

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A
EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES
MÍNIMAS EM DOMÍNIOS LIMITADOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Antonio Carlos do Nascimento

**Santa Maria, RS, Brasil
2014**

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS LIMITADOS

Antonio Carlos do Nascimento

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS), como requisito para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Ari João Aiolfi

**Santa Maria, RS, Brasil
2014**

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

**O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS
HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS LIMITADOS**

elaborado por
Antonio Carlos do Nascimento

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Ari João Aiolfi, Dr. (UFSM)
(Orientador)

Miriam Telichevesky, Dr^a. (UFRGS)

Rodrigo Barbosa Soares, Dr.(FURG)

Santa Maria, 22 de Julho de 2014.

Resumo

Neste trabalho estudamos os clássicos resultados de existência e não existência de soluções para o problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas em domínios limitados de \mathbb{R}^n devido a Jenkins-Serrin [8].

Abstract

In this work we study the classical results of existence and non-existence of solutions for the Dirichlet problem for the minimal hypersurfaces equation in bounded domains of \mathbb{R}^n due to Jenkins-Serrin [8].

Conteúdo

1	PRELIMINARES	9
1.1	Espaços de Hölder	9
1.2	Operadores elípticos	10
1.3	Equação das hipersuperfícies mínimas	12
1.4	O princípio do máximo	16
1.5	Método da continuidade	19
2	A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET	21
2.1	Resultados auxiliares	21
2.2	Parametrização de bordo de um domínio de classe C^2	32
2.3	Estimativa <i>a priori</i> para gradiente de uma solução	34
2.4	A definição de \mathfrak{B}	44
2.5	Demonstração do Teorema 1	45
3	UM RESULTADO DE NÃO EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET	48
3.1	Resultados iniciais	48
3.2	Estimativas <i>a priori</i> para a altura de uma solução do Problema de Dirichlet 1	58

INTRODUÇÃO

O Problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in C^0(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, consiste em determinar a existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ Q_0(u) := (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij} = 0 \quad . \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases} \quad (1)$$

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução do Problema de Dirichlet (1) então o gráfico de u , $\text{Graf}(u) := \{(x, u(x)), x \in \Omega\}$, é uma hipersuperfície mínima de \mathbb{R}^{n+1} .

O Problema de Dirichlet (1) tem sido estudado por inúmeros matemáticos há muito tempo e para diferentes versões, a depender da geometria de Ω e de sua classe de diferenciabilidade, bem como da classe das funções que figuram como condição de fronteira. Para o caso $n = 2$, um dos primeiros e mais significativos resultados foi obtido por T. Radó no trabalho [11], no qual é mostrado que se Ω é convexo o Problema de Dirichlet (1) tem solução para qualquer $f \in C^0(\Gamma)$. O próprio Radó, logo em seguida em [12], mostra com seu famoso exemplo do tetraedro, que existe um domínio Ω não convexo e um dado contínuo no bordo desse domínio para o qual o Problema de Dirichlet (1) não tem solução. Mais tarde, R. Finn (veja [5] e [4]), mostrou que para todo domínio Ω não convexo, existe $f \in C^0(\Gamma)$ para o qual o Problema (1) não tem solução. Assim, quando $n = 2$ temos:

"Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, o Problema de Dirichlet (1) tem solução única para qualquer $f \in C^0(\Gamma)$ se, e somente se, Ω é convexo".

Para o caso $n > 2$, onde concentramos nossos esforços neste trabalho, veremos que a convexidade do domínio não é a generalização mais adequada do caso bidimensional, mas sim a curvatura média de Γ é que desempenha um papel crucial. A fim de explorar este fato, neste trabalho estudamos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u \in C^{2,\delta}(\overline{\Omega}) \\ Q_0(u) = 0 \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases}, \quad (2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e de classe $C^{2,\delta}$ e $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$ é dada *a priori*, $\delta \in (0, 1)$.

Exploramos, no contexto acima, o clássico artigo de H. Jenkins e J. Serrin [8], no que concerne ao Theorem 2 do referido artigo, que trata de um resultado de existência e unicidade relativamente ao Problema de Dirichlet (2). Em nosso contexto, Theorem 2 é enunciado como:

Teorema 1 *(Sobre a existência de solução)* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe $C^{2,\delta}$. Então existe uma constante positiva \mathfrak{B} , dependendo somente da geometria de Ω e das normas $\|f\|_1$ e $\|f\|_2$ da primeira e segunda derivada do dado no bordo f , tal que o Problema de Dirichlet (2) tem solução única para $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$ sempre que

$$h < \mathfrak{B}(\|f\|_1, \|f\|_2, \Omega),$$

onde $2h$ denota a oscilação de f em Γ . Se a curvatura média H de Γ é não negativa então $\mathfrak{B} = +\infty$.

No teorema acima, e no decorrer de todo o trabalho, consideramos a curvatura média H de Γ levando-se em conta o vetor normal a Γ que aponta para o interior de Ω .

Segue do Teorema 1 que se a curvatura média H de Γ é não negativa em todos os seus pontos, o Problema de Dirichlet (2) tem solução única para qualquer $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$.

Como exemplo para visualizar que é a curvatura média de Γ e não a convexidade do domínio que joga papel fundamental nesse contexto, considere $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ como sendo o toro gerado a partir da rotação do círculo $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ em torno do eixo y . Seja Ω o conjunto limitado de \mathbb{R}^3 cujo bordo é Γ . Temos Ω um domínio não convexo. A curvatura média H de Γ é não negativa desde que $a \leq 2b$ e, neste caso, o Problema de Dirichlet (2) admite solução única em Ω , qualquer que seja o dado $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$.

Também estudamos o Theorem 3 de [8], um resultado de não existência de solução para o Problema de Dirichlet (1) para a equação das hipersuperfícies mínimas. Mostramos que se Γ apresenta um ponto de curvatura média negativa, é possível exibir um dado no bordo f suave, com $|f|$ arbitrariamente pequena, para o qual o Problema de Dirichlet (1) não tem solução. Precisamente:

Teorema 2 *(Sobre a não existência de solução)* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2 . Suponha que existe $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < 0$, onde H é a curvatura média de Γ . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in C^\infty(\Gamma)$ com $\sup_{\Gamma} |f| < \varepsilon$, para a qual o Problema de Dirichlet (1) não tem solução.

Segue imediato dos dois teoremas acima o seguinte resultado, contemplado no Theorem 1 de [8].

Teorema 3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe $C^{2,\delta}$. Então o Problema de Dirichlet (2) tem solução única para qualquer $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$ se, e somente se, a curvatura média de Γ é não negativa.*

Nosso trabalho está organizado como segue:

No Capítulo 1 exploramos toda a teoria de Equações Diferenciais Parciais Elípticas necessária para a demonstração do Teorema 1 e do Teorema 2 acima, tendo [6] como principal referência.

No Capítulo 2 abordamos o Teorema 1 efetivamente, trabalhando numa série de lemas básicos e proposições necessários à sua demonstração.

No Capítulo 3 trabalhamos no Teorema 2, onde percorremos todo o caminho de resultados auxiliares que permitirão chegar a termo.

Nosso interesse por estes resultados clássicos se deve também ao fato que continuam surgindo, relativamente a este problema, inúmeros artigos. Observamos que o Teorema 3 (no que se refere a existência) tem sido estendido e generalizado para o contexto de variedades Riemannianas, como por exemplo em [3], [10] e [9]. Já o Teorema 1 foi estendido recentemente para variedades Riemannianas quaisquer no trabalho [1]. Destacamos ainda que, relativamente a domínios limitados e não convexos de \mathbb{R}^2 , utilizando uma abordagem diferente daquela de Jenkins-Serrin no Teorema 1, o trabalho [2] também trata do Problema de Dirichlet (2).

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados da teoria de Equações Diferenciais Parciais Elípticas que usaremos na sequência. A referência principal para os tópicos aqui expostos é [6].

1.1 Espaços de Hölder

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo) limitado. No espaço vetorial normado $C^k(\overline{\Omega})$ das funções reais definidas em Ω cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são limitadas e possuem extensão contínua em $\overline{\Omega}$, definimos a norma

$$\|u\|_{k,\Omega} = \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{\Omega} |D^\beta u(x)|, \quad (1.1)$$

onde usamos a notação multi-índice $D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$, sendo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ com β_i inteiro não negativo, para $i = 1, \dots, n$ e tal que $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$.

A seguir, caracterizamos uma classe de funções denominadas funções Hölder contínuas com expoente $\delta \in (0, 1)$.

Definição 1.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função real u é Hölder contínua com expoente $\delta \in (0, 1)$ em Ω , quando*

$$[u]_{\delta,\overline{\Omega}} := \sup_{x,y \in \overline{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\delta} < \infty, \quad \text{com } x \neq y. \quad (1.2)$$

Caso u seja Hölder contínua com expoente $\delta \in (0, 1)$ a expressão em (1.2) será chamada coeficiente de Hölder com expoente δ de u .

Note que uma função u Hölder contínua com expoente δ é uniformemente contínua. Além disso, quando a expressão (1.2) é válida em Ω , para $\delta = 1$, a função u é lipschitziana com constante de Lipschitz $c = [u]_{\delta, \bar{\Omega}}$.

O conjunto

$$C^{k, \delta}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}) : D^\beta u \in C^\delta(\Omega), \quad \forall |\beta| \leq k\}$$

é um espaço vetorial normado completo e sua norma é definida por

$$\|u\|_{k, \delta} = \|u\|_k + \sup_{|\beta| \leq k} [D^\beta u]_{\delta, \bar{\Omega}}.$$

1.2 Operadores elípticos

Nessa seção definiremos e classificaremos os operadores diferenciais Elípticos de segunda ordem.

Definição 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Um operador linear elíptico de segunda ordem é uma aplicação linear $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ da forma*

$$L(u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_i(x) + c(x) u, \quad (1.3)$$

onde $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e a matriz simétrica $[a_{ij}(x)]$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, isto é, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são respectivamente o menor e o maior autovalor de $[a_{ij}(x)]$ então

$$0 < \lambda(x) \|\xi\|^2 \leq \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) \|\xi\|^2, \quad (1.4)$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Os operadores lineares elípticos podem ser classificados a partir de seus autovalores. Segue abaixo a referida classificação.

Definição 1.2.2 *Sejam L operador como em (1.4), $\lambda := \inf_{\Omega} \lambda(x)$ e $\Lambda := \sup_{\Omega} \Lambda(x)$, onde $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são os autovalores mínimo e máximo, respectivamente, de $[a_{ij}(x)]$. Dizemos que:*

i) L é **estritamente elíptico** em Ω quando existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0 \leq \lambda$.

ii) L é **fortemente elíptico** em Ω quando existem $\epsilon_0 > 0$ e $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$ tal que $\epsilon_0 \leq \lambda \leq \Lambda \leq \epsilon_1$.

iii) L é **uniformemente elíptico** em Ω quando $\frac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado.

Segue da continuidade dos coeficientes a_{ij} que os autovalores λ e Λ são funções contínuas em Ω . Dessa forma, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, então L é uniformemente elíptico.

Trataremos agora de outro tipo de operador diferencial parcial de segunda ordem, denominado quasilinear elíptico, cuja a definição é a que segue:

Definição 1.2.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Um operador quasilinear elíptico de segunda ordem é uma aplicação $Q : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ da forma*

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) u_{ij} + b(x, u, \nabla u), \quad (1.5)$$

onde $a_{ij}, b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e além disso, se $\lambda(x, u, \nabla u)$ e $\Lambda(x, u, \nabla u)$ denotam, respectivamente, os autovalores mínimo e máximo da matriz simétrica $[a_{ij}(x, u, \nabla u)]$, então

$$0 < \lambda(x, u, \nabla u) \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x, u, \nabla u) \|\xi\|^2 \quad (1.6)$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, Q um operador quasilinear elíptico como em (1.6) e $u \in C^2(\Omega)$, dizemos que:*

i) u é **solução** relativamente a Q em Ω , se $Q(u) = 0$.

ii) u é **supersolução** relativamente a Q em Ω , se $Q(u) \leq 0$.

iii) u é **subsolução** relativamente a Q em Ω , se $Q(u) \geq 0$.

1.3 Equação das hipersuperfícies mínimas

Seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície orientável de classe C^k , com $k \geq 2$. Definimos uma orientação para S a partir da aplicação normal de Gauss indicada aqui por

$$N : S \longrightarrow \mathbb{S}^n,$$

onde

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}); \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1 \right\}.$$

Considere $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$, a diferencial de N em p . Denote também por dN_p a matriz da aplicação dN_p . O divergente do campo normal N , em $p \in S$, é o traço da matriz dN_p , ou seja,

$$\text{tr } dN_p = \text{div } N(p). \quad (1.7)$$

Observamos que a curvatura média H de uma hipersuperfície S em um ponto $p \in S$ é dada por

$$nH(p) = -\text{tr } dN_p. \quad (1.8)$$

Agora, considere Ω um domínio em \mathbb{R}^n e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , com $k \geq 1$. Seja $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = u(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}. \quad (1.9)$$

Temos $F \in C^k(\Omega \times \mathbb{R})$ e 0 um valor regular de F , pois $\nabla F = (\nabla u, -1) \neq 0$. Dessa forma,

$$\mathfrak{S} = F^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega \times \mathbb{R}; x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)\} = \text{Graf}(u)$$

é uma superfície de classe C^k . Além disso, $N = -\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ define um campo normal em \mathfrak{S} satisfazendo $\langle N, e_{n+1} \rangle \geq 0$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ é base canônica de \mathbb{R}^{n+1} .

Segue de (1.7) e (1.8) que

$$nH(p) = \text{div} \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \quad (1.10)$$

Por outro lado, como

$$\|\nabla F\| = \sqrt{\|\nabla u\|^2 + 1},$$

para que $\mathfrak{S} = \text{Graf}(u)$ seja hipersuperfície mínima é necessário e suficiente que

$$\text{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{\|\nabla u\|^2 + 1}} = 0. \quad (1.11)$$

Assim, se $u \in C^k(\Omega)$ é solução do Problema de Dirichlet (2) então o gráfico de u é uma hipersuperfície mínima em Ω tal que $u|_{\Gamma} = f$.

A seguir, mostraremos que o operador dado em (1.11) é quasilinear elíptico. Para mostrar isso, desenvolvemos o operador Q a fim de escrevê-lo na forma (1.5).

Considere $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$$

e o campo de vetores $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por

$$Y(x) = \nabla u(x).$$

Note que a i -ésima derivada parcial de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u(x)\|^2}}$, é dada por

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{1}{(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^n u_j u_{ij}.$$

Como

$$\text{div} (gY) = g \text{div} Y + \langle \nabla g, Y \rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \text{div} \nabla u + \langle \nabla g, \nabla u \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \Delta u - \frac{1}{(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{j=1}^n u_1 u_j u_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^n u_n u_j u_{nj} \right). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\text{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} = \frac{1}{(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left((1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij} \right). \quad (1.12)$$

Escrevendo o segundo membro de (1.12) na forma (1.5) encontramos

$$\text{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla u) u_{ij}, \quad (1.13)$$

onde

$$a_{ij}(\nabla u) = \frac{1}{(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1 + \|\nabla u\|^2) \delta_{ij} - u_i u_j \right].$$

Os autovalores mínimo e máximo da matriz simétrica $[a_{ij}(\nabla u(x))]$ são dados respectivamente por

$$\lambda(x) = \frac{1}{(1 + \|\nabla u(x)\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \Lambda(x) = \frac{1}{(1 + \|\nabla u(x)\|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

e dessa forma, $Q = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$ é um operador quasilinear elíptico. Além disso, de (1.12) segue que u é solução de $\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} = 0$ em Ω se, e somente se, u for solução de $Q_0 = 0$ onde

$$Q_0(u) := (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij}. \quad (1.14)$$

Em particular, segue de (1.10), (1.11) e (1.12) que a curvatura média H de $\mathfrak{S} = \operatorname{Graf}(u) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, em relação ao vetor normal N e tal que $\langle N, e_{n+1} \rangle \geq 0$, satisfaz a igualdade

$$n(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{3}{2}} H(p) = (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij}. \quad (1.15)$$

Lema 1.3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. O operador $Q_0 : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ dado por (1.14) é de classe C^1 , e vale*

$$D(Q_0)_u(v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i v_i, \quad (1.16)$$

onde $v \in C^2(\bar{\Omega})$, $a_{ij}(\nabla u) = (1 + \|\nabla u\|^2) \delta_{ij} - u_i u_j$ e $b_i(\nabla u, D^2 u) = (2 \Delta u) u_i - 2 \sum_{j=1}^n u_j u_{ij}$.

