UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Hakel Fernandes de Awila

UMA ANÁLISE DA CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA COMO RECURSO INTERATIVO PARA O ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

Santa Maria, RS
2017

Hakel Fernandes de Awila

UMA ANÁLISE DA CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA COMO RECURSO INTERATIVO PARA O ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS
2017

Hakel Fernandes de Awila

UMA ANÁLISE DA CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA COMO RECURSO INTERATIVO PARA O ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 31 de agosto de 2017:

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Ana Marli Bulegon, Dra. (UNIFRA)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2017

À minha mãe, Bernadete, que, com seu

coração maior do que o universo, sempre

fez o possível e o impossível por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde, sabedoria, por ter permitido que eu encontrasse pessoas extraordinárias na trajetória deste trabalho e, principalmente, por abrir os meus olhos para novos horizontes.

À minha mãe, Bernadete, pelo amor, carinho, atenção e por me ensinar valores que fundamentam minha vida.

À minha namorada, Etiane, por sempre acreditar no meu potencial, mesmo quando eu não acreditava. O teu incentivo e a tua torcida foram imprescindíveis!

Aos meus irmãos, Talia e Robson, pelos momentos de distração e apoio durante os intervalos de tantas horas de estudo.

Ao meu orientador, professor Ricardo Fajardo, pela paciência, confiança e por todas as sugestões e apoio para o desenvolvimento deste trabalho. Sempre foste extremamente receptivo com minhas ideias.

Às professoras Ana Marli Bulegon, Carmen Vieira Mathias e Maria Cecília Pereira Santarosa, pelas pertinentes sugestões e colaborações que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus estimadíssimos colegas mestres em Educação Matemática: Alexandre, Carol, Ivonete, Juliane, Maluza, Márcio e Priscila. O companheirismo nosso que começou há dois anos é algo maravilhoso. Obrigado pelos momentos de estudo e descontração. Dividir a sala de aula, bem como qualquer outro ambiente com vocês, sempre renderá conhecimentos e gargalhadas.

À professora Sandra Eliza Vielmo, por ter incentivado a participação dos estudantes calouros do curso de Matemática e a estes por terem participado da pesquisa. A colaboração de vocês foi fundamental, caso contrário meu planejamento não sairia do papel.

Aos professores do PPGEMEF, por compartilharem seus conhecimentos comigo.

À CAPES, por permitir que eu, na qualidade de professor do Ensino Fundamental, fosse beneficiado e incentivado a cursar o mestrado com bolsa de estudo.

Foto: Hakel Fernandes de Awila

“Muitos me perguntam qual é o segredo do sucesso, digo que existem duas coisas:
Primeiro, trabalhe duro.
Segundo, não ouça aqueles
que têm discurso derrotista.”
(Arnold Schwarzenegger)

RESUMO

UMA ANÁLISE DA CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA COMO RECURSO INTERATIVO PARA O ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

AUTOR: Hakel Fernandes de Awila
ORIENTADOR: Ricardo Fajardo

Este trabalho partiu do objetivo em investigar e verificar o quanto *applets* produzidos com o *software* GeoGebra podem contribuir para tornar o cálculo de área e volume, das principais figuras estudadas durante a Educação Básica, esclarecedor. Para verificar e investigar tais contribuições, calouros do curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria foram convidados para participar de encontros semanais, visando ao estudo dos referidos conteúdos. Ao todo, foram realizados sete encontros, com duração média de duas horas cada, em que se executou uma sequência didática, seguindo os princípios de Zabala (1998), que abordou os conteúdos de área e volume combinando as teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva. Antes do desenvolvimento do estudo, os calouros responderam um questionário para verificar seus conhecimentos prévios acerca desses conteúdos, e um segundo questionário foi respondido ao final da sequência didática, para, junto com o diário de pesquisa produzido durante a execução do planejamento, servir de dados para o cumprimento do objetivo. Realizou-se, portanto, uma pesquisa de campo, por meio de uma pesquisa-ação, diante da presença e participação do pesquisador ao ambiente de estudo (FLICK, 2004; FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Analisando o primeiro questionário, foi possível identificar que os calouros trabalharam esses tópicos de Geometria na sua formação básica por meio de uma aprendizagem mecânica, pois respondiam as questões de área e de volume tão somente com a aplicação de fórmulas, incorretas, muitas vezes. Confrontando o diário do pesquisador e o segundo questionário com o primeiro, foi possível inferir que, por meio da interação com os *applets* desenvolvida na sequência didática, os estudantes compreenderam as justificativas e/ou convencimentos dos motivos pelos quais determinadas sentenças matemáticas expressam os valores de área e volume.

Palavras-chave: Área. Volume. Área e volume. Sequência didática. GeoGebra.

ABSTRACT

AN ANALYSIS OF GEOGEBRA'S CONTRIBUTION AS AN INTERACTIVE RESOURCE FOR THE AREAS AND VOLUMES STUDY

AUTHOR: Hakel Fernandes de Awila
ADVISOR: Ricardo Fajardo

This paper was based on the objective of investigating and verifying how much the applets produced with the software GeoGebra can contribute to make the area and volume calculation, of the principal figures studied during the Basic Education, enlightening. In order to verify and investigate these contributions, freshmen from Mathematics graduation course of the Federal University of Santa Maria were invited to participate in weekly meetings aiming the study of the contents referred. In all, seven meetings were held, with an average duration of 2 hours each, in which it was executed a didactic sequence, following the Zabala's principles (1998), that approached the area and volume contents combining the theories of significative learning and cognitive load. Before the study development, freshmen answered a questionnaire to verify their previous knowledges about these contents and a second questionnaire was answered at the end of the didactic sequence to, along with the research diary made during the planning execution, serve as data to the fulfillment of the objective. It was performed, therefore, a field research by means of an action research in the presence and participation of the researcher in the study environment (FLICK, 2004; FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Analyzing the first questionnaire, it was possible to identify that freshmen worked these topics of Geometry in their basic formation by a mechanical learning, for they were answering the area and volume questions only with the application of formulas, incorrected, many times. Confronting the researcher's diary and the second questionnaire with the first one, it was possible infer that, through the interaction developed with the applets in the didactic sequence, the students understood the justifications and/or certifications of the reasons why certain mathematical sentences express area and volume values.

Keywords: Area. Volume. Area and volume. Didactic Sequence. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MG	Minas Gerais
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGEMEF	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
RS	Rio Grande do Sul
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
u.a	Unidade de área
u.c.	Unidade de comprimento
u.v.	Unidade de volume
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO[1]

Sou professor de Matemática, formado em 2011 pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), mesma instituição onde concluí, em 2015, a Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio. Atualmente, leciono a disciplina de Matemática na rede municipal de Santa Maria, no Ensino Fundamental, desde fevereiro de 2016, e, felizmente, tive a oportunidade de trabalhar em diversos cargos atribuídos à minha profissão, como professor, monitor e tutor.

Com a graduação concluída, iniciei a docência em Matemática no Ensino Fundamental logo em 2012, poucos meses após a formatura, o que considero um privilégio, já que são muitos os profissionais especializados que encontram enormes dificuldades para receberem uma oportunidade em sua área de formação. Nessa escola, desejei muitas vezes realizar aulas no laboratório de informática, ouvia falar muito bem sobre a utilização de *webquests* como ferramenta didática e sobre a possibilidade de os estudantes terem acesso a ela, em qualquer computador com acesso à internet. Porém, o laboratório de informática não funcionava adequadamente, pois eram muitos computadores ligados em rede e, dessa forma, seu funcionamento tornava-se muito lento, o que impossibilitava seu uso. A alternativa de informar o *link* de acesso aos estudantes para realizarem a tarefa em suas casas também não lograva êxito, porque, na ocasião, a comunidade escolar era muito carente, e as famílias não tinham condições de oferecer computadores e/ou internet aos seus filhos. Assim, eu partia para outras alternativas didáticas, em sala de aula, que não utilizassem, de maneira plena, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), situação que me causava desconforto como profissional da educação, pois, como indica Brasil (1997), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras (BRASIL, 1997, p. 67).

Apesar dessa forte recomendação, a falta de um laboratório de informática devidamente equipado, funcional e de outros recursos, fixavam limitações na minha forma de trabalhar os conteúdos em sala de aula.

[1] Na introdução, foi utilizada a primeira pessoa por versar sobre a trajetória do autor.

No mesmo ano, por quatro meses, acumulei tutoria na disciplina de "Tópicos de Análise na Reta Real", no curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pela Rede Gaúcha de Ensino Superior a Distância. Recordo que grande parte dos alunos tinha dificuldades em compreender alguns limites de assíntotas verticais e horizontais quando o gráfico das funções não estava explícito nos exercícios. Muitos aplicavam a mesma estratégia para determinar limites de funções definidas por polinômios a funções que apresentavam uma razão destes. Desse modo, nos pontos de descontinuidade, haveria uma indeterminação. Assim, a carência de noções de representação geométrica tornava o ensino conflituoso. Nos encontros presenciais, os polos disponibilizavam projetor multimídia e, com o uso do *software* de matemática dinâmica GeoGebra, pude esclarecer algumas dúvidas aos acadêmicos, tomando sempre o cuidado de evitar generalizações inadequadas e favorecer uma interpretação individual de cada função e suas características. Uma receita pronta e acabada para determinar limites, como os estudantes desejavam encontrar, não era possível nem era o objetivo da disciplina. Esta foi a primeira vez que utilizei o GeoGebra com alunos, e os resultados obtidos agradaram-me muito.

Conheci o GeoGebra durante a graduação, na disciplina Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação, optativa ao currículo do curso. Considero que a escolha por fazê-la foi bastante oportuna, pois conheci o *software*, o qual se trata de uma ferramenta com múltiplas utilidades para a Matemática, principalmente na área de Geometria e Álgebra. Nessa disciplina, recebi a tarefa de construir um manual apontando suas principais características, ferramentas e utilidades. Embora eu já conhecesse o *software* WinPlot desde o primeiro semestre de curso, o GeoGebra apresentava mais recursos e compilação gráfica superior, apesar da desvantagem em não oferecer construções tridimensionais na época.

Na disciplina, consegui realizar algumas construções com o objetivo de auxiliar colegas de graduação em algumas dúvidas, a maioria delas sobre Geometria, pois sempre tive um fascínio especial nessa área da Matemática. Mesmo com uma particular afeição pela disciplina desde o final do Ensino Fundamental, quando o conteúdo a ser estudado era Geometria, meu interesse intensificava-se. As construções realizadas buscavam explicitar alguns resultados matemáticos como, por exemplo, a soma dos ângulos internos de polígonos, o comportamento dos valores do seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, entre outros.

Na graduação, cursei as disciplinas de Geometria Plana e Espacial com o mesmo professor, João Batista Peneireiro, o que considero uma grande sorte, pois ele tinha uma facilidade imensa em realizar demonstrações e provocar inquietudes que motivava eu e meus colegas a querer aprender cada vez mais. Suas esquematizações e desenhos realizados no quadro eram muito objetivos, contudo, por não ter afinidades com as tecnologias, em suas aulas não eram utilizados *softwares* matemáticos que auxiliassem no ensino de Geometria. Apesar da extraordinária capacidade deste professor em representar figuras planas e tridimensionais no quadro, não tenho dúvidas de que o suporte de um *software* matemático pertinente abrilhantaria ainda mais suas práticas didáticas e aprendizagem de seus alunos, pois os desenhos no quadro não permitiam interações e movimentos.

Quando conheci os trabalhos realizados com o GeoGebra por Mentrard (2011), tive contato com construções que tornavam claro o entendimento de diversas propriedades matemáticas presentes nos conteúdos de álgebra, probabilidade, trigonometria, geometria espacial, entre outros. Na época, essas construções eram fruto de um domínio no *software* muito além do meu e exibiam funcionalidades que eu imaginava serem impossíveis de construir. Realizando o *download* de alguns desses *applets* (programas autoexecutáveis, que permitem interações e podem ser acessados de qualquer navegador), fui conhecendo novos comandos, ferramentas e pude, até mesmo, aprimorar meus conhecimentos em Geometria Analítica, que é essencial para a realização de construções mais refinadas.

No ano seguinte, em 2013, recebi convite para trabalhar no Ensino Médio na Educação de Jovens e Adultos (EJA) em outra instituição, o que me trouxe grande enriquecimento, tanto pessoal quanto profissional, pela necessidade de planejar minhas aulas com estudantes de faixa etária bem diferente. Nos momentos em que revisava conteúdos de Geometria Plana e Espacial, podia perceber que os alunos enunciavam fórmulas com forte imprecisão e sem convicção, apresentando grande indicativo de uma aprendizagem mecânica, isto é, como informa Moreira (2009a), quando o aprendiz tem, basicamente, o objetivo de memorizar resultados sem relacioná-los a conhecimentos prévios. Paralelamente ao EJA, no Ensino Fundamental onde também lecionava, minha escola adquiriu um projetor multimídia, recurso também disponível na escola do Ensino Médio. Tal recurso possibilitaria a exibição de vídeos e outros materiais didáticos aos alunos. Assim, passei a levar, em minhas aulas, quando pertinente, *applets* construídos no GeoGebra, que fossem capazes de favorecer, intuitivamente, a compreensão de alguns resultados da Matemática, como o teorema de Tales, o teorema de Pitágoras, o contorno do círculo, citando apenas alguns exemplos.

Mesmo com a ausência de um laboratório de informática, passei a utilizar esses recursos tecnológicos, projetor multimídia combinado com *applets*, de forma introdutória no ambiente escolar. Como sugerem Borba e Penteado (2007), o professor pode começar a utilizar o computador em sala de aula de maneira expositiva, ganhando confiança para utilizá-lo de outras formas no futuro.

Quando fui iniciar o estudo da área do quadrado e do retângulo com meus alunos do Ensino Fundamental, não encontrei, na época, materiais prontos no GeoGebra, como eu desejava trabalhar. Assim, tomei a iniciativa em construi-los. Tais construções resultaram em *applets*[2] que permitiam medidas arbitrárias de seus lados, e, em sua superfície, aparecia uma malha quadriculada para que os estudantes identificassem a unidade de área (u.a.), isto é, o quadrado unitário. O objetivo dos *applets* era que os alunos investigassem uma forma de determinar o número total de unidades de área sem a necessidade de uma representação biunívoca. Tal encaminhamento favorecia o raciocínio lógico em justificar o cálculo a ser realizado para determinar a área desses polígonos. Já no Ensino Médio, utilizava os mesmos *applets* para revisar os conteúdos e percebia resultados excelentes. Os alunos não se preocupavam em memorizar os resultados, e sim em entender a lógica que os determinavam.

Os retornos positivos motivaram-me a construir outros *applets* que explicassem o cálculo da área de outros polígonos, como paralelogramo, triângulo, losango e trapézio. Enquanto tais construções eram capazes de apresentar aos meus alunos do Ensino Fundamental um raciocínio lógico para determinar suas áreas, no Ensino Médio, as fórmulas enunciadas pelos estudantes passavam a fazer sentido, como eles próprios comentavam: “Agora eu sei por que isso é verdade”.

Em 2014, voltei a atuar como tutor, cargo que ocupo até hoje na UFSM, dessa vez no curso de Pedagogia pela modalidade a distância. Minhas tarefas concentram-se nas disciplinas de Educação Matemática. Destas, parte da avaliação dos acadêmicos está na resolução de exercícios de conteúdos matemáticos pertencentes aos três primeiros ciclos do Ensino Fundamental.

---

[2] Esses *applets* podem ser acessados em: <http://geogebra.org/hakel>.

O material didático disponibilizado aos universitários explica como efetuar as operações básicas com números racionais não negativos de forma cuidadosa, apontando todas as nuances desse conteúdo, e trilha um caminho didático relacionando os novos conhecimentos com aqueles já interiorizados, compactuando, portanto, com a aprendizagem significativa apresentada por Moreira (2009a) a respeito da teoria de Ausubel.

No entanto, quando os trabalhos têm como objetivo a construção, por exemplo, de um plano de aula ou a resolução de exercícios, os cálculos apresentados utilizam tão somente os algoritmos das operações necessárias para se determinar os resultados. Essa situação não apenas limita o raciocínio lógico dos graduandos como também resulta em um *déficit* no raciocínio de seus futuros alunos.

Ainda em 2014, comecei a atuar como monitor em um curso preparatório, popularmente conhecido como "cursinho". Entre minhas atribuições, estava participar de plantões semanais, em que deveria auxiliar os alunos com dúvidas na resolução de exercícios do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares da região central do Estado (RS) e da capital, o que ocorria sem delimitação de assunto. Por isso, no mesmo dia, era possível receber dúvidas tanto de raízes de equações do primeiro grau quanto de amplitudes e frequências de funções trigonométricas. Nesses plantões, muitas foram as vezes em que precisei corrigir exercícios de alunos por utilizarem fórmulas incorretas. Genericamente, a maioria aplicava fórmulas para encontrar um valor como resultado, o que, facilmente, ocasionava erros, como afirma Wachiliski (2007):

> [...] a maioria dos alunos empregam os dados numéricos existentes nos enunciados na tentativa de uma resolução aritmética desses problemas de forma automática ou aleatória, sem se importar com o significado do problema (WACHILISKI, 2007, p. 18).

Assim, não foram poucas as ocasiões em que o valor final encontrado pelos estudantes era completamente equivocado. Recordo-me, em especial, de um aluno que encontrou como resultado um número negativo, mas todas as alternativas eram positivas; questionou-me se o gabarito estava correto, em vez de analisar, mais uma vez, os dados iniciais do exercício, visto que este questionava a altura de uma ponte, isto é, o resultado encontrado não fazia sentido.

Dessa monitoria, surgiu, no ano seguinte, convite para regência de classe, na qual permaneci até ser aprovado na seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação

Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF). Enquanto estive à frente da classe, sempre que pude, expus, em sala de aula, algumas construções no GeoGebra, para que os alunos verificassem que a Matemática não é um conjunto de fórmulas lapidadas. Procurava apresentar alguns de seus resultados a partir do uso de outras propriedades matemáticas, como, por exemplo, o volume dos prismas, que tem sua generalização validada por causa do Princípio de Cavalieri.

Concomitante ao início das aulas do PPGEMEF e ao meu trabalho no Ensino Fundamental, ocupei o cargo de professor substituto, no Departamento de Metodologia da UFSM, por um semestre e tive a oportunidade de lecionar, no Ensino Superior, as disciplinas de Didática da Matemática I e II para o curso de Licenciatura em Matemática. No decorrer do semestre letivo, selecionei alguns resultados matemáticos, como área do trapézio, do círculo, vértice da parábola, produtos notáveis, entre outros, com a ideia de propor uma discussão sobre qual encaminhamento didático os alunos tomariam como professores ao iniciarem os estudos sobre esses conteúdos com as suas futuras classes. Para minha surpresa, todos os acadêmicos comentaram que não sabiam o porquê de esses resultados serem verdadeiros e que apenas lhe foram apresentados como válidos para resolverem exercícios específicos durante a Educação Básica. Apesar do problema inicial, a discussão foi capaz de estimular os envolvidos a buscarem compreender o motivo da validade de tais resultados matemáticos, e, por meio da socialização de ideias, todos os resultados foram devidamente explicados.

Essas experiências pessoais e profissionais que indicam o uso de fórmulas e/ou algoritmos à frente do raciocínio lógico, em muitos estudantes, convergiram para me motivar a elaborar esta dissertação a partir de *applets* construídos no GeoGebra – construções que possam apresentar, intuitivamente, convencimentos e/ou justificativas de sentenças matemáticas da Geometria.

Para tanto, calouros da graduação em Matemática da UFSM, licenciatura e bacharelado, serão convidados para participar de encontros semanais para conhecer os *applets* elaborados, com a finalidade de analisar se tais construções são capazes de esclarecer prováveis lacunas em seus conhecimentos, no que tange a esse assunto durante a Educação Básica.

1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA DE ESTUDO

Como verifico em minhas atividades profissionais, os estudantes, em geral, têm o hábito de estudar a Matemática de forma mecânica, como um conjunto de regras em diferentes tópicos, seja probabilidade, trigonometria, análise combinatória e, até mesmo, as operações com os números reais. Percebo que tais fatores colaboram para que os alunos encontrem enormes obstáculos quando o raciocínio lógico é exigido para construir uma estratégia de resolução, em questionamentos nos quais uma simples aplicação de fórmula não é o suficiente para respondê-los.

Dos conteúdos que são, muitas vezes, trabalhados de forma inadequada, os que me causam maior inquietação são os referentes a áreas e volumes. Note, por exemplo, que inúmeras pessoas, quando compram tinta, não têm o cuidado de medir a superfície que será pintada, muito menos verificam o rendimento nas informações da embalagem de tinta; eletrodomésticos que são vendidos com a medida de capacidade em litros provocam dúvidas nas pessoas que estão acostumadas a comprar móveis cuja venda ocorre com medidas de comprimento.

Sobre esses conteúdos, Lopes, Viana e Lopes (2007) alertam:

> A geometria desempenha um papel central no currículo da Matemática dos ensinos fundamental e médio – e com boas fundamentadas razões. O domínio dos conceitos geométricos básicos – como formas, medidas de comprimentos, áreas e volumes – é essencial para a integração de um indivíduo à vida moderna. Profissionais de várias áreas técnicas, como carpinteiros, marceneiros, serralheiros, pedreiros, metalúrgicos dentre muitos, usam cotidianamente tais conceitos. Mesmo sob um ponto de vista utilitarista (que não é, evidentemente, nossa visão da importância deste assunto), o ensino de geometria reveste-se de uma inquietante importância (LOPES; VIANA; LOPES, 2007, p. 82).

Diante de sua relevância no currículo matemático e por entender que o estudo de áreas e volumes não vem ocorrendo de maneira satisfatória na Educação Básica, desejo trabalhar aqui os seus conceitos e noções primárias.

1.2 OBJETIVO GERAL

Investigar e verificar o quanto *applets* construídos no GeoGebra podem contribuir para tornar o cálculo de áreas e volumes mais esclarecedor.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Projetando o cumprimento do objetivo geral da pesquisa, estruturam-se os seguintes objetivos específicos:

i) Produzir *applets* no GeoGebra que promovam um estudo compreensível e coeso de áreas e volumes;

ii) Confrontar as fórmulas sobre áreas e volumes interiorizadas pelos participantes da pesquisa, durante a Educação Básica, com seus argumentos sobre o porquê de esses resultados serem válidos e verdadeiros;

iii) Elaborar uma sequência didática nos moldes de Zabala (1998), a fim de auxiliar no estudo de conceitos desses tópicos e apresentar alternativas de justificativas e/ou demonstrações visuais de como se calculam tais áreas e volumes;

iv) Analisar as vantagens do uso de TIC como recurso pedagógico no ensino e na aprendizagem por meio da interatividade.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente dissertação, estruturada em oito capítulos, apresenta a seguir, no segundo capítulo, um levantamento bibliográfico onde realizei uma busca por trabalhos que tivessem como foco, estudos alternativos para o estudo de áreas e volumes.

No terceiro capítulo realizo algumas reflexões teóricas que fundamentam esta pesquisa, como o ensino inadequado de Geometria, que sonega deduções matemáticas favorecendo a banalização de fórmulas, e a ausência das TIC, principalmente as digitais no ensino de Matemática. Também são apresentadas as principais características do *software* GeoGebra, a estrutura da sequência didática delineada por Zabala (1998) e alguns fundamentos das teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva.

Em seguida, no quarto capítulo, descrevo as questões metodológicas da pesquisa, a saber: pesquisa de campo, realizada com estudantes do primeiro semestre da graduação em Matemática na UFSM, cujo planejamento prévio se constituiu por meio de uma sequência didática que combinou as teorias mencionadas anteriormente. Foram realizados encontros semanais com esses estudantes onde foram discutidas justificativas sobre os cálculos de algumas áreas e volumes a partir da interação com *applets* produzidos com o GeoGebra.

No quinto capítulo apresento a sequência didática que antecedeu aos encontros com os participantes da pesquisa. Esta é resultante das reflexões teóricas e foi constituída por uma série de questões com comentários associados aos *applets* com o objetivo de tornar o estudo dos referidos conteúdos mais esclarecedor.

No sexto capítulo relato o desenvolvimento da sequência didática, comentando circunstâncias pertinentes sobre a aprendizagem dos estudantes, que sugere uma avaliação positiva sobre o planejamento construído.

No sétimo capítulo são analisados os questionários preenchidos pelos participantes sobre seus conhecimentos de áreas e volumes, um foi preenchido no primeiro encontro e o segundo, no último. Analisando-os pude verificar que inicialmente os estudantes possuíam relevantes dificuldades nesses conteúdos, tanto em conceitos geométricos, como no cálculo das medidas. No entanto, como os relatos dos encontros indicam, analisando o segundo questionário foi possível verificar que a sequência didática possibilitou que muitas dessas dificuldades fossem sanadas.

No oitavo e último capítulo, apresento fendas conclusivas onde apuro os resultados da pesquisa a partir de reflexões tomadas sobre os objetivos iniciais e os resultados alcançados.

2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Na busca por verificar as pesquisas já produzidas sobre o ensino de área e volume, fez-se um levantamento de trabalhos publicados em diversos acervos digitais[3]. Nessa consulta, foi possível identificar uma baixíssima produção de trabalhos envolvendo os dois conteúdos, seja na forma de sequência didática para estudo de suas fórmulas, seja para estudo de seus significados, seja com a utilização das TIC.

Dos trabalhos encontrados, destacaram-se como instigantes e compatíveis com nossos objetivos os elencados a seguir. O primeiro corresponde à dissertação de mestrado acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil. O segundo e terceiro são dissertações oriundas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional; e o quarto é um artigo publicado na Revista da Universidade Vale do Rio Verde.

No dissertação *A Geometria no Ensino Médio: um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume* (2007), Chiele realizou essa pesquisa com o objetivo de investigar qual é o estágio de domínio de conhecimentos fundamentais de Geometria em um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio e o seu desenvolvimento acerca dos conceitos de comprimento, área e volume. Para cumprir o objetivo, foi elaborada uma sequência de aulas pautadas na Engenharia Didática de Artigue.

Essa investigação foi motivada pela constatação de que o ensino de Geometria, na Educação Básica, demonstra-se incapaz de atender aos seus objetivos. Dessa maneira, formam-se alunos com aprendizado insuficiente, isto é, com grandes dificuldades em noções elementares nessa área da Matemática.

As atividades que constituíram o desenvolvimento da sequência de aulas contaram com a produção de figuras planas e cubos construídos com cartolinas, papéis quadriculados, réguas, trenas, esquadros e calculadoras. Tais construções ocorreram conforme as práticas teóricas eram desenvolvidas dentro do planejamento. Para tanto, os alunos eram divididos em pequenos grupos, promovendo discussões e socializações de ideias.

[3] Banco de teses e dissertações da Capes (http://bancodeteses.capes.gov.br), periódicos da Capes (http://periodicos.capes.gov.br), Scientific Eletronic Library Online (http://scielo.org), Google Acadêmico (http://scholar.google.com.br), Repositório Digital da UFRGS (http://lume.ufrgs.br) e Revista Eletrônica Vydia (http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA).

Ao todo, foram realizados treze encontros com os estudantes. No primeiro dia, foi aplicado um questionário para que o pesquisador tivesse base sobre quais são os conhecimentos prévios acerca da identificação de figuras planas, paralelismo de retas, propriedades dos quadriláteros e cálculos de área, conteúdos que nortearam as aulas seguintes. Analisado esse questionário, o autor relata que os estudantes, em geral, não apresentavam conhecimento do significado de área, bem como demonstravam grandes dificuldades em medir comprimentos e em identificar que cálculo deve ser realizado para determinar uma área.

Durante os encontros, os estudantes foram apresentados a instrumentos de medida de comprimento (trena, metro, régua, paquímetro) e de ângulo (transferidor), além de manusearem um cubo de 1 dm^3, utilizado para posterior análise de volume. Também houve trabalho com as classificações dos quadriláteros, que permitiriam, em momento futuro, discussões sobre noções e ideias de suas áreas.

As áreas de figuras planas abordadas na Engenharia Didática, seguindo embasamento teórico de Artigue, são as de retângulo, triângulo, losango, trapézio e círculo. A estratégia para determinar essas áreas contou com a construção e decomposição de figuras desenhadas e recortadas na cartolina. Para trabalhar a ideia de volume, foi produzida, também com papel, uma enormidade de cubos congruentes, para que os estudantes identificassem, por meio de construções manuais, qual é a forma de calcular o volume do bloco retangular.

No último dia, foi oferecido um segundo questionário, que buscou captar os sentimentos e opiniões desse grupo sobre o trabalho realizado, assim como sua compreensão referente às aprendizagens dos conteúdos desenvolvidos. Diante das respostas prestadas pelos estudantes, o pesquisador verificou um retorno muito satisfatório, pois, além de apropriação do conceito de área, indicaram prazer e motivação ao realizarem as atividades do planejamento. Questões com o cálculo de volume também apresentaram retorno satisfatório, mas com menos acertos.

Ao término da pesquisa, o autor salientou a importância de um ensino contínuo da Geometria durante toda a Educação Infantil e Educação Básica. A Engenharia Didática mostrou-se uma oportuna escolha na construção do planejamento, que culminou em uma excelente alternativa para que os estudantes apresentassem uma satisfatória apropriação das ideias e conceitos apresentados.

Na dissertação *Área e volume de prisma e pirâmide* (2013), apesar do título do trabalho, Reis teve como principal objetivo apresentar estratégias para o ensino de poliedros no Ensino Médio, a partir de uma oficina e de uma mostra de Matemática oferecida a professores e alunos da rede pública estadual de Matipó, Minas Gerais. Como fruto dessa apresentação, também desejou constituir uma alternativa às atividades tradicionais no ensino desses sólidos. Para isso, decidiu contar com a utilização de computadores, para que pudesse, entre outros fatores, incentivar os professores à utilização das TIC e realizar a movimentação de figuras e construções complexas, como, por exemplo, o dodecaedro e o icosaedro, que são difíceis de reproduzir de outro modo.

