1)a'_1(i \circ S_H \circ \pi)(i(h_2)a'_2) = (i(h)a')_1(i \circ S_H \circ \pi)(i(h)a')_2 \\
&= \Pi(i(h)a').
\end{aligned}$$

Ou seja, para $h \in H$ e $a \in A$

$$h \cdot \Pi(a') = \Pi(i(h)a'). \tag{3.8}$$

Além disso, B é uma H-módulo à direita considerando a estrutura trivial. Desde que

$$\begin{aligned}\tau_{Br} \circ (ad_i \otimes id_H)(h \otimes b \otimes h') &= \tau_{Br}(h \cdot b \otimes h') = (h \cdot b)\varepsilon_H(h') \\ &= ad_i(h \otimes b)\varepsilon_H(h') = ad_i(h \otimes b\varepsilon_H(h')) \\ &= ad_i(id_H \otimes \tau_{Br})(h \otimes b \otimes h'),\end{aligned}$$

tem-se que B é um H-bimódulo.

Como A é um H-módulo álgebra via ad_i (ver Exemplo 1.4.6), tem-se que B é um H-módulo álgebra.

Observa-se também, por (3.8), que para $h \in H$ e $a \in A$ tem-se

$$\begin{aligned}\delta(h \cdot \Pi(a)) &= \delta(\Pi(i(h)a)) = \Pi(i(h_1)a_1) \otimes \Pi(i(h_2)a_2) \\ &= h_1 \cdot \Pi(a_1) \otimes h_2 \cdot \Pi(a_2).\end{aligned}$$

Mais ainda, para $h \in H$ e $b \in B$ tem-se

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(h \cdot b) &= \varepsilon_B(h \cdot \Pi(a)) = \varepsilon_B \circ \Pi(i(h)a) \\ &= \varepsilon_A(i(h)a) = \varepsilon_A(i(h))\varepsilon_A(a) \\ &= \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b).\end{aligned}$$

Logo, B também é um H-módulo coálgebra.

Tem-se que A é um H-comódulo à esquerda via $co_\pi(a) = \pi(a_1)S_H(\pi(a_3)) \otimes a_2$ (ver Exemplo 1.4.7). Por (3.3) tem-se que $\Delta(b) = \Delta(\Pi(a)) = a_1(i \circ S_H \circ \pi)(a_3) \otimes \Pi(a_2)$, para todo $b = \Pi(a) \in B$. Logo $\Delta(B) \subseteq A \otimes B$. Além disso, se $b \in B$ então $b_1 \otimes \pi(b_2) = b \otimes 1_H$. Aplicando $\varepsilon_B \otimes id_H$ obtém-se que $\pi(b) = \varepsilon_B(b)1_H$. Portanto,

$$\begin{aligned}co_\pi(b) &= \pi(b_1)(S_H \circ \pi)(b_3) \otimes b_2 = \pi(b_1)(S_H(\varepsilon_B(b_3)1_H) \otimes b_2 \\ &= \pi(b_1)S_H(1_H) \otimes b_2\varepsilon_B(b_3) \\ &= \pi(b_1) \otimes b_2.\end{aligned}$$

Assim, B é um H-subcomódulo de A. Mais ainda, B é um H-comódulo álgebra.

Nota-se que B é um H-comódulo à direita com coação trivial. E é válido que

$$\begin{aligned}(co_\pi \otimes id_H) \circ \rho_{Br}(b) &= (co_\pi \otimes id_H)(b \otimes 1_H) = \pi(b_1) \otimes b_2 \otimes 1_H \\ &= (id_H \otimes \rho_{Br})(\pi(b_1) \otimes b_2) \\ &= (id_H \otimes \rho_{Br})co_\pi(b).\end{aligned}$$

Então, B é um H-bicomódulo.

Agora, prova-se que B é um H-comódulo coálgebra. Já tem-se que B é um H-comódulo. Além disso, nota-se que, para $b \in B$

$$\begin{aligned}(id_H \otimes \varepsilon_B)(co_\pi(b)) &= (id_H \otimes \varepsilon_B)(\pi(b_1) \otimes b_2) = \pi(b_1) \otimes \varepsilon_B(b_2) \\ &= \pi(b) \otimes 1_{\Bbbk} = \varepsilon_B(b)1_H \otimes 1_{\Bbbk} \\ &= \rho_{\Bbbk}(\varepsilon_B(b)).\end{aligned}$$

Vale também, para todo $b = \Pi(a) \in B$

$$\begin{aligned}
(id_H \otimes \delta)co_\pi(b) &= (id_H \otimes \delta)co_\pi(\Pi(a)) \\
&= (id_H \otimes \delta)(\pi(\Pi(a_1)) \otimes \Pi(a_2)) \\
&= \pi(\Pi(a_1)) \otimes \delta(\Pi(a_2)) \\
&\overset{(3.5)}{=} \varepsilon_A(a_1)1_H \otimes \delta(\Pi(a_2)) \\
&= 1_H \otimes \delta(\Pi(\varepsilon_A(a_1)a_2)) \\
&= 1_H \otimes \delta(\Pi(a)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, ainda para $b = \Pi(a) \in B$,

$$\begin{aligned}
co_{\pi_{B\otimes B}}(\delta(b)) &= co_{\pi_{B\otimes B}}(\delta(\Pi(a))) = co_{\pi_{B\otimes B}}(\Pi(a_1) \otimes \Pi(a_2)) \\
&= (\Pi(a_1)_{-1})(\Pi(a_2)_{-1}) \otimes (\Pi(a_1)_0) \otimes (\Pi(a_2)_0) \\
&= \pi(\Pi((a_1)_1))\pi(\Pi((a_2)_1)) \otimes \Pi((a_1)_2) \otimes \Pi((a_2)_2) \\
&\overset{(3.5)}{=} \varepsilon_A((a_1)_1)1_H\varepsilon_A((a_2)_1)1_H \otimes \Pi((a_1)_2) \otimes \Pi((a_2)_2) \\
&= 1_H \otimes \Pi(\varepsilon_A((a_1)_1)(a_1)_2) \otimes \Pi(\varepsilon_A((a_2)_1)(a_2)_2) \\
&= 1_H \otimes \Pi(a_1) \otimes \Pi(a_2) \\
&= 1_H \otimes \delta(\Pi(a)).
\end{aligned}$$

Logo, $(id_H \otimes \delta)co_\pi(b) = co_{\pi_{B\otimes B}}(\delta(b))$, para todo $b \in B$. Assim, tem-se que B é um H-comódulo coálgebra.

Para que (H, B) seja um par admissível, resta verificar os itens (i) e (ii) do Teorema 2.1.9 parte (b). Mas, para $b = \Pi(b) \in B$, observa-se que $\delta(b) = \Pi(b_1) \otimes \Pi(b_2) = \Pi(b_1) \otimes b_2$. Assim, para $b, b' \in B$ tem-se

$$\begin{aligned}
\delta(bb') = \Pi(b_1b'_1) \otimes b_2b'_2 &\overset{(3.2)}{=} (b_1)_1\Pi(b'_1)(i \circ S_H \circ \pi)((b_1)_2) \otimes b_2b'_2 \\
&= b_1\Pi(b'_1)(i \circ S_H \circ \pi)(b_2) \otimes b_3b'_2 \\
&= ((j \circ \Pi) * (i \circ \pi))(b_1)\Pi(b'_1)(i \circ S_H \circ \pi)(b_2) \otimes b_3b'_2 \\
&= \Pi(b_1)(i \circ \pi)(b_2)\Pi(b'_1)(i \circ S_H \circ \pi)(b_3) \otimes b_4b'_2 \\
&= \Pi(b_1)i(\pi(b_2)_1)\Pi(b'_1)(i \circ S_H)(\pi(b_2)_2) \otimes b_3b'_2 \\
&= \Pi(b_1)(ad_i(\pi(b_2) \otimes \Pi(b'_1))) \otimes b_3b'_2 \\
&= \Pi(b_1)(\pi(b_2) \cdot \Pi(b'_1)) \otimes b_3b'_2.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\delta(bb') = b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0b'_2$. Portanto, vale (i).

Para mostrar (ii) observa-se que para $h \in H$e $a \in A$

$$\begin{aligned}
(h \cdot a)_1 \otimes (h \cdot a)_2 &= \Delta(h \cdot a) = \Delta(i(h_1)a(i \circ S_H)(h_2)) \\
&= (i(h_1)a(i \circ S_H)(h_2))_1 \otimes (i(h_1)ai \circ S_H(h_2))_2 \\
&= i((h_1)_1)a_1(i \circ S_H)((h_2)_2) \otimes i((h_1)_2)a_2(i \circ S_H)((h_2)_1) \\
&= i(h_1)a_1(i \circ S_H)(h_3) \otimes i((h_2)_1)a_2(i \circ S_H)((h_2)_2) \\
&= i(h_1)a_1(i \circ S_H)(h_3) \otimes h_2 \cdot a_2 \\
&= h_1 b_{-1} \otimes h_2 \cdot b_0.
\end{aligned}$$

Assim, para $b \in B$ tem-se que

$$\begin{aligned}
(h_1 \cdot b)_{-1} h_2 \otimes (h_1 \cdot b)_0 &= \pi((h_1 \cdot b)_1)h_2 \otimes (h_1 \cdot b)_2 = \pi(h_1 \cdot b_1)h_3 \otimes (h_2 \cdot b_2) \\
&= \pi(i(h_1)b_1(i \circ S_H)(h_3))h_4 \otimes (h_2 \cdot b_2) \\
&= \pi(i(h_1))\pi(b_1)\pi \circ i \circ S_H)(h_3))h_4 \otimes (h_2 \cdot b_2) \\
&= h_1 \pi(b_1) S_H(h_3) h_4 \otimes (h_2 \cdot b_2) \\
&= h_1 \pi(b_1) \varepsilon_H(h_3) 1_H \otimes (h_2 \cdot b_2) \\
&= h_1 \pi(b_1) \otimes (h_2 \cdot b_2).
\end{aligned}$$

Ou seja, (ii) também vale. Portanto tem-se que (H, B) é um par admissível.