Demonstração:

Temos

$$\begin{aligned} D(Q_0)_u(v) &= \frac{d}{dt} Q_0(u + tv) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[1 + \|\nabla(u + tv)\|^2 \right] (\Delta u + t \Delta v) - \sum_{i,j=1}^n (u_i + tv_i)(u_j + tv_j)(u_{ij} + tv_{ij}) \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[(1 + \|\nabla u\|^2 + t^2 \|v\|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle) (\Delta u + t \Delta v) \right] \Big|_{t=0} \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij} + t u_i u_j v_{ij} + 2t u_i v_j u_{ij} + 2t^2 u_i v_j v_{ij} + t^2 v_i v_j u_{ij} + t^3 v_i v_j v_{ij} \right) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(2\|v\|^2 t + 2\langle u, v \rangle) (\Delta u + t \Delta v) + (1 + \|\nabla u\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle u, v \rangle) (\Delta v) \right]_{|_{t=0}} \\
&\quad - \left[\sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij} + 2u_i v_j u_{ij} + 4t u_i v_j v_{ij} + 2t v_i v_j u_{ij} + 3t^2 v_i v_j v_{ij} \right]_{|_{t=0}} \\
&= 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle \Delta u + (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta v - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij}.
\end{aligned}$$

Notamos que

$$(1 + \|\nabla u\|^2) \Delta v - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij} = \sum_{i,j=1}^n [(1 + \|\nabla u\|^2) \delta_{ij} - u_i u_j] v_{ij}$$

e

$$\begin{aligned}
&2\langle \nabla u, \nabla v \rangle \Delta u - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} \\
&= 2 \Delta u \sum_{i=1}^n u_i v_i - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(2u_i \Delta u - 2 \sum_{j=1}^n u_j u_{ij} \right) v_i.
\end{aligned}$$

Segue então que

$$D(Q_0)_u(v) = \sum_{i,j=1}^n [(1 + \|\nabla u\|^2) \delta_{ij} - u_i u_j] v_{ij} + \sum_{i=1}^n \left(2u_i \Delta u - 2 \sum_{j=1}^n u_j u_{ij} \right) v_i.$$

Sabe-se que todo operador linear limitado entre espaços vetoriais normados é contínuo. Portanto, a fim de mostrar a continuidade de $D(Q_0)_u$ devemos mostrar que existe $c > 0$ tal que

$$\|D(Q_0)_u v\|_{0,\Omega} \leq c \|v\|_{2,\Omega}.$$

Usando que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ concluímos que os coeficientes $a_{ij}(\nabla u)(x)$ e $b_i(\nabla u, D^2 u)(x)$ dados em (1.13) são funções contínuas no compacto $\overline{\Omega}$ e portanto, limitadas por uma constante $c = c(n, \|u\|_{2,\Omega})$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|D(Q_0)_u v\|_{0,\Omega} &= \left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla u) v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(\nabla u, D^2 u) v_i \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c \left(\sum_{i,j=1}^n \|v_{ij}(x)\|_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|v_i(x)\|_{0,\Omega} \right) \\
&\leq c (\|D^2 v\|_{0,\Omega} + \|\nabla v\|_{0,\Omega}) \leq c \|v\|_{2,\Omega}.
\end{aligned}$$

■

1.4 O princípio do máximo

Mostraremos as propriedades dos operadores elípticos que são mais importantes para o desenvolvimento da teoria a ser apresentada na sequência. Tais resultados são clássicos, sendo [6] uma referência básica, e por isso, algumas demonstrações serão omitidas.

Em toda esta seção consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\Gamma := \partial\Omega$ e, como vimos anteriormente, o operador L definido em (1.3) é uniformemente elíptico em domínios limitados. Sendo assim $\frac{|b_i|}{\lambda}$ é limitado para todo $i = 1, \dots, n$ e $x \in \Omega$.

O próximo resultado é fundamental para o desenvolvimento da teoria apresentada neste trabalho, sendo aplicado em demonstrações de unicidade de solução relativamente ao Problema de Dirichlet (2) e também no cálculo de estimativas *a priori* para a norma do gradiente de uma solução do referido problema.

Proposição 1.4.1 (*Princípio do máximo fraco*) *Seja L um operador linear elíptico como em (1.3) com coeficiente $c = 0$. Dado $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*

$$\text{i) Se } Lu \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ então } \sup_{\Omega} u = \sup_{\Gamma} u.$$

$$\text{ii) Se } Lu \leq 0 \text{ em } \Omega \text{ então } \inf_{\Omega} u = \inf_{\Gamma} u.$$

Demonstração:

Mostraremos apenas o item (i), pois a demonstração do item (ii) é feita de maneira análoga.

Inicialmente considere $Lu > 0$ em Ω . Suponha que existe $p \in \text{int}(\Omega)$ tal que u atinge um máximo local em p . Então,

$$\nabla u(p) = (u_1(p), \dots, u_n(p)) = (0, \dots, 0), \quad i=1, \dots, n.$$

Além disso, a matriz Hessiana $[u_{ij}(p)]$ é uma matriz não positiva. Por outro lado, segue da elipticidade de L que a matriz de coeficientes $[a_{ij}(p)]$ é positiva. Portanto,

$$Lu(p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(p)u_{ij}(p) \leq 0,$$

contrariando a hipótese $Lu > 0$ em Ω . Logo $p \in \Gamma$.

Caso $Lu = 0$ em Ω , note que, como Ω é limitado, $0 < \lambda$ e b_i são funções contínuas em $\overline{\Omega}$ e portanto, $\frac{|b_i|}{\lambda}$ é limitado. Então, considere $b_0 := \sup_{\Omega} \frac{|b_i|}{\lambda}$ com $i = 1, \dots, n$, e defina $v = e^{\gamma x_1}$, onde γ é será determinado futuramente.

Observamos inicialmente que

$$v_1 = \gamma e^{\gamma x_1}, \quad v_j = 0, \quad \text{para } j \neq 1$$

$$\text{e } v_{11} = \gamma^2 e^{\gamma x_1} \text{ e } v_{ij} = 0 \text{ para } (i, j) \neq (1, 1),$$

portanto

$$Lv = (a_{11}\gamma^2 + b_1\gamma)e^{\gamma x_1} \geq (\lambda\gamma^2 - b_0\lambda\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Notemos que a expressão à direita da desigualdade é um polinômio de grau 2 em γ . Dessa forma, γ pode ser tomado suficientemente grande de modo que $Lv > 0$ em Ω .

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, temos $L(u + \varepsilon v) > 0$. Então,

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon v) = \sup_{\Gamma}(u + \varepsilon v).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, segue o resultado. ■

No caso em que L é como em (1.3), com $c \leq 0$, temos os seguintes corolários:

Corolário 1.4.2 *Seja L como em (1.3) com $c \leq 0$. Dado $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, ponha $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$*

i) Se $Lu \geq 0$ em Ω então $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Gamma} u^+$,

ii) Se $Lu \leq 0$ em Ω então $\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\Gamma} u^-$,

iii) Se $Lu = 0$ em Ω então $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\Gamma} |u|$.

Corolário 1.4.3 *Seja L como em (1.3), com $c \leq 0$. Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tais que $Lu = Lv$, satisfazendo $u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}$. Então, $u = v$ em Ω .*

A demonstração do corolário 1.4.2 pode ser vista em [6], p 33. Em particular o Corolário 1.4.3 segue imediatamente do Corolário 1.4.2 aplicado à função $w = u - v$.

O próximo resultado permitirá estabelecer, a cada $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, uma correspondência entre Q_0 e um operador linear elíptico L (a depender de u, v) que satisfaz as hipóteses da Proposição 1.4.1. Tal resultado possibilitará trabalharmos com o princípio do máximo em algumas situações específicas relacionadas ao operador Q_0

Proposição 1.4.4 *Dadas $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, existe um operador elíptico L , da forma (1.3) com coeficiente $c = 0$, tal que $Q_0u - Q_0v = L(u - v)$.*

Demonstração:

Seja $w = u - v$. Devemos encontrar L linear elíptico tal que $Lw = Q_0u - Q_0v$. Para isso, considere o caminho

$$\beta(t) = tu + (1-t)v, \quad t \in [0, 1].$$

Note que,

$$Q_0(\beta(0)) = Q_0v, \quad Q_0(\beta(1)) = Q_0u \quad e \quad \beta'(t) = u - v = w.$$

Usando o Lema 1.3.1 temos

$$\begin{aligned} Q_0u - Q_0v &= \int_0^1 \frac{d}{dt} Q_0(\beta(t)) dt = \int_0^1 D(Q_0)_{(\beta(t))}(\beta'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla\beta(t)) w_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(\nabla(\beta(t)), D^2(\beta(t)) w_i \right) dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 a_{ij}(\nabla\beta(t)) dt \right) w_{ij} + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 b_i(\nabla(\beta(t)), D^2(\beta(t)) dt \right) w_i, \end{aligned}$$

onde a_{ij} e b_i estão definidos em (1.16)

Tomando como coeficiente, $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_i : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\mathcal{A}_{ij}(x) = \int_0^1 a_{ij}(\nabla\beta(t))(x) dt, \quad \mathcal{B}_i(x) = \int_0^1 b_i(\nabla\beta(t), D^2(\beta(t)))(x) dt,$$

temos

$$Q_0u - Q_0v = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij} w_{ij} + \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i w_i = Lw.$$

Para concluir a proposição só precisamos mostrar que $Lw = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij} w_{ij} + \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i w_i$

é elíptico.

Como

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}(x) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 a_{ij}(\nabla\beta(t))(x) \xi_i \xi_j dt \geq \int_0^1 \|\xi\|^2 dt = \|\xi\|^2$$

para qualquer $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $x \in \overline{\Omega}$, então, segue o resultado. \blacksquare

Combinando o resultado acima com o item (iii) do Corolário 1.4.2, segue que se u é tal $Q_0u = 0$, então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\Gamma} |u|.$$

De fato, basta ver que tomando $v \equiv 0$, existe L como em (1.3) com $c = 0$ em Ω , tal que

$$Lu = Q_0u - Q_0 \cdot 0 = 0.$$

Corolário 1.4.5 *Sejam u, v funções de classe C^2 em $(\overline{\Omega})$, tais que $Q_0u \geq Q_0v$ em Ω . Se $u \leq v$ em Γ , então $u \leq v$ em Ω .*

Demonstração:

Pela Proposição 1.4.4 existe L linear elíptico, como em (1.3), com coeficiente $c = 0$ tal que $L(u - v) = Q_0u - Q_0v \geq 0$ em Ω . Aplicando o princípio do máximo fraco à $z = u - v \in C^2(\overline{\Omega})$ segue que

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\Gamma}(u - v).$$

Portanto,

$$u - v \leq \sup_{\Gamma}(u - v) \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Segue daí o resultado. ■

Proposição 1.4.6 *(Princípio do máximo para o gradiente) Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução de $Q_0 = 0$. Então:*

$$\sup_{\Omega} \|\nabla u\| = \sup_{\Gamma} \|\nabla u\|$$

A prova deste resultado encontra-se em [6] pg. 362 e também pode ser vista de forma mais detalhada em [7].

1.5 Método da continuidade

Para a demonstração do Teorema 1, tomaremos como ponto de partida o próximo resultado, que decorre da aplicação do método da continuidade e de resultados conhecidos sobre operadores lineares e quasilineares elípticos.

Proposição 1.5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cujo bordo Γ é de classe $C^{2,\delta}$ e seja $f \in C^{2,\delta}(\Gamma)$. Suponha que exista $M > 0$ tal que se $u \in C^{2,\delta}(\overline{\Omega})$ é solução de*

$$\begin{cases} Q_0 = 0 \\ u|_{\Gamma} = \sigma f, \end{cases} \quad (1.17)$$

então $|\nabla u| \leq M$ para todo $\sigma \in [0, 1]$. Então existe solução única para o Problema de Dirichlet (2).

Para provar este resultado, mostra-se sob hipóteses envolvendo Ω e f , que o conjunto

$$\mathcal{I} = \{\sigma \in [0, 1] : \exists u_\sigma \in C^{2,\delta}(\bar{\Omega}) \text{ tal que } Q_0(u_\sigma) = 0, u_{\sigma\Gamma} = \sigma f\}$$

é não vazio, aberto e fechado em $[0, 1]$ e portanto coincide com tal intervalo.

A demonstração desta proposição envolve uma série de resultados encontrados em [6] e pode ser vista, de forma detalhada em [7] na seção 2.2, e por isso não a faremos aqui.

Segue da Proposição 1.5.1 que uma forma de garantir que o Problema de Dirichlet (2) seja bem posto é conseguir uma limitação *a priori* para a norma do gradiente de uma solução de tal problema. Nesse sentido, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.5.2 *Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma solução de $Q_0 = 0$ e $p \in \Gamma$. Se V é uma vizinhança de p e existe uma supersolução v de Q_0 definida em $G = V \cap \bar{\Omega}$ tal que $v(p) = u(p)$ e $u \leq v$ em ∂G , então*

$$\frac{\partial u(p)}{\partial \vartheta} \leq \|\nabla v(p)\| \quad (1.18)$$

para todo vetor unitário ϑ que aponta para o interior de Ω

Demonstração:

Por hipótese u, v satisfazem as condições do Corolário 1.4.5 pois são, respectivamente, solução e supersolução de Q_0 . Consequentemente

$$u \leq v \text{ em } G.$$

Como $u(p) = v(p)$, segue que

$$\frac{\partial u(p)}{\partial \vartheta} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(p + t\vartheta) - u(p)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v(p + t\vartheta) - v(p)}{t} \leq \|\nabla v(p)\|.$$

■

No próximo capítulo definiremos, a cada $p \in \Gamma$, uma vizinhança V e também uma supersolução v satisfazendo as hipóteses da Proposição 1.5.2 e, dessa forma, conseguiremos obter as estimativas desejadas.

Capítulo 2

A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET

Como já comentado anteriormente, para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado, o Problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas (1), tem solução única para qualquer $f \in C^0(\Gamma)$ se, e somente se, Ω é convexo. Neste capítulo consideraremos um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 2$) de classe $C^{2,\delta}$. Veremos que, nesse contexto, a convexidade de Ω não é a generalização mais apropriada do caso $n = 2$, mas sim é a curvatura média de Γ que desempenha papel fundamental.

Segue como consequência da Proposição 1.5.1, que uma maneira de garantir que o Problema de Dirichlet (2) tenha solução é conseguir uma limitação *a priori* para a norma do gradiente de qualquer possível solução u desse problema. Isso será feito a partir da construção de uma supersolução v para o operador Q_0 que apresente norma do gradiente limitado. Após a construção dessa supersolução, usaremos as estimativas de $\|\nabla v\|$ para obter estimativas *a priori* para $\|\nabla u\|$.

Verificaremos que cada Ω e f , dados pelo Problema de Dirichlet (2), está associada uma constante $\mathfrak{B}(\Omega, \|f\|_1, \|f\|_2)$, que ao longo do capítulo a explicitaremos. Veremos como a condição $h \leq \mathfrak{B}$, onde $2h$ é a oscilação do dado no bordo, implica numa limitação *a priori* da norma do gradiente de uma solução de tal problema. Com esses elementos em mãos demonstraremos o Teorema 1.