Em seu trabalho, reservou o primeiro capítulo para apresentar alguns postulados básicos da geometria euclidiana, seguidos de uma série de definições de polígonos, triângulos, quadriláteros, circunferência e círculo. Admitindo que as áreas do retângulo e do quadrado são equivalentes ao produto das medidas de suas respectivas dimensões, passou a apresentar as áreas de paralelogramo, triângulo, losango, trapézio e de um polígono regular qualquer, finalizando com a definição de poliedro. Tais resultados não apresentavam discussões relevantes quanto à forma de cálculo dessas áreas, eram indicados a partir de breves e curtos comentários.

Em capítulo específico sobre o estudo de prismas e pirâmides, a autora comenta sobre a utilização de *softwares* matemáticos em possíveis atividades para realizar em sala de aula. Os *softwares* apresentados foram: Poly, Wingeom, Shape Calculator, Cabri 3D e GeoGebra 3D[4]. Sobre estes, a autora apresenta algumas construções possíveis de compor um planejamento para sala de aula e comenta sobre as suas principais contribuições.

Como produto de sua pesquisa, a Mostra de Matemática foi elaborada na tentativa de passar ao estudante uma naturalidade ao lidar com a Geometria. Ela contou com a participação de 67 alunos do 2º ano do Ensino Médio e foi dividida em duas etapas: produção e apresentação de trabalho à comunidade local.

Alguns dos temas destinados para os estudantes pesquisarem e produzirem os trabalhos foram: construção e planificação de poliedros com material concreto, relação dos poliedros com o cotidiano dos alunos, cálculos de perímetros, áreas e volumes. Essas pesquisas ocorreram no laboratório de informática da escola, que permitiu a utilização

[4] Em 2013, o *software* GeoGebra apresentava duas versões para *download*, a clássica, para estudo bidimensional, e uma versão beta, tridimensional, chamada de 3D.

dos *softwares* matemáticos para que os estudantes pudessem construir poliedros e aprender algumas de suas relações antes de produzirem suas planificações.

A apresentação desses trabalhos possibilitou que os alunos observassem que, para aprender Matemática, não é necessário apenas ficar retido ao modelo tradicional da sala de aula com um professor regente. A Matemática está presente de todas as formas em nosso redor, e as TIC podem, certamente, ser utilizadas para facilitar e instigar o aluno à aprendizagem.

Quanto à oficina desenvolvida junto aos professores, objetivou apresentar técnicas didáticas para favorecer a aprendizagem com tecnologias. Contou com a participação de doze professores, que receberam treinamento da autora para o uso dos *softwares* matemáticos durante suas aulas. A maioria deles avaliou o treinamento como positivo e disse acreditar que a inserção desses recursos seria capaz de proporcionar um melhor rendimento de seus alunos.

Em *Geometria no ensino básico: aplicações práticas como ferramenta de apoio no ensino da matemática* (2015), Rocha desenvolveu a pesquisa com o objetivo de externar as experiências de trabalho de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, a partir do planejamento de uma sequência de atividades que abordavam o cálculo de áreas e volumes de algumas figuras.

A sequência foi composta por cinco atividades práticas, em que os alunos foram incentivados a participar em busca de soluções para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. As atividades desenvolvidas foram:

i) Apresentar o conceito de diagonal com uso de embalagens em formato de bloco retangular, levadas pelos alunos, e calcular a área da base, a área lateral, a área total e o volume.

ii) Calcular a área interna, externa e o volume da caixa de água da escola. As medidas foram obtidas pelo autor e, em sala de aula, foi trabalhada a ideia de que, para determinar a área interna e o volume, seria necessário descontar a espessura das paredes do recipiente.

iii) Com a intenção de expressar o volume de um sólido qualquer, foi realizada a experiência de mergulhar alguns sólidos como pedras, que não apresentam um formato definido, em um aquário no formato de bloco retangular. A partir da diferença entre os volumes indicados no nível da água, foi possível determinar o volume desses sólidos.

iv) Calcular a área e o volume do cilindro reto (o autor utilizou a definição de cilindro para o caso específico do cilindro circular), novamente a partir de embalagens levadas pelos alunos com esse formato.

É importante observar que não houve apresentação de conceitos de área e volume pelo pesquisador. Este partiu da ideia de que os alunos já tinham esse conhecimento dos anos anteriores. As medições ocorriam com fita métrica, réguas e com outros instrumentos. Quanto aos cálculos realizados durante as atividades, os alunos apenas inseriam as medidas das embalagens nas fórmulas, que eram pouco discutidas, e os resultados eram obtidos com o auxílio da calculadora.

De acordo com os estudantes que participaram da pesquisa, as aulas práticas foram muito divertidas e capazes de despertar interesse e vontade de aprender em todos. Com o retorno positivo dos estudantes, o pesquisador concluiu que as atividades mostraram aos envolvidos que a Geometria e as suas relações matemáticas estão sempre presentes em nosso cotidiano.

No artigo *GeoGebra 3D: uma ferramenta para estudo de volumes no Ensino Médio* (SOUZA JÚNIOR; CARDOSO; CALIXTO, 2014), os autores objetivaram avaliar a aprendizagem dos estudantes em abordagens pedagógicas que seguem a aprendizagem significativa de Ausubel. Para isso, foi utilizado um material didático digital produzido especificamente para o estudo de volumes de algumas das principais figuras estudadas na Educação Básica e a dedução das fórmulas matemáticas envolvidas nesse processo.

Com o desenvolvimento desse material, os autores buscaram responder a seguinte pergunta: quais são as contribuições dos recursos tecnológicos para a aprendizagem de Geometria Espacial Métrica?

Para averiguar qual *software* matemático poderia ser utilizado como recurso tecnológico no planejamento do material didático, os pesquisadores fizeram um levantamento de qual programa de matemática dinâmica teria maior potencial para o desenvolvimento de construções de sólidos geométricos. Eles avaliaram os *softwares* Cabri 3D, Calques 3D e GeoGebra 3D, sendo este último o escolhido.

No GeoGebra 3D, os autores produziram três construções. A primeira, com a ilustração de um cubo, apresentava a ideia de volume como quantidade de espaço ocupada por sólido. No caso, o cubo era preenchido com cubos unitários e seus submúltiplos. Para possibilitar a disposição desses cubos menores, a construção permitia medidas racionais.

Generalizado o resultado do volume do cubo para o do bloco retangular, os autores realizaram uma segunda construção, que possibilitava a conclusão, por meio do Princípio de Cavalieri, dos volumes do paralelepípedo oblíquo, prisma, cilindro (consideraram cilindro como cilindro circular) em comparação ao bloco retangular.

Já para o estudo do volume da pirâmide, construíram um prisma triangular, que foi decomposto em três pirâmides de mesmo volume. Com esse resultado, novamente, pelo Princípio de Cavalieri, produziram mais uma construção que permite a conclusão do volume do cone (consideraram cone como cone circular) em comparação à pirâmide.

Com esses objetos elaborados, os pesquisadores aplicaram a sequência didática em duas escolas públicas de Ensino Médio, uma com 25 estudantes do segundo ano e a outra com 210 do terceiro. Para possibilitar o desenvolvimento da pesquisa, os estudantes foram divididos em pequenos grupos, com encontros que totalizaram 12 horas/aula para cada um.

A análise dos conhecimentos prévios constatou que quase a totalidade dos alunos não tinha conhecimento de polígonos e que nenhum dos participantes indicava corretamente o significado de área ou de volume. Alguns estudantes do terceiro ano, na tentativa de responder o significado de área, apresentaram as fórmulas das áreas do quadrado e do retângulo.

Ao final do desenvolvimento da sequência didática, os autores relataram que as construções produzidas foram fundamentais para que os estudantes fossem capazes de compreender a ideia de volume e de determinar as suas fórmulas das figuras trabalhadas. Verificaram que tais fórmulas eram obtidas pelos próprios alunos.

Com isso, pode-se verificar que os trabalhos descritos trazem à tona que é comum alunos chegarem ao Ensino Médio e concluírem a Educação Básica com enormes dificuldades em conceitos elementares de área e volume e da forma como se determinam essas medidas. Como solução, apresentam alternativas didáticas, assim como esta pesquisa, voltadas para favorecer o ensino e a aprendizagem desses conteúdos.

No entanto, nesta pesquisa, desenvolveu-se uma sequência didática, pautada em Zabala (1998), com uma série de *applets* produzidos com o *software* GeoGebra, resultante de uma combinação entre os principais fundamentos das teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva, disponível para acesso público em Awila (2017). O objetivo dessa sequência didática é promover um estudo que auxilie nos conceitos de áreas e volumes e que sejam discutidas razões de como algumas dessas medidas são determinadas.

Assim, buscou-se empregar reflexões teóricas que ajudem a revelar novas particularidades sobre as lacunas deixadas na Educação Básica durante o ensino desses conteúdos. Sobretudo, ao convidar calouros do curso de Matemática para a aplicação da sequência, pois é natural aguardar que ingressos no curso tenham certa afinidade com conteúdos estudados no Ensino Fundamental e Médio, visto que, a princípio, desejam seguir a profissão de professores e/ou pesquisadores de Matemática.

3 REFLEXÕES TEÓRICAS

3.1 INAPROPRIAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA

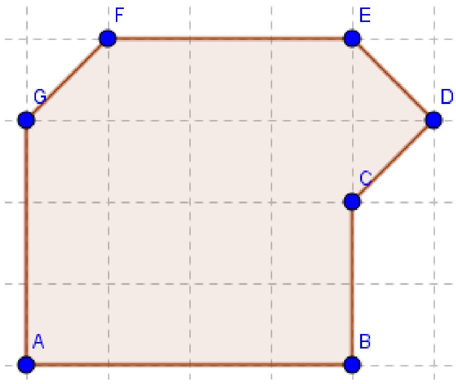
Na Matemática, a área de Geometria parte de alguns postulados e, a partir destes, permite que outros resultados sejam alcançados. Para tanto, é utilizado o chamado raciocínio lógico matemático. Assim, partindo de uma afirmação considerada uma verdade incontestável, ideias podem ser desenvolvidas e culminar em novas descobertas. Porém, o ensino de Geometria, não diferente das outras subáreas da Matemática, tem seguido um caminho inapropriado; em vez de dar-se um "pontapé" inicial que promova o desenvolvimento do raciocínio e do conteúdo, tem-se trabalhado como uma memorização de resultados prontos. Como Lopes, Viana e Lopes (2007, p. 86-87, grifo dos autores) indicam, "em muitos livros-texto, a GEOMETRIA é encarada como uma mera coleção de fórmulas de áreas e volumes. Algumas pessoas argumentam que é suficiente ao aluno conhecer tais fórmulas, pois será supostamente o que irão aplicar".

Assim, os alunos são apresentados a resultados simplificados sem saberem o porquê de sua validade; tornam-se, portanto, meros receptores de informação. Não trabalham em sala de aula, por exemplo, o que significa encontrar o valor de uma área ou de um volume, apenas são ensinados a encontrar valores numéricos a partir do uso de fórmulas. Gravina (2001, p. 3) comenta sobre o mesmo problema: "Quando falam sobre geometria, os professores referem-se somente às fórmulas e aos cálculos ou à comprovação experimental de propriedades, desconsiderando a demonstração como forma de validação do conhecimento matemático".

Esse tipo de situação deixa claro que, para muitos professores de Matemática, o uso banalizado de fórmulas, durante o estudo de Geometria, já é assumido como uma prática comum. Para tornar o ensino desse conteúdo ainda mais inadequado, a utilização de comprovações experimentais de propriedades pode estimular a ideia de que um princípio servindo para poucos casos pode ser equivocadamente generalizado.

Estimular o raciocínio lógico (VENTURI, 2012) é uma das tarefas imprescindíveis da escola. No entanto, como observado por Leivas (2009), ao propor-se um ensino limitado pelo uso de fórmulas com os alunos, assuntos importantes e relevantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico são desperdiçados. Por exemplo, que estratégia um aluno com ensino restrito a fórmulas tomará para calcular a área do polígono ABCDEFG (figura 1)?

Figura 1 – Polígono ABCDEFG



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mesmo conhecendo fórmulas para calcular algumas áreas, estas pouco servirão para determinar a do polígono acima, contudo, adotando o quadrado da malha quadriculada como u.a., percebe-se a particularidade de alguns lados corresponderem a diagonais dos quadrados unitários. Assim, prontamente, pode-se expressar sua área por 16,5 u.a. Para responder essa questão, não há necessidade de utilizar fórmulas, o fundamental é ter o conceito de área muito bem fundamentado e esclarecido, isto é, que o valor de uma área pode ser expresso a partir de uma comparação com uma determinada unidade de medida.

Essa falta de incentivo ao raciocínio lógico dentro das escolas é mencionada por Gravina (2001):

> Muito pouco tem feito a escola quanto ao aprendizado da geometria, ao não propiciar atitudes cognitivas voltadas à construção deste saber. Em geral, os livros didáticos tratam a geometria como um dicionário de definições, e esparsas propriedades geométricas são apresentadas como "fatos dados". Os professores, desprovidos de estratégias pedagógicas que considerem as dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto ao significado de produzirem uma demonstração, voltam-se a um trabalho superficial, não provocador quanto a argumentações dedutivas e, portanto, pouco significativo em termos de aprendizagem (GRAVINA, 2001, p. 3).

O fato de apresentar resultados geométricos sem argumentos que os comprovem adequadamente favorece o entendimento incorreto por parte estudantes de que os resultados matemáticos não precisam ser demonstrados ou justificados – o que é totalmente equivocado. Além disso, o caráter dedutivo que a Matemática tem como uma de suas responsabilidades (BRASIL, 1997) fica completamente prejudicado.

O ensino superficial da Geometria também limita os alunos no aspecto cultural, já que o modelo de Matemática admitido hoje (BRASIL, 1998a, p. 25) "originou-se com a civilização grega, no período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas".

O conhecimento desses fatos históricos é relevante para formação cultural dos estudantes. Nessa mesma linha de pensamento, Lorenzato (1995) comenta que o ensino de Geometria ocorre desligado de explicações de natureza histórica e complementa que esse conteúdo, geralmente, é trabalhado no final do ano letivo, aumentando, portanto, a possibilidade de não ser estudado por falta de tempo.

Consequentemente ao uso de fórmulas assumidas como verdadeiras, a metodologia de ensino utilizada nas instituições de ensino pauta-se, fortemente, na aplicação destas para resolução de exercícios repetitivos, que, conforme Wachiliski (2007), na sua maioria, são resolvidos com o uso de algoritmos.

Essa tendência em resolver problemas por meio da aplicação de fórmulas e algoritmos não deixa de ser uma das responsáveis pela falta de estímulo ao uso do raciocínio dedutivo na resolução de exercícios. Sobre tal prática, Wachiliski (2007, p. 8) comenta que "essa é sem dúvida a tendência, ou até mesmo a metodologia, mais empregada no ensino da Matemática no mundo todo" – deixando claro que essa realidade não é algo específico de nosso país. Quando a metodologia foca-se, exclusivamente, na resolução de exercícios, outros objetivos dos conteúdos trabalhados em sala de aula perdem-se, como, por exemplo, realizar estimativas e testar conjeturas, isto é, realizar tarefas de caráter investigativo (BRASIL, 1997).

Outra circunstância que corrobora para dificuldades no ensino em sala de aula são algumas readequações didáticas tomadas pelos professores quando trabalham com alunos sem conhecimentos prévios. As escolas e os professores, reféns de uma carga horária inflexível, acabam sem o tempo apropriado para realizar um trabalho diferenciado com tais alunos. Como ônus, vem a necessidade de indicar atalhos e dicas nos conteúdos programados da disciplina, para que todos possam acompanhar, minimamente, o assunto abordado. Sobre tal perspectiva, Wachiliski (2007) diz que nós, professores:

> [...] podemos cometer graves erros no processo de ensino-aprendizagem, como quando facilitamos, interpretamos, damos dicas ou simplificamos os procedimentos de resolução para os problemas matemáticos propostos. Com isso, acabamos rebaixando muitas vezes o grau de dificuldade, retirando do aluno a possibilidade de uma aprendizagem mais significativa do saber matemático, que, segundo esse contrato, deve ser uma responsabilidade de ambas as partes. Assim, com frequência, o professor acaba por modificar a sua prática pedagógica e passa a ensinar "truques" de resolução ou "macetes", em vez de trabalhar com o saber matemático, científico ou escolar [...] (WACHILISKI, 2007, p. 20).

Como resultado disso, o papel do aluno em elaborar estruturas cognitivas para resolução de situações-problemas é diminuído. Ademais, podem-se formar estudantes que se contentem em aprender somente tais macetes ou, ainda pior, que busquem outros macetes para substituir o produto final de demonstrações resultantes do raciocínio matemático.

Sobre a ausência de demonstrações nos conteúdos geométricos e demais subáreas, Richit et al. (2015) inferem a essa ocorrência o fato da tradição algebrista dentro da Matemática e das obsoletas aulas integralmente expositivas. Isto é, muitos professores entendem que devem dar uma relevância maior e desproporcional no que tange à parte algébrica dos conteúdos matemáticos; para tanto, ideias intuitivas podem ficar omissas. Já as aulas totalmente expositivas podem impedir a participação dos alunos com colaborações pertinentes às suas dúvidas e com auxílio aos demais colegas.

Desse modo, Richit et al. (2015) ainda salientam que as atitudes dos professores com esse entendimento não favorece ao desenvolvimento dos conceitos pertinentes, tampouco na produção de significados corretos e coerentes, pois, concordando com Villas Boas et al. (2006, p. 176), o professor deve "encaminhar os conteúdos no processo de compreensão do conhecimento matemático explorado a partir de exposição participativa, a fim de que estes alunos possam internalizá-los". Assim, espera-se que a participação dos estudantes seja capaz de estimulá-los a produzir conhecimento.

3.2 USO DAS TIC COMO FERRAMENTA EDUCACIONAL

Atualmente, vivemos um período marcado pelo forte uso de tecnologias, principalmente as digitais. Com a mesma percepção de Kenski (2012), observa-se que, no cotidiano de muitas pessoas, os pagamentos e as transferências bancárias ocorrem diretamente do *smartphone*, a locação de filmes deu lugar ao *download* ou, então, aos filmes disponibilizados em *streaming*. O uso de cabos de rede para conectar-se à internet deu lugar ao *wi-fi*, sem falar do modo como as pessoas comunicam-se a distância, as ligações telefônicas perderam muito de seu espaço para os aplicativos de trocas de mensagens e vídeoconferências em tempo real.

No entanto, as praticidades oferecidas por tais tecnologias ainda não foram o suficiente para mudar a metodologia das salas de aula, uma vez que, conforme Fernandes e Santomauro (2011), a estratégia que prevalece nas instituições de ensino – quando não a única – é o modelo de aula expositiva tradicional. As salas de aula, principalmente as públicas, permanecem sem oferecer infraestrutura e recursos tecnológicos adequados aos seus professores. Concordando com Valente (2013), ao observar-se as atividades curriculares propostas pelas escolas, é fácil identificar que estas foram construídas e previstas para a tecnologia do lápis e do papel.

É com essa mesma preocupação que Sandholtz, Ringstaff e Dwyer (1997) referem-se à forma de integrar as TIC no currículo escolar; estas devem ser inseridas na estrutura instrucional geral ao invés de serem utilizadas de modo fragmentado. O ideal, concordando com os autores, seria incluir computadores e outros recursos portáteis dentro da sala de aula, para, assim, oferecer um ambiente devidamente adequado às necessidades educacionais atuais. Hoje em dia, quase todos os alunos têm algum tipo de *smartphone* e já existem tecnologias digitais que podem ser usadas nestes. Portanto, por que não usar um *smartphone* como uma ferramenta de aprendizagem na sala de aula?

Contudo, mesmo as instituições que oferecem mínima infraestrutura e recursos tecnológicos como ferramentas didáticas ao seu corpo docente, permanecem com suas aulas tradicionalmente ministradas com o uso quase exclusivo do quadro negro e giz (ou quadro branco e marcador). Sobre esses professores que relutam em inovar suas práticas de aula, Lagarto (2013) expressa que:

> hoje em dia a capacidade e o medo de inovar poderá ser um dos grandes problemas dos professores. O antigo (ou atual) paradigma da sala de aula, onde com frequência o papel do professor se centra nas metodologias e métodos de ensinar, terá de ser mudado para metodologias e técnicas centradas essencialmente nas formas de aprender dos seus alunos. E a utilização das TIC é sem dúvida um aliado poderoso (LAGARTO, 2013, p. 133).

Como dito, a inserção das TIC vai muito além de facilitar o trabalho do professor. Uma de suas principais vantagens é facilitar a aprendizagem dos alunos. Porém, uma mudança repentina da perspectiva no modo de ensinar é algo muito complexo, Lagarto (2013, p. 135) escreve que "a inovação e a mudança paradigmática que se exige não é fácil. Muitos professores continuam convencidos que, se os seus resultados são bons com métodos antigos, não vale a pena mudar".

Entretanto, um pensamento positivista, no caso de as aulas darem bons resultados com métodos antigos, não implica a conclusão superficial de que resultados melhores não serão obtidos com o uso de recursos tecnológicos. Muito pelo contrário: Valente (2013) cita alguns exemplos de vantagens para os professores e alunos ao trabalhar-se com tecnologias:

> A presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no nosso dia a dia cria novas possibilidades de expressão e comunicação, gerando novas possibilidades pedagógicas. As TDIC têm facilitado o trabalho com imagens e animações, o que resulta em alternativas para a representação linear e sequencial da escrita (VALENTE, 2013, p. 113).

Bulegon e Bisognin (2015) e Richit et al. (2015) enfatizam, também, que a utilização de instrumentos tecnológicos desperta a curiosidade dos estudantes e os motivam a querer aprender os conteúdo abordados, proporcionando, dessa forma, que os alunos assumam um papel ativo na construção do conhecimento.

Sobre a característica das TIC de motivar os estudantes, Sandholtz, Ringstaff e Dwyer (1997) afirmam que elas transcendem esse propósito:

> A tecnologia é vista como um catalisador e uma ferramenta que reativa a empolgação de professores e alunos pelo aprender e que torna a aprendizagem mais relevante ao século XXI. Mas a tecnologia é utilizada de forma mais poderosa como uma ferramenta para apoiar a indagação, composição, colaboração e comunicação dos alunos (SANDHOLTZ; RINGSTAFF; DWYER, 1997, p. 174).

Portanto, o ganho pedagógico obtido pela inserção das TIC não se resume apenas a oferecer benefícios educacionais exclusivamente aos estudantes, e sim a todos os envolvidos. Será somente com a dedicação de todos que estão inseridos no processo de ensino e aprendizagem que os problemas da educação poderão ser reduzidos, pois, como observa Moran (2000), não são as tecnologias que irão resolver os problemas da educação, estas apenas servirão de ferramentas para priorizar a construção do conhecimento, resultando em uma nova forma de ensinar e aprender.

Nesse sentido, Borba e Penteado (2007, p. 64) indicam um exemplo de reflexão interior que pode ocorrer nos professores ao trabalhar com Tecnologias Informáticas: "Ao utilizar uma calculadora ou um computador, um professor de Matemática pode se deparar com a necessidade de expandir muitas de suas ideias matemáticas e também buscar novas opções de trabalho com os alunos". Bulegon e Bisognin (2015) expõem, de forma mais geral, a importância de trabalhar com o uso de recursos tecnológicos:

> Na sociedade contemporânea, com o advento dos computadores pessoais e pela rápida mudança nas tecnologias e nos meios de comunicação, o conhecimento base, na generalidade das áreas, rapidamente se expande e altera-se. Com isso, torna-se imprescindível preparar os estudantes para lidar com a proliferação e explosão das informações e outras rápidas mudanças tecnológicas e para adaptar-se aos diferentes campos profissionais (BULEGON; BISOGNIN, 2015, p. 1).

Dessa forma, as tecnologias podem fomentar no professor novas práticas e alternativas didáticas para serem trabalhadas em suas classes, impulsionando, até mesmo, a interdisciplinaridade, em que são utilizados os conhecimentos de várias disciplinas para solucionar um problema (BRASIL, 1998b). Além disso, contribuem para a atualização e inclusão tecnológica dos docentes e discentes.

Quanto à disponibilidade de *softwares* educacionais oferecidos hoje em dia, Kamphorst et al. (2013) salienta que a sua utilização torna as atividades escolares mais atrativas e que são necessários para potencializar e enriquecer as dinâmicas desenvolvidas nas aulas de Matemática, uma vez que tais recursos apresentam grandes subsídios às práticas de ensino. Bittar (2010) descreve também que:

> [...] a utilização adequada de um *software* permite uma melhor compreensão do funcionamento cognitivo do aluno, favorecendo a individualização da aprendizagem e desenvolvendo a autonomia do estudante, o que é fundamental para que sua aprendizagem seja significativa (BITTAR, 2010, p. 209).

Assim, em consequência dessas múltiplas possibilidades e benefícios ao utilizar tecnologias no ensino, não faz sentido as formas tradicionais de aprendizagem permanecerem diante das atuais inovações e transformações permanentes que se presenciam (BULEGON; BISOGNIN, 2015, p. 4). Como resultado, ratifica-se o pensamento de Miskulin (2003), de que a introdução das tecnologias na educação oportuniza aos estudantes uma inteligência crítica, independente e inventiva.

Dessa maneira, na perspectiva de Lopes, Viana e Lopes (2007, p. 31), "a educação matemática ao invés de 'converter os alunos em meros receptores conformistas', deve privilegiar as ações do sujeito, como as relações que este pode criar à medida que interage com seu meio", sendo essa posição um dos fundamentos elementares que se defende como ideal às práticas didáticas.

3.3 CARACTERÍSTICAS DE *SOFTWARES* DE MATEMÁTICA DINÂMICA

Gravina (2015, p. 239) define a geometria euclidiana como “[...] a parte do saber matemático voltada a objetos idealizados. Idealizados no sentido de não existirem no mundo físico, mas apenas no mundo das ideias”. Formas geométricas estão presentes na natureza, porém a Matemática define triângulos, retângulos, paralelepípedos, esferas, entre outros, com um rigor que os tornam objetos abstratos. Consequentemente, o ensino dessas figuras oferecem desafios conforme os conteúdos são aprofundados durante a Educação Básica.

Sobre tal dificuldade, Gravina e Basso (2012) citam como exemplo problemas enfrentados pelos estudantes, especialmente ao calcularem volumes. Um dos grandes desafios que se apresenta é a compreensão de objetos tridimensionais que são representados em desenhos no plano. Conforme Gravina e Basso (2012), Kamphorst et al. (2012), Lopes (2011) e Oliveira (2006), tais representações, quando realizadas no quadro ou no papel, apresentam um desenho estático e pobre em comparação a uma representação tridimensional, dinâmica e manipulável na tela do computador.

Além disso, Gravina (1996, 2015) e Fontoura (2016) alertam para o fato de que representações matemáticas de caráter estático não têm mais relevância para conquistar a atenção dos alunos, uma vez que vivemos em um mundo envolto de transformações, informações e tecnologias digitais.

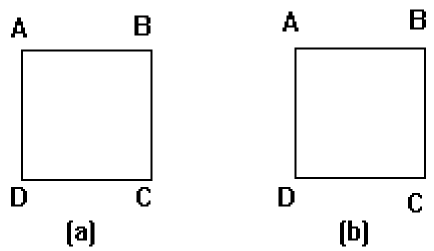
Para facilitar as práticas didáticas desses conteúdos, os professores e alunos, dependendo das suas realidades e necessidades, podem ter acesso aos chamados *softwares* de matemática dinâmica. Esse termo é definido por Manetta (2011) pelo formato interativo utilizado no ensino e na aprendizagem de Geometria e conteúdos afins que utilizam simulações e modelagens. A partir de construções realizadas com *softwares* de matemática dinâmica (*applets*), os alunos podem interagir, observar e tirar suas próprias conclusões, dada a variação ou não de determinados parâmetros. Desse modo, ratificam-se as ideias de Lopes, Viana e Lopes (2007, p. 97), no entendimento de que “o ensino, quer seja de matemática ou outra disciplina qualquer, deve levar a descobertas. E, sabemos, o momento de uma é único e pertencerá ao descobridor para sempre”, embora se deva observar que o ensino por descoberta não implica, obrigatoriamente, uma aprendizagem significativa.

De maneira geral, Gravina (1996) observa características presentes nos *softwares* de Geometria Dinâmica quanto às suas ferramentas e/ou possibilidades de construção de desenhos e objetos geométricos a partir das propriedades que os definem:

> Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6).

Sobre a vantagem propiciada por esses *softwares*, a respeito de estabilidade da construção, Gravina (1996) exemplifica-a por meio das figuras 2 e 3. Na figura 2, constam dois quadrados: (a), construído sem se preocupar com as propriedades geométricas, e (b), elaborado a partir das propriedades que definem esse polígono, quatro lados congruentes e ângulos internos retos.

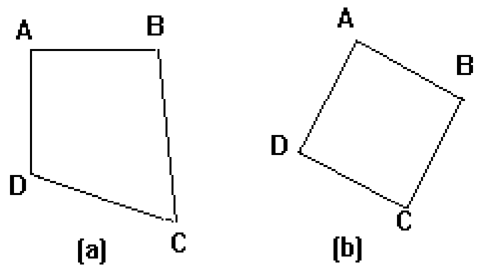
Figura 2 – Quadrados



Fonte: GRAVINA (1996, p. 6).

Ao movimentar-se o vértice C em ambos os quadrados, há uma diferença que ocorre em cada uma das construções (figura 3):

Figura 3 – Figuras modificadas



Fonte: GRAVINA (1996, p. 7).

Enquanto o deslocamento do vértice C, em (a), faz o polígono deixar de ser um quadrado, em (b), a figura mantém-se com suas propriedades, havendo somente uma rotação do quadrado. Isso ocorre somente porque ele foi construído dentro de seus princípios geométricos.