Para finalizar a prova de (c), mostra-se que $B \underset{j}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$ é um sistema admissível.

Tem-se que $\pi \circ i = id_H$ e $\Pi(j(b)) = \pi(b) = b = id_B(b)$ para todo $b \in B$. Portanto o item (i) da Definição 2.2.1 é satisfeito. Também, por hipótese, i e π são morfismos de biálgebras. O morfismo j satisfaz $j(1_B) = 1_B = 1_A$. Do fato de B ser uma subálgebra, também vale $j(bb') = bb' = j(b)j(b')$. Então j é um morfismo de álgebras. Além disso, já sabe-se que Π é um morfismo de coálgebras. Assim o item (ii) da Definição 2.2.1 também é satisfeito.

Observa-se que Π é um morfismo de H-módulos à direita, pois por (3.6) para todo $a \in A$ e $h \in H$

$$\Pi \circ \tau_{Ar}(a \otimes h) = \Pi(ai(h)) = \Pi(a)\varepsilon_H(h) = \tau_{Br}(\Pi(a) \otimes h) = \tau_{Br}(\Pi \otimes id_H)(a \otimes h).$$

Além disso, Π é um morfismo de H-módulos à esquerda. De fato, por (3.6) e por B ser um H-módulo à esquerda via ad_i, tem-se para todo $h \in H$ e $a \in A$

$$\begin{aligned}
\Pi \circ ad_i(h \otimes a) &= \Pi(i(h_1)ai(S_H(h_2))) = h_1 \cdot (\Pi(a)\varepsilon_H(S_H(h_2))) \\
&= h_1 \cdot (\Pi(a)\varepsilon_H(h_2)) = h \cdot \Pi(a) \\
&= ad_i(h \otimes \Pi(a)) \\
&= ad_i \circ (id_H \otimes \Pi)(h \otimes a).
\end{aligned}$$

Logo, Π é um morfismo de H-bimódulos. E assim, o item (iii) da Definição 2.2.1 também é válido.

Para o item (iv) da Definição 2.2.1, observa-se que $j(B) = B$. Logo, como B é um sub-H-bicomódulo de A, $j(B)$ também o é. Além disso, $\Pi|_{j(B)} = \Pi|_B$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda, pois para $b \in B$

$$\begin{aligned}(co_\pi \circ \Pi)(b) &= co_\pi(b) = \pi(b_1) \otimes b_2 = \pi(b_1) \otimes \Pi(b_2) \\ &= (id_H \otimes \Pi)(\pi(b_1) \otimes b_2) \\ &= (id_H \otimes \Pi)co_\pi(b).\end{aligned}$$

Mais ainda, $\Pi|_B$ é um morfismo de H-comódulos à direita. De fato, se $b = \Pi(a)$ para algum $a \in A$, então

$$\begin{aligned}(\Pi \otimes id_H) \circ \rho_{Ar}(b) &= (\Pi \otimes id_H) \circ \rho_{Ar}(\Pi(a)) = (\Pi \otimes id_H)(\Pi(a)_1 \otimes \pi(\Pi(a)_2)) \\ &\overset{(3.7)}{=} (\Pi \otimes id_H)(\Pi(a) \otimes 1_H = \Pi(\Pi(a)) \otimes 1_H \\ &= \rho_{Br}(\Pi(\Pi(a))) \\ &= \rho_{Br}(\Pi(b)).\end{aligned}$$

Logo, $\Pi|_B$ é um morfismo de H-comódulos. Portanto, o item (iv) da Definição 2.2.1 é satisfeito. Desde que o item (v) corresponde à (3.1), segue que $B \underset{j}{\overset{\Pi}{\leftrightarrows}} A \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} H$ é um sistema admissível.

Assim, os iteis (b) e (c) do teorema estão demonstrados. O item (a) do teorema também está demonstrado pois, B é uma subálgebra de A e além disso, possui uma estrutura de coálgebra.

Para mostrar o item (d) observa-se que, pelo item (c), tem-se um sistema admissível. Então, pelo Teorema 2.2.3 item (a), existe $f : B\#H \to A$, $f(b\#h) = j(b)i(h)$, o qual é um isomorfismo de biálgebras. Como $j(b) = b$, para todo $b \in B$, então $f(b\#h) = bi(h)$ é isomorfismo de biálgebras. Assim, (d) é válido. $\square$

3.2 Algumas consequências

O conjunto B descrito no Teorema 3.1.1 não necessariamente é uma subcoálgebra. No entanto, sob algumas condições especiais, pode-se garantir que B é subcoálgebra de A.

Em toda esta seção serão usadas as notações da Seção 3.1.

Corolário 3.2.1 *As afirmações são equivalentes:*

(a) *B é uma subcoálgebra de A;*

(b) *O morfismo j é de coálgebras;*

(*c*) *A coação* co_π *é trivial quando restrito a* B*. Em particular,* $A = B\#H$ *possui a estrutura de coálgebra no produto tensorial* $B\#H$*.*

Demonstração.
$(b) \Rightarrow (a)$ Se j é morfismo de coálgebras, então $\Delta \circ j = (j \otimes j) \circ \delta$. Logo, para $b = \Pi(a) \in B$

$$\begin{aligned} \Delta(b) &= \Delta(j(b)) = (j \otimes j)(\delta(b)) = (j \otimes j)(\Pi(a_1) \otimes \Pi(a_2)) \\ &= j(\Pi(a_1)) \otimes j(\Pi(a_2)) \\ &= \Pi(a_1) \otimes \Pi(a_2). \end{aligned}$$

Desde que $B = \Pi(A)$, segue que $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$.
$(a) \Rightarrow (c)$ Sabe-se que $co_\pi(b) = \pi(b_1) \otimes b_2$, $b \in B$. Como $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$ e $b = \Pi(b)$ para todo $b \in B$, tem-se

$$co_\pi(b) = \pi(\Pi(b_1)) \otimes b_2 \overset{(3.5)}{=} \varepsilon_B(b_1)1_H \otimes b_2 = 1_H \otimes b.$$

Ou seja, co_π é trivial quando restrito a B.
$(c) \Rightarrow (b)$ Pelo item (d) do Teorema 3.1.1, $A \simeq B\#H$. Usando este isomorfismo, tem-se que para $b \in B$

$$\begin{aligned} \Delta_{B\#H}(j(b)) &= \Delta_{B\#H}(b\#1_H) = b_1\#(b_2)_{-1}1_H \otimes (b_2)_0\#1_H \\ &= b_1\#1_H \otimes b_2\#1_H = j(b_1) \otimes j(b_2) \\ &= (j \otimes j) \circ \delta(b). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 3.2.2 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *O morfismo* Π *é de álgebras;*

(*b*) *A ação* ad_i *é trivial em* B*.*

Demonstração.
$(a) \Rightarrow (b)$ Sejam $h \in H$ e $b \in B$. Por (3.4) e (3.8) tem-se

$$h \cdot b = h \cdot \Pi(b) = \Pi(i(h)b) = \Pi(i(h))\Pi(b) = \varepsilon_H(h)1_A b = \varepsilon_H(h)b.$$

Ou seja, ad_i é trivial em B.
$(b) \Rightarrow (a)$ Usando o isomorfismo do Teorema 3.1.1 item (d), dado $a \in A$, existem $b \in B$ e

$h \in H$ tais que $a = bi(h)$. Assim, se $a' \in A$ então

$$\begin{aligned}
\Pi(aa') &= \Pi(bi(h)a') \overset{(3.2)}{=} b_1\Pi(i(h)a')(i \circ S_H \circ \pi)(b_2) \\
&= b_1\varepsilon_H(h)\Pi(a')(i \circ S_H \circ \pi)(b_2) \\
&= \varepsilon_H(h)b_1\Pi(a')(i \circ S_H \circ \pi)(b_2) \\
&= \varepsilon_H(h)\Pi(b\Pi(a')) = \varepsilon_H(h)b\Pi(a') \\
&= \varepsilon_H(h)\Pi(b)\Pi(a') \overset{(3.6)}{=} \Pi(bi(h))\Pi(a') \\
&= \Pi(a)\Pi(a').
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

A categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld

Neste capítulo apresenta-se algumas definições básicas da teoria de categorias e trabalha-se particularmente com a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. O principal objetivo é definir biálgebras na categoria Yetter-Drinfeld. Por este motivo, não aprofunda-se tanto os conceitos aqui apresentados. Um estudo mais minucioso dos assuntos aqui tratados pode ser visto em [AS],[K] e [Ma].