2.1 Resultados auxiliares

A fim de construir a supersolução v mencionada anteriormente, estabeleceremos uma série de resultados preliminares.

Lema 2.1.1 *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um domínio limitado e $\varphi \in C^2(D)$ tal que $\|\nabla \varphi\| < 1$. Suponha que*

$$k := \sup_{\mathfrak{S}} \left\{ \left\| k_n^{(i)} \right\| \right\}_{i=1}^{n-1} < +\infty,$$

onde $\mathfrak{S} := \text{Graf}(\varphi)$ e $k_n^{(i)}$ indica a curvatura normal da i -ésima curva coordenada em \mathfrak{S} . Sob estas condições, temos:

$$|\Delta \varphi| \leq \sqrt{2}nk \quad (2.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} (\varphi_{ij})^2 \leq 2(n+2)k^2. \quad (2.2)$$

Demonstração:

Inicialmente veremos que a curvatura normal da i -ésima curva coordenada de \mathfrak{S} é dada por

$$k_n = \frac{\varphi_{ii}}{(1 + \varphi_i)^2 (1 + \|\nabla \varphi\|^2)^{1/2}}. \quad (2.3)$$

De fato, considere $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ base canônica de \mathbb{R}^{n-1} e $q \in D$. Ponha $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ dada por

$$\beta(t) = q + te_i,$$

onde $\varepsilon > 0$ é tal que $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset D$. Considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{S}$ a i -ésima curva coordenada sobre \mathfrak{S} , dada por

$$\gamma(t) = (\beta(t), \varphi(\beta(t))).$$

Note que $\gamma(0) = (q, \varphi(q)) = p$.

Temos $\gamma'(t) = (e_i, \varphi_i(q + te_i))$ e portanto

$$\gamma'(0) = (e_i, \varphi_i(q)).$$

Pondo $\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, segue que

$$\tau'(0) = \frac{\varphi_{ii}(q)}{(1 + \varphi_i^2(q))^{3/2}} (-\varphi_i(q), e_i),$$

$$\text{e } \|\tau'(0)\| = \frac{|\varphi_{ii}(q)| (1 + \varphi_i^2(q))}{(1 + \varphi_i^2(q))^{3/2}} = \frac{|\varphi_{ii}(q)|}{1 + \varphi_i^2(q)}.$$

Logo, a normal a curva é

$$\eta(p) = \frac{\tau'(0)}{\|\tau'(0)\|} = \frac{\varphi_{ii}(q)}{|\varphi_{ii}(q)| (1 + \varphi_i^2(q))^{1/2}} (-\varphi_i e_i, 1).$$

Seja $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n. \quad (2.4)$$

Como na seção 1.3, tomamos o campo normal a superfície \mathfrak{S} em p por

$$N(p) = -\frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|} = \frac{1}{(1 + \|\nabla \varphi(q)\|^2)^{1/2}} (-\nabla \varphi(q), 1). \quad (2.5)$$

Temos então

$$\langle \eta(p), N(p) \rangle = \frac{\varphi_{ii}(q)(1 + \varphi_i^2(q))^{1/2}}{|\varphi_{ii}(q)| (1 + \|\nabla \varphi(q)\|^2)^{1/2}}.$$

A expressão da curvatura normal de γ é dada por $k_n(q) = \kappa(q) \langle \eta(p), N(p) \rangle$, onde κ é a curvatura de γ . Como

$$\kappa(q) = \frac{|\varphi_{ii}(q)|}{(1 + \varphi_i^2(q))^{3/2}},$$

$$\text{segue que } k_n(q) = \frac{\varphi_{ii}(q)}{(1 + \varphi_i^2(q))(1 + \|\nabla \varphi(q)\|^2)^{1/2}}.$$

Como $\varphi \in C^2$ tem-se que $\varphi_{ij}(q) = \varphi_{ji}(q)$. Além disso, (2.1) e (2.2) são invariantes por mudança de coordenadas, assim, sem perda de generalidade podemos supor que a matriz $[\varphi_{ij}(q)]$ é diagonal.

Considere a expressão de k_n para a curvatura normal da i -ésima curva coordenada da superfície \mathfrak{S} dada em (2.3). Como $\|\nabla \varphi\| < 1$, segue que

$$|\varphi_{ii}(q)| \leq \sqrt{2} |k_n^{(i)}| (1 + \varphi_i^2(q)) \leq \sqrt{2} (1 + \varphi_i^2(q)) k. \quad (2.6)$$

$$\text{Por outro lado, } |\Delta \varphi(q)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\varphi_{ii}(q)| \leq \sqrt{2} k \sum_{i=1}^{n-1} (1 + \varphi_i^2(q)) = \sqrt{2} n k.$$

Como $[\varphi_{ij}(q)]$ é diagonal, segue de (2.6) que

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_{ij}^2(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{ii}^2(q) \leq 2k^2 \sum_{i=1}^{n-1} (1 + \varphi_i^2(q))^2 \leq 2(n+2)k^2.$$

■

No que segue, suponha $a > 0$ e $\varphi \in C^2(B_a(0))$, onde $B_a(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ indica a bola centrada na origem de \mathbb{R}^{n-1} e de raio a . Suponha

$$k := \sup_{\text{Graf}(\varphi)} \left\{ \|k_n^{(i)}\|_{i=1}^{n-1} \right\} < +\infty, \quad (2.7)$$

onde $k_n^{(i)}$ indica a curvatura normal da i -ésima curva coordenada em $\text{Graf}(\varphi)$.

Agora, considere α, β e c constantes positivas, que serão explicitadas posteriormente e que satisfazem

$$\alpha < \beta, \quad c < \frac{\pi}{2\beta} \quad e \quad \frac{\pi}{2\alpha} \leq a. \quad (2.8)$$

A partir destas condições definimos

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \varphi + c - \frac{\pi}{2\beta} < x_n < \varphi + c - \frac{\alpha}{\beta}r, \quad \text{onde } r := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}. \quad (2.9)$$

Por construção, V é um conjunto aberto formado a partir da interseção dos conjuntos

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \quad r < \frac{\pi}{2\alpha} \quad e \quad x_n > \varphi + c - \frac{\pi}{2\beta} \right\},$$

$$B = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \quad r < \frac{\pi}{2\alpha} \quad e \quad x_n < \varphi + c - \frac{\alpha}{\beta}r \right\}.$$

Além disso, como $r < \frac{\pi}{2\alpha}$ segue que

$$0 < \alpha r < \frac{\pi}{2} \quad e \quad 0 < \beta(\varphi + c - x_n) < \frac{\pi}{2}.$$

Em V definimos as funções $s, t, S, T : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(x) = \sec(\alpha r), \quad t(x) = \tan(\alpha r), \quad S(x) = \sec \beta(\varphi + c - x_n) \quad e \quad T(x) = \tan \beta(\varphi + c - x_n), \quad (2.10)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Observe que as funções definidas em (2.10) são crescentes em V e, além disso, vale $t < s$ e $T < S$, tendo vista que $\tan \sigma < \sec \sigma$, $\forall \sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A seguir apresentamos dois lemas elementares sobre as funções definidas anteriormente e que serão usados no decorrer deste capítulo.

Lema 2.1.2 *Seja $s, t, S, T : V \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas em (2.10). São válidas as seguintes desigualdades:*

$$\frac{2tT^2 + s^2T}{s^2S^2} \leq \frac{T^2 + T}{S^2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \quad (2.11)$$

Demonstração:

Considere $t = \tan \sigma$, $T = \tan \rho$, $s = \sec \sigma$, $S = \sec \rho$ onde $\sigma, \rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. A fim de provar a primeira desigualdade observe que

$$\frac{2t}{s^2} = \frac{2 \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma}}{\left(\frac{1}{\cos \sigma}\right)^2} = 2 \sin \sigma \cos \sigma = \sin 2\sigma \leq 1$$

portanto,

$$\frac{2tT^2}{s^2S^2} \leq \frac{T^2}{S^2}.$$

Segue daí que

$$\frac{2tT^2 + s^2T}{s^2S^2} = \frac{2tT^2}{s^2S^2} + \frac{T}{S^2} \leq \frac{T^2 + T}{S^2}.$$

Para mostrar a segunda desigualdade, observamos que

$$\frac{T^2 + T}{S^2} = \frac{\frac{\sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} + \frac{\sin \rho}{\cos \rho}}{\frac{1}{\cos^2 \rho}} = \sin^2 \rho + \sin \rho \cos \rho = \sin^2 \rho + \frac{\sin 2\rho}{2},$$

que $g(\rho) = \sin^2 \rho + \frac{\sin 2\rho}{2}$ é crescente em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e, além disso, $\lim_{\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(\rho) = 1$. Segue então que

$$\frac{T^2 + T}{S^2} \leq 1 \leq \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right).$$

■

Lema 2.1.3 *Seja $\sigma \geq 1$. Então, vale*

$$\tan(\sec^{-1} \sigma) = \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}} \leq \sigma. \quad (2.12)$$

Demonstração:

De fato, seja $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\rho = \sec^{-1} \sigma$, então

$$\tan(\sec^{-1} \sigma) = \tan \rho = \sqrt{\sec^2 \rho - 1} = \sec \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 \rho}} = \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}} \leq \sigma.$$

■

A estimativa dada pelo lema a seguir será fundamental à construção de uma supersolução v a ser utilizada como barreira relativamente Problema de Dirichlet (2). Por ser um lema central na demonstração do Teorema 1 apresentaremos a demonstração em detalhes.

Lema 2.1.4 Seja $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \log s - \frac{1}{\beta} \log S, \quad (2.13)$$

aqui V é como em (2.9) e s, S são como em (2.10). Então,

$$Q_0(w) \leq -s^2 S^2 \{ \beta - 2(n + \sqrt{n+2})k - (3n-5)\alpha \} - (n-1)(1 + \|\varphi\|^2)^{3/2} HT^3, \quad (2.14)$$

onde H é a curvatura média de $\text{Graf}(\varphi)$.

Demonstração:

Dado $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ consideremos $y = \frac{x}{r}$ onde $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Assim $\|y\| = 1$.

Devemos calcular

$$Q_0(w) = (1 + \|\nabla w\|^2) \Delta w - \sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij}. \quad (2.15)$$

Para isso, calculamos inicialmente as derivadas parciais.

$$w_i = t \frac{\partial r}{\partial x_i} - T \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = t y_i - T \varphi_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1;$$

$$w_n = T ;$$

$$w_{ij} = \left(\alpha s^2 y_i y_j + \frac{t}{r} (\delta_{ij} - y_i y_j) - \beta S^2 \varphi_i \varphi_j - T \varphi_{ij} \right) \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n-1;$$

$$w_{in} = \beta S^2 \varphi_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1;$$

e finalmente,

$$w_{nn} = -\beta S^2.$$

Note que

$$1 + \|\nabla w\|^2 = s^2 + T^2 (1 + \|\nabla \varphi\|^2) - 2tT \langle y, \nabla \varphi \rangle. \quad (2.16)$$

De fato,

$$\begin{aligned} 1 + \|\nabla w\|^2 &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (t y_i - T \varphi_i)^2 + T^2 \\ &= 1 + t^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - 2tT \sum_{i=1}^{n-1} y_i \varphi_i + T^2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 + T^2 \\ &= 1 + t^2 - 2tT \langle y, \nabla \varphi \rangle + T^2 \|\nabla \varphi\|^2 + T^2 \end{aligned}$$

$$= s^2 + T^2(1 + \|\nabla\varphi\|^2) - 2tT \langle y, \nabla\varphi \rangle.$$

Temos também que

$$\Delta w = \alpha s^2 + \frac{t}{r}(n-2) - \beta S^2(\|\nabla\varphi\|^2 + 1) - T \Delta \varphi, \quad (2.17)$$

pois

$$\begin{aligned} \Delta w &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha s^2 y_i^2 + \frac{t}{r}(1 - y_i^2) - \beta S^2 (\varphi_i)^2 - T \varphi_{ii} \right) - \beta S^2 \\ &= \alpha s^2 + \frac{t}{r}(n-1) - \frac{t}{r} - \beta S^2 \|\nabla\varphi\|^2 - T \Delta \varphi - \beta S^2 \\ &= \alpha s^2 + \frac{t}{r}(n-2) - \beta S^2(\|\nabla\varphi\|^2 + 1) - T \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Consequentemente, de (2.16) e (2.17) temos que o produto $(1 + \|\nabla w\|^2) \Delta w$ é dado por

$$\begin{aligned} &\left[\alpha s^2 + \frac{t}{r}(n-2) - \beta S^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \beta S^2 - T \Delta \varphi \right] \left[s^2 + T^2 + T^2 \|\nabla\varphi\|^2 - 2tT \langle y, \nabla\varphi \rangle \right] \\ &= \alpha s^4 + \alpha s^2 T^2 + \alpha s^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^2 - 2\alpha s^2 t T \langle y, \nabla\varphi \rangle \\ &\quad + \frac{t}{r}(n-2)(1 + \|\nabla w\|^2) \\ &\quad - \beta s^2 S^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \beta S^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \beta S^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^4 + 2\beta t T S^2 \langle \vec{v}, \nabla\varphi \rangle \|\nabla\varphi\|^2 \\ &\quad - \beta s^2 S^2 - \beta S^2 T^2 - \beta S^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^2 + 2\beta t T S^2 \langle y, \nabla\varphi \rangle \\ &\quad - s^2 T \Delta \varphi - T^3 \Delta \varphi - T^3 \|\nabla\varphi\|^2 \Delta \varphi + 2tT^2 \Delta \varphi \langle y, \nabla\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Segue da igualdade

$$\alpha s^4 + \alpha s^2 T^2 = \alpha s^2 + \alpha s^2 t^2 + \alpha s^2 T^2 = \alpha s^2 t^2 + \alpha s^2 S^2$$

que o produto $(1 + \|\nabla w\|^2) \Delta w$ é dado por

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \alpha s^2 t^2 + \alpha s^2 S^2 + \alpha s^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^2 - 2\alpha s^2 t T \langle y, \nabla\varphi \rangle \\ &\quad + \frac{t}{r}(n-2)(1 + \|\nabla w\|^2) \\ &\quad - \beta s^2 S^2 \|\nabla\varphi\|^2 - 2\beta S^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \beta S^2 T^2 \|\nabla\varphi\|^4 + 2\beta t T S^2 \langle y, \nabla\varphi \rangle \|\nabla\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta s^2 S^2 - \beta S^2 T^2 + 2\beta t T S^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle \\
& -s^2 T \Delta \varphi - T^3 (1 + \|\nabla \varphi\|^2) \Delta \varphi + 2t T^2 \Delta \varphi \langle y, \nabla \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

A partir das expressões das derivadas parciais de w calculadas anteriormente desenvolvemos a expressão $\sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij}$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left\{ (t y_i - T \varphi_i) (t y_j - T \varphi_j) \left[\alpha s^2 y_i y_j + \frac{t}{r} (\delta_{ij} - y_i y_j) - \beta S^2 \varphi_i \varphi_j - T \varphi_{ij} \right] \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left\{ \left(t^2 y_i y_j - t T y_i \varphi_j - t T y_j \varphi_i + T^2 \varphi_i \varphi_j \right) \left[\alpha s^2 y_i y_j + \frac{t}{r} (\delta_{ij} - y_i y_j) - \beta S^2 \varphi_i \varphi_j - T \varphi_{ij} \right] \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha s^2 t^2 y_i^2 y_j^2 + \frac{t^3}{r} y_i y_j (\delta_{ij} - y_i y_j) - \beta t^2 S^2 y_i y_j \varphi_i \varphi_j - t^2 T y_i y_j \varphi_{ij} \\
&\quad - \alpha s^2 t T y_i^2 y_j \varphi_j - \frac{t^2}{r} y_i \varphi_j (\delta_{ij} - y_i y_j) + \beta t T S^2 y_i \varphi_i \varphi_j^2 + t T y_i \varphi_j \varphi_{ij} \\
&\quad - \alpha s^2 t T y_i y_j^2 \varphi_i - \frac{t^2}{r} y_j \varphi_i (\delta_{ij} - y_i y_j) + \beta t T S^2 y_j \varphi_i^2 \varphi_j + t T^2 y_j \varphi_i \varphi_{ij} \\
&\quad + \alpha s^2 T^2 y_i y_j \varphi_i \varphi_j + \frac{t}{r} T^2 \varphi_i \varphi_j (\delta_{ij} - y_i y_j) - \beta S^2 T^2 \varphi_i^2 \varphi_j^2 - T^3 \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij}.
\end{aligned}$$

