

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lucas Camponogara Viera

**DISTRIBUIÇÃO E MANIPULAÇÃO DE COERÊNCIA QUÂNTICA EM
SISTEMAS MULTIPARTIDOS**

Santa Maria, RS
2017

Lucas Camponogara Viera

**DISTRIBUIÇÃO E MANIPULAÇÃO DE COERÊNCIA QUÂNTICA EM SISTEMAS
MULTIPARTIDOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física.**

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Camponogara Viera, Lucas
Distribuição e Manipulação de Coerência Quântica em
Sistemas Multipartidos / Lucas Camponogara Viera.- 2017.
76 p. ; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2017

1. Coerência Quântica 2. Distância de Hilbert-Schmidt
3. Matrizes de Gell Mann 4. Estados qudit 5. Não-
monotonicidade I. Maziero, Jonas II. Título.

©2017

Todos os direitos autorais reservados a Lucas Camponogara Viera. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: camponogaraviera.lucas@gmail.com

Lucas Camponogara Viera

**DISTRIBUIÇÃO E MANIPULAÇÃO DE COERÊNCIA QUÂNTICA EM SISTEMAS
MULTIPARTIDOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física.**

Aprovado em 24 de fevereiro de 2017:

Jonas Maziero, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Marcos André Carara, Dr. (UFSM)

Matheus Jatkoske Lazo, Dr. (FURG)
(Videoconferência)

Santa Maria, RS
2017

"A felicidade não é uma questão fácil; é muito difícil encontrá-la em nós mesmos, e impossível encontrá-la alhures."

(Chamfort apud Schopenhauer, 1851)

RESUMO

DISTRIBUIÇÃO E MANIPULAÇÃO DE COERÊNCIA QUÂNTICA EM SISTEMAS MULTIPARTIDOS

AUTOR: Lucas Camponogara Viera

ORIENTADOR: Jonas Maziero

Reiteradamente no contexto da Ciência da Informação Quântica (CIQ) é essencialmente necessária a quantificação de sistemas físicos com respeito aos seus fenômenos quânticos, tais como a Coerência Quântica (CQ) intrínseca a estados com superposição quântica. Doravante algumas funções quantificadoras de CQ foram atribuídas ao longo dos anos através de medidas de distância em espaços de estados quânticos, denominadas medidas de dissimilaridade, desempenhando papel importante em fenômenos de correlação na CIQ, tal como Discórdia e Emaranhamento com implementação em Criptografia Quântica, por exemplo. O objetivo desta dissertação é estender a pesquisa dedicada a CQ, publicada em artigo por Jonas Maziero, efetuando uma análise aprofundada com respeito ao controle dos aspectos local e não-local da Coerência de Hilbert-Schmidt (CHS) em sistemas multipartidos e suas relações com outras funções quantificadoras de CQ, bem como a investigação de uma possível implicação da Distância de Hilbert-Schmidt (DHS) na função CQ frente a relação da Não-Monotonicidade sobre o Produto Tensorial (NMsPT) e de limitações entre Coerência e populações de estados e energia. Partindo do estado multipartido genérico de sistemas quânticos com níveis de energia (qudit), definido a partir da parametrização de Bloch, calculamos a função CQ para seus respectivos casos particulares 1-qubit, 2-qubit, 1-qudit e duas cópias de 1-qubit adotando a DHS. Escrevendo a função CHS para este último caso em termos de suas partes local e não-local e do resultado para 1-qubit é possível, manipulando a diferença entre as populações locais, inferir uma implicação não-local na CHS para este sistema, em contraste ao que se observa adotando distintas medidas de dissimilaridade para esta função, denominadas Distância Norma-1 e Distância Entropia Relativa, nos casos em que não há implicação e onde há consequência direta com suas populações locais do que anteriormente a diferença entre elas, respectivamente. Não obstante, o emprego da DHS proporciona o caráter de uma estranha relação na CIQ através da NMsPT, e uma possível implicação desta relação em fenômenos emergentes da CIQ tal qual a função CQ.

Palavras-chave: Coerência Quântica. Distância de Hilbert-Schmidt. Matrizes de Gell Mann. Estados qudit. Não-monotonicidade.

ABSTRACT

DISTRIBUTION AND QUANTUM COHERENCE MANIPULATION IN MULTI-QUDIT SYSTEMS

AUTHOR: Lucas Camponogara Viera

ADVISOR: Jonas Maziero

Repeatedly in the field of Quantum Information Science (QIS) it's essentially required of physical systems the quantification concerning its quantum phenomena, such as Quantum Coherence (QC) relying in quantum superposition states. Hereafter several quantifiers of QC have been proposed over the years through distance measures in quantum state spaces, called distinguishability measures, playing an important role in QIS correlation phenomena such as Discord and Entanglement with Quantum Cryptography implementation, as example. The aim of this dissertation is to extend the research of QC, published by Jonas Maziero in an article, performing an in-depth analysis regarding the control of local and non-local aspects of Hilbert-Schmidt Coherence (HSC) in multipartite systems and its relations with others QC quantifiers, as well as an analysis of a possible Hilbert-Schmidt Distance (HSD) implication in QC functions over the Non-Monotonicity under Tensor Products (NMuTP) inequality and of limitations between Coherence of state populations and energy. Starting from the generic multipartite state of level quantum energy systems (qudit), defined from the Bloch parameterization, calculations of QC functions concerning its particular cases are considered for 1-qubit, 2-qubit, 1-qudit and two copies of 1-qubit adopting HSD. Writing the HSC function for the latter case in terms of its local and non-local parts and from the result of 1-qubit it is possible, by manipulating the difference between local populations, to infer a non-local implication in the HSC for that system, in contrast to what has been seen by adopting distinct dissimilarity measures for this function, named l_1 -Norm Distance and Relative Entropy Distance, cases where there are no implications and where there is a direct consequence with their local populations instead of the previously difference between them, respectively. Notwithstanding, HSD usage provides a description of an awkward relation in QIS towards NMuTP, and a possible implication of that kind of relation in QIS emergent phenomena such as QC function.

Keywords: Quantum Coherence. Hilbert-Schmidt Distance. Gell Mann Matrices. Qudit states. Non-monotonicity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Observáveis incompatíveis.	16
Figura 2.2 – Experimento Stern-Gerlach.	20
Figura 5.1 – Limite 1-qubit para a função Coerência vs população de estados.	48
Figura 6.1 – Controle da população $\langle \Gamma_1^d \rangle$ com a CER de 1-qubit para um valor fixo da $Cl1$: $C_{l1}(\rho_{(qb)}) = 2^{1/2}C_{HS}(\rho_{(qb)}) = \sqrt{0 + 1/2}$. A linha em azul denota a função CER. Valores constantes da $Cl1$ descrevem as superfícies laterais de um cilindro de estados físicos no interior da esfera de Bloch para 1-qubit. Os círculos inferior e superior do cilindro, que tocam a superfície da esfera, descrevem estados puros para os quais a norma de Bloch, representada pela linha vermelha no gráfico, possui resultado unitário. ..	57
Figura 7.1 – Percentagem gerada a partir de um milhão de quartetos de estados aleatórios 1-qubit conduzindo para a NMsPT da DHS. Código computacional disponível em: https://github.com/jonasmaziero/LibForro .> ..	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CIQ</i>	Ciência da Informação Quântica
<i>CQ</i>	Coerência Quântica
<i>CHS</i>	Coerência de Hilbert-Schmidt
<i>DHS</i>	Distância de Hilbert-Schmidt
<i>NM_sPT</i>	Não Monotonicidade sobre Produto Tensorial
<i>EE</i>	Espaço Euclidiano
<i>GE</i>	Geometria Euclidiana
<i>MQ</i>	Mecânica Quântica
<i>IQ</i>	Informação Quântica
<i>EPR</i>	Einstein, Podolsky e Rosen
<i>EVM</i>	Espaços Vetoriais Métricos
<i>EVMG</i>	Espaços Vetoriais Métricos Generalizados
<i>MD</i>	Medidas de Dissimilaridade
<i>OP</i>	Operador Densidade
<i>SG</i>	Stern-Gerlach
<i>MGGM</i>	Matrizes Generalizadas de Gell-Mann
<i>DNT</i>	Distância Norma-Traço
<i>DNP</i>	Distância Norma- p
<i>DER</i>	Distância Entropia Relativa
<i>Cl₁</i>	Coerência Norma- l_1
<i>CER</i>	Coerência Entropia Relativa
<i>OI</i>	Operações Incoerentes
<i>AsPT</i>	Aditiva sobre Produto Tensorial
<i>MsPT</i>	Monotônica sobre Produto Tensorial
<i>q.e.d.</i>	quo erat demonstratum

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ	Função Somatório
Π	Função Produtório
ψ	Função de Onda
Pr	Função Probabilidade
Tr	Função Traço
$ \cdot $	Função Módulo
$\ \cdot\ $	Função Norma
$g(,)$	Função Métrica
$d(,)$	Função Medida de Distância
$\sqrt{\quad}$	Função Raíz Quadrada
\rightarrow	Notação para Vetores
$\langle \rangle$	Notação Bra-Ket de P. A. Dirac para Valor Esperado
$ \rangle$	Notação Ket de P. A. Dirac para Vetor de Estado
$\langle $	Notação Bra de P. A. Dirac para Vetor de Estado Adjunto
\dagger	Operador Transposto Cojugado
ρ, ζ, η, χ	Operadores Densidade
ι	Operador Densidade Incoerente
\Rightarrow	Sinal para Implicação
\otimes	Sinal para Produto Tensorial
\geq	Sinal para Desigualdade
m	Número de Qudits
d	Dimensão do Espaço Vetorial
j_s	Qudit de Índice s
Γ	Matriz de Gell-Mann
\mathcal{T}	Espaço Vetorial Tangente
\mathcal{V}	Espaço Vetorial
\mathcal{M}	Variedade Diferenciável

\mathcal{R}	Corpo dos Números Reais
\mathbb{C}	Corpo dos Números Complexos
β	Constante de modificação
δ	Tensor Delta de Kronecker

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1	MECÂNICA QUÂNTICA	14
2.1.1	Postulado dos Estados	14
2.1.2	Postulado das Medidas	15
2.1.3	Operador Densidade	16
2.1.3.1	<i>Operador Densidade Puro</i>	17
2.1.3.2	<i>Operador Densidade Misto</i>	18
2.1.4	Sistemas Compostos	19
2.1.5	Coerência e Superposição	20
2.2	CIÊNCIA DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA	22
2.2.1	Estado m-qudit	23
2.2.2	Estado m-qudit Incoerente	27
2.2.3	Casos Particulares	27
2.2.3.1	<i>Estado 1-qubit</i>	27
2.2.3.2	<i>Estado 1-qubit Incoerente</i>	29
2.2.3.3	<i>Estado 2-qubit</i>	29
2.2.3.4	<i>Estado 2-qubit Incoerente</i>	30
2.2.3.5	<i>Estado Cópia de 1-qubit $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$</i>	30
2.2.3.6	<i>Estado Cópia de 1-qubit Incoerente $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$</i>	31
2.2.3.7	<i>Estado 1-qutrit</i>	31
2.2.3.8	<i>Estado 1-qutrit Incoerente</i>	31
2.3	ESPAÇOS VETORIAIS MÉTRICOS GENERALIZADOS	32
2.3.1	Medidas de Dissimilaridade	35
2.3.1.1	<i>Distância Norma-p</i>	36
2.3.1.2	<i>Distância Norma-Traço ($p = 1$)</i>	36
2.3.1.3	<i>Distância de Hilbert-Schmidt ($p = 2$)</i>	37
2.3.1.4	<i>Distância Entropia Relativa</i>	38
2.3.1.5	<i>Distância Norma-l_1</i>	38
3	DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT ENTRE ESTADOS M-QUKIT	40
4	COERÊNCIA DE HILBERT-SCHMIDT ENTRE ESTADOS M-QUKIT	42
4.1	CASOS PARTICULARES	43
4.1.1	CHS para 1-qubit	44
4.1.2	CHS para 2-qubits	44
4.1.3	CHS para estado cópia de 1-qubit $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$	45
4.1.4	CHS para 1-qutrit	46
5	LIMITE ENTRE COERÊNCIA E POPULAÇÃO	47
5.0.5	Limite para 1-qubit	47
5.0.6	Limite para 1-qutrit	48
6	RELAÇÕES ENTRE MANIPULAÇÃO DE POPULAÇÃO E FUNÇÃO COERÊNCIA	53
6.1	COERÊNCIA DE HS	53
6.1.1	Manipulação para estado cópia de 1-qubit	53
6.2	COERÊNCIA NORMA- L_1	54
6.2.1	Manipulação para Cópia de 1-qubit	54

6.3	COERÊNCIA ENTROPIA RELATIVA.....	56
6.3.1	Manipulação para 1-qubit	57
6.3.2	Manipulação para Cópia de 1-qubit	58
7	NÃO MONOTONICIDADE SOBRE PRODUTO TENSORIAL	59
7.1	NMSTP PARA A DISTÂNCIA ENTROPIA RELATIVA.....	59
7.2	NMSTP PARA A DISTÂNCIA NORMA- P	60
7.3	NMSTP PARA A DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT.....	60
8	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64
	APÊNDICE A – PROPRIEDADES DE DISSIMILARIDADE	70
A.1	PROPRIEDADES DA DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT.....	70
A.1.1	Homogeneidade	70
A.1.2	Positividade	71
A.1.3	Axioma da Coincidência	72
A.1.4	Relação de Simetria	72
A.1.5	Desigualdade Triangular	73
A.1.6	Propriedade Telescópica	73
A.1.7	Invariância Isométrica	74
A.2	PROPRIEDADES DA DISTÂNCIA ENTROPIA RELATIVA.....	75
A.2.1	Aditividade sobre Produto Tensorial	75

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento e a compreensão empírica das leis que regem o universo foram inicialmente possíveis através da faculdade dos sentidos. A primeira tentativa lógica para a descrição do universo iniciou-se, ao que se sabe, com Aristóteles, discípulo de Platão, através de um método denominado “silogismo” há muito tempo depois da noção de aritmética e geometria dominada por egípcios e babilônios. O método aristotélico [Kneale; Kneale, 1991] consistia de duas premissas, capazes de apontar para a inferência de certas conclusões. A partir deste método foi possível representar o universo de forma axiomática através dos objetos que o compõe e de suas formas, posteriormente reconhecido como Geometria Euclidiana [Thomas, 1956] para sistemas de uma, duas e três dimensões espaciais no Espaço Euclidiano (EE), possibilitando teoremas famosos como o teorema de Pitágoras e noções de distância entre dois pontos. Seguindo a cronologia tais estruturas poderiam ser manipuladas de maneira mais simples se pudéssemos associar suas formas e quantidades físicas a objetos simbólicos. Temos então a origem da Álgebra com Mohammed Ben Musa [Daffa, 1977], por volta de 700 d.c. Faltava, no entanto, a conexão destas estruturas com dimensões espaciais gerais do universo no qual nos locomovemos. Por volta do séc. XVIII o francês Renè Descartes, no seu mais famoso trabalho “Discurso do Método” [Gomes, 2004], introduziu um conceito denominado “Sistema de Coordenadas Cartesiano”, uma ferramenta que possibilitou a unificação da álgebra com a GE originando a Geometria Analítica. Isto permitiu a especificação não ambígua da posição de elementos no espaço, bem como o surgimento de Espaços Vetoriais Métricos (EVM) [Crowe, 2011] e geometrias não-euclidianas.

Destarte, filósofos como Descartes e estudiosos construíram um método que explicasse, de forma invariante¹, os fenômenos observados no universo. Este método denominado “método científico”, apoiado em comprovações experimentais, é desde então o pilar para o estudo do conhecimento: a Ciência. O ramo da Ciência que pretende compreender a origem mais primitiva do comportamento do universo, a Física, é fundamentada na linguagem matemática e no método científico. Embora a descrição destes fenômenos fosse largamente explicada com a noção até então conhecida da Física e sua relação com o universo através dos sentidos, denominada “noção clássica”, o conhecimento de novos fenômenos sugeriram uma noção contra intuitiva aos sentidos. Uma nova teoria da Física deveria manifestar-se para a explicação de tais fenômenos: a Mecânica Quântica (MQ) [Toledo, 2009]. A observação de tais fenômenos contra intuitivos no plano da MQ, como a dualidade onda-partícula, levariam a novas interpretações do Universo. A MQ é

¹Ivariante físico: grandeza cuja quantificação permanece imutável em qualquer ponto do espaço sob diferentes transformações do seu sistema de referência, i.e, o resultado da medida não deve depender do seu observador garantindo a realidade física.

atualmente a teoria que, desde o seu nascimento e origem com a correção da Catástrofe do Ultravioleta e a sua caracterização discreta dos fenômenos naturais, tem provocado grande impacto em nossas fundações intuitivas abalando nossa perspectiva e noção clássica de mundo.

Uma de muitas características intrínsecas a sistemas físicos no plano da MQ, como o Princípio de Incerteza de Heisenberg, é a Superposição Coerente (relações de fase entre subespaços do espaço de estados do sistema) entre os vetores que representam o estado deste sistema, diretamente relacionada com a existência de Correlações Quânticas [Ferraro, 2009] admitidas entre as partes deste sistema físico quântico composto e de suas incertezas quânticas associadas. Entretanto tais correlações presentes no sistema de interesse perdem-se facilmente frente interações com o ambiente, causando a perda de Informação Quântica (IQ) do sistema em um processo irreversível denominado “Decoerência” [Zeh, 1973] [Zeh, 1970] [Zurek, 1981] [Zurek, 1982]. Por outro lado esta interação dá origem ao fenômeno, e talvez o mais contraintuitivo do que a Dualidade Onda-Partícula, denominado Emaranhamento [Streltsov, 2015], com forte repercussão na Ciência da Informação Quântica (CIQ) em protocolos como Criptografia Quântica [Gisin et al., 2002] e Teleportação Quântica [Popescu, 1994], primeiramente concebido em 1926 pela interpretação de Erwin Schrödinger [Schrödinger, 1935] e analisado por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) no trabalho denominado “Paradoxo de EPR” [Einstein et al., 1935].

A análise de EPR investigava as características não-locais (experimentos realizados em um sistema físico “A” alteram resultados de um sistema físico “B” com distância macroscópica relativa de “A”) e não-determinísticas (probabilísticas) do Emaranhamento, com o intuito de demonstrar que a natureza da MQ deveria ser incompleta, pois não assume simultaneamente os conceitos de “Realismo” (determinismo) e “Localidade” conhecido como “Realismo-Local” [Aspect et al., 1981]. Deveria existir, no entanto, um elemento de realidade satisfazendo o papel de parâmetro associado ao observável físico (posição, energia etc.) garantindo uma Teoria de Variáveis Ocultas [Freedman, 1972]. Apenas em 1964, com os esforços de John Bell [Bell, 1964], que a validade da MQ poderia ser colocada à prova. J. Bell demonstra que para uma teoria como a MQ ser realista e local, ela deve cumprir um conjunto de desigualdades, tais como a desigualdade CHSH por Clauser, Horne, Shimony e Holt de 1969 [Clauser et al., 1969], e que há estados quânticos que violam tais desigualdades. Experimentos realizados apenas na década de 70 [Freedman, 1972] e 80 [Aspect et al., 1981] [Aspect et al., 1982] corroboraram o fato de que a MQ não pode ser realista e local simultaneamente, e que se tal teoria existisse deveria ser incorreta, garantindo desta forma a validade teórica do Emaranhamento. Dentro deste contexto surgiu a CIQ, preocupada em utilizar os princípios da MQ para armazenar, transmitir e processar a informação de maneira mais eficiente e segura do que a física clássica. Um dos avanços da CIQ tem sido o protocolo de Criptografia Quântica, que utiliza das características físicas do Emaranhamento para garantir a transmissão de Informação Clássica sem quebra ou violação de

segurança.