4.1 Categorias

O conceito de categoria introduzido por Eilenberg e Mac Lane, em 1945, para fornecer um significado melhor sobre propriedades de isomorfismo, é hoje uma parte importante da matemática. Este conceito envolve dois ingredientes: objetos e flechas. Denotam-se os objetos da categoria $\mathcal{C}$ por letras maiúsculas ($A \in \mathcal{C}$) e as flechas por letras minúsculas ($f \in \mathcal{C},\ f : A \to B$, onde $A, B \in \mathcal{C}$). Também, A chama-se domínio e B contradomínio.

Definição 4.1.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de objetos, flechas e composições entre os conjuntos de flechas que satisfazem:*

- *Se $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então necessariamente a composição $g \circ f : A \to C$ é uma flecha de $\mathcal{C}$.*
- *Se os pares (A, B) e (C, D) são distintos, então as flechas $f : A \to B$ e $g : C \to D$ também são.*
- *Se $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, ou seja, a composição é associativa;*
- *Para todo $A \in \mathcal{C}$, existe uma única flecha, denotada por 1_A, tal que $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$, para quaisquer $f : A \to B$ e $g : B \to A$.*

Abaixo, apresenta-se alguns exemplos usuais de categorias.

Exemplo 4.1.2

1. ***Categoria dos conjuntos - Sets:*** *os objetos são conjuntos, as flechas são as funções entre conjuntos, a composição e a associatividade são as usuais e a unidade é a função identidade.*

2. ***Categoria dos grupos - Grp:*** *os objetos são grupos, as flechas são os homomorfismos de grupos, a composição, a associatividade e a unidade são as mesmas de* ***Sets****.*

3. ***Categoria dos*** H***-módulos -*** $_H\mathcal{M}$***:*** *os objetos são* H*-módulos, as flechas são os morfismos de* H*-módulos, a composição, a associatividade e a unidade são as mesmas de* ***Sets****.*

4. ***Categoria dos*** H***-comódulos -*** $^H\mathcal{M}$***:*** *os objetos são* H*-comódulos, as flechas são os morfismos de* H*-comódulos, a composição, a associatividade e a unidade são as mesmas de* ***Sets****.*

5. ***Categoria vazia:*** *não possui objetos, nem flechas.*

6. ***Categoria unitária:*** *possui somente um objeto e a flecha identidade.*

7. ***Categoria produto:*** *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *categorias. Então,* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ *é uma categoria cujos objetos são os pares* (C, D)*, onde* $C \in \mathcal{C}$*,* $D \in \mathcal{D}$ *e as flechas são os pares* (f, g) *com* $f \in \mathcal{C}$ *e* $g \in \mathcal{D}$*.*

8. *Existe uma categoria com somente dois objetos* $\{A, B\}$ *e somente uma flecha distinta de* 1_A *e* 1_B*, a saber* $f : A \to B$*.*

9. *Existe uma categoria com três objetos* A, B *e* C*, cujas as flechas existentes são dadas pelo diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[loop right] \arrow[dl, "g"] \\ & C \arrow[ul, "h"] \arrow[loop below] & \end{tikzcd}$$

Aqui, $\begin{tikzcd} A \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ *indica a flecha* 1_A*.*

4.2 Funtores

Na teoria de categorias, os funtores fazem o papel dos morfismos entre categorias, ou seja, uma maneira de relacionar objetos e flechas entre categorias.

Definição 4.2.1 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de:*

- *Uma função que associa a cada $C \in \mathcal{C}$ um único objeto $F(C) \in \mathcal{D}$;*
- *Funções entre os conjuntos de flechas tal que, para cada flecha $f : C \to D$ de $\mathcal{C}$, existe uma única flecha $F(f) : F(C) \to F(D)$ de $\mathcal{D}$. Além disso, devem valer os seguintes axiomas:*
  - *Se $g \circ f$ é uma composição de flechas em $\mathcal{C}$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;*
  - *$F(1_A) = 1_{F(A)}$, para todo $A \in \mathcal{C}$.*

Exemplo 4.2.2

1. *Pode-se construir um funtor de **Grp** em **Sets** de tal forma que os objetos de **Grp** são vistos como conjuntos em **Sets** e as flechas de **Grp** são vistos como funções em **Sets**.*

2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O funtor diagonal, que vai de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, tem como morfismos de objetos e flechas $A \mapsto A \times A$, para todo $A \in \mathcal{C}$ e $f \mapsto f \times f$, para toda $f \in \mathcal{C}$, respectivamente.*

3. *Seja $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ uma categoria, onde $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias. Pode-se definir o funtor projeção sobre $\mathcal{C}$, que toma objetos $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e leva em $A \in \mathcal{C}$, assim como leva morfismos $(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ em $f \in \mathcal{C}$.*

4. *Ainda na categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ podemos definir o funtor $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$, onde os morfismos de objetos e flechas são dados, respectivamente, por $(C, D) \mapsto (D, C)$ e $(f, g) \mapsto (g, f)$.*

Definição 4.2.3 *Considere F e G funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Uma transformação natural $\eta : F \to G$ é uma família $\{\eta_A : F(A) \to G(A), A \in \mathcal{C}\}$ de morfismos em $\mathcal{D}$ tal que para quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$ e uma flecha em $\mathcal{C}$, $f : A \to B$, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Além disso, se η_A é um isomorfismo para todo $A \in \mathcal{C}$, então η é chamado de isomorfismo natural.

4.3 Categorias monoidais

Seguindo com as definições na direção de apresentar a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, será apresentada agora a noção de categoria monoidal.

Definição 4.3.1 *Um categoria monoidal é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbb{1})$ *onde:*

- $\mathcal{C}$ *é uma categoria e* $\mathbb{1}$ *é um objeto de* $\mathcal{C}$ *chamado unidade;*
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor da categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *em* $\mathcal{C}$*;*
- *as aplicações* $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbb{1} \to X$ *e* $l_X : \mathbb{1} \otimes X \to X$ *são isomorfismos naturais que satisfazem os seguintes diagramas (isto é, os diagramas são comutativos)*

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

chamados, respectivamente, de axioma do pentágono e do triângulo.

Observação 4.3.2 *Nota-se que a é uma transformação natural entre os seguintes funtores* $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y, Z) \mapsto (X \otimes Y) \otimes Z$ *e* $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y, Z) \mapsto X \otimes (Y \otimes Z)$. *Analogamente, há funtores implícitos nas definições de* r *e* l.

Observação 4.3.3 *Às vezes, a categoria monoidal é denotada por* $(\mathcal{C}, \otimes, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, \mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ *para enfatizar que os isomorfismos e o objeto estão relacionados com a categoria* $\mathcal{C}$.

Observação 4.3.4 *Uma categoria monoidal na qual os isomorfismos naturais* a, l *e* r *são a identidade é chamada categoria monoidal estrita.*

Exemplo 4.3.5

1. *A categoria* ***Sets*** *é monoidal, onde o produto tensorial é o produto cartesiano, a unidade é um conjunto unitário qualquer, a associatividade é canônica e os isomorfismos* r_X *e* l_X *são as projeções sobre* X*, para todo* $X \in \mathcal{C}$ ($r_X : X \otimes \mathbb{1} \to X, (x, \mathbb{1}) \mapsto x$ *e* $l_X : \mathbb{1} \otimes X \to X, (\mathbb{1}, x) \mapsto x$).

2. *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbb{1})$ uma categoria monoidal. Define-se, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$: $X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X$, $a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$, $r^{rev}_X = l_X$, $l^{rev}_X = r_X$ e $\mathbb{1}^{rev} = \mathbb{1}$. Assim, a categoria $(\mathcal{C}, \otimes^{rev}, a^{rev}, l^{rev}, r^{rev}, \mathbb{1}^{rev})$ também é monoidal.*

3. *Seja H uma biálgebra sobre $\mathbb{k}$. A categoria ${}_H\mathcal{M}$ com a estrutura de H-módulo dada por $h\cdot(x\otimes y) = h_1\cdot x \otimes h_2 \cdot y$ (Observação 1.1.14) é monoidal, onde o produto tensorial $\otimes_H :{}_H \mathcal{M} \times_H \mathcal{M} \to {}_H\mathcal{M}$ é o produto tensorial sobre o corpo $\mathbb{k}$, a associatividade é dada por $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$, o objeto unidade é o corpo $\mathbb{k}$, e os morfismos r_X e l_X são os isomorfismos canônicos.*

4. *Analogamente ao exemplo acima, se H é uma biálgebra, a categoria ${}^H\mathcal{M}$ com a estrutura de H-comódulo dada por $\rho(x\otimes y) = x_{-1}y_{-1} \otimes x_0 \otimes y_0$ (Observação 1.1.14) é monoidal com o mesmo produto tensorial e isomorfismos naturais do exemplo acima.*

4.4 Categorias monoidais trançadas

Uma categoria monoidal trançada é uma categoria monoidal munida de uma transformação natural especial, chamada de trança.