Desse modo, o recurso permite que conceitos geométricos sejam interiorizados de maneira mais específica nos alunos, pois, movendo-se um dos vértices do quadrado, este manterá suas características, isto é, aumentando ou diminuindo um de seus lados, os demais permanecerão congruentes e os quatro ângulos internos permanecerão medindo 90º. Assim, construções que permitem a modificação e arbitrariedade de medidas, por meio de um simples manuseio, estimulam o equilíbrio entre conceitos geométricos e suas devidas representações, proporcionando, portanto, que alunos formem suas próprias conjeturas e realizem descobertas.

Quanto aos aspectos didáticos na utilização desses *softwares*, Gravina (1996) destaca os principais:

> a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente (GRAVINA, 1996, p. 7).

Esses aspectos evidenciam o potencial presente nos programas educacionais de Geometria Dinâmica. Os alunos podem tanto realizar suas próprias construções quanto receber *applets* prontos para dar início a investigações de determinados conteúdos, podendo ser utilizados também, paralelamente, para executar atividades que exigem demonstrações, convergindo, assim, para favorecer e potencializar o raciocínio lógico dos estudantes.

Em recente pesquisa motivada pelo fato de muitos alunos preocuparem-se, excessivamente, com a memorização de fórmulas e algoritmos matemáticos, Richit et al. (2015) buscaram analisar as contribuições de abordagens diferenciadas para o estudo de conceitos matemáticos. Pautando-se no uso de tecnologias digitais e no uso do *software* GeoGebra, os resultados foram excelentes:

> i) Os estudantes mostraram-se mais entusiasmados e confiantes com o desenvolvimento da atividade;
> ii) Os estudantes mostraram-se mais motivados em frequentar as aulas de Matemática, algo que antes para eles e conforme evidenciado em um questionário, era complicado de se fazer;
> iii) O computador assumiu o papel de mediador entre alunos e alunos, professores e alunos, e Matemática e alunos, possibilitando que um diálogo envolvendo Matemática e Tecnologia se desenvolvesse de modo natural;
> iv) A utilização do GeoGebra propiciou uma associação direta dos conceitos matemáticos às suas definições, inter-relacionando o aspecto visual e geométrico, de forma preponderante;
> v) Os estudantes transcenderam práticas de aprendizagem, ao passo que conseguiram operacionalizar com os conceitos matemáticos, tais como: Circunferência, Elipse, Vetores, Semicírculo, Semiarco, segmentos de retas, polígonos, sendo estes ainda não estudados pelos estudantes engajados na atividade (RICHIT et al., 2015, p. 190).

Esses resultados não apenas ratificam as contribuições anteriormente citadas de que o uso de recursos tecnológicos entusiasmam e motivam os alunos a querer aprender e a realizar as atividades propostas, como também possibilitam que conteúdos além dos contidos no currículo escolar sejam abordados.

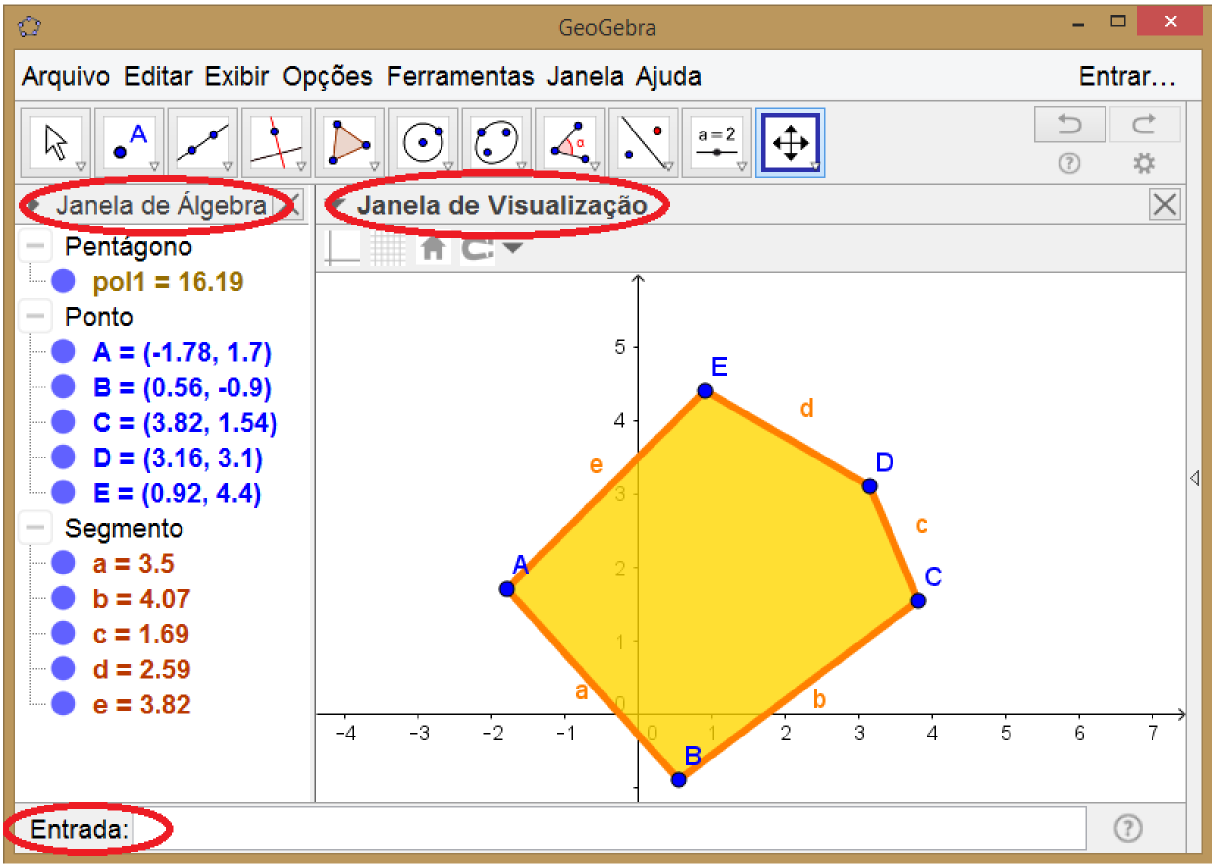
3.3.1 O *software* GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica, gratuito e de código aberto, multiplataforma e disponível para *download* em sua própria *homepage*[5]. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, com o objetivo de facilitar o ensino e a aprendizagem da Matemática nas escolas. Pode ser instalado em aparelhos compatíveis como: computadores, *tablets* e *smartphones*. De acordo com sua *homepage*, seu nome dá-se ao fato de relacionar, simultaneamente, conteúdos de Geometria e Álgebra, embora reúna muitos outros recursos para facilitar o entendimento de gráficos, probabilidade, estatística, entre outros.

[5] <http://www.geogebra.org.br/download>.

A interface do programa, exibida na figura 4, é bastante intuitiva. Os objetos apresentados na “Janela de Álgebra” são correspondidos, simultaneamente, por meio de sua representação geométrica na “Janela de Visualização” e vice-versa. Acima das janelas, estão dispostos ícones com as principais ferramentas para efetuar construções e, abaixo delas, está o campo de entrada, que permite inserir comandos complementares às ferramentas pré-definidas.

Figura 4 – Interface do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em sua *homepage*, é disponibilizado cadastro para uma comunidade mundial de usuários, em que os criadores de *applets* podem divulgar e disponibilizar a outros usuários, cadastrados ou não, suas produções para *download* (DANTAS, 2015). Para visualizar tais construções, basta ter o programa instalado em algum aparelho compatível e com acesso à internet.

O cadastro também possibilita a participação em fóruns que discutem dúvidas, ideias e sugestões quanto ao uso das ferramentas e das possibilidades oferecidas no aplicativo. Tal recurso, consequentemente, estimula trocas de experiências entre todas as categorias de usuários, de iniciantes a *experts*.

Quanto ao seu acréscimo nas práticas didáticas, Fogaça (2015) cita que:

> O potencial do *software* facilita a construção geométrica pretendida, aumenta a sua precisão e diminui o tempo gasto para realizá-la. Ajuda a enriquecer o processo de aprendizagem da geometria, além de valorizar o conhecimento matemático e a sua construção por meio de ações de experimentação (a partir de uma hipótese, observar e classificar um fenômeno em condições controladas), interpretação (estabelecer comunicação verbal ou não verbal entre duas entidades), visualização (ação da visão que permite o reconhecimento de dados), indução (raciocínio que vai do particular ao geral), abstração (isolar, mentalmente, para considerar à parte um elemento de representação que não é dado separadamente na realidade), generalização (aplicar um princípio ou conceito a um conjunto de casos) e demonstração (atestar a veracidade ou a autenticidade de algum conceito) (FOGAÇA, 2015, p. 26).

Como observado, as vantagens presentes no GeoGebra são muitas, e todas elas visam estimular o raciocínio lógico e conceder papel ativo aos alunos no processo de ensino e aprendizagem. É diante de tantas vantagens, utilidades e ferramentas que Dantas (2015) entende não ser possível manifestar uma definição precisa para o GeoGebra; segundo o autor, um dos critérios para descrevê-lo é a atividade que se deseja aplicar, podendo ser utilizado, inclusive, na elaboração de jogos e na reprodução de obras artísticas.

3.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Zabala (1998, p. 18) define sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Essa estratégia revela grandes vantagens ao preparar planejamentos de aulas, pois todo conteúdo tem introdução, desenvolvimento e conclusão, além de correlação com os assuntos posteriores.

Quanto ao "fim" conhecido pelo discente, pode-se considerar que, mesmo no caso de assuntos que apresentam novidades ao serem trabalhados em sala de aula, em determinadas situações, os alunos já conhecem o resultado. Por exemplo, mediante experiências pessoais, alunos do sexto ano do Ensino Fundamental podem concluir que, dividindo o valor de um real entre duas pessoas, cada uma receberá cinquenta centavos; porém, precisam que o professor planeje atividades adequadas para compreenderem a divisão com quociente racional.

Quanto às características presentes em uma sequência didática, Zabala (1998) especifica que esta propõe:

> [...] uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir (ZABALA, 1998, p. 20).

Compartilhando da mesma concepção, Peretti e Costa (2013) entendem que o professor pode envolver atividades de avaliação durante uma sequência didática, em que esta pode ter duração de dias, semanas ou mais. Assim, essa metodologia revela-se importante para estabelecer múltiplas correlações, até mesmo durante todo o ano escolar, desde que ocorram avaliações, pois é por meio destas que os professores informam aos alunos quais resultados foram obtidos.

Segundo as autoras, "para haver sequência didática é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento" (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6). Consequentemente, os professores serão desafiados a construir uma sequência em que, ao concluir determinados objetivos, estes serão utilizados para promover os questionamentos posteriores.

Desse modo, nas sequências, "é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados [...]" (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6). A sequência didática proposta por Zabala é, portanto, incluída dentro dos fundamentos da aprendizagem significativa teorizada por Ausubel.

3.4.1 Alguns fundamentos da teoria da aprendizagem significativa

A teoria da aprendizagem significativa, teorizada por David Ausubel (1918 – 2008), graduado em Psicologia e Medicina e doutor em Psicologia do Desenvolvimento, parte da ideia básica (MOREIRA, 2009b) de que, se fosse possível identificar o fator mais importante para a aprendizagem significativa, este seria aquilo que o aprendiz (estudante) já sabe. Isto é, o conhecimento que já está presente e bem fundamentado em sua estrutura cognitiva. Como consequência, é necessário que o professor, ao iniciar o estudo de um conteúdo novo, verifique os subsunçores (conhecimentos prévios) dos aprendizes.

Sobre tal teoria, Moreira (2009b) diz que

> Aprendizagem significativa é aquela em que o significado do novo conhecimento vem da interação com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do aprendiz com um certo grau de estabilidade e diferenciação. Nesta interação, não só o novo conhecimento adquire significado mas também o conhecimento anterior fica mais rico, mais elaborado, adquire novos significados. *Interação* (entre conhecimentos novos e prévios) é a característica chave da aprendizagem significativa (MOREIRA, 2009b, p. 31, grifo do autor).

Assim, por meio da aprendizagem significativa, as novas informações são interiorizadas pelos alunos com maior facilidade, pois interagem com aquilo que eles já sabem e que apresenta relevância (ideia-âncora).

Nessa teoria, Moreira (2009a) cita que subsunçores são os nomes dados aos conhecimentos específicos presentes na estrutura cognitiva de uma pessoa. São estes os responsáveis por dar sentidos a um novo conhecimento, que pode ser tanto por recepção, como por descoberta. Sobre essas aprendizagens por "descoberta" ou "por recepção", Moreira (2009a, p. 10) distingue-as da seguinte forma: "na aprendizagem receptiva o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final, enquanto que na aprendizagem por descoberta, o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz". No entanto, para que a aprendizagem por descoberta seja significativa, esta deve relacionar-se aos conhecimentos prévios, já devidamente fundamentados na estrutura cognitiva do aluno. Por exemplo, um estudante pode descobrir o padrão de formação da sequência 1, 4, 9, 16 etc., testando hipóteses, isto é, sem o conhecimento prévio de quadrados perfeitos, incorporando, dessa forma, um resultado arbitrário em sua estrutura cognitiva.

Em contrapartida, esse mesmo aluno pode ter aprendido, por recepção, a determinar o volume de um cilindro circular e utilizar esse resultado de forma significativa, desde que seja capaz de relacioná-lo, adequadamente, com seus respectivos subsunçores.

No caso de não haver interação entre o novo conhecimento e algum subsunçor, dentro dessa teoria, a aprendizagem é dita mecânica. Nesse caso, Moreira (2009b, p. 31) argumenta que "o novo conhecimento não se incorpora à estrutura cognitiva nem a modifica. O aprendiz não dá significados ao que aprende, apenas armazena mecanicamente a informação que recebe". É o que ocorre, por exemplo, quando fórmulas e algoritmos são dados aos alunos. A ausência ou omissão do raciocínio lógico nessa prática não possibilita relação alguma com seus conhecimentos prévios. O novo conhecimento fica armazenado somente de forma literal e arbitrária, o que não permite que o aprendiz justifique a outras pessoas os motivos de os procedimentos realizados com tais fórmulas e algoritmos serem válidos e verdadeiros.

Esse modo de aprendizagem (MOREIRA, 2009a) favorece que os conhecimentos apresentados sejam esquecidos ou "deletados" da estrutura cognitiva do aprendiz, pois não foram estabelecidas interações com resultados já fundamentados. No entanto, na ausência de subsunçores, a aprendizagem mecânica pode ser necessária para, posteriormente, transformar-se em aprendizagem significativa (MOREIRA, 2009a).

Portanto, independentemente da forma como esses dois tipos de aprendizagem podem ocorrer, para que ela convirja em uma aprendizagem significativa, é necessário que seja produzido um material potencialmente significativo (MOREIRA, 2009a). Sobre esse tipo de material, Moreira (2009a) esclarece:

> A condição de que o material seja potencialmente significativo envolve dois fatores principais, ou duas condições subjacentes, quais sejam, a natureza do material, em si, e a natureza da estrutura cognitiva do aprendiz. Quanto à natureza do material, ele deve ser "logicamente significativo" ou ter "significado lógico", i.e., ser suficientemente não-arbitrário e não-aleatório, de modo que possa ser relacionado, de forma substantiva e não-arbitrária, a ideias, correspondentemente relevantes, que se situem dentro do domínio da capacidade humana de aprender. No que se refere à natureza da estrutura cognitiva do aprendiz, nela devem estar disponíveis os conceitos subsunçores **específicos**, com os quais o novo material é relacionável (MOREIRA, 2009a, p. 12, grifo do autor).

Concomitante à produção e utilização do material potencialmente significativo, Moreira (2009a) relata o quanto é indispensável que:

> [...] o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de maneira substantiva e não-arbitrária, o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva. Esta condição implica em que, independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for, simplesmente, a de memorizá-lo arbitrária e literalmente, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos (ou automáticos). E, de modo recíproco, independentemente de

> quão disposto a aprender estiver o indivíduo, nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos, se o material não for potencialmente significativo - se não for relacionável à estrutura cognitiva, de maneira não-literal e não-arbitrária (MOREIRA, 2009a, p. 12-13).

Assim, para que um estudo promova uma aprendizagem significativa, professor e aluno devem estar comprometidos com a causa. Por exemplo, um aluno que saiba expressar o volume do cilindro de maneira arbitrária, só vai compreender de forma significativa se tiver assimilado, previamente, os conceitos de área, volume e Princípio de Cavalieri, em material potencialmente significativo, elaborado pelo professor.

3.4.2 Alguns fundamentos da teoria da carga cognitiva

Apesar da oferta adequada de recursos tecnológicos em todas as instituições de ensino não pertencer à realidade brasileira, é fundamental que o professor, ao escolher uma TIC para usar com seus alunos, tenha conhecimento sobre o recurso e que saiba maximizá-lo dentro de sua prática didática. Para tanto, é recomendável conhecer a teoria da carga cognitiva.

Santos e Tarouco (2007) informam que estudos realizados na década de 50, por Miller, apontavam a existência de um número limite de informações que o sistema cognitivo humano consegue processar. Esse limite de informações varia de 5 a 9 elementos por vez, intervalo chamado de "número mágico". Quando o limite é excedido, a capacidade de raciocinar e a aprendizagem ficam abaixo do desempenho esperado, ocorrendo, assim, uma sobrecarga na estrutura cognitiva.

A impossibilidade de o ser humano processar muitas informações simultaneamente é o que fundamenta a teoria da carga cognitiva, delineada por seu maior colaborador John Sweller, psicólogo australiano (SOUZA, 2010). Sweller (2003 apud SANTOS; TAROUCO, 2007, p. 3, grifos dos autores) define essa teoria como "***um conjunto universal de princípios que resultam em um ambiente de aprendizagem eficiente e que consequentemente promovem um aumento na capacidade do processo de cognição humana***". Esses princípios podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem quando há interação entre estudantes e tecnologias.

Sweller e van Merriëmboer e (2005) mencionam que:

> Cognitive Load Theory (CLT) uses interactions between information structures and knowledge of human cognition to determine instructional design. The theory's initial development in the early 1980s provided instruction that

> differed from the prevailing orthodoxies of the time[6] (SWELLER; van MERRIËMBOER, 2005, p. 147).

Despontando como uma alternativa ao ensino tradicional à época, a teoria da carga cognitiva demonstra atual relevância perante o cenário atual que apresenta várias possibilidades para inserção das TIC em ambientes educacionais, favorecendo a aprendizagens. Nesse mesmo sentido, Santos e Tarouco (2007) ratificam que a teoria

> [...] baseia-se em dezenas de estudos e pesquisas experimentais, que comprovam que os usos de seus princípios resultam em ambientes de aprendizagem eficientes e, assim, conduzem a uma aprendizagem competente e melhor. Um ambiente de aprendizagem apropriado, de acordo com princípios da Teoria da Carga Cognitiva, minimiza recursos mentais desnecessários, e em troca disso, coloca-os para trabalhar de modo a maximizarem a aprendizagem. Essa teoria aplica-se a todos os tipos de conteúdos, todos os tipos de mídias, e a todos os estudantes, visto que, ela tem como fim saber como elabora-se as ferramentas de ensino – texto, imagens e áudio – e aplicá-las à todo o conteúdo de ensino, bem como, as plataformas de aprendizagem a distância, no intuito de potencializar a aprendizagem e desenvolver habilidades flexíveis através da criação e uso de recursos e ambientes de aprendizagem que estejam em sintonia com processo cognitivo humano (SANTOS; TAROUCO, 2007, p. 3).

Como apresentado, os fundamentos dessa teoria colaboram tanto para que recursos desnecessários sejam evitados quanto para maximizar os que se mantiverem. Segundo os mesmos autores, Sweller conclui que a aprendizagem tem melhor *performance* no momento em que o processo de informação estiver ajustado com o processo cognitivo humano, ou seja, quando a quantidade de informações dispostas ao estudante for compatível com sua capacidade de compreensão.

Nessa teoria, a estrutura cognitiva compreende três sistemas de memória: a memória sensorial, a memória de trabalho ou de curta duração e a memória de longa duração. Na primeira, uma informação reside por um momento muito breve antes de ser esquecida (SOUZA, 2010). Na memória de curta duração, a informação também é brevemente perdida, porém com um tempo consideravelmente maior que na memória sensorial. Já no caso da memória de longa duração, esta apresenta um "depósito" bastante permanente para informações que são transferidas da memória de curto prazo (ATKINSON; SHIFFRIN, 1968).

A respeito da ação da memória de longo prazo sobre a de trabalho, Sweller e van Merriëmboer (2005) detalham que:

---

[6] Tradução nossa: A Teoria da Carga Cognitiva usa interações entre estruturas de informação e o conhecimento da cognição humana para determinar um planejamento instrucional. No início dos anos de 1980, o desenvolvimento inicial da teoria proporcionou uma instrução que se diferenciou das ortodoxias prevalentes na época.

> In effect, long-term memory alters the characteristics of working memory. Long-term memory holds cognitive schemata that vary in their degree of complexity and automation. Human expertise comes from knowledge stored in these schemata, *not* from an ability to engage in reasoning with many elements that have not been organized in long-term memory. Human working memory simply is not able to process many elements[7] (SWELLER; van MERRIËMBOER, 2005, p. 148-149, grifo dos autores).

Assim, é determinante que haja o cuidado da maneira que as informações novas são apresentadas e, consequentemente, ingressas na memória de trabalho. Tais informações devem ser inevitavelmente limitadas, pois, em excesso, não serão capazes de permanecerem interiorizadas com os indivíduos.

Dando sequência aos estudos de Sweller, o professor e pesquisador Mayer, como apontam Santos e Tarouco (2007), ao realizar pesquisas sobre a teoria, elaborou princípios que demonstram ser capazes de minimizar sobrecargas cognitivas, fortalecendo, assim, o processo cognitivo de aprendizagem. Logo, a produção de materiais didáticos que pode potencializar a aprendizagem dos alunos deve seguir alguns princípios:

> **Princípio de Representação Múltipla**: os alunos aprendem melhor quando se combinam palavras e imagens, do que no momento em que se usam somente palavras.
> **Princípio de Proximidade Espacial**: esse princípio diz respeito à proximidade de palavras e imagens, ou seja, é quando palavras e imagens correspondentes estão próximas em vez de afastadas.
> **Princípio da Não Divisão ou da Proximidade Temporal**: nesse princípio tem se a apresentação de palavras e imagens simultaneamente em vez de sucessivamente, uma vez que a apresentação de um texto e de uma animação na mesma tela divide a atenção do aluno.
> **Princípio da Coerência**: refere-se à exclusão de palavras, imagens ou sons não relevantes para o assunto. Quanto mais simples e objetiva for à apresentação do conteúdo, mais livre ficará a memória de trabalho para processar um número maior de conhecimentos.
> **Princípio da Redundância:** nesse princípio, ressalta-se que o uso da animação e narração, quando usadas simultaneamente no processo de ensino, potencializa o conhecimento, diferente de quando usadas separadamente (SANTOS; TAROUCO, 2007, p. 4-5, grifos dos autores).

Acredita-se que o conhecimento desses princípios é fundamental para que o professor obtenha êxito nas suas construções de objetos de ensino, pois eles revelam

[7] Tradução nossa: Efetivamente, a memória de longa duração muda as características da memória atuante. A memória de longa duração mantém esquemas cognitivos que variam em seu grau de complexidade e automação. O saber humano advém do conhecimento acumulado nesses esquemas, não da habilidade de se engajar no raciocínio com muitos elementos que não foram organizados na memória de longa duração. A memória atuante simplesmente não é capaz de processar muitos elementos.

muito mais do que cuidados a serem seguidos, eles indicam qual é o melhor caminho para que os materiais elaborados sejam apropriados para potencializar a aprendizagem.

3.4.3 Compatibilizações entre as teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva

A partir dos comentários anteriores acerca dessas duas teorias, torna-se possível elencar algumas compatibilizações que oportunizam a utilização de ambas para uma melhor aprendizagem. Enquanto, na primeira teoria, há um grande cuidado com os conhecimentos prévios do estudante, para que a nova aprendizagem relacione-se a esses subsunçores e torne-se uma aprendizagem significativa, na teoria da carga cognitiva, é fundamental ter prudência com o modo como a nova informação é apresentada. Esta precisa seguir uma série de princípios para que sua aprendizagem seja maximizada.

A aprendizagem é dita significativa quando é interiorizada pelo aprendiz por meio da interação entre conhecimento novo e subsunçor. Por outro lado, na carga cognitiva, um novo conhecimento precisa ter a quantidade de elementos informativos cuidadosamente sintetizados, para possibilitar que essa ideia seja armazenada na chamada memória de longa duração.

Apesar de a aprendizagem mecânica ser importante na ausência de conhecimentos prévios, ela se torna frágil e é facilmente esquecida. Na teoria delineada por Sweller, informações também são prontamente “apagadas” pelos alunos. No entanto, essa situação é evidenciada quando a apresentação de um conteúdo não segue os seus princípios. Assim, a informação fica armazenada brevemente na memória sensorial ou, no máximo, na memória de trabalho.

Quanto à produção de material, a teoria de Ausubel chama de material potencialmente significativo quando este apresenta ideias relevantes, boa organização, faz uso de subsunçores e quando o estudante está predisposto a aprender. Com o mesmo objetivo, a teoria da carga cognitiva sustenta que um material didático potencializa a aprendizagem do aluno quando é elaborado com os cuidados previstos.

É fundamentado nestas considerações que se produziu a sequência didática para analisar o quanto *applets* produzidos com o GeoGebra podem apresentar, de forma mais esclarecedora, o cálculo de algumas áreas e volumes.

4 ABORDAGEM METODOLÓGICA

A pesquisa foi desenvolvida com universitários calouros do curso de Matemática da UFSM no primeiro semestre de 2017. Esses alunos foram convidados a participar de encontros semanais com a finalidade de discutir e buscar justificativas e/ou demonstrações visuais de como se concebem fórmulas de algumas áreas e volumes de figuras estudadas durante a Educação Básica. Ao todo, foram realizados sete encontros, porém, para evitar um ônus em cumprir todos os tópicos planejados em tempo insuficiente, não houve definição prévia desse número.

A opção em convidar apenas calouros deveu-se ao fato de que durante o curso de Matemática, algumas disciplinas têm como parte de seus objetivos, comprovar resultados apresentados na Educação Básica. Assim, veteranos poderão já conhecer algumas das justificativas que se deseja discutir.

Embora todos os calouros tenham sido convidados no início do semestre letivo a participar deste trabalho, esperava-se contar com aproximadamente dez participantes obedecendo aos critérios de inclusão (interesse em participar, pois de acordo com Moreira (2009b), para que haja uma aprendizagem significativa é necessário que o aluno esteja predisposto a aprender) e exclusão (baixa frequência e desinteresse), a fim de poder dar maior suporte e atenção adequada a todos. As expectativas foram superadas e de quinze estudantes que manifestaram um interesse inicial, conseguiu-se contar com a participação regular de onze.

Uma primeira abordagem ocorreu por meio do Questionário Inicial (Apêndice A) com questões abertas e fechadas com o objetivo de conhecer o perfil dos universitários, seus conhecimentos prévios acerca de áreas e volumes, suas maiores dificuldades e acertos – informações necessárias e relevantes para planejar as atividades.

Nos encontros, foi utilizado uma sequência didática, seguindo as ideias de Zabala (1998), constituída por *applets*[8], que produzimos com o *software* GeoGebra, pautados nas teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva. Assim, tivemos cuidado para que os objetivos e reflexões proporcionadas por cada *applet* interagissem entre si e com os demais, isto é, que as produções utilizassem e estimulassem os participantes a relacionar resultados de um *applet* com os outros previamente estudados. Além disso,

---

[8] Todos disponíveis em http://geogebra.org/hakel

também tivemos a atenção em não "poluir" as construções com informações desnecessárias e que as presentes contribuíssem para uma melhor aprendizagem.

Para tanto, a sequência didática foi constituída por perguntas que, por meio da interação dos universitários com os *applets*, permitem reflexões a respeito de como argumentar a validade de algumas sentenças matemáticas expressarem o valor de áreas e volumes.

Com a presença do pesquisador frente aos alunos durante os encontros, realizou-se, portanto, uma pesquisa de campo por meio de uma pesquisa-ação, pois conforme Flick (2004), estive participando dos eventos no campo e não apenas observando. A presença diante dos participantes na pesquisa-ação, como revela Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 112) é fundamental para que haja mudança de "direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes". Sendo que mudanças de direções são rotineiras em planejamentos de aulas, pois sempre exigem flexibilidade nas atividades previamente elaboradas e que serão aplicadas aos participantes para que os objetivos possam ser alcançados.

Os encontros foram conduzidos sob a perspectiva de discussões em grupo. Acerca dessa dinâmica, Flick (2004) menciona que esta condiz com a forma que as opiniões são geradas e expressas. Cita como característica dessas discussões

> a disponibilidade das correções pelo grupo – no que se refere a visões que não estejam corretas, que não sejam socialmente compartilhadas ou que sejam radicais – como um meio de validar enunciados e pontos de vista. O grupo transforma-se em uma ferramenta que reconstrói opiniões individuais de forma mais adequada (FLICK, 2004, p. 126).

A partir da inserção no ambiente a ser estudado, foi construído um diário do pesquisador que foi atualizado continuamente por observações durante e após os encontros. Sobre o diário do pesquisador, Flick (2004) comenta que

> Estes devem documentar o processo de aproximação a um campo e as experiências e problemas no contato com o campo ou com os entrevistados, bem como na aplicação dos métodos. Fatos importantes e questões de menor relevância ou fatos perdidos na interpretação, generalização, avaliação ou apresentação dos resultados, vistos a partir das perspectivas do pesquisador individual, também devem ser incorporados (FLICK, 2004, p. 183).

É a partir dessa documentação, que o mesmo autor indica que deve haver a "produção da realidade" marcada pela percepção e também pelas anotações seletivas do pesquisador.