Relacionada diretamente ao Emaranhamento está a função Coerência Quântica (CQ), inferindo na perda de IQ de sistemas interagentes, também conhecida por seu aspecto eficiente em tarefas de manipulação de informação e realização de energia através da dinâmica do sistema [Bromley, 2015], com implementações em algoritmos de busca [Shi, 2016] para computadores quânticos [Yuan, 2016], Correlações Quânticas [Ma, 2016] através do Emaranhamento [Streltsov, 2015], e além de larga utilização na Fotossíntese [Chenu, 2015].

O objetivo desta dissertação é estender o estudo realizado por Maziero [Maziero, 2016a] efetuando uma análise aprofundada com respeito ao controle da localidade e não-localidade da Coerência de Hilbert-Schmidt (CHS) a partir de sua Medida de Dissimilaridade, denominada Distância de Hilbert Schmidt (DHS), entre sistemas multipartidos qudits e suas relações com outras funções quantificadoras de CQ, tais como a Coerência Entropia Relativa (CER) e a Coerência Norma-11 (C/l_1) obtidas a partir das Medidas de Dissimilaridade (MD) Distância Entropia Relativa e Distância Norma-11, respectivamente. A principal motivação deste trabalho se encontra na vasta aplicabilidade da função CQ em sistemas físicos, dentro os citados anteriormente, bem como em processos como Criptografia e Emaranhamento precursores na física da Computação Quântica.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o capítulo 2 abordará um referencial teórico acerca da MQ, CIQ e de Espaços Vetoriais Métricos Generalizados (EVMG), introduzindo o conceito de Operador Densidade (OD), e sua representação genérica "m-qudit", além de uma interpretação experimental para a CQ, bem como a noção de medidas de distância e MD quânticas em CIQ. O capítulo 3 elucidará o cálculo para a DHS entre dois estados m-qudit. O capítulo 4 abordará, através do resultado obtido no capítulo anterior, o cálculo para a CQ de um estado m-qudit em seus casos particulares de 1-qubit, 1-qudit, 2-qubit e duas cópias de 1-qubit, para este último caso a CQ total será determinada em termos de suas partes local e não-local. O capítulo 5 procede com o limite entre a população e a Coerência de 1-qubit e 1-qudit. O capítulo 6 promove a manipulação da população frente a relação com a Coerência dos sistemas avaliados, com o caso particular da população local e a CQ não-local para um estado de duas cópias de 1-qubit adotando a função CHS em contraste com as funções C/l_1 e CER. O capítulo 7 aborda detalhadamente a investigação da Não-Monotonicidade sobre o Produto Tensorial (NMsPT) e sua implicação com a DHS. Por fim o capítulo 8 apresenta as conclusões finais do trabalho. O leitor também encontrará um apêndice relacionado a propriedades de MD.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para amparar o leitor ao longo dos capítulos adjacentes, faz-se útil introduzir conceitos fundamentais em Mecânica Quântica (MQ), Ciência da Informação Quântica (CIQ) e Espaços Vetoriais Métricos Generalizados (EVMG). Um recurso acadêmico complementar está disponível no apêndice ao final desta dissertação, com respeito a conceitos de Álgebra Linear Quântica (ALQ) e propriedades recorrentes de Medidas de Dissimilaridade (MD). No decorrer deste capítulo, usarei a expressão “métrica” em sua forma equivalente “tensor métrico”, bem como ocorre com frequência na literatura.

2.1 MECÂNICA QUÂNTICA

A MQ tem-se desenvolvido continuamente, desde a correção de Planck para a previsão teórica de Rayleigh-Jeans na catástrofe do ultravioleta, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, e através do paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) até a computação quântica. No contexto da MQ faz-se útil recordar dois postulados fundamentais abordados neste capítulo.

2.1.1 Postulado dos Estados

Postulados são pontos de partida, a priori, primordiais para qualquer teoria Física, cujo caráter de sua natureza especulativa não aparente requer posterior comprovação experimental baseada no método científico. Postulados verdadeiros levam a teoremas e subsequentemente a lemas verificáveis que permitem consequências inevitáveis na realidade Física. Neste contexto adotamos o postulado dos estados: sistemas físicos em MQ são descritos pela representação “ket” de P. A Dirac para vetores de estado normais $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} , a generalização do Espaço Euclidiano (EE) para números complexos \mathbb{C} .

Definimos matematicamente o vetor de estado no espaço de Hilbert por $|v\rangle :=$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, com o produto interno $(\langle \Psi | v \rangle | \Psi \rangle)^\dagger | v \rangle = \sum_{i=1}^n \Psi_i^* v_i$ e produto externo

$$|v\rangle|\Psi\rangle^\dagger := |v\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} v_1\Psi_1^* & \cdots & v_1\Psi_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n\Psi_1^* & \cdots & v_n\Psi_n^* \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Estes vetores de estado possuem a informação completa sobre as possíveis configurações dos estados quânticos.

2.1.2 Postulado das Medidas

Ao contrário da característica determinística da Física Clássica, a MQ tem seu pilar no Princípio de Incerteza de Heisenberg, uma propriedade intrínseca da natureza que afirma a impossibilidade de medir dois observáveis, como posição e velocidade, simultaneamente. A medida (observação) de um deles afetaria inevitavelmente o resultado de medida do outro (Figura 2.1). Neste contexto é possível medir apenas uma probabilidade condicional, tornando a MQ uma teoria estatística e não determinística como a Mecânica Clássica. Cada observável físico é representado por um operador hermitiano denominado auto-adjunto ($\hat{A} = \hat{A}^\dagger$), caracterizado por permanecer idêntico após a operação de transposição de suas linhas e conjugação de seus elementos, e pode ser representado de acordo com a decomposição espectral ($\hat{A} = \sum_{j=1}^n a_j |a_j\rangle\langle a_j|$), onde os autovalores a_j são reais e os autovetores correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais: $\langle a_j | a_k \rangle = \delta_{jk}$, com valor nulo para $j \neq k$ e unitário para $j = k$. A partir da regra de Born, a probabilidade de obter o valor esperado a_j para um observável \hat{A} é dada por:

$$Pr(\vec{a}_j | \vec{\psi}) = |\langle a_j | \Psi \rangle|^2. \quad (2.2)$$

Como em física clássica o valor esperado é definido por

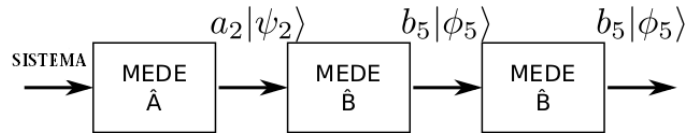
$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{j=1}^d a_j Pr(a_j), \quad (2.3)$$

segundo a probabilidade via regra de Born obtemos o valor esperado em MQ:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \sum_{j=1}^d \vec{a}_j Pr(a_j | \vec{\psi}) = \sum_{j=1}^d a_j |\langle a_j | \psi \rangle|^2 = \\ &= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.\end{aligned}\quad (2.4)$$

O valor esperado é o “centro” de distribuições de probabilidades. Quanto maior o número de experimentos realizados para a estimativa do valor esperado, mais próxima de uma gaussiana centrada em $\langle \hat{A} \rangle$ será a distribuição de probabilidades para esses valores médios.

Figura 2.1 – Observáveis incompatíveis.



De acordo com a ilustração acima, o resultado experimental está completamente condicionado ao ato da medida, ou seja, a primeira medição do observável \hat{A} determina um certo estado $|\psi_2\rangle$ para o sistema, medir um outro observável \hat{B} deste mesmo sistema acarreta em outro estado $|\phi_5\rangle$ que não é autoestado de \hat{A} , i.e, não compartilham a mesma base de autovetores. Tal que os operadores que descrevem cada observável não correspondem a relação de comutação:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq \hat{0}. \quad (2.5)$$

2.1.3 Operador Densidade

No contexto de medidas experimentais, associamos a cada valor esperado de uma medida, ou resultado desta medida, um observável quântico \hat{A} . Porém, quando em um problema estatístico, a descrição de tal estado é feita através de um conjunto de probabilidades, estas probabilidades são convenientemente registradas por um operador ρ denominado “Operador Densidade (OD)”, com a propriedade hermitiana (transposta conjugada) $\rho = \rho^\dagger$, tais como: Operador Momento Linear, Operador Energia etc.

Em 1927 John Von Neumann [Neumann, 1927] e Lev Landau [Landau, 1927] introduziram independentemente o conceito de OD para sistemas físicos. O primeiro motivado por uma abordagem estatística, e o segundo pela incapacidade de escrever um subsistema

de um Sistema Quântico Composto por um Vetor de Estado, bem como em sistemas abertos (que interagem com o ambiente). Em geral adotamos um OD quando há ignorância acerca da preparação do sistema representado por ele.

Um OD genérico ρ deve satisfazer as seguintes condições fundamentais:

1. Traço Unitário:

$$\text{Tr}(\rho) = 1. \quad (2.6)$$

2. Hermitiano:

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.7)$$

3. Positivo semi-definido:

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0. \quad (2.8)$$

De acordo com o tipo de sistema físico em questão, interpretado no capítulo seguinte via experimento Stern-Gerlach, classificamos dois operadores densidade distintos: puros e mistos.

2.1.3.1 Operador Densidade Puro

Uma coleção de sistemas, todos preparados no mesmo estado $|a\rangle$, é denominado Ensemble Estatístico Puro, com a seguinte representação via operador projetor:

$$\rho = |a_j\rangle\langle a_j|, \quad (2.9)$$

Demonstração 1 (Valor Esperado) *Podemos obter o valor esperado para uma base orthonormal completa arbitrária $\{|n\rangle\}$ da seguinte maneira:*

$$\text{Tr}(\rho \hat{A}) = \sum_n \langle n | \rho \hat{A} | n \rangle = \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | \hat{A} | n \rangle = \sum_n \langle \psi | \hat{A} | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad (2.10)$$

q.e.d.

Além disso, para um OD puro teremos a igualdade do traço

$$\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\rho)^2 = 1, \quad (2.11)$$

e a idempotência

$$\rho^2 = \rho. \quad (2.12)$$

2.1.3.2 Operador Densidade Misto

Uma coleção de sistemas preparados a partir de uma combinação linear $\sum p_i |a_i\rangle$ de estados distintos $|a_i\rangle$ com probabilidade p_i é chamado de ensemble estatístico misto. Considere um sub-ensemble cuja preparação inicial de estado seja desconhecida. Podemos calcular, através da regra de Born, a probabilidade de obter o valor esperado b_k para medidas de um outro observável \hat{B} agregando todo o ensemble estatístico de \hat{A} com suas respectivas probabilidades de preparação $Pr(a_j|\vec{\psi}) = |\langle a_j|\psi\rangle|^2 p_j$. Procedemos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Pr(b_k|\{p_j, \vec{a}_j\}) &= \sum_j Pr(b_k|\vec{a}_j) p_j = \\ &= \sum_j |\langle b_k|a_j\rangle|^2 p_j = \\ &= \sum_j \langle b_k|a_j\rangle \langle a_j|b_k\rangle p_j = \\ &= \langle b_k|\{ \sum_j p_j |a_j\rangle \langle a_j| \}|b_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde a mistura estatística $\sum_j p_j |a_j\rangle \langle a_j|$ é denominada OD misto ρ de forma que

$$Pr(b_k|\{P_j, \vec{a}_j\}) = Pr(b_k|\rho) = \langle b_k|\rho|b_k\rangle = \text{Tr}(\rho|b_k\rangle \langle b_k|), \quad (2.14)$$

Demonstração 2 (Valor Esperado) Podemos obter o valor esperado para uma base or-

tonormal completa arbitrária $\{|n\rangle\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\rho \hat{A}) &= \sum_n \langle n | \rho \hat{A} | n \rangle = \sum_n \langle n | \left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right) \hat{A} | n \rangle = \\
&= \sum_n \sum_i p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{A} | n \rangle = \\
&= \sum_n \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle = \\
&= \sum_n p_i |\psi_i\rangle \hat{A} \left(\sum_j \langle n | \langle n | \right) |\psi_i\rangle = \\
&= \sum p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \langle \hat{A} \rangle, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Além disso, para um OD misto teremos, em geral, a desigualdade do traço

$$\text{Tr}(\rho)^2 \leq 1, \tag{2.16}$$

e a não-idempotência

$$\rho^2 \neq \rho. \tag{2.17}$$

2.1.4 Sistemas Compostos

Quando tratamos de sistemas multipartidos temos de considerar um novo espaço de Hilbert na forma $\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ com base ortonormal $|a_j\rangle \otimes |b_k\rangle$ dos sistemas a e b . Neste contexto o estado em \mathcal{H}_{ab} será determinado por $|\psi_{ab}\rangle = \sum_{j,k} c_{j,k} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle$ cujos módulos quadráticos dos coeficientes fornecerão as probabilidades de obtermos os valores a_j e b_k para medidas dos observáveis \hat{A} e \hat{B} .

Deste modo o operador densidade misto será descrito por

$$\rho_{ab} = \sum_j p_j |\psi_{ab}\rangle \langle \psi_{ab}|, \tag{2.18}$$

com valor esperado dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\rho_{ab}} = \text{tr}_{ab}(\hat{\rho}_{ab} \hat{A} \otimes \mathbb{I}) = \text{tr}_a(\rho_a \hat{A}), \tag{2.19}$$

e probabilidades

$$Pr(a_j|\rho_{ab}) = tr_{ab}(\rho_{ab}|a_j\rangle\langle a_j| \otimes \mathbb{I})tr_a(\rho_a|a_j\rangle\langle a_j|). \quad (2.20)$$

A função $tr_a(\rho_a \hat{A})$ denominada traço parcial determina um operador densidade reduzido ρ_A a partir de um sistema composto $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ por um mapa $Tr_B : L(\mathcal{H}_{AB}) \rightarrow L(\mathcal{H}_A)$. Calculamos esta função traço parcial da seguinte maneira:

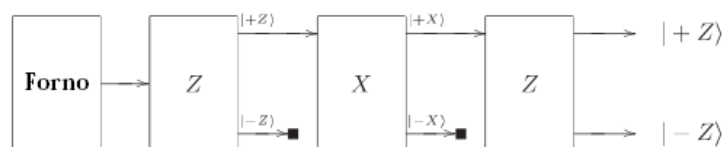
$$\begin{aligned} \rho_A &= Tr_B(\rho_{AB}) = (|\phi\rangle\langle\psi| \otimes |\xi\rangle\langle\zeta|) = \\ &= |\phi\rangle\langle\psi| Tr_B(|\xi\rangle\langle\zeta|) = \\ &= |\phi\rangle\langle\psi| \langle\zeta|\xi\rangle\langle\zeta|\zeta\rangle = \\ &= \delta_{\zeta\xi} |\phi\rangle\langle\psi|, \end{aligned} \quad (2.21)$$

para $\rho_A = |\phi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{H}_a$ e $\rho_B = |\xi\rangle\langle\zeta| \in \mathcal{H}_b$.

2.1.5 Coerência e Superposição

Considere o conjunto de três aparatos experimentais Stern-Gerlach (SG) (Figura 2.2): cada um constituído por um forno térmico de átomos e um campo magnético não uniforme, i.e, por um gradiente de campo magnético. Consideramos, primeiramente, o caso do primeiro aparato experimental "Z". O forno térmico ejeta átomos de hidrogênio na direção do campo magnético através de um colimador. No entanto, se o momento angular do núcleo for desconsiderado, o momento angular do átomo será devido apenas ao spin do elétron que o compõe. Antes de cruzar a fronteira do campo magnético o feixe encontra-se em uma direção randômica e, portanto é dito não-polarizado. A função de onda que descreve o estado quântico deste feixe de elétrons não pode ser única, tal fato caracteriza este estado por um OD misto. Ao cruzar a região do campo magnético, este feixe colimado assume duas possíveis polarizações: supomos que o campo esteja em certa direção \vec{z} , portanto as duas polarizações possíveis serão $+\vec{z}$ e $-\vec{z}$. O estado quântico do feixe neste caso, em cada polarização $+\vec{z}$ e $-\vec{z}$, será representado por um OD puro e uma única função de onda.

Figura 2.2 – Experimento Stern-Gerlach.



Fonte: Adaptado de [Nielsen; Chuang, 2000].

A Coerência Quântica (CQ) neste sistema manifesta-se pelo princípio de superposição,

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |o_j\rangle, \quad (2.22)$$

do vetor de estado $|\Psi\rangle$, i.e, para valores diferentes de c_j e, portanto estados diferentes do spin, existe uma incerteza na determinação final do estado após a medida (ao cruzar o campo magnético). Esta incerteza do sistema físico não é apenas uma ignorância clássica (limitada pelo instrumento de medida) do observador, mas um fenômeno intrínseco ao sistema denominado Coerência. Para melhor compreender-mos esta característica estranha da MQ introduzimos um segundo aparato SG, na qual a direção do campo é \vec{x} . Se no primeiro aparato descartássemos a polarização da direção $-\vec{z}$ e enviássemos a polarização restante ao segundo aparato, representado por "X" (Figura 2.2), deveríamos esperar apenas um feixe ao final do segundo aparato, já que um dipolo magnético clássico na direção $+\vec{z}$ não possui momento magnético líquido na direção \vec{x} . No entanto, observamos dois feixes com iguais probabilidades e momento magnético definido em ambas as direções. Considere agora um terceiro aparato SG, se os átomos tivessem contraídos apenas a direção $+\vec{z}$ esperar-se-ia que o estado final fosse também nesta mesma direção, porém observamos novamente dois estados distintos em \vec{z} com iguais probabilidades. A correta explicação deste fenômeno cascata no aparato SG é concebida a luz da MQ através do estado 1-qubit de superposição coerente escrito na base computacional para cada uma das direções, como segue abaixo:

$$|+Z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+X\rangle + |-X\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$|-Z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+X\rangle - |-X\rangle) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

A probabilidade de obtermos $|\pm X\rangle$ no segundo aparato é equivalente a $1/2$ em $|c_j|^2$, similar a probabilidade de obter $|\pm Z\rangle$. Percebemos que cada um dos quatro estados 1-qubit acima são considerados estados puros. O operador densidade puro correspondente, digamos ao estado com polarização $|+X\rangle$ é dado por

$$\rho_{(qt)} = |+X\rangle\langle +X| = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| - \langle 1|) = \quad (2.25)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Como o estado é dito puro, então uma única função de onda é capaz de representar este estado, percebemos então que a Coerência de um estado 1-qubit não tem relação nenhuma com a mistura de preparação do estado, mas com uma propriedade intrínseca da

MQ. Por outro lado, estados que não possuem Coerência com relação a certa base, ditos incoerentes, possuem todos os elementos fora da diagonal principal identicamente nulos, enquanto seus elementos não nulos correspondem às populações dos estados deste sistema, i.e, um estado incoerente ι em certa base de referência admite a seguinte representação na base ortonormal c_{j_n}

$$\begin{aligned} \iota &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n} (|c_{j_1}\rangle \otimes |c_{j_2}\rangle \otimes \dots \otimes |c_{j_n}\rangle) (\langle c_{j_1}| \otimes \langle c_{j_2}| \otimes \dots \otimes \langle c_{j_n}|) = \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n} |c_{j_1}\rangle \langle c_{j_1}| \otimes |c_{j_2}\rangle \langle c_{j_2}| \otimes \dots \otimes |c_{j_n}\rangle \langle c_{j_n}|, \end{aligned} \quad (2.27)$$

com a distribuição de probabilidades $p_{j_1 j_2 \dots j_n}$ sendo ($p_{j_1 j_2 \dots j_n} \geq 0$) e $\sum_{j_1 j_2 \dots j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n} = 1$.