Definição 4.4.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Dizemos que $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ é uma pré-trança para $\mathcal{C}$, se c é uma transformação natural que satisfaz, para todos $U, V, W \in \mathcal{C}$, a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
 & (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[dl, "c_{U,V}\otimes id_W"'] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[dr, "c_{U,V\otimes W}"] & \\
(V \otimes U) \otimes W \arrow[dr, "a_{V,U,W}"'] & & & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dl, "a_{V,W,U}"] \\
 & V \otimes (U \otimes W) \arrow[r, "id_V \otimes c_{U,W}"'] & V \otimes (W \otimes U) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "id_U \otimes c_{V,W}"] \arrow[dl, "a^{-1}_{U,V,W}"'] & U \otimes (W \otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{U,W,V}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[dr, "c_{U\otimes V,W}"'] & & & (U \otimes W) \otimes V \arrow[dl, "c_{U,W}\otimes id_V"] \\
 & W \otimes (U \otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{W,U,V}"'] & (W \otimes U) \otimes V &
\end{tikzcd}$$

Definição 4.4.2 *Chama-se trança a uma transformação natural que cumpre a definição de pré-trança e, além disso, é um isomorfismo natural.*

Observação 4.4.3 *Os diagramas acima são traduzidos pelas equações*

$$a_{V,W,U} \circ c_{U,V\otimes W} \circ a_{U,V,W} = (id_V \otimes c_{U,W}) \circ a_{V,U,W} \circ (c_{U,V} \otimes id_W), \tag{4.1}$$

$$a^{-1}_{W,U,V} \circ c_{U\otimes V,W} \circ a^{-1}_{U,V,W} = (c_{U,W} \otimes id_V) \circ a^{-1}_{U,W,V} \circ (id_U \otimes c_{V,W}). \tag{4.2}$$

Observação 4.4.4 *O fato de que a trança c é uma transformação natural diz que se $V, V', W, W' \in \mathcal{C}$, $f : V \to V'$ e $g : W \to W'$, então o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"] \arrow[d, "f\otimes g"] & W \otimes V \arrow[d, "g\otimes f"] \\ V' \otimes W' \arrow[r, "c_{V',W'}"'] & W' \otimes V' \end{tikzcd}$$

Definição 4.4.5 *Uma categoria monoidal pré-trançada é um par $(\mathcal{C}, c)$ onde $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal e c é uma pré-trança para $\mathcal{C}$. Analogamente, uma categoria monoidal trançada é um par $(\mathcal{C}, c)$ onde $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal e c é uma trança para $\mathcal{C}$.*

Exemplo 4.4.6 *A categoria **Sets**, com a trança dada por $c_{U,V}(u, v) = (v, u)$ é uma categoria monoidal trançada.*

Na Seção 4.6 exibe-se um exemplo de uma categoria trançada onde a trança não é a trivial (*twist*).

4.5 Módulos de Yetter-Drinfeld

Nesta seção define-se e exemplicafica-se os módulos de Yetter-Drinfeld.

Definição 4.5.1 *Seja H uma biálgebra. Dize-se que M é um módulo de Yetter-Drinfeld (à esquerda) sobre H se M é um H-módulo (à esquerda) e um H-comódulo (à esquerda) e vale, para todo $h \in H$ e $m \in M$, a seguinte condição de compatibilidade:*

$$h_1 m_{-1} \otimes h_2 \cdot m_0 = (h_1 \cdot m)_{-1} h_2 \otimes (h_1 \cdot m)_0. \tag{4.3}$$

Exemplo 4.5.2 *Seja H uma biálgebra sobre $\Bbbk$. Qualquer $\Bbbk$-espaço vetorial V é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H com as ações triviais, ou seja, $h \cdot v = \varepsilon(h)v$ e $\rho(v) = 1_H \otimes v$, para todo $h \in H$ e $v \in V$. Particularmente, $\Bbbk$ é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.*

A proposição abaixo apresenta uma equivalência muito útil para o estudo dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre uma álgebra de Hopf.

Proposição 4.5.3 *Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda S_H, então a equação (4.3) é equivalente a*

$$\rho(h \cdot m) = h_1 m_{-1} S_H(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0. \tag{4.4}$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $h \in H$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} h_1 m_{-1} S_H(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0 &\overset{(*)}{=} (h_1 \cdot m)_{-1} h_2 S_H(h_3) \otimes (h_1 \cdot m)_0 \\ &= (h_1 \cdot m)_{-1} \varepsilon(h_2) \otimes (h_1 \cdot m)_0 \\ &= (h \cdot m)_{-1} \otimes (h \cdot m)_0 \\ &= \rho(h \cdot m), \end{aligned}$$

em que $(*)$ vale por hipótese.
$(\Leftarrow)$ Sejam $h \in H$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot m)_{-1} h_2 \otimes (h_1 \cdot m)_0 &\overset{(*)}{=} (h_1)_1 m_{-1} S_H((h_1)_3) h_2 \otimes (h_1)_2 \cdot m_0 \\ &= h_1 m_{-1} S_H(h_3) h_4 \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= h_1 m_{-1} \varepsilon(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= h_1 m_{-1} \otimes h_2 \cdot m_0, \end{aligned}$$

em que $(*)$ vale por hipótese. □

A partir desta proposição, seguem mais dois exemplos de módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, agora considerando H uma álgebra de Hopf com antípoda S_H.

Exemplo 4.5.4

1. *Pode-se considerar H como um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre si mesmo, com as estruturas de H-módulo e H-comódulo dadas respectivamente por $h' \cdot h = h'h$ e $\rho(h) = h_1 S_H(h_3) \otimes h_2$, para quaisquer $h, h' \in H$.*

2. *Considera-se H com a estrutura de H-módulo dada por $h' \cdot h = h'_1 h S_H(h'_2)$ e a estrutura de H-comódulo dada por $\rho(h) = h_2 \otimes h_1$, para quaisquer $h, h' \in H$. Com estas estruturas, H é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre si mesmo.*

4.6 A categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$

Nesta seção apresenta-se a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda. Não se mencionará o fato de ser à esquerda, mas todas as afirmações abaixo deverão ser consideradas à esquerda, salvo explícito de maneira contrária.

A categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda, a qual denota-se por ${}^H_H\mathcal{YD}$, tem como objetos $\Bbbk$-espaços vetoriais M, onde M é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda. As flechas são dadas pelos morfismos que são simultaneamente de H-módulo e de H-comódulo. Nota-se que a composição e a associatividade usual mantém estas propriedades, ou seja, a composição e a associatividade ainda são morfismos de H-módulo e de H-comódulo. A unidade da categoria é o morfismo identidade e o objeto identidade é o corpo $\Bbbk$.

Teorema 4.6.1 *Se H é uma biálgebra, então ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal pré-trançada. Além disso, se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva, então ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada.*

Demonstração. Tem-se que $({}^H_H\mathcal{YD},\ \otimes,\ a,\ l,\ r,\ \mathbb{1})$ é uma categoria monoidal, onde $\otimes$ é o funtor tensorial usual sobre o corpo $\Bbbk$, o objeto unidade de ${}^H_H\mathcal{YD}$ é $\mathbb{1} = \Bbbk$, o morfismo a dado por

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z &\rightarrow X \otimes (Y \otimes Z) \\ (x \otimes y) \otimes z &\mapsto x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in {}^H_H\mathcal{YD}$, e os morfismos r_X e l_X, para todo $X \in {}^H_H\mathcal{YD}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} l_X : \Bbbk \otimes X &\rightarrow X \\ 1_{\Bbbk} \otimes x &\mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} r_X : X \otimes \Bbbk &\rightarrow X \\ x \otimes 1_{\Bbbk} &\mapsto x \end{aligned}$$

Observa-se que $\otimes$ é um funtor. De fato, se $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, então $M \otimes N$ é um H-módulo via $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$ e um H-comódulo via $\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0$, para todo $m \otimes n \in M \otimes N$. Então, resta mostrar vale (4.3). Desde que $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, tem-se

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot (m \otimes n))_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot (m \otimes n))_0 &= (h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n)_{-1}h_3 \otimes (h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n)_0 \\ &= (h_1 \cdot m)_{-1}(h_2 \cdot n)_{-1}h_3 \otimes (h_1 \cdot m)_0 \otimes (h_2 \cdot n)_0 \\ &\overset{(1)}{=} (h_1 \cdot m)_{-1}(h_2 n_{-1}) \otimes (h_1 \cdot m)_0 \otimes h_3 \cdot n_0 \\ &= ((h_1 \cdot m)_{-1}h_2)n_{-1} \otimes (h_1 \cdot m)_0 \otimes h_3 \cdot n_0 \\ &\overset{(2)}{=} (h_1 m_{-1})n_{-1} \otimes h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 \cdot n_0 \\ &= h_1(m_{-1}n_{-1}) \otimes h_2 \cdot (m_0 \otimes n_0) \\ &= h_1 \cdot (m \otimes n)_{-1} \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_0. \end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale pois $N \in {}^H_H\mathcal{YD}$ e (2) vale pois $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Além disso, sejam $f : M \rightarrow M'$ e $g : N \rightarrow N'$ morfismos na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$. Tem-se que o morfismo definido por $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$, com $m \in M$ e $n \in N$, pertence a ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sabe-se que $f \otimes g$ é um morfismo de H-módulos, pois usando que f e g são morfismos de H-módulos tem-se

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(h \cdot (m \otimes n)) &= (f \otimes g)(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) = f(h_1 \cdot m) \otimes g(h_2 \cdot n) \\ &= h_1 \cdot f(m) \otimes h_2 \cdot g(n) = h \cdot (f(m) \otimes g(n)) \\ &= h \cdot (f \otimes g)(m \otimes n). \end{aligned}$$

Também $f \otimes g$ é um morfismo de H-comódulos, pois usando que f e g são morfismos de H-comódulos tem-se

$$\begin{aligned}\rho((f \otimes g)(m \otimes n)) &= \rho(f(m) \otimes g(n)) = (f(m))_{-1}(g(n))_{-1} \otimes (f(m))_0 \otimes (g(n))_0 \\ &= m_{-1}n_{-1} \otimes f(m_0) \otimes g(n_0) = (id_H \otimes f \otimes g)(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\ &= (id_H \otimes f \otimes g)(\rho(m \otimes n)).\end{aligned}$$

Logo, $\otimes$ é um funtor.