Denotando Φ a matriz Hessiana de φ , temos que

$$\Phi y = \left(\sum_{j=1}^n y_j \varphi_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n y_j \varphi_{(n-1)j} \right).$$

Assim,

$$\langle y, \Phi y \rangle = \left\langle (y_1, \dots, y_{n-1}), \left(\sum_{j=1}^n y_j \varphi_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n y_j \varphi_{(n-1)j} \right) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \varphi_{ij}.$$

Analogamente temos

$$\langle y, \Phi(\nabla \varphi) \rangle = \sum_{i,j=1}^n y_i \varphi_j \varphi_{ij}.$$

Observamos também que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n y_i^2 y_j^2 &= 1, & \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \varphi_i \varphi_j &= \langle y, \nabla \varphi \rangle^2, \\
\sum_{i,j=1}^n y_i^2 y_j \varphi_j &= \langle y, \nabla \varphi \rangle, & \sum_{i,j=1}^n y_i \varphi_i \varphi_j^2 &= \langle y, \nabla \varphi \rangle \|\nabla \varphi\|^2 \text{ e} \\
\sum_{i,j=1}^n \varphi_i^2 \varphi_j^2 &= \|\nabla \varphi\|^4.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} &= \alpha s^2 t^2 - \beta t^2 S^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 - t^2 \langle y, \Phi(y) \rangle - 2\alpha s^2 t T \langle y, \nabla \varphi \rangle \\ &+ 2\beta t T S^2 \|\nabla \varphi\|^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle + 2t T^2 \langle y, \Phi(\nabla \varphi) \rangle + \alpha s^2 T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 + \frac{t}{r} T^2 \|\nabla \varphi\|^2 \\ &- \frac{t}{r} T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 - \beta T^2 S^2 \|\nabla \varphi\|^4 - T^3 \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $i = 1, \dots, n-1$ temos

$$w_i w_n w_{in} = (t y_i - T \varphi_i) T \beta S^2 \varphi_i = \beta S^2 t T y_i \varphi_i - \beta S^2 T \varphi_i^2.$$

Logo,

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i w_n w_{in} = 2\beta S^2 t T \langle y, \nabla \varphi \rangle - 2\beta S^2 T^2 \|\nabla \varphi\|^2.$$

Considerando também

$$w_n^2 w_{nn} = -\beta S^2 T^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij} &= \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} \right) + \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i w_n w_{in} \right) + w_n^2 w_{nn} = \\ &\alpha s^2 t^2 - \beta t^2 S^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 - t^2 \langle y, \Phi(y) \rangle - 2\alpha s^2 t T \langle y, \nabla \varphi \rangle + 2\beta t T S^2 \|\nabla \varphi\|^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle \\ &+ 2t T^2 \langle y, \Phi(\nabla \varphi) \rangle + \alpha s^2 T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 + \frac{t}{r} T^2 \|\nabla \varphi\|^2 - \frac{t}{r} T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 - \beta T^2 S^2 \|\nabla \varphi\|^4 \\ &- T^3 \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} + 2\beta S^2 t T \langle y, \nabla \varphi \rangle - 2\beta S^2 T^2 \|\nabla \varphi\|^2 - \beta S^2 T^2. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.15) as expressões observadas em (a) e (b) temos,

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad Q_0 w &= \alpha s^2 S^2 + \alpha s^2 T^2 \|\nabla \varphi\|^2 + (n-2) \frac{t}{r} (1 + \|\nabla w\|^2) - \beta s^2 S^2 - \beta s^2 S^2 \|\nabla \varphi\|^2 \\ &- \beta S^2 T^2 - s^2 T \Delta \varphi - T^3 (1 + \|\nabla \varphi\|^2) \Delta \varphi + 2t T^2 \Delta \varphi \langle y, \nabla \varphi \rangle + \beta t^2 S^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 \\ &+ t^2 T \langle y, \Phi(y) \rangle - 2t T^2 \langle y, \Phi(\nabla \varphi) \rangle - \alpha s^2 T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 - \frac{t}{r} T^2 \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{t}{r} T^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 \\ &+ T^3 \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} + \beta S^2 T^2. \end{aligned}$$

Algumas das expressões acima podem ser reescritas conforme segue:

$$(1.15) \quad \text{i) } -T^3(1 + \|\nabla\varphi\|^2) \Delta \varphi + T^3 \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} = -(n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} HT^3. \text{ (Como em$$

$$\text{ii) } \alpha s^2 S^2 - \beta s^2 S^2 = (\alpha - \beta) s^2 S^2$$

$$\text{iii) } -s^2 T \Delta \varphi + 2tT^2 \Delta \varphi \langle y, \nabla \varphi \rangle = T \Delta \varphi (2tT \langle y, \nabla \varphi \rangle - s^2)$$

$$\text{iv) } t^2 T \langle y, \Phi(\nabla y) \rangle - 2tT^2 \langle y, \Phi(\nabla \varphi) \rangle = tT \langle y, \Phi(ty - 2T\nabla \varphi) \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{v) } & \|\nabla\varphi\|^2 (\alpha s^2 T^2 - \beta s^2 S^2 - \frac{t}{r} T^2) - \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 (\alpha s^2 T^2 - \beta t^2 S^2 - \frac{t}{r} T^2) \\ & = \{ \|\nabla\varphi\|^2 - \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 \} (s^2 (\alpha T^2 - \beta S^2) - \frac{t}{r} T^2) - \beta S^2 \langle y, \nabla \varphi \rangle^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{d) } \quad Q_0(w) &= -(n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} HT^3 \\ &+ (\alpha - \beta) s^2 S^2 + T \Delta \varphi (2tT^2 \langle \vec{v}, \nabla \varphi \rangle - s^2) \\ &+ tT \langle \vec{v}, \Phi\{t\vec{v} - 2T\nabla \varphi\} \rangle + (n-2) \frac{t}{r} (1 + \|\nabla w\|^2) \\ &- \left\{ (s^2 (\beta S^2 - \alpha T^2) + \frac{t}{r} T^2) \right\} \{ \|\nabla\varphi\|^2 - \langle y, \nabla \varphi \rangle^2 \} \\ &- \beta S^2 \langle \vec{v}, \nabla \varphi \rangle^2. \end{aligned}$$

Para a conclusão do Lema 2.1.4 devemos ainda majorar algumas das expressões obtidas em (d).

Para a expressão em (iii) usamos que $\|\nabla\varphi\| < 1$ e a desigualdade $|\Delta\varphi| \leq \sqrt{2}nk$, obtida em (2.1), além da desigualdade trigonométrica $2tT^2 + s^2T \leq \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) s^2 S^2$, mostrada no Lema 2.1.2, e da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Obtemos assim que,

$$\begin{aligned} \text{(e) } \quad T \Delta \varphi (2tT \langle \vec{v}, \nabla \varphi \rangle - s^2) &\leq \left| T \Delta \varphi (2tT \langle \vec{v}, \nabla \varphi \rangle - s^2) \right| \\ &\leq |T| |\Delta\varphi| (|2tT \langle y, \nabla \varphi \rangle| + |s^2|) \leq T |\Delta\varphi| (2tT \|y\| \|\nabla\varphi\| + s^2) \\ &\leq (2tT^2 + Ts^2) |\Delta\varphi| \leq nk\sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) s^2 S^2 k < 2ns^2 S^2 k. \end{aligned}$$

Agora, usando a norma de Frobenius para a matriz Φ , segue de (2.2) que

$$\|\Phi\| := \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} (\varphi_{ij})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq k\sqrt{2}\sqrt{n+2}.$$

Além disso, usando novamente

$$2tT^2 + s^2T \leq \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) s^2S^2 \quad \text{e} \quad t^2 \leq s^2,$$

temos a expressão em (iv) majoradas como segue

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad tT \langle y, \Phi(ty - 2T\nabla\varphi) \rangle &= tT [t \langle y, \Phi y \rangle - 2T \langle y, \Phi(\nabla\varphi) \rangle] \\ &\leq tT (|t \langle y, \Phi y \rangle + 2T \langle y, \Phi(\nabla\varphi) \rangle|) \leq (t^2T + 2tT^2) \|\Phi\| \\ &\leq (s^2T + 2tT^2) \|\Phi\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) s^2S^2 \sqrt{n+2} k \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{n+2} s^2S^2 k \leq 2\sqrt{n+2} s^2S^2 k. \end{aligned}$$

A fim de estimar $(n-2)\frac{t}{r}(1 + \|\nabla w\|^2)$, usamos que

$$\|y\| = 1, \quad \|\nabla\varphi\| < 1 \quad \text{e} \quad \frac{t}{r} = \frac{\sin \alpha r}{r \cos \alpha r} \leq \frac{\alpha}{\cos \alpha r} = \alpha s,$$

e, além disso, também usamos o resultado em (2.16) para a expressão $(1 + \|\nabla w\|)^2$.

Assim ,

$$\begin{aligned} \frac{t}{r} (1 + \|\nabla w\|^2) &\leq \alpha s \left[s^2 + T^2 (1 + \|\nabla\varphi\|^2) - 2tT \langle y, \nabla\varphi \rangle \right] \\ &\leq \alpha s |s^2 + 2T^2 + 2tT| = \alpha s [s^2 + 2T(t+T)] \leq \alpha (s^3 + 2s^2S^2). \end{aligned}$$

Como $1 \leq s \leq S$ em V , podemos concluir que a expressão $(n-2)\frac{t}{r}(1 + \|\nabla w\|^2)$, que aparece em (d), pode ser estimada como segue.

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad (n-2)\frac{t}{r}(1 + \|\nabla w\|^2) &\leq \alpha(n-2)(s^3 + 2s^2S^2) \\ &\leq \alpha(n-2)(s^4 + 2s^2S^2) \\ &\leq \alpha(n-2)(s^2S^2 + 2s^2S^2) \leq 3(n-2)\alpha s^2S^2. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que a soma das duas últimas parcelas que aparecem em (d) é não positiva, ou seja,

$$\text{(h)} \quad - \left[(s^2(\beta S^2 - \alpha T^2) + \frac{t}{r}T^2) \right] \left[\|\nabla\varphi\|^2 - \langle y, \nabla\varphi \rangle^2 \right] - \beta S^2 \langle y, \nabla\varphi \rangle^2 \leq 0.$$

Usando as estimativas **(e)**-**(h)** em (d), obtemos

$$\begin{aligned} Q_0 w &< 2ns^2 S^2 k + 2\sqrt{n+2}s^2 S^2 k + 3(n-2)\alpha s^2 S^2 - (n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|)^{\frac{3}{2}} HT^3 + (\alpha - \beta)s^2 S^2 \\ &< -\beta s^2 S^2 + 2(n + \sqrt{n+2})ks^2 S^2 + (3n-5)\alpha s^2 S^2 - (n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|)^{\frac{3}{2}} HT^3. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos então concluir que

$$Q_0 w < -s^2 S^2 \left\{ \left[\beta - 2(n + \sqrt{n+2}) \right] k - (3n+5)\alpha \right\} - (n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|)^{\frac{3}{2}} HT^3. \quad \blacksquare$$

2.2 Parametrização de bordo de um domínio de classe C^2

No que segue até o final deste capítulo, (seção 2.2 à seção 2.5), considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega := \Gamma$ de classe $C^{2,\delta}$.

Como Γ é compacto e de classe C^2 , dado $p \in \Gamma$, existe $\ell > 0$ tal que, pondo $B := B_\ell(p) \subset \mathbb{R}^n$, teremos $\Gamma \cap B$ constituída de uma única componente conexa, a qual é gráfico sobre um domínio D contido em um hiperplano paralelo a $T_p\Gamma$.

Seja φ uma função real de classe $C^{2,\delta}$, definida em D e tal que $\text{Graf}(\varphi) = \Gamma \cap B$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que D é uma bola contrada em $\bar{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$, onde $\bar{0}$, por definição, é fixado de maneira que $p = (\bar{0}, \varphi(\bar{0}))$.

Tomamos $\ell > 0$ suficientemente pequeno de modo a garantir que $\|\nabla\varphi\| < 1$, e dessa forma, o domínio D contém $B_{\ell'}(\bar{0}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, onde $\ell' := \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ (ver figura 2.1) e então, podemos considerar a parametrização de $\Gamma \cap B$ restrita a $B_{\ell'}(\bar{0})$ por

$$\begin{aligned} X : B_{\ell'}(\bar{0}) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) &\longrightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \end{aligned} \quad (2.18)$$

com $\bar{x}_n = \varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$.

Podemos supor, sem perda de generalidade que o eixo \bar{x}_n tem a direção do vetor normal interior a Γ no ponto p . Além disso, considere que as curvaturas principais de $\Gamma \cap B$ são limitadas, em valor absoluto, por uma constante $k > 0$. Tal limitação segue do fato de Γ é compacto.

Agora, consideremos f uma função de classe $C^{2,\delta}$ definida em Γ . Restringindo a parametrização X de $\Gamma \cap B$, definida em (2.18), à $B_{\ell'}(\bar{0})$, poderemos escrever $f|_{X(B_{\ell'}(\bar{0}))} = \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$.

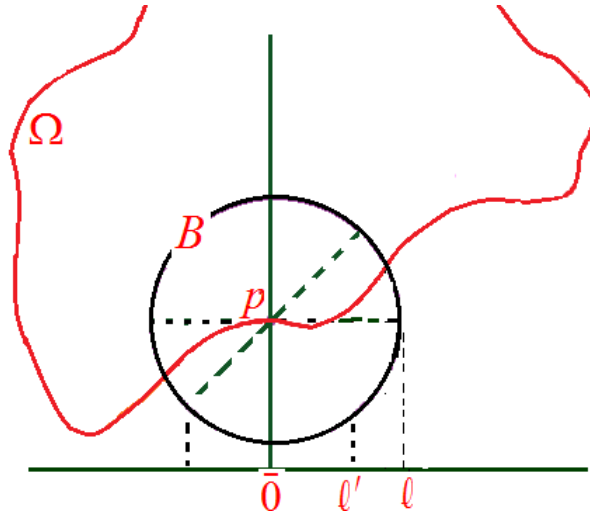


Figura 2.1: Parametrização de $\Gamma \cap \Sigma$

A seguir definimos

$$f_1(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i(\bar{0})^2 \right\}^{1/2}, \quad f_2(p) = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} \psi_{ij}(\bar{0})^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.19)$$

$$\|f\|_1 = \max_{\Gamma} |f_1(p)|, \quad (2.20)$$

$$\|f\|_2 = \max_{\Gamma} |f_2(p)|. \quad (2.21)$$

Seja $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que

$$\tan \alpha r_0 = \|\nabla \psi(\bar{0})\| \quad (2.22)$$

ou, de modo equivalente,

$$\sec \alpha r_0 = \sqrt{1 + \|\nabla \psi(\bar{0})\|^2} \quad (2.23)$$

e considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x_i = \bar{x}_i + r_0 \frac{\psi_i(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}, & i = 1, \dots, n-1 \\ x_n = \bar{x}_n. \end{cases} \quad (2.24)$$

Observamos que o novo sistema de coordenadas é obtido aplicando-se às primeiras $n-1$ coordenadas uma translação de r_0 unidades na direção do vetor $\frac{\nabla \psi(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}$, pois, a mudança definida em (2.24) pode ser escrita como

$$(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + r_0 \left(\frac{\nabla \psi(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}, 0 \right).$$

Lembramos que nas coordenadas originais o domínio de φ contém $B_{\ell'}(\bar{0})$, então

no caso de $r_0 < \frac{\ell'}{2}$, teremos o domínio de φ nas novas coordenadas contendo $B_{\ell'/2}(0)$. Então, podemos escrever

$$f = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ em } B_{\ell'/2}(0). \quad (2.25)$$

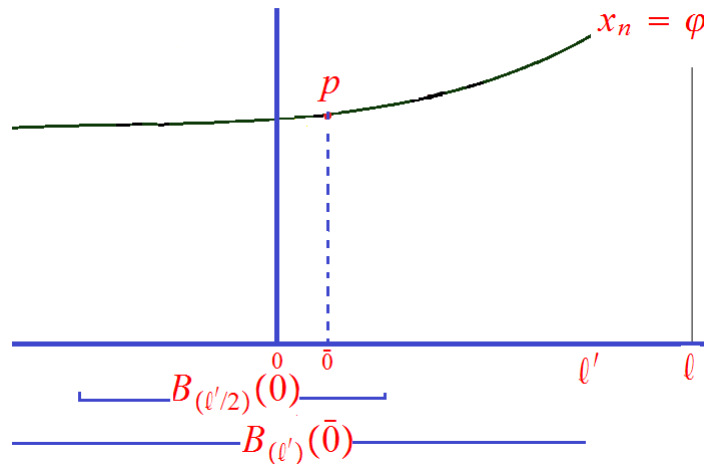


Figura 2.2: Mudança de coordenadas

Veremos posteriormente que a mudança de coordenadas definida acima tornará mais simples os cálculos para mostrar que a função v que estamos por definir se enquadra no contexto da supersolução descrita na Proposição 2.5.2.