2.2 CIÊNCIA DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Em CIQ estamos interessados em armazenar, transmitir e processar a informação de maneira mais eficiente e segura, em contraste com a física clássica. A CIQ possui ênfase no conceito de correlações quânticas entre as partes constituintes de um sistema composto. Acredita-se que correlações quânticas, devido a sistemas interagentes, são recursos fundamentais para várias aplicações em CIQ, dentre as correlações estudadas destacam-se a Decoerência Quântica ou perda de Coerência e o Emaranhamento. Um dos mais célebres sucessos em CIQ atualmente, talvez seja o surgimento da Teoria da Computação Quântica que apoia-se em correlações quânticas de spins interagentes [Bose, 2007] [Kane, 1998].

A teoria da computação quântica deu-se início com Richard Feynman [Feynman, 1982], que em 1981 propôs em uma palestra, na primeira conferência de Física do MIT, que um fenômeno quântico para executar rotinas computacionais seria muito mais eficaz, em termos de tempo, do que um fenômeno clássico. Em 1985, David Deutsch, de Oxford, descreveu o primeiro computador quântico universal. Em seu trabalho ele infere o análogo da Tese de Church Turing: "Every finitely realizable physical system can be perfectly simulated by a universal model computing machine operating by finite means." [Deutsch, 1985]. Em 1994, Peter Shor [Shor, 1997], no Bell Labs em Nova Jersey, descobriu um excelente algoritmo que permite ao computador quântico factorar grandes inteiros rapidamente, resolvendo o problema da fatoração e do logaritmo discreto. O Algoritmo de Shor poderia, em teoria, quebrar muitos dos sistemas criptográficos em uso atualmente, o que impulsionou a era da criptografia quântica. Um outro algoritmo quântico, para busca de dados, foi proposto por Lov Grover, também do Bell Labs. Atualmente computadores quânticos, de modelos adiabáticos, já estão em operação em empresas como IBM sendo acessíveis remotamente para experimentos didáticos e científicos.

Neste capítulo iremos abordar a linguagem de ferramenta para a descrição de OD em n -dimensões, afim de introduzir, a partir destes resultados, a CQ para os casos específicos propostos desta dissertação.

2.2.1 Estado m-qudit

Um OD de d -níveis com m -qudits é obtido a partir da esfera de Bloch generalizada e de um conjunto de geradores $SU(d)$ no espaço de Hilbert. Com a base $[\Gamma_{j_s}]_{j_s=0}^{d_s^2-1}$ de $SU(d_s)$ referente ao qudit s para um número j de matrizes, podemos formar a base para $SU(d)$ através do produto tensorial $SU(d) = \otimes_{s=1}^n SU(d_s)$ com dimensão $d = \prod_{s=1}^m d_s$. Como via de exemplo citaremos o seguinte produto tensorial entre a matriz identidade e a matriz σ_3 do grupo $SU(2)$

$$\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Uma escolha para os operadores geradores de $SU(d)$, a partir de uma base de referência, são as matrizes Generalizadas de Gell Mann (MGGM) Γ_{j_s} , que determinam a topologia para a descrição da esfera de Bloch em dimensões generalizadas [G. Kimura, 2003] [Bertlmann; Krammer, 2008]. Se a base de referência for a base computacional $\otimes_{s=1}^n |j_s\rangle$ com $j_s = 1, \dots, d_s$, representada por

$$\langle 1| = \left(1 \ 0 \ 0 \right), \quad (2.29)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\langle 2| = \left(0 \ 1 \ 0 \right), \quad (2.31)$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\langle 3| = \left(0 \ 0 \ 1 \right), \quad (2.33)$$

$$|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

.

.

.

Construímos então as MGGM da seguinte maneira

1. $\frac{d(d-1)}{2}$ MGGM simétricas:

$$\Gamma_S^{jk} = |j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|, 1 \leq j < k \leq d. \quad (2.35)$$

2. $\frac{d(d-1)}{2}$ MGGM antissimétricas:

$$\Gamma_a^{jk} = -i|j\rangle\langle k| + i|k\rangle\langle j|, 1 \leq j < k \leq d. \quad (2.36)$$

3. $d(d-1)$ MGGM diagonais:

$$\Gamma_d^l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left(\sum_{j=1}^l |j\rangle\langle j| - l|l+1\rangle\langle l+1| \right), 1 \leq l \leq d-1. \quad (2.37)$$

Com o total de $d^2 - 1$ MGGM satisfazendo a seguinte álgebra de Lie

$$\text{Tr}(\Gamma_{j_s}) = d^{\delta_{(0j_s)}}, \quad (2.38)$$

$$\text{Tr}(\Gamma_{j_s} \Gamma_{k_s}) = d_s^{\delta_{(0j_s)}} 2^{1-\delta_{(0j_s)}} \delta_{j_s k_s}, \quad (2.39)$$

$$\text{Tr}(\Gamma_{j_s} \otimes \Gamma_{k_s}) = \text{Tr} \Gamma_{j_s} \cdot \text{Tr} \Gamma_{k_s}, \quad (2.40)$$

$$(\Gamma_{j_s} \otimes \Gamma_{k_s})(\Gamma_{l_s} \otimes \Gamma_{m_s}) = \Gamma_{k_s} \Gamma_{l_s} \otimes \Gamma_{k_s} \Gamma_{m_s}. \quad (2.41)$$

Em duas e três dimensões as MGGM são representadas pelas Matrizes de Pauli e pelas Matrizes de Gell-Mann (MGM), respectivamente. O primeiro grupo $SU(2)$ representado pelas matrizes de Pauli será

$$\sigma_1 = \Gamma_{(1,2)}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\sigma_2 = \Gamma_{(1,2)}^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\sigma_3 = \Gamma_1^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

por outro lado as MGM pertencentes ao grupo $SU(3)$ serão

$$\lambda_1 = \lambda_S^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\lambda_2 = \lambda_a^{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\lambda_3 = \lambda_d^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\lambda_4 = \lambda_S^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\lambda_5 = \lambda_a^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\lambda_6 = \lambda_S^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\lambda_7 = \lambda_a^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\lambda_8 = \lambda_d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

que de acordo com a álgebra das MGGM terá a seguinte álgebra de Lie para $SU(3)$

$$Tr(\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.53)$$

$$Tr(\lambda_\alpha) = 0, \quad (2.54)$$

$$\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta = \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma + if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma, \quad (2.55)$$

$$\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta - \lambda_\beta \cdot \lambda_\alpha = 2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma, \quad (2.56)$$

$$\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta + \lambda_\beta \cdot \lambda_\alpha = \frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta} + 2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma. \quad (2.57)$$

Neste contexto podemos representar o estado multipartido m-qudit por

$$\rho_{(mqd)} = \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} r_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a}, \quad (2.58)$$

onde $r_{j_1 \dots j_m}$ são as componentes do vetor de Bloch para o qudit s com dimensão $d = \prod_{s=1}^m d_s$ e $\Gamma_{j_s}^{d,S,a}$ representando todas as possíveis combinações das matrizes geradoras de Gell-Mann referente ao grupo $SU(d)$: diagonais, simétricos e antissimétricos, com índices representativos "d", "S", e "a", respectivamente.

Podemos obter as componentes do vetor de Bloch para este operador densidade observando a condição de traço unitário, i.e,

$$r_{00 \dots 0} = \frac{1}{d^m}. \quad (2.59)$$

Demonstração 3 (Unitariedade)

$$\begin{aligned} Tr(\rho_{(mqd)}) &= Tr \left(\sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} r_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a} \right) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} Tr \left(r_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a} \right) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} r_{j_1 \dots j_m} Tr \left(\Gamma_{j_1}^{d,S,a} \right) \dots Tr \left(\Gamma_{j_m}^{d,S,a} \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

neste passo a única matriz que mantém o traço não nulo é a matriz identiade $\Gamma_{j_1=0}$, com a seguinte álgebra $Tr(\Gamma_{j_s}) = d^{\delta(0j_s)}$, portanto obtemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho_{(mqd)}) &= r_{00 \dots 0} (Tr(\Gamma_0) \dots Tr(\Gamma_0)) = \\ &= r_{00 \dots 0} \cdot d^m = 1 \Rightarrow r_{00 \dots 0} = \frac{1}{d^m}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

q.e.d.

E a partir da operação cíclica da função traço para a álgebra dos geradores de Gell-Mann obtemos as devidas componentes de Bloch

$$r_{j_1 j_2 \dots j_m} = \frac{1}{2^{m-\sum_{s=1}^m \delta_{(0j_s)}} \prod_{s=1}^m d_s^{\delta_{(0j_s)}}} \text{Tr} \{ \rho_{(mqd)} \Gamma_{k_1} \otimes \Gamma_{k_2} \otimes \dots \otimes \Gamma_{k_n} \}, \quad (2.62)$$

se os geradores Γ_{j_s} são hermitianos então podemos reescrever a última equação através de uma interpretação física: o valor esperado (Equação 2.15). Uma vez que para estes operadores temos

$$\langle X \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho X). \quad (2.63)$$

2.2.2 Estado m-qudit Incoerente

Uma matriz densidade é incoerente com relação a certa base se todos os elementos (coerentes) fora da diagonal principal forem nulos. Um estado multipartido é incoerente (Eq. 2.27) com relação a base ortonormal $|c_{j_1}\rangle \otimes |c_{j_2}\rangle \otimes \dots \otimes |c_{j_n}\rangle$, a partir do conjunto de geradores diagonais Γ^d , de tal forma que o estado incoerente m-qudit será

$$\rho_{(mqd)} = \sum_{j_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m-1} \iota_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^d \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^d. \quad (2.64)$$

2.2.3 Casos Particulares

2.2.3.1 Estado 1-qubit

Para o estado 1-qubit, obtemos $m = 1$, e sendo este um sistema de 2 níveis, portanto $d_1 = 2$ com um total de $d_1^2 - 1 = 3$ matrizes geradoras e $j_1 = 0 \dots 3$, obtemos desta forma

$$\rho_{(1qb)} = (r_0 \sigma_0 + r_1 \sigma_1 + r_2 \sigma_2 + r_3 \sigma_3), \quad (2.65)$$

e assumindo o critério da unitariedade do traço, a normalização impõe um fator $(\frac{1}{2})$, de modo que

$$\rho_{(1qb)} = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.66)$$

onde

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i, \quad (2.67)$$

define o vetor da esfera de Bloch com versores \hat{e}_i e matriz identidade $\sigma_0 = I_{2 \times 2}$. É possível demonstrar que este estado obedece as condições para um operador densidade (Eq. 2.7) e (Eq. 2.9).

1. Traço unitário:

$$\text{Tr}(\rho_{(1qb)}) = \frac{1}{2}(\text{Tr}[I_2] + \text{Tr}[\vec{r} \cdot \vec{\sigma}]) = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1. \quad (2.68)$$

2. Positividade:

$$\rho_{(1qb)} \geq 0, \quad (2.69)$$

usando a decomposição espectral para escrever este operador temos

$$\rho_{(1qb)} = \sum_i u_i |i\rangle\langle i|, \quad (2.70)$$

com

$$u_i = \frac{1 \pm |\vec{r}|}{2}, \quad (2.71)$$

de modo que para satisfazer a condição de positividade é preciso impor

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \leq 1. \end{aligned} \quad (2.72)$$

2.2.3.2 Estado 1-qubit Incoerente

Para escrevermos o estado 1-qubit incoerente utilizamos os geradores diagonais σ^d do grupo de Pauli. Como apenas a matriz σ_3 é o gerador do grupo diagonal, então

$$\iota_{(1qb)} = \frac{1}{2}(I + (\vec{l} \cdot \vec{\sigma}_3)). \quad (2.73)$$

Matricialmente representamos este estado por

$$\iota_{1qb} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (r3 + 1) & 0 \\ 0 & (1 - r3) \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

onde os elementos não nulos da diagonal principal correspondem as populações deste sistema.

2.2.3.3 Estado 2-qubit

Introduzimos nesta seção o sistema 2-qubit. Para este caso $m = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ e, portanto $d_1^2 - 1 = 3$ com $d_2^2 - 1 = 3$ matrizes geradoras, tal que $j_1 = j_2 = 0...3$ e obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{(2qb)} &= \sum_{j_m=0}^3 (\rho_0 \rho_{j_m} \Gamma_0 \otimes \Gamma_{j_m} + \rho_1 \rho_{j_m} \Gamma_1 \otimes \Gamma_{j_m} + \\ &+ \rho_2 \rho_{j_m} \Gamma_2 \otimes \Gamma_{j_m} + \rho_3 \rho_{j_m} \Gamma_3 \otimes \Gamma_{j_m} = \\ &= \rho_0 \rho_0 \Gamma_0 \otimes \Gamma_0 + \rho_0 \rho_1 \Gamma_0 \otimes \Gamma_1 + \rho_0 \rho_2 \Gamma_0 \otimes \Gamma_2 + \rho_0 \rho_3 \Gamma_0 \otimes \Gamma_3 + \\ &+ \rho_1 \rho_0 \Gamma_1 \otimes \Gamma_0 + \rho_1 \rho_1 \Gamma_1 \otimes \Gamma_1 + \rho_1 \rho_2 \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 + \rho_1 \rho_3 \Gamma_1 \otimes \Gamma_3 + \\ &+ \rho_2 \rho_0 \Gamma_2 \otimes \Gamma_0 + \rho_2 \rho_1 \Gamma_2 \otimes \Gamma_1 + \rho_2 \rho_2 \Gamma_2 \otimes \Gamma_2 + \rho_2 \rho_3 \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 + \\ &+ \rho_3 \rho_0 \Gamma_3 \otimes \Gamma_0 + \rho_3 \rho_1 \Gamma_3 \otimes \Gamma_1 + \rho_3 \rho_2 \Gamma_3 \otimes \Gamma_2 + \rho_3 \rho_3 \Gamma_3 \otimes \Gamma_3, \end{aligned} \quad (2.75)$$

escrevendo o último termo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^3 t_{nm}(\sigma_n \otimes \sigma_m) &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 t_{nm}(\sigma_n \otimes \sigma_m) = \sum_{m=1}^3 t_{1m}(\sigma_1 \otimes \sigma_m) + \\ &+ t_{2m}(\sigma_2 \otimes \sigma_m) + t_{3m}(\sigma_3 \otimes \sigma_m) = \\ &= t_{11}(\sigma_1 \otimes \sigma_1) + t_{12}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) + t_{13}(\sigma_1 \otimes \sigma_3) + \\ &+ t_{21}(\sigma_2 \otimes \sigma_1) + t_{22}(\sigma_2 \otimes \sigma_2) + t_{23}(\sigma_2 \otimes \sigma_3) + \\ &+ t_{31}(\sigma_3 \otimes \sigma_1) + t_{32}(\sigma_3 \otimes \sigma_2) + t_{33}(\sigma_3 \otimes \sigma_3), \end{aligned} \quad (2.76)$$

e, portanto

$$\rho_{(2qb)} = 2^{-2}(\mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j + \sum_{j,k=1}^3 c_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k), \quad (2.77)$$

com os respectivos estados reduzidos

$$\begin{aligned} \rho_{A(2qb)} &= \text{Tr}_B(\rho_{(2qb)}), \\ \rho_{B(2qb)} &= \text{Tr}_A(\rho_{(2qb)}), \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde Tr_A e Tr_B são as funções traço parciais. Temos também a seguinte função correlação:

$$\begin{aligned} t_{nm} &= \langle \sigma_j \otimes \sigma_k \rangle_p = \\ &= \text{Tr}(\rho_{(2qb)} \sigma_n \otimes \sigma_m), \end{aligned} \quad (2.79)$$

não obstante, os componentes da esfera de Bloch podem ser obtidos a partir da equação (2.61)

$$\begin{aligned} r_j &= \langle \sigma_j \rangle_p = \\ &= \text{tr}(\sigma_j [\rho_{A(2qb)}]), \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$r_k = \text{tr}(\sigma_j [\rho_{B(2qb)}]). \quad (2.81)$$

2.2.3.4 Estado 2-qubit Incoerente

Para escrevermos o estado 2-qubit incoerente utilizamos os geradores diagonais σ^d do grupo de Pauli. O grupo de geradores é o mesmo do estado 1-qubit, de tal forma que apenas a matriz σ_3 é o gerador do grupo diagonal, então

$$\rho_{\rho \otimes 2} = 2^{-2}(\mathbb{I} + a_3 \sigma_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes b_3 \sigma_3 + c_{33} \sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (2.82)$$

2.2.3.5 Estado Cópia de 1-qubit $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$

Definimos o estado cópia pelo produto de dois qubits idênticos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho &= 2^{-1}(\mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j) \otimes 2^{-1}(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^3 r_k \sigma_k) \\ &= 2^{-2}(\mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sum_{k=1}^3 r_k \sigma_k + \sum_{j,k=1}^3 r_j r_k \sigma_j \otimes \sigma_k). \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.2.3.6 Estado Cópia de 1-qubit Incoerente $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$

Como $\rho \otimes \rho$ é simétrico sobre a troca, o estado incoerente " ι " também deve ser, de modo que $b_3 = a_3$ na equação (2.82) e então

$$\iota_{\rho \otimes \rho} = \iota \otimes \iota = 2^{-2}(\mathbb{I} + a_3(\sigma_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_3) + c_{33}\sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (2.84)$$

A minimização deve ser realizada sobre os dois parâmetros a_3 e c_{33} envolvidos neste estado.