Combinado ao diário do pesquisador, ao final dos encontros foi realizado o Questionário Final (Apêndice B) para confrontar o quanto a sequência didática pode contribuir na aprendizagem dos participantes.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ÁREAS E VOLUMES

Seja em questões de processos seletivos como concursos, vestibulares ou o ENEM, seja em questões do ensino regular em escolas, sempre estão presentes exercícios de Matemática com o objetivo de determinar áreas e volumes de figuras geométricas. Esses exercícios, geralmente, podem ser solucionados a partir do uso de fórmulas simples que são estudadas durante o Ensino Fundamental. No entanto, são raros os exercícios que exigem dos alunos o real conceito de área, e, por isso, o ensino de demonstrações e justificativas de tais fórmulas é logo esquecido, quando não omitido, e a aprendizagem torna-se majoritariamente mecânica.

A partir das reflexões teóricas, elaborou-se uma sequência didática, previamente aos encontros com os participantes da pesquisa, para o estudo de áreas, seguido pelo de volume. Optou-se por constitui-la, principalmente, com perguntas que favoreçam momentos de reflexão sobre os porquês de algumas fórmulas da Geometria serem utilizadas, reiteradamente, como verdadeiras, sem que sejam apresentadas justificativas de sua validade ou, ainda, por que os procedimentos lógicos para determiná-las não foram assimilados durante os anos seguintes da Educação Básica. Tais questionamentos são seguidos por comentários que nortearam a condução da proposta de estudo e por resultados que se esperam ser alcançados. Exibiu-se as questões com um projetor multimídia no laboratório de informática e estas poderiam ser respondidas pelos participantes em seus próprios cadernos.

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE ÁREAS

O estudo de áreas começa propondo um resgate sobre um conhecimento que os participantes provavelmente já têm bem fundamentado em suas estruturas cognitivas: o cálculo da área do retângulo.

i) Qual é a área de um retângulo de base 5 unidades de comprimento (u.c.) e altura 6 u.c.?

Como dito, o objetivo desta pergunta é não propor obstáculos para uma resposta correta. Deseja-se que os alunos obtenham êxito ao responderem 30. A resposta correta também tem a intenção de preparar as perguntas seguintes.

ii) Sobre o modo de resolução da questão i:

a) Que cálculo você realizou para encontrar o resultado?

b) Por que ele aponta a resposta correta?

A partir dos conhecimentos prévios dos participantes, espera-se que a primeira resposta seja simples como: "multipliquei a base pela altura". Já no momento de apresentar argumentos da validade de seus cálculos, é aguardado que os alunos façam uma reflexão e que dúvidas venham à tona. Afinal, esse tipo de conteúdo, de acordo com Brasil (1997), é introduzido no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, isto é, no mínimo seis anos antes do ingresso ao Ensino Superior. Portanto, uma resposta totalmente precisa não é almejada.

iii) Você sabe como se calcula a área de um quadrado?

iv) Sabe calcular outras áreas?

Novamente, a intenção, nas últimas duas perguntas, é evidenciar o que o aluno já sabe para confrontar com possíveis lacunas do conceito de área. A expectativa é de que os participantes indiquem conhecimento ao calcular áreas de polígonos básicos, como triângulos ou trapézios e, até mesmo, o círculo.

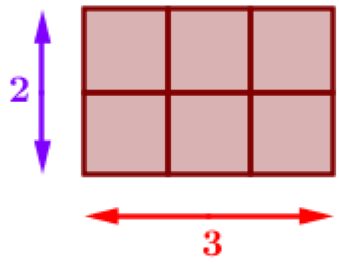
v) Você sabe o porquê de tais cálculos serem verdadeiros? Justifique.

Aqui, é aguardado mais um momento de reflexão, já que os anos escolares que precedem a graduação apresentam estudos aprofundados a partir dos conteúdos trabalhados durante o Ensino Fundamental, e conceitos básicos já não são postos em discussão. No Ensino Médio, na disciplina de Matemática, os exercícios de áreas e conteúdos afins têm outro foco, conforme indica Brasil (2000), nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, como utilizar figuras planas e espaciais para representar partes do mundo real, quantificar e realizar estimativas de comprimentos, áreas etc. Portanto, respostas corretas ainda não são esperadas.

Para buscar a justificativa da validade de algumas sentenças matemáticas apresentarem o cálculo de áreas, uma intervenção e troca de ideias entre todos os participantes, a fim de discutir o conceito de área, torna-se necessário. É fundamental que a definição como medida de superfície esteja clara. Para estimular esse raciocínio, o seguinte encaminhamento será adotado:

vi) Abra o applet “Área do Retângulo”, selecione 2 u.c. para medida da altura, 3 u.c. para medida da base e registre o número de quadradinhos que formam o retângulo maior (figura 5).

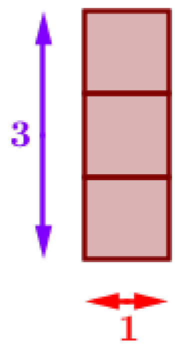
Figura 5 – Retângulo 3 u.c. x 2 u.c.



Fonte: Elaborada pelo autor.

vii) Altere para 3 a medida da altura, 1 a medida da base, que registrem novamente o número de quadradinhos (figura 6).

Figura 6 – Retângulo 1 u.c. x 3 u.c.



Fonte: Elaborada pelo autor.

viii) Qual dos retângulos formados têm maior área?

Com os registros realizados e a objetividade com que a construção exibe os retângulos, espera-se que a resposta indicada facilmente seja a representada na figura 5.

ix) Quais argumentos podem ser utilizados para afirmar que um dos retângulos é maior do que o outro?

A expectativa é de que os alunos usem o argumento geométrico apontado no *applet*, de que uma das figuras tem mais quadradinhos do que a outra.

x) Para afirmar que um retângulo é maior do que o outro, o que devemos calcular?

Com essa interrogação, deseja-se introduzir o significado de área como medida de superfície. Para responder qual retângulo é maior, há uma necessidade de compará-los, e será maior aquele que é formado por mais quadradinhos que o outro. O *applet* em questão permite um controle da variação de medidas e exibe o valor da área por meio de registros geométricos, o que pode deixar "claro aos olhos" a resposta correta por meio de uma simples visualização.

xi) Se cada quadradinho equivale a 1 u.a., quanto mede a área desses retângulos?

Essa pergunta visa apresentar a utilização de termos formais para medidas de superfícies. Embora as situações cotidianas possam sugerir que medidas de comprimento ou de área devem explicitar suas unidades, para a Matemática, tais informações podem não ser necessárias, desde que as dimensões do polígono sejam medidas com a mesma unidade.

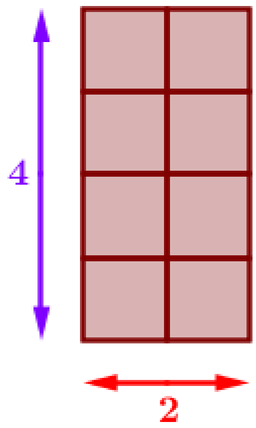
Para expressar o valor de uma área, é preciso adotar uma unidade de medida e comparar quantas vezes essa unidade cabe dentro da outra superfície; o resultado obtido é o valor de sua área. A unidade mais utilizada, na Matemática, é o quadrado de área um, modo como o próprio *applet* foi programado, o qual será detalhado mais adiante. Assim, as áreas propostas em i e ix devem ser expressas, respectivamente, por 30 u.a., 6 u.a. e 3 u.a.

Com o objetivo de conduzir os alunos a uma generalização da área do retângulo e utilizar o emprego correto de unidades de área, seguem as seguintes questões com o auxílio do mesmo *applet*.

xii) Alterando a medida da altura para 4 u.c. e medida da base para 2 u.c., quantas unidades de área formam o retângulo?

Sem muitos obstáculos, espera-se que o uso do *applet*, acompanhado do raciocínio abstrato, aponte a resposta correta de 8 u.a., vide figura 7.

Figura 7 – Retângulo 2 u.c. x 4 u.c.



Fonte: Elaborada pelo autor.

xiii) Ajuste a medida da altura para 9 u.c. e da base para 8 u.c. e responda:

a) Quanto mede a área do retângulo?

b) Você vai contá-los um a um? Justifique.

Essas perguntas têm a intenção de deixar claro aos participantes que, nas formações retangulares, para calcular o número de u.a., basta multiplicar as suas dimensões, isto é, o produto entre as medidas da base e da altura.

xiv) Seja *b* a medida da base do retângulo e *a* sua altura, podemos expressar sua área por alguma sentença matemática? Justifique.

Com o uso do *applet* e por meio da sequência didática, espera-se que os alunos convençam-se de que, nas condições apresentadas, o número de quadrados unitários dispostos sobre a base será *b* e que essa quantidade repetir-se-á pela extensão de sua altura, *a*. Portanto, uma fórmula geral pode ser expressa com a seguinte sentença matemática:

$$\text{Área do Retângulo} = b \cdot a$$

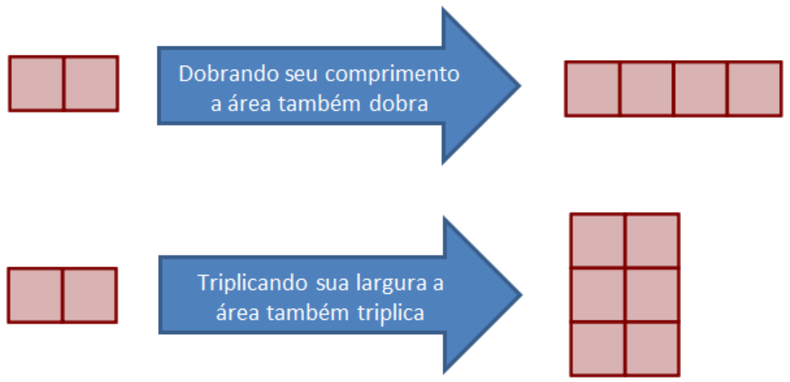
Ou, simplesmente:

$$A = b \cdot a$$

No entanto, tal conclusão foi obtida apenas para medidas inteiras, e não para um número real positivo qualquer. Para se chegar a tal generalização, será empregada uma intervenção didática utilizada por Wagner (2012).

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, o retângulo tem sua área proporcional a cada uma de suas dimensões, isto é, caso seu comprimento seja dobrado, sua área também duplica; caso sua largura seja triplicada, sua área também triplica. Os exemplos são apresentados na figura 8:

Figura 8 – Proporcionalidade da área do retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

A proporcionalidade presente na área dos retângulos resulta a seguinte propriedade: se dois retângulos têm mesma base, a razão entre as suas áreas será a razão entre suas alturas. A aplicação dessa propriedade segue na tabela 1, com medidas reais positivas e áreas identificadas.

Tabela 1 – Área do retângulo para dimensões reais positivas

	Medidas	Área
I	b e a	A
II	b e 1	A_1
III	1 e 1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em I e II, assumindo b como medida da base do retângulo, tem-se que:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{a}{1} = a$$

Em II e III, assumindo 1 como medida da base, tem-se que:

$$\frac{A_1}{1} = \frac{b}{1} = b$$

Desses razões, pode-se obter o seguinte:

$$\frac{A}{A_1} \cdot \frac{A_1}{1} = a \cdot b \Rightarrow A = a \cdot b$$

Ou seja, para medidas reais positivas, a área do retângulo também pode ser obtida determinando o produto de suas dimensões.

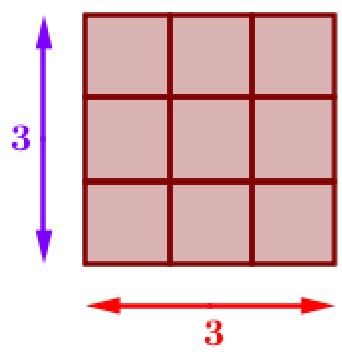
xv) Ao invés do quadrado como u.a., poderia ser utilizado círculos ou outra figura? Justifique.

A ideia dessa pergunta é propor uma reflexão sobre o motivo da u.a. mais utilizada ser o quadrado unitário e não outra figura, questionamento pouco comum de ser encontrado em materiais didáticos. Aguarda-se que os argumentos dos participantes convirjam sobre o fato de os quadrados poderem ser dispostos de forma adjacente um ao outro, situação que não ocorre com outras figuras planas, tais como o círculo, o triângulo etc.

xvi) Modificando a medida da base e da altura para 3 u.c., diga quanto mede a superfície formada.

Aqui, o objetivo é relacionar o raciocínio anterior de área para o caso específico em que as dimensões do retângulo têm a mesma medida, isto é, para um quadrado (figura 9). Para isso, conta-se com o mesmo *applet* como ferramenta de interação e de registro geométrico.

Figura 9 – Quadrado 3 u.c.



Fonte: Elaborada pelo autor.

xvii) Que cálculo foi realizado? Justifique.

Entendemos que os participantes não enfrentarão dificuldades para apresentar argumentos, pois poderão relacionar ao quadrado as mesmas ideias discutidas anteriormente. Assim, o propósito é verificar se o raciocínio anterior foi devidamente assimilado e preparar uma generalização para a área do quadrado.

xviii) Alterando essas medidas para 10, quanto mede o polígono determinado? Justifique o cálculo realizado.

Deseja-se que, a partir de estratégias debatidas anteriormente, os alunos estejam preparados para apresentar argumentos coerentes para justificar o cálculo realizado, facilitando, portanto, o raciocínio para justificar a generalização da área do quadrado.

xix) Seja l a medida da base e da altura do polígono, podemos expressar sua área por alguma sentença matemática? Se sim, justifique.

Analogamente a xii, espera-se que os participantes concluam que é possível expressar a área da figura com a seguinte sentença:

$$A = l \cdot l = l^2$$

xx) O polígono determinado é um quadrado ou retângulo?

Até o momento, o quadrilátero estudado foi o retângulo, que, no caso de ter todos os lados congruentes e todos os ângulos retos, chama-se quadrado. Propõe-se, aqui, ouvir os alunos sobre o conhecimento ou não dessa particularidade e verificar se sabem o que é um quadrilátero.

xxi) O que é necessário para o quadrilátero ser um:

a) retângulo

b) quadrado

c) losango

d) paralelogramo

e) trapézio

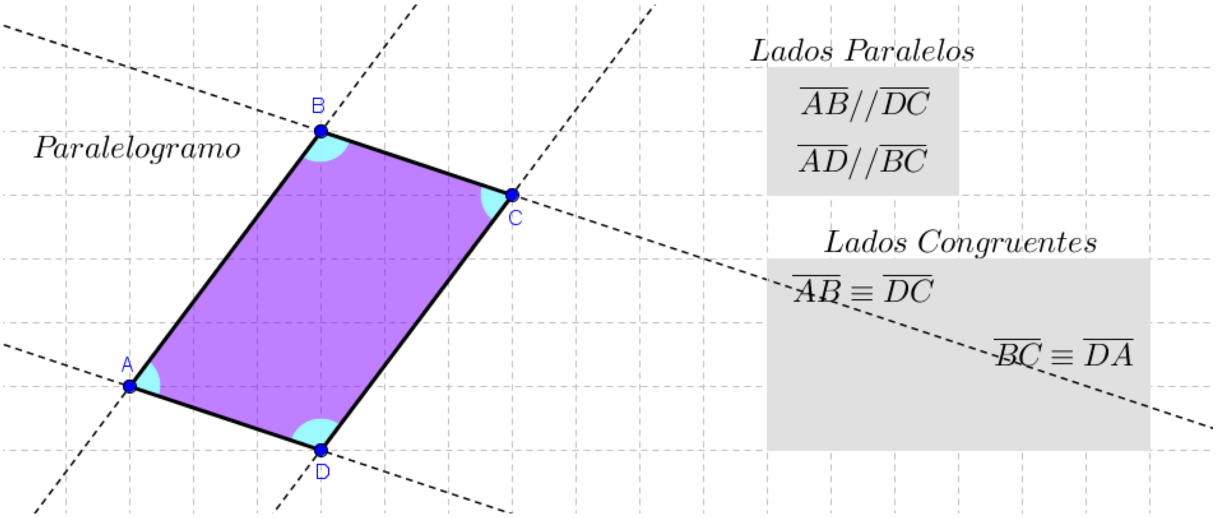
Os quadriláteros são classificados quanto à posição relativa entre seus lados e às medidas de seus ângulos internos. No entanto, como determina Brasil (1997), nos PCN, figuras geométricas como o quadrado, o retângulo e outras, são introduzidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental mostrando suas diferenças de maneira genérica, para facilitar o entendimento das crianças, de acordo com o seu estágio de desenvolvimento.

É o Ensino Fundamental o responsável por apresentar suas especificidades e por abordar a classificação de polígonos com maiores detalhes. Porém, as experiências profissionais do pesquisador apontam que a classificação dos quadriláteros a partir da posição de seus lados e ângulos não é um conteúdo de que os alunos apresentam plenitude de conhecimento.

Pensando em possíveis lacunas desse tópico geométrico e em possíveis incertezas na questão acima, construiu-se o *applet* “Quadriláteros”, com o objetivo de propor uma tarefa investigativa aos participantes. A construção permite a movimentação dos vértices de um quadrilátero e, consequentemente, a variação de seus lados. A partir de suas posições, aparecem, na tela, informações sobre a posição de seus lados e a sua respectiva classificação. Assim, os alunos podem investigar quais são as condições necessárias para determinar um paralelogramo, quadrado, retângulo, losango e trapézio (não serão estudadas, neste trabalho, as classificações do trapézio, por não serem relevantes para a pesquisa).

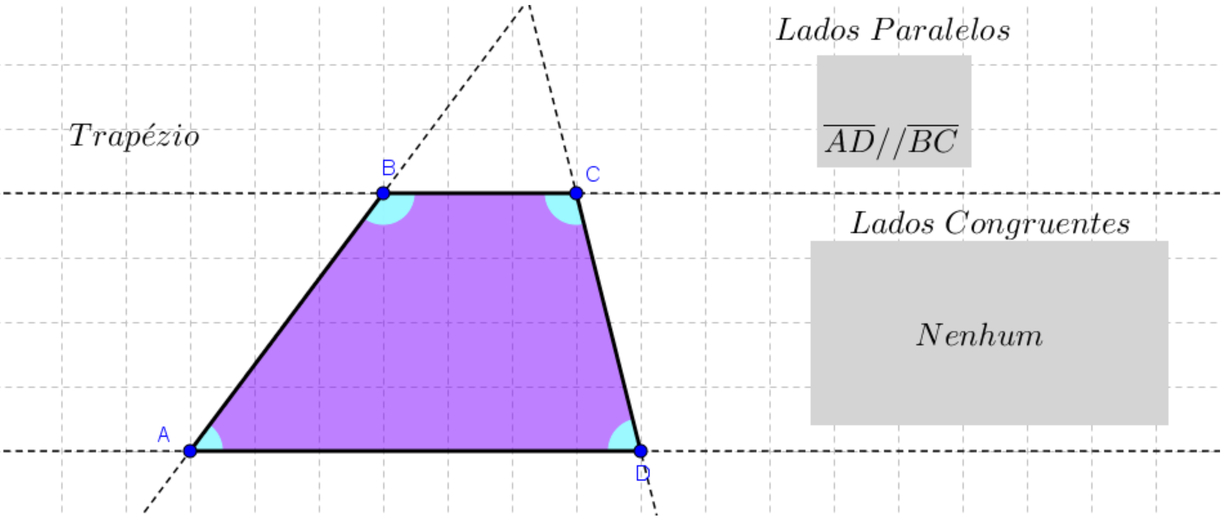
Deseja-se que o *applet* permita a compreensão de que os quadriláteros são classificados pela posição dos lados em paralelogramo, trapézio ou quadrilátero qualquer, em que paralelogramos são aqueles cujos lados opostos são paralelos, enquanto o trapézio tem um, e somente um, par de lados opostos paralelos. No caso de não haver lados paralelos, o quadrilátero é chamado de quadrilátero qualquer (figuras 10, 11 e 12).

Figura 10 – Paralelogramo



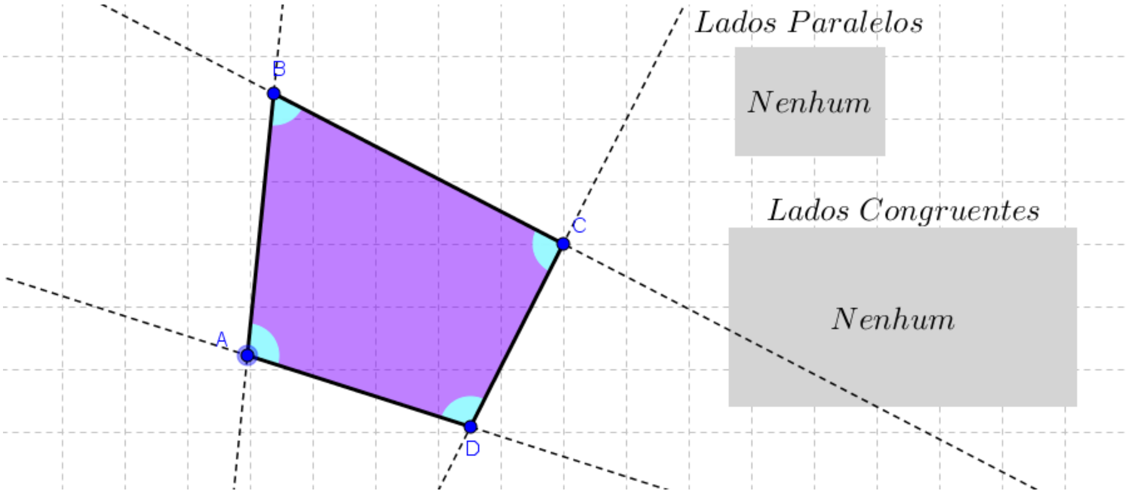
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor.

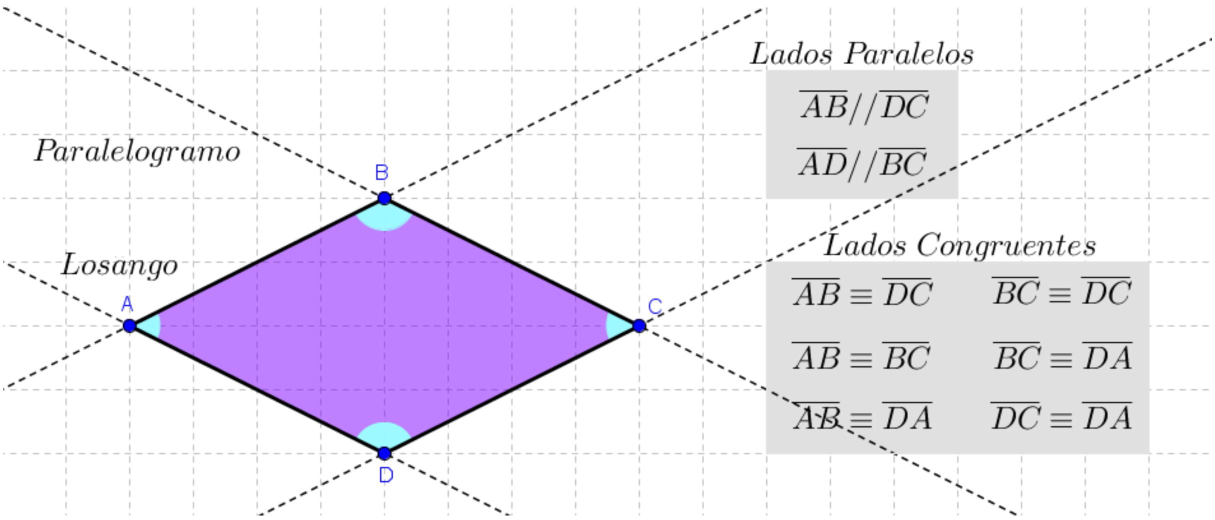
Figura 12 – Quadrilátero qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor.

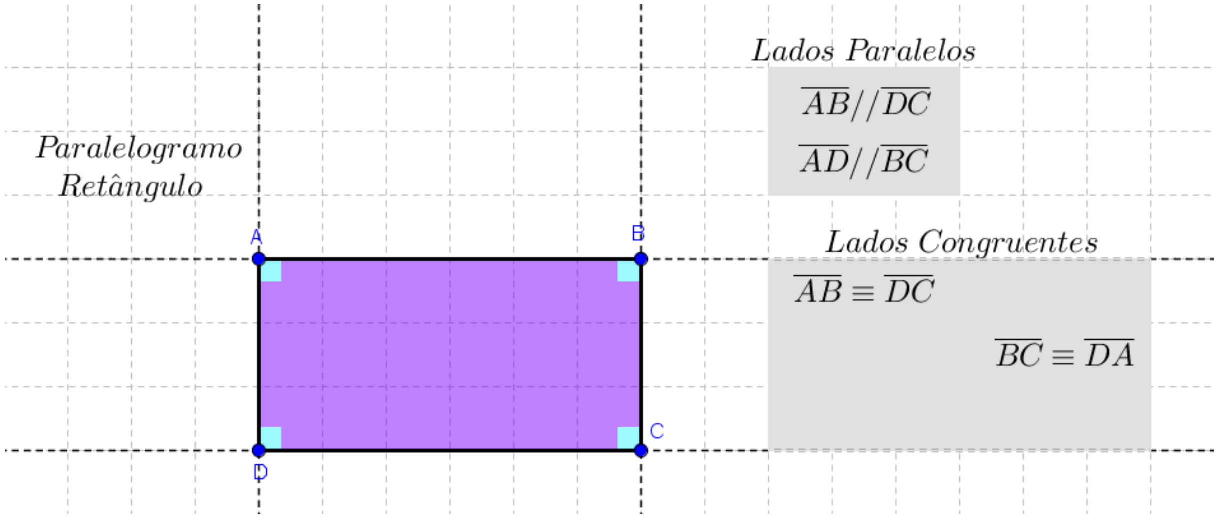
Os paralelogramos ainda são subdivididos em losangos, retângulos e quadrados. Losangos têm ângulos opostos congruentes e, por esse motivo, têm os quatro lados também congruentes. Os retângulos têm os quatro ângulos retos e, assim, seus lados opostos são congruentes. Já os quadrados têm todos os lados e ângulos congruentes, ou seja, retos; dessa forma, classificam-se tanto como losango quanto retângulo simultaneamente (figuras 13, 14 e 15).

Figura 13 – Losango



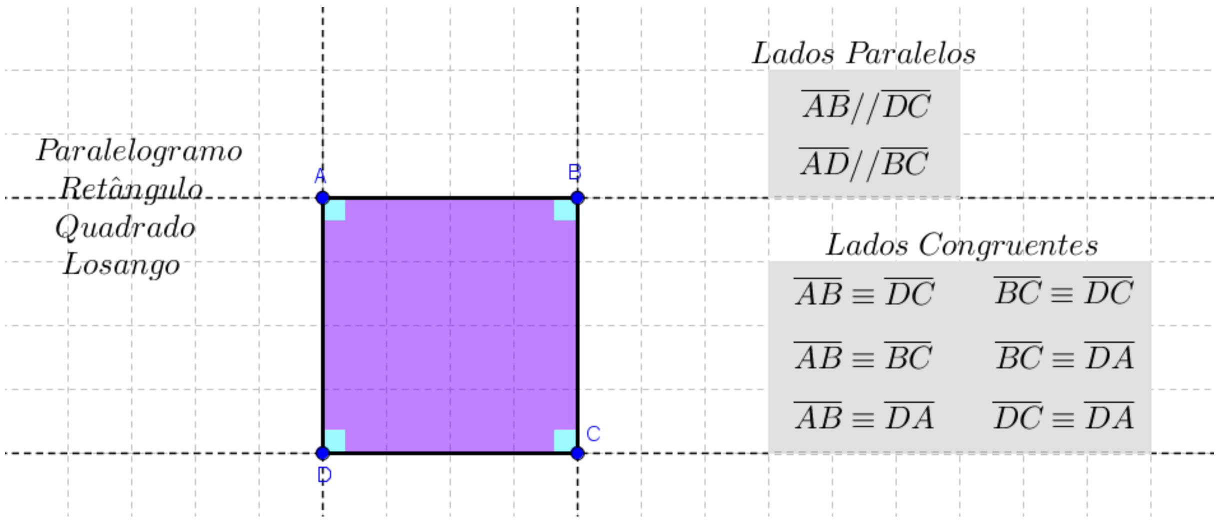
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

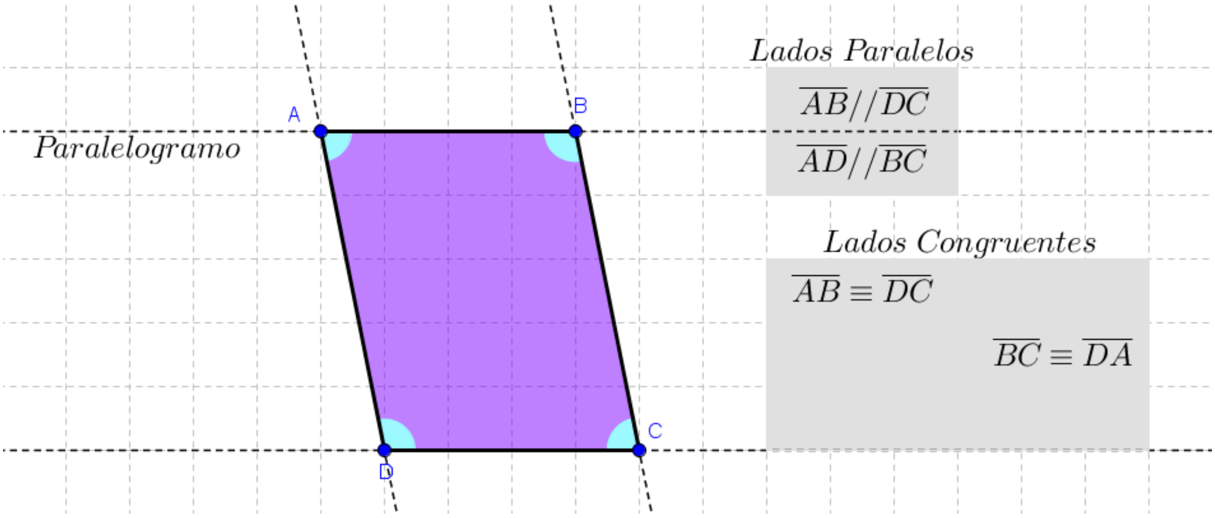
Figura 15 – Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso do paralelogramo não ser losango nem retângulo, ele é chamado de paralelogramo geral ou, simplesmente, de paralelogramo. Para fins de identificação, quando houver referência ao paralelogramo geral, será citado apenas paralelogramo (figura 16).