2.3 Estimativa *a priori* para gradiente de uma solução

Para obter uma estimativa *a priori* para a norma do gradiente de qualquer solução do Problema de Dirichlet (2), iremos construir, para cada $p \in \Gamma$, uma vizinhança V de p e uma supersolução v que satisfaçam as hipóteses da Proposição 1.5.2.

Para os próximos resultados dessa seção, considere $p \in \Gamma$ e o sistema de coordenadas definido a partir de (2.24). Tome $\alpha \geq \frac{\pi}{\ell'}$ e as constantes positivas β e c satisfazendo a condição expressa em (2.8), para $a = \frac{\ell'}{2}$. Além disso, considere também o aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ definido em (2.9).

Lema 2.3.1 *Sob estas circunstâncias V é uma vizinhança de p .*

Demonstração:

Tomando o sistema de coordenadas definido a partir de (2.24), teremos p expresso em coordenadas por

$$p = (\bar{0}, \varphi(\bar{0})), \text{ onde } \bar{0} = r_0 \frac{\nabla \psi(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}, \quad (2.26)$$

e por definição teremos $r(\bar{0}) = r_0$.

Como $r_0 < \frac{\pi}{2\alpha}$ e $\frac{\pi}{\ell'} \leq \alpha$, temos $r_0 < \frac{\pi}{2\alpha} \leq \frac{\ell'}{2}$. Daí concluímos que a pré-imagem de p pela parametrização X pertence a $B_{\ell'/2}(0)$. Além disso, como $p \in \Gamma \cap B$, segue que $x_n(p)$ satisfaz

$$\varphi + c - \frac{\pi}{2\beta} < x_n(p) < \varphi + c - \frac{\alpha}{\beta} r, \text{ com } r < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Logo, $p \in V$. ■

Lema 2.3.2 *Seja $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$v(x_1, \dots, x_n) = 2h + w(x_1, \dots, x_n), \quad (2.27)$$

onde $w = \frac{1}{\alpha} \log s - \frac{1}{\beta} \log S$ é definida em (2.13) e $2h$ é a oscilação de f em Γ . Então $v(p) = 0$ se, e somente se,

$$c = \frac{1}{\beta} \sec^{-1} e^{\beta \lambda}, \quad (2.28)$$

com

$$\lambda = 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0. \quad (2.29)$$

Demonstração:

Segue de (2.26) que $x_n(p) = \varphi(\bar{0})$ e que $r(\bar{0}) = r_0$, onde $\bar{0}$ é pré-imagem de p pela parametrização X . Portanto, $v(p) = 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 - \frac{1}{\beta} \log \sec \beta c = 0$ se, e somente se,

$$\log \sec \beta c = \beta \left(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 \right)$$

isto é,

$$\sec \beta c = e^{\beta \left(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 \right)},$$

o que ocorre se, e somente se,

$$c = \frac{1}{\beta} \sec^{-1} e^{\beta \left(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 \right)}.$$

■

Lema 2.3.3 *Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ seja solução de $Q_0 = 0$ com $u|_{\Gamma} = f$, onde $f \in C^2(\Gamma)$, de oscilação $2h$, é dada a priori. Suponha também que em todos os pontos de Γ , a sua curvatura média H satisfaça*

$$-\frac{\alpha}{\mu e^{\mu}} \leq H, \quad (2.30)$$

onde

$$\alpha \geq \max\left(\frac{\pi}{\ell'}, k, \|f\|_2\right) \quad (2.31)$$

$$\mu = 8n \left(2\alpha h + \log \sqrt{1 + \|f\|_1^2} \right). \quad (2.32)$$

Então, em cada ponto de Γ vale

$$\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} < 4e^{\mu}. \quad (2.33)$$

Demonstração:

Sejam u solução de $Q_0 = 0$ com $u|_{\Gamma} = f$, $p \in \Gamma$ e $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (2.27), com constante c fixada em (2.28).

Sem perda de generalidade, supomos $f(p) = 0$. Seguem dos lemas 2.3.1 e 2.3.2 que V é uma vizinhança de p e que $v(p) = 0$. Assim,

$$u(p) = f(p) = 0 = v(p).$$

A fim de obtermos estimativas para $\|\nabla u\|$ usaremos a Proposição 1.5.2 às funções u e v . Contudo, resta-nos verificar que:

- i) $u \leq v$ em $\Gamma \cap V$;
- ii) $Q_0 v \leq 0$ em $\overline{\Omega} \cap V$.

Para a análise da condição (i) observe que, por construção, o eixo x_n tem direção do vetor normal a Γ em p que aponta para o interior de Ω . Assim, tomando

$$G = V \cap \Omega = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \varphi < x_n < \varphi + c - \frac{\alpha}{\beta} r \text{ e } r < \frac{\pi}{2\alpha} \right\},$$

teremos ∂G formado por duas partes. A saber,

$$\zeta_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n); x_n = \varphi + c - \frac{\alpha}{\beta} r, r < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$$

$$\text{e } \zeta_2 = \left\{ (x_1, \dots, x_n), x_n = \varphi, r < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

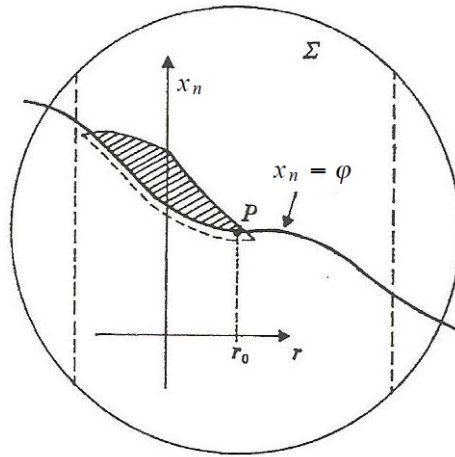


Figura 2.3: $G = V \cap \Omega$

Analisando a restrição de v ao conjunto ζ_1 temos

$$\begin{aligned} v|_{\zeta_1} &= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \frac{1}{\beta} \log \sec \beta (\varphi + c - x_n) \\ &= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \frac{1}{\beta} \log \sec \alpha r \\ &= 2h + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \log \sec \alpha r. \end{aligned}$$

Note que $\log \sec \alpha r \geq 0$ e $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) > 0$, pois $\alpha < \beta$. Assim,

$$2h < v \text{ em } \zeta_1. \quad (2.34)$$

Dessa forma, se u é uma solução de $Q_0 = 0$, segue da observação feita após a Proposição 1.4.4 que

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\Gamma} |u| = \sup_{\Gamma} |f|.$$

Mas, por hipótese $f(p) = 0$, o que implica $\sup_{\Gamma} |f| \leq 2h$ e então,

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\Gamma} |f| \leq 2h.$$

Em particular, temos

$$u \leq 2h < v \text{ em } \zeta_1. \quad (2.35)$$

Agora veremos que $u \leq v$ em ζ_2 . Note que em ζ_2 podemos tomar v em função das coordenadas locais (x_1, \dots, x_{n-1}) , pois nesse conjunto temos $x_n = \varphi$. Tendo em vista o valor de c fixado em (2.28), segue que

$$\begin{aligned}
v|_{\zeta_2} &=: \omega(x_1, \dots, x_{n-1}) \\
&= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \frac{1}{\beta} \log \sec \beta c \\
&= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \frac{1}{\beta} \log \sec \beta \left[\frac{1}{\beta} \sec^{-1} e^{\beta(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0)} \right] \\
&= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \frac{1}{\beta} \log e^{\beta(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0)} \\
&= 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r - \left(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 \right),
\end{aligned}$$

logo,

$$\omega(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\sec \alpha r}{\sec \alpha r_0} \right). \quad (2.36)$$

Temos também que a i -ésima derivada de ω é dada por

$$\omega_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{x_i}{r} \tan \alpha r. \quad (2.37)$$

Conforme observado anteriormente o ponto p tem coordenadas $(\bar{0}, \varphi(\bar{0}))$. Além disso, escrevendo $f = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ em $B_{\ell/2}(0)$ temos

$$0 = f(p) = \psi(\bar{0}).$$

Como $r(\bar{0}) = r_0$, segue de (2.36) que

$$\omega(\bar{0}) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\sec \alpha r_0}{\sec \alpha r_0} \right) = 0,$$

assim,

$$\psi(\bar{0}) = \omega(\bar{0}). \quad (2.38)$$

Afirmamos que

$$\nabla \omega(\bar{0}) = \nabla \psi(\bar{0}), \quad (2.39)$$

pois, como $\tan \alpha r_0 = \|\nabla \psi(\bar{0})\|$, segue de (2.37) que

$$\omega_i(\bar{0}) = \frac{\partial \omega(\bar{0})}{\partial x_i} = \frac{x_i(\bar{0})}{r(\bar{0})} \tan \alpha r_0 = \frac{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}{r_0} x_i(\bar{0}).$$

Portanto,

$$\nabla \omega(\bar{0}) = \frac{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}{r_0} (x_1(\bar{0}), \dots, x_{n-1}(\bar{0})). \quad (2.40)$$

Por outro lado,

$$\bar{0} = (x_1(\bar{0}), \dots, x_{n-1}(\bar{0})) = \left(r_0 \frac{\psi_1(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}, \dots, r_0 \frac{\psi_{n-1}(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|} \right).$$

Então, segue de (2.40) que

$$\nabla \omega(\bar{0}) = \frac{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}{r_0} \left(r_0 \frac{\psi_1(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|}, \dots, r_0 \frac{\psi_{n-1}(\bar{0})}{\|\nabla \psi(\bar{0})\|} \right) = \nabla \psi(\bar{0}).$$

Tomamos agora a forma Hessiana de ω em um vetor unitário $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$, ou seja,

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \omega_{ij} \tau_i \tau_j,$$

onde $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, sendo $y_i = \frac{x_i}{r}$. Inicialmente calculamos as derivadas parciais de ω e obtemos

$$\omega_i = t y_i, \quad \text{e } \omega_{ij} = \alpha s^2 y_i y_j + \frac{t}{r} (\delta_{ij} - y_i y_j),$$

para $i, j = 1, \dots, n-1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} \omega_{ij} \tau_i \tau_j &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left[\alpha s^2 y_i y_j + \frac{t}{r} (\delta_{ij} - y_i y_j) \right] \tau_i \tau_j \\ &= \alpha s^2 \sum_{i,j=1}^{n-1} y_i y_j \tau_i \tau_j + \frac{t}{r} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_{ij} - y_i y_j) \tau_i \tau_j \\ &= \alpha s^2 \langle y, \tau \rangle^2 - \frac{t}{r} \langle y, \tau \rangle^2 + \frac{t}{r} \\ &= \left(\alpha s^2 - \frac{t}{r} \right) \langle y, \tau \rangle^2 + \frac{t}{r}. \end{aligned}$$

Note que, para $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos $\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$. Logo,

$$\theta \leq \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \frac{\theta}{\cos \theta} = \theta \sec \theta.$$

Então, fazendo $\theta = \alpha r$, temos

$$\alpha r \leq \tan \alpha r \leq \alpha \sec \alpha r.$$

Portanto,

$$\alpha \leq \frac{t}{r} \leq \alpha s.$$

Da desigualdade acima, segue que $0 \leq \left(\alpha s - \frac{t}{r}\right) \leq \left(\alpha s^2 - \frac{t}{r}\right)$. Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \omega_{ij} \tau_i \tau_j \geq \frac{t}{r} \geq \alpha. \quad (2.41)$$

Por outro lado, pondo Ψ a matriz Hessiana de ψ , segue que

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \psi_{ij} \tau_i \tau_j \right| = \left| \langle \tau, \Psi \tau \rangle \right| \leq \|\tau\| \|\Psi\| \|\tau\| \leq \|\Psi\| \leq \|f\|_2.$$

De (2.31) temos $\|f\|_2 \leq \alpha$. Então

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \psi_{ij} \tau_i \tau_j \right| \leq \|f\|_2 \leq \alpha. \quad (2.42)$$

A seguir mostraremos que $\omega(x) \geq \psi(x)$ para todo $x \in \zeta_2$.

De fato, tome a função $\mathcal{M}: B_{\ell'/2}(0) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\mathcal{M}(x) = (\omega - \psi)(x)$. Segue de (2.39) que $\bar{0}$ é ponto crítico de \mathcal{M} . Além disso, usamos (2.41) e (2.42) para concluir que a forma Hessiana de \mathcal{M} em um vetor unitário $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ satisfaz

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{M}_{ij}(\bar{0}) \tau_i \tau_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} \omega_{ij}(\bar{0}) \tau_i \tau_j - \sum_{i,j=1}^{n-1} \psi_{ij}(\bar{0}) \tau_i \tau_j \geq 0.$$

Segue daí que $\bar{0}$ é único ponto de mínimo de \mathcal{M} , isto é $(\omega - \psi)(x) \geq (\omega - \psi)(\bar{0})$ para todo $x \in B_{\frac{\pi}{2\alpha}}(0)$. Então, usando (2.38), segue que $(\omega - \psi)(x) \geq (\omega - \psi)(\bar{0}) = 0$, para todo $x \in B_{\frac{\pi}{2\alpha}}(0)$. Em particular,

$$u|_{\zeta_2} = f|_{\zeta_2} = \psi \leq \omega = v|_{\zeta_2}. \quad (2.43)$$

Segue de (2.34) e (2.43) que

$$u < v \text{ em } \partial G = \zeta_1 \cup \zeta_2.$$

Trabalharemos agora na condição (ii), isto é, mostraremos que $Q_0 v \leq 0$ em $\bar{\Omega} \cap V$.

Como $v = 2h + w$, usando que as curvaturas principais de Γ e a forma do operador serem ortogonalmente invariantes em \mathbb{R}^n , obtemos de (2.14) que

$$Q_0(v) \leq -s^2 S^2 \{ \beta - 2(n + \sqrt{n+2})k - (3n-5)\alpha \} - (n-1)(1 + \|\varphi\|^2)^{3/2} HT^3. \quad (2.44)$$

A fim de obter o resultado esperado, estimaremos, a seguir, algumas das parcelas da desigualdade anterior.