2.2.3.7 Estado 1-qutrit

O estado 1-qutrit é determinado com $m = 1$ e $d = 3$, logo $d_1^2 - 1 = 8$, então teremos $j_1 = 0 \dots 8$ matrizes geradoras. O estado é representado na seguinte forma

$$\begin{aligned} \rho_{(1qt)} &= \frac{1}{3}(r_0\lambda_0 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 + r_5\lambda_5 + \dots + \rho_8\lambda_8) = \\ &= \frac{1}{3}(I_3 + b_i\lambda_i) = \frac{1}{3}\left(I_3 + \sum \text{Tr}(\rho\lambda_i)\lambda_i\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(I_3 + \vec{b} \cdot \vec{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (2.85)$$

com o vetor de Bloch $\vec{b} = b_i e_i = \sum b_i e_i$, e componentes $b_i = \text{Tr}(\lambda_i \rho_{(1qt)}) = \langle \lambda_i \rangle$, dos devidos grupos simétricos, antissimétricos e diagonais:

$$b_S^{jk} = \text{Tr}(\lambda_S^{jk} \rho_{(1qt)}) = \langle \lambda_{(j,k)}^s \rangle, \quad (2.86)$$

$$b_\alpha^{jk} = \text{Tr}(\lambda_\alpha^{jk} \rho_{(1qt)}) = \langle \lambda_{(j,k)}^\alpha \rangle, \quad (2.87)$$

$$b^d = \text{Tr}(\lambda^d \rho_{(1qt)}) = \langle \lambda_{(j,k)}^d \rangle. \quad (2.88)$$

2.2.3.8 Estado 1-qutrit Incoerente

Para escrevermos o estado 1-qutrit incoerente utilizamos os geradores diagonais λ^d do grupo de Gell-Mann, apenas três das oito matrizes compõe o grupo diagonal, de modo que

$$\iota_{(1qt)} = \frac{1}{3}\left(I_3 + \vec{b} \cdot \vec{\lambda}\right). \quad (2.89)$$

2.3 ESPAÇOS VETORIAIS MÉTRICOS GENERALIZADOS

Embora o espaço de Euclides, baseado na Geometria Euclidiana (GE), fosse assiduamente defendido inclusive por filósofos como Immanuel Kant, a conexão do quinto postulado, ou postulado das retas paralelas de Euclides, para com os postulados restantes ainda estava em aberto. O postulado das retas paralelas na forma equivalente de J. Playfair afirma que: "por um ponto fora de uma reta existe, pelo menos, apenas uma reta paralela à reta dada." Afim de fornecer a prova para o quinto postulado, Nikolai Lobachevsky tendo publicado seus resultados primeiramente em 1826 afirma que, pelo método da contradição, há pelos menos duas retas paralelas, e faz a notável descoberta de uma geometria não-Euclidiana denominada posteriormente, por Christian Klein, como geometria hiperbólica ou plano hiperbólico (evite confusão com hipérbole em superfícies planas). Resultados independentes foram publicados por Johann Bolyai [Bonola, 1955]. Historicamente a descoberta de geometrias não-euclidianas é também atribuída a Carl Friedrich Gauss, que por razões políticas optou por não divulgar seus resultados. Dentre as "falhas" da GE se destacam a inexistência de retas equidistantes (ou retas paralelas), a ausência de triângulos semelhantes e a soma dos ângulos internos de um triângulo com resultados menores que 180° . Afim de responder a questão "qual geometria melhor representa o mundo em que vivemos?", Poincaré introduz o famoso modelo denominado "Disco de Poincaré" fazendo uso da GE com a única substituição do quinto postulado, de tal forma que qualquer incompatibilidade na geometria hiperbólica implicaria no insucesso da GE. Poincaré determina a consistência desta nova geometria não-Euclidiana de Lobachevsky, satisfeita pela consistência da GE (com novos axiomas anexados por David Hilbert), que por sua vez é devida a consistência da Aritmética. Desta forma o quinto postulado de Euclides ganha o status de propriedade particular do Espaço Euclidiano (EE) sendo independente dos postulados anteriores, ou seja, qualquer outro postulado no lugar do quinto é consistente e determina uma nova geometria.

Imersos na perspectiva de que todas as geometrias são igualmente verdadeiras, ficando apenas a critério de sua conveniência, a necessidade de se desenvolver um sistema que generalizasse suas estruturas topológicas foi desenvolvido. Neste contexto um EVMG consiste de um espaço vetorial topologizável, i.e, admite um tensor métrico (ou métrica) infinitesimal [Sternberg, 1983] para geometrias diferenciais. Este tensor é capaz de determinar a topologia do espaço, conceitos como: convergência, conexidade e continuidade. O tensor métrico infinitesimal pode ser pensando como uma função que aritmetiza a geometria do espaço introduzindo coordenadas generalizadas [Borisenko; Tarapov, 1968].

Definição Informal 1 (Métrica) *Seja o espaço vetorial dos vetores tangentes $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$ sobre um corpo dos números reais \mathcal{R} e a variedade diferencial topológica \mathcal{M} , é denominado métrica o mapa $g(\cdot, \cdot) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$.*

Muito embora a noção de métrica fosse reconhecida intuitivamente no EE, sua definição informal teria sido concebida com a obra intitulada "Investigações Gerais de Superfícies Curvas", publicada em 1827 por Gauss [Gauss, 1965] [Eves, 2002] com abordagem em curvas paramétricas. Tal investigação teria sido motivada a partir de um levantamento topográfico na cidade de Hanover (capital alemã do estado da Baixa Saxônia, antes parte do Reino Germânico atual Alemanha), a pedido de seu governador. No decorrer deste trabalho Gauss levantou o questionamento: "Seria possível determinar a forma do planeta Terra a partir de medições realizadas?". Com os resultados de Lobachevsky e Johann Bolyai, Gauss levou a cabo a ideia de curvatura e a generalização do cálculo diferencial e integral para espaços distintos do EE de n -dimensões (\mathcal{R}^n). Gauss tinha como objetivo encontrar funções características de uma variedade espacial que permaneceriam intactas se a superfície fosse modificada, por exemplo, curvando-a por algum ângulo positivo ou negativo sem ser esticada, tais transformações são conhecidas como deformações isométricas. Seguindo o raciocínio, um importante teorema devido a Gauss denominado "Egregium" é concebido, introduzindo o conceito de geometria intrínseca. Informalmente o teorema suporta que tais características invariantes seriam, por exemplo, o comprimento da curva, a área e o volume, i.e, a geometria de uma superfície poderia ser estudada operando exclusivamente em sua própria superfície.

Influenciado pelo trabalho de Gauss, seu aluno de doutorado Bernhard Riemann em sua obra "As Hipóteses Sobre As Quas Se Baseiam os Fundamentos da Geometria" propõe a definição formal de métrica Riemanniana [Amorim et al., 2015], atribuindo aos conceitos de comprimento de curva, área e curvatura, objetos intrínsecos dependentes inteiramente da métrica. Neste contexto, a generalização da teoria de superfícies estudadas por Gauss atribui-se a Elwin Christoffel, que ao introduzir os denominados "Símbolos de Christoffel" e "Tensor de Curvatura de Riemann" consolidou a estrutura para métodos invariantes em geometria Riemanniana. Apesar dos conceitos de métrica existentes, as propriedades atuais da métrica que a classificam como um tensor foram reconhecidas apenas por Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita [Ricci et al., 1900] que primeiramente definiram a noção formal de tensor.

A métrica em um espaço topológico pressupõe funções de qualquer medida: comprimento, ângulo, área, volume etc. No contexto do comprimento a métrica induz uma função denominada "norma", que além de generalizar a noção de produto escalar interno no EE induz uma segunda função denominada "distância". Esta última deve satisfazer para qualquer espaço vetorial \mathcal{V} , inclusive para o de Hilbert \mathcal{H} na MQ, um conjunto de propriedades.

Definição 1 (Função norma) *Seja o espaço vetorial \mathcal{V} sobre um corpo dos números reais positivos \mathcal{R}^+ , para todos os vetores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathcal{K}$, a função binária $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}^+$, denominada norma, deve satisfazer as seguintes propriedades:*

1. *Positividade semi-definida:* $\|\vec{x}\| \geq 0$ com $\|\vec{x}\| = 0$ sse $\vec{x} = 0$.
2. *Desigualdade triangular (ou subaditividade):* $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
3. *Homogeneidade absoluta:* $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$, onde $|\cdot|$ é a função módulo.

Definição 2 (Função distância) *Seja o espaço vetorial \mathcal{V} sobre um corpo dos números reais positivos \mathcal{R}^+ , para todos os vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$, a função $d(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}^+$, denominada distância, deve satisfazer as seguintes propriedades:*

1. *Positividade semi-definida:* $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$.
2. *Coincidência:* $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, sse, $\vec{x} = \vec{y}$.
3. *Desigualdade triangular:* $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.
4. *Simetria:* $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.

Quando a métrica falha em satisfazer qualquer uma das condições citadas acima, sugerem-se as seguintes classificações: pseudométrica [Khelemskii, 2006], quasimétrica [Smyth et al., 2006] e semimétrica [Fraignaud et al., 2008]. A pseudométrica viola a condição 2 da coincidência, estabelecendo casos em que a métrica de vetores distintos se anula. A quasimétrica viola a condição 4 da simetria e a semimétrica viola a desigualdade triangular.

Admitindo a existência de variedades diferenciáveis, i.e, a existência de diferentes geometrias, temos a geometria elíptica ou geometria Riemanniana de curvatura positiva, proposta por D. Riemann. Um caso particular de tal geometria é a geometria esférica, que traduz consequências importantes para a soma dos ângulos internos de um triângulo curvo, com resultado maior que 180° , e a redefinição do teorema de Pitágoras. As contribuições de Gauss, Riemann, Ricci e Civita foram esforços precedentes que permitiram a construção matemática para a "Teoria da Relatividade Especial" por A. Einstein, e para a "Teoria da Relatividade Geral" por A. Einstein e M. Grossman. O Tensor de Curvatura de Riemann, por exemplo, permite-nos determinar a curvatura do espaço e, portanto sua geometria. Para o espaço Euclidiano, obtemos um tensor de curvatura nulo, i.e, a superfície é compreendida apenas por planos como, por exemplo, os sólidos platônicos. Para os casos elípticos e hiperbólicos obtemos um tensor de curvatura positivo e negativo, respectivamente, como mencionado anteriormente. Ainda no EE, a menor distância entre dois pontos é uma reta, em contraste ao espaço de Riemann com geometria riemannianna, em que a menor distância é uma curva geodésica. Por outro lado, os Símbolos de Christoffel nos permitem inferir no sistema de coordenadas utilizado, se considerarmos o EE em coordenadas cartesianas, obtemos a métrica com termos constantes e Símbolos de Christoffel nulos, em contrapartida para coordenadas polares e cilíndricas obtemos componentes variáveis e Símbolos de Christoffel não nulos. Na relatividade geral [Parrott, 1987] usa-se variedades Espaciais de Riemman e a Métrica de Schwarzschild no espaço de Minkovski,

enquanto na relatividade especial adota-se a Métrica de Minkowski ou Métrica de Lorentz, devido as transformações de Lorentz. Particularmente, no EE em coordenadas cartesianas, a métrica é representada pelo tensor delta de Kronecker ou na sua forma matricial, pela matriz identidade.

2.3.1 Medidas de Dissimilaridade

No contexto de MD, o análogo clássico com a MQ, desenvolvida no espaço de Hilbert, reencontra-se na quantificação de quão bem dois sistemas quânticos, representados por vetores de estado (abordagem vetorial) ou por operadores densidade (abordagem probabilística), foram preparados [Streltsov et al., 2016], manipulados ou protegidos [Fuchs; Graaf, 1999] a partir de uma medida de dissimilaridade entre o estado real e o ideal. Quando na abordagem probabilística assume-se Funções Densidade de Probabilidade ou funções de medidas entre histogramas [Cha; Sung, 2007], que representam a frequência dos valores quantificados a partir de várias amostras. Muitas aplicações em nosso cotidiano utilizam a noção de dissimilaridade, cuja escolha facultativa depende apenas do objeto de estudo como, por exemplo, reconhecimento biométrico de íris [Choi, 2004], reconhecimento de imagem a partir de redes neurais [McPherson et al., 2016], identificação de impressões digitais [Danielle et al., 2012], identificação caligráfica individual [Cha, 2001] e taxonomia [Michael, 1976].

Nas últimas décadas esforços ocorreram para que se propusesse uma medida de distância, no contexto da CIQ, que fosse capaz de satisfazer as condições de uma métrica, dentre elas a que mais se destaca é a Distância Norma- l_p , também conhecida como Distância Minkowski- l_p dentro da família de distâncias de Minkowski, uma das mais bem sucedidas distâncias por satisfazer todas as propriedades requeridas para esta função. Sua expressão matemática é a seguinte:

$$d_{l_p}(\rho, \zeta) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |P_i - Q_i|^p}. \quad (2.90)$$

Quando $p = 1$ obtemos a denominada Distância City Block- l_1 (outros três pseudônimos para esta distância são: Manhattan, taxicab e rectilinear), para $p = 2$ obtemos o resultado clássico da distância de Euclides l_2 no EE. Quando $p \rightarrow \infty$ obtemos a Distância Chebyshev l_∞ . Para uma coleção de medidas de distância consulte [Cha; Sung, 2007].

2.3.1.1 Distância Norma- p

Dentre outras medidas de dissimilaridade, se destaca a Schatten norma- p classificada como Distância Norma-Traço (DNT) e Distância de Hilbert-Schmidt (DHS) para $p = 1, 2$ respectivamente. A Distância Norma- p entre dois operadores densidade é a seguinte:

$$\begin{aligned} d_p(\rho, \zeta) &= \|\rho - \zeta\|_p = \\ d_p(\rho, \zeta) &= \left(\text{Tr} \left(\sqrt{(\rho - \zeta)^\dagger (\rho - \zeta)} \right)^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Se estes operadores são hermitianos então podemos reescrever na seguinte forma:

$$d_p(\rho, \zeta) = \left(\text{Tr} \left(\sqrt{(\rho - \zeta)^2} \right)^p \right)^{1/p}. \quad (2.92)$$

No limite em que $p = 1$ e $p = 2$ obtemos a DNT e Distância de Hilbert-Schmidt (DHS), respectivamente. A DHS para vetores de estado é equivalente a Distância Norma- l_p para $p = 2$, i.e, Distância Norma- l_2 e recebe o nome de distância de Euclides. Temos ainda que a DNT entre dois operadores de estado 1-qubit é idêntica a distância de Euclides de seus respectivos vetores de Bloch. No Apêndice A faremos a demonstração de certas propriedades para esta distância em casos de interesse. É interessante mencionar que para $1 \leq p$ a norma- p é convexa e monotônica para estados qubits [Rana et al., 2016] com a configuração de Operações Incoerentes (OI), caracterizadas por mapas positivos de traço preservado [Baumgratz et al., 2014].

2.3.1.2 Distância Norma-Traço ($p = 1$)

A DNT induzida pela norma-traço, ou norma nuclear, é uma das mais utilizadas distâncias em CIQ que satisfaz todas as condições para uma métrica, embora com certas restrições. Tomando $p = 1$ na distância norma- p obtemos a DNT representada matematicamente por

$$\begin{aligned} d(\rho, \zeta) &= \|\rho - \zeta\|_1 = \\ &= \sqrt[1]{\sum_{i=1}^d |P_i - Q_i|} = \\ &= \text{Tr} \sqrt{(\rho - \zeta)^2}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

A DNT possui a interpretação operacional em que leva a menor probabilidade de erro ao se distinguir dois estados.

Lema 1 (Diferença de Probabilidade) A DNT $\|\rho - \sigma\|_1$ entre dois estados quânticos ρ e σ é igual a duas vezes a diferença de probabilidade que dois estados ρ e σ poderiam dar ao mesmo resultado de medida para um operador positivo Λ .

$$\|\rho - \sigma\|_1 = 2 \max_{0 \leq \Lambda \leq I} \text{Tr}\{\Lambda(\rho - \sigma)\}, \quad (2.94)$$

A maximização acima é com respeito a todos os operadores positivos Λ com autovalores limitados por 0 até 1.

Compreendemos o conjunto de operadores positivos Λ_j como a configuração de Medida Valorada por Operadores Positivos (MVOP), i.e, um operador que descreve certo protocolo de processamento de informação quântica, cuja característica está em preocupar-se apenas com a probabilidade de obter certo resultado de medida de um sistema ao invés do estado deste sistema após a medida.

Outra propriedade importante da TD é o não-Acréscimo sobre operações quânticas de traço preservado denominadas OI Γ também conhecidas como Contratividade:

$$D(\Gamma(\rho), \Gamma(\sigma)) \leq D(\rho, \sigma), \quad (2.95)$$

isto é, nenhum processo não-determinístico pode aumentar a dissimilaridade entre dois estados quânticos [Ruskai, 1992] [Alexey, 2007]. Tal função é útil para a definição posterior de funções quantificadoras de CQ. No Apêndice A faremos a demonstração de certas propriedades desta distância em casos de interesse.

2.3.1.3 Distância de Hilbert-Schmidt ($p = 2$)

Para $p = 2$ na Distância Norma- p obtemos a Distância de Hilbert-Schmidt (DHS), ou distância de Frobenius, representada matematicamente por

$$\begin{aligned} d_{hs}(\rho, \zeta) &= \|\rho - \zeta\|_2 = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^d |P_i - Q_i|^2} = \\ &= \sqrt{\text{Tr}((\rho - \zeta)^\dagger (\rho - \zeta))} = \\ &= \sqrt{\text{Tr}((\rho - \zeta)^2)}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Em contraste com a DNT, a DHS não possui nenhum apelo operacional, não satisfaz a desigualdade triangular para dimensões maiores que dois, tampouco a condição de contratividade e monotonicidade sobre OI [Baumgratz et al., 2014] exceto para estados qubits [Rana et al., 2016]. Não obstante ela fornece uma relação entre outras medidas de

dissimilaridade oferecendo uma abordagem dinâmica para a prova de algumas propriedades, tal como a desigualdade triangular ou relações como a Não Monotonicidade sobre Produto Tensorial (NMsPT). No Apêndice A faremos a demonstração de certas propriedades para esta distância em casos particulares de interesse.

2.3.1.4 Distância Entropia Relativa

Vedral [Vedral et al., 1997] e Lindblad [Lindblad et al., 1975] mostraram que a Distância Entropia Relativa (DER) satisfaz a condição da positividade e contratividade. Ruskai [Ruskai, 2002] fornece uma prova para a convexidade e monotonicidade sobre mapas estocásticos, Lieb e Ruskai [Lieb; Ruskai, 1973] fornecem a prova para a subaditividade consistente (desigualdade triangular consistente) satisfeita apenas quando considera-se o estado p_{12} como o produto tensorial definido no espaço de Hilbert. Embora esta distância não satisfaça a condição simétrica, e tampouco a desigualdade triangular ela apresenta uma medida adequada para a função Coerência. Definimos sua expressão matemática, através da entropia de Von Neumann,

$$S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (2.97)$$

de forma que a DER será:

$$\begin{aligned} S(\rho||\zeta) &:= \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \zeta)) = \\ S(\rho||\zeta) &= -\text{Tr}(\rho \log \zeta) - (-\text{Tr}(\rho \log \rho)) = \\ &= -\text{Tr}(\rho \log \zeta) - S(\rho). \end{aligned} \quad (2.98)$$

No Apêndice A o leitor encontrará demonstrações acerca de certas propriedades sobre esta distância em casos de interesse.

