

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

Gustavo Feltrin Rossini

GRAFOS E SEU POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Santa Maria, RS
2017

Gustavo Feltrin Rossini

GRAFOS E SEU POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**.

ORIENTADORA: Prof.^a Lidiane Buligon

COORIENTADORA: Prof.^a Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rossini, Gustavo Feltrin
Grafos e seu Polinômio Característico / Gustavo Feltrin
Rossini.- 2017.
95 p. ; 30 cm

Orientadora: Lidiane Buligon
Coorientadora: Luciane Gobbi Tonet
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2017

1. Grafos 2. Matrizes 3. Determinantes 4. Polinômio
Característico I. Buligon, Lidiane II. Tonet, Luciane
Gobbi III. Título.

©2017

Todos os direitos autorais reservados a Gustavo Feltrin Rossini. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: gustavofr06@gmail.com

Gustavo Feltrin Rossini

GRAFOS E SEU POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**.

Aprovado em 25 de agosto de 2017:

Lidiane Buligon, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)
(Coorientadora)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Charles Quevedo Carpes, Dr. (Unipampa)

Valéria de Fátima M. C. Brum, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho, com todo amor e carinho, a minha Esposa Joanita e ao meu Filho Valentin, aos meus pais, Odacir e Beatriz, e a todos amigos que me acompanharam nessa trajetória.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar mais essa caminhada, é preciso agradecer de modo especial...

À Deus e a Mãe Três Vezes Admirável de Schoenstatt pela vida e por ter guiado meus caminho e minhas decisões para que eu conseguisse mais essa conquista em minha vida. Ao mesmo tempo, peço que Continuem comigo dando-me forças para que eu possa trilhar com sucesso essa nova jornada.

A minha amada Esposa, Joanita e meu amado Filho, Valentin, que souberam compreender os momentos de ausência e de dificuldade, pacientemente deram-me forças acolhendo-me nos momentos difíceis sempre ao meu lado com demonstrações de amor e carinho. Essa conquista é de vocês. Amo vocês!

Aos meus pais Odacir e Beatriz que me deram a vida me ensinaram a vivê-la com dignidade e respeito. Pelo amor e carinho, pelo apoio que recebi em mais essa jornada. Espero um dia poder retribuir tudo isso à vocês. Essa conquista é nossa. Amo vocês!

A meu irmão Fabiano, que é o meu melhor amigo, ao meu sogro e sogra João e Luci, que são como pais para mim, obrigado pela ajuda e compreensão.

À minha Orientadora Lidiane Buligon, e a Coorientadora Luciane Gobbi Tonet, pela competência, dedicação e carinho e por ter acreditado em mim. As suas contribuições, ideias e sugestões foram fundamentais para a concretização desse estudo e ajudaram-me a crescer.

A todos os professores, que de algum modo contribuíram para o meu crescimento pessoal, e em especial a Professora Carmen Vieira Mathias pelas inúmeras ajudas nessa trajetória.

Aos meus colegas de Mestrado e em especial ao meu colega Tarcius Alievi Pinheiro da primeira turma e aos colegas Sílvio Hoffmann e Márcio Rocha Lima, pelos momentos de troca de experiências e aprendizados proporcionado e pela amizade.

Enfim, a todas as pessoas que fizeram parte dessa caminhada e que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui. Com carinho deixo a minha gratidão.

A verdadeira felicidade pode ser encontrada somente em Deus, todos os outros prazeres nada mais são do que uma máscara vazia e são capazes de produzir apenas uma satisfação momentânea.

(Leonhard Euler (1707-1783))

RESUMO

GRAFOS E SEU POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

AUTOR: Gustavo Feltrin Rossini

ORIENTADORA: Lidiane Buligon

COORIENTADORA: Luciane Gobbi Tonet

Neste trabalho, um tema relacionado às redes sociais é usado como uma estratégia didática para conectar a matemática conceitual e teórica ao cotidiano dos alunos do Ensino Médio. Sendo este trabalho aplicado na forma de uma oficina na 15ª Semana Acadêmica Integrada do Centro de Ciências Naturais e Exatas. A partir do problema motivador sobre o conteúdo de grafos, foram geradas matrizes, calculados os determinantes pelos métodos de Laplace e por escalonamento e, em seguida, determinadas as raízes do polinômio característico por meio de radicais. O conteúdo de números complexos é abordado de maneira adicional. Finalmente, como uma complementação à parte teórica e como sugestão da utilização das tecnologias da informação no processo de ensino-aprendizado, faz-se o uso do Software Geogebra. Acredita-se que o material produzido pode servir tanto de referencial teórico quanto motivacional para professores que atuam no Ensino Médio.

Palavras-chave: Grafos. Matrizes. Determinantes. Polinômio Característico.

ABSTRACT

GRAPHS AND THEIR POLYNOMIALS CHARACTERISTIC

AUTHOR: Gustavo Feltrin Rossini

ADVISOR: Lidiane Buligon

CO-ADVISOR: Luciane Gobbi Tonet

In this work, a theme related to social networks was used as a didactic strategy to connect conceptual and theoretical mathematics to the daily life of high school students. This study was applied as a workshop at the 15th Semana Acadêmica Integrada do Centro de Ciências Naturais e Exatas. From the motivating problem in the field of Graphs, matrices were generated, calculating the determinants by the Laplace and Scheduling methods, and then determining the roots of the characteristic polynomial by radicals. The subject of complex numbers is also approached. Finally, as a complement to theory and as a usage suggestion of information technologies in the teaching-learning process, use is made of the Geogebra software. It is believed that the material produced can serve both as a theoretical and a motivational reference for teachers who work in High Schools.

Keywords: Graphs. Matrices. Determinants. Characteristic polynomial.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – <i>Grafo</i> G_1 - Exemplo de Grafo de ordem 5	12
Figura 2.2 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$	18
Figura 2.3 – Visualização gráfica do polinômio $P_{G_1}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda$	19
Figura 3.1 – <i>Grafo</i> G_2 Grafo ilustrativo de um dos possíveis casos de ligações entre os quatro vértices	21
Figura 3.2 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$	28
Figura 3.3 – Visualização gráfica do Polinômio $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$	29
Figura 3.4 – <i>Grafo</i> G_4 - Grafo ilustrativo de um dos casos de ligações entre 5 vértices.	30
Figura 3.5 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$	39
Figura 3.6 – Visualização gráfica do Polinômio $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$...	40
Figura 4.1 – Relações de amizades formadas pelos participantes	41
Figura 4.2 – <i>Grafo</i> G_4 - Grafos de 3 vértices	42
Figura 4.3 – <i>Grafo</i> G_5 - Grafo de 5 vértices	43
Figura 6.1 – Sete Pontes de Königsberg	49
Figura 6.2 – <i>Grafo</i> G_6 - Grafo das Sete Pontes de Königsberg	50
Figura 6.3 – <i>Grafo</i> G_7 - Grafo com 4 vértices	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	APORTE TEÓRICO	12
3	PROBLEMAS PROPOSTOS	20
3.1	PROBLEMA I	20
3.2	PROBLEMA II	29
4	APLICAÇÃO	41
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
6	APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	49
6.1	GRAFOS	49
6.1.1	Algumas Definições	51
6.1.2	Matriz Adjacência	52
6.2	MATRIZ	54
6.2.1	Matrizes Especiais	54
6.2.2	Matrizes Quadradas Especiais	55
6.2.3	Operações com Matrizes	55
6.2.4	Propriedades da Álgebra Matricial	57
6.3	DETERMINANTE	60
6.3.1	Determinante de ordem 1	60
6.3.2	Determinante de ordem 2	60
6.3.3	Determinante de ordem 3	61
6.3.4	Determinante de ordem $n \geq 4$	61
6.3.5	Teorema de Laplace	61
6.3.6	Escalonamento	64
6.3.7	Propriedades do Determinantes	65
6.4	POLINÔMIOS	71
6.4.1	Polinômios Complexos	71
6.4.2	Operações	72
6.4.3	Grau do Polinômio	77
6.4.4	Divisão de Polinômios	79
6.4.5	Equações Algébricas	89
7	APÊNDICE B	93

1 INTRODUÇÃO

A utilidade prática da disciplina de matemática é uma dúvida que frequentemente paira na mente dos estudantes do Ensino Médio. Para muitos a mesma é simplesmente uma matéria que envolve cálculos e que não possui nenhuma aplicabilidade no cotidiano. Sendo assim, acredita-se que cabe ao professor pesquisar quais são as melhores maneiras de ensinar matemática de modo que o aluno consiga aprender a parte teórica, mas principalmente, desenvolva a capacidade de relacionar o que foi estudado com os problemas reais presentes em outras áreas da ciência, como na economia, na engenharia, na biologia, e até mesmo nas relações sociais.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000), a matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que auxilia na estrutura do pensamento e o raciocínio dedutivo, como também desempenha um papel instrumental, sendo uma importante ferramenta para a vida cotidiana e para as tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Seguindo ainda o PCN, o aluno do Ensino Médio, deve ver a matemática como um conjunto de técnicas e estratégias a serem aplicadas em outras áreas do conhecimento, observando-a como uma ciência, a qual possui características específicas. Eles devem perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas que servirão para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Com o propósito de estimular o conhecimento e aprendizado, a partir das orientações indicadas no PCN conjuntamente com a ideia de uma matemática mais próxima à realidade do aluno, propõem-se utilizar de um problema atual, relacionado às mídias sociais, como uma estratégia didática para o ensino da disciplina de matemática para o Ensino Médio.

Segundo (ADAMI, 2011), com o advento da Internet e a sua popularização, a partir da década de 90, as pessoas começaram a se comunicar com mais facilidade, principalmente através das redes sociais. Pode-se definir Redes Sociais como sendo uma estrutura que inter-relaciona empresas ou pessoas, que estão conectadas pelas mais diversas relações.

Todavia, cabe observar que ao propor e resolver um problema, como método motivador para despertar o interesse e desenvolver o raciocínio lógico dos alunos, segue-se a ideia da metodologia da resolução de problemas (POLYA, 1995). Formalmente, esta é uma metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação (ONUCHIC, 2014). Entretanto, aplica-se, aqui, sem formalismo metodológico, isto é, apenas como uma estratégia que consiste em usar um problema atual para inserir a matemática no cotidiano dos alunos e a partir deste introduzir conteúdos específicos da disciplina.

Neste contexto, espera-se mostrar que a matemática é uma ferramenta útil na solução de problemas reais e não uma ciência composta de definições e fórmulas. A conexão entre a matemática formal abstrata e o problema real é feita utilizando as ligações de amizade de uma fictícia rede social formada pelos próprios alunos e matematicamente modulado por grafos. Além disso, busca-se mostrar um encadeamento entre os conteúdos estudados, ilustrando por meio de exemplos que conteúdos abordados no ensino superior, grafos, necessitam dos conteúdos estudados no Ensino Médio como matrizes, determinantes e polinômios. Dessa forma, o processo de construção do conhecimento torna-se contínuo e a transição do concreto para o abstrato passa a ser uma experiência menos traumática para os estudantes.

Segundo Miguel (2012), o conhecimento matemático não se consolida como um rol de ideias prontas a serem memorizadas e sim como um processo significativo em que devem ser conduzidos os alunos à exploração de uma grande variedade de ideias e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos, em que o discente deve incorporar os cenários do mundo real e as experiências para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade.

De forma complementar fez-se uma breve pesquisa bibliográfica entre as dissertações produzidas pelos egressos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), sendo que foram encontrados 174 trabalhos relacionados à resolução de problemas, 40 dissertações sobre grafos, 39 sobre determinantes, 70 sobre matrizes e 37 sobre polinômios. Tal cenário foi um motivo adicional para o desenvolvimento desse trabalho.

Contudo o que foi exposto, este trabalho tem o objetivo geral de conectar o ensino ao cotidiano dos alunos, tornando a aula atrativa e dinâmica. De forma complementar, pretende-se mostrar que é possível aprender e ensinar a Matemática a partir de um problema contextualizado. De maneira específica, propõem-se uma atividade que consiste em criar uma rede social em sala de aula, no qual os alunos por meio de suas ligações de amizades formarão um grafo, sendo assim, serão os parâmetros para a construção do problema matemático. Em seguida formula-se matematicamente dois problemas para obter o polinômio característico associado ao grafo gerado pela atividade inicial. Adicionalmente, elabora-se uma oficina como uma síntese desse trabalho.

A proposta didática apresentada é estruturada propondo, inicialmente, dividir a turma em grupos, sendo que cada grupo organizará a sua própria rede social. Após formada a estrutura da rede social, será construído um grafo. A partir desse momento, introduz-se o conceito e algumas propriedades básicas sobre a Teoria de Grafos necessários para a sequência das atividades. Em seguida, apresentam-se as definições e propriedades de matrizes, matriz adjacência, determinantes, o cálculo por meio do Teorema de Laplace e por escalonamento resultando no polinômio característico associado ao grafo gerado. Na determinação das raízes do polinômio foi usado o método por radicais e o Ge-

ogebra. Uma introdução aos números complexos poderá ser pesquisado na obra de Silva (2014b). E por fim aplica-se o questionário aos participantes.

O *software* Geogebra, torna-se uma ferramenta didática essencial nos dias atuais, pois o mesmo, estimula o discente a novas descobertas, a criação e a imaginação, propicia a resolução de situações problema, a construção de conceitos matemáticos e a verificação de hipóteses na resolução de problemas, segundo (MUELLER, 2013)

Esse estudo está organizado da seguinte maneira. No capítulo dois é feito um resumo teórico, no qual serão apresentados de maneira resumida os conteúdos necessários para o desenvolvimento da aplicação e, no Apêndice A, será deixado um desenvolvimento teórico, em que são expostos as definições, os lemas, as propriedades e as demonstrações de alguns resultados. Com isso, acredita-se que esse material possa contribuir como uma referência para os professores do Ensino Médio e como um material de apoio para suas aulas, tanto na parte teórica quanto um roteiro norteador de uma aplicação do tema.

No capítulo três serão propostos e resolvidos os problemas. O leitor poderá observar todo o procedimento para aplicação do tema, desde a construção do grafo, da matriz adjacência, do cálculo para determinar o polinômio característico, através do processo de escalonamento e pelo Teorema de Laplace, até a determinação das raízes do polinômio característico por radicais e pelo *software* Geogebra.

No quarto capítulo é descrito um breve relato da aplicação da proposta, desenvolvida na forma de uma oficina que foi realizada na 15^a Semana Acadêmica Integrada do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE). A oficina foi composta por duas atividades e finalizada com um questionário contemplando questões avaliativas da aplicação e sugestões. A oficina na íntegra é exposta no Apêndice B. Finalmente, no último capítulo são descritas as conclusões do trabalho.

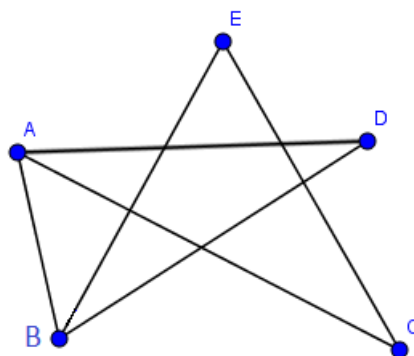
2 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo será apresentado de forma sucinta, os conteúdos necessários para a aplicação do problema através da resolução de um exemplo. No Apêndice A, é realizada uma revisão teórica aprofundada sobre cada conteúdo.

Definição 2.1 *Têm-se que um grafo é um conjunto de pontos, denominados vértices, e segmentos de retas que são as ligações entre vértices consecutivos ou adjacentes, denominados arestas. A ordem do grafo é dada pelo número de vértices que compõem o grafo, e o número de arestas que são incidentes a cada vértice chama-se de grau do vértice.*

Para exemplificar, seja a Figura (2.1).

Figura 2.1 – Grafo G_1 - Exemplo de Grafo de ordem 5



Fonte: Elaborado pelo Autor

Conforme a Figura (2.1), têm-se então que o grafo é de ordem 5, pois o mesmo possui 5 vértices $\{A, B, C, D, E\}$, suas arestas são os segmentos que ligam os vértices (\overline{AB}) , (\overline{AC}) , (\overline{AD}) , (\overline{BD}) , (\overline{BE}) , (\overline{CE}) e os graus de cada aresta são:

- Grau(A) = 3;
- Grau(B) = 3;
- Grau(C) = 2;
- Grau(D) = 2;
- Grau(E) = 2.

Observação *Neste trabalho foi considerado apenas grafos simples não orientados, ou seja, sem laços, sem arestas paralelas e sem orientação. Caso contrário as arestas (\overline{AB}) e (\overline{BA}) teriam significado distinto.*

No que segue será definida uma matriz de ordem $m \times n$.

Definição 2.2 *Chama-se de matriz uma tabela de números dispostos em m linha e n colunas, sendo que se $m = n$, chama-se essa matriz de matriz quadrada de ordem m , denotada por*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde o termo a_{ij} está na linha i e coluna j , com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Pode-se construir uma matriz adjacência associada ao grafo da seguinte forma: A primeira linha e primeira coluna refere-se ao vértice A . A segunda linha e segunda coluna refere-se ao vértice B e assim sucessivamente. No encontro das linhas i e colunas j atribui-se o número 1 se o vértice i está ligado ao vértice j , caso contrário atribui-se o número 0. Assume-se que um vértice qualquer nunca está ligado com ele próprio.

Da Figura (2.1), obtêm-se uma matriz adjacência de ordem 5, pois o grafo possui 5 vértices. Logo têm-se as seguintes entradas:

- 1) $a_{11} = 0$ - vértice A não é adjacente ao vértice A
- 2) $a_{12} = 1$ - vértice A adjacente ao vértice B
- 3) $a_{13} = 1$ - vértice A adjacente ao vértice C
- 4) $a_{14} = 1$ - vértice A adjacente ao vértice D
- 5) $a_{15} = 0$ - vértice A não é adjacente ao vértice E
- 6) $a_{21} = 1$ - vértice B adjacente ao vértice A
- 7) $a_{22} = 0$ - vértice B não é adjacente ao vértice B
- 8) $a_{23} = 0$ - vértice B não é adjacente ao vértice C
- 9) $a_{24} = 1$ - vértice B adjacente ao vértice D
- 10) $a_{25} = 1$ - vértice B adjacente ao vértice E
- 11) $a_{31} = 1$ - vértice C adjacente ao vértice A
- 12) $a_{32} = 0$ - vértice C não é adjacente ao vértice B
- 13) $a_{33} = 0$ - vértice C não é adjacente ao vértice C

- 14) $a_{34} = 0$ - vértice C não é adjacente ao vértice D
- 15) $a_{35} = 1$ - vértice C adjacente ao vértice E
- 16) $a_{41} = 1$ - vértice D adjacente ao vértice A
- 17) $a_{42} = 1$ - vértice D adjacente ao vértice B
- 18) $a_{43} = 0$ - vértice D não é adjacente ao vértice C
- 19) $a_{44} = 0$ - vértice D não é adjacente ao vértice D
- 20) $a_{45} = 0$ - vértice D não é adjacente ao vértice E
- 21) $a_{51} = 0$ - vértice E não é adjacente ao vértice A
- 22) $a_{52} = 1$ - vértice E adjacente ao vértice B
- 23) $a_{53} = 1$ - vértice E adjacente ao vértice C
- 24) $a_{54} = 0$ - vértice E não é adjacente ao vértice D
- 25) $a_{55} = 0$ - vértice E não é adjacente ao vértice E

Logo a matriz adjacência do Grafo G_1 é:

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No decorrer do trabalho, deseja-se determinar as raízes do polinômio característico da matriz adjacência, que por definição é dado por $P_{G_1}(\lambda) = \det(\lambda I - A(G_1))$. Então, deve-se calcular:

$$P_{G_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Para calcular este determinante, pode-se usar o escalonamento ou o Teorema de Laplace, procedimentos estes que serão sucintamente descritos a seguir.

a) Escalonamento:

O escalonamento é um processo que consiste em fazer operações elementares sobre linhas de uma matriz a fim de transformá-la numa matriz reduzida à forma escada, a qual é da forma:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

onde o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal $DetM = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{mm}$.