Tem-se que $\mathbb{1} = \Bbbk$ é um objeto da categoria, pois é um H-módulo via $h \cdot k = \varepsilon_H(h)k$, um H-comódulo via $\rho(k) = 1_H \otimes k$, para $k \in \Bbbk$ e satisfaz

$$\begin{aligned}(h_1 \cdot k)_{-1}h_2 \otimes (h_1 \cdot k)_0 &= (\varepsilon_H(h_1)k)_{-1}h_2 \otimes (\varepsilon_H(h_1)k)_0 = k_{-1}\varepsilon_H(h_1)h_2 \otimes k_0 \\ &= 1_H h_1 \varepsilon_H(h_2) \otimes k = h_1 1_H \otimes \varepsilon_H(h_2)k \\ &= h_1 k_{-1} \otimes h_2 \cdot k_0.\end{aligned}$$

A aplicação a é um isomorfismo natural. Sejam M, N, R objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$, f, g, s morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e $h \in H$. Então, $a_{M,N,R}$ é um morfismo de H-módulos, pois para quaisquer $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$ e $h \in H$

$$\begin{aligned}a_{M,N,R}(h \cdot ((m \otimes n) \otimes r))) &= a_{M,N,R}(h_1 \cdot (m \otimes n) \otimes h_2 \cdot r) \\ &= a_{M,N,R}((h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \otimes h_3 \cdot r) \\ &= h_1 \cdot m \otimes (h_2 \cdot n \otimes h_3 \cdot r) \\ &= h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot (n \otimes r) \\ &= h \cdot (m \otimes (n \otimes r)) \\ &= h \cdot a_{M,N,R}((m \otimes n) \otimes r).\end{aligned}$$

Além disso, $a_{M,N,R}$ é um morfismo de H-comódulos, pois para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$

$$\begin{aligned}\rho(a_{M,N,R}((m \otimes n) \otimes r)) &= \rho(m \otimes (n \otimes r)) \\ &= m_{-1}(n \otimes r)_{-1} \otimes m_0 \otimes (n \otimes r)_0 \\ &= m_{-1}(n_{-1}r_{-1}) \otimes m_0 \otimes (n_0 \otimes r_0) \\ &= (id_H \otimes a_{M,N,R})((m_{-1}n_{-1})r_{-1} \otimes ((m_0 \otimes n_0) \otimes r_0)) \\ &= (id_H \otimes a_{M,N,R})((m \otimes n)_{-1}r_{-1} \otimes ((m \otimes n)_0 \otimes r_0)) \\ &= (id_H \otimes a_{M,N,R})\rho((m \otimes n) \otimes r).\end{aligned}$$

Nota-se que a é uma transformação natural. De fato, dados $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ e

$s : R \to R'$ flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$, tem-se para todo $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$

$$\begin{aligned}
(f \otimes (g \otimes s))(a_{M,N,R}(m \otimes n) \otimes r) &= (f \otimes (g \otimes s))(m \otimes (n \otimes r)) \\
&= f(m) \otimes (g \otimes s)(n \otimes r) \\
&= f(m) \otimes (g(n) \otimes s(r)) \\
&= a_{M',N',R'}((f(m) \otimes g(n)) \otimes s(r)) \\
&= a_{M',N',R'}((f \otimes g)(m \otimes n) \otimes s(r)) \\
&= a_{M',N',R'}((f \otimes g) \otimes s)((m \otimes n) \otimes r).
\end{aligned}$$

Agora, definindo $a^{-1}_{M,N,R}(m \otimes (n \otimes r)) = (m \otimes n) \otimes r$, é imediato a verificação de que a^{-1} é o inverso de a, para todos $M, N, R \in {}^H_H\mathcal{YD}$.

Também é fácil verificar que r é um isomorfismo natural, onde $r^{-1}_M(m) = m \otimes 1_{\Bbbk}$, para qualquer $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ e $m \in M$. Analogamente, tem-se que l é um ismorfismo natural e $l^{-1}_M(m) = 1_{\Bbbk} \otimes m$, para todo $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ e $m \in M$.

Para terminar a demonstração de que ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal, restaria mostrar as comutatividades dos diagramas do pentágono e do triângulo. No entanto, esta demonstração é imediata. Portanto, ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal.

Tem-se também que $c_{M,N}(m \otimes n) = m_{-1} \cdot n \otimes m_0$ é uma pré-trança para ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, $c_{M,N}$ é morfismo de H-módulos, pois para quaisquer $M, N \in^H_H \mathcal{YD}$, $m \in M$, $n \in N$ e $h \in H$ tem-se

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) &= c_{M,N}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) = (h_1 \cdot m)_{-1} \cdot (h_2 \cdot n) \otimes (h_1 \cdot m)_0 \\
&= ((h_1 \cdot m)_{-1} h_2) \cdot n \otimes (h_1 \cdot m)_0 = (h_1 m_{-1}) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_0 \\
&= h_1 \cdot (m_{-1} \cdot n) \otimes h_2 \cdot m_0 = h \cdot (m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \\
&= h \cdot c_{M,N}(m \otimes n).
\end{aligned}$$

O morfismo $c_{M,N}$ é de H-comódulos, uma vez que para quaisquer $M, N \in^H_H \mathcal{YD}$, $m \in M$ e $n \in N$, tem-se

$$\begin{aligned}
\rho(c_{M,N}(m \otimes n)) &= \rho(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) = (m_{-1} \cdot n)_{-1}(m_0)_{-1} \otimes (m_{-1} \cdot n)_0 \otimes (m_0)_0 \\
&\overset{(1)}{=} ((m_{-1})_1 \cdot n)_{-1}(m_{-1})_2 \otimes ((m_{-1})_1 \cdot n)_0 \otimes m_0 \\
&\overset{(2)}{=} (m_{-1})_1 \cdot n_{-1} \otimes (m_{-1})_2 \cdot n_0 \otimes m_0 \\
&\overset{(1)}{=} m_{-1} n_{-1} \otimes (m_0)_{-1} \cdot n_0 \otimes (m_0)_0 \\
&= (id_H \otimes c_{M,N})(m_{-1} n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\
&= (id_H \otimes c_{M,N})\rho(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale por (1.1) e (2) vale uma vez que (4.3). Além disso, $c_{M,N}$ é uma transformação natural, pois dados os morfismos $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tem-se

$$\begin{aligned}
(g\otimes f)\circ c_{M,N}(m\otimes n) &= (g\otimes f)(m_{-1}\cdot n\otimes m_0) = g(m_{-1}\cdot n)\otimes f(m_0)\\
&\overset{(1)}{=} m_{-1}\cdot g(n)\otimes f(m_0) \overset{(2)}{=} (f(m))_{-1}\cdot g(n)\otimes (f(m))_0\\
&= c_{M',N'}(f(m)\otimes g(n))\\
&= c_{M',N'}\circ (f\otimes g)(m\otimes n).
\end{aligned}$$

Observa-se que em (1) é usado o fato de que g é morfismo de H-módulos e em (2) que f é morfismo de H-comódulos. Por fim, basta verificar a comutatividade dos dois diagramas de pré-trança. Ambos são válidos, para todos $M, N, R \in {}_H^H\mathcal{YD}$, $m \in M$ e $n \in N$, pois

$$\begin{aligned}
a_{N,R,M}\circ c_{M,N\otimes R}\circ a_{M,N,R}((m\otimes n)\otimes r) &= a_{N,R,M}\circ c_{M,N\otimes R}(m\otimes (n\otimes r))\\
&= a_{N,R,M}(m_{-1}\cdot (n\otimes r)\otimes m_0)\\
&= a_{N,R,M}(((m_{-1})_1\cdot n\otimes (m_{-1})_2\cdot r)\otimes m_0)\\
&= (m_{-1})_1\cdot n\otimes ((m_{-1})_2\cdot r\otimes m_0)\\
&\overset{(*)}{=} m_{-1}\cdot n\otimes ((m_0)_{-1}\cdot r\otimes (m_0)_0)\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})(m_{-1}\cdot n\otimes (m_0\otimes r))\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})\circ a_{N,M,R}((m_{-1}\cdot n\otimes m_0)\otimes r)\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})\circ a_{N,M,R}\circ (c_{M,N}\otimes id_R)((m\otimes n)\otimes r),
\end{aligned}$$

em $(*)$ usa-se que M é H-comódulo. Tem-se também

$$\begin{aligned}
(c_{M,R}\otimes id_N)\circ a^{-1}_{M,R,N}\circ (id_M\otimes c_{N,R})(m\otimes (n\otimes r)) &= (c_{M,R}\otimes id_N)\circ a^{-1}_{M,R,N}(m\otimes (n_{-1}\cdot r\otimes n_0))\\
&= (c_{M,R}\otimes id_N)((m\otimes n_{-1}\cdot r)\otimes n_0)\\
&= (m_{-1}\cdot (n_{-1}\cdot r)\otimes m_0)\otimes n_0\\
&= ((m_{-1}n_{-1})\cdot r\otimes m_0)\otimes n_0\\
&= a^{-1}_{R,M,N}((m_{-1}n_{-1})\cdot r\otimes (m_0\otimes n_0))\\
&= a^{-1}_{R,M,N}((m\otimes n)_{-1}\cdot r\otimes (m\otimes n)_0)\\
&= a^{-1}_{R,M,N}\circ c_{M\otimes N,R}((m\otimes n)\otimes r)\\
&= a^{-1}_{R,M,N}\circ c_{M\otimes N,R}\circ a^{-1}_{M,N,R}(m\otimes (n\otimes r)).
\end{aligned}$$

Portanto, ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal pré-trançada.