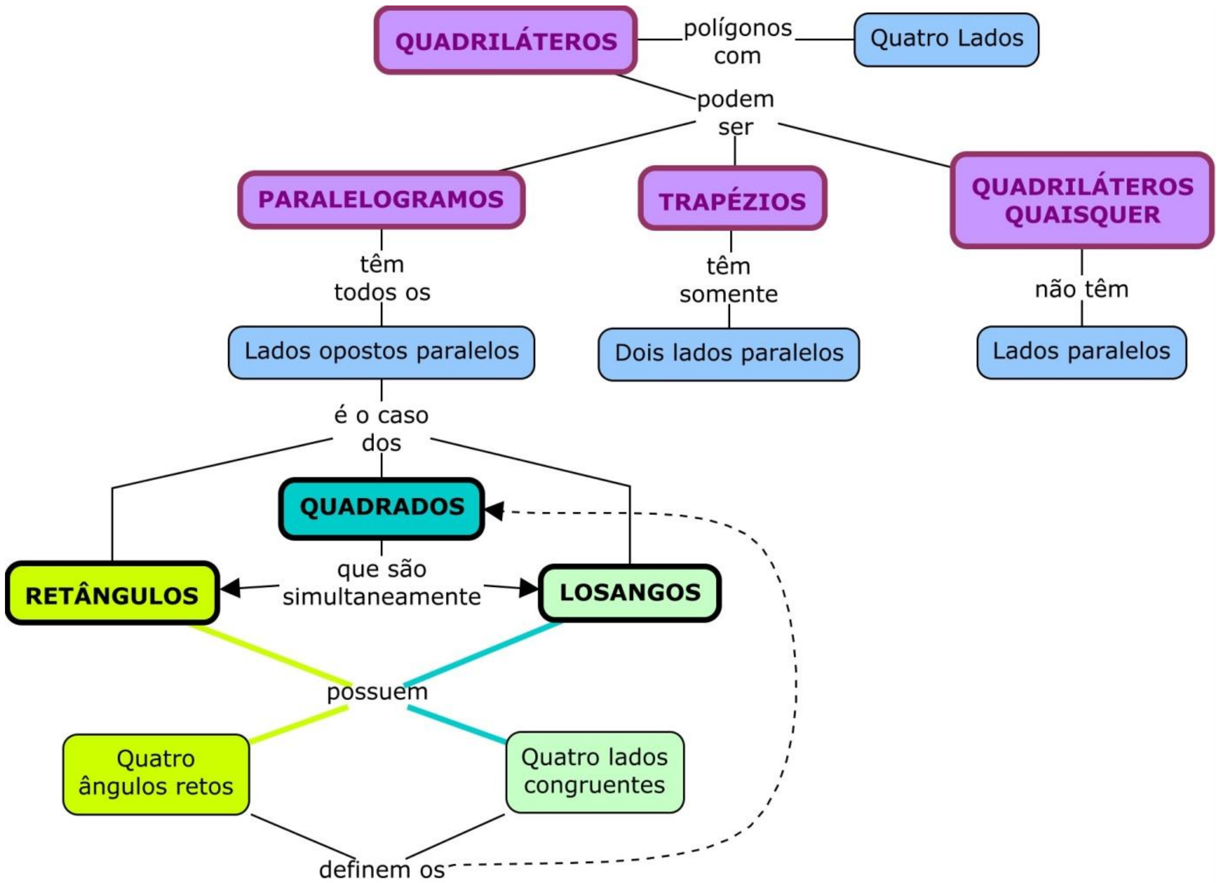
Figura 16 – Paralelogramo geral



Fonte: Elaborada pelo autor.

As conclusões gerais que se desejam obter com esse *applet*, entendidas como oportunas, partem da Aprendizagem Superordenada, teorizada por Ausubel (1963 apud MOREIRA, 2009b, p. 23). Como os participantes, supostamente, têm conhecimentos prévios sobre o estudo de polígonos desde a Educação Básica, não se deseja reapresentá-los, mas sim estabelecer uma reorganização da classificação dos quadriláteros, pois, como indica Moreira (2009b), a Aprendizagem Superordenada parte de um conceito potencialmente significativo e geral, nesse caso, paralelogramo, trapézio e quadrilátero geral; e outras definições particulares, como losango, retângulo e quadrado, são identificadas como casos específicos. Portanto, esse *applet* pode fomentar conceitos que vão além de uma simples análise – se o quadrilátero em questão é um quadrado ou retângulo –; ele esclarece muitas outras particularidades desses polígonos, como representa o mapa conceitual a seguir (figura 17).

Figura 17 – Mapa conceitual dos quadriláteros (conceitos gerais destacados em lilás)

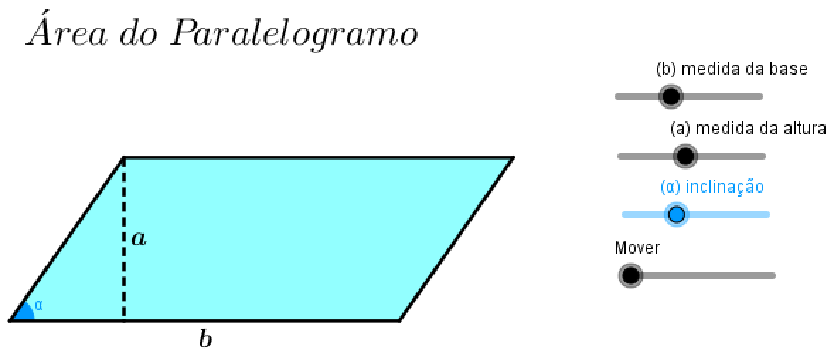


Fonte: Elaborada pelo autor.

xxii) Abra o *applet* "Área do Paralelogramo" e interaja com os controles deslizantes. A seguir, reflita se é possível calcular sua área com os dados fornecidos.

Nessa construção (figura 18), passa-se a utilizar variáveis para representar as medidas de comprimento, a fim de tornar mais simples a generalização das sentenças matemáticas do cálculo de áreas. Esse *applet* permite que o paralelogramo tenha seus lados e sua inclinação modificados, para favorecer a interpretação do caso de um paralelogramo arbitrário, dadas as medidas de base, altura e inclinação.

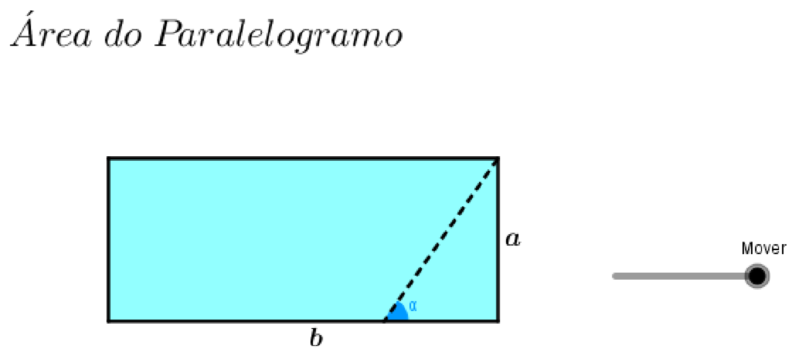
Figura 18 – *Applet* paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do movimento do controle "Mover", o paralelogramo é decomposto e, ao fim, é construído um retângulo de tal maneira que sua área é preservada (figura 19). Assim, deseja-se que os participantes sejam convencidos de que um paralelogramo pode ser modificado de modo a formar um retângulo de mesma área, altura e base. Logo, é possível calcular a medida de sua superfície.

Figura 19 – *Applet* do paralelogramo transformado em retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

xxiii) Dadas as medidas da base e altura, que cálculo pode ser realizado para obter-se a área do paralelogramo?

Após discutir o questionamento xxii, essa pergunta visa representar o cálculo da área de um paralelogramo por uma sentença matemática. Com os participantes convencidos pelo *applet* da construção de um retângulo a partir de um paralelogramo de mesma área, espera-se que não haja dificuldades em interpretar que a área do paralelogramo pode ser expressa pela mesma sentença que a área do retângulo:

$$\text{Área do paralelogramo} = b \cdot a$$

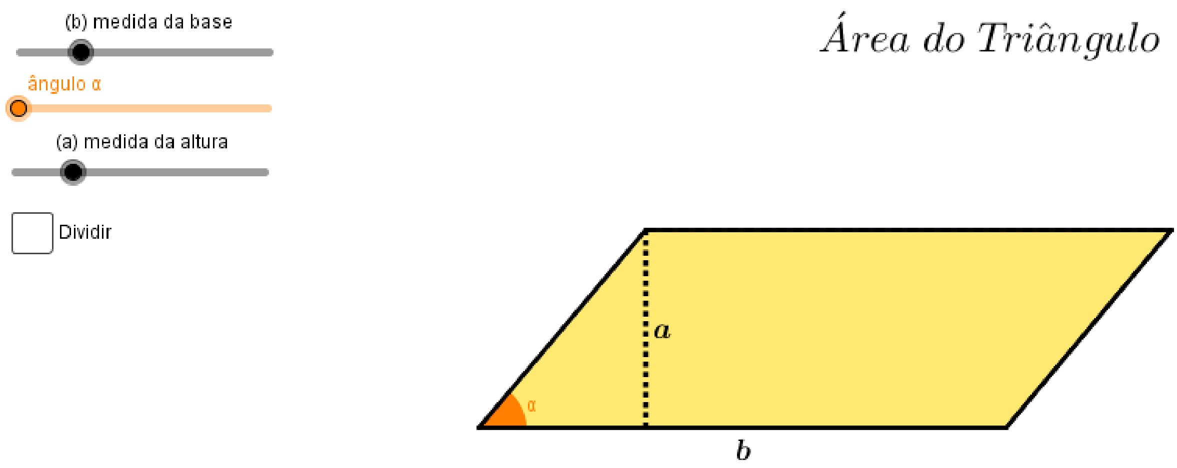
Ou, simplesmente:

$$A = b \cdot a$$

xxiv) Veja o *applet* "Área do Triângulo", você percebe alguma relação com a área de outro polígono? Justifique.

Nessa construção, além de permitir os mesmos mecanismos anteriores para obter medidas arbitrárias, também foi criada uma sequência didática dentro do *applet*. Como pode ser observado, na figura 20, há uma caixa de seleção para exibir uma divisão do paralelogramo.

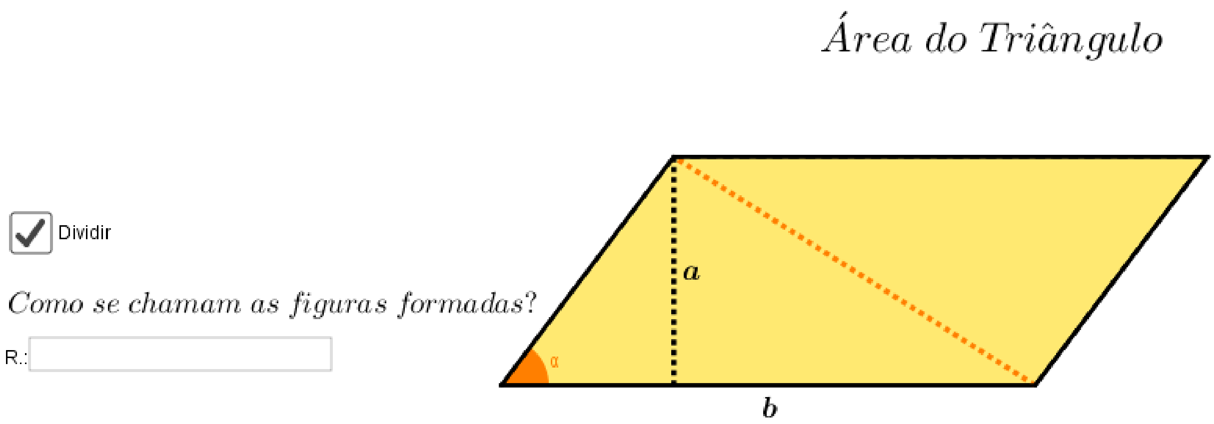
Figura 20 – *Applet* área do triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando a caixa é selecionada, aparece o questionamento sobre as figuras formadas, conforme a figura 21.

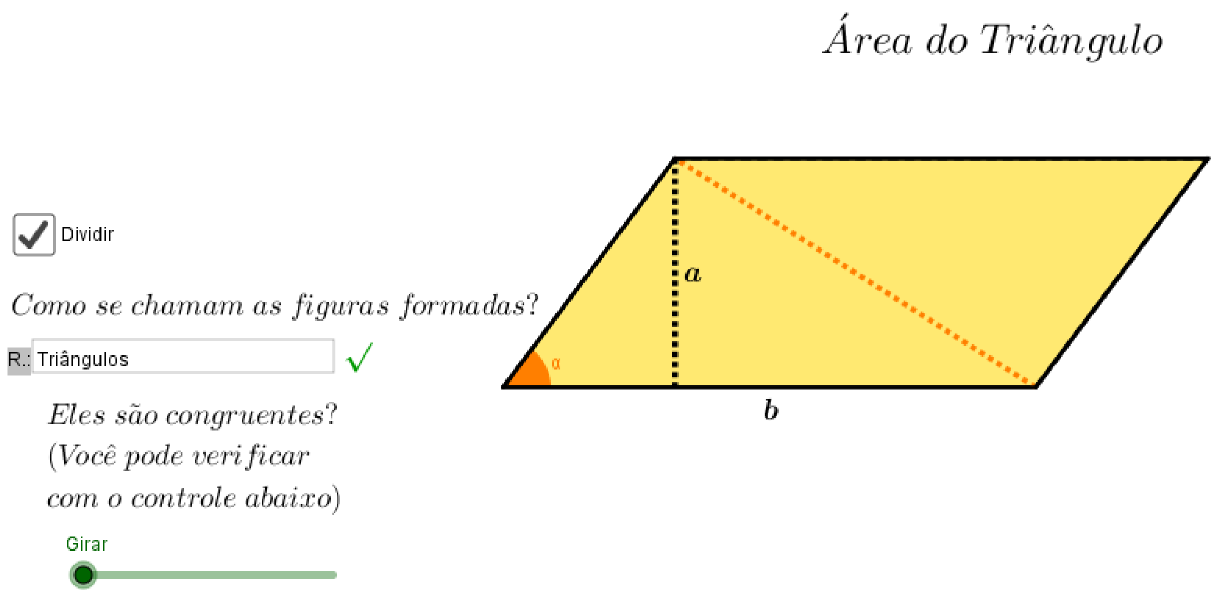
Figura 21 – *Applet* área do triângulo (pergunta)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Respondendo corretamente, aparece mais uma pergunta, como ilustra a figura 22.

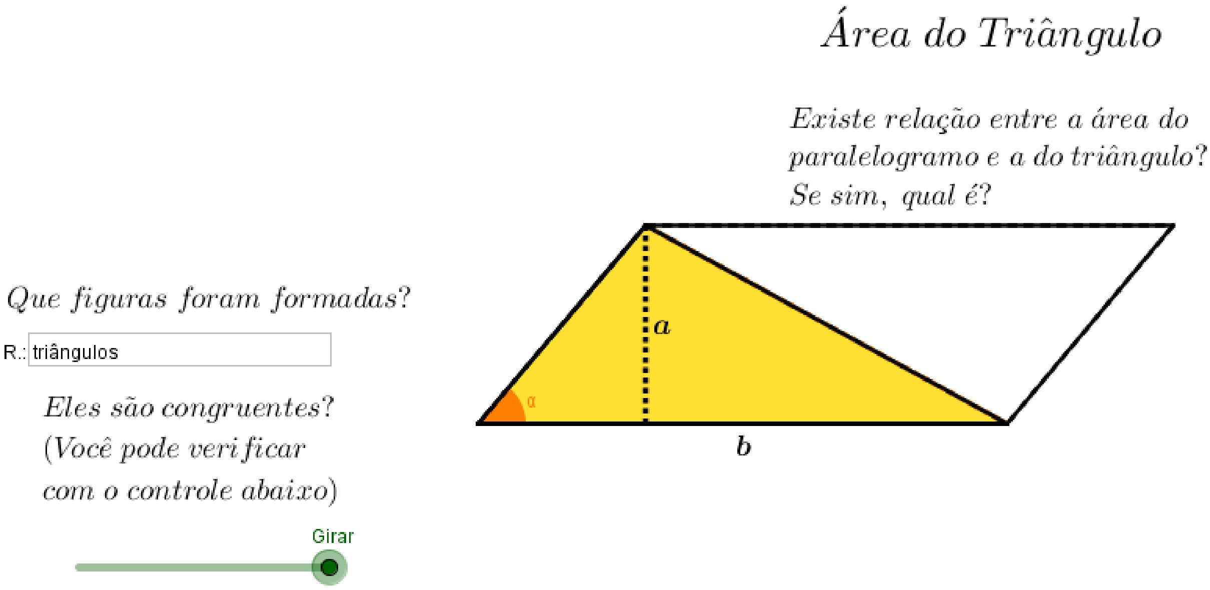
Figura 22 – *Applet* área do triângulo (pergunta 2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Movimentando o controle deslizante "Girar", os alunos podem verificar que, dividindo o paralelogramo em sua diagonal, formam-se dois triângulos congruentes. Por fim, o *applet* exibe uma pergunta fundamental para determinar a área do triângulo (figura 23).

Figura 23 – *Applet* área do triângulo (pergunta 3)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Deseja-se, assim, estimular o raciocínio dos participantes para serem capazes de concluir que a área do triângulo equivale à metade da área do paralelogramo.

xxv) A partir dos dados informados, é possível representar a área do triângulo por uma sentença matemática? Caso positivo, qual é essa sentença?

Como a última interação com o *applet* sugere, espera-se que os alunos concluam que é possível representar a área do triângulo por uma sentença matemática a partir do seguinte raciocínio:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{Área do paralelogramo}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

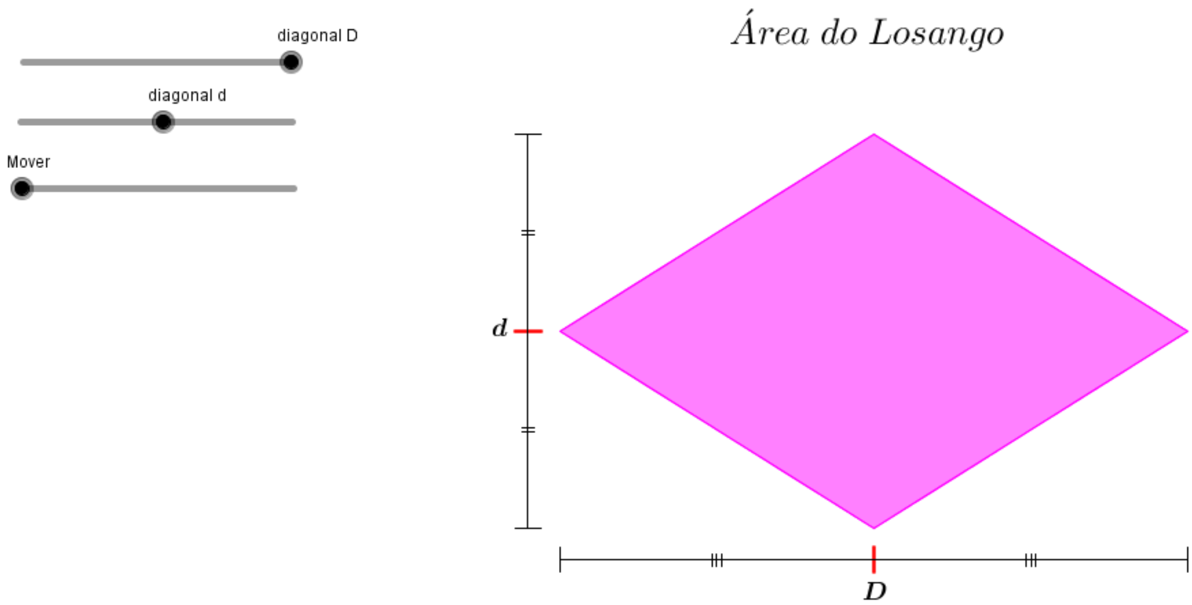
Simplificando:

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

xxvi) Utilize o *applet* “Área do Losango” para analisar se a sua área pode ser determinada com os dados fornecidos e com o uso das quatro operações elementares da matemática.

Os exercícios sobre área de losangos, na Educação Básica, predominantemente, partem das informações de suas diagonais, comumente chamadas de diagonal maior e diagonal menor, fato que os diferencia dos outros polígonos até então abordados, visto que os anteriores sempre apresentavam, no mínimo, o comprimento de um de seus lados. Nessa construção, a disposição adotada para o losango foi a seguinte (figura 24):

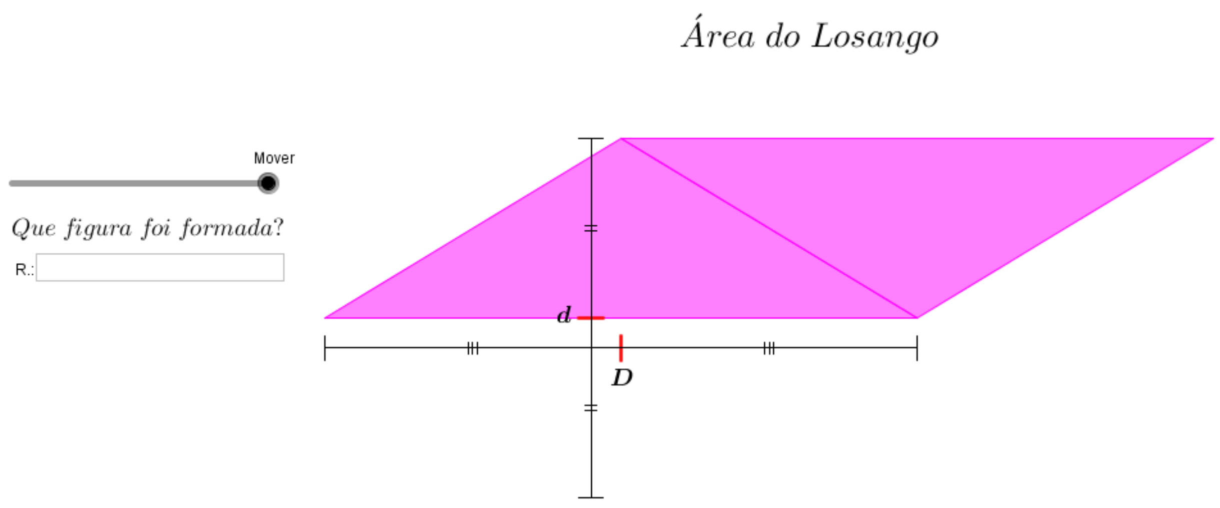
Figura 24 – Losango



Fonte: Elaborada pelo autor.

A sugestão para conduzir os participantes a uma forma de encontrar a área do polígono é dada por meio do controle deslizante "Mover", responsável por dividir o losango pela metade, reconstruí-lo em outra figura, sem prejuízo de sua área (figura 25), e questionar a respeito de qual figura foi formada.

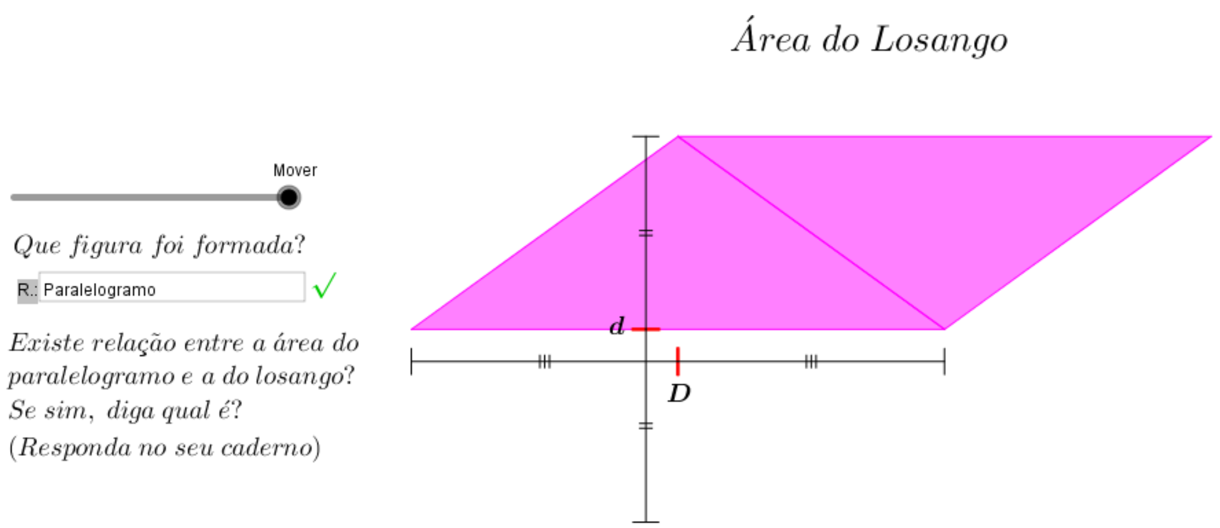
Figura 25 – *Applet* losango (pergunta 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o campo de resposta do *applet* é preenchido corretamente, surge um novo questionamento (figura 26):

Figura 26 – *Applet* losango (pergunta 2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

A pergunta sobre a relação existente entre a área do paralelogramo e a do losango é responsável pelo encaminhamento final de uma alternativa para expressar a área do losango a partir de suas diagonais. O *applet* revela que a área do losango é equivalente ao paralelogramo com base D e altura d/2.

xxvii) É possível representar a área do losango por uma sentença matemática a partir dos dados informados? Caso positivo, que sentença é esta?

Como a construção é capaz de verificar com simplicidade a relação existente entre a área dos polígonos envolvidos, espera-se que os estudantes tracem um raciocínio próximo a este:

$$\acute{A}rea\ do\ paralelogramo = b \cdot a = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Já que o paralelogramo determinado tem mesma área do losango, conclui-se que:

$$\acute{A}rea\ do\ losango = \acute{A}rea\ do\ Paralelogramo = \frac{D \cdot d}{2}$$

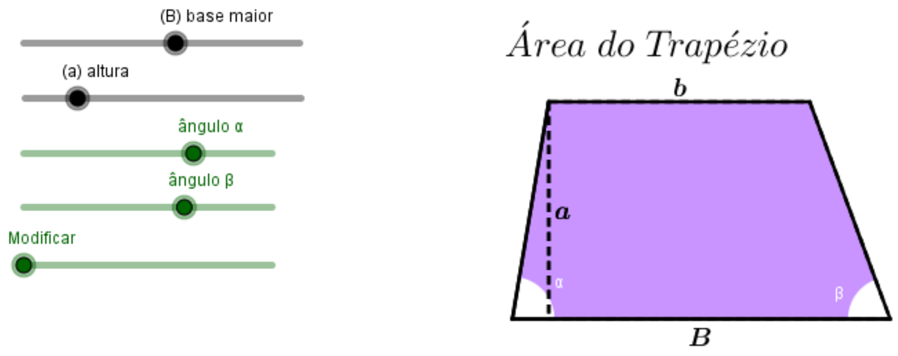
Simplificando a área do losango:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

xxviii) Interaja com o *applet* "Área do Trapézio A" e analise o que acontece ao mover o controle "Modificar".

O *applet*, além de possibilitar a alteração das medidas da base maior e da altura, também permite a escolha da inclinação de seus lados (figura 27).

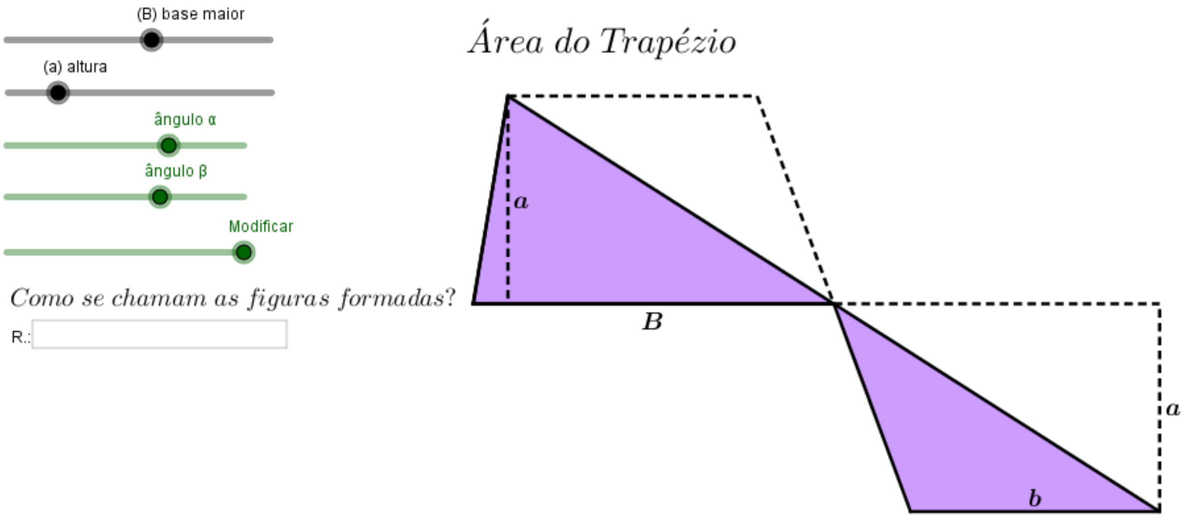
Figura 27 – *Applet* área do trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor.

No entanto, seu principal ganho pedagógico está no controle deslizante “Mover”, responsável por repartir o trapézio em dois triângulos (figura 28).