2.3.1.5 Distância Norma- l_1

A Distância Norma- l_1 é um caso particular da Distância Norma- l_p [Baumgratz et al., 2014], apresentando-a como uma particular função que satisfaz todas as condições para a função distância, tais como a desigualdade triangular e monotonicidade que são condições necessárias para a contratividade da função Coerência. Defini-se a Distância Norma- l_1 como a soma dos valores absolutos dos elementos fora da diagonal principal do

OD ρ :

$$D_{l1}(\rho, \iota) = \sum_{i,j} |\rho_{i,j} - \iota_{i,j}|. \quad (2.99)$$

3 DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT ENTRE ESTADOS M-QUIDIT

Daremos neste capítulo um resultado genérico para a função medida de Distância de Hilbert Schmidt (DHS) para o estado m-quidit explorado no capítulo anterior. Adotamos esta medida em particular devido a sua simplicidade matemática que nos permitirá posteriormente obter de forma analítica uma expressão para a Coerência de sistemas multipartidos gerais, a qual permanece desconhecida para medidas de distância como a Distância Norma-Traço largamente mencionada em diversos livro-textos como uma medida de dissimilaridade mais apropriada que a DHS. Para o devido cálculo da DHS partimos da definição (2.62) para escrever

$$d_{h,s}(\rho_{(mqd)}, \chi_{(mqd)}) = \sqrt{\text{Tr}((\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2)}. \quad (3.1)$$

O primeiro passo é computar a diferença entre os operadores da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)} &= \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} r_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a} + \\ &- \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} \chi_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) \left(\Gamma_{j_1}^{d,S,a} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^{d,S,a} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em seguida tomamos o traço através de

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2) &= \text{Tr} \left\{ \sum_{j_1=0}^{d_1^2-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m^2-1} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) (\Gamma_{j_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}) \right\}^2 = \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{j_1 \dots j_m=0}^{d_1^2-1 \dots} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) \Gamma_{j_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m} \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\sum_{k_1 \dots k_m=0}^{d_1^2-1 \dots} (r_{k_1 \dots k_m} - \chi_{k_1 \dots k_m}) \Gamma_{k_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{k_m} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

neste próximo passo o traço atua apenas nas matrizes, de forma que

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2) &= \sum_{j_1, k_1 \dots j_m, k_m=0}^{d_1^2-1 \dots} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) (r_{k_1 \dots k_m} - \chi_{k_1 \dots k_m}) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Tr} \{ (\Gamma_{j_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}) (\Gamma_{k_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{k_m}) \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

e usando a propriedade do produto tensorial $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left((\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2 \right) &= \sum_{j_1, k_1 \dots j_m, k_m=0}^{d_1^2-1 \dots} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) (r_{k_1 \dots k_m} - \chi_{k_1 \dots k_m}) \cdot \\ &\cdot \text{Tr} \{ (\Gamma_{j_1} \Gamma_{k_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m} \Gamma_{k_m}) \}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

e com a propriedade do traço $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ temos

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1, k_1 \dots j_m, k_m=0}^{d_1^2-1 \dots} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) (r_{k_1 \dots k_m} - \chi_{k_1 \dots k_m}) \cdot \\ &\cdot \text{Tr} (\Gamma_{j_1} \Gamma_{k_1}) \dots \text{Tr} (\Gamma_{j_m} \Gamma_{k_m}) = \\ &= \sum_{j_1 \dots j_m=0}^{d_1^2-1} \sum_{k_1 \dots k_m=0}^{d_1^2-1} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m}) (r_{k_1 \dots k_m} - \chi_{k_1 \dots k_m}) \cdot \\ &\cdot \left(d_1^{\delta_{(0j_1)}} 2^{1-\delta_{(0j_1)}} \delta_{j_1 k_1} \dots d_m^{\delta_{(0j_m)}} 2^{1-\delta_{(0j_m)}} \delta_{j_m k_m} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

este último termo é obtido através da álgebra das Matrizes Generalizadas de Gell-Mann (MGGM). Aplicando os $\delta_{j_m k_m}$ na equação acima e iterando os termos restantes obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2 \right] &= \sum_{j_1 \dots j_m=0}^{d_1^2-1} (r_{j_1 \dots j_m} - \chi_{j_1 \dots j_m})^2 \cdot \left(2^{m-\sum_{s=1}^m \delta_{(0j_s)}} \prod_{s=1}^m d_s^{\delta_{(0j_s)}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{d_1^2-1} \left(\sqrt{\beta} (r_{j_1 \dots j_m}) - \sqrt{\beta} (\chi_{j_1 \dots j_m}) \right)^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com $\beta = \left(2^{m-\sum_{s=1}^m \delta_{(0j_s)}} \prod_{s=1}^m d_s^{\delta_{(0j_s)}} \right)$, onde as componentes de Bloch modificadas pela constante β serão

$$R_{j_1 j_2 \dots j_m} = \frac{1}{2^{m-\sum_{s=1}^m \delta_{(0j_s)}} \prod_{s=1}^m d_s^{\delta_{(0j_s)}}} \langle \Gamma_{j_1} \Gamma_{k_1} \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m} \Gamma_{k_m} \rangle_{\rho}, \quad (3.8)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2 \right] &= \|R - Z\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{hs}(\rho_{(mqd)}, \chi_{(mqd)}) = \sqrt{\text{Tr} \left[(\rho_{(mqd)} - \chi_{(mqd)})^2 \right]} = \\ &= \|R - Z\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Este resultado nos será útil para a verificação da função Coerência, onde encontraremos o estado incoerente mais próximo que minimiza esta função.

4 COERÊNCIA DE HILBERT-SCHMIDT ENTRE ESTADOS M-QUIDIT

O fenômeno de superposição quântica tem sido alvo importante de muitos estudos e aplicações como, por exemplo a eficiência em realização de energia e tarefas de manipulação de informação. Mas foi apenas com o surgimento de uma teoria de recursos denominada Teoria de Recursos para Coerência Quântica (TRC) [Streltsov et al., 2016] que a correta compreensão da função Coerência Quântica (CQ) e sua relação com fenômenos de Correlações Quânticas tornou-se possível permitindo que a CQ fosse relacionada a correlações como Emaranhamento implementadas em Criptografia e Biologia Quântica. Amparados pela TRC introduzimos as condições que devem ser satisfeitas como recurso de uma função quantificadora de Coerência. Seja ϱ um operador incoerente, Λ uma operação incoerente, $\sigma_i = K_i \varrho K_i^\dagger$, onde K é o operador de Krauss, e probabilidades $q_i = \text{Tr}(K_i \varrho K_i^\dagger)$, toda a função Coerência C deve satisfazer as seguintes inequações:

1. Não negatividade:

$$C(\varrho) \geq 0. \quad (4.1)$$

2. Monotonicidade: C não aumenta sobre Operações Incoerentes (OI) Λ , i.e,

$$C(\Lambda \varrho) \leq C(\varrho). \quad (4.2)$$

3. Monotonicidade consistente: C não aumenta, em média sobre OI seletivas, i.e,

$$\sum q_i C(\sigma_i) \leq C\left(\sum_i q_i \sigma_j\right). \quad (4.3)$$

4. Convexidade:

$$\sum p_i C(\varrho_i) \geq C\left(\sum_i p_i \varrho_i\right). \quad (4.4)$$

Uma das funções quantificadoras de coerência propostas pela TRC é a seguinte

$$C_{hs}(\rho) = \min_{\iota} \sqrt{\text{Tr}(\rho - \iota)^2}, \quad (4.5)$$

sendo a mínima distância entre o estado coerente ρ e o estado incoerente ι mais próximo de ρ . Neste contexto a CQ estará determinada tão somente pela medida de dissimilaridade utilizada. Estudos recentes foram desenvolvidos [Rana et al., 2016] em que a Coerência Norma- $l/2$ (C $l/2$) e a Coerência de Hilbert-Schmidt (CHS) aparentam violar as

duas condições de monotonicidade para dimensões maiores que dois, também foi demonstrado [Baumgratz et al., 2014] que a função CHS viola a condição consistente da monotonicidade para OI, embora seja convexa-monotona para estados 1-qubit. Não obstante, as funções Coerência das respectivas distâncias são de grande utilidade para a construção de relações com outras funções quantificadores de Coerência que satisfazem a maioria, senão todas as propriedades de uma CQ.

Com a TRC apresentada e a sua definição para a função CQ podemos introduzir o conceito geométrico para a CQ de estados multipartidos a partir da Distância de Hilbert-Schmidt (DHS) calculada no capítulo anterior. Percebemos anteriormente que a DHS é dada pela Distância Euclidiana com as componentes de Bloch modificadas, de modo que com o auxílio da equação 2.64 o estado m -qudit incoerente que minimiza a equação 4.5 é obtido se considerarmos $l_{j_1 j_2 \dots j_m} = r_{j_1 j_2 \dots j_m}$ para todo $l_s = 0, \dots, d_s - 1$ e $s = 1, 2, \dots, m$, de modo que o estado incoerente será

$$l_{\rho_{(mqd)}} = \sum_{j_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{j_m=0}^{d_m-1} r_{j_1 \dots j_m} \Gamma_{j_1}^d \otimes \dots \otimes \Gamma_{j_m}^d. \quad (4.6)$$

O resultado geral da CQ para m dimensões será então representado pelo vetor de Coerência

$$C_{hs}(\rho_{(mqd)}) = \left\| \vec{C} \right\|, \quad (4.7)$$

cujas componentes de Bloch modificadas pertencem a alguns dos geradores dos grupos simétricos e antissimétricos.

4.1 CASOS PARTICULARES

Nesta seção iremos apresentar alguns casos particulares para a CHS e a sua distribuição em termos de suas partes locais e não locais. Como exemplo único iremos calcular analiticamente a CHS para o estado 1-qubit, enquanto derivaremos os resultados restantes a partir do vetor geométrico da CHS obtida na seção anterior.

4.1.1 CHS para 1-qubit

Devido a simetria e dimensão deste sistema é possível obtermos a forma explícita para a função coerência de 1-qubit da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
C_{HS}(\rho_{(qb)}) &= \min_{\iota} d_{HS}(\rho, \iota_{\rho}) = \min_{\iota} \sqrt{\text{Tr}\{(\rho - \iota_{\rho})^{\dagger}(\rho - \iota_{\rho})\}} = \\
&= \min_{\iota} \sqrt{\text{Tr}\left[\frac{1}{2}(I + (\vec{r} \cdot \vec{\sigma})) - \frac{1}{2}(I + (\vec{\iota} \cdot \vec{\sigma}_3))\right]^2} = \\
&= \min_{\iota} \sqrt{\frac{1}{2}\text{Tr}[(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{\iota} \cdot \vec{\sigma}_3)]^2} = \\
&= \min_{\iota} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\text{Tr}[r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + (r_3 - \iota_3)\sigma_3]^2} \right) = \\
&= \min_{\iota} \frac{1}{2} \sqrt{\text{Tr}[\vec{r}' \cdot \vec{\sigma}]^2}, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

e através da equação de Dirac

$$\begin{aligned}
(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \|\vec{\alpha}\|^2 \sigma_0, \\
\vec{r}' &\equiv \vec{\alpha}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
C_{HS}(\rho_{(qb)}) &= \min_{\iota_3} \frac{1}{2} \sqrt{\|\vec{r}'\|^2 \text{Tr}(\sigma_0)} = \min_{\iota_3} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\|\vec{r}'\|^2} = \\
&= \min_{\iota_3} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|\vec{r}'\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\iota_3} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 - \iota_3)^2}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Efetuando a derivada primeira em relação a ι_3 e igualando a zero, percebemos que o ponto crítico ocorre quando $\iota_3 = r_3$, de tal forma que a minimização resulta em

$$C_{HS}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)}. \tag{4.11}$$

4.1.2 CHS para 2-qubits

Para a descrição genérica de um operador densidade de 2-qubits Maziero [Maziero, 2016b] apresenta um recurso numérico para computar as componentes do vetor de Bloch associado. Considerando o operador 2-qubit estudado no capítulo anterior, é possível a

partir dele obter a equação para a CHS da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_{hs}^2(\rho_{(2qb)}) &= 2^{-1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=s,a} (\langle \Gamma_j^d \otimes \Gamma_{(1,2)}^k \rangle^2 + \langle \Gamma_{(1,2)}^k \otimes \Gamma_j^d \rangle^2) + \\
&+ 2^{-1} \sum_{k,k'=s,a} \langle \Gamma_{(1,2)}^k \otimes \Gamma_{(1,2)}^{k'} \rangle^2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

a função CHS em um sistema multipartido por ser escrita através de sua contribuição não-local [Pozzobom; Maziero, 2016],

$$C_{hs}^2(\rho_{(2qb)}) = C_l^{HS}(\rho_{(2qb)}) + C_{nl}^{HS}(\rho_{(2qb)}), \tag{4.13}$$

sendo que a CQ total é a soma de suas partes locais e não locais. A coerência local, por sua vez, é dada por

$$\begin{aligned}
C_l^{HS}(\rho_{(2qb)}) &= 2^{-1} \sum_{k=s,a} (\langle \Gamma_0^d \otimes \Gamma_{(1,2)}^k \rangle^2 + \langle \Gamma_{(1,2)}^k \otimes \Gamma_0^d \rangle^2) \\
&= C_{HS}^2(\rho_{(2qb)}^{(1)}) + C_{HS}^2(\rho_{(2qb)}^{(2)}),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\rho_{(2qb)}^{(s)} = Tr_s(\rho_{(2qb)})$ é o estado reduzido 1-qubit do qubit "s" com sua CHS descrita por (4.9).

4.1.3 CHS para estado cópia de 1-qubit $\mathbb{H}_A^d \otimes \mathbb{H}_B^d$

O caso de uma cópia de 1-qubit é o caso particular para 2-qubits em que consideramos qubits idênticos, neste contexto a CQ não local para o operador em questão é a seguinte

$$\begin{aligned}
C_{nl}^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) &= 2^{-1} \sum_{k=s,a} \left(\langle \Gamma_j^d \otimes \Gamma_{(1,2)}^k \rangle_{\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}}^2 + \langle \Gamma_{(1,2)}^k \otimes \Gamma_1^d \rangle_{\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}}^2 \right) + \\
&+ 2^{-1} \sum_{k,k'=s,a} \langle \Gamma_{(1,2)}^k \otimes \Gamma_{(1,2)}^{k'} \rangle_{\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}}^2,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

utilizando a equação (2.78) para os valores esperados e somando os termos idênticos do primeiro somatório obtemos

$$\begin{aligned}
C_{nl}^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) &= 2^{-1} \langle \Gamma_1^d \rangle^2 \sum_{k=s,a} \langle \Gamma_{(1,2)}^k \rangle^2 + \\
&+ 2^{-1} \sum_{k,k'=s,a} \langle \Gamma_{(1,2)}^k \rangle_{\rho_{(qb)}}^2 \langle \Gamma_{(1,2)}^{k'} \rangle_{\rho_{(qb)}}^2,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

comparando com a equação (4.12), finalmente teremos

$$C_{nl}^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = 2C_{HS}^2(\rho_{(qb)}) \left(\langle \Gamma_1^d \rangle_{\rho_{(qb)}}^2 + C_{HS}^2(\rho_{(qb)}) \right). \quad (4.17)$$

A QHS local será então

$$C_l^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = 2C_{HS}^2(\rho_{(qb)}). \quad (4.18)$$

4.1.4 CHS para 1-qutrit

Consideremos este último resultado particular intrigante de um modo em que não seria possível obtê-lo a partir da Distância Norma-Traço, pois esta última permanece com sua forma analítica desconhecida para estados gerais de sistemas com dimensões maiores ou iguais a três. Sem levar em conta a questão da localidade descrevemos a CHS de 1-qutrit a partir da equação (4.5) considerando os vetores de Bloch pelas equações (2.86-2.88) assim obtemos

$$2C_{hs}(\rho_{qt})^2 = \langle \lambda_{(1,2)}^s \rangle^2 + \langle \lambda_{(1,3)}^s \rangle^2 + \langle \lambda_{(2,3)}^s \rangle^2 + \langle \lambda_{(1,2)}^a \rangle^2 + \langle \lambda_{(1,3)}^a \rangle^2 + \langle \lambda_{(2,3)}^a \rangle^2. \quad (4.19)$$

Com estes resultados em mãos será possível obter relações entre as populações dos estados em questão, que representam as probabilidades de ocorrência destes estados. É interessante notar que a coerência de 1-qutrit calculada e os resultados alcançados nos capítulos seguintes foram possíveis apenas através da simplicidade da CHS pela DHS.

5 LIMITE ENTRE COERÊNCIA E POPULAÇÃO

Neste capítulo abordaremos o limite da função Coerência Quântica de Hilbert Schmidt (CHS) pelas populações de estados 1-qubit e 1-qutrit e, se possível, obter também um limite com a energia destes estados usando a simplicidade matemática da CHS.

5.0.5 Limite para 1-qubit

Para os propósitos deste capítulo adotaremos o operador densidade para 1-qubit, cuja construção de sua matriz densidade sugere adotarmos os geradores de Pauli de duas dimensões. Através destes geradores a forma matricial do operador densidade de 1-qubit passa a ser

$$\begin{aligned}\rho_{(qb)} &= \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (r_3 + 1) & (r_1 - ir_2) \\ (r_1 + ir_2) & (1 - r_3) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

As populações ou probabilidades serão dadas através da regra de Bohr para operadores densidade

$$p_j = \text{Tr}(\rho_{(qt)}|j\rangle\langle j|) = (1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle) / 2, \quad (5.2)$$

que no caso de um qubit será

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + r_3) \quad (5.3)$$

e

$$P_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{2}(1 - r_3). \quad (5.4)$$

Fazendo o uso da positividade $r \leq 1$ para o operador 1-qubit temos

$$r_1^2 + r_2^2 \leq 1 - r_3^2 = (1 - r_3)(1 + r_3) = 4P_1P_0, \quad (5.5)$$

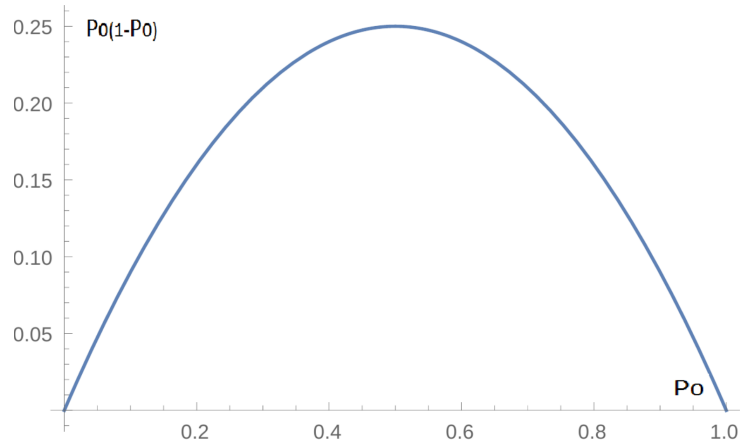
e utilizando estes resultados na CHS obtemos um limite da Coerência com a população, como pode ser visto na Figura 5.1.

$$2C_{HS}^2(\rho_{(qt)}) \leq 4P_1P_0, \quad (5.6)$$

ou através da energia média: $\langle E \rangle = \sum P_j E_j = P_0 E_0 + P_1 E_1 = P_1 E_1$, com

$$4P_1 P_0 = 4 \left(\frac{\langle E \rangle}{E_1} \right) \left(1 - \frac{\langle E \rangle}{E_1} \right). \quad (5.7)$$

Figura 5.1 – Limite 1-qubit para a função Coerência vs população de estados.