Como segue no nosso exemplo da Figura (2.1), têm-se,

$$P_{G_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda} & \frac{-\lambda-1}{\lambda} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3-2\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{-1}{\lambda-1} & \frac{-\lambda^2}{\lambda^2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^4-4\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda^3-2\lambda} & \frac{-\lambda-2}{\lambda^2-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^5-6\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda}{\lambda^4-4\lambda^2-2\lambda+1} \end{vmatrix}$$

resultando no polinômio característico

$$P_{G_1}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda. \quad (2.1)$$

No capítulo 3 é apresentado detalhadamente, o desenvolvimento do escalonamento de duas matrizes adjacência, onde o leitor poderá compreender melhor o processo.

b) Teorema de Laplace:

O teorema de Laplace consiste em escolher uma linha ou uma coluna da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. Por exemplo, escolhendo uma linha i , têm-se

$$\det(M) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + a_{i3}\Delta_{i3} + \cdots + a_{im}\Delta_{im}$$

onde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ e A_{ij} é a matriz obtida retirando-se a linha i e a coluna j da matriz M .

De preferência escolhe-se a linha ou coluna com o maior número de zeros, para efeito de redução de cálculos.

Neste procedimento obtém-se novamente o polinômio característico (2.1).

Novamente, no capítulo 3 são apresentados detalhadamente o cálculo do determinante por meio do Teorema de Laplace de duas matrizes adjacência, onde o leitor poderá compreender melhor o processo.

Pode-se perguntar qual dos dois métodos para os cálculos do determinante é mais viável ou mais vantajoso.

Segundo Maria (2017), o método de Laplace, para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem m , tem complexidade computacional igual a $m!$. Isso se deve ao fato que para calcularmos o determinante de ordem m , tem-se que calcular m determinantes de ordem $m - 1$, e para calcular o determinante de ordem $m - 1$, têm-se que calcular $m - 1$ determinantes de ordem $m - 2$.

Segundo o mesmo autor, a complexidade computacional para o escalonamento é de m^3 , onde m é a ordem da matriz.

Portanto, conclui-se que para matrizes de ordem $m \leq 5$, o Teorema de Laplace é mais eficiente, pois $5! \leq 5^3$. Todavia, para $m \geq 6$ o método do escalonamento torna-se bem mais eficiente, pois $6^3 \geq 6!$.

Para determinar as raízes do polinômio característico pode-se usar um dos três métodos listados a seguir:

i) Algoritmo de Briot-Ruffini:

O Algoritmo de Briot-Ruffini consiste em um método eficiente e prático para a determinação do quociente $Q(\lambda)$ e do resto $R(\lambda)$ da divisão de um polinômio $P(\lambda)$ por $D(\lambda) = \lambda - \alpha$. Este algoritmo consiste na elaboração de uma tabela, onde pode-se calcular, sucessivamente, os coeficientes do quociente e do resto. Na primeira linha desta tabela, coloca-se a raiz de $D(\lambda)$, que é α , seguido dos coeficientes do dividendo $P(\lambda)$. Na segunda, coloca-se os coeficientes $Q(\lambda)$ e o valor do resto $R(\lambda)$, que são calculados como se mostra a seguir.

Através do aplicativo Geogebra, descobriu-se que $\lambda = -2$ é uma das raízes deste polinômio. Utilizando o Algoritmo de Briot-Ruffini para a Equação (2.1), têm-se:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

O algoritmo de Briot-Ruffini é bem simples de se executar:

Conforme Gomes (2013), explica o mecanismo do algoritmo como:

1. Na primeira linha, à direita, colocam-se os coeficientes dos termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente. À esquerda, ficará a raiz do binômio divisor;
2. Baixa-se o primeiro coeficiente do dividendo; multiplica-se esse coeficiente pela raiz e soma-se o produto ao segundo coeficiente do dividendo, o resultado é escrito abaixo deste;

3. O resultado obtido é multiplicado pela raiz. Em seguida, adiciona-se o produto ao terceiro coeficiente;
4. Repete-se esse processo até o último coeficiente.

Agora têm-se $P'(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$, cujas raízes podem ser calculadas usando o Método de Ferrari, ou, se caso desejar, continuar usando o Algoritmo e ir reduzindo o grau de $P'(\lambda)$ até que seja conveniente.

v) Método Algébrico:

Esse método consiste em determinar as raízes de um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ de grau $\partial = n$ através de radicais, sendo que só é possível a determinação das raízes de polinômios de $\partial \leq 4$.

Para determinar a raiz de um polinômio de $\partial = 1$ usa-se o processo algébrico simples, que consta de isolar a incógnita, isto é, se $P(x) = ax + b$, temos que $x = -\frac{b}{a}$, e para determinar as raízes de um polinômio de $\partial = 2$ usa-se a fórmula resolutive da equação quadrática, a qual satisfaz $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

No caso do polinômio $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, temos que após alguns processos algébricos, que poderão ser consultados em Matos (2014), chega-se as seguintes fórmulas:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

sendo que,

$$x = y - \frac{a}{3}$$

Agora para $P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, têm-se a solução dada por Lodovico Ferrari, consta que:

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \frac{p + \alpha}{2} + \frac{q \cdot \sqrt{\alpha}}{2 \cdot \alpha} = 0$$

ou

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \frac{p + \alpha}{2} - \frac{q \cdot \sqrt{\alpha}}{2 \cdot \alpha} = 0$$

onde,

$$x = y - \frac{b}{4a}$$

Os processos algébricos para se chegar nas equações de Ferrari estão descritos no Apêndice A. No capítulo 3 são apresentadas detalhadamente, a obtenção das raízes de dois polinômios de grau 4 através desse mesmo método.

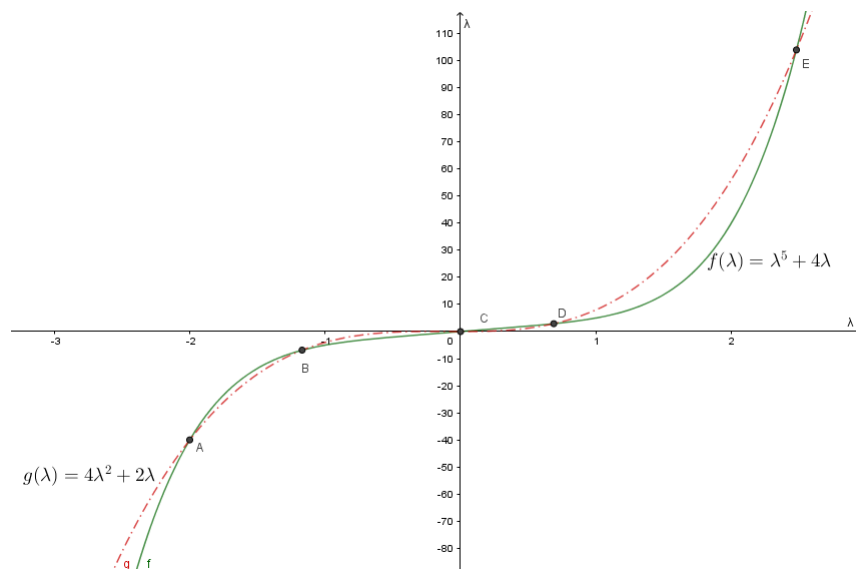
iii) Software Geogebra

O último processo usado neste trabalho para determinar as raízes do polinômio característico foi por meio do *Software Geogebra*, um aplicativo de matemática que combina conceitos de geometria e álgebra.

Para determinar as raízes do polinômio (2.1), separa-se o polinômio característico $P_{G_1}(\lambda)$ em duas funções, $f(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda$ e $g(\lambda) = 6\lambda^3 + 2\lambda^2$ e constrói-se o gráfico das mesmas no Geogebra, gerando duas curvas com pontos de intersecção, sendo esses pontos as raízes de $P_{G_1}(\lambda) = 0$.

Têm-se então a Figura (2.2) para $f(\lambda) = g(\lambda)$.

Figura 2.2 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Mais detalhes sobre a obtenção das raízes do polinômio no Geogebra, serão explicados no capítulo 3.

Após aplicar esses métodos para calcular as raízes do polinômio característico $P_{G_1}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda$, têm-se as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1,17$$

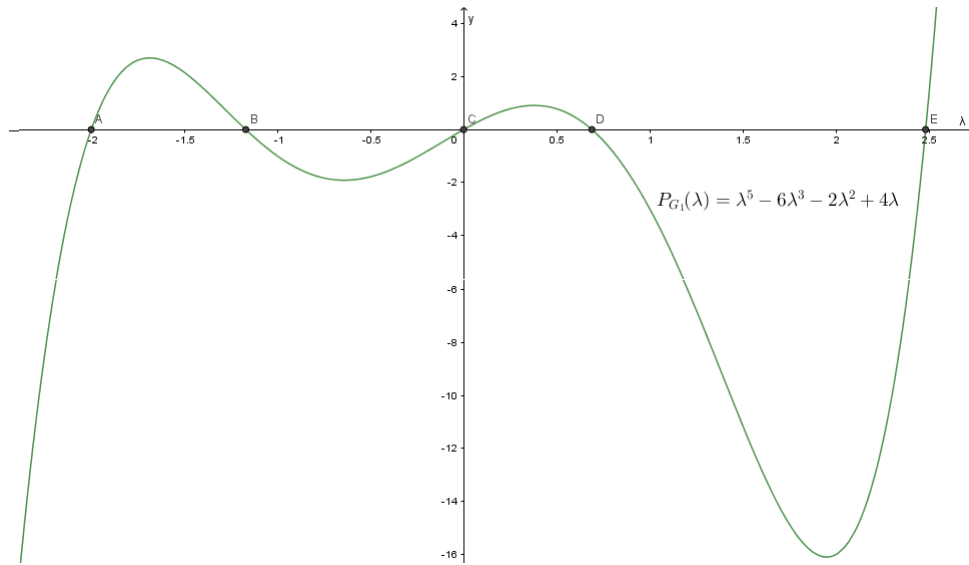
$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 0,69$$

$$\lambda_5 = 2,48.$$

Pode-se também utilizar o *Software Geogebra*, e determinar as raízes direto do $P_{G_1}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda$, conforme a Figura 2.3.

Figura 2.3 – Visualização gráfica do polinômio $P_{G_1}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda$



Fonte: Elaborada pelo Autor

3 PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste capítulo serão apresentados e resolvidos dois problemas modelados pela teoria de grafos e estão relacionados às ligações de amizade de uma rede social. Como problemas introdutórios serão sugeridos um grafo com quatro vértices e outro com cinco vértices.

A escolha de grafos com quatro e cinco vértices tem o objetivo de trabalhar com matrizes e determinantes de ordem maiores que três, mostrando a necessidade do Método de Laplace e do escalonamento para calcular o determinante. As raízes dos polinômios de grau quatro e cinco, foram obtidas por radicais e pela técnica de Briot-Ruffini. O *software* do Geogebra foi usado para validar os resultados anteriores e incentivar o uso das tecnologias.

Para o desenvolvimento da proposta será necessário uma explicação teórica preliminar sobre o conteúdo de grafos, visto que o assunto é inédito para maioria dos envolvidos na atividade. Em seguida para um entendimento mais amplo, sugere-se uma revisão dos conteúdos de matrizes, determinantes e polinômios, a qual é apresentada no Apêndice A.

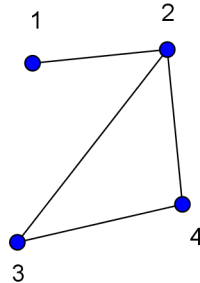
Para o desenvolvimento de ambas as atividades sugerem-se as seguintes etapas:

- 1ª. Criar o grafo G ;
- 2ª. Construir a matriz adjacência $A(G)$;
- 3ª. Obter a matriz $(\lambda I - A(G))$
- 4ª. Calcular o $\det(\lambda I - A(G)) = P(\lambda)$, pelos seguintes métodos:
 - a) Escalonamento;
 - b) Método de Laplace.
- 5ª. Resolver $P(\lambda) = 0$, utilizando:
 - a) Algoritmo de Briot-Ruffini;
 - b) Método Algébrico;
 - c) *Software* Geogebra.

3.1 PROBLEMA I

Para formar um grafo com quatro vértices, divide-se a turma em grupos de quatro alunos, sendo imposto que cada um dos alunos deverá ter pelo menos um amigo. AS possíveis ligações de amizades são criadas livremente o que dará a origem a diferentes grafos. A figura *3.1) ilustra um desses possíveis grafos.

Figura 3.1 – *Grafo* G_2 Grafo ilustrativo de um dos possíveis casos de ligações entre os quatro vértices



Fonte: (SANTOS, 2010), pág 16

A partir da Figura (3.1) resulta a matriz adjacência abaixo:

$$A(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico associado a esta matriz, por definição é

$$P_{G_3}(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)), \quad (3.1)$$

onde I é a matriz identidade. O cálculo de $P_{G_3}(\lambda) = 0$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ resultará nas raízes do polinômio..

Cálculo do Determinante

Este processo exige o cálculo do determinante que será resolvido inicialmente, pelo escalonamento e, em seguida, pelo Teorema de Laplace.

a) Método do Escalonamento

Sejam as matrizes:

$$A(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da Equação (3.1) que

$$P_{G_3}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

A seguir será usado o procedimento enunciado na seção (6.3.6), Anexo A, em operações sobre linhas. Como o $\det A(G_3) \neq 0$, tem-se que $\det(\lambda I - A(G_3)) = 0$, logo $\lambda \neq 0$. Então:

1. Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{\lambda}$, tem-se:

$$P_{G_3}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

2. $L_2 = L_2 + L_1$;
 $L_4 = L_4 - L_3$

$$P_{G_3}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

3. Trocando as linhas $L_2 \rightleftharpoons L_3$;

$$P_{G_3}(\lambda) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

4. Combinando as linhas 2 e 3, segue:

$$L_3 = L_3 + \left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)L_2$$

$$P_{G_3}(\lambda) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2 & \frac{-\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

5. Supondo que $\frac{\lambda^2-2}{\lambda} \neq 0$, então:

$$L_3 = \left(\frac{1}{\lambda^2-2}\right)L_3$$

$$P_{G_3}(\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 2) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-\lambda^2-\lambda+1}{(\lambda)(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

6. $L_4 = L_4 + (1 + \lambda)L_3$, tem-se:

$$P_{G_3}(\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 2) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-\lambda^2-\lambda+1}{(\lambda)(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda+1)(\lambda^3-\lambda^2-3\lambda+1)}{(\lambda)(\lambda^2-2)} \end{vmatrix}$$

7. Calculando o determinante, então:

$$P_{G_3}(\lambda) = (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2) \cdot [1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot \frac{(\lambda+1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1)}{(\lambda)(\lambda^2 - 2)}]$$

$$P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 \quad (3.2)$$

Que é o polinômio característico procurado.

Alternativamente pode-se determinar o polinômio Característico usando o Teorema de Laplace, como segue a seguir

b) Método de Laplace

Seja a seguinte matriz:

$$P_{G_3}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Escolhendo a primeira linha da matriz, tem-se que o seu determinante é dado por:

$$P_{G_3}(\lambda) = (\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

então,

$$P_{G_3}(\lambda) = (\lambda) \cdot (-1)^2 \cdot (\lambda^3 - 3\lambda + 2) + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot (\lambda^2 - 1)$$

$$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Conforme a Equação (3.2) é o polinômio característico.

Determinando as Raízes do Polinômio Característico

Nesta parte serão determinadas as raízes do polinômio característico por meio de radicais e com o auxílio do *software* Geogebra.

a) Cálculo das raízes através de radicais

Para se determinar as raízes o polinômio característico $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$, será utilizada a solução de Ferrari para a quártica, que se encontra no Anexo A (6.4.5).

Seja,

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1, \quad (3.3)$$

assim, $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$, $d = -2$ e $e = 1$,

Transformando a Equação (3.3) para a forma reduzida,

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

com

$$\begin{cases} p = -\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a} \\ r = -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a} \end{cases}$$

sendo, $p = -4$, $q = -2$, e $r = 1$, logo a forma reduzida resultante é,

$$y^4 - 4y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (3.4)$$

Agora, transformando a Equação (3.4) em uma equação cúbica, segue que:

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

então,

$$\alpha^3 - 8\alpha^2 + 12\alpha - 4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente da equação do terceiro grau para radicais que se encontra em Matos (2014) na equação

$$\alpha^3 - 8\alpha^2 + 12\alpha - 4 = 0, \quad (3.5)$$

em que $\alpha = k - \frac{a_1}{3}$, é uma solução da Equação (3.5), logo, para $a_1 = -8$, tem-se:

$$\alpha = k + \frac{8}{3}. \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação (3.6) na Equação (3.5), obtém-se:

$$\left(k + \frac{8}{3}\right)^3 - 8\left(k + \frac{8}{3}\right)^2 + 12\left(k + \frac{8}{3}\right) - 4 = 0 \quad (3.7)$$

desenvolvendo a Equação (3.7) fica-se com a seguinte equação:

$$k^3 - \frac{28}{3}k - \frac{268}{27} = 0 \quad (3.8)$$

sendo que $p' = -\frac{28}{3}$ e $q' = -\frac{268}{27}$.