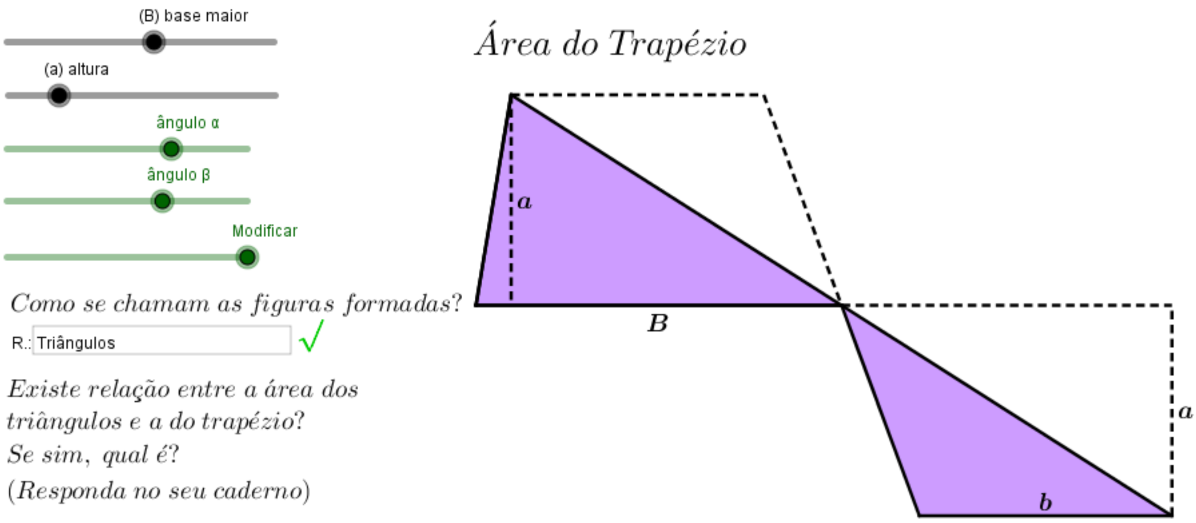
Figura 28 – Trapézio dividido em dois triângulos (pergunta 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Respondendo corretamente a pergunta que surge na construção, sucede uma segunda, com o objetivo de estimular o raciocínio a respeito da relação existente entre as áreas dos triângulos e a do trapézio (figura 29).

Figura 29 – Trapézio dividido em dois triângulos (pergunta 2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, cabe o raciocínio de que a soma das áreas dos triângulos equivale à área do trapézio.

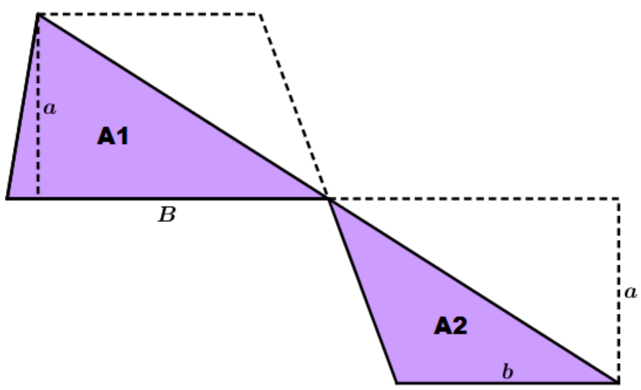
xxix) É possível determinar a área dos triângulos a partir dos dados informados? Por quê?

Como os participantes já terão analisado a forma de encontrar a área do triângulo, deseja-se que relacionem o resultado anterior com o presente e verifiquem que é possível determinar a área dos triângulos, ambos com altura a e bases representadas por B e b.

xxx) Qual é o resultado da soma das áreas dos triângulos?

Tendo conhecimento de que é possível calcular suas áreas, um possível caminho para responder essa pergunta pode partir da interpretação sugerida abaixo (figura 30), nomeando os triângulos como A1 e A2:

Figura 30 – Trapézio dividido em triângulos A1 e A2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim:

$$A1 = \frac{B \cdot a}{2} \text{e} \qquad A2 = \frac{b \cdot a}{2}$$

Portanto, a soma das áreas dos triângulos é dada por:

$$A1 + A2 = \frac{B \cdot a}{2} + \frac{b \cdot a}{2} = \frac{B \cdot a + b \cdot a}{2} = \frac{(B + b)a}{2}$$

xxxi) A área do trapézio pode ser expressa de que forma?

O *applet* é capaz de justificar de maneira simples que a área ocupada pelo trapézio é a mesma determinada pela soma dos triângulos de áreas A1 e A2. Portanto, a área do trapézio pode ser expressa por:

$$\acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio = A1 + A2 = \frac{(B+b)a}{2}$$

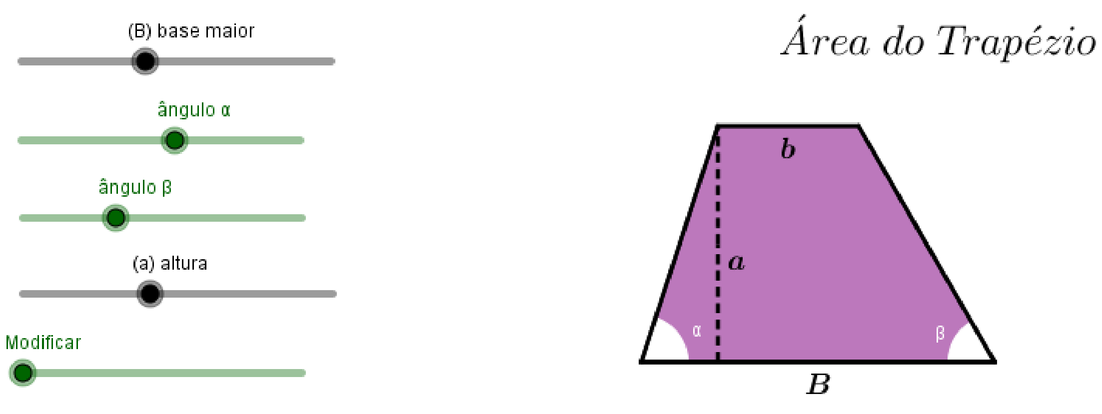
Simplificando:

$$A = \frac{(B+b)a}{2}$$

xxxii) Agora, veja o *applet* “Área do Trapézio B” e verifique qual modificação é realizada no polígono.

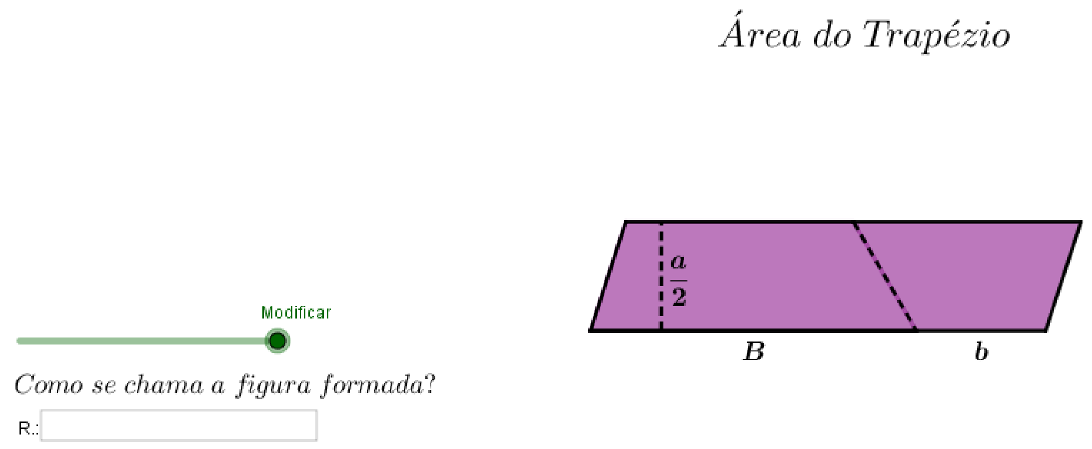
Diferentemente da construção anterior, nesse *applet*, o trapézio (figura 31) é modificado de modo a determinar um paralelogramo de mesma área (figura 32).

Figura 31 – Trapézio inicial



Fonte: Elaborada pelo autor.

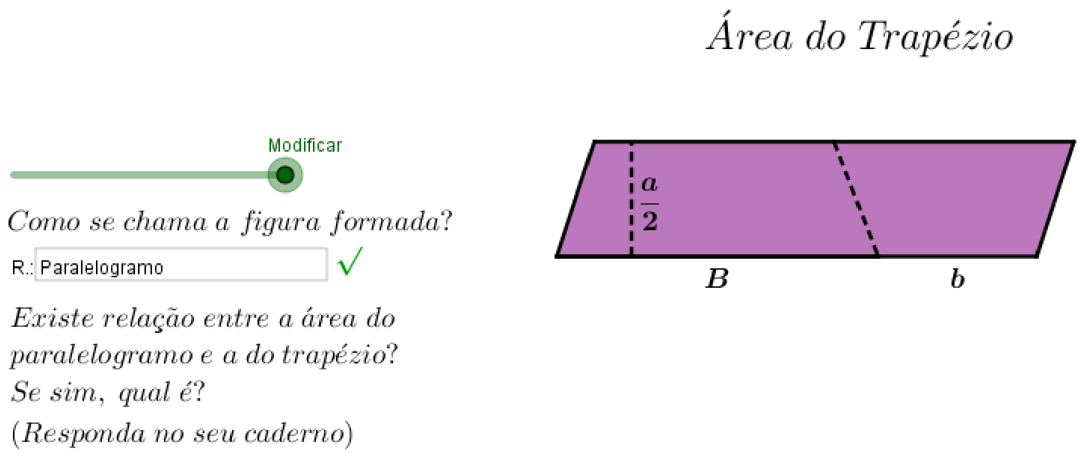
Figura 32 – Trapézio transformado em paralelogramo (pergunta 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Respondendo corretamente a pergunta no *applet*, há o questionamento sobre a relação existente entre a área dos polígonos em questão (figura 33), a qual favorece o entendimento de que, calculando a área do paralelogramo modificado, também será determinada a área do trapézio.

Figura 33 – Trapézio transformado em paralelogramo (pergunta 2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

xxxiii) Como expressar com uma sentença matemática a área do trapézio a partir da construção do paralelogramo?

Partindo da área do paralelogramo, justificada em momento anterior, o *applet* transforma o trapézio em um paralelogramo, como visto na figura 33, de base $(B + b)$ e de altura $a/2$. Calculando sua área, tem-se:

$$Área\ do\ paralelogramo = (B+b) \cdot \frac{a}{2} = \frac{(B+b)a}{2}$$

Nesse caso, têm-se paralelogramo e trapézio de áreas equivalentes, logo:

$$Área\ do\ trapézio = Área\ do\ paralelogramo = \frac{(B+b)a}{2}$$

Simplificando:

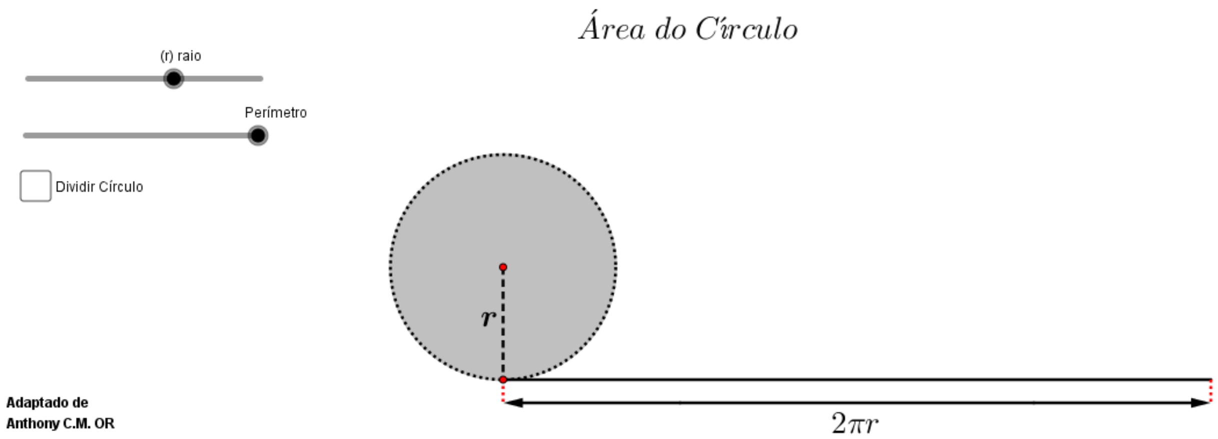
$$A = \frac{(B+b)a}{2}$$

Assim, conclui-se que, de duas formas distintas, há uma maneira prática para determinar a área do trapézio.

xxxiv) Veja a construção "Área do Círculo A"; o *applet* sugere aproximação de área com alguma figura? Justifique.

Os primeiros controles, nesse *applet*, são dispostos de forma a recordar alguns elementos básicos do círculo, como perímetro e setores circulares (figura 34), que são conceitos fundamentais para a justificativa da área nessa construção.

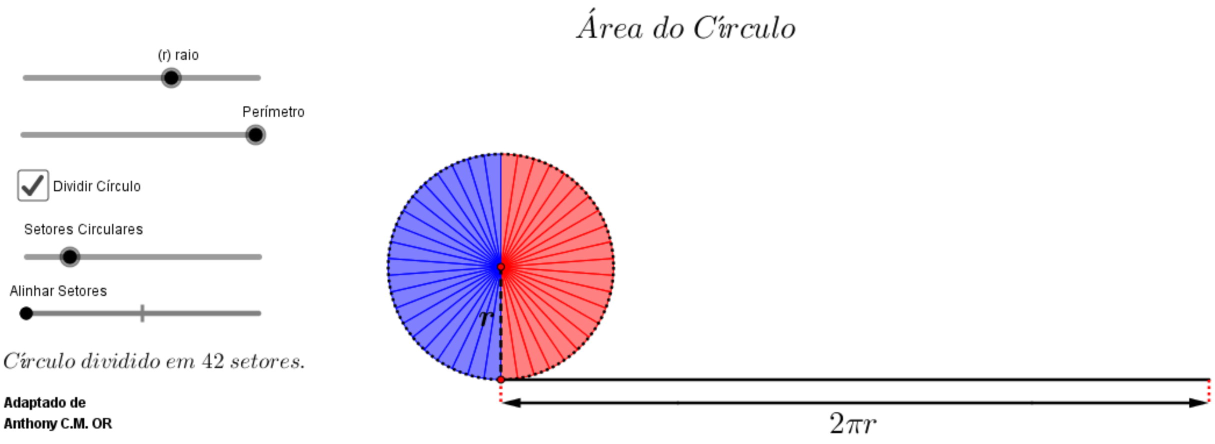
Figura 34 – *Applet* Área do Círculo A



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com tais conceitos compreendidos, os participantes poderão dividir o círculo em setores circulares congruentes (figura 35).

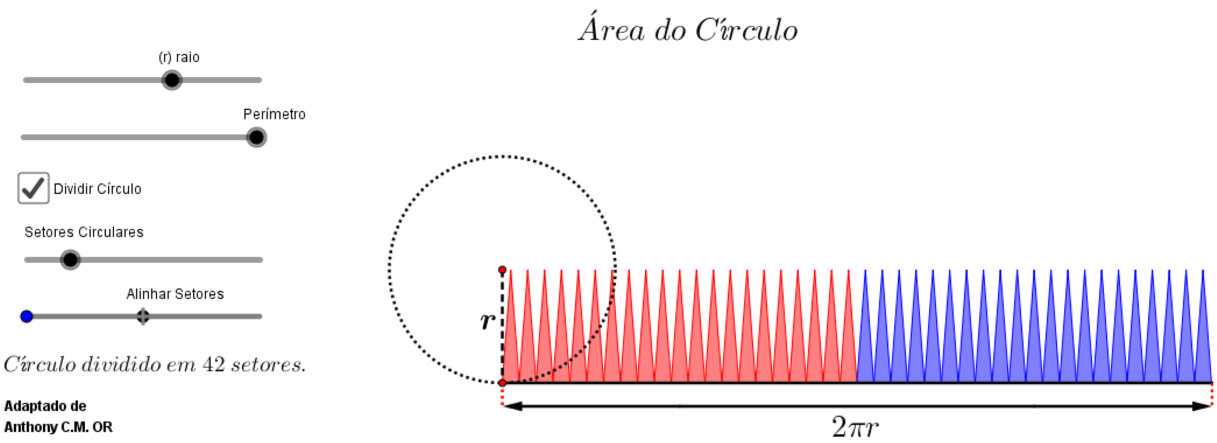
Figura 35 – Círculo dividido em setores circulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

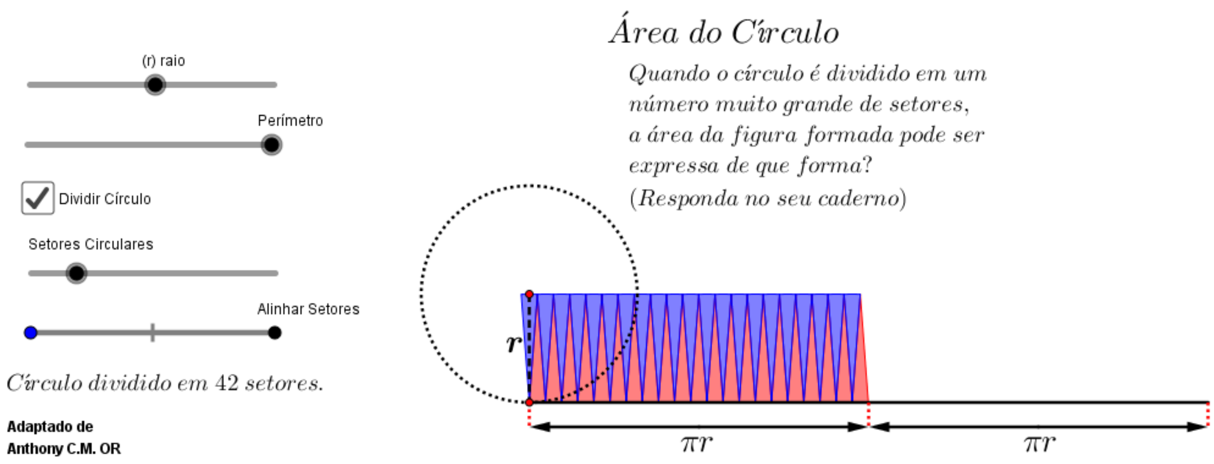
O último controle deslizante, “Alinhar Setores”, é capaz de perfilar os setores sobre o perímetro (figura 36) e encaixá-los de forma a determinar uma aproximação do paralelogramo (figura 37).

Figura 36 – Setores circulares perfilados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Setores circulares formando um paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, tanto pela pergunta inicial quanto pela apresentada no *applet*, os estudantes serão conduzidos ao raciocínio de que a área do círculo pode ser aproximada pela área de um paralelogramo. Quanto maior for o número de setores circulares, melhor será a aproximação.

xxxv) Como determinar a área do círculo a partir da aproximação do paralelogramo?

A área do círculo equivale à soma dos setores circulares que formam a aproximação do paralelogramo de altura r e base πr. É relevante destacar que essa aproximação oferece um pertinente exemplo de limite.

A partir da figura formada, tem-se:

$$\acute{A}rea\ do\ c\acute{i}rculo = \acute{A}rea\ paralelogramo \cong (\pi r) \cdot r = \pi r^2$$

Simplificando:

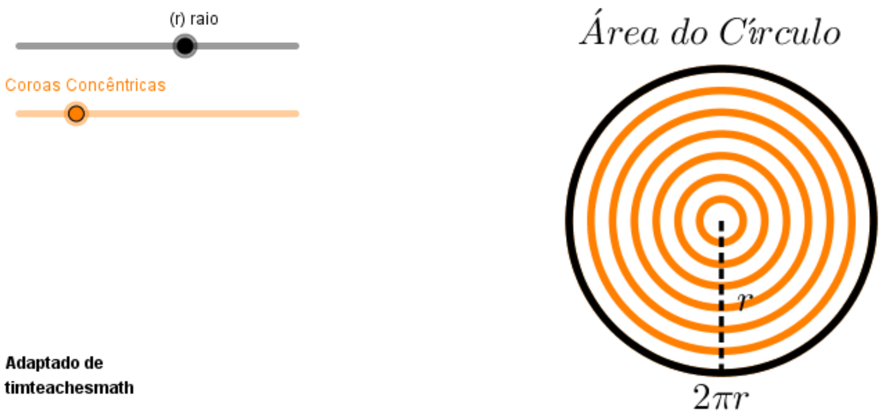
$$A \cong \pi r^2$$

xxxvi) Agora com o *applet* “Área do Círculo B”, confira, a partir do uso de seus comandos, as transformações propostas.

Esse *applet* busca justificar o cálculo da área do círculo partindo por outro caminho: no anterior, partia-se de uma reorganização dos setores circulares; neste, a ideia é completar a circunferência por coroas circulares concêntricas, de modo a formar um círculo.

Conforme a figura 38, nota-se que a quantidade de coroas circulares ainda não forma um círculo.

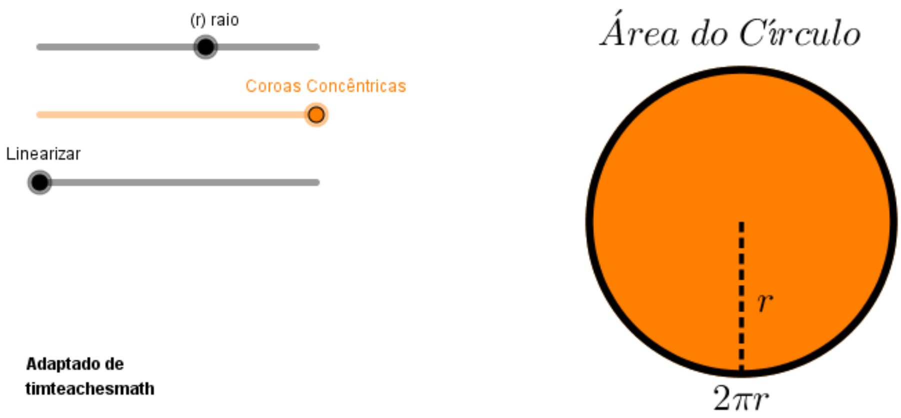
Figura 38 – *Applet* Área do Círculo (coroas concêntricas-a)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando são inseridas tantas coroas quantas forem possíveis, acaba-se por determinar um círculo, conforme a figura 39.

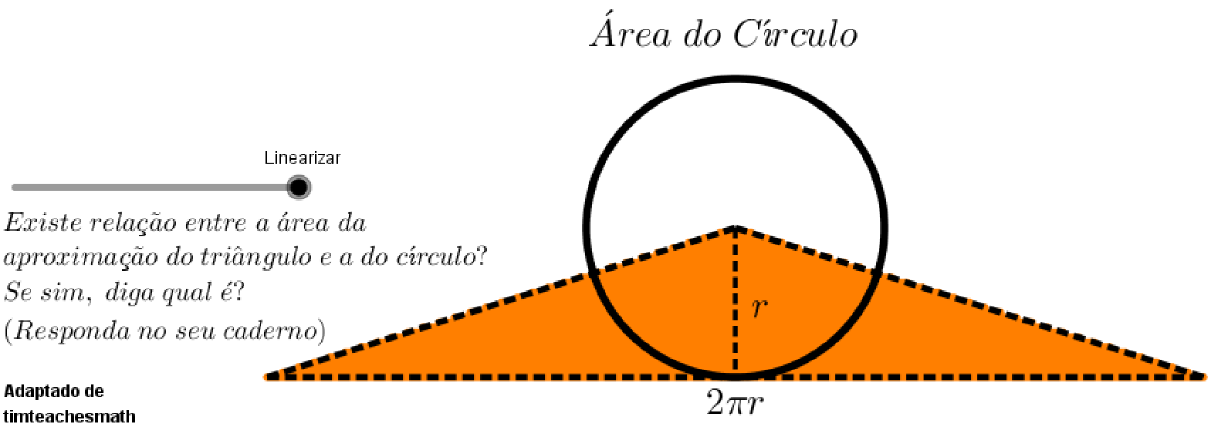
Figura 39 – *Applet* Área do Círculo (coroas concêntricas-b)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Formado o círculo, surge o comando capaz de linearizar as coroas circulares em segmentos, as quais compõe uma aproximação da área do triângulo (figura 40).

Figura 40 – Coroas concêntricas linearizadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

xxxvii) Como determinar a área do círculo a partir da aproximação do triângulo?

O próprio *applet* questiona se há relação entre as duas figuras. Pela proposta prática de interação com a construção, deseja-se que os estudantes estejam convencidos pela demonstração visual de que, determinando a área do triângulo, consequentemente, estarão determinando a área do círculo. A área do círculo é a mesma formada pela linearização das coroas circulares que compõem a aproximação do triângulo, cuja base equivale ao perímetro do círculo, $2\pi r$, e altura r. Logo:

$$\acute{A}rea\ do\ c\acute{\imath}rculo = \acute{A}rea\ tri\hat{a}ngulo \cong \frac{(2\pi r)\cdot r}{2} = \pi r^2$$

Assim, pode-se concluir que, mesmo o sendo caminho diferente, a área do círculo continua podendo ser expressa da mesma forma.

5.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE VOLUMES

Para iniciar o estudo de volumes optou-se em utilizar uma caixa no formato de bloco retangular por ser um objeto tridimensional muito comum e, supostamente, capaz de resgatar possíveis conhecimentos prévios de volume.

i) Uma caixa tem 3 unidades de comprimento, 2 de largura e 1 de altura. Qual é o seu volume?

Seguindo a mesma estratégia de estudo das áreas, essa pergunta não tem objetivo de propor obstáculos para os participantes. Imagina-se que os alunos acertarão a resposta sem grandes dificuldades. A intenção é promover reflexões, no próximo questionamento, sobre o motivo de realizar de tais cálculos.

ii) Sobre o modo de resolução da questão i:

a) Que cálculo você realizou para encontrar o resultado?

b) Por que ele aponta a resposta correta?

Com o uso de estratégia análoga a do estudo das áreas, também se espera que os alunos respondam algo próximo como “multipliquei os três ‘lados’” ou “multipliquei as três medidas”. Já para justificar o motivo de esse cálculo apresentar a resposta correta, a expectativa é de que sejam concebidos momentos de reflexão, motivados pela ausência de argumentos, que, possivelmente, podem ser resultado de lacunas deixadas durante o estudo do conteúdo na Educação Básica. É possível também que ideias surjam a partir de uma similaridade de raciocínio com a justificativa do cálculo da área do retângulo.

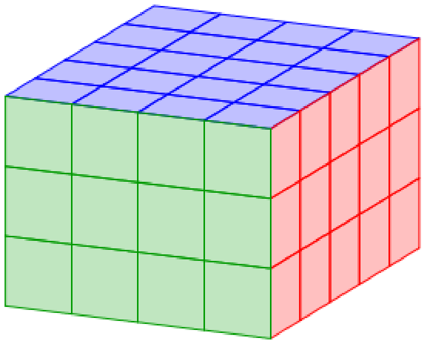
iii) Abra o *applet* “Bloco Retangular” e movimente livremente os controles disponíveis. As figuras formadas lembram alguns objetos reais?

O bloco retangular é o sólido cuja estrutura é a mais familiar no cotidiano, pois tem o formato, por exemplo, de edificações, móveis, embalagens, entre muitos outros. A partir desses exemplos, acredita-se ser mais simples apresentar a definição desse sólido: uma figura tridimensional, com comprimento, largura e altura, cujas faces totalizam seis retângulos, em que as opostas, aos pares, são paralelas e congruentes.

Possivelmente, algum aluno pode conhecê-lo por outro nome. Por essa razão, será observado que o bloco retangular também pode ser chamado de paralelepípedo retângulo ou ortoedro (outras nomenclaturas serão trabalhadas, mais adiante, neste estudo).

Também é relevante esclarecer aos participantes que o bloco retangular representado no *applet* (figura 41) é composto por pequenos cubos, isto é, blocos retangulares com as seis faces quadradas e congruentes, que, por consequência, possuem mesmo comprimento, largura e altura. Assumindo uma unidade de comprimento para esses cubinhos, eles passarão a ser chamados de cubos unitários. Dessa forma, cada um desses cubinhos será adotado como uma unidade de volume (u.v.).

Figura 41 – Bloco retangular 4x5x3

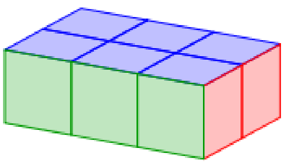


Fonte: Elaborada pelo autor.

iv) Nesse *applet*, selecione as medidas informadas na pergunta i e responda a questão presente na tela: “Quantos cubos tem o Bloco Retangular?”

Novamente, espera-se que os alunos não tenham dificuldade em responder corretamente seis cubos (figura 42). Porém, a intenção dessa pergunta visa introduzir o conceito matemático de volume, que segue na próxima questão.

Figura 42 – Bloco retangular 3x2x1



Fonte: Elaborada pelo autor.

v) Existe relação entre o volume respondido em i e o número de cubinhos unitários?

Provavelmente, os participantes responderão de modo afirmativo, pois as respostas apontam o mesmo número. Nesse momento, torna-se oportuno trabalhar com os alunos a correta ideia de volume. Para isso, inicialmente, os estudantes serão questionados sobre os seus conhecimentos prévios e, a seguir, serão “lapidadas” suas principais contribuições.

Como o conceito de área foi trabalhado anteriormente, é possível que os alunos busquem uma correlação com o conteúdo anterior, o que pode facilitar a aprendizagem. Enquanto área é a medida de superfície, é proveitoso que os participantes sejam levados a entender volume como medida de espaço ocupado por um sólido.

vi) Verifique no *applet* quantos cubinhos formam um bloco retangular com 3 unidades de comprimento, 2 de largura e 2 de altura.

A partir do conhecimento da unidade de volume e de sua definição, a pergunta tem como propósito exibir, com a simplicidade que o recurso visual proporciona, que são 12 cubos unitários que formam o bloco retangular e que, por esse motivo, o seu volume é 12 u.v.

vii) Para não haver necessidade de contar o número de cubinhos um a um, que cálculo pode ser realizado para determinar o número total de cubinhos unitários? Justifique.