5.0.6 Limite para 1-qutrit

Nesta subseção apresentaremos um resultado inédito correspondente ao limite da coerência com a população para estados 1-qutrit. Nossa proposta inicial consistia em obtermos um limite da coerência pela energia deste estado em questão, cuja dificuldade analítica revelou-se aparente de forma que apenas uma relação com a população foi alcançada. Para os propósitos deste capítulo considere o operador 1-qutrit (Eq. 2.83) com a normalização $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{\alpha}$, e a sua propriedade intrínseca a todos operadores densidade, a positividade. Podemos obter uma relação entre população de estados com a CQ analisando os critérios de sua positividade. Devido a topologia da esfera de Bloch neste espaço, adotamos o método do polinômio característico [Shuming et al., 2015] para analisar a positividade deste operador:

$$\det(\lambda I - \rho_{qt}) \propto \lambda^3 - B_1 \lambda^2 + B_2 \lambda - B_3 = 0. \quad (5.8)$$

No entanto, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

1.

$$B_1 = \text{Tr}(\rho_{qt}) = 1. \quad (5.9)$$

2.

$$B_2 = \frac{1}{2} (1 - \text{Tr}(\rho_{qt}^2)) = \frac{1}{3} (1 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}). \quad (5.10)$$

3.

$$B_3 = \frac{1}{3} (B_2 - \text{Tr}(\rho_{qt}^2) + \text{Tr}(\rho_{qt}^3)) = \frac{1}{27} (1 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} \star \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}), \quad (5.11)$$

com o produto estrela definido por

$$(\vec{\alpha} \star \vec{\alpha})_k = \sqrt{3} d_{ijk} \alpha_i \alpha_j. \quad (5.12)$$

Neste contexto o critério da positividade é satisfeito se, e somente se $B_k \geq 0$ [Shuming et al., 2015]. Analisando as duas primeiras condições obtemos a inequação comum a todos os operadores, i.e,

$$\rho_{qt} \geq 0. \quad (5.13)$$

e usamos a decomposição espectral para escrever este operador na forma

$$\rho = \sum_i u_i |i\rangle \langle i|, \quad (5.14)$$

com o seguinte autovalor $u_i = \frac{1 - |\vec{r}_{qt}|}{3}$. Neste passo para satisfazer a condição de positividade devemos impor que

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{qt}|^2 \leq 1 &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \lambda_S^{(1,2)} \rangle^2 + \langle \lambda_S^{(1,3)} \rangle^2 + \langle \lambda_S^{(2,3)} \rangle^2 + \langle \lambda_\alpha^{(1,2)} \rangle^2 + \langle \lambda_\alpha^{(1,3)} \rangle^2 + \\ &+ \langle \Gamma_\alpha^{(2,3)} \rangle^2 \leq 1 - \langle \Gamma_d^1 \rangle^2 - \langle \Gamma_d^2 \rangle^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Com a matriz densidade representada por

$$\rho_{qt} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left[\langle \lambda_d^1 \rangle + \frac{\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} + 1 \right] & \left[\langle \lambda_S^{(12)} \rangle - \langle \lambda_\alpha^{(12)} \rangle \right] & \left[\langle \lambda_S^{(13)} \rangle - \langle \lambda_\alpha^{(13)} \rangle \right] \\ \left[\langle \lambda_S^{(12)} \rangle + \langle \lambda_\alpha^{(12)} \rangle \right] & \left[-\langle \lambda_d^1 \rangle + \frac{\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} + 1 \right] & \left[\langle \lambda_S^{(23)} \rangle - \langle \lambda_\alpha^{(23)} \rangle \right] \\ \left[\langle \lambda_S^{(13)} \rangle + \langle \lambda_\alpha^{(13)} \rangle \right] & \left[\langle \lambda_S^{(23)} \rangle - \langle \lambda_\alpha^{(23)} \rangle \right] & \left[1 - 2\frac{\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} \right] \end{pmatrix},$$

podemos verificar que as populações de acordo com os elementos da diagonal principal são

$$P_1^{1qt} = \frac{1}{3} \left(\langle \lambda_d^1 \rangle + \frac{\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} + 1 \right), \quad (5.16)$$

$$P_2^{1qt} = \frac{1}{3} \left(-\langle \lambda_d^1 \rangle + \frac{\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} + 1 \right), \quad (5.17)$$

$$P_3^{1qt} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\langle \lambda_d^2 \rangle}{\sqrt{3}} \right]. \quad (5.18)$$

Façamos a definição $c_{(1)} = \langle \lambda_d^1 \rangle$ e $c_{(2)} = \langle \lambda_d^2 \rangle$, e somando a equação (5.16) com a equação (5.17) obtemos

$$\begin{aligned} P_1^{qt} + P_2^{qt} &= 1 - P_3^{qt} = \frac{2}{3} + \frac{2c_{(2)}}{3\sqrt{3}} \\ \Rightarrow c_{(2)}^2 &= \frac{27}{4} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

que substituindo na equação (5.17) resulta em

$$\begin{aligned} P_1^{qt} &= \frac{c_{(1)}}{3} + \frac{1}{6} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ \Rightarrow c_{(1)}^2 &= 9 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] \right) + \frac{1}{3} \right\}^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

proporcionando uma relação com a CQ para $c_{(1)}^2$ e $c_{(2)}^2$ em termos das populações P_1^{qt} e P_2^{qt} :

$$2C_{HS}^2(\rho_{qt}) \leq 1 - c_{(1)}^2 - c_{(2)}^2. \quad (5.21)$$

Para a terceira condição da positividade utilizamos o resultado da condição B_2 onde obtemos

$$\text{Tr}(\rho_{qt}^2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} |\vec{\alpha}|^2, \quad (5.22)$$

e calculando $\text{Tr}(\rho_{qt}^3)$ obtemos

$$\text{Tr}(\rho_{qt}^3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \left(\sqrt{3} d_{ijk} \alpha_i \alpha_j \cdot \vec{\alpha} + 3 |\vec{\alpha}|^2 \right), \quad (5.23)$$

de tal forma que a terceira condição da positividade satisfaz

$$3 |\vec{\alpha}|^2 \leq 1 + 2 \left(\sqrt{3} d_{ijk} \alpha_i \alpha_j \right) \cdot \vec{\alpha}, \quad (5.24)$$

com as seguintes constantes de estrutura [Shuming et al., 2015] não-nulas totalmente simétricas, de acordo com a álgebra de Lie SU(3) para a propriedade produto [Khanna et al., 1997],

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (5.25)$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = \frac{1}{2}, \quad (5.26)$$

$$d_{334} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}, \quad (5.27)$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (5.28)$$

com α_i calculado a partir das equações (2.84-2.86) temos

$$\begin{aligned} 3|\vec{\alpha}|^2 \leq & 1 + 2\sqrt{3}\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2}\langle\lambda_{(3)}\rangle^2\hat{e}_4 + \frac{1}{2}\langle\lambda_{(3)}\rangle\langle\lambda_{(5)}\rangle\hat{e}_5 \right) + \\ & + 2\sqrt{3}\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2}\langle\lambda_{(2)}\rangle\langle\lambda_{(5)}\rangle + \frac{1}{2}\langle\lambda_{(1)}\rangle\langle\lambda_{(4)}\rangle - \frac{1}{2}\langle\lambda_{(3)}\rangle\langle\lambda_{(6)}\rangle \right) \hat{e}_6 + \\ & + 2\sqrt{3}\vec{\alpha} \cdot \left(+\frac{1}{2}\langle\lambda_{(1)}\rangle\langle\lambda_{(5)}\rangle - \frac{1}{2}\langle\lambda_{(2)}\rangle\langle\lambda_{(4)}\rangle - \frac{1}{2}\langle\lambda_{(3)}\rangle\langle\lambda_{(7)}\rangle \right) \hat{e}_7 + \\ & - 2\sqrt{3}\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\langle\lambda_{(4)}\rangle^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\langle\lambda_{(5)}\rangle^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\langle\lambda_{(6)}\rangle^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\langle\lambda_{(7)}\rangle^2 \right) \hat{e}_8 + \\ & + 2\sqrt{3}\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\lambda_{(1)}\rangle^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\lambda_{(2)}\rangle^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\lambda_{(3)}\rangle^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\lambda_{(8)}\rangle^2 \right) \hat{e}_8, \quad (5.29) \end{aligned}$$

e finalmente obtemos uma relação entre a coerência em termos dos grupos simétricos, assimétricos e diagonais

$$\begin{aligned} 2C_{HS}^2(\rho_{qt}) \leq & 1 + \sqrt{3} \left(\langle\lambda_{(S)}^{(13)}\rangle\langle\lambda_{(d)}^{(1)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(d)}^{(1)}\rangle\langle\lambda_{(\alpha)}^{(13)}\rangle^2 \right) + \\ & + \sqrt{3}\langle\lambda_{(S)}^{(23)}\rangle \left(\langle\lambda_{(\alpha)}^{(12)}\rangle\langle\lambda_{(\alpha)}^{(13)}\rangle + \langle\lambda_{(S)}^{(12)}\rangle\langle\lambda_{(S)}^{(13)}\rangle - \langle\lambda_{(d)}^{(1)}\rangle\langle\lambda_{(S)}^{(23)}\rangle \right) + \\ & + \sqrt{3}\langle\lambda_{(\alpha)}^{(23)}\rangle \left(\langle\lambda_{(S)}^{(12)}\rangle\langle\lambda_{(\alpha)}^{(13)}\rangle - \langle\lambda_{(\alpha)}^{(12)}\rangle\langle\lambda_{(S)}^{(13)}\rangle - \langle\lambda_{(d)}^{(1)}\rangle\langle\lambda_{(\alpha)}^{(23)}\rangle \right) + \\ & - \langle\lambda_{(d)}^{(2)}\rangle \left(\langle\lambda_{(S)}^{(13)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(\alpha)}^{(13)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(S)}^{(23)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(\alpha)}^{(23)}\rangle^2 \right) + \\ & + 2\langle\lambda_{(d)}^{(2)}\rangle \left(\langle\lambda_{(S)}^{(12)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(\alpha)}^{(12)}\rangle^2 + \langle\lambda_{(d)}^{(1)}\rangle^2 - \langle\lambda_{(d)}^{(2)}\rangle^2 \right), \quad (5.30) \end{aligned}$$

ou em termos das populações considerando as equações (5.21) e (5.22) para $c_{(1)} = \langle \lambda_d^1 \rangle$ e $c_{(2)} = \langle \lambda_d^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
2C_{HS}^2(\rho_{qt}) \leq & 1 + \sqrt{3} \left(\langle \lambda_{(S)}^{(13)} \rangle 9 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{3} \right) \right\}^2 \right) + \\
& + \sqrt{3} \left(3 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{3} \right) \right\} \langle \lambda_{(\alpha)}^{(13)} \rangle^2 \right) + \\
& + \sqrt{3} \langle \lambda_{(S)}^{(23)} \rangle \left(\langle \lambda_{(\alpha)}^{(12)} \rangle \langle \lambda_{(\alpha)}^{(13)} \rangle + \langle \lambda_{(S)}^{(12)} \rangle \langle \lambda_{(S)}^{(13)} \rangle \right) + \\
& - \sqrt{3} \langle \lambda_{(S)}^{(23)} \rangle \left(3 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{3} \right) \right\} \langle \lambda_{(S)}^{(23)} \rangle \right) + \\
& + \sqrt{3} \langle \lambda_{(\alpha)}^{(23)} \rangle \left(\langle \lambda_{(S)}^{(12)} \rangle \langle \lambda_{(\alpha)}^{(13)} \rangle - \langle \lambda_{(\alpha)}^{(12)} \rangle \langle \lambda_{(S)}^{(13)} \rangle \right) + \\
& - \sqrt{3} \langle \lambda_{(\alpha)}^{(23)} \rangle \left(3 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{3} \right) \right\} \langle \lambda_{(\alpha)}^{(23)} \rangle \right) + \\
& - \sqrt{\frac{27}{4}} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right) \left(\langle \lambda_{(S)}^{(13)} \rangle^2 + \langle \lambda_{(\alpha)}^{(13)} \rangle^2 + \langle \lambda_{(S)}^{(23)} \rangle^2 + \langle \lambda_{(\alpha)}^{(23)} \rangle^2 \right) + \\
& + \sqrt{27} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right) \left(\langle \lambda_{(S)}^{(12)} \rangle^2 + \langle \lambda_{(\alpha)}^{(12)} \rangle^2 \right) + \\
& + \sqrt{27} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right) \left(9 \left\{ \left(P_1^{qt} - \frac{1}{6} \left[P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{3} \right) \right\}^2 \right) + \\
& - \sqrt{27} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right) \left(-\frac{27}{4} \left(P_1^{qt} + P_2^{qt} - \frac{2}{3} \right)^2 \right). \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Percebemos, portanto através do resultado anterior que uma dificuldade analítica para a obtenção de uma relação entre a Coerência e energia de estados 1-qutrit é inevitável nos restringindo, por enquanto, a sua relação com a população.

6 RELAÇÕES ENTRE MANIPULAÇÃO DE POPULAÇÃO E FUNÇÃO COERÊNCIA

Neste capítulo abordaremos uma relação relevante entre a manipulação da população de estados com a função Coerência Quântica (CQ) local e não local. Analisaremos a possibilidade de controlar a CHS, CER e $Cl1$ manipulando as populações locais de seus respectivos estados. Perceberemos que é possível controlar a CHS não local manipulando a diferença entre suas populações locais p_1 e p_2 , embora não seja possível controlar a $Cl1$ local e não local manipulando suas populações locais. Finalmente investigaremos o caso em que a CER para o estado cópia de 1-qubit pode ser modificada apenas modificando sua própria coerência, enquanto a CER de um estado simples de 1-qubit pode ser controlada alterando suas populações locais através de um procedimento numérico e utilizando relações com outras medidas de Coerência, como a $Cl1$.

6.1 COERÊNCIA DE HS

6.1.1 Manipulação para estado cópia de 1-qubit

Consideremos o caso de duas cópias de 1-qubit com a função CQ dada pela equação (4.15), i.e,

$$C_l^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = r_1^2 + r_2^2, \quad (6.1)$$

que a partir do limite (Eq. 5.7) permanece

$$C_l^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) \leq 4P_1P_0, \quad (6.2)$$

de forma que não é possível modificar a Coerência de Hilbert-Schmidt (CHS) local manipulando populações locais p_j . Consideremos, em outra instância, a parte não-local da CHS (Eq. 4.15) de modo que

$$C_{nl}^{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = (r_1^2 + r_2^2) \left[r_3^2 + \frac{(r_1^2 + r_2^2)}{2} \right], \quad (6.3)$$

percebemos que é possível modificar a CQ não-local alterando a diferença entre estas populações: $\langle \Gamma_1^d \rangle = p_1 - p_2$.

6.2 COERÊNCIA NORMA- l_1

Embora a CHS não satisfaça as condições para a função CQ, é possível obter uma equivalência com a Coerência Norma- l_1 (C_{l1}) e a CHS para o caso particular de 1-qubit. A C_{l1} é definida a partir da Distância Norma- l_1 ,

$$C_{l1}(\rho) = \sum_{i,j;i \neq j} |\rho_{i,j}|. \quad (6.4)$$

A relação com a CHS prevalece para estados de 1-qubit

$$C_{l1}(\rho_{(qb)}) = \sqrt{2}C_{hs}(\rho_{(qb)}), \quad (6.5)$$

bem como uma relação com o estado cópia de 1-qubit, já que para o estado $\rho_{(qt)} \otimes \rho_{(qt)}$ a presença de componentes diagonais com elementos não diagonais se cancelam

$$C_{l1}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = (1 + C_{l1}(\rho_{(qb)}))^2 - 1. \quad (6.6)$$

Estas estruturas podem ser observadas nos capítulos seguintes, em que a matriz operador densidade para os respectivos casos acima é evidenciada.

6.2.1 Manipulação para Cópia de 1-qubit

Consideremos a matriz densidade de um sistema de 1-qubit como a equação (5.1), pela definição de C_{l1} é possível determinar a relação:

$$C_{l1}(\rho_{(qb)}) = \sqrt{2}C_{hs}(\rho_{(qb)}) = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)}. \quad (6.7)$$

Para o caso do perador densidade de um estado cópia de 1-qubit

$$\begin{aligned}
\rho^{\otimes 2} - \iota_{\rho \otimes \rho} = & \left(\frac{1}{4}(r_3 + 1)^2 + \frac{1}{4}(-2a_3 - c_{33} - 1) \right) |00\rangle \langle 00| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)(r_3 + 1) \right) |00\rangle \langle 01| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)(r_3 + 1) \right) |00\rangle \langle 10| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)^2 \right) |00\rangle \langle 11| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 + ir_2)(r_3 + 1) \right) |01\rangle \langle 00| + \\
& + \left(\frac{c_{33} - 1}{4} + \frac{1}{4}(1 - r_3)(r_3 + 1) \right) |01\rangle \langle 01| + \\
& + \left(\frac{1}{4}r_1 - ir_2)(r_1 + ir_2) \right) |01\rangle \langle 10| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)(1 - r_3) \right) |01\rangle \langle 11| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 + ir_2)(r_3 + 1) \right) |10\rangle \langle 00| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)(r_1 + ir_2) \right) |10\rangle \langle 01| + \\
& + \left(\frac{c_{33} - 1}{4} + \frac{1}{4}(1 - r_3)(r_3 + 1) \right) |10\rangle \langle 10| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 - ir_2)(1 - r_3) \right) |10\rangle \langle 11| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 + ir_2)^2 \right) |11\rangle \langle 00| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 + ir_2)(1 - r_3) \right) |11\rangle \langle 01| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(r_1 + ir_2)(1 - r_3) \right) |11\rangle \langle 10| + \\
& + \left(\frac{1}{4}(1 - r_3)^2 + \frac{1}{4}(2a_3 - c_{33} - 1) \right) |11\rangle \langle 11|, \tag{6.8}
\end{aligned}$$

podemos determinar a relação

$$C_{l1}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) = \left(1 + \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)} \right)^2 - 1, \tag{6.9}$$

de modo que não há implicação da população local na função C_{l1} não-local para este estado. Apoiaremos nossas investigações finais com a Coerência Entropia Relativa (CER).