Segue que a solução da Equação (3.8) é dada por $k = u + v$, em que,

$$u = \left(-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = \left(-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Substituindo p' e q' em u e v , então:

$$u = \left(\frac{134}{27} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{37}{3}}i\right)^{\frac{1}{3}}$$

e

$$v = \left(\frac{134}{27} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{37}{3}} i \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sabe-se que todo número complexo $z = a' + b'i$ pode ser escrito na forma trigonométrica, isto é,

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad (3.9)$$

onde $\rho = \sqrt{a'^2 + b'^2}$,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a'}{\rho} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b'}{\rho} \end{cases}$$

e

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b'}{a'} \right).$$

Pela Fórmula de Moivre ¹ (3.9), logo,

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)^e + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)^e \right), e = 0, \dots, n$$

No caso de $u = \left(\frac{134}{27} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{37}{3}} i \right)^{\frac{1}{3}}$, tem-se que $a' = \frac{134}{27}$ e $b' = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{37}{3}}$, logo $\rho = \frac{56\sqrt{7}}{27}$ e $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\frac{148}{27}}}{\frac{134}{27}} \right) \approx 25,25^\circ$.

Substituindo na fórmula de Moivre para $e = 0$,

$$u = \left(\frac{56\sqrt{7}}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{25,25^\circ}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{25,25^\circ}{3} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} u &= 1,7638 \cdot (0,9892 + 0,1463 \cdot i) \Rightarrow \\ u &= 1,744 + 0,258 \cdot i \end{aligned}$$

De forma análoga para v ,

¹Abrahan de Moivre, Matemático francês, famoso por ter relacionado os números complexos com a trigonometria, também teve trabalhos na área de distribuição normal e na teoria das probabilidades, como também foi o primeiro a usar as bases científicas para o cálculo de seguro de vida. (WIKIPEDIA, 2017a)

$$\begin{aligned}
v &= \left(\frac{134}{27} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{37}{3}} i \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \\
v &= \left(\frac{56\sqrt{7}}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{25,25^\circ}{3} - i \cdot \operatorname{sen} \frac{25,25^\circ}{3} \right) \Rightarrow \\
v &= 1,7638 \cdot (0,9892 - 0,1463 \cdot i) \Rightarrow \\
v &= 1,744 - 0,258 \cdot i
\end{aligned}$$

com o $k = u + v$, tem-se:

$$\begin{aligned}
k &= 1,744 + 0,258 \cdot i + 1,744 - 0,258 \cdot i \Rightarrow \\
k &= 3,498
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo na Equação (3.8)

$$\begin{aligned}
\alpha &= 3,49 + \frac{8}{3} \Rightarrow \\
\alpha &= 6,16
\end{aligned}$$

Nas Equações (6.17) e (6.18), substituindo $\alpha = 6,16$ nas Equações citadas, segue que:

$$\begin{aligned}
y^2 - \sqrt{6,16}y + \frac{(-4)+6,16}{2} + \frac{(-2)\sqrt{6,16}}{2 \cdot 6,16} &= 0 \Rightarrow \\
y^2 - \sqrt{6,16}y + \frac{2,16}{2} - \frac{\sqrt{6,16}}{6,16} &= 0
\end{aligned}$$

Resolvendo pela fórmula resolvente da equação quadrática, encontram-se as seguintes raízes:

$$\begin{cases} y_1 = 0,31 \\ y_2 = 2,17. \end{cases}$$

Refazendo o processo para Equação 6.18, tem-se:

$$\begin{aligned}
y^2 + \sqrt{6,16}y + \frac{(-4)+6,16}{2} - \frac{(-2)\sqrt{6,16}}{2 \cdot 6,16} &= 0 \Rightarrow \\
y^2 + \sqrt{6,16}y + \frac{2,16}{2} + \frac{\sqrt{6,16}}{6,16} &= 0
\end{aligned}$$

Resolvendo pela fórmula resolvente da equação quadrática, encontram-se as seguintes raízes:

$$\begin{cases} y_3 = -1 \\ y_4 = -1,48. \end{cases}$$

como $b = 0$, segue que $\lambda = y$, logo as raízes de $P_{G_3}(\lambda) = 0$ são 4 raízes reais dadas por

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,31 \\ \lambda_2 = 2,17 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = -1,48. \end{cases}$$

b) Determinação das raízes através do Geogebra

Pode-se determinar as raízes do polinômio $P_{G_3}(\lambda)$ através do *software* Geogebra, a partir da intersecção de dois gráficos.

Seja o polinômio $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Então:

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

implica

$$\lambda^4 = 4\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

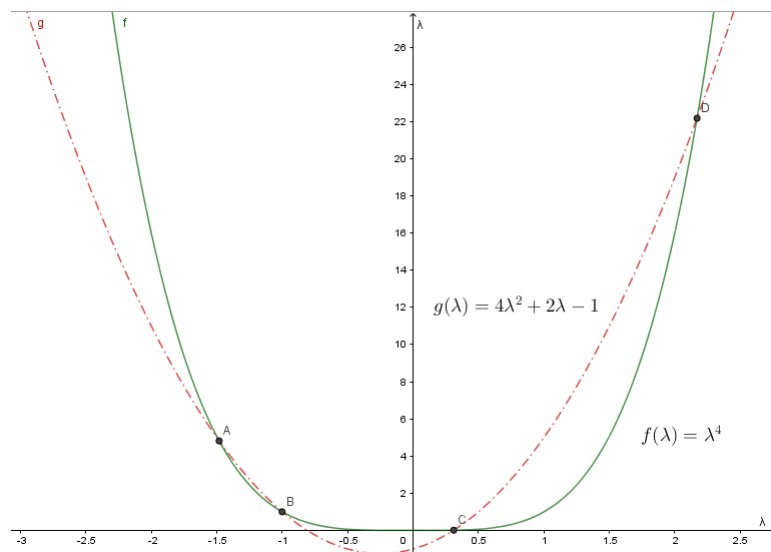
Construindo o gráfico das funções:

$$f(\lambda) = \lambda^4$$

$$g(\lambda) = 4\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

e igualando os polinômios $f(\lambda) = g(\lambda)$, conforme a figura 3.2 tem-se:

Figura 3.2 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Assim os pontos de intersecção dos gráficos da Figura (3.2) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (-1, 48, 4, 81) \\ B = (-1, 1) \\ C = (0, 31, 0, 01) \\ D = (2, 17, 22, 18) \end{array} \right.$$

Logo, segue que as raízes de $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$, são:

$$\lambda' = -1,48$$

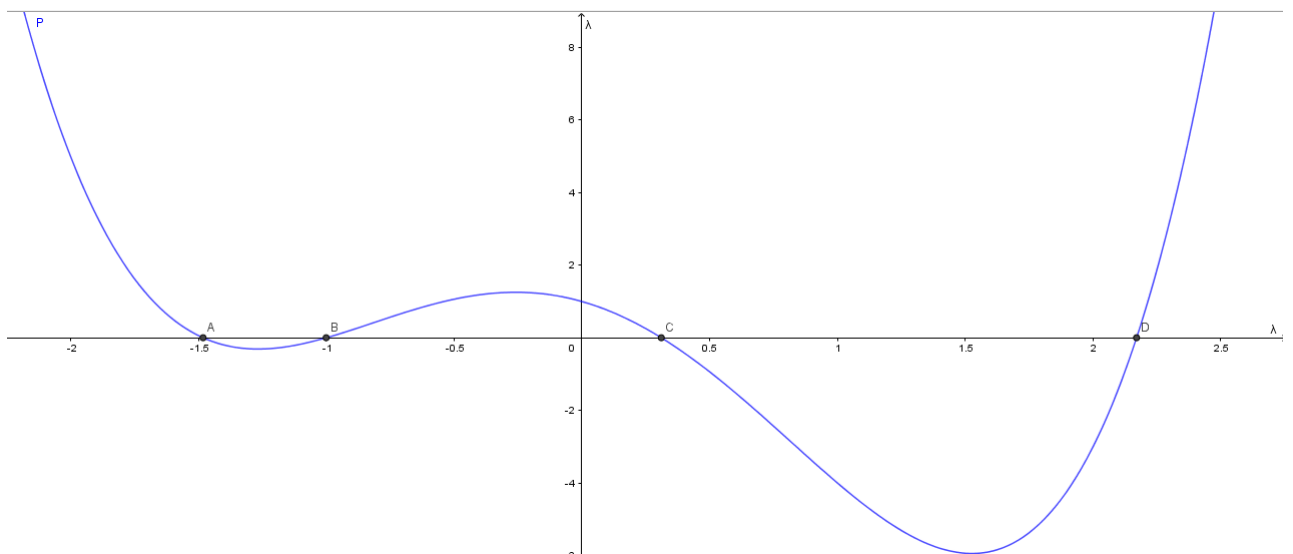
$$\lambda'' = -1$$

$$\lambda''' = 0,31$$

$$\lambda'''' = 2,17$$

Pode-se determinar as raízes do polinômio $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$, através do seguinte gráfico, que descrito na Figura (3.3)

Figura 3.3 – Visualização gráfica do Polinômio $P_{G_3}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$



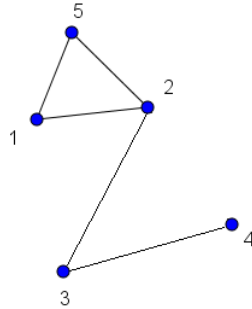
Fonte: Elaborada pelo Autor

3.2 PROBLEMA II

No segundo problema propõem-se dividir a turma em grupos compostos por 5 alunos. Para que seja possível formar um grafo com cinco vértices, cada um dos alunos deve estar relacionado a uma ou mais ligações de amizades.

Novamente, cada grupo estará livre para montar a sua rede de amizade como bem desejar, conseqüentemente formar-se-ão grafos diferentes. Para exemplificar um dos possíveis casos, usa-se o grafo do exemplo (3.4) e ilustrado pela Figura (3.4).

Figura 3.4 – Grafo G_4 - Grafo ilustrativo de um dos casos de ligações entre 5 vértices.



Fonte: Elaborada pelo Autor

A partir do grafo representado pela Figura (3.4), determina-se a matriz adjacência.

$$B(G_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determina-se o polinômio característico $P_{G_4}(\lambda) = \det(\lambda I - B(G_4))$, onde I é a matriz identidade. As raízes são calculadas a partir da equação $P_{G_4}(\lambda) = 0$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cálculo do Determinante

De maneira similar feita para o Problema I, o cálculo do determinante será resolvido primeiramente pelo escalonamento e depois pelo Teorema de Laplace.

a) Escalonamento

Sejam as matrizes:

$$B(G_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da Equação (3.1) que:

$$P_{G_4}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Novamente usa-se o procedimento enunciado na seção (6.3.6), Anexo A, em operações sobre linhas. Como o $\det B(G_4) \neq 0$, tem-se que $\det(\lambda I - B(G_4)) = 0$, logo $\lambda \neq 0$. Então:

1. Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{\lambda}$, tem-se:

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

2. $L_2 = L_2 + L_1$;

$$L_4 = L_5 + L_1$$

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & -1 & 0 & \frac{-\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda-1}{\lambda} & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

3. Trocando as linhas $L_2 \rightleftharpoons L_3$;

$$P_{G_4}(\lambda) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & -1 & 0 & \frac{-\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda-1}{\lambda} & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

4. Combinando as linhas 2 e 3, 2 e 5 segue que:

$$L_3 = L_3 + \left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)L_2$$

$$L_5 = L_5 + \left(\frac{-\lambda-1}{\lambda}\right)L_2$$

$$P_{G_4}(\lambda) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2 & \frac{-\lambda^2+1}{\lambda} & \frac{-\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

5. Trocando as linhas $L_3 \rightleftharpoons L_4$;

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2 & \frac{-\lambda^2+1}{\lambda} & \frac{-\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

6. $L_4 = L_4 + (\lambda^2 - 2)L_3$ e

$$L_5 = L_5 + (-\lambda - 1)L_3$$

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda} & \frac{-\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

7. Multiplicando a linha 4 por $\frac{\lambda}{\lambda^4-3\lambda^2+1}$, pois $\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 \neq 0$, tem-se:

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \cdot \left(\frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda}\right) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\lambda-1}{\lambda^4-3\lambda^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

8. Agora combinando a linha 4 com a 5, logo:

$$L_5 = L_5 + \left(\frac{\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1}{\lambda}\right)L_4$$

Obtém-se:

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \cdot \left(\frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda}\right) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\lambda-1}{\lambda^4-3\lambda^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^6-5\lambda^4-2\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda}{\lambda(\lambda^4-3\lambda^2+1)} \end{vmatrix}$$

9. Calculando o determinante, segue:

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda \cdot \left(\frac{\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1}{\lambda} \right) \cdot \left[1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot \frac{\lambda^6 - 5\lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda}{\lambda(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)} \right]$$

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 \quad (3.10)$$

Que é o polinômio característico procurado.

b) Método de Laplace

Seja a seguinte matriz:

$$P_{G_4}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Escolhendo a quarta coluna da matriz, tem-se que pelo Teorema de Laplace o seu determinante é dado por:

$$P_{G_4}(\lambda) = (\lambda) \cdot (-1)^{3+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{34}} + (\lambda) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{44}}$$

Calculando agora o determinante de Δ_{34} e Δ_{44} , tem-se:

Para o $\det(\Delta_{34})$, escolhe-se a 3ª linha, logo:

$$\det(\Delta_{34}) = (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

por Sarrus, então:

$$\text{Det}(\Delta_{34}) = (-1) \cdot (\lambda^3 - 3\lambda - 2)$$

$$\text{Det}(\Delta_{34}) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Para $\det(\Delta_{44})$, escolhe-se a linha 3.

$$\det(\Delta_{44}) = (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

ainda conforme Sarrus:

$$Det(\Delta_{44}) = 1 \cdot (-\lambda^2 + 1 + \lambda \cdot (\lambda^3 - 3\lambda - 2))$$

$$P_{G_4}(\lambda) = 1 \cdot (\lambda^3 + 3\lambda + 2) + [(-\lambda^2 + 1) + \lambda \cdot (\lambda^3 - 3\lambda - 2)]$$

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 \quad (3.11)$$

Onde a Equação (3.11) é o polinômio característico.

Determinando as Raízes do Polinômio Característico

Nesta parte serão determinadas as raízes do polinômio característico por meio de radicais e com o auxílio do *Software* Geogebra.

a) Cálculo das raízes através de radicais

Para determinar as raízes o polinômio característico $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$, será utilizado primeiramente o dispositivo prático de Briot-Ruffini, para diminuirmos o grau do polinômio, e assim usar a solução de Ferrari para a quártica que se encontra no Anexo A:

As possíveis raízes inteiras do polinômio $P_{G_4}(\lambda) = 0$ são:

$$\lambda = \{\pm 1, \pm 2\}$$

Testando em $P_{G_4}(\lambda) = 0$ o valor de $\lambda = -1$, tem-se:

$$P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 \Rightarrow$$

$$P_{G_4}(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 2 \Rightarrow$$

$$P_{G_4}(-1) = 0$$

Logo, segue que $\lambda' = -1$ é uma raiz de $P_{G_4}(\lambda) = 0$.

Usando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} -1 & 1 & 0 & -5 & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Resulta no seguinte polinômio;

$$P'_{G_4}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Agora, usando a solução de Ferrari:

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \quad (3.12)$$

onde, $a = 1$, $b = -1$, $c = -4$, $d = 2$ e $e = 2$.

Transformando para a forma reduzida a Equação (3.12),

$$y^4 + p \cdot y^2 + q \cdot y + r = 0,$$

com

$$\begin{cases} p = -\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a} \\ r = -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a} \end{cases}$$

sendo, $p = -\frac{35}{8}$, $q = -\frac{1}{8}$, e $r = \frac{573}{256}$, logo a forma reduzida resultante é

$$y^4 - \frac{35}{8}y^2 - \frac{1}{8}y + \frac{573}{256} \quad (3.13)$$

Agora, transformando a Equação (3.13) em uma equação cúbica, segue que:

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

então,

$$\alpha^3 - \frac{35}{4}\alpha^2 + \frac{163}{16}\alpha - \frac{1}{64} = 0 \quad (3.14)$$

Usando a fórmula resolvente da equação do terceiro grau para radicais que se encontra em Matos (2014) na Equação (3.14) e que $\alpha = k - \frac{a_1}{3}$, sendo $a_1 = -\frac{35}{4}$, é uma solução da 3.14, logo,

$$\alpha = k + \frac{35}{12}. \quad (3.15)$$

Substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.14):

$$\left(k + \frac{35}{12}\right)^3 - \frac{35}{4} \left(k + \frac{35}{12}\right)^2 + \frac{163}{16} \left(k + \frac{35}{12}\right) - \frac{1}{64} = 0 \quad (3.16)$$

desenvolvendo a Equação (3.16) fica-se com a seguinte equação:

$$k^3 - \frac{46}{3}k - \frac{538}{27} \quad (3.17)$$

sendo que $p' = -\frac{46}{3}$ e $q' = -\frac{538}{27}$

Segue, então, que a solução da Equação (3.17) é dada por $k = u + v$, onde,

$$u = \left(-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = \left(-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Substituindo p' e q' em u e v , tem-se:

$$u = \left(\frac{538}{27} + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{37}{3}}i\right)^{\frac{1}{3}}$$

e

$$v = \left(\frac{538}{27} - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{37}{3}}i\right)^{\frac{1}{3}}$$

Sabe-se que todo número complexo $z = a' + b'i$ pode ser escrito na forma trigonométrica, isto é, $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, onde $\rho = \sqrt{a'^2 + b'^2}$,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a'}{\rho} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b'}{\rho} \end{cases}$$

e

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b'}{a'}\right)$$

Pela fórmula de Moivre (3.9), tem-se,

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)^e + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)^e \right), e = 0, \dots, n.$$

No caso de $u = \left(\frac{538}{27} + \frac{5}{3} \sqrt{\frac{37}{3}} i \right)^{\frac{1}{3}}$, tem-se que $a' = \frac{538}{27}$ e $b' = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{37}{3}}$, logo

$$\rho = \frac{46\sqrt{46}}{729} \text{ e } \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{5}{3} \sqrt{\frac{37}{3}}}{\frac{269}{27}} \right) \approx 30,4338^\circ.$$

Agora usando o fórmula de Moivre para $e = 0$

$$u = \left(\frac{46\sqrt{46}}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{30,4338^\circ}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{30,4338^\circ}{3} \right)$$

Assim,

$$u = 2,261 \cdot (0,984 + 0,176 \cdot i) \Rightarrow$$

$$u = 2,224 + 0,397 \cdot i$$

De forma análoga para v ,

$$v = \left(\frac{269}{27} - \frac{5}{3} \sqrt{\frac{37}{3}} i \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$v = \left(\frac{46\sqrt{46}}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{30,4338^\circ}{3} - i \cdot \operatorname{sen} \frac{30,4338^\circ}{3} \right) \Rightarrow$$

$$v = 2,261 \cdot (0,984 - 0,176 \cdot i) \Rightarrow$$

$$v = 2,224 - 0,397 \cdot i$$

com $k = u + v$, segue que:

$$k = 2,224 + 0,397 \cdot i + 2,224 - 0,397 \cdot i \Rightarrow$$

$$k = 4,45$$

então tem-se que:

$$\alpha = 4,45 + \frac{35}{12} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{221}{30}$$

Nas Equações (6.17) e (6.18), substituindo $\alpha = \frac{221}{30}$ nas equações anteriores:

$$y^2 - \sqrt{\frac{221}{30}} y + \frac{(-\frac{35}{8}) + \frac{221}{30}}{2} + \frac{(-\frac{1}{8}) \sqrt{\frac{221}{30}}}{2 \cdot \frac{221}{30}} = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 - \sqrt{\frac{221}{30}} y + \frac{359}{24} - \frac{15\sqrt{\frac{221}{30}}}{1768} = 0$$

Resolvendo pela fórmula resolvente de equação quadrática, encontram-se as seguintes raízes:

$$\begin{cases} y_1 = 0,75 \\ y_2 = 1,96. \end{cases}$$

Refazendo o processo para a Equação (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 + \sqrt{\frac{221}{30}}y + \frac{(-\frac{35}{8}) + \frac{221}{30}}{2} - \frac{(-\frac{1}{8})\sqrt{\frac{221}{30}}}{2 \cdot \frac{221}{30}} &= 0 \Rightarrow \\ y^2 + \sqrt{\frac{221}{30}}y + \frac{359}{24} + \frac{15\sqrt{\frac{221}{30}}}{1768} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo pela fórmula resolvente da equação quadrática, encontram-se as seguintes raízes:

$$\begin{cases} y_3 = -1,93 \\ y_4 = -0,79. \end{cases}$$

como $a = 1$ e $b = -1$, segue que $\lambda = y + \frac{1}{4}$, logo as raízes de $P_{G_4}(\lambda) = 0$ são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2,21 \\ \lambda_3 = -1,68 \\ \lambda_4 = -0,54 \\ \lambda_5 = -1. \end{cases}$$

b) Determinação das raízes por meio do Geogebra

Neste item, serão determinadas as raízes do polinômio $P_{G_4}(\lambda)$ através do software Geogebra, a partir da intersecção de dois gráficos.