Agora, supondo que H é uma álgebra de Hopf com antípoda S_H bijetiva, será mostrado que ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada, ou seja, a trança definida anteriormente é um isomorfismo natural.

Seja $c^{-1}_{N,M} : N\otimes M \to M\otimes N$, dada por $c^{-1}_{N,M}(n\otimes m) = m_0\otimes S_H^{-1}(m_{-1})\cdot n$. Então $c^{-1}_{N,M}$ é a inversa de $c_{M,N}$, para quaisquer $M, N \in {}_H^H\mathcal{YD}$. De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
c_{M,N} \circ c^{-1}_{N,M}(n \otimes m) &= c_{N,M}(m_0 \otimes S^{-1}_H(m_{-1}) \cdot n) \\
&= (m_0)_{-1} \cdot (S^{-1}_H(m_{-1}) \cdot n)) \otimes (m_0)_0 \\
&= ((m_0)_{-1} S^{-1}_H(m_{-1})) \cdot n \otimes (m_0)_0 \\
&= ((m_{-1})_2 S^{-1}_H((m_{-1})_1)) \cdot n \otimes m_0 \\
&= \varepsilon_H(m_{-1}) 1_H \cdot n \otimes m_0 \\
&= 1_H \cdot n \otimes \varepsilon_H(m_{-1}) m_0 \\
&= n \otimes m,
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
c^{-1}_{N,M} \circ c_{M,N}(m \otimes n) &= c^{-1}_{N,M}(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) = (m_0)_0 \otimes S^{-1}_H((m_0)_{-1}) \cdot (m_{-1} \cdot n) \\
&= m_0 \otimes S^{-1}_H((m_{-1})_2)(m_{-1})_1) \cdot n = m_0 \otimes \varepsilon_H(m_{-1}) 1_H \cdot n \\
&= \varepsilon_H(m_{-1}) m_0 \otimes 1_H \cdot n \\
&= m \otimes n.
\end{aligned}$$

Logo, c é invertível. Portanto, pelas Observações 1.2.3 e 1.2.7, c é um isomorfismo natural, e consequentemente ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada. □

4.7 Propriedades da categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$

Nesta seção serão provadas duas proposições importantes, que são propriedades da categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Proposição 4.7.1 *Se $\{M_i\}_{i\in I}$ é uma família de objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Dados $h \in H$ e $x = \sum_{i\in I} m_i \in M$, definimos $h \cdot \sum m_i = \sum h \cdot m_i$. É fácil ver que M é H-módulo com esta estrutura.

Desde que $\bigoplus_{i\in I}(H \otimes M_i)$ é isomorfo (como espaço vetorial) a $H \otimes (\bigoplus_{i\in I} M_i)$, ou seja, é isomorfo a $H \otimes M$, pode-se definir a estrutura de H-comódulo por

$$\rho(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(m_i),$$

onde $\rho_i : M_i \to H \otimes M_i$ é a coação de M_i, para cada $i \in I$.

Definidas as estruturas, deve-se verificar a validade da relação de compatibilidade. Para isto, sejam $h \in H$ e $\sum m_i = x \in M$, onde $m_i \in M_i$. Tem-se

$$\begin{aligned}
h_1x_{-1}\otimes h_2\cdot x_0 &= h_1(\sum m_i)_{-1}\otimes h_2\cdot(\sum m_i)_0 \overset{(1)}{=} h_1(\sum(m_i)_{-1})\otimes h_2\cdot(\sum(m_i)_0)\\
&\overset{(2)}{=} \sum(h_1(m_i)_{-1})\otimes\sum(h_2\cdot(m_i)_0) \overset{(3)}{=} \sum((h_1\cdot m_i)_{-1}h_2)\otimes\sum((h_1\cdot m_i)_0)\\
&= \sum((h_1\cdot m_i)_{-1})h_2\otimes\sum((h_1\cdot m_i)_0)\\
&\overset{(1)}{=} (\sum(h_1\cdot m_i))_{-1}h_2\otimes(\sum(h_1\cdot m_i))_0\\
&\overset{(2)}{=} (h_1\cdot\sum m_i)_{-1}h_2\otimes h_1\cdot(\sum m_i)_0\\
&= (h_1\cdot x)_{-1}h_2\otimes(h_1\cdot x)_0,
\end{aligned}$$

observa-se que (1) usa-se que ρ é linear; em (2) usa-se o fato de M ter uma estrutura de H-módulo; e em (3) usa-se que cada M_i é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Portanto, M é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Definição 4.7.2 *Uma álgebra A em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma álgebra (A, m, u) tal que m e u são flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Analogamente, uma coálgebra C em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma coálgebra (C, Δ, ε) tal que Δ e ε são flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Proposição 4.7.3 *Se (R, m_R, u_R) e (S, m_S, u_S) são álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então $(R\underline{\otimes}S, m, u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, onde $m = (m_R\otimes m_S)(id_R\otimes c_{S,R}\otimes id_S)$ e $u = (u_R\otimes u_S)l_{\Bbbk}^{-1}$.*

Demonstração. Da definição de m e u, tem-se que esses morfismos são flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$, pois são composições de morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Assim, deve-se apenas verificar que m e u são de fato uma multiplicação e uma unidade para $R\underline{\otimes}S$. Para isto, sejam $r, r', r''\in R$ e $s, s', s''\in S$. Então

$$\begin{aligned}
m(m\otimes id_{R\underline{\otimes}S})((r\otimes s)\otimes(r'\otimes s')\otimes(r''\otimes s'')) &= m((r(s_{-1}\cdot r')\otimes s_0s')\otimes(r''\otimes s''))\\
&= r(s_{-1}\cdot r')(((s_0s')_{-1})\cdot r'')\otimes((s_0s')_0)s''\\
&\overset{(1)}{=} r(s_{-1}\cdot r')(((s_0)_{-1}s'_{-1})\cdot r'')\otimes((s_0)_0s'_0)s''\\
&\overset{(2)}{=} r((s_{-1})_1\cdot r')((s_{-1})_2\cdot(s'_{-1}\cdot r''))\otimes(s_0s'_0)s''\\
&\overset{(3)}{=} r(s_{-1}\cdot(r'(s'_{-1}\cdot r'')))\otimes s_0(s'_0s'')\\
&= m((r\otimes s)\otimes(r'(s'_{-1}\cdot r'')\otimes s'_0s''))\\
&= m(id_{R\underline{\otimes}S}\otimes m)((r\otimes s)(r'\otimes s')(r''\otimes s'')).
\end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale pela Proposição 1.2.6 ; (2) vale por (1.1); e (3) vale pela Proposição 1.2.2. Além disso, como pela Proposição 1.2.6 também vale que $\rho_S(1_S) = 1_H\otimes 1_S$, tem-se para quaisquer $r\in R$ e $s\in S$

$$\begin{aligned}
m\circ(u\otimes id_{R\underline{\otimes}S})(1_{\Bbbk}\otimes r\otimes s) &= m(1_R\otimes 1_S\otimes r\otimes s)\\
&= 1_R(1_H\cdot r)\otimes 1_Ss\\
&= r\otimes s\\
&= \sim 1_{\Bbbk}\otimes r\times s.
\end{aligned}$$

Analogamente, para quaisquer $r \in R$ e $s \in S$

$$\begin{aligned} m \circ (id_{R\underline{\otimes}S} \otimes u)(r \otimes s \otimes 1_{\Bbbk}) &= m(r \otimes s \otimes 1_R \otimes 1_S) \\ &= r(s_{-1} \cdot 1_R) \otimes s_0 1_S \\ &= r\varepsilon_S(s_{-1}) \otimes s_0 \\ &= r \otimes \varepsilon_S(s_{-1}) s_0 \\ &= r \otimes s \\ &= \sim r \otimes s \otimes 1_{\Bbbk}. \end{aligned}$$

Portanto, $(R\underline{\otimes}S, m, u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Observação 4.7.4 *Escreve-se $R\underline{\otimes}S$ ao invés de $R \otimes S$ para ressaltar que a multiplicação é a apresentada acima e não a trivial.*

De modo análogo pode-se mostrar que $(R\underline{\otimes}S, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, onde $\Delta(r \otimes s) = (id_R \otimes c \otimes id_S) \circ (\Delta_R \otimes \Delta_S)(r \otimes s)$ e $\varepsilon(r \otimes s) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_S(s)$, para quaisquer $r \in R$ e $s \in S$.