Como $k \leq \alpha$ e $2\sqrt{n+2} < 3n$ para $n \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} & \beta - 2(n + \sqrt{n+2})k - (3n-5)\alpha \\ & \geq \beta - 2(n + \sqrt{n+2})\alpha - (3n-5)\alpha \\ & > \beta - (8n-5)\alpha > \beta - (8n-1)\alpha. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$-s^2 S^2 \left\{ \beta - 2(n + \sqrt{n+2})k - (3n-5)\alpha \right\} \leq -s^2 S^2 \left\{ \beta - (8n-1)\alpha \right\}. \quad (2.45)$$

Estimamos agora a expressão $-(n-1)(1 + \|\varphi\|^2)^{3/2} HT^3$. Para isso, observe inicialmente que em $V \cap \overline{\Omega}$ temos

$$T \leq \tan \beta c \leq e^{\beta \lambda}, \quad (2.46)$$

onde $T = \tan \beta(\varphi + c - x_n)$, $c = \frac{1}{\beta} \sec^{-1}(e^{\beta \lambda})$ e $\lambda = 2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0$.

A primeira desigualdade em (2.46) segue da hipótese de crescimento da função $g(\sigma) = \tan \sigma$ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e da desigualdade $0 < \beta(\varphi + c - x_n) < \beta c < \frac{\pi}{2}$ válida em $V \cap \overline{\Omega}$. A segunda desigualdade de (2.46) decorre da aplicação do Lema 2.1.3, já que $e^{\beta \lambda} > 1$.

Segue de (2.23) e (2.20) que

$$\sec \alpha r_0 = \sqrt{1 + \|\nabla \psi(\bar{0})\|^2} \leq \sqrt{1 + \|f\|_1^2}.$$

Assim,

$$\log \sec \alpha r_0 \leq \log \sqrt{1 + \|f\|_1^2}$$

e então,

$$\mu := 8n \left(2\alpha h + \log \sqrt{1 + \|f\|_1^2} \right) \geq 8n\alpha \left(2h + \frac{1}{\alpha} \log \sec \alpha r_0 \right).$$

Portanto,

$$\mu \geq 8n\alpha\lambda. \quad (2.47)$$

Usando os resultados obtidos em (2.46) e (2.47), além das hipóteses $\|\nabla \varphi\| < 1$ e $-\frac{\alpha}{\mu e^\mu} \leq H$, obtemos

$$-(n-1) \left(1 + \|\nabla \varphi\|^2 \right)^{\frac{3}{2}} HT \leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha)-1}. \quad (2.48)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & -(n-1) \left(1 + \|\nabla \varphi\|^2 \right)^{\frac{3}{2}} HT \leq (n-1) \left(1 + \|\nabla \varphi\|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha}{\mu e^\mu} T \\ & \leq (n-1) 2^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha}{\mu e^\mu} T \leq (n-1) 2^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha e^{\beta \lambda}}{8n\alpha \lambda e^{8n\alpha \lambda}} = \frac{n-1}{n\lambda} 2^{3/2} \frac{e^{\beta \lambda}}{8e^{8n\alpha \lambda}} \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{e^{\beta \lambda}}{e^{8n\alpha \lambda}} \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{e} \frac{e^{\beta \lambda}}{e^{8n\alpha \lambda}} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha)-1}. \end{aligned}$$

Note que $S^2 \leq s^2 S^2$ já que $1 \leq s^2$, então, $T^2 \leq S^2 \leq s^2 S^2$ em $\overline{\Omega} \cap V$. Usando (2.48), segue que

$$-(n-1)(1 + \|\nabla \varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} HT^3 \leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha)-1} T^2 \leq s^2 S^2 \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha-\frac{1}{\lambda})}. \quad (2.49)$$

Substituindo os resultados (2.45) e (2.49) em (2.44), temos

$$Q_0 v \leq -s^2 S^2 \left\{ \beta - (8n-1)\alpha - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha-\frac{1}{\lambda})} \right\}. \quad (2.50)$$

Escolhendo

$$\beta := (8n-1)\alpha + \frac{1}{\lambda}, \quad (2.51)$$

segue que

$$\begin{aligned} & -s^2 S^2 \left\{ \beta - (8n-1)\alpha - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(\beta-8n\alpha-\frac{1}{\lambda})} \right\} \\ &= -s^2 S^2 \left\{ \frac{1}{\lambda} \left[1 - e^{\lambda(8n\alpha-\alpha+\frac{1}{\lambda}-8n\alpha-\frac{1}{\lambda})} \right] \right\} \\ &= -s^2 S^2 \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\alpha\lambda}) < 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos então que $Q_0 v < 0$, e portanto, v é supersolução em $V \cap \Omega$ relativamente a Q_0 .

Afirmamos que β escolhido em (2.51) satisfaz a condição dada em (2.8), pois, segue de (2.47) e (2.32) que

$$\beta \geq (8n-1)\alpha + \frac{8n\alpha}{\mu} \geq (8n-1)\alpha + \frac{1}{2h} \geq (8n-1)\alpha > \alpha.$$

Uma vez que as condições da Proposição 1.5.2 foram verificadas para as constantes α, β, c estabelecidas anteriormente podemos concluir que

$$\frac{\partial u(p)}{\partial \vartheta} \leq \|\nabla v(p)\|$$

para todo vetor unitário ϑ que aponta para o interior de Ω .

Escolhendo $\vartheta = \frac{\nabla u(p)}{\|\nabla u(p)\|}$ segue que

$$\|\nabla u(p)\| = \left\langle \nabla u(p), \frac{\nabla u(p)}{\|\nabla u(p)\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla u(p)\|^2}{\|\nabla u(p)\|} \leq \|\nabla v(p)\|. \quad (2.52)$$

Resta-nos agora limitar a norma do gradiente de v em p . Para isso, aplicamos o resultado obtido em (2.16) na função v . Assim,

$$\begin{aligned} 1 + \|\nabla v(p)\|^2 &= s^2 + T^2(1 + \|\nabla \varphi\|^2) - 2tT \langle y, \nabla \varphi \rangle \\ &\leq s^2 + T^2(1 + \|\nabla \varphi\|^2) + 2tT < s^2 + 2T(t + T), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$ e $y = \left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_{n-1}}{r} \right)$.

Como $s^2 + 2T(t + T) \leq 2s^2 S^2$, segue de (2.52) que

$$1 + \|\nabla u(p)\|^2 \leq 1 + \|\nabla v(p)\|^2 \leq 2s^2 S^2. \quad (2.53)$$

Observe que em p , vale $s = \sec \alpha r_0$ e $S = \sec \beta c$. Assim, para $c = \frac{1}{\beta} \sec^{-1}(e^{\beta \lambda})$, fixado em (2.28), segue que

$$S^2 = \sec^2 \beta c = e^{2\beta \lambda}. \quad (2.54)$$

Assim, tomando β como definido em (2.51) e considerando $\mu \geq 8n\alpha\lambda$, segue que

$$e^{2\beta \lambda} = e^{2(8n\alpha\lambda - \alpha\lambda + 1)} \leq e^{2(\mu+1)} e^{-2\alpha\lambda}.$$

Substituindo o valor de λ dado em (2.29) na expressão anterior, temos

$$e^{-2\alpha\lambda} = e^{-4\alpha h} e^{-2 \log \sec \alpha r_0} \leq e^{\log s^{-2}} = s^{-2},$$

portanto,

$$e^{2\beta \lambda} \leq s^{-2} e^{2(\mu+1)}. \quad (2.55)$$

Segue de (2.54) e (2.55) que

$$S^2 \leq s^{-2} e^{2(\mu+1)}.$$

Então, usando (2.53) temos que

$$1 + \|\nabla u(p)\|^2 \leq 1 + \|\nabla v(p)\|^2 \leq 2e^{2(\mu+1)}.$$

Dessa forma concluímos que

$$\sqrt{1 + \|\nabla u(p)\|^2} \leq e\sqrt{2}e^\mu < 4e^\mu.$$

Assim, fica estabelecida uma limitação pontual para a norma do gradiente de uma solução do Problema de Dirichlet (2), já que $\mu = \mu(p)$. Porém, a compacidade de Γ permite tomar

$$\mu := \max_{p \in \Gamma} \mu(p),$$

Dessa forma, a estimativa dada em (2.33) é válida em todo Γ .

■

Corolário 2.3.4 *Sob as hipóteses do Lema 2.3.3 temos,*

$$\|\nabla u\| < 4e^\mu \quad \text{em } \overline{\Omega}. \quad (2.56)$$

Demonstração:

Usando a estimativa (2.33), isto é

$$\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \leq 4e^\mu \quad \text{em } \Gamma.$$

Então, segue que $\|\nabla u\| < 4e^\mu$ em Γ .

Decorre do princípio do máximo para o gradiente de soluções (Proposição 1.4.6) que

$$\|\nabla u\| < 4e^\mu \text{ em } \overline{\Omega}.$$

■

De acordo com Proposição 1.5.1, se as hipóteses do Teorema 1 permitirem concluir que $M = 4e^\mu$ é uma limitação *a priori* para a norma do gradiente de uma solução do Problema de Dirichlet (2) então este problema tem solução única. Assim, ainda precisamos verificar que as hipóteses do Teorema 1 satisfazem as hipóteses do Lema 2.3.3, ou seja, que $H \geq -\frac{\alpha}{\mu e^\mu}$. É o que faremos a seguir.

2.4 A definição de \mathfrak{B}

A fim de estabelecer a desigualdade $H > -\frac{\alpha}{\mu e^\mu}$, relativamente ao Teorema 1, começaremos por definir precisamente a constante \mathfrak{B} , além disso, veremos que papel ela desempenha na obtenção da desigualdade acima.

Dado f e Ω como no Teorema 1, definimos

$$\mathfrak{A} = \max\left(\frac{\pi}{\ell'}, k, \|f\|_2\right), \quad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{(1 + \|f\|_1^2)^{8n}}, \quad \mathcal{H} = \max_{\Gamma}(-H), \quad (2.57)$$

onde H é a curvatura média de Γ , $\ell' = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ e k como definido em (2.7).

Seja

$$\mathfrak{B}(\|f\|_1, \|f\|_2, \Omega) := \frac{1}{32n\mathfrak{A}} \begin{cases} \frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}, & \text{se } \mathcal{H} \geq \mathfrak{C} \\ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right), & \text{se } 0 < \mathcal{H} < \mathfrak{C} \\ +\infty, & \text{se } \mathcal{H} \leq 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Segue uma análise de \mathfrak{B} .

Caso $\mathcal{H} = \max_{\Gamma}(-H) \geq \mathfrak{C}$ então,

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{32n\mathcal{H}(1 + \|f\|_1^2)^{8n}}. \quad (2.59)$$

Neste caso existe $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < -\mathfrak{C} < 0$. Perceba que

$$\mathcal{H} \longrightarrow +\infty \quad \text{implica} \quad \mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

Dessa forma, quanto maior for \mathcal{H} , menor deverá ser a oscilação $2h$ de f a fim de que tenhamos $h < \mathfrak{B}$.

Para o caso em que $0 < \mathcal{H} < \mathfrak{C}$ existirá $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < 0$ e neste caso, $-\mathfrak{C} < H(p) < 0$. Neste caso temos

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{32n\mathfrak{A}} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\}. \quad (2.60)$$

Se $H \geq 0$ em Γ teremos $\mathcal{H} \leq 0$ e, neste caso teremos $\mathfrak{B} = +\infty$. Isso implica que $h < \mathfrak{B}$, qualquer que seja $f \in C^{2,\delta}$.

2.5 Demonstração do Teorema 1

Em vista do que foi exposto nas seções anteriores, para a conclusão do Teorema 1, é suficiente mostrar que a condição $h < \mathfrak{B}$ implica a existência de uma constante α tal que $H \geq -\frac{\alpha}{\mu e^\mu}$ em cada ponto de Γ .

Suponha inicialmente que $H \geq 0$ em Γ . Assim, teremos naturalmente $-\frac{\alpha}{\mu e^\mu} < 0 \leq H$.

Agora, suponha que a curvatura média H de Γ seja negativa em algum ponto p .

Tomemos

$$\alpha = \mathfrak{A} \max\left\{1, \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{C}}\right\}, \quad (2.61)$$

Note que (2.61) está de acordo com a condição expressa em (2.31).

Começamos analisando o caso em que

$$\max\left\{1, \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{C}}\right\} = 1.$$

Aqui, $\alpha = \mathfrak{A}$. Também $0 < \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{C}} \leq 1$, o que implica em $0 < \mathcal{H} \leq \mathfrak{C}$. Portanto,

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{32n\mathfrak{A}} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\}.$$

Segue daí que

$$16n\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\}.$$

Por hipótese, $h < \mathfrak{B}$, então

$$16n\mathfrak{A}h < \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\}. \quad (2.62)$$

Considerando μ , como definido em (2.32), segue da última desigualdade que

$$\begin{aligned} \mu &= 16n\alpha h + 8n \log\left(\sqrt{1 + \|f\|_1^2}\right) \\ &= 16n\mathfrak{A}h + \frac{1}{2} \log\left(1 + \|f\|_1^2\right)^{8n} \\ &< \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\} + \frac{1}{2} \log\left[(1 + \|f\|_1^2)^{8n}\right]. \end{aligned}$$

De (2.57) temos $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{(1 + \|f\|_1^2)^{8n}}$. Substituindo este valor na expressão acima temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{H}}\right) \right\} + \frac{1}{2} \log\left[(1 + \|f\|_1^2)^{8n}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathcal{H}(1 + \|f\|_1^2)^{8n}}\right] \right\} + \frac{1}{2} \log\left[(1 + \|f\|_1^2)^{8n}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathcal{H}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{A} = \alpha$, temos

$$\mu < \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log\left(\frac{\alpha}{\mathcal{H}}\right) \right\}. \quad (2.63)$$

Agora, considere

$$\max\left\{1, \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{C}}\right\} = \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{C}}.$$

Neste caso $\mathcal{H} \geq \mathfrak{C}$, e portanto, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}}{32n\mathfrak{A}\mathcal{H}}$. Logo,

$$\frac{16n\mathfrak{A}\mathcal{H}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2}. \quad (2.64)$$

Usando que $h < \mathfrak{B}$ e também $\alpha = \frac{\mathfrak{A}\mathcal{H}}{\mathfrak{C}}$, segue de (2.64) que

$$16n\alpha h < \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\mu = 16n\alpha h + \frac{1}{2} \log \left(\sqrt{1 + \|f\|_1^2} \right)^{8n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \|f\|_1^2)^{8n}.$$

Observe que na segunda igualdade de (2.57) temos $(1 + \|f\|_1^2)^{8n} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \log$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \|f\|_1^2)^{8n} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log \left(\frac{\alpha}{\mathcal{H}} \right) \right\}.$$

Isto nos dá novamente a desigualdade (2.63).

Concluimos então que a condição $h < \mathfrak{B}$ implica $\mu < \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log \left(\frac{\alpha}{\mathcal{H}} \right) \right\}$.

Usando a desigualdade $\mu \leq e^{\mu-1}$, válida para todo $\mu \in \mathbb{R}$, temos

$$\mu e^{\mu} \leq e^{2\mu-1} \leq \frac{\alpha}{\mathcal{H}}.$$

Portanto, em cada ponto de Γ temos $H \geq -\mathcal{H} \geq -\frac{\alpha}{\mu e^{\mu}}$.

Segue daí o Teorema 1.

Capítulo 3

UM RESULTADO DE NÃO EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET

No capítulo anterior vimos um teorema de existência e unicidade de solução para o Problema de Dirichlet (2). No resultado que exploramos, a curvatura média H do bordo do domínio desempenhou um papel fundamental.