Seja o polinômio $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$. Como se quer $P_{G_4}(\lambda) = 0$, então:

$$\lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

implica

$$\lambda^5 - 5\lambda^3 = 2\lambda^2 - 4\lambda - 2$$

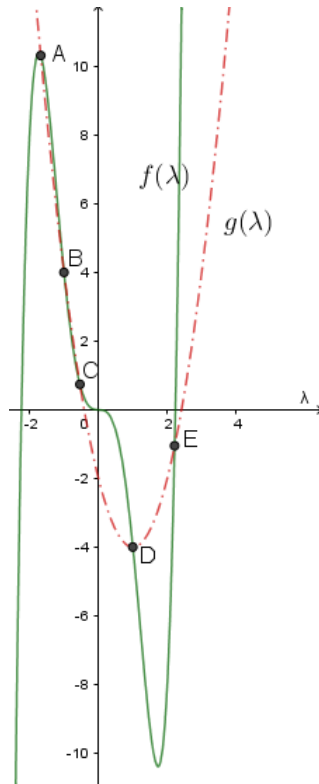
Construindo o gráfico das funções:

$$f(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3$$

$$g(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda - 2$$

e igualando os polinômios $f(\lambda) = g(\lambda)$, conforme a figura 3.5 tem-se:

Figura 3.5 – Visualização gráfica das funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$



Fonte: elaborada pelo Autor

Logo os pontos de interseção dos gráficos da figura 3.5 são:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (-1, 68, 10, 31) \\ B = (-1, 4) \\ C = (-0, 54, 0, 74) \\ D = (1, -4) \\ E = (2, 21, -1, 05) \end{array} \right.$$

Assim, segue-se que as raízes de $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$, são:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2, 21$$

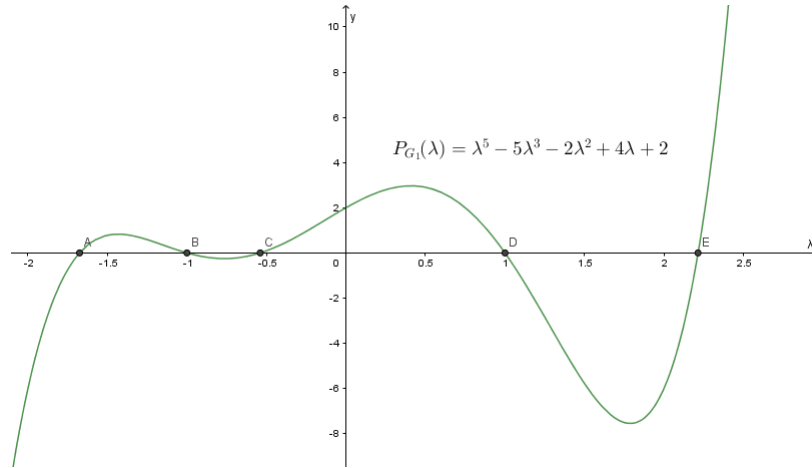
$$\lambda_3 = -1, 68$$

$$\lambda_4 = -0, 54$$

$$\lambda_5 = -1.$$

Pode-se determinar as raízes do polinômio $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$, através do seguinte gráfico, que descrito na Figura (3.6)

Figura 3.6 – Visualização gráfica do Polinômio $P_{G_4}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$



Fonte: Elaborada pelo Autor

4 APLICAÇÃO

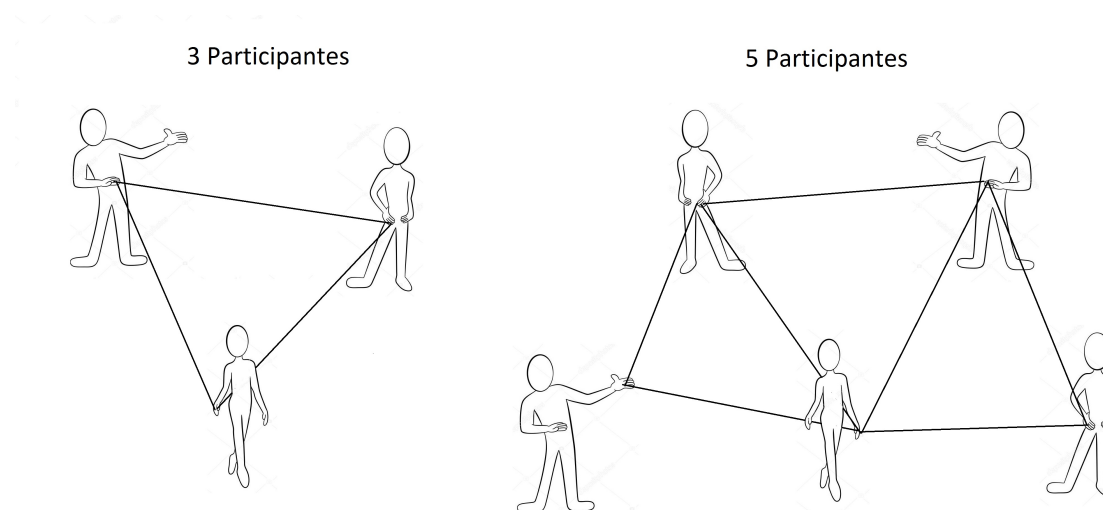
Na 15ª Semana Acadêmica Integrada do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), foi desenvolvida a oficina intitulada "Atividades lúdicas para o ensino de matemática - grafos". Tal oficina contou com a participação do autor, a coordenação das Professoras Dra. Lidiane Buligon e Dra. Luciane Tonet e colaboração de alguns alunos da graduação e bolsistas dos projetos Programa de Licenciatura (Prolicen) e Programa de Educação Tutorial (PET).

A oficina foi apresentada pelo autor com o auxílio dos estudantes. Inicialmente fez-se a seguinte pergunta: "Qual é a ligação entre as redes sociais e a matemática?". A ideia de tal questionamento é trazer a aula para o cotidiano dos alunos do Ensino Médio. Além disso, desenvolver a habilidade de relacionar e aplicar a matemática na resolução de problemas.

Após a introdução do assunto, foram propostas duas atividades para os participantes, sendo a primeira de criar uma rede de amizades com três integrantes e a segunda com cinco integrantes. A proposta é que cada grupo composto pelos alunos formariam uma fictícia rede social, na qual foi imposto que cada aluno (vértice) deveria ter pelo menos um amigo. Tais ligações seriam representadas por barbantes, significando a amizade entre eles.

A Figura 4.1 é uma ilustração de duas das possíveis ligações de amizades propostas nas atividades.

Figura 4.1 – Relações de amizades formadas pelos participantes



Fonte: Elaborado pelo Autor

A escolha de um grafo com três vértices tem o objetivo de trabalhar com uma

matriz e seu determinante comumente apresentados aos alunos do Ensino Médio. Em contra-partida o grafo de cinco vértice implicará em uma matriz de ordem maior, a qual exigirá a necessidade de aplicar o método de Laplace ou do Escalonamento para calcular o Determinante.

Feitas as ligações de amizades e ilustradas de forma gráfica, foram introduzidas, por meio de slides, as definições de grafos, matriz adjacência, determinantes e polinômio característico. Adicionalmente, foi feita uma explicação sobre os métodos de Laplace e do Escalonamento, tal revisão foi necessária uma vez que os dezesseis participantes da oficina eram dos mais diferentes semestres do curso de graduação em matemática.

Com a explanação realizada, foi solicitado aos participantes que eles determinassem o grafo gerado, a matriz adjacência e posteriormente fosse calculado o polinômio característico através do Teorema de Laplace, deixando a possibilidade de utilizar o escalonamento. Todos os grupos preferiram utilizar o Teorema de Laplace, sendo que alguns deles usaram a Regra de Sarrus para resolver o determinante de ordem três e nenhum grupo tentou usar o escalonamento.

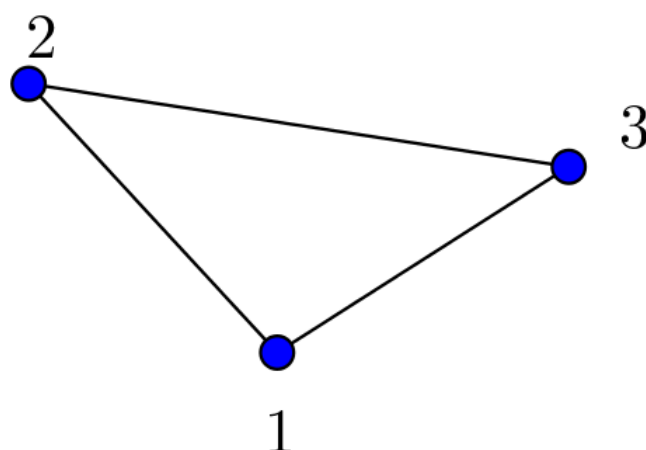
Relata-se que não foram apresentadas dificuldades na montagem dos grafos e na construção das matrizes adjacência para ambas as atividades, no entanto, foi constada uma certa dificuldade em calcular os determinantes, uma vez que os participantes não lembravam do Teorema de Laplace. Para tentar resolver este problema, foi deixado visível o slide contendo o procedimento do cálculo. Além disso, os participantes foram auxiliados pelos ministrantes da oficina na resolução das atividades propostas.

A seguir serão apresentadas as duas atividades, que são resultados de dois grafos gerados por dois grupos escolhidos aleatoriamente.

i) Primeira atividade:

A Figura 4.2 é um dos Grafos de 3 vértices construídos pelos participantes:

Figura 4.2 – Grafo G_4 - Grafos de 3 vértices



Sendo a matriz adjacência:

$$A(G_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

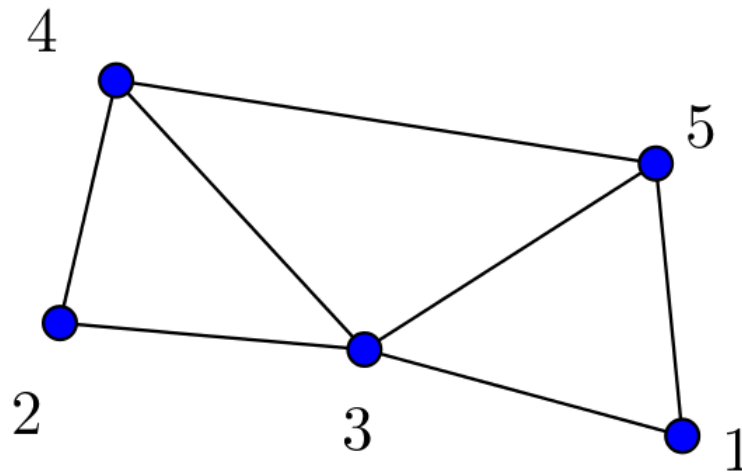
O polinômio característico associado a matriz $A(G_5)$ é dada como segue:

$$P_{G_5}(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 1$$

v) Segunda atividade:

A Figura 4.3 é um dos Grafos de 5 vértices construídos pelos participantes:

Figura 4.3 – Grafo G_5 - Grafo de 5 vértices



Fonte: Elaborado pelo Autor

Sendo a matriz adjacência:

$$A(G_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico associado a matriz $A(G_6)$ é dada como segue:

$$P_{G_6}(\lambda) = \lambda^5 - 7\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Logo após a resolução dos problemas, foi aplicado um questionário que constava de quatro perguntas:

- 1) Você teve algum tipo de dificuldade para entender os conteúdos explicados nesta oficina? Quais?
- 2) Explique o que você entendeu sobre Grafos?
- 3) Dê sua opinião sobre esta atividade.
- 4) Você teria alguma sugestão sobre alguma atividade lúdica para a próxima Semana Acadêmica Integrada?

A partir da análise das respostas obtidas constatou-se que a maioria dos alunos responderam que apresentaram algum tipo de dificuldade na aplicação do Teorema Laplace. No entanto, consideraram a atividade dinâmica e achavam interessante propor mais atividades lúdicas para explicar a matemática para os alunos do Ensino Médio.

Os alunos também perceberam que a medida que fosse adicionado elementos ao grupo, aumentava o número de possibilidades entre as ligações de amizades, consequentemente, a ordem da matriz adjacência e o número de determinantes também aumentavam. Alguns tentaram imaginar como seria o grafo gerado por uma rede social real.

Em suma a aplicação teve uma boa aceitação dos participantes. Os mesmos mostraram interessados em buscar métodos alternativos para transformar a aula mais atrativa, dinâmica e com a participação mais efetiva de todos os alunos. Além disso, eles perceberam que podem comentar um assunto de graduação em uma sala de aula no Ensino Médio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para dar um sentido à disciplina de matemática muitas vezes é preciso fazer uma conexão entre a matemática formal e o cotidiano dos alunos. A partir do processo de apresentação e de resolução de um problema atual, cria-se um método eficaz para desenvolver um pensamento crítico, dedutível e lógico, além de um meio para motivar os alunos.

A estratégia de conectar a matemática à vida dos estudantes, desmistifica ela como uma ciência baseada em definições, fórmulas, regras e cálculos. Com essa nova forma de refletir, pode-se despertar o conhecimento de novas ideias, gerar o gosto pelo trabalho mental e complementar a formação conceitual e teórica do aluno.

Nesse contexto, foi proposto uma atividade didática em que é possível integrar um conteúdo do Ensino Superior com o Ensino Médio. A modelagem matemática foi feita por meio de um problema relacionado à grafos e o qual está relacionado às redes sociais. A interação entre o aluno e o problema foi feita através das ligações de amizades criadas por eles. No entanto, a proposta não foi aplicada para alunos do Ensino Médio e sim para alunos de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, na 15ª Semana Acadêmica Integrada do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE).

Adicionalmente, foi apresentado um material teórico sobre grafos, matrizes, determinantes e polinômios, com as definições, os teoremas e algumas demonstrações. O objetivo foi deixar para os professores do Ensino Médio um material de referência para aqueles que buscam um conhecimento teórico para embasar suas aulas.

Uma dificuldade encontrada no decorrer desse trabalho foi analisar o significado das raízes do polinômio característico obtidas dos problemas propostos, mesmo com o conhecimento de que as raízes são os autovalores associados ao polinômio. Essa compreensão do significado aplicado dessas raízes pode servir para um outro trabalho, que viria ao encontro deste.

Na oficina, aplicada na 15ª Semana Acadêmica Integrada do CCNE, foi possível observar que a proposta ofertada no mini-curso foi bem recebida pelos alunos, notando claramente que os participantes sentiram-se motivados e desafiados em resolver os problemas, questionando e discutindo entre os grupos qual seria o melhor método para determinar o polinômio característico. Todavia, foram observadas algumas dificuldades para resolver os determinantes de matrizes de grau maior que três.

Na resolução das atividades, notou-se também, que tanto no escalonamento, quanto nas determinações das raízes dos polinômios característicos por radicais, existe um desenvolvimento extenso e em alguns momentos considerados complicados para os alunos do Ensino Médio. Uma ideia para vencer essa dificuldade é introduzir problemas que resultam em matrizes de terceira ordem e ir aumentando gradualmente o grau do grafo e consequentemente o grau do polinômio característico.

Acredita-se que esta proposta pode ser aplicada para alunos do segundo ano do Ensino Médio, uma vez que são estudados os conteúdos de matrizes e determinantes. A aplicação completa, que contempla ainda polinômios e números complexos, poderá ser desenvolvida no terceiro ano do Ensino Médio.

Neste estudo cada um dos problemas propostos foi resolvido pelos diferentes métodos, sendo assim, fica a critério do professor escolher o processo matemático mais conveniente a ser adotado. O autor sugere utilizar todos os métodos enunciados, mostrando as diferenças e explorando as vantagens de cada um deles. O uso do Geogebra poderá ser feito após os alunos terem calculado as raízes dos polinômios de forma analítica. Destaca-se que os recursos tecnológicos auxiliam na resolução das questões, mas afirma-se que tais meios não dispensam o conhecimento da teoria.

Entende-se que esse trabalho contribui para o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que propõem uma estratégia didática com o propósito de melhorar as aulas de matemática, cria uma oportunidade para os estudantes desenvolverem seu conhecimento matemático a partir de um problema interessante e para professores disponibiliza um material que poderá ser usado no preparo de suas aulas.

O presente estudo apresenta limitações e não pretende colocar um ponto final nessas questões, mas sim, instigar novos questionamentos, possibilitando o desenvolvimento de outros estudos sobre a temática. Além disso, não se tem a pretensão de apontar posições absolutas ou estancos do processo de educação, mesmo porque estão disponíveis outras formas de práticas educativas e o processo de construção do conhecimento é um processo complexo e que exige muita dedicação e pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, N. et al. **Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução**: III^o Colóquio de matemática da região sul. Florianópolis, SC, 2014. 201 p. Acesso em 02 set. 2016. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/coloquiosul/notas_minicurso_6.pdf>.