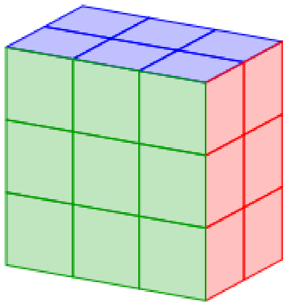
O aguardado é que os estudantes repitam o cálculo mencionado no questionamento ii-a. No entanto, a partir do recurso visual do *applet*, deseja-se que os participantes percebam a validade desse cálculo, dado que a quantidade de cubinhos distribuídos pelo comprimento repete-se, proporcionalmente, conforme medida da largura e que o total desses cubos unitários repete-se, novamente, de maneira proporcional à altura.

viii) Usando o *applet*, verifique quanto mede o volume desse mesmo bloco retangular quando sua altura é 3 ou 4 unidades?

Apresentado um convencimento de que basta encontrar o produto das três dimensões do bloco retangular para encontrar o seu volume e sobre a nova aprendizagem que valida esse cálculo, a finalidade dessa questão é interagir esses conhecimentos para fortalecer a aprendizagem anterior e dar um significado ainda mais relevante a esta nova. Promovendo, desse modo, uma aprendizagem significativa.

Portanto, o aluno poderá verificar que, no caso da altura medir 3 unidades, o bloco retangular será determinado por 18 cubinhos, ou seja, seu volume é 18 u.v. (figura 43).

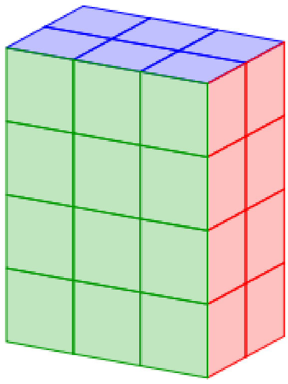
Figura 43 – Bloco retangular 3x2x3



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso de a altura medir 4 unidades, seu volume é formado por 24 cubinhos, ou seja, seu volume mede 24 u.v. (figura 44).

Figura 44 – Bloco retangular 3x2x4



Fonte: Elaborada pelo autor.

ix) É possível expressar o volume de um bloco retangular qualquer por alguma sentença matemática? Se sim, qual?

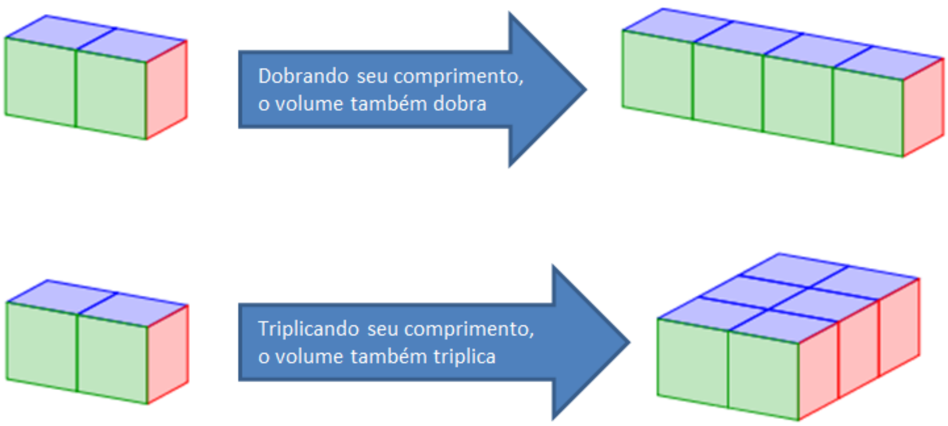
Para findar esse estudo do volume do bloco retangular, não são vistos obstáculos para que os participantes sejam todos capazes de responder de modo afirmativo e retornar a responder que, para determinar o volume de um bloco retangular de comprimento *a*, largura *b* e altura *c*, basta determinar o seu produto, isto é:

$$\textit{Volume do bloco retangular} = a \cdot b \cdot c$$

No entanto, assim como na área do retângulo, essa conclusão foi obtida apenas para medidas inteiras, e não para um número real positivo qualquer. Para verificar a validade dessa generalização, será utilizada intervenção didática análoga (WAGNER, 2012), ou seja, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Nessa situação, o bloco retangular tem seu volume proporcional a cada uma de suas dimensões, isto é, caso seu comprimento seja dobrado, seu volume também duplica, caso sua largura seja triplicada, seu volume triplica, e os mesmos resultados ocorrem quando a medida em questão é a altura (figura 45).

Figura 45 – Proporcionalidade do volume do bloco retangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

A proporcionalidade presente no volume dos blocos retangulares resulta a seguinte propriedade: se dois blocos têm mesma base, a razão entre os seus volume será a razão entre suas alturas. A aplicação dessa propriedade segue na tabela 2, com medidas reais positivas e volumes identificados.

Tabela 2 – Volume do bloco retangular para dimensões reais positivas

	Medidas	Volume
I	a, b e c	V
II	a, b e 1	V_1
III	a, 1 e 1	V_2
IV	1, 1, e 1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em I e II, assumindo *a* e *b* como medidas da base do sólido, tem-se que:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{1} = c$$

Em II e III, assumindo *a* e *1* como medidas da base, tem-se que:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{1} = b$$

Em III e IV, assumindo *1* e *1* como medidas da base, tem-se que:

$$\frac{V_2}{1} = \frac{a}{1} = a$$

Dessas razões, pode-se obter o seguinte:

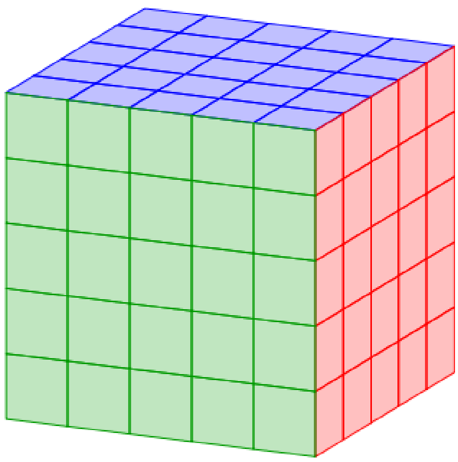
$$\frac{V}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_2}{1} = c \cdot b \cdot a \Rightarrow V = a \cdot b \cdot c$$

Ou seja, para medidas reais positivas, o volume do bloco retangular também pode ser obtido determinando o produto de suas dimensões.

x) Quando as medidas de altura, comprimento e largura são as mesmas, você sabe como se chama a figura determinada?

Como comentado no questionamento iii, trata-se de um cubo. Assim, entende-se que os alunos não apresentarão dúvidas. No entanto, é interessante destacar que o cubo (figura 46) também é chamado de hexaedro regular, cuja nomenclatura vem do grego *héx* (referente ao número seis) e *hedra* (faces).

Figura 46 – Cubo 5x5x5



Fonte: Elaborada pelo autor.

xi) Existe uma sentença matemática específica para representar o volume deste caso? Se sim, qual?

Por se tratar de um caso específico do bloco retangular, mais uma vez, acredita-se que os participantes não terão dificuldades em responder de forma positiva e indicar que, em um cubo de comprimento *a*, seu volume é dado por:

$$Volume\ do\ cubo = a \cdot a \cdot a = a^3$$

xii) A superfície inferior e a superior do bloco retangular são denominadas bases.

a) Como se chamam as figuras que determinam as bases do bloco retangular?

b) Construa no *applet* um bloco retangular com 5 unidades de comprimento, 4 de largura e 3 de altura. É possível calcular as áreas das bases? Justifique.

É provável que essas questões não devam impor dificuldades nas respostas dos participantes, visto que já foi trabalhada, anteriormente, a definição desse sólido. Entretanto, esse questionamento procura introduzir uma relação existente entre a área da base e o volume do bloco retangular.

Com esse objetivo, o questionamento *b* procura trazer à tona a possibilidade ou não de determinar as áreas das bases, o que é possível, uma vez que as dimensões do comprimento e da largura do bloco retangular são as mesmas das bases.

xiii) Sabendo que um bloco retangular tem 8 unidades de altura e que a área de sua base mede 6 u.a., é possível determinar o seu volume? Justifique (se preferir, use o *applet*).

No Ensino Médio, é estudado que o volume desse sólido também é determinado pelo produto entre a área de uma de suas bases e sua altura. No entanto, acredita-se que esse resultado seja mais um de tantos outros em que os alunos receberam a "fórmula" pronta, sem que fossem apresentados argumentos e/ou justificativas de sua validade.

Os participantes poderão conferir no *applet* que os dados da pergunta admitem várias possibilidades para o comprimento e largura do sólido, por exemplo: 3x2, 2x3, 1x6 e 6x1 (citando apenas medidas inteiras). Independentemente da escolha, é possível perceber que o número de cubos unitários sobre a base equivale a essa área, isto é, seis, e, diante da proporcionalidade existente com a altura, seu volume será de 48 unidades.

xiv) Se um bloco retangular tem 10 unidades de altura e sua base mede 8 u.a., é possível determinar o seu volume? Justifique (se preferir, use o *applet*).

Analogamente à pergunta anterior, os participantes poderão verificar, novamente, que o número de cubos unitários acima da base inferior é dez, independentemente da escolha do comprimento e da largura do bloco retangular. Multiplicando pela medida da altura, têm-se 80 u.v.

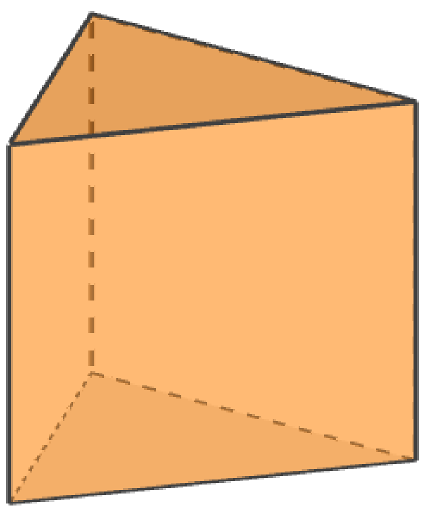
xv) Existe uma sentença matemática específica para representar o volume de um bloco retangular, dada apenas a sua área da base e altura? Se sim, qual?

Finalizando esse estudo do volume do bloco retangular, já não são vistos obstáculos para que os participantes sejam todos capazes de responder de modo afirmativo e compreender a justificativa de o volume desse sólido poder ser expresso como o produto entre a área de uma das bases (A_b) e a medida da altura (a), isto é:

$$\textit{Volume do bloco retangular} = A_b \cdot a$$

xvi) Como calcular volume de sólidos em que cubos unitários não podem ser dispostos de maneira uniforme e adjacente, como, por exemplo, o da figura 47?

Figura 47 – Cilindro (ou prisma) triangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como indica a pergunta, a intenção não é saber se os alunos sabem ou não calcular o volume do sólido acima (figura 47), mas questioná-los sobre qual é a forma de determinar esse volume, já que os cubos não podem ser dispostos de forma a preenchê-lo completamente como no bloco retangular. Por essa razão, espera-se que mais um momento de reflexão seja constituído diante de uma possível falta de argumentos para justificar o cálculo desse volume.

Para dar continuação ao estudo de volumes com características que permeiam a questão xvi, na sequência didática, será realizada uma revisão de alguns sólidos estudados no Ensino Médio. Assim como no estudo dos quadriláteros, será feita, novamente, uma reorganização das figuras geométricas por meio de uma Aprendizagem Superordenada.

xvii) Abra o *applet* “Cilindro” e verifique a figura exibida na janela 3D. Você concorda que essa figura é um cilindro? Justifique.

Grande parte dos autores de livros didáticos leva os estudantes a um comum engano quanto à correta distinção entre prismas e cilindros. Nesses materiais didáticos, mesmo os mais atuais como, por exemplo, Dante (2013), Iezzi et al. (2013), Leonardo (2013), Souza (2013), entre muitos outros, o estudo de prismas fica localizado no capítulo de poliedros, enquanto cilindros, no de corpos redondos, o que é uma escolha acertada. O problema ocorre quando esses materiais apresentam cilindro somente com as bases circulares, o que é incorreto. Tais erros podem ser conferidos nas figuras 48 e 49:

Figura 48 – Introdução ao conceito de cilindro em um livro didático

Observe ao lado alguns objetos que encontramos no nosso dia a dia.

Fotos: Cristina Xavier

Figuras sem escala ou em escalas diferentes. Cores reais.

Todos esses objetos têm a forma geométrica chamada **cilindro**, que estudaremos neste capítulo.

Note que a lata mostrada na figura ao lado tem a forma de um sólido com as seguintes características:

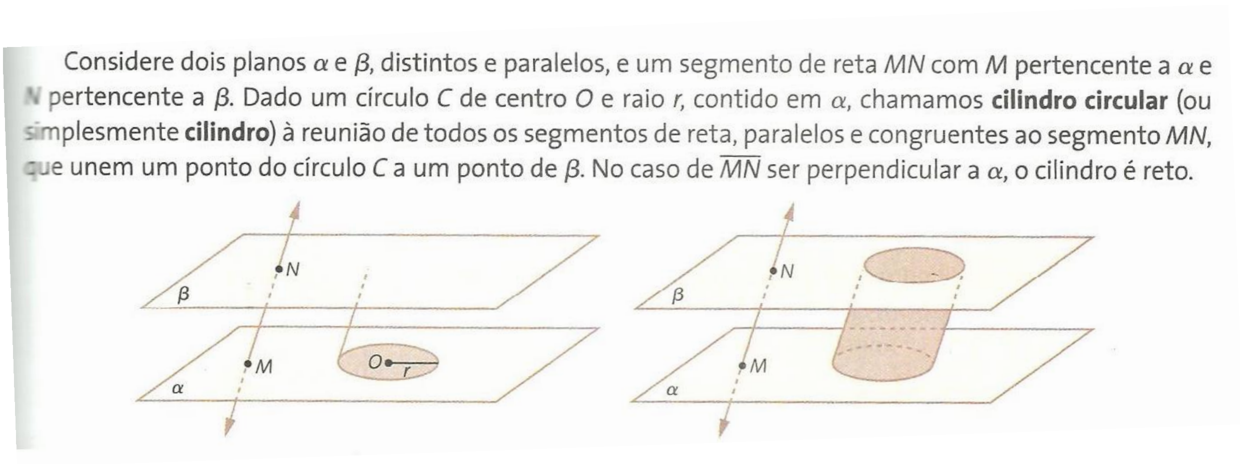
- apresenta dois círculos com raios de medidas iguais que se situam em planos paralelos;
- sua superfície lateral é constituída por todos os segmentos de reta de igual comprimento, paralelos à reta que contém os centros dos círculos e que têm extremidades nas circunferências desses círculos.

Por essas razões, podemos afirmar que a lata tem a forma de um **cilindro**.

Thinkstock/Getty Images

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 221).

Figura 49 – Definição de cilindro apresentada em um livro didático



Considere dois planos α e β, distintos e paralelos, e um segmento de reta MN com M pertencente a α e N pertencente a β. Dado um círculo C de centro O e raio r, contido em α, chamamos **cilindro circular** (ou simplesmente **cilindro**) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento MN, que unem um ponto do círculo C a um ponto de β. No caso de $\overline{MN}$ ser perpendicular a α, o cilindro é reto.

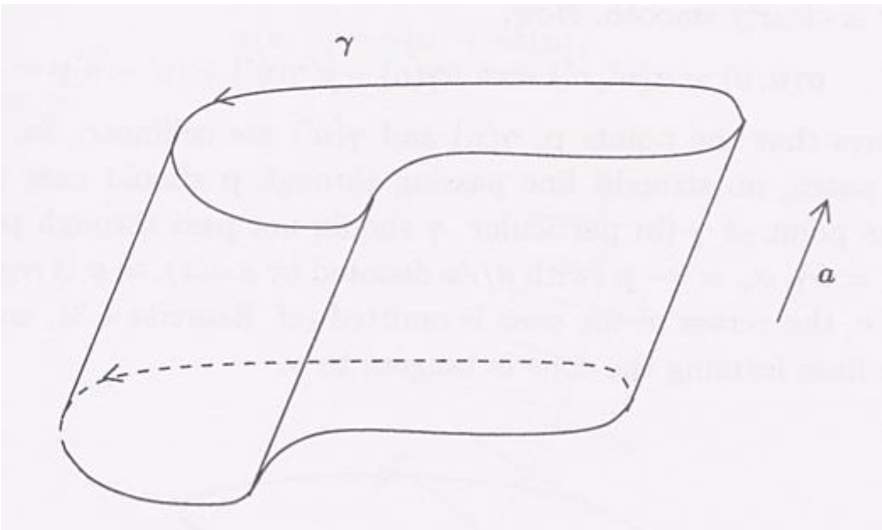
Fonte: DANTE (2013, p. 217).

Já em Dias et al. (2013), Machado (2016), Lima et al. (2006) e Peneireiro e Silva (2003) – todos os materiais para formação de professores de Matemática –, cilindros são definidos sem estabelecer uma base específica. Peneireiro e Silva (2003) o determinam pela seguinte construção:

> Em um plano α tome uma curva fechada γ_1 sem auto-interseções. Escolhemos um ponto A em γ_1, um ponto $B \notin \alpha$ e, por ele, passamos um plano β paralelo a α. Passamos por cada ponto γ_1 uma paralela a AB, que corta β num ponto, determinando em β uma curva γ_2. O conjunto formado pela união de todos os segmentos paralelos a AB com uma extremidade em γ_1 e a outra em γ_2, recebe o nome de cilindro de bases γ_1 e γ_2. (PENEIREIRO; SILVA, 2003, p. 97).

Assim, as bases do cilindro não precisam ser, necessariamente, um círculo (figura 50).

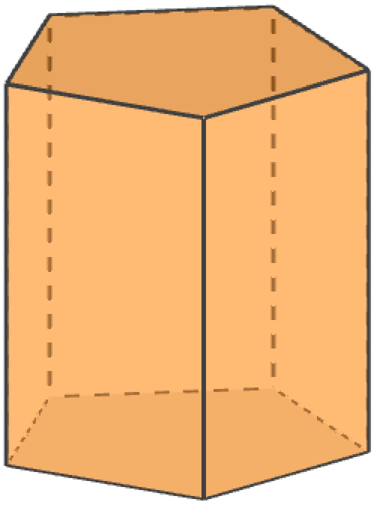
Figura 50 – Cilindro



Fonte: PICADO (2003, p. 82).

Por esse histórico de equívocos cometidos em livros do Ensino Médio, entende-se que os alunos não concordarão que o sólido exibido no *applet* (figura 51) seja um cilindro.

Figura 51 – Cilindro pentagonal



Fonte: Elaborada pelo autor.

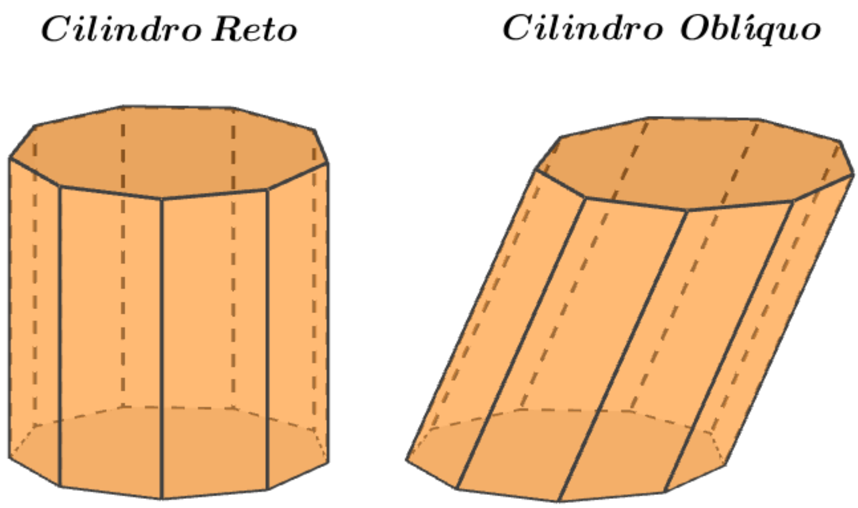
xviii) Ao modificar-se o formato da região fechada, formam-se novos sólidos, há algo em comum entre eles? Justifique.

Aqui, deseja-se que o controle deslizante que permite a modificação da região fechada sugira aos alunos que todos os sólidos exemplificados possuem em comum bases congruentes e paralelas entre si. Tal momento será oportuno para comentar com os participantes a correta definição de cilindro.

xix) Marque a opção “Classificação quanto a Inclinação”, movimente o controle “Inclinação” e analise quando o cilindro é reto e quando é oblíquo.

O mesmo *applet* ainda permite uma análise do cilindro quanto à sua inclinação. Com essa possibilidade, os estudantes podem verificar que mesmo o sólido inclinado (oblíquo) ou não (reto), continua satisfazendo a definição de cilindro (figura 52).

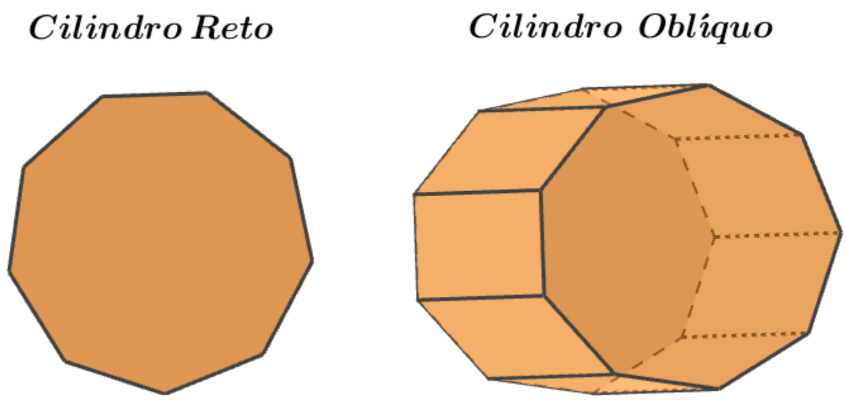
Figura 52 – Exemplo de cilindro reto e oblíquo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Girando a janela 3D do GeoGebra, também é possível verificar que, na projeção ortogonal de um cilindro reto, a posição das bases ficam perfeitamente sobrepostas, fato que não ocorre quando um cilindro é oblíquo (figura 53):

Figura 53 – Projeções ortogonais de um cilindro



Fonte: Elaborada pelo autor.

xx) Agora marque a opção “Classificação quanto a Base”, movimente o controle “Região Fechada” e analise se há alguma relação entre a base determinada e sua classificação.

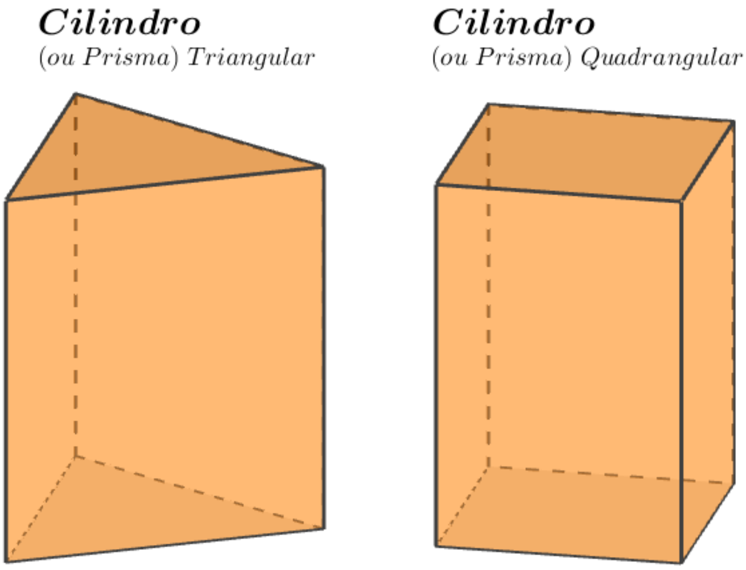
Outra utilidade desse *applet* é permitir que os alunos também sejam capazes de investigar a classificação dos cilindros de acordo com sua base. De forma muito simples e intuitiva, poderão inferir que o nome da região fechada que determina as bases determina o nome do cilindro, isto é, bases triangulares, cilindro triangular, bases determinadas por quadriláteros, cilindro quadrangular, bases circulares, cilindro circular e assim por diante.

Sobre a construção desse *applet*, é necessário informar aos estudantes que as bases poligonais são todas regulares, porque os comandos utilizados na sua construção possuem essa limitação. Outra situação próxima ocorre ao mover o controle deslizante "região fechada", pois se inclui um limite, que é o círculo precedido do eneágono. Contudo, existem inúmeros polígonos após o eneágono na classificação conforme a quantidade de lados, bem como outras regiões fechadas poderiam ser incluídas, como, por exemplo, uma elipse ou outra região fechada qualquer, não havendo auto-interseções.

xxi) Ainda com a opção "Classificação quanto a Base" marcada e movimentando o controle deslizante "Região Fechada", reflita sobre o que é necessário para o cilindro não ser classificado como um prisma.

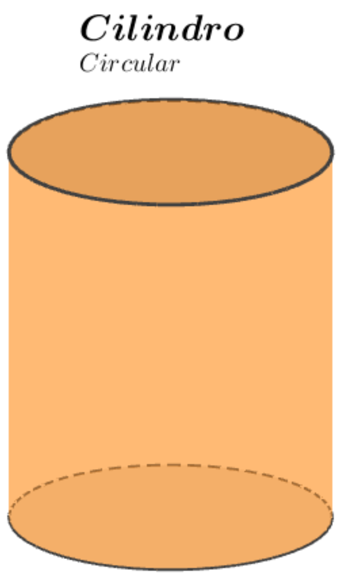
A janela 3D do *applet* exibe uma classificação particular no caso de as bases serem polígonos, pois, nesses casos, o sólido também pode ser chamado de prisma, isto é, cilindro com bases poligonais. Assim, nos casos em que a região fechada é um triângulo ou um quadrilátero, essa outra nomenclatura é indicada (figura 54), situação que não ocorre com a base circular (figura 55).

Figura 54 – Exemplo de cilindro que é prisma



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Exemplo de cilindro que não é prisma



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela praticidade da construção e da opção por exibir a classificação do cilindro quanto à base, imagina-se que os alunos terão êxito em identificar que, para um cilindro não ser um prisma, este precisa possuir bases não poligonais. Caso contrário, tem-se um cilindro que também é prisma.

Outro fator que pode colaborar com a resposta correta dos participantes deve-se ao equívoco que ocorre nos livros didáticos ao inserir o estudo de prismas e de cilindros em capítulos diferentes e sem relacioná-los. Dessa forma, talvez os alunos identifiquem com maior clareza quando que o cilindro não é um prisma.

xxii) Como calcular o volume de um prisma que não seja quadrangular?

Depois de reorganizar as ideias e definições acerca de cilindros e prismas, essa pergunta retorna ao tema da questão xiv de forma pertinente, pois ainda não foi respondido de que maneira determina-se o volume de um cilindro qualquer.

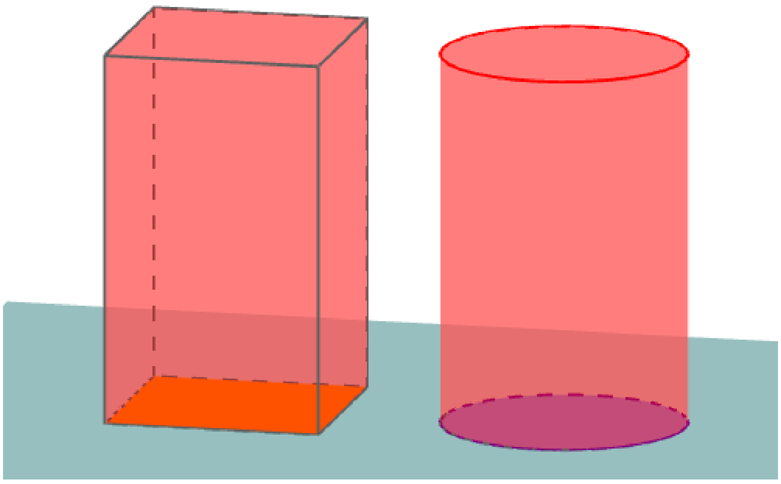
Entretanto, mais alguns conhecimentos prévios são necessários para se buscar uma solução. Dentre eles, o conhecimento do Princípio de Cavalieri: “dois sólidos de mesma altura terão mesmo volume se um plano paralelo a suas bases determinar regiões de mesma área entre si em toda sua extensão”.

Contando com a possibilidade de os alunos não terem estudado tal princípio durante o Ensino Médio, como indicado em Awila (2015), ou na hipótese de eles não o recordarem, esta sequência didática discutirá o referido enunciado por meio das construções no GeoGebra.

xxiii) Abra o *applet* “Princípio de Cavalieri A” e escreva como se chamam os sólidos exibidos, mesmo quando sua região fechada é alterada.

Com a definição desses sólidos trabalhada previamente (figura 56), deseja-se que os participantes estejam preparados para identificá-los adequadamente como cilindros, sendo que a figura à esquerda também pode ser chamada de bloco retangular, enquanto a da direita não admite outra generalização, pois ao modificar-se a região fechada, pode-se determinar um cilindro circular.