4.8 Biálgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$ *versus* pares admissíveis

Nesta última seção, estuda-se o significado de uma biálgebra na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ e sua relação com os pares admissíveis. A definição de biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é muito semelhante à Definição 1.1.8, como pode-se ver abaixo.

Definição 4.8.1 *Seja H uma biálgebra. Uma biálgebra na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ cuja pré-trança é dada por c é uma coleção $(B, m_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ onde B é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$, (B, m_B, u_B) é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$; $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e, além disso, $\Delta_B : B \to B\underline{\otimes}B$ e $\varepsilon_B : B \to \Bbbk$ são morfismos de álgebras.*

Teorema 4.8.2 *Seja H uma biálgebra. São equivalentes:*

(*a*) *(H, B) é um par admissível.*

(*b*) *B é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Para demonstrar esta equivalência será utilizado o item (b) do Teorema 2.1.9. Pela Definição 4.7.2 e pelo item (ii) do Teorema 2.1.9 somente é necessário mostrar que se (H, B) é um par admissível, então Δ_B é multiplicativo e que se B é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então vale o item (i) do Teorema 2.1.9.

Se (H,B) é um par admissível, então Δ_B é multiplicativo, pois para quaisquer $b, b' \in B$ tem-se

$$\begin{aligned}
m_{B\underline{\otimes}B} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B)(b \otimes b') &= (m_B \otimes m_B) \circ (id_B \otimes c_{B,B} \otimes id_B)(b_1 \otimes b_2 \otimes b'_1 \otimes b'_2) \\
&= (m_B \otimes m_B)(b_1 \otimes (b_2)_{-1} \cdot b'_1 \otimes (b_2)_0 \otimes b'_2) \\
&= b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0 b'_2 \overset{(*)}{=} \Delta_B(bb') \\
&= \Delta_B \circ m_B(b \otimes b'),
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ é usada a hipótese de (H,B) ser par admissível. Logo, B é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Por outro lado, se B é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então para quaisquer $b, b' \in B$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_B(bb') &= \Delta_B \circ m_B(b \otimes b') \overset{(*)}{=} m_{B\otimes B}(\Delta_B \underline{\otimes} \Delta_B)(b \otimes b') \\
&= (m_B \otimes m_B) \circ (id_B \otimes c_{B,B} \otimes id_B)(b_1 \otimes b_2 \otimes b'_1 \otimes b'_2) \\
&= (m_B \otimes m_B)(b_1 \otimes (b_2)_{-1} \cdot b'_1 \otimes (b_2)_0 \otimes b'_2) \\
&= b_1((b_2)_{-1} \cdot b'_1) \otimes (b_2)_0 b'_2.
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ é usada a hipótese de B ser uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Portanto, vale (i) do Teorema 2.1.9. $\square$

Capítulo 5

A álgebra tensorial

Neste capítulo é apresentado uma família de exemplos de pares admissíveis. Mostra-se que a álgebra tensorial de um espaço vetorial $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para isto, primeiramente, recorda-se a definição da álgebra tensorial de um espaço vetorial qualquer.

Definição 5.0.3 *A álgebra tensorial de um $\Bbbk$-espaço vetorial V é um par $(\iota, T(V))$ que satisfaz as seguintes propriedades (chamadas universais):*

(i) *$T(V)$ é uma álgebra sobre $\Bbbk$ e $\iota : V \to T(V)$ é um morfismo linear.*

(ii) *Se A é uma álgebra sobre $\Bbbk$ e $f : V \to A$ é um morfismo linear, então existe um único $F : T(V) \to A$ morfismo de álgebras tal que $F \circ \iota = f$.*

Observação 5.0.4

(1) *Usando as propriedades universais, verifica-se facilmente que se $(\iota, T(V))$ e $(\iota', T(V)')$ são álgebras tensoriais de V, então $T(V) \simeq T(V)'$ como álgebras.*

(2) *Tem-se que $\iota(V)$ gera $T(V)$.*

Agora, apresenta-se a existência da álgebra tensorial. Considera-se $T^0(V) = \Bbbk$, $T^1(V) = V$, $T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n-vezes}$ e $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$. A multiplicação e a unidade são definidas da seguinte forma: dados $x = x^1 \otimes \cdots \otimes x^n, y = y^1 \otimes \cdots \otimes y^m \in T(V)$

$$m(x \otimes y) = x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^m \text{ e } u(1_\Bbbk) = 1_\Bbbk. \tag{5.1}$$

Tomando $\iota = i : V \to T(V)$, $v \mapsto T^1(V)$, verifica-se rapidamente que $(T(V), i)$ satisfaz a Definição 5.0.3.

A partir de agora, considera-se H uma biálgebra e $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. O objetivo é estudar as propriedades da álgebra tensorial de um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Proposição 5.0.5 *A álgebra tensorial $T(V)$ é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Tem-se que $T^0(V) = \Bbbk$ é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$, pelo item 1 dos Exemplos (4.5.2). Além disso, $T^1(V) = V$ é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$ por definição. Para $n \geq 2$ tem-se que $T^n(V)$ é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$ com a estrutura de H-módulo dada por

$$h \cdot v = h_1 \cdot v^1 \otimes h_2 \cdot v^2 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot v^n,$$

para quaisquer $h \in H$ e $v = v^1 \otimes \cdots \otimes v^n \in T^n(V)$, e a estrutura de H-comódulo dada por

$$\rho(v) = (v^1)_{-1}(v^2)_{-1} \dots (v^n)_{-1} \otimes (v^1)_0 \otimes (v^2)_0 \otimes \cdots \otimes (v^n)_0.$$

Além disso, pela Proposição 4.7.1 sabe-se que a soma direta de objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$ é ainda um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$. Portanto, $T(V) \in {}^H_H\mathcal{YD}$. □

Proposição 5.0.6 *$(T(V), m, u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, onde m e u são dados em* (5.1).

Demonstração. Como $T(V)$ é uma álgebra, basta mostrar que m e u são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, sejam $h \in H$, $x = x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \in T^n(V)$ e $y = y^1 \otimes \cdots \otimes y^m \in T^m(V)$. Então, m é morfismo de H-módulos, pois

$$\begin{aligned} h \cdot m(x \otimes y) &= h \cdot (\, x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^m) \\ &= h_1 \cdot x^1 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot x^n \otimes h_{n+1} \cdot y^1 \otimes \cdots \otimes h_{n+m} \cdot y^m \\ &= m((h_1 \cdot x^1 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot x^n) \otimes (h_{n+1} \cdot y^1 \otimes \cdots \otimes h_{n+m} \cdot y^m)) \\ &= m(h_1 \cdot (\, x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) \otimes h_2 \cdot (\, y^1 \otimes \cdots \otimes y^m)) \\ &= m(h \cdot (x \otimes y)). \end{aligned}$$

Claramente u é de H-módulos, pois $u(h \cdot 1_\Bbbk) = u(\varepsilon_H(h)1_\Bbbk) = \varepsilon_H(h)u(1_\Bbbk) = h \cdot u(1_\Bbbk)$. Além disso, m é morfismo de H-comódulos, uma vez que

$$\begin{aligned} &(\, id_H \otimes m)\rho(x \otimes y) = \\ &= (id_H \otimes m)((x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1}(y^1)_{-1} \cdots (y^m)_{-1} \otimes ((x^1)_0 \otimes \cdots \otimes (x^n)_0) \otimes ((y^1)_0 \otimes \cdots \otimes (y^m)_0)) \\ &= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1}(y^1)_{-1} \cdots (y^m)_{-1} \otimes (x^1)_0 \otimes \cdots \otimes (x^n)_0 \otimes (y^1)_0 \otimes \cdots \otimes (y^m)_0 \\ &= \rho(\, x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^m) \\ &= \rho(m((\, x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) \otimes (\, y^1 \otimes \cdots \otimes y^m))) \\ &= \rho(m(x \otimes y)). \end{aligned}$$

Além disso, como $(id_H \otimes u)\rho(1_\Bbbk) = (id_H \otimes u)(1_H \otimes 1_\Bbbk) = 1_H \otimes u(1_\Bbbk) = \rho(u(1_\Bbbk))$, tem- se que u é um morfismo de H-comódulos. Portanto, $T(V)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Observação 5.0.7 *O morfismo linear inclusão ι é claramente um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Proposição 5.0.8 *Se A é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e $f : V \to A$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então existe um morfismo de álgebras $F : T(V) \to A$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $F \circ \iota = f$.*

Demonstração. Pela definição de álgebra tensorial, existe um morfismo de álgebras $F : T(V) \to A$ tal que $F \circ \iota = f$. Então, deve-se mostrar ainda que F é uma flecha, ou seja, um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para isto, sejam $h \in H$ e $x = x^1 \otimes \cdots \otimes\ x^n \in T^n(V)$. O morfismo F é de H-módulos, pois

$$\begin{aligned}
F(h \cdot x) &= F(h_1 \cdot x^1 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot x^n) = F(h_1 \cdot x^1 \cdots h_n \cdot x^n) = F(h_1 \cdot x^1) \cdots F(h_n \cdot x^n) \\
&= F \circ \iota(h_1 \cdot x^1) \cdots F \circ \iota(h_n \cdot x^n) = f(h_1 \cdot x^1) \cdots f(h_n \cdot x^n) \\
&\overset{(1)}{=} (h_1 \cdot f(x^1)) \cdots (h_n \cdot f(x^n)) \overset{(2)}{=} h \cdot (f(x^1) \cdots f(x^n)) \\
&= h \cdot (F \circ \iota({}_1v) \cdots F \circ \iota(x^n)) = h \cdot (F(x^1) \cdots F(x^n)) \\
&= h \cdot (F(x^1 \cdots x^n)) = h \cdot F(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) \\
&= h \cdot F(x).
\end{aligned}$$