ADAMI, A. Redes sociais. 2011. Acessado em 28 de mar. 2017. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/sociedade/redes-sociais-2/>>.

ANTON, H.; RORRES, C. **álgebra Linear com Aplicações**. [S.l.]: Ed. Bokman, 2012. 768 p.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Ed. Harba, 1980. 412 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. 2000, 2000. 109 p. Acesso em 08 out. 2016. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>.

EPIFANOV, V. Teora dos grafos. 2015. Acessado em 01 de mar. 2017. Disponível em: <<https://grafos.neocities.org/#>>.

FRITSCHER, E. **Propriedades Espectrais de um Grafo**. 2011. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2011.

GOMES, R. **Números Complexos e Polinômios: Estratégias de Ensino para Aplicação por meio do Geogebra**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, PROFMAT - UEM, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar,6**. [S.l.]: Ed. Moderna, 1977. 208 p.

_____. **Fundamentos de Matemática Elementar,6**. [S.l.]: Ed. Moderna, 1993. 242 p.

JURKIEWICZ, S. **Grafos - Uma Introdução**. [S.l.], 2009. 112 p. Acesso em 15 out. 2016. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>>.

KÜHLKAMP, N. **Matrizes e Sistemas de Equações Lineares**. [S.l.]: Ed. da UFSC, 2007. 116 p.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações**. [S.l.]: Ed. LTC, 2011. 452 p.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. [S.l.]: Ed. SBM, 2007. 210 p.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. [S.l.]: SBM, 2006. 768 p.

LIMA, J. R. F. **Polinômios de Matrizes**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, UFRPE, 2013.

MARIA, J. Cálculo do determinante de uma matriz: eliminação gaussiana ou teorema de laplace, qual o algoritmo mais eficiente? 2017. Acessado em 30 de jul. 2017. Disponível em: <<http://prorum.com/index.php/3218/determinante-eliminacao-gaussiana-laplace-algoritmo-eficiente>>.

MARINO, R. As pontes de konigsberg. 2012. Acessado em 01 de mar. 2017. Disponível em: <<http://www.todasasconfiguracoes.com/wp-content/uploads/2012/05/konigs41.png>>.

MATOS, E. B. **Estudo das Equações do Terceiro Grau no Ensino Médio a Partir da Equação de Van Der Waals**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, PROFMAT - UFSM, 2014.

MIGUEL, J. C. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: Implicações teórico-metodológicas. 2012. Acessado em 28 de mar. 2017. Disponível em: <www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/O%20ensino%20de%20matematica.pdf>.

MUELLER, L. C. **Uso de Recursos Computacionais nas Aulas de Matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, UNIVATES, 2013.

NETO, A. A. et al. **Números Complexos Polinômios e Equações Algébricas**. [S.l.]: Ed. Moderna, 1982. 298 p.

ONUCHIC, L. R. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. [S.l.]: 2014, 2014. 160 p.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas**. [S.l.]: 1995, 1995.

PONTES, R. S. **Equações Polinomiais: Solução Algébrica, Geométricas e com o auxílio de derivadas**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, PROFMAT - UFPB, 2013.

RINCON, M.; FAMPA, M. 2010.

RUGGIERO, M. A. G. 2016.

SANTANA, C. R.; YARTEY, J. N. A. **Álgebra Linear - Resumo da Teoria**. [S.l.]: Editus, 2008. 290 p.

SANTOS, P. L. F. **Teoria Espectral de Grafos Aplicada ao Problema de Isomorfismo de Grafos**. 2010. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, UFES, 2010.

SANTOS, R. J. **Introdução à Álgebra Linear**. Imprensa da UFMG, 2013. 634 p. Acesso em 08 out. 2016. Disponível em: <<https://www.dropbox.com/s/rtrtbxe8454ifsh/gaalt00.pdf>>.

SANTOS, S. R. **As equações Polinomiais do 3º e 4º Graus - Sua História e Suas Soluções**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, PROFMAT - FUFS, 2013.

SILVA, C. D. M. **A Essência dos Determinantes na sua Origem**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, UFC, 2014.

SILVA, F. G. L. **Proposta para o Ensino de Números Complexos no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, PROFMAT - UFSM, 2014.

WIKIPEDIA, D. pela. Abraham de moivre. 2017. Acessado em 20 de jul. 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre>.

_____. Lodovico ferrari. 2017. Acessado em 10 de jul. 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari>.

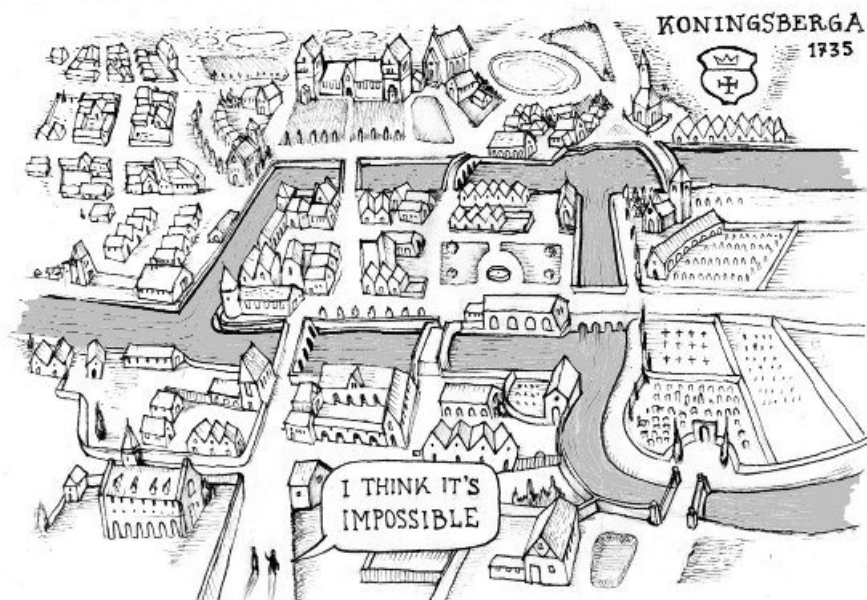
6 APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Neste capítulo serão apresentados tópicos que contribuem para a fundamentação deste estudo correspondendo a uma revisão teórica dos conteúdos relacionados a grafos, matrizes, determinantes e polinômios, os quais são importantes para a resolução dos problemas propostos nos capítulos anteriores. Esta seção é composta por definições, teoremas, lemas, proposições e demonstrações relativas aos conteúdos citados anteriormente. Acredita-se ser um material teórico de apoio para os professores da educação básica, que todos aqueles que desejarem aplicar a proposta em aula.

6.1 GRAFOS

Imaginem um rio, onde existem duas ilhas e suas duas margens, uma ilha tem uma ponte que liga cada uma das margens, a outra duas pontes e uma ponte que liga as duas ilhas, conforme a Figura (6.1). Então tem-se no total 7 pontes, onde é possível caminhar sobre elas livremente.

Figura 6.1 – Sete Pontes de Königsberg



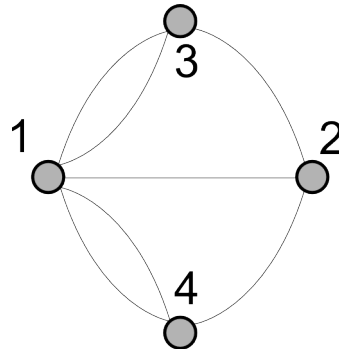
Fonte: (EPIFANOV, 2015)

Conforme Lima (2007), por muitos anos os moradores dessa cidade se perguntavam se era possível um pedestre, partindo de uma das margens ou de qualquer das ilhas, percorrer todas as pontes numa caminhada contínua sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas. Esse problema foi resolvido em 1735 por Leonhard Euler¹. Ele

¹Matemático e Físico Suíço, que fez importantes descobertas na área da matemática como Cálculo e

associou as margens e as ilhas aos vértices e as pontes, às arestas de um grafo, conforme a Figura (6.2):

Figura 6.2 – *Grafo* G_6 - Grafo das Sete Pontes de Königsberg



Fonte: (MARINO, 2012)

Seguindo o raciocínio de Lima (2007), em seu livro *Matemática e Ensino*, tem-se:

Euler, concluiu que no problema das sete pontes é impossível percorrê-las sem passar duas vezes por alguma ponte, pois, se um caminho chama-se unicursal, isto é, quando não percorre a mesma aresta mais de uma vez, então pode-se chamar de grafo unicursal. Assim, tem-se que o grafo é unicursal, se todos os seus vértices são de grau par ou dois vértices são de grau ímpar. No exemplo dado o grafo da figura 6.2 não é unicursal, pois têm quatro vértices de grau ímpar.

Esse é um dos exemplos mais utilizados para começar descrever grafos. No presente trabalho será usado um exemplo atual, que são as redes sociais.

Os grafos basicamente, podem ser considerados estruturas onde existem um conjunto de pontos e um conjunto de segmentos de retas ligando os pontos, denominadas arestas.

Segundo Fritscher (2011), defini-se grafos como segue:

Definição 6.1 *Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito cujos elementos são denominados vértices e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos pertencentes a V chamados de arestas. Sendo o número de vértices denotada por $V(G)$ e o número de arestas por $A(G)$. Quando uma aresta incide sobre dois vértices, diremos que esses vértices são adjacentes.*

Para Jurkiewicz (2009) o grau do vértice v , representado por $d(v)$, é o número de vezes que as arestas incidem sobre v . Sendo assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 6.1 *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m$$

Teoria dos Grafos. É considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também é considerado como um dos grandes matemáticos de todos os tempos.

, $\forall m \in \mathbb{Z}$ Isto é, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre um número par.

Demonstração Conforme Jurkiewicz (2009), tem-se:

Ao contar-se os graus dos vértices conta-se as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

□

Seguindo Jurkiewicz (2009), tem-se o seguinte corolário:

Corolário 6.1 Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração Para Jurkiewicz (2009), se houvesse um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é duas vezes o número de arestas e, portanto, é um número par.

□

6.1.1 Algumas Definições

Definição 6.2 Seja $G = G(V, E)$ um grafo. Quando $G' = G'(V', E')$ é um grafo satisfazendo $V' \subset V$ e $E' \subset E$ tem-se então que $G' \subset G$ e dizemos que G' é um **subgrafo** de G . Quando $G' \subset G$ é tal que dois vértices são adjacentes em G' se e somente se eles são adjacentes em G , diz-se que G' é um **subgrafo induzido** de G . (ABREU et al., 2014)

Definição 6.3 Um **percurso** ou **cadeia** é uma sequência de arestas sucessivamente adjacentes. Pode-se dizer que um percurso é **fechado** se a última aresta da sucessão é adjacente a primeira, caso contrário é **aberto**. Temos que comprimento do percurso é o número de arestas por ele utilizado. (SANTOS, 2010)

Defini-se, como **caminho** ou **percurso elementar** um percurso em que todos os vértices são distintos. Um caminho fechado é chamado de **ciclo** e um grafo que não possui ciclos chama-se de **acíclico**. (SANTOS, 2010)

As seguintes definições foram obtidas de Fritscher (2011):

Definição 6.4 Um grafo G é um grafo **conexo** quando existe um caminho ligando um par qualquer de vértices. Caso não existir tal caminho, diz-se que o grafo é **desconexo**.

Definição 6.5 Um grafo é completo quando todos os vértices são adjacentes. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

Definição 6.6 *Afirma-se que um grafo k -regular, ou regular de grau k , é aquele em que todos os vértices possuem o mesmo grau, e este igual a k .*

Definição 6.7 *Um grafo G é bipartido se for possível expressar o conjunto V dos vértices como uma união disjunta de dois conjuntos $V = V_1 \cup V_2$, tais que não haja vértices adjacentes em cada conjunto V_i .*

Lema 6.1 *Um grafo é bipartido se e somente se não possui cadeias fechadas de tamanho ímpar.*

Demonstração *Supõe-se que o grafo G é bipartido, então é possível separar os vértices em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 . Se G possui uma cadeia fechada de tamanho n , ele será $C_n = v_0v_1v_2v_3 \cdots v_{n-1}v_n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $v_0 \in V_1$, então $v_1 \in V_2$ e novamente $v_2 \in V_1$. Tem-se que $v_i \in V_2$ se e somente se i é ímpar. Para fechar a cadeia, precisa-se que $v_n = v_0 \in V_1$, ou seja n é par. Portanto, as cadeias fechadas têm tamanho par.*

Supondo agora que G , grafo conexo, não possui cadeias fechadas de tamanho ímpar. Seja v_0 um vértice do grafo, e defini-se que $v_0 \in V_1$ e

$$\begin{cases} v \in V_1 \text{ se e somente se existe cadeia de tamanho par entre } v_0 \text{ e } v; \\ v \in V_2 \text{ se e somente se existe cadeia de tamanho ímpar entre } v_0 \text{ e } v; \end{cases}$$

Se existir $w \in V_1 \cap V_2$ então existe uma cadeia P_1 de tamanho par entre v_0 a w , e existe uma cadeia P_2 de tamanho ímpar entre w e v_0 . Concatenando essas cadeias, tem-se que P_1P_2 é uma cadeia de v_0 a v_0 de tamanho ímpar, ou seja, o grafo contém uma cadeia de tamanho ímpar. Portanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, o que dá a bipartição. No caso de G não ser conexo, basta verificar que, para cada componente conexa, o grafo é bipartido, e unir os subconjuntos de vértices das componentes conexas.

□

Segundo Abreu et al. (2014):

Definição 6.8 *Chama-se de árvore o grafo conexo e sem ciclos. O grafo desconexo e sem ciclos é chamado de **floresta**.*

6.1.2 Matriz Adjacência

De acordo com Santos (2010), tem-se que:

Definição 6.9 *"Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, não orientado, com n vértices e m arestas. A matriz $n \times n$ cujas entradas são iguais a 1, se u e v são adjacentes, e 0 caso contrário, com $u, v \in V$, é denominada **matriz adjacência**,"*

Dado o grafo G , tem-se que o polinômio característico da matriz adjacência $A(G)$ é chamado de polinômio característico de G e denotado por $p_G(\lambda)$. Então, $p_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G))$, onde λ é uma raiz deste polinômio e dito ser um autovalor de G . Sendo que um grafo de n vértices, possui então n autovalores, onde o maior deles é o **raio espectral** de G .

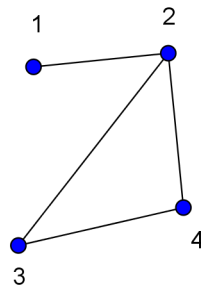
Definição 6.10 "Dado um grafo G , definimos como espectro de G ($\text{spect}(G)$) o multiconjunto das raízes do polinômio característico, lembrado de suas respectivas multiplicidades."(FRITSCHER, 2011)

Tem-se então que o espectro do grafo G são os autovalores da matriz adjacência. Como a $A(G)$ é uma matriz simétrica, então seus autovalores são reais e por conveniência ordena-se o espectro de ordem crescente, isto é, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pode-se também representar o espectro usando a notação de matriz de ordem $2 \times d$, tendo na primeira linha os d os autovalores distintos de G .

Assim o espectro de um grafo G qualquer é único, independente da ordenação dos vértices, pois o polinômio característico é único.

Observa-se um exemplo, dado por, Abreu et al. (2010) de um grafo G_7 , conforme a figura 6.3.

Figura 6.3 – Grafo G_7 - Grafo com 4 vértices



Fonte: (ABREU et al., 2014)

Tem-se que a matriz de adjacência de G_7 é:

$$A(G_7) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo como polinômio característico $p_{G_7}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$, sendo o espectro de G_7 :

$$\text{spect}(G_7) = \begin{bmatrix} -1,482 & 1 & 0,3111 & 2,1701 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2 MATRIZ

Conforme Abreu et al. (2006), a ideia de matriz $m \times n$ é um retângulo com $m \cdot n$ elementos, sendo os mesmos dispostos em m linhas e n colunas. As matrizes são usualmente utilizadas para organizar dados, por exemplo, notas dos alunos em alguma série, uma tabela de algum campeonato de futebol. No âmbito mais teórico, usa-se para formular e resolver problemas na área da álgebra linear, aqui para o cálculo dos autovalores da matriz de adjacência, associados ao seu polinômio característico.

Formalmente defini-se essa matriz como:

Definição 6.11 Uma tabela com números reais dispostos em m linhas e n colunas é dita

matriz de ordem $m \times n$. Denota-se por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, onde a_{ij} é o termo que está na linha i e coluna j , com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$

6.2.1 Matrizes Especiais

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$.

Definição 6.12 A matriz A é uma matriz quadrada se $m = n$.

Exemplo: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

Definição 6.13 Se $m = n = 1$, A é dita **matriz escalar**.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$,

1. A é dita matriz **nula** se $a_{ij} = 0, \forall i, j$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. A é dita matriz **coluna** ou vetor coluna, se $n = 1$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{bmatrix}$

3. A é dita matriz **linha** ou vetor linha, se $m = 1$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

6.2.2 Matrizes Quadradas Especiais

De acordo com Kühlkamp (2007), numa matriz quadrada, tem-se a **diagonal principal** que é formada pelos elementos a_{ij} com $i = j$ e $i = 1, \dots, n$. Já a **diagonal secundária** é formada pelos elementos $a_{n1}, a_{n-12}, \dots, a_{1n}$.

Também observa-se que:

1. A é dita matriz **identidade** se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j, i = 1, \dots, n$. Ou seja, a matriz identidade é uma matriz quadrada com 1 na diagonal principal e 0 em todas demais entradas e seu símbolo é I_n .
2. A é dita matriz **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji}$.
3. A é dita matriz **diagonal** se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
4. A é dita matriz **triangular**:
 - (i) Superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
 - (ii) Inferior se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

6.2.3 Operações com Matrizes

Segundo Santos (2013a), destacam-se as seguintes definições:

Definição 6.14 *Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, a **adição** de matrizes é definida como sendo a matriz $m \times n$ é definida pela matriz $m \times n$*

$$C = A + B$$

com onde C obtida a partir da operação de soma dos elementos da matriz A com os da matriz B , isto é,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para qualquer $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Definição 6.15 A **multiplicação de um escalar** α por uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$B = \alpha \cdot A$$

sendo a multiplicação de cada elemento da matriz A pelo escalar α , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},$$

para qualquer $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escreve-se também $[\alpha \cdot A]_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Diz-se então que a matriz B é um **múltiplo escalar** da matriz A .

Definição 6.16 O **produto** de duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times n}$, na qual o número de coluna da primeira matriz é igual ao número de linha da segunda, é definido pela matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$

$$C = A \cdot B$$

da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}, \quad (6.1)$$

para qualquer $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escreve-se também $[A \cdot B]_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$.