6.3 COERÊNCIA ENTROPIA RELATIVA

Nesta seção iremos tratar a manipulação da população para o estado 1-qubit e estado cópia de 1-qubit utilizando a CER, afim de obtermos algum controle da Coerência pelas populações. Definimos a CER de acordo a função Distância Entropia Relativa (DER) da seguinte maneira

$$C_{RE} = \min_{\iota} (-\text{Tr}(\rho \log \iota) - S(\rho)) = S(\rho_{diag}) - S(\rho). \quad (6.10)$$

Se notarmos que o estado 1-qubit é dado por

$$\rho_{(1qb)} = 2^{-1} (\Gamma_0 + \langle \Gamma_1^d \rangle \Gamma_1^d + \langle \Gamma_{(1,2)}^s \rangle \Gamma_{(1,2)}^s + \langle \Gamma_{(1,2)}^\alpha \rangle \Gamma_{(1,2)}^\alpha), \quad (6.11)$$

obtemos a forma analítica para a CER em termos das populações, lembrando que $\rho_{(diag)}$ é o estado $\rho_{(qb)}$ com todos os termos fora da diagonal principal identicamente nulos e a entropia de von Neumann sendo $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$, desta forma teremos $\rho_{(diag)} = 2^{-1} (\Gamma_0 + \Gamma_1^d \langle \Gamma_1^d \rangle)$. No entanto, se escrevermos $\rho_{diag} = 2^{-1} \sum_j r_j |r_j\rangle \langle r_j|$ poderemos calcular o primeiro termo da equação 6.10 procedendo da seguinte maneira

$$S(\rho_{diag}) = -\text{Tr} \left[2^{-1} \left(\sum_j r_j |r_j\rangle \langle r_j| \right) \log \sum_j (2^{-1} r_j |r_j\rangle \langle r_j|) \right], \quad (6.12)$$

neste passo aplicamos a decomposição espectral e obtemos

$$\begin{aligned} S(\rho_{diag}) &= -\text{Tr} \left[2^{-1} \left(\sum_j r_j |r_j\rangle \langle r_j| \right) \sum_j (\log(2^{-1} r_j) |r_j\rangle \langle r_j|) \right] = \\ &= -\text{Tr} 2^{-1} \left[\sum_j r_j |r_j\rangle \langle r_j| \log(2^{-1} r_j) |r_j\rangle \langle r_j| \right], \end{aligned} \quad (6.13)$$

com a propriedade de que o traço da soma é a soma dos traços temos

$$\begin{aligned} S(\rho_{diag}) &= -2^{-1} \sum_j \log(2^{-1} r_j) r_j |r_j\rangle \langle r_j| \text{Tr} |r_j\rangle \langle r_j| = \\ &= -2^{-1} \sum_j r_j \log(2^{-1} r_j) \langle r_j | r_j \rangle \text{Tr} |r_j\rangle \langle r_j| = \\ &= -2^{-1} \sum_j r_j |\langle r_j | r_j \rangle|^2 \log(2^{-1} r_j) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle}{2} \log_2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle}{2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde utilizamos a equação para as populações $r_j = 1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle$ e $|\langle r_j | r_j \rangle|^2 = 1$. Analogamente obtemos o resultado para o segundo termo da equação 6.10, de modo que

a CER em termos das populações será

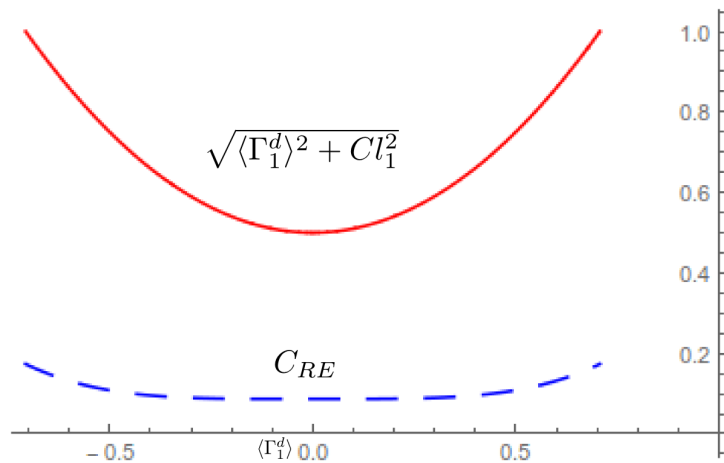
$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle}{2} \log_2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} \langle \Gamma_1^d \rangle}{2} + \\
 &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} G}{2} \log_2 \frac{1 + (-1)^{\delta_{j2}} G}{2},
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

sendo $G^2 = \langle \Gamma_1^d \rangle + C_{l1}^2(\rho_{(qb)})$ com a relação $C_{l1}^2 = 2^{-1} C_{HS}^2$.

6.3.1 Manipulação para 1-qubit

A estrutura da equação 6.16 não permite o cancelamento do termo $\langle \Gamma_1^d \rangle$ relacionado com as populações. Isto garante o controle da CER pela população $\langle \Gamma_1^d \rangle$ de 1-qubit por um valor fixo da $Cl1$, como pode ser visto na figura 6.1.

Figura 6.1 – Controle da população $\langle \Gamma_1^d \rangle$ com a CER de 1-qubit para um valor fixo da $Cl1$: $C_{l1}(\rho_{(qb)}) = 2^{1/2} C_{HS}(\rho_{(qb)}) = \sqrt{0 + 1/2}$. A linha em azul denota a função CER. Valores constantes da $Cl1$ descrevem as superfícies laterais de um cilindro de estados físicos no interior da esfera de Bloch para 1-qubit. Os círculos inferior e superior do cilindro, que tocam a superfície da esfera, descrevem estados puros para os quais a norma de Bloch, representada pela linha vermelha no gráfico, possui resultado unitário.



6.3.2 Manipulação para Cópia de 1-qubit

Usando a propriedade da aditividade para a entropia de von Neumann e para a DER (Apêndice A.3) estendemos a seguinte relação para a CER em estados cópia de 1-qubit

$$C_{RE}(\rho \otimes \rho) = 2C_{re}(\rho), \quad (6.17)$$

tal que só será possível modificar a CER de duas cópias se modificarmos a sua própria Coerência. Contrário ao que se observa para a CHS e Cl_1 onde podemos controlar a Coerência através de sua população.

7 NÃO MONOTONICIDADE SOBRE PRODUTO TENSORIAL

A relação da Não Monotonicidade sobre Produto Tensorial (NMsPT) desperta uma característica interessante na Ciência da Informação Quântica (CIQ), trabalhos recentes verificaram para a Distância Norma-Traço (DNT) [Maziero, 2015] que estados puros, estados 1-qubit colineares, e dois estados mistos $2^{-1}\sigma_0$ não apresentam a relação da NMsTP. Como o conceito de função Coerência depende inteiramente do conceito de distância, bem como a convexidade é satisfeita apenas se a desigualdade triangular é satisfeita, então intuitivamente propriedades em funções Coerência devem implicar propriedades em funções de Distância e vice-versa. Escrevemos matematicamente a NMsTP da seguinte maneira

$$d(\rho, \zeta) \geq d(\chi, \eta), \quad (7.1)$$

$$d(\rho^{\otimes 2}, \zeta^{\otimes 2}) \leq d(\chi^{\otimes 2}, \eta^{\otimes 2}). \quad (7.2)$$

Nas próximas seções iremos analisar a implicação de medidas de distância em suas funções de Coerência, tal como a implicação da NMsPT. Em última análise faremos a investigação desta implicação para a CHS efetuando manipulações numéricas nas populações dos quartetos de estados das equações 7.1 e 7.2 da NMsPT.

7.1 NMSTP PARA A DISTÂNCIA ENTROPIA RELATIVA

Considerando a propriedade da aditividade (Apêndice A.3) para a Distância Entropia Relativa (DER) podemos escrever $d_{re}(\rho, \zeta) > d_{re}(\chi, \eta)$ na forma $d_{re}(\rho^{\otimes 2}, \zeta^{\otimes 2}) > d_{re}(\chi^{\otimes 2}, \eta^{\otimes 2})$, de tal modo que a DER e, portanto a Coerência Entropia Relativa (CER) não sofre da Não Monotonicidade sobre Produto Tensorial (NMsPT), bem como podemos constatar pela demonstração 4.

Demonstração 4 (Aditividade = Monotonicidade) *Vamos demonstrar que se a Medida de Dissimilaridade (MD) é Aditiva sobre Produto Tensorial (AsPT), então ela é Monotônica sobre Produto Tensorial (MsPT). Seja a aditividade expressa por*

$$d(\rho^{\otimes 2}, \zeta^{\otimes 2}) = rd(\rho, \zeta), \quad (7.3)$$

segue pela equação (7.1) e pela equação (7.2) que

$$d(\rho, \zeta) \geq d(\chi, \eta) \Leftrightarrow rd(\rho, \zeta) \geq rd(\chi, \eta) \Leftrightarrow d(\rho^{\otimes 2}, \zeta^{\otimes 2}) \geq d(\chi^{\otimes 2}, \eta^{\otimes 2}), \quad (7.4)$$

portanto se a MD é AsPT também será MsPT, dito de outra forma se ela é NMsPT ela é

não-AsPT.

7.2 NMSTP PARA A DISTÂNCIA NORMA- p

Demonstração 5 (Estados Puros com DNP) *Iremos demonstrar que a Distância Norma- p (DNP) atuando em estados puros não apresenta a relação da NMsPT, por equivalência com a DNT demonstrada em [Maziero, 2015]. Iniciamos pela expressão geral*

$$\begin{aligned} d_p(\rho, \zeta) &= \|\rho - \zeta\|_p \\ &= \left(\text{Tr} \left(\sqrt{(\rho - \zeta)^\dagger (\rho - \zeta)} \right)^p \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

com $(\rho - \zeta)^2 = |\sin \theta|^2 |+\rangle\langle +| + |\sin \theta|^2 |-\rangle\langle -|$, e também

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\sqrt{(\rho - \zeta)^2} \right)^p &= |\sin \theta|^p \text{Tr}(|+\rangle\langle +|) + |\sin \theta|^p \text{Tr}(|-\rangle\langle -|) \\ &= 2|\sin \theta|^p, \end{aligned} \quad (7.6)$$

de tal forma que

$$d_p(\rho, \zeta) = (2|\sin \theta|^p)^{1/p} \quad (7.7)$$

$$= 2^{-p} |\sin \theta| \quad (7.8)$$

$$= 2^{-p} 2^{-1} 2 |\sin \theta| \quad (7.9)$$

$$= 2^{-(p+1)} d_1(\rho, \zeta). \quad (7.10)$$

Como a equação (7.10) em termos da DNT é monotônica para este estado, também deverá ser a DNP e, portanto não sofre da NMsPT.

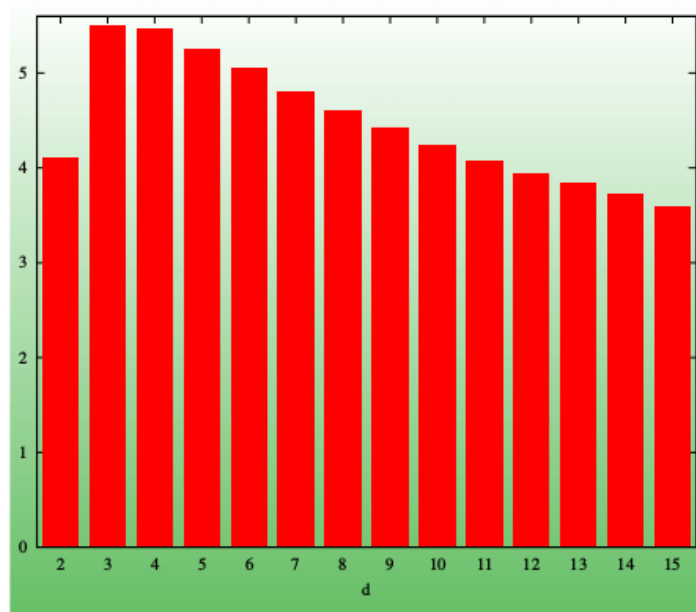
7.3 NMSTP PARA A DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT

Esta seção tem como caráter promover um resultado numérico para a NMsPT análogo ao obtido com a DNT, cujo resultado analítico consistia nosso objetivo inicial ao qual no decorrer desta pesquisa inclinou-se para o estudo e aplicação da DHS notando a sua simplicidade matemática que viabilizou os resultados apresentados até aqui, enquanto que para a DNT a obtenção de tais resultados deixa de possuir amparo científico o suficiente, i.e, não há conhecimento de nenhuma expressão analítica para a Coerência utilizando a DNT para estados gerais de sistemas com dimensões maiores ou iguais a três, tal como

estados 1-qutrit onde obtivemos uma relação inédita com a população de estados utilizando a DHS.

Embora uma solução analítica da NMsPT para estados 1-qubit gerais seja uma tarefa um tanto complicada, entretanto é possível observar o comportamento não-monotônico destes estados a partir de um processo computacional que gera quartetos de estados aleatórios (Figura 7.1). É possível neste processo observarmos a taxa de decaimento para a NMsPT a medida que aumentamos a dimensão do nosso sistema qudit, bem como obtido com a DNT para este mesmo quarteto de estados 1-qubit [Maziero, 2016b]. Adotando um recurso computacional podemos analisar a NMsPT para a Distância de Hilbert-Schmidt (DHS) considerando manipulações da população $\langle \Gamma_1^d \rangle_{\rho_{(qb)}}$ na função Coerência de Hilbert-Schmidt (DHS) total do sistema cópia de 1-qubit.

Figura 7.1 – Percentagem gerada a partir de um milhão de quartetos de estados aleatórios 1-qubit conduzindo para a NMsPT da DHS. Código computacional disponível em: <https://github.com/jonasmaziero/LibForro>.



Fonte: Adaptado de [Maziero, 2016a].

Para que possamos satisfazer a condição da NMsPT para a DHS fazemos as devidas escolhas $\langle \Gamma_{(1,2)}^s \rangle_{\rho_{(qb)}} = \langle \Gamma_{(1,2)}^\alpha \rangle_{\rho_{(qb)}} = 0.4$ e $\langle \Gamma_{(1,2)}^s \rangle_{\chi_{(qb)}} = \langle \Gamma_{(1,2)}^\alpha \rangle_{\chi_{(qb)}} = 0.33$ o que resulta em $C_{HS}(\rho_{(qb)}) = 0.34$ e $C_{HS}(\chi_{(qb)}) = 0.33$, respectivamente, tal que

$$C_{HS}(\rho_{(qb)}) > C_{HS}(\chi_{(qb)}) = 0.33. \quad (7.11)$$

Para que a inversão (Eq. 7.2) ocorra fixamos $\langle \Gamma_1^d \rangle_{\rho_{(qb)}} = 0$ e mudamos $|\langle \Gamma_1^d \rangle_{\chi_{(qb)}}| = 0$ variando de zero até $\sqrt{1 - 2C_{HS}^2(\chi_{(qb)})}$. Ao passo que $C_{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) \sim 0.26$. Usamos como

exemplo $|\langle \Gamma_1^d \rangle_{(\chi_{(qb)})}| = 0.7$ para obter $C_{HS}(\chi_{(qb)} \otimes \chi_{(qb)}) \sim 0.39$ e de forma consequente

$$C_{HS}(\rho_{(qb)} \otimes \rho_{(qb)}) < C_{HS}(\chi_{(qb)} \otimes \chi_{(qb)}), \quad (7.12)$$

para a CHS total dada pela soma das equações 4.15 e 4.16. As duas últimas equações determinam que

$$\min_{\iota} d_2(\rho, \iota_{\rho}) > \min_{\iota} d_2(\xi, \iota_{\xi}) \Rightarrow d_{hs}(\rho, \iota_{\rho}) > d_{hs}(\xi, \iota_{\xi}), \quad (7.13)$$

de forma que uma relação com a Coerência implica em uma relação com a distância, temos também que

$$\min_{\iota} d_{hs}(\rho^{\otimes 2}, \iota_{\rho \otimes \rho}) < \min_{\iota} d_{hs}(\xi^{\otimes 2}, \iota_{\xi \otimes \xi}) \quad (7.14)$$

demonstrando a manifestação da NMsPT frente a DHS com a condição simétrica $\iota_{\xi \otimes \xi} = \iota_{\xi} \otimes \iota_{\xi}$ de acordo com a demonstração 6.

Demonstração 6 (Condição Simétrica)

$$C(\rho_a \otimes \rho_b) = C(\rho_b \otimes \rho_a) = C(\rho \otimes \rho) \Rightarrow \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow d(\rho_a \otimes \rho_b, \iota_a^* \otimes \iota_b^*) = d(\rho_b \otimes \rho_a, \iota_b^* \otimes \iota_a^*) \Rightarrow \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow d(\rho \otimes \rho, \iota_a^* \otimes \iota_b^*) = d(\rho \otimes \rho, \iota_b^* \otimes \iota_a^*) \Rightarrow \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(x, z) = 0 \Rightarrow \quad (7.18)$$

$$\Rightarrow \iota_a = \iota_b, \quad (7.19)$$

q.e.d.

8 CONCLUSÃO

Através do cálculo da Coerência Quântica (CQ) para sistemas de d -níveis foi possível obter limites para sistemas de dois e três níveis entre a Coerência de Hilbert-Schmidt (CHS) com a energia e população de estados, respectivamente. Não obstante, manipulando a diferença entre as populações locais de um sistema cópia de 1-qubit obtivemos uma implicação não-local na CHS para este sistema a partir de relações entre funções de Coerência, em contraste ao que se observa adotando a Distância norma- l_1 para a CQ local e não-local, em que tal implicação não é possível através de populações locais ou não-locais. Por outro lado a consequência para a CER em estados cópia de 1-qubit manifesta-se apenas modificando sua própria coerência, enquanto que para estados 1-qubit é possível controlar a CER modificando sua população para valores fixos da C/l_1 . Em última análise foi possível demonstrar a implicação da DHS frente a relação da Não-Monotonicidade sobre o Produto Tensorial efetuando manipulações da população na CHS, quando aplicada a estados de 1-qubit. Tal relação indica que embora uma configuração $\rho_{(qt)}$ seja mais coerente que outra configuração $\chi_{(qt)}$, dois estados cópia do primeiro estado 1-qubit possuem menos Coerência do que duas cópias do estado $\chi_{(qt)}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXEY, E. R. Trace distance from the viewpoint of quantum operation techniques. 2007.
- AMORIM, R. et al. Elementos de geometria riemaniana: Análise da esfera s^2 (topics of riemannian geometry: Sphere s^2 analysis). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, 2302, 2015.
- ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.** **47**, **460**, 1981.
- _____. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. **Phys.Rev. Lett.** **49**, **91**, 1982.
- BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. **Phys. Rev. Lett.** **113**, **140401.**, 2014.
- _____. **Phys. Rev. Lett.** **113**, **140401.**, 2014. Disponível em: <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.113.140401>.
- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physica** **1**, **195**, 1964.
- BERTLMANN, R. A.; KRAMMER, P. Bloch vectors for qudits. **J. Phys. A: Math. Theor.** **41**, **235303**, 2008.
- BONOLA, R. **Non Euclidian Geometry: A Critical and Historical Study of its Development**. New York: Dover Publications Inc, 1955.
- BORISENKO, A.; TARAPOV, I. **Vector and Tensor Analysis**. New York: Dover Publications Inc, 1968.
- BOSE, S. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. **Cont. Phys.** **48**, **13**, 2007.
- BROMLEY, T. R.; CIANCIARUSO, M.; ADESSO, G. **Phys. Rev. Lett.** **114**, **210401**, 2015.
- CHA, S.-H. **Use of Distance Measures in Handwriting Analysis**. 2001. Dissertação (PhD dissertation) — SUNY at buffalo, CSE, 2001.
- CHA, S.-H. Comprehensive survey on distance/similarity measures between probability density functions. 2007.
- CHENU, A.; SCHOLES, G. D. Coherence in energy transfer and photosynthesis. **Annu. Rev. Phys. Chem.** **66**, **69**, 2015.
- CHOI, S.-S. et al. Use of histogram distances in iris authentication. **IC-AI**, 2004.
- CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. **Phys. Rev. Lett.** **23**, **880**, 1969.
- CROWE, E. **A History of Vector Analysis**. Dover: [s.n.], 2011.
- DAFFA, A. A. a. **The Muslim contribution to mathematics**. London: Croom Helm: ISBN 0-85664-464-1, 1977.

DEUTSCH, D. Quantum theory, the church-turing principle, and the universal quantum computer. **Proc. Roy. Soc. Lond. A400**, p. 97–117, 1985.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev. 47**, 777, 1935.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Unicamp, Campinas: [s.n.], 2002.