Observa-se que (1) vale pois f é um morfismo de H-módulos e (2) vale pois m_A é morfismo de H-módulos. Além disso, F é um morfismo de H-comódulos, pois

$$\begin{aligned}
(id_H \otimes F)\rho(x) &= (id_H \otimes F)((x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes ((x^1)_0 \otimes \cdots \otimes (x^n)_0)) \\
&= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes F((x^1)_0 \otimes \cdots \otimes (x^n)_0) \\
&= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes F((x^1)_0 \cdots (x^n)_0) \\
&= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes F((x^1)_0) \cdots F((x^n)_0) \\
&= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes F \circ \iota((x^1)_0) \cdots F \circ \iota((x^n)_0) \\
&= (x^1)_{-1} \cdots (x^n)_{-1} \otimes f((x^1)_0) \cdots f((x^n)_0) \\
&\overset{(*)}{=} (f(x^1))_{-1} \cdots (f(x^n))_{-1} \otimes (f(x^1))_0 \cdots (f(x^n))_0 \\
&= (f(x^1) \cdots f(x^n))_{-1} \otimes (f(x^1) \cdots f(x^n))_0 \\
&= (F \circ \iota(x^1) \cdots F \circ \iota(x^n))_{-1} \otimes (F \circ \iota(x^1) \cdots F \circ \iota(x^n))_0 \\
&= (F(x^1) \cdots F(x^n))_{-1} \otimes (F(x^1) \cdots F(x^n))_0 \\
&= (F((x^1) \cdots (x^n)))_{-1} \otimes (F((x^1) \cdots (x^n)))_0 \\
&= (F((x^1) \otimes \cdots \otimes (x^n)))_{-1} \otimes (F((x^1) \otimes \cdots \otimes (x^n)))_0 \\
&= \rho(F(x)).
\end{aligned}$$

Observa-se que $(*)$ vale pois f é um morfismo de H-comódulos. Assim, tem-se que F é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

A partir desta proposição, pode-se exibir uma estrutura de coálgebra à álgebra tensorial. Ainda mais, pode-se mostrar que $T(V)$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Proposição 5.0.9 *A álgebra tensorial $(\iota, T(V))$ possui uma estrutura de coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, tal que $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, para todod $v \in V$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.7.3 sabe-se que $T(V)\underline{\otimes}T(V)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para obter a estrutura de coálgebra de $T(V)$, primeiro será mostrado que o morfismo $F : V \to T(V)\underline{\otimes}T(V)$, definido por $f(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, é uma flecha em ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, f é um morfismo de H-módulos, pois para quaisquer $h \in H$ e $v \in V$ tem-se

$$
\begin{aligned}
h \cdot f(v) &= h \cdot (v \otimes 1 + 1 \otimes v) = h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot 1 + h_1 \cdot 1 \otimes h_2 \cdot v \\
&= h_1 \cdot v \otimes \varepsilon_H(h_2)1 + \varepsilon_H(h_1)1 \otimes h_2 \cdot v \\
&= h \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h \cdot v \\
&= f(h \cdot v).
\end{aligned}
$$

Além disso, f é morfismo de H-comódulos, pois para $v \in V$

$$
\begin{aligned}
\rho(f(v)) &= \rho(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = v_{-1}1_{-1} \otimes (v_0 \otimes 1_0) + 1_{-1}v_{-1} \otimes (1_0 \otimes v_0) \\
&= v_{-1} \otimes v_0 \otimes 1 + v_{-1} \otimes 1 \otimes v_0 = v_{-1} \otimes (v_0 \otimes 1 + 1 \otimes v_0) \\
&= v_{-1} \otimes f(v_0) = (id \otimes f)(v_{-1} \otimes v_0) \\
&= (id \otimes f)\rho(v).
\end{aligned}
$$

Portanto, f é uma flecha em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Com isto, pela Proposição 5.0.8 tem-se que existe $\Delta : T(V) \to T(V)\underline{\otimes}T(V)$ um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, tal que $\Delta \circ \iota = f$. Além disto, sabe-se que a função nula $0 : V \to \Bbbk$ é uma flecha em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Novamente pela Proposição 5.0.8, existe $\varepsilon : T(V) \to \Bbbk$ um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$ tal que $\varepsilon \circ \iota = 0$.

Resta mostrar que de fato Δ e ε são, respectivamente, uma comultiplicação e uma counidade para $T(V)$. Para isto, como $\iota(V)$ gera $T(V)$, basta verificar para $v \in \iota(V)$. Note que

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(v) &= (\Delta \otimes id)\Delta(\iota(v)) = (\Delta \otimes id)f(v) = (\Delta \otimes id)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\
&= \Delta(v) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes v \overset{(*)}{=} \Delta \circ \iota(v) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v \\
&= f(v) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v = (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v \\
&= v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes v \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v = v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\
&\overset{(*)}{=} v \otimes \Delta(1) + 1 \otimes f(v) = v \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(v) \\
&= (id \otimes \Delta)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\
&= (id \otimes \Delta)\Delta(v),
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ vale pois Δ é de álgebras. Tem-se também,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta(v) &= (\varepsilon \otimes id)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = \varepsilon(v) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes v \\
&= \varepsilon \circ \iota(v) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes v \overset{(*)}{=} 0 \otimes 1 + 1 \otimes v \\
&= 1 \otimes v \\
&\simeq v.
\end{aligned}
$$

Observa-se que $(*)$ vale pois ε é um morfismo de álgebras. Analogamente,

$$\begin{aligned}(id\otimes\varepsilon)\Delta(v) &= (id\otimes\varepsilon)(v\otimes 1+1\otimes v) = v\otimes\varepsilon(1)+1\otimes\varepsilon(v)\\ &= v\otimes 1+1\otimes 0 = v\otimes 1\\ &\simeq v.\end{aligned}$$

Logo, $(T(V),\Delta,\varepsilon)$ é de fato uma coálgebra. Observa-se ainda que pela Proposição 5.0.8, Δ e ε são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, o que torna $T(V)$ uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Observação 5.0.10 *Pela demonstração acima e pela Proposição 5.0.8, decorre que Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Corolário 5.0.11 *A álgebra tensorial $(\iota, T(V))$, com as aplicações definidas neste capítulo, é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração. Da Proposição 5.0.5 tem-se que $T(V)$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Da Proposição 5.0.6, tem-se que $(T(V),m,u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Da Proposição 5.0.9 tem-se que $(T(V),\Delta,\varepsilon)$ é um coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e os morfismos Δ e ε são de álgebras□

Corolário 5.0.12 *Para cada $V\in {}^H_H\mathcal{YD}$, $(H,T(V))$ é um par admissível. Além disso,* $T(V)\underset{j_{T(V)}}{\overset{\Pi_{T(V)}}{\rightleftarrows}} T(V)\#H \underset{i_H}{\overset{\pi_H}{\rightleftarrows}} H$ *é um sistema admissível.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 4.8.2 e 2.2.2 e do Corolário 5.0.12. □

Exemplo 5.0.13 *Seja Γ um grupo e considere $H=\Bbbk\Gamma$ e V um H-módulo e um H-comódulo simultaneamente. Então, $V=\bigoplus_{x\in\Gamma}V_x$, onde $V_x=\{v\in V;\ \rho(v)=x\otimes v\}$ (Ver [Mo, Exemplo 1.6.7]). Defina $c: V\otimes V\to V\otimes V$, $c(v\otimes w)=x\cdot w\otimes v$, para quaisquer $v\in V_x$, $w\in V$. Por [AS, Oberservação 1.4] tem-se que $V\in {}^{\Bbbk\Gamma}_{\Bbbk\Gamma}\mathcal{YD}$ se e somente se $x\cdot V_y\subset V_{xyx^{-1}}$, para quaisquer $x,y\in\Gamma$. Particularmente, se Γ é abeliano, então V é um objeto de ${}^{\Bbbk\Gamma}_{\Bbbk\Gamma}\mathcal{YD}$ se e somente se V é $\Bbbk\Gamma$-módulo graduado.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[AS] Andruskiewitsch, N.; Schineider, H.-J. *Pointed Hopf algebras*, New directions in Hopf algebras, v. 43, p. 1-68, 2002.

[DNR] Dascalescu, S.; Nastasescu, C.; Raianu, S., *Hopf Algebras, an introduction*. New York: Marcel Dekker, 2001.

[K] Kassel, C.;*Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, v. 155, New York: Springer-Verlag, 1995.

[Ma] Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, v. 5, New York: Springer-Verlag, 1971.

[Mo] Montgomery, S. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. Chicago: CBMS, 1992.

[R1] Radford, D. E. *Finiteness conditions for a Hopf algebra with a non-zero integral*, Journal of Algebra, v.46, p.189-195, 1977.

[R2] Radford, D. E. *The Structure of Hopf Algebras with a Projection*, Journal of Algebra, v.92, p.322-347, 1985.

[R3] Radford, D. E. *Hopf Algebras*. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012.