Pode-se escrever a Equação (6.1) de uma forma compacta usando a notação de somatório, como segue:

$$[A \cdot B]_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Definição 6.17 Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, a sua **transposta** é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida quando se troca as linhas pelas colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Escreve-se também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Segundo Anton e Rorres (2012), define-se uma matriz elementar como;

Definição 6.18 *Uma matriz A , $n \times n$, que pode ser obtida da matriz identidade de ordem n efetuando uma única operação elementar sobre linhas.*

Conforme Boldrini et al. (1980),

Definição 6.19 *Seja uma matriz quadrada A de ordem n , chama-se de inversa de A a uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n . Escreve-se A^{-1} para a inversa de A .*

*Caso a matriz A não tenha inversa, diz-se que A é uma matriz **não invertível** ou **singular**.*

6.2.4 Propriedades da Álgebra Matricial

Para Santos (2013a), as propriedades da álgebra matricial podem ser enunciadas pelo teorema:

Teorema 6.2 *Sejam as matrizes A , B e C de tamanhos convenientes e α e β escalares. As seguintes propriedades sobre operações matriciais são válidas.*

1. $A + B = B + A$ (comutativa);
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa); Segue que $A + \bar{0} = A$. (elemento neutro);
3. Para cada matriz A , existe uma única matriz $(-A)$, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$ tal que $A + (-A) = 0$. (elemento simétrico ou oposto);
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associativa para a multiplicação por escalar);
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributiva para a soma de escalares);
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributiva para a soma de matrizes)
7. $A(BC) = (AB)C$ (associativa);
8. $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva);
9. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$; (associativa);
10. $(A^t)^t = A$;
11. $(A + B)^t = A^t + B^t$
12. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

$$13. (AB)^t = B^t A^t.$$

Segue abaixo a demonstração do teorema 6.2

Demonstração *Sejam as matrizes A, B, C e $X \neq 0$ e os α e $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se:*

1.

$$(A + B)_{ij} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = (B + A)_{ij}$$

□

2.

$$\begin{aligned} (A + (B + C))_{ij} &= [a_{ij}] + (B + C)_{ij} = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A + B)_{ij} + [c_{ij}] = (A + B + C)_{ij} \end{aligned}$$

□

3. *Dada uma matriz $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ tal que*

$$A + X = A$$

para qualquer matriz A , $m \times n$, tem-se que:

$$[a_{ij}] + [x_{ij}] = [a_{ij}]$$

ou seja, $[x_{ij}] = 0$, para $0 < i < m$ e $0 < j < n$.

□

4. *Dada uma matriz $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ tal que*

$$A + X = \bar{0}$$

para qualquer matriz A , $m \times n$, tem-se que:

$$[a_{ij}] + [x_{ij}] = 0,$$

ou seja, $[x_{ij}] = -[a_{ij}]$, para $0 < i < m$ e $0 < j < n$.

□

5.

$$\alpha((\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha[\beta a_{ij}] = (\alpha\beta)[a_{ij}] = ((\alpha\beta)A)_{ij}$$

□

6.

$$((\alpha + \beta)A)_{ij} = (\alpha + \beta)[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$$

□

7.

$$\alpha(A+B)_{ij} = \alpha(A+B)_{ij} = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}$$

□

8. Seja $A = [a_{ij}]_{m \times p}$, $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ e $C = [c_{ij}]_{q \times n}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}([\sum_{l=1}^q b_{kl}c_{lj}]) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ik}[b_{kl}c_{lj}] = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q [a_{ik}b_{kl}c_{lj}] \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q [a_{ik}b_{kl}]c_{lj} = \sum_{k=1}^p (\sum_{l=1}^q [a_{ik}b_{kl}])c_{lj} \\ &= \sum_l^q (AB)_{il}c_{lj} = ((AB)C)_{ij} \end{aligned}$$

□

9.

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^p [a_{ik}](B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^p [a_{ik}][b_{kj} + c_{kj}] \\ &= \sum_{k=1}^p ([a_{ik}b_{kj}] + [a_{ik}c_{kj}]) = \sum_{k=1}^p [a_{ik}b_{kj}] + \sum_{k=1}^p [a_{ik}c_{kj}] \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij} \end{aligned}$$

□

10.

$$\begin{aligned} (\alpha(AB))_{ij} &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^p [a_{ik}b_{kj}] = \sum_{k=1}^p [\alpha a_{ik}]b_{kj} \\ &= (\alpha A)_{ij} \end{aligned}$$

□

11.

$$(A^t)^t_{ij} = (A^t)_{ji} = [a_{ij}]$$



12.

$$(A + B)^t_{ij} = (A + B)_{ji} = [a_{ji} + b_{ji}] = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}$$



13.

$$\alpha(A^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha[a_{ji}] = \alpha(A^t)_{ij} = (\alpha A^t)_{ij}$$



14.

$$\begin{aligned} ((AB)^t)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^p (A^t)_{kj}(b^t)_{ik} = \sum (B^t)_{ik}(A^t)_{kj} \\ &= (B^t A^t)_{ij} \end{aligned}$$

6.3 DETERMINANTE

Supondo que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada, define-se determinante como $\det A$:

Definição 6.20 O **determinante** da matriz $A = [a_{ij}]$ é a soma dos produtos obtidos, permutando-se os segundos índices dos elementos do termo principal, mantidos fixos os seus primeiros índices, e fazendo cada produto cuja permutação dos segundos índices seja par, se precedido do sinal \oplus , e cada produto cuja permutação dos segundos índices for ímpar ser precedido do sinal \ominus . (KÜHLKAMP, 2007)

Usaremos algumas definições e teoremas para calcular determinantes de ordem n .

6.3.1 Determinante de ordem 1

Seja $A = [a_{11}]$, uma matriz 1×1 , então;

$$\det(A) = a_{11}.$$

6.3.2 Determinante de ordem 2

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, determina-se o determinante de A através da diferença entre o produto da diagonal principal e o produto da diagonal secundária, isto é:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

6.3.3 Determinante de ordem 3

Para matriz de ordem 3, pode-se utilizar a chamada **Regra de Sarrus**.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Para calcular o $\det(A)$, usando a Regra de Sarrus,

procede-se da seguinte maneira, conforme Kühlkamp (2007):

1. Repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz;
2. Traçar linhas paralelas a diagonal principal tal que cada linha contenha três elementos;
3. Traçar linhas paralelas a diagonal secundária tal que cada linha contenha três elementos;
4. Para cada linha traçada em (2) multiplicar entre si os seus elementos mantendo o sinal resultante do produto obtido, e proceder da mesma maneira com as linhas traçadas em (3) e trocando o sinal de cada um desses produtos;
5. Somar os produtos obtidos em (4).

Assim sendo, esta é a definição do determinante de matrizes de ordem três, cuja regra de Sarrus para o cálculo é descrito nos itens de um a cinco.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

6.3.4 Determinante de ordem $n \geq 4$

Para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 4 ou superior, pode-se utilizar dois métodos que serão descritos nesse capítulo: O **Teorema de Laplace** e o **Método do Escalonamento**.

Cabe salientar que esses dois métodos para calcular o determinante também aplicam-se a matrizes de ordem 2 e 3, isto é, são métodos aplicáveis a matrizes de todas as ordens.

6.3.5 Teorema de Laplace

Segundo Santana e Yartey (2008), o procedimento é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 6.3 *Seja a matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$. Considere A_{ij} a matriz obtida da matriz inicial A , retirando-se desta a i -ésima linha e j -ésima coluna.*

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \cdots + a_{1n}\Delta_{1n}$$

onde $\Delta_{ij} = (-a)^{i+j}|A_{ij}|$.

Mais precisamente:

Para cada i , tem-se:

$$\det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

onde $\Delta_{ij} = (-a)^{i+j}|A_{ij}|$.

Para cada j , tem-se:

$$\det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

com $\Delta_{ij} = (-a)^{i+j}|A_{ij}|$.

Demonstração Segundo Lima (2013), prova-se o Teorema de Laplace por indução, para $n \geq 2$ como segue:

1ª Parte:

Verifica-se se o Teorema é válido para matriz de ordem 2.

Seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a 1ª linha:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot |a_{11}| + a_{12} \cdot (-1) \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Desenvolvendo a 2ª linha:

$$\det(A) = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{21} \cdot (-1) \cdot |a_{12}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Desenvolvendo a 1ª coluna:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} = a_{11} \cdot |a_{22}| + a_{21} \cdot (-1) \cdot |a_{12}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Desenvolvendo a 2ª coluna:

$$\det(A) = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{12} \cdot (-1) \cdot |a_{21}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Logo, verifica-se que o Teorema é válido para $n = 2$.

2ª Parte

Admitir-se-á que a propriedade seja válida para determinante de ordem $(n - 1)$ e prova-se-á que ela também é válida para determinantes de ordem n . Seja A uma matriz de ordem $n > 2$. Os menores complementares dos elementos de A serão os determinantes de ordem $(n - 1)$. Usar-se-á os símbolo D_{ij}^{kl} para designar o determinante da matriz que se obtém, suprimindo as linhas i e k e as colunas j e l da matriz A . Assim tem-se que o determinante D_{ij}^{kl} é de ordem $(n - 2)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Fixando a coluna k da matriz A ($1 < k \leq n$) e calculando o número

$$C = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + a_{3k} \cdot A_{3k} + \dots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

$$C = a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot D_{1k} + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot D_{2k} + a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot D_{3k} + \dots + a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D_{nk}$$

Os determinantes $D_{1k}, D_{2k}, \dots + D_{nk}$ são de ordem $(n - 1)$. Desenvolvendo-os pela 1ª coluna, tem-se:

$$\begin{aligned} C &= a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot \left[\sum_{i=2}^n a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{1k}^{i1} \right] + \\ &+ a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot \left[a_{11} \cdot D_{2k}^{11} \cdot \sum_{i=3}^n a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{2k}^{i1} \right] + \\ &+ a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot \left[a_{11} \cdot D_{3k}^{11} - a_{21} \cdot D_{3k}^{21} + \sum_{i=4}^n a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{3k}^{i1} \right] + \dots + \\ &+ a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot \left[a_{11} \cdot D_{nk}^{11} - a_{21} \cdot D_{nk}^{21} + a_{31} \cdot D_{nk}^{31} - \dots \pm a_{n-1,1} \cdot D_{nk}^{n-1,1} \right] \end{aligned}$$

Na expressão de C , acima, tem-se

(i) Tomando as parcelas que contêm a_{11} , tem-se:

$$a_{11} \cdot \left[a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot D_{2k}^{11} + a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot D_{3k}^{11} + \dots + a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D_{nk}^{11} \right]$$

Como o determinante D_{nk} são de ordem $(n - 1)$, as potências de $(-1)^n$, $n > 2$, podem ser reescritas como $(-1)^{n-2}$ e observando que

$$A = \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

temos que:

$$a_{11} \cdot [a_{2k} \cdot (-1)^k \cdot D_{2k}^{11} + a_{3k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot D_{3k}^{11} + \dots + a_{nk} \cdot (-1)^{n+k-2} \cdot D_{nk}^{11}] =$$

$a_{11} \cdot D_{11}$ (por hipótese de indução).

(ii) Analogamente a (i) tomam-se as parcelas que contém a_{21} , assim:

$$a_{21} \cdot [a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot D_{1k}^{21} - a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot D_{3k}^{21} - \dots - a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D_{nk}^{21}]$$

$$a_{21} \cdot [-a_{1k} \cdot (-1)^k \cdot D_{1k}^{21} - a_{3k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot D_{3k}^{21} - \dots - a_{nk} \cdot (-1)^{n+k-2} \cdot D_{nk}^{21}] =$$

$a_{21} \cdot D_{21}$ (por hipótese de indução).

Seguindo a mesma lógica dos anteriores, continuar-se-á o processo até obter as parcelas que contem a_{n1} , dada por:

$$C = a_{11} \cdot D_{11} - a_{21} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot D_{31} - \dots \pm a_{n1} \cdot D_{n1},$$

portanto

$$C = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1}$$

Consegue-se provar que $C = \det(A)$, sendo assim, tem-se que a propriedade é válida para qualquer k , onde $1 < k \leq n$.

A prova do Teorema de Laplace para linhas é análoga a prova por colunas.

□

6.3.6 Escalonamento

Segundo Santana e Yartey (2008), define-se escalonamento como:

Definição 6.21 Uma matriz $A_{m \times n}$ é dita escalonada se as condições abaixo são satisfeitas:

1. As linhas nulas, se existirem, localizam-se abaixo de todas as linhas não nulas.

2. O primeiro elemento não nulo da linha i está numa coluna anterior à do primeiro elemento da linha $i + 1$, ($i < m$).

Para obter-se uma matriz escalonada, utiliza-se o processo de equivalência de matrizes por linha. que conforme o mesmo autor (Santana e Yartey), pode-se realizar as operações destacadas a seguir.

Definição 6.22 Dada uma matriz A , pode-se dizer que é equivalente por linha a uma matriz B , se a matriz B puder ser obtida da matriz A através de uma sequência de operações elementares, que são as seguintes:

1. Permutar a linha i com a linha j . Notação $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. Multiplicação da linha i por um escalar k . Notação $kL_i \leftrightarrow L_i$;
3. Substituição da linha i por k vezes a linha j somada a t vezes a linha i , onde $t, k \in K, t \neq 0$. Notação $k \cdot L_j + t \cdot L_i \rightarrow L_i$.

Quando se escalona uma matriz, tem-se que tomar o cuidado com o seu determinante, pois o mesmo é modificado cada vez que é realizada uma operação elementar, da seguinte forma

- a) Quando troca-se duas linhas, o sinal do determinante se modifica; (item 1, def. 2.20)
- b) Quando multiplica-se ou divide-se uma linha por um número escalar, o determinante da matriz anterior é igual ao determinante da matriz resultante dividido ou multiplicado, respectivamente, pelo número escalar; (item 2, def. 2.20)
- c) O determinante não se altera quando soma-se uma linha com um múltiplo escalar de outra linha. (item 3, def. 2.20)

6.3.7 Propriedades do Determinantes

A definição de determinante, o Teorema de Laplace e o Método do Escalonamento permitem o cálculo de qualquer determinante. No entanto, é possível simplificar o cálculo com o emprego de certas propriedades que serão destacadas a seguir.

1. Se uma matriz A possui uma linha ou coluna nula, então $\det(A) = 0$.
2. Se uma matriz A possui duas linhas ou colunas iguais, então $\det(A) = 0$.
3. Dada uma matriz A que possua duas linhas ou colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

4. Dada uma matriz A , vale $\det(A^t) = \det(A)$.

Demonstração *Demonstrar-se-á a quarta propriedade por indução.*

Segundo Leon (2011), para $n = 1$ o resultado é evidente, já que uma matriz 1×1 é simétrica.

Agora supõe-se que o resultado seja válido para uma matriz $k \times k$ e que A é uma matriz $(k + 1) \times (k + 1)$. Usando o Teorema de Laplace, tem-se:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{12} \cdot \det(M_{12}) + \cdots \pm a_{1,k+1} \cdot \det(M_{1,k+1})$$

As matrizes M_{ij} são de ordem $k \times k$, e, pela hipótese de indução, tem-se:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}^t) - a_{12} \cdot \det(M_{12}^t) + \cdots \pm a_{1,k+1} \cdot \det(M_{1,k+1}^t)$$

Mas a segunda equação, é o $\det(A^t)$, usando a primeira coluna de A^t , logo

$$\det(A) = \det(A^t)$$

□

5. Conforme Kühnkamp (2007), "Se uma matriz B é obtida a partir de uma matriz A multiplicando-se uma das linhas (ou colunas) de A por uma constante k , então $\det(B) = k \cdot \det(A)$ ".

Demonstração *Segundo o mesmo autor, supõe-se que a linha s da matriz B seja obtida multiplicando a linha s da matriz A pela constante $k \in \mathfrak{R}$, tem-se então que a propriedade se obtém da relação $b_{sj} = k \cdot a_{sj}$, para qualquer j . Consequentemente, observa-se que em cada produto a ser somado no cálculo do determinante de B , tem-se um elemento da linha s , diga-se b_{sl} , que pode ser substituído por um $k \cdot a_{sl}$. Então tem-se que k pode ser colocado em evidência, e a soma que deste fator k estará então multiplicando o determinante da matriz A , logo têm-se o $\det B$.*

□

6. Dada uma matriz triangular superior ou triangular inferior, tem-se que seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Para Ruggiero (2016), temos:

Demonstração Seja A a matriz triangular inferior, com $a_{ij} = 0$ quando $i \leq j$. Um produto elementar de A pode ser escrito da forma $a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{nj_n}$. Como $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$, precisamos ter $j_1 = 1$ para obter um produto elementar não nulo. Se $j_1 = 1$ então $j_2 \neq 1$, pois dois elementos não podem vir da mesma coluna, e além disso, como $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$, devemos ter $j_2 = 2$ para obter um produto elementar não nulo. Seguindo o mesmo raciocínio obtemos $j_3 = 3, j_4 = 4, \cdots, j_n = n$ para que o produto elementar não seja nulo. Assim, o único produto elementar não nulo de A será $a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$. Se A for triangular superior o raciocínio é análogo.

□

7. Se duas linhas ou duas colunas são permutadas de uma matriz A , então determinante da nova matriz é igual ao determinante da matriz A , mas com sinais opostos.

Demonstração Suponha que a matriz B é obtida da matriz A trocando-se as linhas r e s de a e $r < s$. Assim, tem-se que $b_{rj} = a_{sj}$ e $b_{sj} = a_{rj}$. Para o restante dos termos $b_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$ e $i \neq s$. Logo

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum \binom{+}{-} b_{1j_1} \cdot b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum \binom{+}{-} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum \binom{+}{-} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

A permutação

$$j_1, j_2, \cdots, j_s, \cdots, j_r, \cdots, j_n$$

é obtida da permutação

$$j_1, j_2, \cdots, j_r, \cdots, j_s, \cdots, j_n$$

trocando-se apenas os dois números j_r por j_s . Isto significa que o número de inversões é ímpar e portanto o sinal do determinante da matriz B é ao contrário do sinal do determinante da matriz A . Rincon e Fampa (2010).

□

8. Numa matriz A , onde uma linha ou coluna é a soma de duas parcelas, pode-se calcular o determinante de A como sendo a soma dos determinantes das duas matrizes obtidas pela substituição da linha ou coluna pela primeira e pela segunda parcela.

Demonstração Considere o determinante da matriz,

$$A = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ (a_{21} + b_{21}) & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ (a_{31} + b_{31}) & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + b_{n1}) & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se arbitrariamente a matriz com a primeira coluna formada por duas parcelas. Onde para cada termo do desenvolvimento do determinante aparecerá como fator um elemento da primeira coluna, isto é, uma soma $(a_{i1} + b_{i1})$.