FERRARO, A. et al. Almost all quantum states have non-classical correlations. **quant-ph/09083157**, 2009.

FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, p. 467–488, 1982.

FRAIGNIAUD, P.; LEBHAR, E.; VIENNOT, L. 2008 ieee infocom - the 27th conference on computer communications. **IEEE INFOCOM 2008. the 27th Conference on Computer Communications: 1085–1093**, 2008. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.113.6748>>.

FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental test of local hidden-variable theories. **Phys. Rev. Lett. 28**, 938, 1972.

FUCHS, C. A.; GRAAF, v. d. J. Cryptographic distinguishability measures for quantum-mechanical states. **IEEE Trans. on Inform. Th.**, v. 45, n. 4, p. 1216–1227, 1999.

GAUSS, C. F. **General Investigations of Curved Surfaces**. New York: Raven Press, 1965. Translated by A.M.Hiltebeitel and J.C.Morehead.

GISIN, N. et al. Quantum cryptography. **Rev. Mod. Phys. 74**, 145, 2002.

GOMES, P. **Descartes R. Discurso do Método 4.ª ed. (1.ª ed. original 1637)**. Lisboa: Guimarães Editores, Lda: [s.n.], 2004.

HEATH, T. L. [S.l.]: Dover Publications, 1956. (The Thirteen Books of Euclid's Elements, ISBN 0-486-60088-2 (vol. 1), ISBN 0-486-60089-0 (vol. 2), ISBN 0-486-60090-4 (vol. 3)).

KANE, B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer. **Nature 393**, 133, 1998.

KHANNA, G. et al. Geometric phases for $su(3)$ representations and three level quantum systems. **Ann. Phys. (N. Y.) 253** 55, 1997.

KHELEMSKII. Lectures and exercises on functional analysis. 2006.

KIMURA, G. The bloch vector for n-level systems. **Phys. Lett. A 314**, 339, 2003.

KNEALE, W.; KNEALE, M. **O desenvolvimento da lógica. Tradução de M. S. LOURENÇO**. 3ª ed.. ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian: ISBN 9723105322, 1991. 773 p.

LANDAU, L. Das daempfnungsproblem in der wellenmechanik. **Zeitschrift fuer Physik 45 (5–6): 430–464.**, 1927.

LIEB, E. H.; RUSKAI, M. B. Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy. **J. Math. Phys. 14**, p. 1938–1941, 1973.

LINDBLAD, G. Completely positive maps and entropy inequalities. **Commun. Math. Phys.** **40**, p. 147–151, 1975.

MA, J. et al. Converting coherence to quantum correlations. **Phys. Rev. Lett.** **116**, 160407, 2016.

MAZIERO, J. Non-monotonicity of trace distance under tensor products. **Braz. J. Phys.** **45**, 560, 2015.

_____. Fortran code for generating random probability vectors, unitaries, and quantum states. **Front. ICT** **3**, 4, 2016.

_____. Hilbert-schmidt quantum coherence in multi-qudit systems. **arXiv:1612.05151**, 2016.

MCPHERSON, R.; SHOKRI, R.; SHMATIKOV, V. Defeating image obfuscation with deep learning. **arXiv:1609.00408**, 2016.

MICHAEL, H. Binary coefficients: A theoretical and empirical study. **Mathematical Geology**, v. 8, n. 2, 1976.

NEUMANN, J. von. Wahrscheinlichkeitstheoretischer aufbau der quantenmechanik. **Göttinger Nachrichten** **1**: 245–272.60, 1927.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2000.

PAES, B. D. et al. Combinando criptografia e biometria: Sistemas de regeneração de chave. v. 2, n. 2, 2012.

PARROTT, S. Relativistic electrodynamics and differential geometry. **Springer-Verlag ISBN 0-387-96435-5**, 1987.

PIZA, A. F. R. T. **Mecânica Quântica**. Edusp: São Paulo: [s.n.], 2009.

POPESCU, S. Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality? **Phys. Rev. Lett.** **72**, 797, 1994.

POZZOBOM, M. B.; MAZIERO, J. Environment-induced quantum coherence spreading. **arXiv:1605.04746**, 2016.

RANA, S.; PARASHAR, P.; LEWENSTEIN, M. Trace-distance measure of coherence. **Phys. Rev. A** **93**, 012110, p. 147–151, 2016.

RICCI-CURBASTRO, G.; LEVI-CIVITA, T. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. **Mathematische Annalen**, v. 54 (1), p. 125–201, 1900.

RUSKAI, M. B. Beyond strong subadditivity? improved bounds on the contraction of generalized relative entropy. **Rev. Math. Phys.** **6**, p. 1147–1994, 1992.

_____. Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality. **Commun. Math. Phys.** **40**, p. 147–151, 2002.

SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, **23**, 807-812; 823-828; 844-849. Tradução por John D. Trimmer, **Proceedings of the American Philosophical Society**, **124**, 323, 1980.

SHI, H.-L. et al. Coherence depletion in the grover quantum search. 2016.

SHOR, P. W. Polynomial-time algorithm for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM Journal on Computing**, **26(5):1484–1509.**, 1997.

SHUMING, C. et al. Open-system dynamics of the geometrical representation for a qutrit.

SMYTH, M. et al. ed. quasi uniformities: reconciling domains with metric spaces. **3rd Conference on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science Khelemskii**, n. 298, p. 236–253, 2006.

STERNBERG, S. **Lectures on Differential Geometry**. 2nd ed.. ed. New York: Chelsea Publishing Co.: ISBN 0-8218-1385-4, 1983.

STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. B. Quantum coherence as a resource. **arXiv:1609.02439.**, 2016.

STRELTSOV, A. et al. Measuring quantum coherence with entanglement. **Phys. Rev. Lett.** **115, 020403**, 2015.

VEDRAL, M. B.; PLENIO, M. A.; RIPPIN, P. L. K. **Phys. Rev.Lett.** **78**, 1997.

YUAN, X. K. et al. Experimental quantum randomness processing using superconducting qubits. **Phys. Rev. Lett.** **117, 010502**, 2016.

ZEH, H. D. Toward a quantum theory of observation. **Found. Phys.** **3, 109**, 1970.

_____. On the interpretation of measurement in quantum theory. **Found. Phys.** **1, 69**, 1973.

ZUREK, W. H. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? **Phys. Rev. D** **24, 1516**, 1981.

_____. Environment-induced superselection rules. **Phys. Rev. D** **26, 1862**, 1982.

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DE DISSIMILARIDADE

A.1 PROPRIEDADES DA DISTÂNCIA DE HILBERT-SCHMIDT

Apresentaremos a seguir as propriedades mais recorrentes em MD, analisando seus pontos de validade para a DHS em operadores densidade. Para maiores detalhes consulte o material suplementar [Baumgratz et al., 2014]. Considera-se que o leitor tenha conhecimento das propriedades elementares $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ e $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

A.1.1 Homogeneidade

A homogeneidade para a DHS é representada matematicamente por:

$$\|\alpha(A - B)\|_2 = |\alpha| \cdot \|A - B\|_2, \quad (\text{A.1})$$

demonstraremos que a norma de Hilbert-Schmidt satisfaz a condição exigida e, portanto a DHS.

Prova 1 (Homogeneidade) *Partimos do princípio de sua norma*

$$\|\alpha M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}[(\alpha M)^\dagger(\alpha M)]} = \quad (\text{A.2})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}[(M^\dagger \alpha^*) \cdot (\alpha M)]} = \quad (\text{A.3})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}[M^\dagger |\alpha|^2 M]} = \quad (\text{A.4})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}[|\alpha|^2 M^\dagger M]} = \quad (\text{A.5})$$

$$= \sqrt{|\alpha|^2 \text{Tr}[M^\dagger M]} = \quad (\text{A.6})$$

$$= |\alpha| \cdot \sqrt{\text{Tr}[M^\dagger M]} = \quad (\text{A.7})$$

$$= |\alpha| \cdot \|M\|_2, \quad (\text{A.8})$$

q.e.d.

A.1.2 Positividade

A inequação da positividade é representada matematicamente por:

$$\|A - B\|_2 \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

demonstraremos que a DHS satisfaz a condição exigida.

Prova 2 (Positividade) *Partimos do princípio de sua norma em que todo operador positivo é necessariamente um operador hermitiano e que por sua vez é normal e, portanto diagonalizável. Com estas relações em prática aplicamos o teorema da decomposição espectral*

$$M = \sum_i u_i |i\rangle \langle i| \Rightarrow \quad (\text{A.10})$$

$$\Rightarrow M^\dagger M = \sum_i u_i^* |i\rangle \langle i| \sum_j u_j |j\rangle \langle j| = \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{i,j} u_i^* u_j |i\rangle \langle i| |j\rangle \langle j| = \quad (\text{A.12})$$

$$= \sum_{i,j} |u_i|^2 \delta_{ij} |i\rangle \langle j| = \quad (\text{A.13})$$

$$= \sum_i |u_i|^2 |i\rangle \langle i|. \quad (\text{A.14})$$

Pela definição da norma temos

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^\dagger M)} = \quad (\text{A.15})$$

$$= \sqrt{\sum_i |u_i|^2 \text{Tr}(|i\rangle \langle i|)} = \quad (\text{A.16})$$

$$= \sqrt{\sum_i |u_i|^2} \geq 0, \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\text{Tr}(|i\rangle \langle i|) = 1, \quad (\text{A.18})$$

de modo que se substituirmos M pela diferença $M = A - B = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$, teremos

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_i |\lambda_i|^2} \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

∴

$$d(A, B) = \|A - B\|_2 \geq 0, \quad (\text{A.20})$$

q.e.d.

A.1.3 Axioma da Coincidência

O Axioma da Coincidência é representado matematicamente por:

$$\|A - B\|_2 = 0, \text{ sse, } A = B, \quad (\text{A.21})$$

demonstraremos que a DHS satisfaz a condição exigida. Prova

Prova 3 (Axioma da coincidência) *Adotamos a definição da norma com $M = A - B$ de modo que*

$$\|M\|_1 = \sum_i |\lambda_i| = 0 \Rightarrow \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow \lambda_i = M = 0, \forall i, \quad (\text{A.23})$$

e portanto $A = B$, *q.e.d.*

A.1.4 Relação de Simetria

A relação de simetria é representada matematicamente por:

$$\|A - B\|_2 = \|B - A\|, \quad (\text{A.24})$$

demonstraremos que a DHS satisfaz a condição exigida. Prova

Prova 4 (Relação de Simetria) *Usando a condição da homogeneidade para a norma temos*

$$d_2(B, A) = \|B - A\|_2 = |-1| \|A - B\|_2 = d_2(A, B), \quad (\text{A.25})$$

q.e.d.

A.1.5 Desigualdade Triangular

A desigualdade Triangular é representada matematicamente por:

$$\|A - B\|_2 \leq \|A - Z\|_2 + \|Z - B\|_2. \quad (\text{A.26})$$

A DHS satisfaz a condição exigida para 1-qubit, de maneira análoga para a DNT para o caso restrito de estados 1-qubit e OI [Rana et al., 2016]: Prova

Prova 5 (Desigualdade Triangular) *Seja Λ o operador maximização de $\|\rho - \sigma\|_1$ (de acordo com o Lema (1)) tal que*

$$\|\rho - \sigma\|_1 = 2\text{Tr}\{\Pi(\rho - \sigma)\}, \quad (\text{A.27})$$

então usando a linearidade da função traço

$$= 2\text{Tr}\{\Pi(\rho - \tau)\} + 2\text{Tr}\{\Pi(\tau - \sigma)\} \leq \quad (\text{A.28})$$

$$\leq \|\rho - \tau\|_1 + \|\tau - \sigma\|_1, \quad (\text{A.29})$$

q.e.d.

“A última desigualdade segue porque o operador Λ maximizando $\|\rho - \sigma\|_1$ em geral não é o mesmo operador que maximiza tanto $\Pi(\rho - \tau)$ e $\Pi(\tau - \sigma)$ ”. (Wilde, 2000, p. 222).

A.1.6 Propriedade Telescópica

A propriedade telescópica é representada matematicamente por:

$$\|\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega\|_2 = \|\rho - \sigma\|_2, \quad (\text{A.30})$$

demonstraremos que a DHS satisfaz a condição exigida. Prova

Prova 6 (Propriedade Telescópica) *Partimos do princípio*

$$\|\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)^\dagger (\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)} = \quad (\text{A.31})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}\left((\rho \otimes \omega)^\dagger - (\sigma \otimes \omega)^\dagger\right) (\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)} = \quad (\text{A.32})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}(\rho^\dagger \otimes \omega^\dagger - \sigma^\dagger \otimes \omega^\dagger) (\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)}, \quad (\text{A.33})$$

e aplicamos a condição do operador hermitiano, em que $\rho^\dagger = \rho$, de modo que

$$\|\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)(\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega)} = \quad (\text{A.34})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}((\rho - \sigma) \otimes \omega)((\rho - \sigma) \otimes \omega)} = \quad (\text{A.35})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \otimes \omega^2} = \quad (\text{A.36})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \otimes \text{Tr}(\omega^2)}, \quad (\text{A.37})$$

com a condição do traço unitário, em que $\text{Tr}(\omega^2) = 1$, obtemos

$$\|\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\rho - \sigma)^2} = \quad (\text{A.38})$$

$$= \sqrt{\text{Tr}[(\rho - \sigma)^\dagger \cdot (\rho - \sigma)]} \Rightarrow \quad (\text{A.39})$$

$$\Rightarrow \|\rho \otimes \omega - \sigma \otimes \omega\|_2 = \|\rho - \sigma\|_2, \quad (\text{A.40})$$

q.e.d.

A.1.7 Invariância Isométrica

A invariância isométrica frente transformações unitárias é representada matematicamente por:

$$\|U(A - B)U^\dagger\|_2 = \|O\|_2, \quad (\text{A.41})$$

demonstraremos que a DHS satisfaz a condição exigida. Prova

Prova 7 (Invariância Isométrica) *Partimos da definição de sua norma*

$$\|UOU^\dagger\|_2 = \sqrt{\text{Tr} [(UOU^\dagger)^\dagger (UOU^\dagger)]} = \quad (\text{A.42})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} [(OU^\dagger)^\dagger (U^\dagger)UOU^\dagger]} = \quad (\text{A.43})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} [UO^\dagger U^\dagger UOU^\dagger]} = \quad (\text{A.44})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} [UO^\dagger OU^\dagger]} = \quad (\text{A.45})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} \left[U \sum_i |o_i|^2 P_i U^\dagger \right]} = \quad (\text{A.46})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} \left[\sum_i |o_i|^2 U P_i U^\dagger \right]} = \quad (\text{A.47})$$

$$= \sqrt{\text{Tr} \left[\sum_i |o_i|^2 Q_i \right]} = \quad (\text{A.48})$$

$$= \sqrt{\sum_i |o_i|^2 \text{Tr}(Q_i)} = \quad (\text{A.49})$$

$$= \sqrt{\sum_i |o_i|} = \|O\|_2, \quad (\text{A.50})$$

com a substituição $O = A - B$ obtemos $\|U(A - B)U^\dagger\|_2 = \|A - B\|_2$, *q.e.d.*

A.2 PROPRIEDADES DA DISTÂNCIA ENTROPIA RELATIVA

Apresentaremos a seguir as propriedades mais recorrentes em MD, analisando seus pontos de validade para a DER em operadores densidade.

A.2.1 Aditividade sobre Produto Tensorial

A Aditividade sobre Produto Tensorial é representada matematicamente por:

$$d(\rho^{\otimes 2}, \zeta^{\otimes 2}) = rd(\rho, \zeta), \quad (\text{A.51})$$

demonstraremos que a DER satisfaz a condição exigida. Prova

Prova 8 (Aditividade sobre Produto Tensorial) *Para a devida demonstração, devemos expor três propriedades distintas e análogas para a Entropia de Von Neumann. Sejam os*

operadores $\rho = \sum_j r_j |r_j\rangle\langle r_j|$ e $\zeta = \sum_j z_j |z_j\rangle\langle z_j|$, determinamos a propriedade primária

$$\log(\rho \otimes \zeta) = \log\left(\sum_j r_j |r_j\rangle\langle r_j| \otimes \sum_k z_k |z_k\rangle\langle z_k|\right) \quad (\text{A.52})$$

$$= \log\left(\sum_{j,k} r_j z_k |r_j\rangle\langle r_j| \otimes |z_k\rangle\langle z_k|\right) \quad (\text{A.53})$$

$$= \sum_{j,k} \log(r_j z_k) |r_j\rangle\langle r_j| \otimes |z_k\rangle\langle z_k| \quad (\text{A.54})$$

$$= \sum_{j,k} (\log(r_j) + \log(z_k)) |r_j\rangle\langle r_j| \otimes |z_k\rangle\langle z_k| \quad (\text{A.55})$$

$$= \sum_j \log(r_j) |r_j\rangle\langle r_j| \otimes \sum_k |z_k\rangle\langle z_k| \quad (\text{A.56})$$

$$+ \sum_j |r_j\rangle\langle r_j| \otimes \sum_k \log(z_k) |z_k\rangle\langle z_k| \quad (\text{A.57})$$

$$= \log(\rho) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \log(\zeta), \quad (\text{A.58})$$

e a entropia de Von Neumann

$$S(\rho \otimes \zeta) = -\text{Tr}(\rho \otimes \zeta \log(\rho \otimes \zeta)) \quad (\text{A.59})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \otimes \zeta (\log(\rho) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \log(\zeta))) \quad (\text{A.60})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \otimes \zeta \log(\rho) \otimes \mathbb{I}) - \text{Tr}(\rho \otimes \zeta \mathbb{I} \otimes \log(\zeta)) \quad (\text{A.61})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \log(\rho) \otimes \zeta) - \text{Tr}(\rho \otimes \zeta \log(\zeta)) \quad (\text{A.62})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \log(\rho)) \text{Tr}(\zeta) - \text{Tr}(\rho) \text{Tr}(\zeta \log(\zeta)) \quad (\text{A.63})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \log(\rho)) - \text{Tr}(\zeta \log(\zeta)) \quad (\text{A.64})$$

$$= S(\rho) + S(\zeta). \quad (\text{A.65})$$

tal que $S(\rho \otimes \rho) = 2S(\rho)$ e por fim

$$S(\rho \otimes \rho || \zeta \otimes \zeta) = -\text{Tr}(\rho \otimes \rho \log \zeta \otimes \zeta) - S(\rho \otimes \rho) \quad (\text{A.66})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \otimes \rho \log(\zeta) \otimes \mathbb{I}) \quad (\text{A.67})$$

$$-\text{Tr}(\rho \otimes \rho \mathbb{I} \otimes \log(\zeta)) - 2S(\rho) \quad (\text{A.68})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \log \zeta \otimes \rho) - \text{Tr}(\rho \otimes \rho \log \zeta) \quad (\text{A.69})$$

$$-2S(\rho) \quad (\text{A.70})$$

$$= -\text{Tr}(\rho \log \zeta) - \text{Tr}(\rho \log \zeta) - 2S(\rho) \quad (\text{A.71})$$

$$= 2(-\text{Tr}(\rho \log \zeta) - S(\rho)) \quad (\text{A.72})$$

$$= 2S(\rho || \zeta), \quad (\text{A.73})$$

q.e.d.