O objetivo desse capítulo é mostrar o Teorema 2, ou seja, mostrar que quando o bordo Γ de uma domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2 apresenta pontos de curvatura média negativa, sempre será possível exibir $f \in C^\infty(\Gamma)$ de norma arbitrariamente pequena para o qual Problema (1) não admite solução. Esse resultado, em particular, nos diz que não podemos trocar a condição $h < \mathcal{B}(\Omega, \|f\|_1, \|f\|_2)$ por uma condição da forma $h < \mathcal{B}(\Omega)$ no Teorema 1.

A demonstração do Teorema 1 será feita a partir da construção de estimativas *a priori* para a altura de uma solução do Problema (1). Tal estimativa será obtida através de resultados de comparação envolvendo supersoluções relativas ao operador Q_0 em subconjuntos abertos de Ω .

3.1 Resultados iniciais

A fim de provar o Teorema 2, faremos aqui algumas considerações que serão utilizadas em todo o capítulo.

Como Γ é compacto e de classe C^2 , dado $p \in \Gamma$, existe $\ell > 0$ tal que pondo $B = B_\ell(p)$, teremos $B \cap \Gamma$ constituída de uma única componente conexa, a qual é gráfico

de uma função φ , de classe C^2 , definida em um domínio D contido em um hiperplano paralelo a $T_p\Gamma$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que D é uma bola centrada na origem de \mathbb{R}^{n-1} e além disso que $\varphi(0) = 0$, assim, o ponto p coincide com a origem do sistema de coordenadas definido em \mathbb{R}^n .

De forma semelhante ao que fizemos na seção 2.2 do capítulo anterior, tomamos ℓ suficientemente pequeno de modo a garantir que $\|\nabla\varphi\| < 1$. Dessa forma, o domínio D contém $B_{\ell'}(0)$, onde $\ell' = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$. Vamos supor também que o eixo x_n está direcionado ao longo do vetor normal a Γ em p .

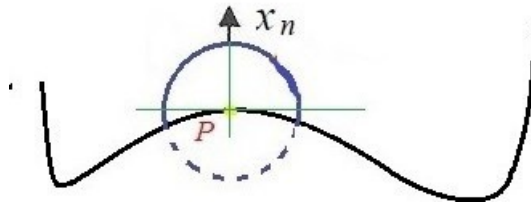


Figura 3.1: Sistema de coordenadas em torno de $p \in \Gamma$

Tomamos a parametrização de $\Gamma \cap B$ restrita a $B_{\ell'}(0)$ da seguinte forma:

$$X : B_{\ell'}(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (3.1)$$

A fim de estabelecer estimativa *a priori* para a altura de uma solução do Problema de Dirichlet (1), definiremos dois abertos de Ω , onde em cada um deles será definida uma supersolução relativamente ao operador Q_0 .

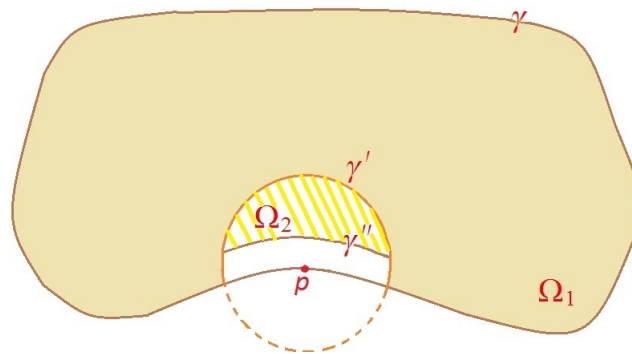


Figura 3.2: Abertos de Ω

Considere $0 < a < \ell'$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $R = R(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Definimos:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{R > a\} \quad (3.2)$$

A seguir, definimos $v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v = b - a \cosh^{-1}\left(\frac{R}{a}\right), \quad (3.3)$$

onde b é uma constante que será definida posteriormente.

Estabeleceremos agora alguns resultados preliminares que serão responsáveis por explicitar uma estimativa *a priori* para a altura de uma solução para Problema de Dirichlet (1).

Lema 3.1.1 *A função v dada em (3.3) satisfaz $Q_0 v = -\frac{(n-2)aR}{(R^2 - a^2)^{3/2}}$ em Ω_1 . Em particular v é uma supersolução relativamente a Q_0 em Ω_1 .*

Demonstração:

Inicialmente lembremos que

$$Q_0 v = (1 + \|\nabla v\|^2) \Delta v - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij}.$$

As derivadas parciais de v são

$$v_i = \frac{-a}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 1}} \frac{x_i}{aR} = \frac{-ax_i}{R(R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

e

$$v_{ij} = -a \left[\frac{R^2(R^2 - a^2)\delta_{ij} - x_i x_j (2R^2 - a^2)}{R^3(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Assim,

$$1 + \|\nabla v\|^2 = 1 + \frac{a^2}{R^2(R^2 - a^2)} \sum_{i,j=1}^n x_i^2 = 1 + \frac{a^2}{(R^2 - a^2)} = \frac{R^2}{R^2 - a^2} \quad (3.6)$$

e

$$\Delta v = \frac{-a[n(R^2 - a^2) - (2R^2 - a^2)]}{R(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.7)$$

pois

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n v_{ii} = \sum_{i=1}^n -a \left[\frac{R^2(R^2 - a^2) - x_i^2(2R^2 - a^2)}{R^3(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{-a[n(R^2 - a^2) - (2R^2 - a^2)]}{R(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dessa forma, segue de (3.6) e (3.7) que a expressão $(1 + \|\nabla v\|^2) \Delta v$ é dada por

$$\frac{R^2}{R^2 - a^2} \frac{-a \left[n(R^2 - a^2) - (2R^2 - a^2) \right]}{R(R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-aR \left[n(R^2 - a^2) - (2R^2 - a^2) \right]}{(R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.8)$$

Passemos agora à expressão $\sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij}$. De de (3.14) e (3.3) segue que

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij} &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{-a^3 x_i x_j}{R^2 (R^2 - a^2)} \left[\frac{R^2 (R^2 - a^2) \delta_{ij} - x_i x_j (2R^2 - a^2)}{R^3 (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{a^3 R^2 (R^2 - a^2) x_i x_j \delta_{ij}}{R^5 (R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} - \sum_{i,j=1}^n \frac{a^3 x_i^2 x_j^2 (2R^2 - a^2)}{R^5 (R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{a^3 (R^2 - a^2)}{R (R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^3 (2R^2 - a^2)}{R (R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$- \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij} = - \frac{a^3 R}{(R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.9)$$

Usando as expressões (3.8) e (3.9) obtemos,

$$\begin{aligned} Q_0 v &= (1 + \|\nabla v\|^2) \Delta v - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij} \\ &= \frac{-aR \left[n(R^2 - a^2) - (2R^2 - a^2) \right]}{(R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^3 R}{(R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{-aR \left[(R^2 - a^2)(n - 2) \right]}{(R^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Segue daí que para $n \geq 2$ temos

$$Q_0 v = - \frac{(n - 2)aR}{(R^2 - a^2)^{3/2}} \leq 0. \quad (3.10)$$

Pelo resultado acima, concluímos que v é uma supersolução relativamente a Q_0 em Ω_1 .

■

De acordo com a definição dada em (3.2), $\partial\Omega_1$ é constituído de duas partes, ambas conjuntos fechados e de classe C^2 . A saber ,

$$\gamma = \Gamma \cap \{R \geq a\} \quad (3.11)$$

e

$$\gamma' = \bar{\Omega} \cap \{R = a\}. \quad (3.12)$$

Estudaremos agora o comportamento da supersolução v nas proximidades de γ' .

Lema 3.1.2 A função $v = b - a \cosh^{-1}\left(\frac{R}{a}\right)$, definida em (3.3) é tal que

$$\frac{\partial v(q)}{\partial \eta(q)} = \lim_{x \rightarrow q} \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(q)} = -\infty \quad (3.13)$$

para qualquer $q \in \text{int}(\gamma')$, onde $\eta(q) = \frac{q}{\|q\|}$ é a normal a γ' que aponta para o interior de Ω_1 .

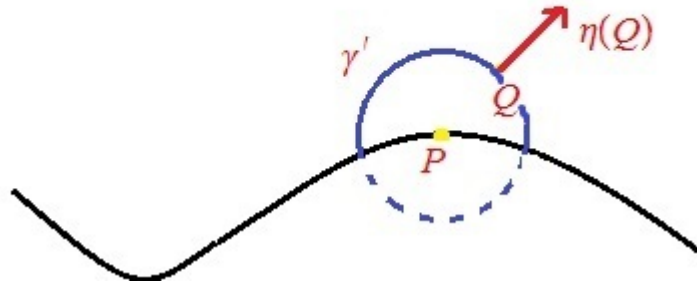


Figura 3.3: vetor normal $\eta(q)$

Demonstração:

De fato, como p é a origem do sistema de coordenadas, então $\eta(q) = \frac{q}{a} = \frac{1}{a}(x_1(q), \dots, x_n(q))$ qualquer que seja $q \in \text{int}(\gamma')$.

Temos,

$$\frac{\partial v(q)}{\partial \eta(q)} = \lim_{x \rightarrow q} \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(q)} = \lim_{x \rightarrow q} \frac{-a^2}{\sqrt{R^2(x) - a^2}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{R(x)} \eta_i(q).$$

Fazendo $x \rightarrow q$ tem-se $R(x) \rightarrow a$ e então,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{R(x)} \eta_i(q) \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2(q)}{aR(q)} = \frac{R(q)}{a} > 0,$$

pois $\eta_i = \frac{x_i(q)}{a}$. Logo,

$$\frac{\partial v(q)}{\partial \eta(q)} = \lim_{x \rightarrow q} \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(q)} = -\infty.$$

■

Para o próximo resultado assumiremos que $p \in \Gamma$ é tal que $H(p) < 0$. Considere também o sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) introduzido em uma vizinhança de p , conforme descrito no início da seção.

Definimos

$$\Omega_2 = \{R < a\} \cap \{x_n > \varphi + \varepsilon'\}, \quad (3.14)$$

onde $0 < \varepsilon' < a$. (Ver Figura 3.2)

A seguir, tomamos $w : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$w = b + c(\sqrt{2a} - \sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}), \quad (3.15)$$

onde b, c são constantes que serão definidas posteriormente.

Lema 3.1.3 *Sejam $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < 0$ e $c = \frac{2}{\sqrt{(n-1)|H(p)|}}$. Existe $0 < a_0 < \ell'$ tal que definindo Ω_2 relativamente a $0 < a < a_0$ a função $w : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.15) é supersolução relativamente a Q_0 em Ω_2 .*

Demonstração:

A fim de determinar a expressão

$$(1 + \|\nabla w\|^2) \Delta w - \sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij}$$

tomemos as derivadas parciais de w . Temos

$$w_i = \frac{c\varphi_i}{2(x_n - \varphi - \varepsilon')^{\frac{1}{2}}}, \quad w_{ij} = \frac{2c\varphi_{ij}(x_n - \varphi - \varepsilon') + c\varphi_i\varphi_j}{4(x_n - \varphi - \varepsilon')^{\frac{3}{2}}}, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$w_n = \frac{-c}{2(x_n - \varphi - \varepsilon')^{\frac{1}{2}}}, \quad w_{in} = -\frac{c\varphi_i}{4(x_n - \varphi - \varepsilon')^{\frac{3}{2}}}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\text{e } w_{nn} = \frac{c}{4(x_n - \varphi - \varepsilon')^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim,

$$1 + \|\nabla w\|^2 = 1 + \frac{c^2(\|\nabla\varphi\|^2 + 1)}{4(x_n - \varphi - \varepsilon')} \quad (3.16)$$

já que,

$$\|\nabla w\|^2 = \frac{c^2}{4(x_n - \varphi - \epsilon')} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i^2 + \frac{c^2}{4(x_n - \varphi - \epsilon')} = \frac{c^2(\|\nabla\varphi\|^2 + 1)}{4(x_n - \varphi - \epsilon')}.$$

Temos também

$$\Delta w = \frac{c \left[2(x_n - \varphi - \epsilon') \Delta \varphi + \|\nabla\varphi\|^2 + 1 \right]}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.17)$$

pois

$$\begin{aligned} \Delta w &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_{ii} \right) + w_{nn} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2c\varphi_{ii}(x_n - \varphi - \epsilon') + c\varphi_i^2}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{c}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{c \left[2(x_n - \varphi - \epsilon') \Delta \varphi \right]}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c \|\nabla\varphi\|^2}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{c \left[2(x_n - \varphi - \epsilon') \Delta \varphi + \|\nabla\varphi\|^2 + 1 \right]}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Segue de (3.16) e (3.17) que a expressão $(1 + \|\nabla w\|^2) \Delta w$ é igual a

$$\frac{c^3(1 + \|\nabla\varphi\|^2) \Delta \varphi}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c \Delta \varphi}{2(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^3(1 + \|\nabla\varphi\|^2)^2}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} + \frac{c(1 + \|\nabla\varphi\|^2)}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.18)$$

Agora, trabalharemos com a expressão $\sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij}$. Para isso, usamos as derivadas parciais calculadas previamente, encontrando

$$\begin{aligned} w_i w_j w_{ij} &= \frac{c^2 \varphi_i \varphi_j}{4(x_n - \varphi - \epsilon')} \left[\frac{2c\varphi_{ij}(x_n - \varphi - \epsilon') + c\varphi_i \varphi_j}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{c^3 \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij}}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^3 \varphi_i^2 \varphi_j^2}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} \quad \text{para } i,j=1,\dots,n-1. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} = \left[\frac{c^3}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} \right] + \frac{c^3}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i^2 \varphi_j^2.$$

Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} = \left[\frac{c^3}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} \right] + \frac{c^3 \|\nabla\varphi\|^4}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.19)$$

Além disso,

$$w_i w_n w_{in} = \frac{c^3 \varphi_i^2}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} \quad \text{com } i = 1, \dots, n-1.$$

Logo,

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i w_n w_{in} = \frac{c^3 \|\nabla \varphi\|^2}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.20)$$

Por último,

$$w_n^2 w_{nn} = \frac{c^3}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.21)$$

Escrevendo

$$-\sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij} = -\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} w_i w_j w_{ij} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i w_n w_{in} + w_n^2 w_{nn} \right]$$

e usando (3.19), (3.20) e (3.21) teremos a expressão $-\sum_{i,j=1}^n w_i w_j w_{ij}$ igual a

$$\left[\frac{-c^3}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} \right] - \frac{c^3 \|\nabla \varphi\|^4}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} - \frac{c^3 \|\nabla \varphi\|^2}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} - \frac{c^3}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.22)$$

Agora, usando os resultados (3.18) e (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} Q_0 w &= \frac{c^3 \left[(1 + \|\nabla \varphi\|^2) \Delta \varphi \right]}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c \Delta \varphi}{2(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^3 (1 + 2\|\nabla \varphi\|^2 + \|\nabla \varphi\|^4)}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} + \frac{c \left[(1 + \|\nabla \varphi\|^2) \right]}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \\ &- \left[\frac{c^3}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} \right] - \frac{c^3 \|\nabla \varphi\|^4}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} - \frac{c^3 \|\nabla \varphi\|^2}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} - \frac{c^3}{16(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{c^3}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \left[(1 + \|\nabla \varphi\|^2) \Delta \varphi - \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} \right] + \frac{c \left[(1 + \|\nabla \varphi\|^2) \right]}{4(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} + \frac{c \Delta \varphi}{2(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão

$$(1 + \|\nabla \varphi\|^2) \Delta \varphi - \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} = (n-1) (1 + \|\nabla \varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} H$$

obtido como em (1.15), temos finalmente que $Q_0 w$ é dado por

$$\frac{c}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{\frac{3}{2}}} \left\{ (n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} Hc^2 + 2(1 + \|\nabla\varphi\|^2) + 4(x_n - \varphi - \epsilon') \Delta\varphi \right\}. \quad (3.23)$$

Note que parametrização X definida em (3.1) permite tomar $\Gamma \cap B$, onde $B = B_\ell(p)$, a partir de coordenadas locais (x_1, \dots, x_{n-1}) . Então, escrevemos

$$H|_{\Gamma \cap B} = H \circ X(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Por simplicidade escreveremos $H \circ X(0) = H(p)$.