Então pode-se decompor cada termo do desenvolvimento do $\det A$ numa soma de dois termos. Cada um destes dois termos obtém-se do termo correspondente do $\det A$ pela substituição da soma $(a_{i1} + b_{i1})$ por cada uma de suas parcelas. Assim, o desenvolvimento do $\det A$ pode ser descomposto numa soma de dois desenvolvimentos semelhantes, obtidos daquele pela substituição, em cada termo, da soma $(a_{i1} + b_{i1})$ por suas parcelas. (SILVA, 2014a)

□

9. Seja a matriz A , se uma linha ou coluna for substituída pela soma de seus elementos com os elementos correspondentes de outra linha ou coluna de A multiplicando por uma constante, gerando assim uma matriz B , logo tem-se os que o $\det B = \det A$.

Demonstração Conforme Kühlkamp (2007):

Sejam as matrizes $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$. Onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \dots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando a propriedade **6** tem-se,

$$\det B = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \dots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Pela propriedade **3**, tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \dots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

pois as linhas i e j são proporcionais.

Logo,

$$\det B = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + 0 = \det A + 0 = \det A$$

□

Agora segundo lezzi (1993), segue o Teorema.

Teorema 6.4 Teorema de Binet:

Sejam as matrizes A e B , quadradas de ordem n , então tem-se que:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Demonstração Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ de ordem n , onde a matriz C é o produto das matrizes A e B , logo

$$\sum_{k=1}^n c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ onde } i, j = 1, 2, \dots, n$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Então,

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^n a_{1k_1} \cdot b_{k_11} & \sum_{k_2=1}^n a_{1k_2} \cdot b_{k_21} & \dots & \sum_{k_n=1}^n a_{1k_n} \cdot b_{k_n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^n a_{nk_1} \cdot b_{k_11} & \sum_{k_2=1}^n a_{nk_2} \cdot b_{k_21} & \dots & \sum_{k_n=1}^n a_{nk_n} \cdot b_{k_n1} \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\det(A \cdot B) = \det(C) = \det \begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^n a_{1k_1} \cdot b_{k_11} & \sum_{k_2=1}^n a_{1k_2} \cdot b_{k_21} & \dots & \sum_{k_n=1}^n a_{1k_n} \cdot b_{k_n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^n a_{nk_1} \cdot b_{k_11} & \sum_{k_2=1}^n a_{nk_2} \cdot b_{k_21} & \dots & \sum_{k_n=1}^n a_{nk_n} \cdot b_{k_n1} \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{1k_1} \cdot b_{k_11} & a_{1k_2} \cdot b_{k_21} & \dots & a_{1k_n} \cdot b_{k_n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk_1} \cdot b_{k_11} & a_{nk_2} \cdot b_{k_21} & \dots & a_{nk_n} \cdot b_{k_n1} \end{bmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} b_{k_11} \cdot b_{k_21} \dots b_{k_n1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{bmatrix}$$

Observa-se que, se $k_i = k_j$ com $i, j = 1, 2, \dots, n$, o determinante da referida parcela do somatório será igual a zero pois existem filas paralelas proporcionais e iguais. Então, tomando somente as permutações de $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ que serão chamadas de P e t e representará o número de inversão da permutação tomada.

$$\det(A \cdot B) = \sum_P (-1)^t \cdot b_{k_11} \cdot b_{k_21} \dots b_{k_n1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{bmatrix}$$

Como

$$\sum_P (-1)^t \cdot b_{k_1 1} \cdot b_{k_2 1} \cdots b_{k_n 1} = \det(B)$$

Logo, conclui-se que

$$\det(A \cdot B) = \sum_P (-1)^t \cdot b_{k_1 1} \cdot b_{k_2 1} \cdots b_{k_n 1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{bmatrix} = \det(B) \cdot \det(A)$$

ou seja

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

□

6.4 POLINÔMIOS

Os polinômios são séries de monômios ou termos em uma variável, isto é, um conjunto de monômios, devidamente normalizados.

6.4.1 Polinômios Complexos

Definição 6.23 *Seja a função $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa se existem números complexos a_0, a_1, \dots, a_n onde*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$.

Para Lima et al. (2006) os elementos a_0, a_1, \dots, a_n são denominados coeficientes e $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_{n-1} x^{n-1}$ e $a_n x^n$ são chamados de termos do polinômio $p(x)$ e a_0 é o seu termo independente.

Conforme Neto et al. (1982)

Definição 6.24 *Todo polinômio p tem grau n , se $a_n \neq 0$, e se $p(\alpha) = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$, então diz-se que α é raiz do polinômio p .*

Teorema 6.5 *O polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ é nulo se e somente se todos os seus coeficientes forem iguais a zero, isto é:*

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0)$$

Conforme lezzi (1977):

Demonstração 1º) Se $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ acarreta que $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.

2º) Se p é nulo, então existem $n + 1$ números $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ distintos dois a dois, que são raízes de p , isto é:

$$p(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \dots + a_n\alpha_0^n = 0$$

$$p(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \dots + a_n\alpha_1^n = 0$$

$$p(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \dots + a_n\alpha_2^n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \dots + a_n\alpha_n^n = 0$$

Então têm-se um sistema linear e homogêneo do tipo $(n + 1) \times (n + 1)$, onde as incógnitas são a_0, a_1, \dots, a_n . Assim, tem-se o determinante deste sistema, que é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

e são não nulos por se tratar do determinante de uma matriz de Vandermonde² e cujos elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sendo todos distintos, logo o sistema tem uma única solução que é a solução trivial:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

6.4.2 Operações

A) Adição

Definição 6.25 Dados dois polinômios na variável x :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

²Matriz de Vandermonde, cujo nome faz referência a Alexandre-Théophile Vandermonde, é uma matriz em que os termos de cada linha estão em progressão geométrica

Defini-se polinômio soma de $p(x)$ e $q(x)$ como:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

Propriedades da adição

Segundo Neto et al. (1982), tem-se as seguintes propriedades:

1. Comutativa:

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

Demonstração *Sejam os seguintes polinômios:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_n^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_n^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

Tem-se então que:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$$

e

$$q(x) + p(x) = \sum_{i=0}^n (b_i + a_i)x^i$$

Logo:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^n (b_i + a_i)x^i = q(x) + p(x)$$

2. Associativa:

$$[p(x) + q(x)] + h(x) = p(x) + [q(x) + h(x)]$$

Demonstração *Sejam os seguintes polinômios:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_n^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_n^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_n^n = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} [p(x) + q(x)] + h(x) &= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^n c_i x^i = \\ &= \sum_{i=0}^n [(a_i + b_i) + c_i]x^i = \sum_{i=0}^n [a_i + (b_i + c_i)]x^i = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n (b_i + c_i)x^i = p(x) + [q(x) + h(x)] \end{aligned}$$

3. Elemento Neutro:

Dados os polinômios $p(x)$, então existe um polinômio $0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$ tal que

$$p(x) + 0(x) = p(x)$$

onde $0(x)$ é o elemento neutro da adição.

4. Oposto

Seja o polinômio $p(x)$, então têm-se um polinômio $\bar{p}(x)$ tal que

$$p(x) + \bar{p}(x) = 0(x)$$

onde $\bar{p}(x)$ indica-se como $-p(x)$.

B) Multiplicação de Polinômios

Definição 6.26 *Dados os polinômios:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_m x^m$$

então o produto de $p(x) \cdot q(x)$ é:

$$p(x) \cdot q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots + a_mb_nx^{m+n}$$

Onde o polinômio $p(x) \cdot q(x)$ pode ser escrito como:

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$$

sendo que o coeficiente c_k é obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}.$$

Propriedades da Multiplicação

A operação de multiplicação em $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, e coeficientes complexos, vale as seguintes propriedades:

1. Comutativa:

Dado os polinômios $p(x), q(x)$, tem-se:

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

Demonstração Dados os polinômios $p(x)$ e $q(x)$, tem-se:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

Tem-se que o coeficiente de x^i no produto de $p(x) \cdot q(x)$ é:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$$

e o coeficiente de x^i no produto $q(x) \cdot p(x)$ é:

$$b_0a_i + b_1a_{i-1} + \cdots + b_{i-1}a_1 + b_ia_0$$

Em \mathbb{C} , a adição e multiplicação são comutativas, logo pode-se concluir que os coeficientes determinados são iguais para todo i . Sendo assim, a multiplicação de polinômios admite a comutatividade.

2. Associativa:

Dado os polinômios $p(x)$, $q(x)$ e $h(x)$, tem-se:

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$$

Demonstração *Seja os polinômios,*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_ix^i + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_ix^i + \cdots + b_nx^n$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_ix^i + \cdots + c_nx^n$$

Tem-se que o coeficiente x^i em $p(x) \cdot q(x)$ é $u_i = a_0b_1 + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0$ e que o coeficiente de x^i em $[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x)$ é:

$$\sum_{i=0}^n u_i c_{n-1} = u_0 c_n + u_1 c_{n-1} + \cdots + u_n c_0 =$$

$$a_0 b_0 c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) c_0$$

Sendo assim, obtém-se uma soma da forma

$$\sum_{j_1+j_2+j_3=n} a_{j_1} \cdot b_{j_2} \cdot c_{j_3}$$

Agora analogamente para $p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$ chegar-se-á ao mesmo resultado. Logo a multiplicação aceita a associatividade.

3. Elemento Neutro:

Seja o polinômio $p(x)$, existe um polinômio $e(x)$, onde chamar-se-á de elemento neutro da multiplicação, tal que:

$$p(x) \cdot e(x) = p(x)$$

4. Distributiva:

Dados os polinômios $p(x)$, $q(x)$ e $h(x)$, tem-se:

$$[p(x) + q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$$

Demonstração *Sejam os polinômios,*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_ix^i + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_ix^i + \cdots + b_nx^n$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_ix^i + \cdots + c_nx^n$$

onde o coeficiente de x^i em $p(x) \cdot h(x)$ é:

$$p(x) \cdot h(x) = \sum_{k=0}^i a_k c_{i-k},$$

O coeficiente de x^i em $q(x) \cdot h(x)$ é:

$$q(x) \cdot h(x) = \sum_{k=0}^i b_k c_{i-k},$$

O coeficiente de x^i em $p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$ é:

$$p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x) = \sum_{k=0}^i (a_k c_{i-k} + b_k c_{i-k}) \quad (6.3)$$

e o coeficiente de x^i em $p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$ é:

$$[p(x) + q(x)] \cdot h(x) = \sum_{k=0}^i (a_k + b_k) c_{i-k} \quad (6.4)$$

Sendo que nos \mathbb{C} vale a distributiva, logo tem-se que a Equação (6.3) é igual a Equação (6.4). Então a multiplicação de polinômios admite a distributividade.

6.4.3 Grau do Polinômio

Segundo lezzi (1993)

Definição 6.27 *Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de p , e representa-se por ∂p ou $gr p$, o número natural n tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$.*

$$\partial p = n \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \quad \forall i > n \end{cases}$$

Assim, tem-se que o índice do coeficiente de maior grau não nulo de $p(x)$ é o grau do polinômio $p(x)$.

A) Grau da Soma

Para Gomes (2013):

Definição 6.28 Dados os polinômios não nulos, $p(x)$, $q(x)$, então, o $\partial(p+q)$ é menor ou igual ao maior dos números ∂p e ∂q .

$$\partial(p+q) \leq \max\{\partial p, \partial q\}$$

Demonstração Se $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, $\partial p = m$ e $\partial q = n$, então $a_n = 0$ e $b_m = 0$ e admitindo que $m > n$. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, tem-se:

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0$$

e

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0 \quad \forall i > m$$

Portanto, $\partial(p+q) = m = \max\{\partial p, \partial q\}$.

Admitindo-se $m = n$, tem-se:

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0 \quad \forall i > m$$

$$c_m = a_m + b_m,$$

pode ser nulo, então:

$$\partial(p+q) \leq \max\{\partial p, \partial q\}$$

B) Grau do Produto

De acordo com lezzi (1993),

Definição 6.29 Dado dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ não nulos, o $\partial(p \cdot q)$ é igual a soma dos ∂p e ∂q , isto é:

$$\partial(p \cdot q) = \partial p + \partial q$$

Demonstração Se $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$, onde $\partial p = m$ e $\partial q = n$, e

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

um coeficiente qualquer de $(p \cdot q)(x)$.

Assim tem-se:

$$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$$

$$c_k = 0, \quad \forall k > m + n$$

então:

$$\partial(p \cdot q) = m + n = \partial p + \partial q$$

6.4.4 Divisão de Polinômios

Segundo Neto et al. (1982):

Teorema 6.6 Dados um polinômio qualquer $A(x)$, que será chamado de **dividendo**; um polinômio $B(x)$, não nulo, que será chamado de **divisor**, poderá ser dito que existe um e somente um par de polinômios, $Q(x)$, que será denominado de **quociente** e $R(x)$, que será denominado de **resto da divisão**, tal que:

$$I) \quad A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$II) \quad \partial R < \partial B \quad \text{ou} \quad R(x) = 0$$

Demonstração Tem-se:

1ª Parte: Existência de uma solução

Observa-se inicialmente que se $A(x) \equiv 0$ ou $\partial A < \partial B$ existe, então a solução $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv A(x)$, satisfazendo I) e II).

Supondo agora que, $A(x) \neq 0$ e $\partial A \geq \partial B$.

Sejam

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$B(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0$$

com $n \geq m$.

Seja o polinômio:

$$R_1(x) = A(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad (6.5)$$

em que:

$$\partial R_1 < \partial A,$$

pois há o cancelamento de pelo menos do termo $a_n x^n$.

Se $\partial R_1 < \partial B$, a existência está estabelecida; então $Q_1(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ e $R_1(x)$ respondem à questão.

Se $\partial R_1 \geq \partial B$, escreve-se:

$$R_1(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

onde $c_p \neq 0$ e $p \geq m$.

Toma-se agora o seguinte polinômio:

$$R_2(x) = R_1(x) - \frac{c_p}{b_m} x^{p-m} \cdot B(x)$$

onde $\partial R_2 < \partial R_1$.

Se $\partial R_2 < \partial B$, a existência está estabelecida; então $Q_1(x) + Q_2(x)$, onde $Q_2(x) = \frac{c_p}{b_m} x^{p-m}$, e $R_2(x)$ responde à questão.

Se $\partial R_2 \leq \partial B$, escreve-se:

$$R_2(x) = d_q x^q + d_{q-1} x^{q-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

onde $d_q \neq 0$ e $q \leq m$.

Agora será construído o seguinte polinômio:

$$R_3(x) = R_2(x) - \frac{d_q}{b_m} x^{q-m} \cdot B(x)$$

onde $\partial R_3 < \partial R_2$.

Se $\partial R_3 < \partial B$, a existência está estabelecida; então $Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)$, onde $Q_3(x) = \frac{d_q}{b_m} x^{q-m}$, e $R_3(x)$ responde à questão.

Se $\partial R_3 \geq \partial B$ o processo continua:

$$R_4(x) = R_3(x) - Q_4(x) \cdot B(x) \quad (6.6)$$

.....

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - Q_n(x) \cdot B(x) \quad (6.7)$$

Os graus de ∂R_i constituem uma seqüência decrescente em \mathbb{N} :

$$\partial R_1 > \partial R_2 > \dots > \partial R_n > \dots$$

Dessa forma concluí-se que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\partial R_n < \partial B$$

Então, somando membro a membro as Equações (6.5) a Equação (6.7), obtem-se:

$$R_n(x) = A(x) - B(x)[Q_1 + Q_2(x) + \dots + Q_n(x)]$$

O par $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_n(x)$ e $R(x) = R_n(x)$ respondem à questão.

Observa-se que se pode ter, na aplicação do processo, algum $R_i(x) \equiv 0$. Neste caso, o par que responde à questão é $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_i(x)$ e $R(x) = R_1(x)$.

2ª Parte: Unicidade.

Pode-se mostrar que $Q(x)$ e $R(x)$ é único.

Supondo que existe um outro $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ que responde a questão.

Então:

$$\begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \partial R < \partial B \quad \text{ou} \quad R(x) \equiv 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x) \\ \partial R_1 < \partial B \quad \text{ou} \quad R_1(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Tem-se:

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) \equiv B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x)$$

ou

$$B(x) \cdot [Q(x) - Q_1(x)] \equiv R_1(x) - R(x) \quad (6.8)$$

Se os dois membros da igualdade acima não são nulos, então pode-se escrever:

$$\partial\{B \cdot [Q - Q_1]\} = \partial[R_1 - R]$$

Note que:

$$\partial\{B \cdot [Q - Q_1]\} = \partial[B + \partial[Q - Q_1]] \geq \partial B \quad (6.9)$$

$$\partial[R_1 - R] \leq \max\{\partial[R_1]; \partial[R]\} < \partial B \quad (6.10)$$

As relações (6.9) e (6.10) não são válidas. Logo, na desigualdade (6.8), os dois membros devem ser nulos; daí, como $B(x)$ não é nulo, obtém-se $R(x) = R_1(x)$ e $Q(x) = Q_1(x)$.

Assim mostra-se a unicidade da divisão.

□

Ainda, conforme Neto et al. (1982), "Se na divisão de $A(x)$ e $B(x)$ obtém-se $R(x) \equiv 0$, diz-se que $A(x)$ é **divisível por** $B(x)$ ou que $B(x)$ é **um divisor de** $A(x)$ ".

Se $B(x)$ divide $A(x)$, tem-se:

$$B(x) | A(x)$$

Pode-se obter o quociente e o resto de modo como descrevemos na demonstração (6.6), dispondo as operações de forma conveniente, que é o método da chave.

Exemplo:

Dividem-se os seguintes polinômios:

$$A(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$$

$$B(x) = x^2 - 2x + 3$$

Então tem-se:

$A(x)$	→	$3x^5$	-	$6x^4$	+	$13x^3$	-	$9x^2$	+	$11x$	-	1		x^2	-	$2x$	+	3	←	$B(x)$						
		-	$3x^5$	+	$6x^4$	-	$9x^3$													$3x^3$	+	$4x$	-	1	←	$Q(x)$
		$R_1(x)$	→				$4x^3$	-	$9x^2$	+	$11x$	-	1													
		$R_2(x)$	→				-	$4x^3$	+	$8x^2$	-	$12x$														
		$R(x)$	→						x^2	-	x	-	1													
			→						x^2	-	$2x$	+	3													
			→								$-3x$	+	2													

Técnicas de Divisão

A) Método de Descartes

Sejam $A(x)$ por $B(x)$ polinômios não nulos tais que

$$\partial A \geq \partial B$$

Seja $Q(x)$ o quociente e $R(x)$ e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$. Tem-se então, por (6.6)

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

onde obtemos:

$$\partial A = \partial[B \cdot Q + R]$$

Como $\partial R < \partial B$ ou $R(x) = 0$, pode-se escrever:

$$\partial A = \partial B + \partial Q$$

Então, o método de Descartes, também conhecido por método dos coeficientes a determinar, para os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ procurados tem-se:

$$1) \partial Q = \partial A - \partial B \quad (6.11)$$

$$2) \partial R < \partial B \text{ ou } R(x) = 0 \quad (6.12)$$

Para aplicar o método de Descartes, proceder-se-á da seguinte maneira:

- 1ª. Determina-se ∂Q e o máximo ∂R que ele pode assumir através das relações 6.11 e 6.12;
- 2ª. Escreve-se os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, onde os coeficientes são as incógnitas a serem determinadas;
- 3ª. Determina-se a identidade $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e os coeficientes das incógnitas de $Q(x)$ e $R(x)$.

lezzi (1993), apresenta um exemplo sobre o método de Descartes como segue

Efetuada-se a divisão de $A(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $B(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, pelo Método de Descartes.

Tem-se:

$\partial Q = 4 - 3 = 1 \rightarrow Q = ax + b$, logo tem-se que o quociente é um polinômio de grau 1.

$$\partial R < 3 \rightarrow \partial R = 2 \rightarrow R(x) = cx^2 + dx + e$$

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = A(x) \rightarrow (ax + b) \cdot (3x^3 - 2x^2 + 7x + 2) + (cx^2 + dx + e) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

então:

$$\begin{cases} 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 3b - 2a = -2 \rightarrow b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 7 \rightarrow d = 8 \\ e - b = 2 \rightarrow e = 2 \end{cases}$$

A partir do sistema acima obtém-se: $Q(x) = x$ e $R(x) = -4x^2 + 8x + 2$.

B) Divisão por Binômios do 1º Grau

Nesta parte, serão tratadas as divisões em que o divisor $B(x) = x - c$ é um polinômio de $\partial Q = 1$ e o dividendo $A(x)$ é um polinômio de $\partial A \geq 1$.

lezzi (1993), apresenta o seguinte Teorema a respeito desse caso;

Teorema 6.7 *O resto da divisão de um polinômio $A(x)$ por $B(x) = x - c$ é igual ao valor numérico de $A(x)$ em a , isto é, o resto é $A(c)$.*

Demonstração *De acordo com Neto et al. (1982):*

Na divisão de $A(x)$ por $x - c$ tem-se:

$$\begin{cases} A(x) = (x - c) \cdot B(x) + R(x) \\ \partial R < \partial[x - c] = 1 \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

A segunda relação garante que $R(x)$ é constante, isto é, tem grau zero ou nulo. Para determinar essa constante, substitui-se x por c na primeira relação; obtendo-se, sucessivamente:

$$A(x) = (x - c) \cdot B(x) + r$$

$$A(c) = (c - c) \cdot B(c) + r$$

$$A(c) = r$$

o que demonstra a propriedade.

O Teorema a seguir é uma extensão do teorema do resto. D'Alembert provou que a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio $(x - a)$ será exata, isto é, terá resto zero, se $P(a)$ for igual a zero. Com isso as conclusões sobre a divisão de polinômios por binômios, ficaram facilitadas, pois não se tornava mais necessário realizar as divisões para comprovar se ela é ou não exata.

Teorema 6.8 : Teorema de D'Alembert

Um polinômio $A(x)$ é divisível por $x - c$, se e somente se, $A(x) = 0$, isto é, c é raiz de $A(x)$.

Demonstração Segundo Gomes (2013)

De acordo com o Teorema (6.7), tem-se que $R(c) = A(c)$, então:

$$R(c) = 0 \Rightarrow A(c) = 0$$

C) Algoritmo de Briot-Ruffini

O dispositivo ou algoritmo de Briot-Ruffini, é um procedimento onde pode-se obter o $Q(x)$ e $R(x)$ na divisão de um polinômio $A(x)$ por outro polinômio do primeiro grau, ou seja, um $B(x) = x + c$.

De acordo com Neto et al. (1982), tem-se:

Seja o polinômio $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $n \leq 1$ pelo polinômio $x - c$, o quociente $Q(x)$, de grau $n - 1$, é de forma:

$$Q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \dots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

Aplicando o Método de Descartes na divisão de $A(x)$ por $x - c$, tem-se:

$$\begin{aligned} &(q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + q_{n-3} x^{n-3} + \dots + q_1 x + q_0) \cdot (x - c) = \\ &q_{n-1} x^n + q_{n-2} x^{n-1} + \dots + q_1 x^2 + q_0 x - cq_{n-1} x^{n-1} - cq_{n-2} x^{n-2} - \dots - cq_1 x - cq_0 = \\ &q_{n-1} x^n + (q_{n-2} - cq_{n-1}) x^{n-1} + (q_{n-3} - cq_{n-2}) x^{n-2} + \dots + \\ &+(q_1 - cq_2) x^2 + (q_0 - cq_1) x - cq_0 \end{aligned}$$

A identidade $A(x) \equiv (x - c) \cdot Q(x) + R$, onde R é constante, dá-se:

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_n \\ q_{n-2} - cq_{n-1} &= a_{n-1} \\ q_{n-3} - cq_{n-2} &= a_{n-2} \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 - cq_2 &= a_2 \\ q_0 - cq_1 &= a_1 \\ r - cq_0 &= a_0 \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_n \\ q_{n-2} &= a_{n-1} + cq_{n-1} \\ q_{n-3} &= a_{n-2} + cq_{n-2} \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 &= a_2 + cq_2 \\ q_0 &= a_1 + cq_1 \\ r &= a_0 + cq_0 \end{aligned}$$

O cálculo de $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$ e R , através das igualdades acima, tem uma natureza recorrente e, na prática, pode ser efetuado com a utilização do dispositivo de Briot-Ruffini:

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
	a_n	$cq_{n-1} + a_{n-1}$	$cq_{n-2} + a_{n-2}$	\dots	$cq_1 + a_1$	$cq_0 + a_0$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\dots	\uparrow	\uparrow
	q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	\dots	q_0	r_0

Gomes (2013), explica o mecanismo do algoritmo como:

1. Na primeira linha, à direita, colocam-se os coeficientes dos termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente. À esquerda, ficará a raiz do binômio divisor;
2. Baixa-se o primeiro coeficiente do dividendo; multiplica-se esse coeficiente pela raiz e soma-se o produto ao segundo coeficiente do dividendo, o resultado é escrito abaixo deste;
3. O resultado obtido é multiplicado pela raiz. Em seguida, adiciona-se o produto ao terceiro coeficiente;
4. Repete-se esse processo até o último coeficiente.

Polinômio Característico

Para Anton e Rorres (2012), tem-se:

Teorema 6.9 *Dada uma matriz A , quadrada de ordem n , então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação*

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

onde I é a matriz identidade. Tem-se que essa é a equação característica de A .

Quando o determinante $\det(\lambda I - A)$ é expandido, tem-se um polinômio $P(\lambda)$ de grau n que chama-se de **polinômio característico** de A .

Segundo Fritscher (2011), podem-se definir polinômio característico como:

Definição 6.30 *Associado à matriz de adjacência de um grafo G , podem-se definir o polinômio característico do grafo G , que é o polinômio característico da matriz $A(G)$, definido como $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G))$.*

Conforme Abreu et al. (2014),

Proposição 6.1 *Seja G um grafo com n vértices e m arestas e se o polinômio característico de G .*

$$p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Tem-se que os coeficientes de $p_G(\lambda)$ satisfazem:

- i) $a_1 = 0$;
- ii) $a_2 = -m$;
- iii) $a_3 = -2t$, onde t é o número de triângulos no grafo.

Demonstração Segundo Abreu et al. (2014), tem-se:

Pela teoria de matrizes têm-se que, para cada $i, 1 \leq i \leq s$, a soma dos menores principais de $A(G)$ quadrada de ordem i é igual a $(-1)^i a_i$.

- i) Como a diagonal de $A(G)$ é formada por zeros então todos os seus menores principais com uma linha e uma coluna são iguais a zero, de onde tem-se que $a_1 = 0$
- ii) Qualquer menor principal de $A(G)$ com duas linhas e duas colunas e que tenha entradas não nulas é obrigatoriamente da forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Como cada menor principal vale -1 e existe um deles para cada par de vértices adjacentes tem-se que

$$(-1)^2 a_2 = (-1) \cdot |E| = (-1) \cdot m$$

Assim, tem-se que $a_2 = -m$, onde m é o número de arestas de G .

- iii) Existem apenas três possibilidades para submatrizes principais não nulas de $A(G)$ quadrada de ordem três, seus determinantes são:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Destes, o único nulo é o último, cujo valor é 2, e que corresponde a três vértices mutuamente adjacentes, ou seja, um triângulo. Então, tem-se que $(-1)^3 a_3 =$

$2 \cdot t$, onde t é o número de triângulos de G . Portanto, $a_3 = -2t$, como deseja-se demonstrar.

□

6.4.5 Equações Algébricas

Definição 6.31 Chama-se de *Equação algébrica* ou *Equação Polinomial* toda equação da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ e n é o grau da equação.

A) Raiz da Equação Algébrica

Segundo Pontes (2013), tem-se:

Definição 6.32 Chama-se de *Raiz* ou *Zero da equação algébrica*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (6.13)$$

o valor α que substituído no lugar do x satisfaz a igualdade, ou seja,

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (6.14)$$

Raiz do Polinômio de grau 4

Nesta subseção será mostrado como determinar as raízes de uma equação do quarto grau descoberta por Ferrari ³ no século XVI, sendo que a de grau 3 poderá ser consultada em Matos (2014).

Primeiramente será demonstrado como transformar a equação quártica geral na sua forma reduzida, para depois apresentar a solução descoberta por Ferrari.

Conforme Santos (2013b). Seja a equação polinomial geral de 4º grau, conhecida com quártica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

onde a, b, c, d e e são constantes reais e $a \neq 0$. Será realizada uma mudança de variável $x = y + \delta$, com δ a ser determinada de forma conveniente. Assim,

$$a(y + \delta)^4 + b(y + \delta)^3 + c(y + \delta)^2 + d(y + \delta) + e = 0$$

Desenvolvendo os produtos e reagrupando adequadamente, obtém-se a equação:

³Lodovico Ferrari (1522 - 1565), matemático italiano, nascido em milão e foi discípulo de Girolamo Cardano, (WIKIPEDIA, 2017b)

$$ay^4 + \underbrace{(4a\delta + b)}_{b'}y^3 + \underbrace{(6a\delta^2 + 3b\delta + c)}_{c'}y^2 + \underbrace{(4a\delta^3 + 3b\delta^2 + 2c\delta + d)}_{d'}y + \underbrace{(a\delta^4 + b\delta^3 + c\delta^2 + d\delta + e)}_{e'} = 0$$

Será tomado δ de forma que $b' = 0$, ou seja, $\delta = -\frac{b}{4a}$. Substituindo este valor na equação acima, obtém-se a equação:

$$ay^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a} + c\right)y^2 + \left(\frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)y + \left(-\frac{3b^4}{256a^3} + \frac{b^2}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0$$

Multiplicando toda a equação por $\frac{1}{a}$, segue que:

$$y^4 + \underbrace{\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{b^2}{a}\right) + \left(\frac{c}{a}\right)\right]}_p y^2 + \underbrace{\left[\frac{1}{8}\left(\frac{b^3}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right)\right]}_q y + \underbrace{\left[-\frac{3}{256}\left(\frac{b^4}{a}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \left(\frac{e}{a}\right)\right]}_r = 0$$

que está na forma reduzida $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.

Ferrari teve a ideia de reagrupar os termos de forma adequada em que ambos os lados da quártica reduzida, de modo a obter trinômios quadrados perfeitos em cada um dos lados. Se for possível, bastaria extrair as raízes quadradas de ambos os membros e, com isso, recair num par de equações quadráticas. E de fato esse elegante argumento funcionou, como será visto a seguir:

Pela equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ segue que $y^4 + py^2 + r = -qy$ e somando $\alpha y^2 + \beta$ em ambos os membros (onde α e β serão determinados a posteriori) será encontrado que:

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta.$$

Para que esses trinômios sejam quadrados perfeitos, é necessário e suficiente que os respectivos discriminantes sejam iguais a zero, ou seja

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \quad (6.15)$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0. \quad (6.16)$$

De $q^2 - 4\alpha\beta = 0$ segue que $\beta = \frac{q^2}{4\alpha}$. Substituindo por β por $\frac{q^2}{4\alpha}$, na Equação (6.15), concluímos que $p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0$, e que rearrumando em função de α , tem-se que

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0.$$

A Equação (6.4.5) é uma cúbica na incógnita α . Como já se sabe resolver as cúbicas, pode-se achar α . Encontrando α , poder-se-à determinar β , mas não é necessário, pois quando escreve-se os trinômios na sua forma fatorada:

$$\left(y^2 + \frac{p + \alpha}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right)\right)^2$$

Note-se que β não aparece nas formas fatoradas dos trinômios.

Extraíndo as raízes quadradas de ambos os membros, segue que

$$y^2 = \frac{p + \alpha}{2} = \pm \sqrt{\alpha\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right)}.$$

Assim tem-se um par de equações quadráticas:

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \frac{p + \alpha}{2} + \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha} = 0 \quad (6.17)$$

ou

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \frac{p + \alpha}{2} - \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha} = 0. \quad (6.18)$$

Cada uma das equações quadráticas (6.17) e (6.18) fornece duas raízes da quártica reduzida. Então, ao resolver as duas equações quadráticas obtem-se as 4 raízes da quártica reduzida. Para calcular as raízes da quártica original, basta lembrar que $x = y - \frac{b}{4a}$.

Esse método, usado por Ferrari, mostra que existe um caminho estritamente algébrico que leva às raízes da quártica. No entanto, como ele depende da solução de uma cúbica, pode ser que esta não seja passível de solução algébrica, então não seria possível resolver algebricamente a quártica associada.

Relações entre Coeficientes e Raízes

Em uma equação algébrica, existem importantes relações entre os coeficientes e as raízes, sendo que essas relações foram estabelecidas por Girard ⁴

Serão deduzidas as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau $n \geq 1$.

Conforme lezzi (1993), seja:

Seja a equação algébrica:

⁴Albert Girard (1595 - 1632), matemático francês nasceu em Saint-Mihiel, estudou álgebra, trigonometria e aritmética.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_n \neq 0$ e cujas raízes são r_1, r_2, \dots, r_n , têm-se a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = \\ &= a_n x^n - a_n \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)}_{S_1} x^{n-1} + \\ &+ a_n \underbrace{(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n)}_{S_2} x^{n-2} - \\ &- a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)}_{S_3} x^{n-3} + \dots + \\ &+ (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + \dots + (-1)^n a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 \dots r_n)}_{S_n}, \forall x \end{aligned}$$

portanto, aplicando a condição de identidade, tem-se:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \tag{6.19}$$

$$S_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \tag{6.20}$$

$$S_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \tag{6.21}$$


.....

$$S_n = r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \tag{6.22}$$

Sendo que $S_h = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n}$.

Têm-se então que da Equação (6.19) a Equação (6.22) são as relações entre coeficientes e raízes da equação $p(x) = 0$, também chamadas de relações de Girard.

7 APÊNDICE B



**15ª SEMANA ACADÊMICA
INTEGRADA DO CCNE**

**ATIVIDADES LÚDICAS PARA O
ENSINO DE MATEMÁTICA
GRAFOS**

Lima Letícia¹(EX); Lovis, Cristhian¹(EN); Dambrós, Tauana¹(IC); Rossini, Gustavo(PROFMAT); Tonet, Luciane G.²(O); Buligon, Lidiane²(CO)

¹Acadêmico do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria; ²Docente do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria

- Um assunto bastante discutido entre os alunos do Ensino Médio são as redes sociais. Sendo que a grande maioria dos alunos demonstram um grande interesse nessa forma de convívio social, e com isso, tornando-se o assunto interessante para se trabalhar em sala de aula e deixando-a mais atrativa para os alunos.

- Mas a pergunta é: Qual é a ligação entre as redes sociais e a matemática?

- Sabemos que as relações de amizades nessas redes sociais é algo significativo para os alunos, sendo que podemos fazer a nossa própria rede social em sala de aula, onde os participantes das redes são os próprios alunos.

- Cada aluno terá um determinado número de amigos, onde esses amigos serão ligados por barbantes, significando a amizade entre eles.
- Essa ideia de fazer as amizades na rede social, nos leva a introduzir a ideia de Grafos.

GRAFOS

- DEFINIÇÃO 1: Um grafo é uma estrutura $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio, onde chamamos os seus elementos de vértices. E os elementos do conjunto E , são chamados de arestas de grafo.

- Definição 2: Seja G um grafo, com n vértices. Seja E conjunto das arestas de G . Definimos a matriz de adjacência $A(G) \in M_{n \times n}$ por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

DETERMINANTE

- Definição 3: O determinante de uma matriz A , $n \times n$, escrito $\det(A)$, é um escalar associado à matriz A que é definido indutivamente por

$$\det(A)$$

$$= \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

na qual

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$

Polinômio Característico

- Definição 4: Associado à matriz de adjacência de um grafo G , podemos definir o polinômio característico do grafo G , que é o polinômio característico da matriz $A(G)$, definido como $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G))$.

ATIVIDADE 1

- Vamos dividir a turma em grupos de 3 alunos;
- Determinamos o Grafo gerado, sendo que cada aluno é um vértice e os barbantes são as arestas que relaciona as amizades feitas entre eles na rede social;
- Após as amizades serem feitas determinamos a matriz adjacência;
- Determine o polinômio característico usando o Teorema de Laplace ou Escalonamento.

ATIVIDADE 2

- Agora dividiremos a turma em grupos de 5 alunos;
- Determinamos o Grafo gerado, sendo que cada aluno é um vértice e os barbantes são as arestas que relaciona as amizades feitas entre eles na rede social;
- Após as amizades serem feitas determinamos a matriz adjacência;
- Determine o polinômio característico usando o Teorema de Laplace ou Escalonamento;

REFERÊNCIAS

- FRITSCHER, Eliseu. Propriedades espectrais de um grafo. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29237/000776205.pdf?sequence=1>. Acesso em: ago. de 2016.
- José L. Boldrini, Sueli I. R. Costa, Vera L. Figueiredo, e Henry G. Wetzler. Álgebra Linear. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3ª. edição, 1986.
- N.M.M. Abreu, R. Del-Vecchio, C. Vinagre, D. Stevanović, "Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução", IIIº Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014. Disponível em http://mtm.ufsc.br/coloquiosul/notas_minicurso_6.pdf. Acesso ago. 2016.