Temos $H(p) < \frac{H(p)}{2}$ (pois, por hipótese, a curvatura média é negativa em p). Segue da continuidade da função H , que existe $0 < a_1 < \ell'$ tal que

$$H < \frac{H(p)}{2} \quad \text{em } B_{a_1}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3.24)$$

Agora, considere $T_p(\Gamma \cap B)$ o espaço tangente a hipersuperfície $\Gamma \cap B = \text{Graf}(\varphi)$. Note que o sistema de coordenadas definido numa vizinhança de p tem o eixo x_n ortogonal ao domínio $B_{\ell'}(0) \subset T_p(\Gamma \cap B)$ implicando assim que $\nabla\varphi(0) = 0$. Usando novamente a igualdade

$$(1 + \|\nabla\varphi\|^2) \Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_j \varphi_{ij} = (n-1)(1 + \|\nabla\varphi\|^2)^{\frac{3}{2}} H,$$

segue que

$$\Delta\varphi(0) = (n-1)H(p) < 0. \quad (3.25)$$

Novamente, por argumentos de continuidade, concluímos que existe $0 < a_2 < \ell'$ tal que $\Delta\varphi < 0$ em $B_{a_2}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Agora, fixamos $a_0 := \min\{a_1, a_2\}$, $c = \frac{2}{\sqrt{(n-1)|H(p)|}}$ (note que $0 < a_0 < \ell'$) e, em seguida, tomamos Ω_2 relativamente a $0 < a < a_0$. Usando (3.24) e (3.25), segue que

$$Q_0 w \leq \frac{c}{8(x_n - \varphi - \epsilon')^{3/2}} \left\{ (n-1)2^{3/2} \frac{2H(p)}{(n-1)|H(p)|} + 4 \right\}.$$

Como

$$\left\{ 2^{3/2} \frac{2H(p)}{|H(p)|} + 4 \right\} = 4(-\sqrt{2} + 1) < 0,$$

segue daí que w é supersolução relativamente a Q_0 em Ω_2 , desde que tomemos

$$0 < a < a_0 = \min\{a_1, a_2\}.$$

■

De acordo com (3.14) o bordo de Ω_2 é união de dois conjuntos. O primeiro deles é parte de $\gamma' = \bar{\Omega} \cap \{R = a\}$ e o outro é definido por $\gamma'' := \{(x_1, \dots, x_n); x_n = \varphi + \varepsilon'\} \cap \{R \leq a\}$. Note que temos γ' e γ'' são conjuntos fechados de classe C^2 .

A exemplo do que fizemos no Lema 3.1.2, estudaremos o comportamento da supersolução w nas proximidades de γ'' .

Lema 3.1.4 *Existe $0 < \tilde{a}_0 < \ell'$ tal que, definindo Ω_2 relativamente à $0 < a < \tilde{a}_0$, temos que função $w : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.15) satisfaz*

$$\frac{\partial w(q)}{\partial \eta(q)} = -\infty \quad (3.26)$$

para qualquer $q \in \text{int}(\gamma'')$, onde η é o vetor normal unitário que aponta para o interior de Ω_2 .

Demonstração:

Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$, $q \in \gamma''$ e $\eta(q) = (\eta_1(q), \dots, \eta_n(q))$ normal unitário a Γ em q que aponta para o interior de Ω_2 .

Como vimos, na demonstração do Lema 3.1.3,

$$w_i = \frac{c\varphi_i}{2\sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}} \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\text{e } w_n = -\frac{c}{2\sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}}. \text{ Assim,}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta(q)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \eta_i = \frac{c}{2\sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \eta_i \right) - \eta_n \right] = \frac{c}{2\sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}} (\langle \nabla \varphi, \tilde{\eta} \rangle - \eta_n), \quad (3.27)$$

onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$.

Observe que $\eta_n > 0$ em γ'' , do contrário $\{(x_1, \dots, x_n); x_n = \varphi + \varepsilon'\}$ não seria gráfico, observe também que $|\tilde{\eta}| \leq |\eta| = 1$.

Como $\nabla \varphi(0) = 0$ (conforme visto no Lema 3.1.3), dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $0 < a_\varepsilon < \ell'$ tal que

$$\|\nabla \varphi\| < \varepsilon \quad \text{em } B_{a_\varepsilon}(0).$$

Segue daí que

$$\langle \nabla \varphi, \tilde{\eta} \rangle \leq \|\nabla \varphi\| \|\tilde{\eta}\| < \varepsilon \quad \text{em } B_{a_\varepsilon}(0).$$

Agora, usando que γ'' é compacto, podemos tomar $\tilde{\varepsilon} := \min_{q \in \gamma''} \{\eta_n(q)\}$. Dessa forma existe $0 < \tilde{a}_0 < \ell'$ tal que,

$$\langle \nabla \varphi, \tilde{\eta} \rangle \leq \|\nabla \varphi\| < \tilde{\varepsilon} \text{ em } B_{\tilde{a}_0}(0). \quad (3.28)$$

Pelas expressões (3.27) e (3.28) concluimos que

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \eta(q)} < \frac{c}{2\sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'}} (\|\nabla \varphi(x)\| - \eta_n) < 0 \quad \forall x \in B_{\tilde{a}_0}(0). \quad (3.29)$$

Fazendo $x \rightarrow q$, teremos $x_n - \varphi - \varepsilon' \rightarrow 0$. Como $c > 0$ e $x_n - \varphi - \varepsilon' > 0$ em Ω_2 , segue que

$$\frac{\partial w(q)}{\partial \eta(q)} = -\infty,$$

para todo $q \in \text{int}(\gamma'')$, desde que tomemos $0 < a < \tilde{a}_0 < \ell'$.

■

3.2 Estimativas *a priori* para a altura de uma solução do Problema de Dirichlet 1

Proposição 3.2.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cujo bordo Γ é a união de dois conjuntos fechados γ e γ' , sendo γ' de classe C^1 e u uma solução de Q_0 em U que é contínua em γ e de classe C^1 em γ' . Considere também v uma supersolução de Q_0 que é contínua em \bar{U} e tal que $\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\infty$ em todo ponto de $\text{int}(\gamma')$, onde, η é a normal unitária a γ' que aponta para o interior de U ao longo de γ' .*

Sob essas condições, se $u \leq v$ em γ então $u \leq v$ em U .

Demonstração:

Sejam u, v solução e supersolução de Q_0 em U , respectivamente. Segue que

$$Q_0 u - Q_0 v \geq 0.$$

Se tivermos $z = u - v \leq 0$ em Γ , a demonstração estará concluída pois, pelo Corolário 1.4.5, teremos

$$u \leq v \text{ em } \bar{U}.$$

Suponha então que $u > v$ em alguma parte de γ' . Então, pondo

$$d' := \max_{\gamma'} \{u - v\} > 0, \quad (3.30)$$

teremos $u \leq v + d'$ em γ' e também em Γ (já que, por hipótese, $u \leq u$ em γ). Então, usando novamente o Corolário 1.4.5 concluiremos que

$$u \leq v + d' \text{ em } U.$$

Por outro lado, afirmamos que existe $q \in \text{int}(\gamma')$ tal que $u(q) = v(q) + d'$, pois d' , fixado em (3.30), é atingido para algum $q \in \text{int}(\gamma')$. Assim,

$$\frac{\partial u(q)}{\partial \eta} \leq \frac{\partial v(q)}{\partial \eta},$$

onde η é vetor unitário normal a γ' em q que aponta para o interior de U .

Porém, sendo u de classe C^1 no compacto γ' teremos $\frac{\partial v(q)}{\partial \eta}$ limitado inferiormente por

$$\inf_{q \in \text{int}(\gamma')} \frac{\partial u(q)}{\partial \eta},$$

contrariando a hipótese que $\frac{\partial v(q)}{\partial \eta} = -\infty$ em $\text{int}(\gamma')$.

Logo, devemos ter $u \leq v$ em Γ . Isto conclui a prova da proposição. ■

O próximo resultado estabelece estimativa *a priori* para a altura de solução uma u do Problema de Dirichlet 1 e resulta diretamente no Teorema 2.

Proposição 3.2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cujo bordo Γ é de classe C^2 e suponha que existe $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $\Gamma' \subset \Gamma$ de p tal que se u é solução do Problema de Dirichlet (1), então*

$$|u(x)| < \max_{\Gamma - \Gamma'} |f| + \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.31)$$

Demonstração:

Sejam $p \in \Gamma$ tal que $H(p) < 0$ e u solução do Problema de Dirichlet (1). Considere o aberto Ω_1 definido em (3.2) cujo bordo é união dos conjuntos fechados γ e γ' (Ver fig. 3.2). Assim,

$$u|_{\gamma} = f|_{\gamma} \leq \max_{\gamma} |f|. \quad (3.32)$$

Agora, tome $v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v = b - a \cosh^{-1}\left(\frac{R}{a}\right)$. No Lema 3.1.1 mostramos que v é supersolução relativamente a Q_0 em Ω_1 . Além disso, pelo Lema 3.1.2 temos $\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\infty$ em cada ponto pertencente a $\text{int}(\gamma')$.

Então, pondo b definido com

$$b := \max_{\gamma} |f| + a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a} \right), \quad \text{onde } d = \text{Diam}(\Omega), \quad (3.33)$$

temos

$$v = \max_{\gamma} |f| + a \left[\cosh^{-1} \left(\frac{d}{a} \right) - \cosh^{-1} \left(\frac{R}{a} \right) \right].$$

Assim, usando que a função $g(\sigma) = a \cosh^{-1} \sigma$, com $\sigma > 1$ é crescente e que $R \leq d$, segue de (3.32) que

$$u \leq v \quad \text{em } \gamma.$$

Nesse contexto, podemos aplicar a Proposição 3.2.1 à u e v para concluir que

$$u \leq v \quad \text{em } \Omega_1 = \Omega \cap \{R > a\}. \quad (3.34)$$

Como a função $g(\sigma) = a \cosh^{-1} \sigma$, com $\sigma > 1$ é positiva, temos então que

$$u \leq v \leq b \quad \text{em } \overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega} \cap \{R \geq a\}. \quad (3.35)$$

Considere $\Omega_2 = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_n > \varphi + \varepsilon'\} \cap \{R < a\}$ já definido em (3.14) e $w : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $w = b + c(\sqrt{2a} - \sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'})$, onde escolhemos

$$c := \frac{2}{\sqrt{(n-1)|H(p)|}} \quad (3.36)$$

e b como em (3.33).

Evidentemente $b \leq w$ pois, $\sqrt{2a} - \sqrt{x_n - \varphi - \varepsilon'} > 0$ em Ω_2 . Disto e de (3.35) segue,

$$u \leq b \leq w \quad \text{em } \partial\Omega_2 \cap \{R = a\}.$$

Para qualquer $0 < a \leq \min\{a_0, \tilde{a}_0\}$, garantimos pelo Lema 3.1.3 que w é supersolução em Ω_2 relativamente a Q_0 e, pelo Lema 3.1.4, que $\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\infty$ em $\text{int}(\gamma'')$. Portanto, segue da Proposição 3.2.1 que

$$u \leq w \quad \text{em } \Omega_2. \quad (3.37)$$

Fazendo $\varepsilon' \rightarrow 0$ em Ω_2 temos $x_n \rightarrow \varphi$. Segue, da desigualdade acima e da definição de w , que

$$u \leq b + c\sqrt{2a} \quad \text{em } \{R < a\} \cap \Omega. \quad (3.38)$$

Reunindo os resultados obtidos em (3.35) e (3.38) temos

$$u \leq b + c\sqrt{2a} \quad \text{em } \Omega.$$

Como a mesma construção acima se aplica a solução $-u$ de $Q_0 = 0$ segue que

$$|u| \leq b + c\sqrt{2a}. \quad (3.39)$$

Substituindo os valores das constantes c , dado em (3.36) e b , dado em (3.33), teremos

$$|u| \leq \max_{\gamma} |f| + a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a} \right) + \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{(n-1)|H(p)|}}.$$

Logo,

$$|u| \leq \max_{\gamma} |f| + a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a} \right) + \sqrt{\frac{8a}{(n-1)|H(p)|}}. \quad (3.40)$$

Observe que as duas últimas parcelas tendem a zero quando $a \rightarrow 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < a = a(\varepsilon) \leq \min\{a_0, \tilde{a}_0\} < \ell'$ tal que

$$|u| < \max_{\gamma} |f| + \varepsilon,$$

onde γ é definido em (3.11) relativamente a a , e isso conclui a prova da Proposição. ■

Concluiremos agora a demonstração do Teorema 2.

Demonstração:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma domínio limitado cujo bordo Γ é de classe C^2 . Dado $\varepsilon > 0$ defina uma função $\bar{f} \in C^\infty$ tal que

$$\bar{f} \equiv 0 \quad \text{em } \gamma \quad \text{com } \bar{f}(p) = 2\varepsilon,$$

onde γ é definido como em (3.11) relativamente a $a = a(\varepsilon)$ que, por sua vez, pode ser tomado arbitrariamente pequeno (donde $\gamma \approx \Gamma$).

Suponha $u \in C^2(\Omega)$ solução de $Q_0 = 0$. Note que não pode ser $u|_{\Gamma} = \bar{f}$, pois, pela Proposição 3.2.2

$$|u(x)| < \max_{\gamma} |\bar{f}| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Mas por construção temos

$$|u| \geq 2\varepsilon$$

Logo para $f = \bar{f}$ o Problema de Dirichlet(1) não admite solução. ■

Conclusão

Com base no que foi mostrado nos dois capítulos anteriores, faremos uma síntese dos resultados obtidos.

Concluimos, via Teorema 1, que $H \geq 0$ em Γ é condição suficiente para que o Problema de Dirichlet (2) admita solução única. Por outro lado, segue do Teorema 2 que, se existe $p \in \Gamma$ onde $H(p) < 0$ então é possível construir um dado no bordo $f \in C^\infty(\Gamma)$, para o qual o Problema de Dirichlet (1) não admite solução. Como conclusão, segue o Teorema 3.

Bibliografia

- [1] AIOLFI, A. J; RIPOLL, J.; SORET, M. **The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation on arbitrary domains of a Riemannian manifold**, preprint.
- [2] RIPOLL, J; SAUER, L. **A note on the Dirichlet problem for the minimal surface equation in nonconvex planar domains**, *Mat. Contemp.*, v. 35,2008, p. 177-183.
- [3] DAJACZER, M; HINOJOSA, J. H. L. **Killing graphs with prescribed mean curvature**, *Calc. Var. Partial Diff. Equation*, v.33,2018, p. 231-248.
- [4] FINN, R. **On Equations of Minimal Surface Type**, *Annals of Mathematics*, v.60,1954, p.397-416 .
- [5] FINN, R. **Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature**, *J. d'Analyse Mathématique*, v.14, 1965, p. 139-160.
- [6] GILBARG, D; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Ed. Berlin: New York, Springer.2001.
- [7] BONOW, I.C. **O problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies de curvatura média constante**. Porto Alegre, 2007.Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007.
- [8] JENKINS, H; SERRIN,J. **The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions**, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. v. 229, 1968, p.170-187.
- [9] NELLI.J.B; ROSEMBERG, H.**Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** , *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)*, v.33, p. 263-292(2002) Errata *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)*, v.38,2007,p. 661-664.
- [10] EARP, R.S; TOUBIANA E. **An asymptotic theorem for minimal surfaces and existence results for minimal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . *Math. Ann*, v.342,2008, p.309-331.
- [11] RADO, T.**The problem of the least area and the problem of Plateau**, *Math. Z.*, v.82, 1930, p. 763-796.

- [12] RADO, T. **Contributions to the theory of minimal surface**, *Acta Litt. Sci. Univ. Szeged*, v. 6, 1932, p. 1-20.