Figura 56 – Cilindros

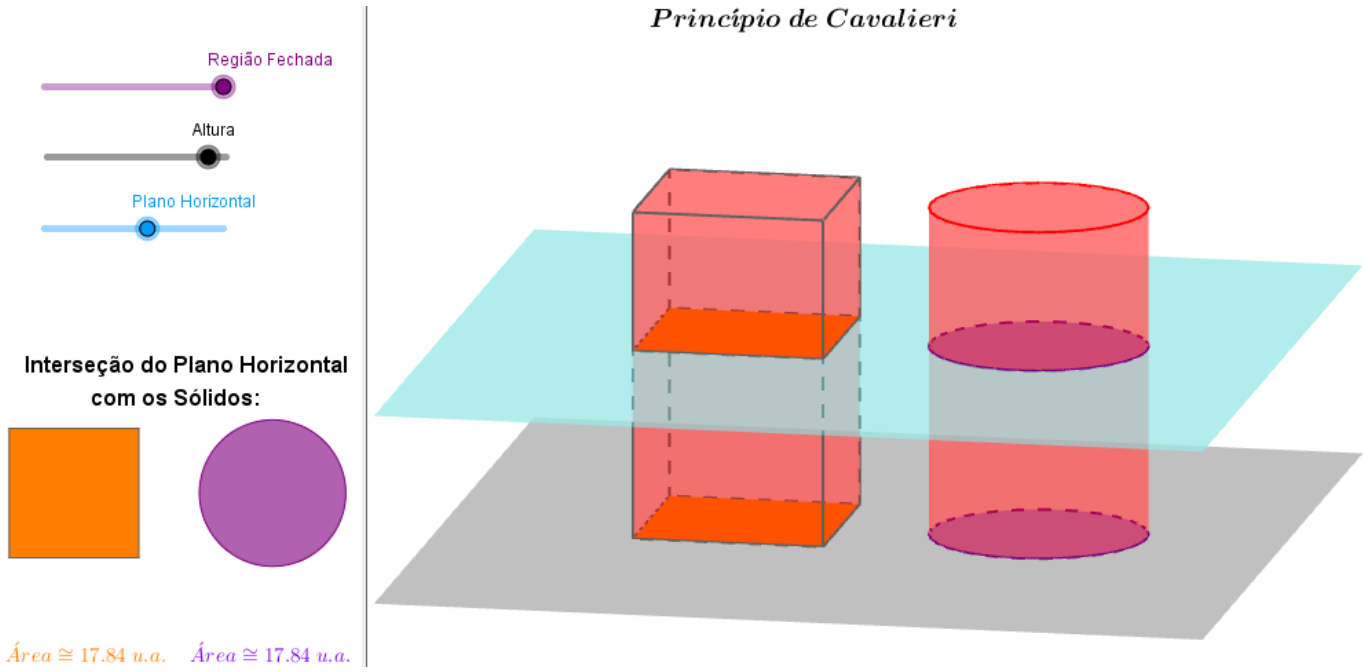


Fonte: Elaborada pelo autor.

xxiv) Eles têm algumas medidas iguais? Justifique.

O *applet* “Princípio de Cavalieri A” exibe, na janela de comando (à esquerda), a interseção de um plano paralelo às bases, que, ao movimentar-se, por meio do controle deslizante “Plano Horizontal”, é possível identificar (na janela 3D) que os cilindros possuem mesma altura e que as regiões determinadas pela interseção do plano horizontal com os sólidos têm mesma área (figura 57). No entanto, no caso exemplificado acima, as áreas determinadas são muito próximas, não podendo ser iguais por se tratar de regiões circulares.

Figura 57 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborada pelo autor.

xxv) A partir do referente princípio, o que podemos afirmar sobre o volume dos cilindros do *applet*?

Na possibilidade de os estudantes não terem um conhecimento prévio consistente do resultado do Princípio de Cavalieri, é impraticável exigir uma afirmação plenamente precisa e correta diante da ausência de subsunçores. Para tanto, o princípio será retomado e serão discutidas quais são as premissas necessárias em seu enunciado para que o volume de dois sólidos seja o mesmo.

A seguir, tais premissas serão confrontadas com as medidas iguais encontradas entre o bloco retangular e o cilindro da questão xxiii. Dessa forma, almeja-se que os alunos sejam capazes de concluir que é possível construir um cilindro com mesma altura e área da base equivalente ao de um bloco retangular, que, pelo Princípio de Cavalieri, resultará em dois sólidos de mesmo volume.

xxvi) Abra o *applet* “Princípio de Cavalieri B”, selecione os controles deslizantes para medidas que julgue pertinentes e responda:

a) Os sólidos exibidos têm mesma altura?

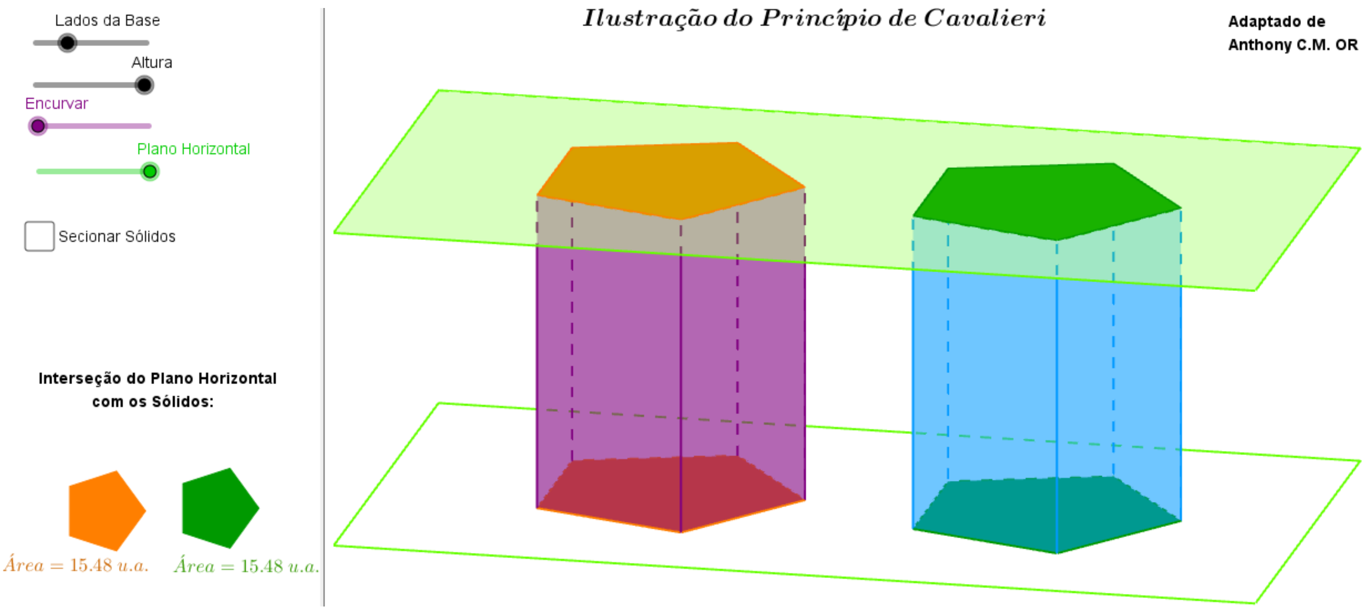
b) O plano horizontal às bases determina figuras planas de mesma área?

c) O que podemos afirmar sobre os volumes desses sólidos?

d) Verifique a afirmação anterior marcando “Secionar Sólidos” e clicando em “Transferir Seções”. Tal animação torna mais clara o Princípio de Cavalieri?

A sequência de questões acima combinada com o *applet* “Princípio de Cavalieri B” tem como objetivo ilustrar o resultado do referido princípio. Para isso, exibe dois cilindros, em que, movimentando-se o controle “Plano Horizontal”, é possível observar que ambos possuem mesma altura e que as regiões determinadas pela interseção desse plano com os sólidos são equivalentes. Satisfeitas essas duas premissas, pode-se inferir que possuem mesmo volume (figura 58).

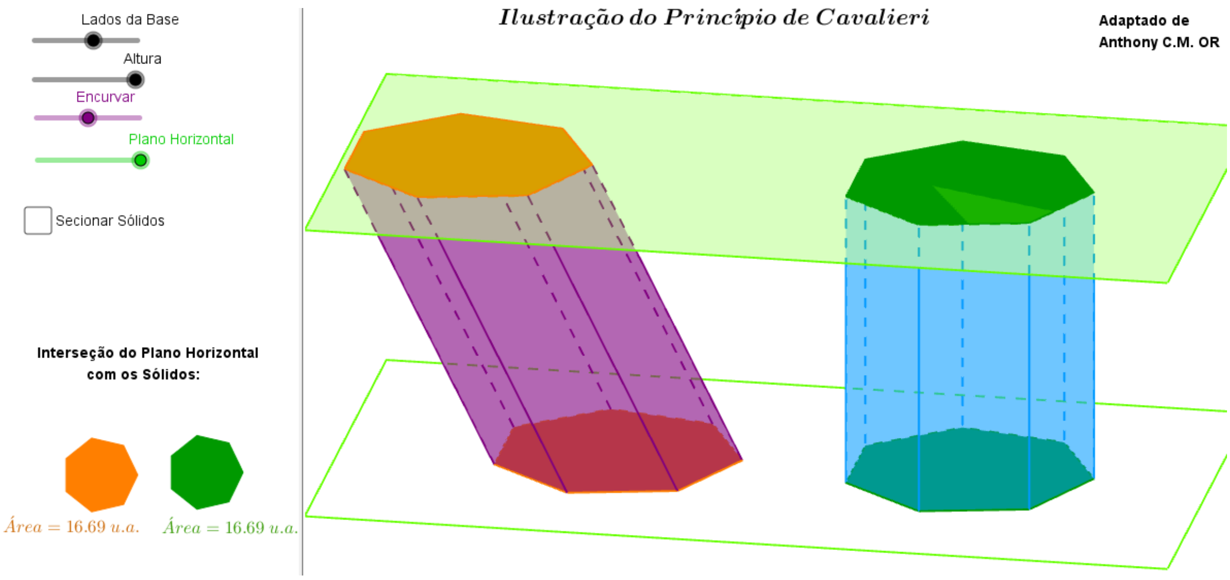
Figura 58 – Ilustração do Princípio de Cavalieri (a)



Fonte: Elaborada pelo autor.

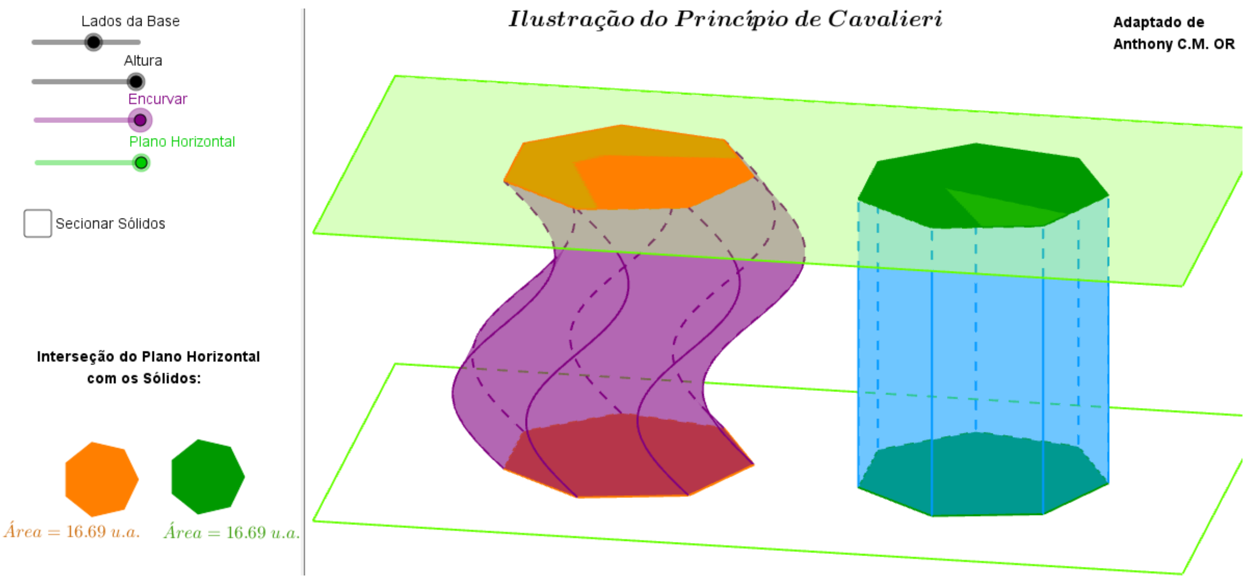
O mesmo *applet*, além de permitir tal conclusão entre cilindros, com o controle deslizante “Encurvar”, oportuniza que o mesmo resultado seja válido na hipótese de o sólido ser um cilindro oblíquo (figura 59) ou, de forma ainda mais general, no caso de um sólido sem as características de cilindro ou prisma (figura 60).

Figura 59 – Ilustração do Princípio de Cavalieri (b)



Fonte: Elaborada pelo autor.

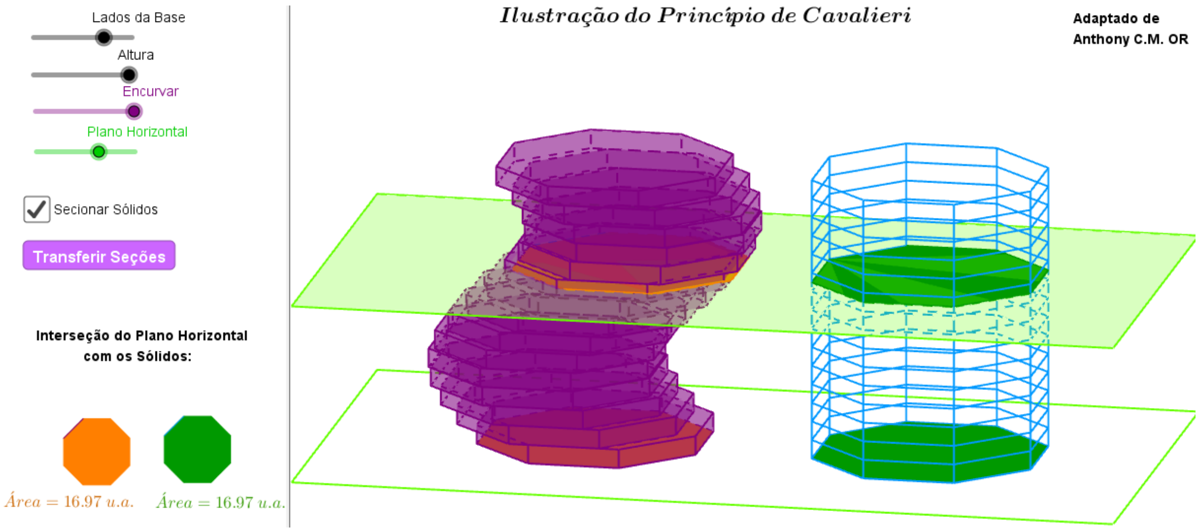
Figura 60 – Ilustração do Princípio de Cavalieri (c)



Fonte: Elaborada pelo autor.

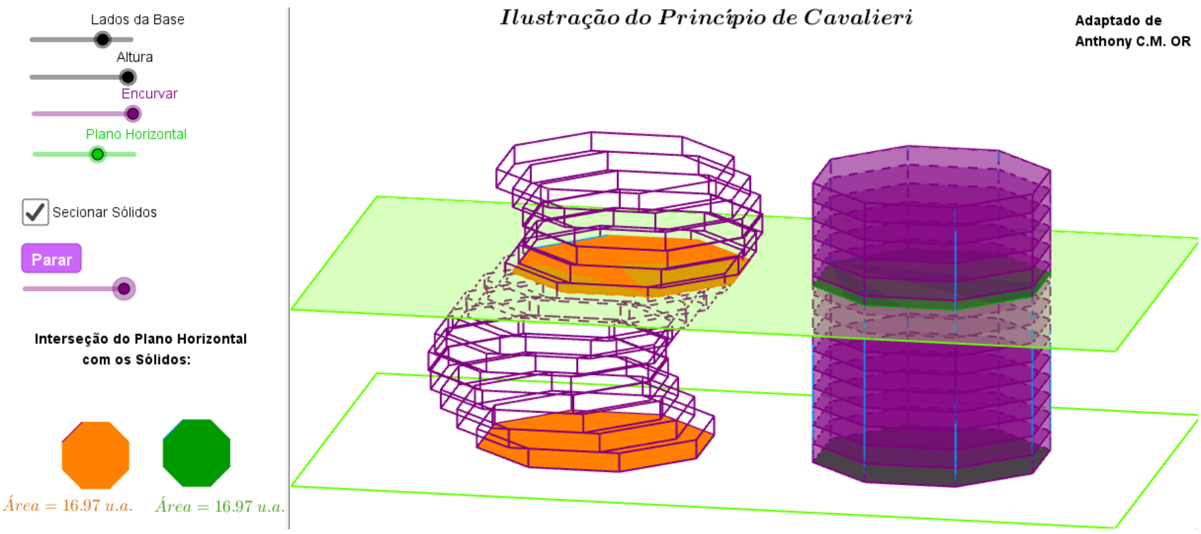
Com a opção “secionar sólidos” marcada, a figura à esquerda é aproximada por uma pilha de “placas” (figura 61), e, ao clicar-se em “transferir seções”, transfere-se cada uma dessas “placas” para o cilindro à direita, de tal modo que as seções que ora determinam um sólido são as mesmas que determinam o outro. Pode-se verificar, portanto, que, satisfeitas as premissas do Princípio de Cavalieri, o volume de ambos são equivalentes (figura 62).

Figura 61 – Ilustração do Princípio de Cavalieri (d)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Ilustração do Princípio de Cavalieri (e)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por permitir opções com medidas arbitrárias combinadas a comandos que permitem um trabalho alternativo na exemplificação do Princípio de Cavalieri, aguarda-se que esse *applet* permita uma melhor compreensão e aprendizagem desse princípio. Por fim, deve-se informar aos estudantes que essa produção não permite a ilustração com um cilindro generalizado por limites de construção impostos pelas ferramentas utilizadas no GeoGebra.

xxvii) Existe uma sentença matemática capaz de expressar o volume de um cilindro qualquer? Se sim, qual?

Entendendo que muitos dos conhecimentos necessários para construir essa resposta (bem como para as questões xvi e xxi) estejam sendo trabalhados nessa sequência didática, torna-se imprescindível fazer uma revisão sobre os dois *applets* que tratam sobre o Princípio de Cavalieri.

A seguir, contando com as ideias e colaborações dos participantes, o desejo é de que o raciocínio convirja para a conclusão de que sempre será possível construir um cilindro com mesma altura (a) e área da base (A_b) equivalente a um bloco retangular e que, dessa forma, ambos terão mesmo volume.

Expressando o volume de um cilindro por uma sentença matemática e finalizando o seu estudo, tem-se:

$$\textit{Volume do cilindro} = \textit{Volume do bloco retangular} = A_b \cdot a$$

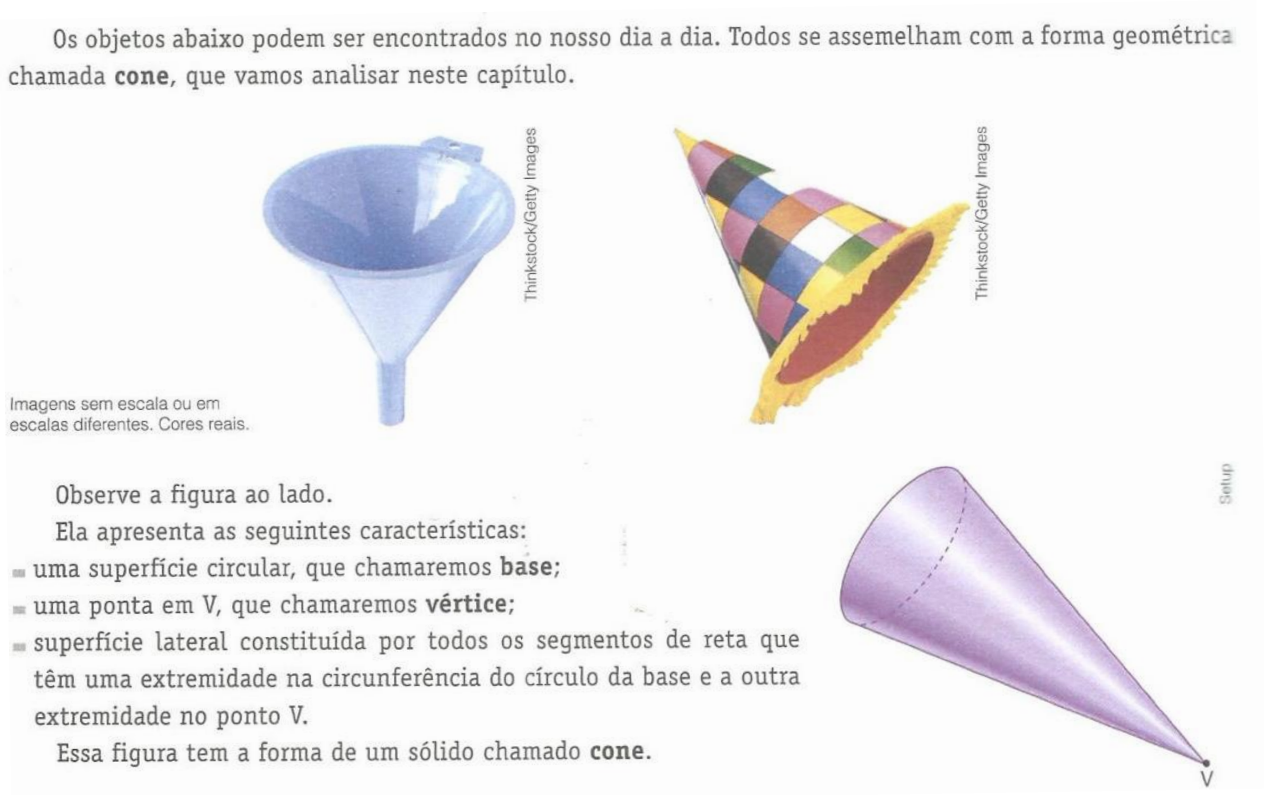
Ou seja:

$$\textit{Volume do cilindro} = A_b \cdot a$$

xxviii) Abra o *applet* "Cone" e verifique a figura exibida na janela 3D. Você concorda que essa figura é um cone? Justifique.

Partindo da mesma estratégia de análise da definição do cilindro, novamente, espera-se que os participantes estranhem que a pirâmide exibida seja chamada de cone, pois o descuido que os mesmos autores, entre outros, cometem na definição de cilindros retorna a ocorrer com cones (figura 63 e 64).

Figura 63 – Introdução ao conceito de cone em um livro didático


Os objetos abaixo podem ser encontrados no nosso dia a dia. Todos se assemelham com a forma geométrica chamada **cone**, que vamos analisar neste capítulo.

Imagens sem escala ou em escalas diferentes. Cores reais.

Observe a figura ao lado.

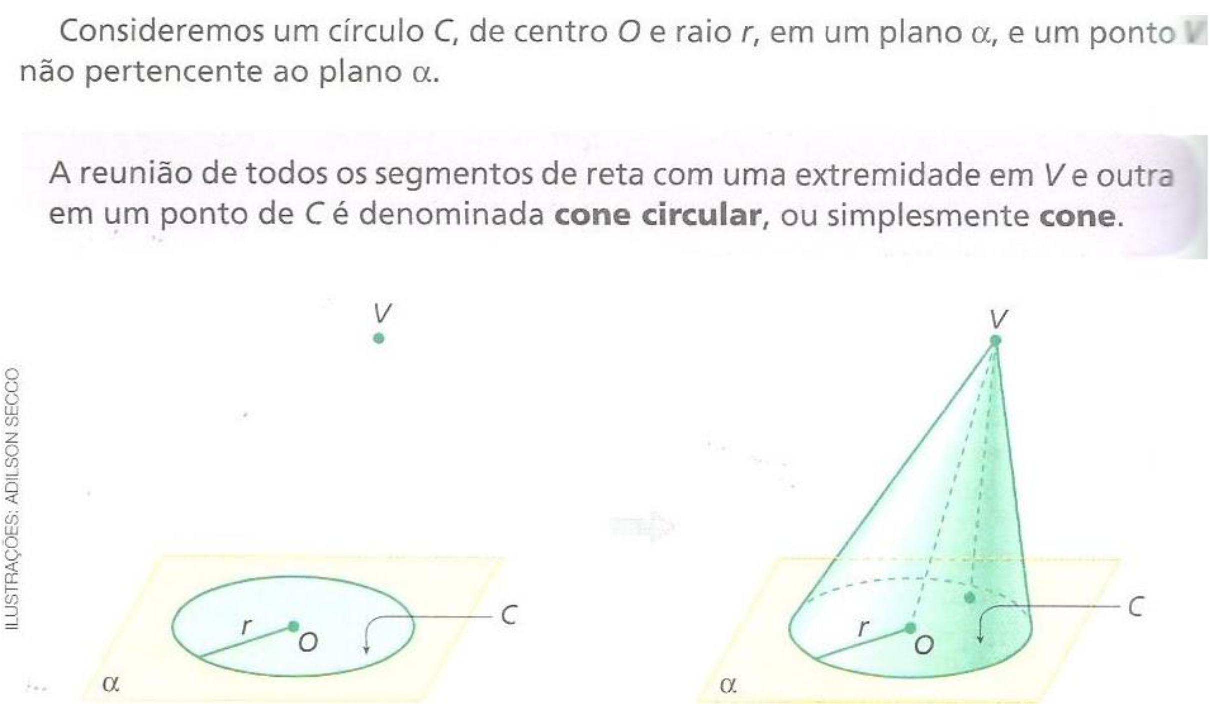
Ela apresenta as seguintes características:

- uma superfície circular, que chamaremos **base**;
- uma ponta em V, que chamaremos **vértice**;
- superfície lateral constituída por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade na circunferência do círculo da base e a outra extremidade no ponto V.

Essa figura tem a forma de um sólido chamado **cone**.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 230).

Figura 64 – Definição de cone em um livro didático


Consideremos um círculo *C*, de centro *O* e raio *r*, em um plano α, e um ponto *V* não pertencente ao plano α.

A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e outra em um ponto de *C* é denominada **cone circular**, ou simplesmente **cone**.

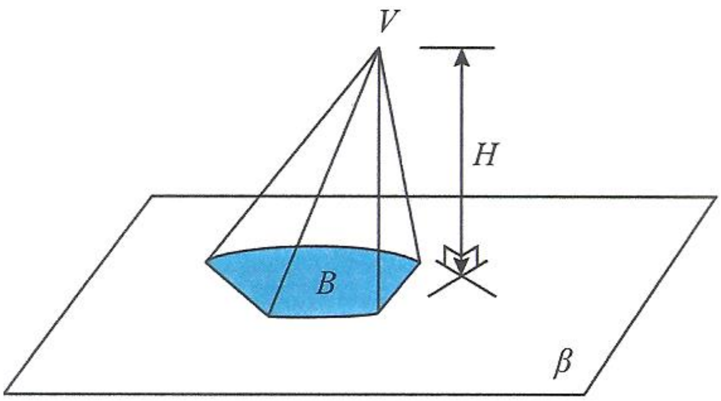
Fonte: LEONARDO (2013, p. 178).

Peneireiro e Silva (2003) definem o cone também pela sua construção:

> Consideremos em um plano π, uma curva fechada γ sem auto-interseções e um ponto V que não pertence ao plano. O conjunto formado pela união de todos os segmentos tendo como V uma extremidade, e a outra pertencente a γ, é chamado de cone de vértice V e base γ [...] (PENEIREIRO; SILVA, 2003, p. 97).

Assim, do mesmo modo que as bases do cilindro, a base do cone não precisa ser um círculo (figura 65).

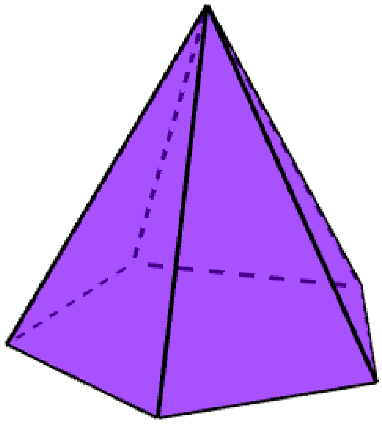
Figura 65 – Cone



Fonte: DIAS et al. (2013, p. 108).

Logo, imagina-se que os alunos não devem concordar que a figura exibida (figura 66) é um cone. Porém, também é possível que os alunos busquem uma correlação com o conteúdo trabalhado anteriormente, a correta definição de cilindro para utilizar na definição de cone.

Figura 66 – Cone pentagonal



Fonte: Elaborada pelo autor.

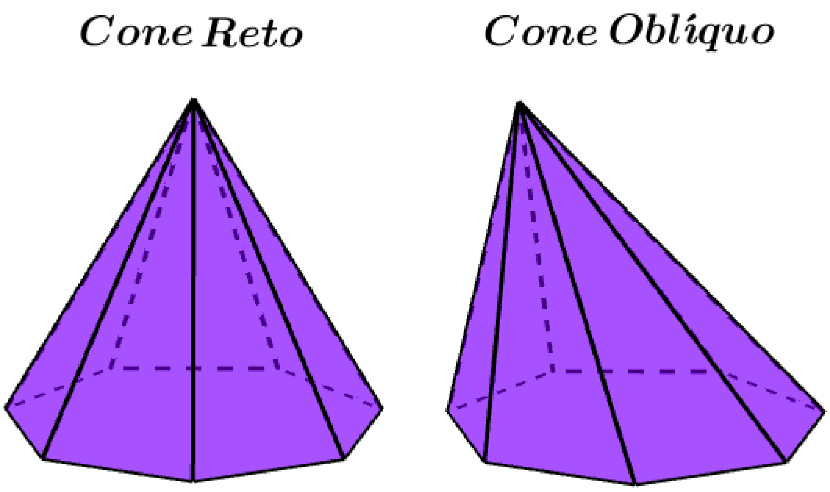
xxix) Ao modificar-se o formato da região fechada, formam-se novos sólidos; há algo em comum entre eles? Justifique.

Como no *applet* sobre cilindros, este também permite que a base seja modificada. Assim, espera-se que os alunos identifiquem que todos os pontos contidos nas extremidades da região fechada convergem para um mesmo ponto, o vértice. Momento adequado para comentar com os estudantes a exata definição de cone.

xxx) Marque a opção "Classificação quanto a Inclinação", movimente o controle "Inclinação" e analise quando o cone é reto e quando é oblíquo.

Realizando a marcação indicada e modificando a inclinação do sólido, o *applet* indica quando o cone é reto ou oblíquo, em uma clara correspondência ao que ocorre com os cilindros (figura 67).

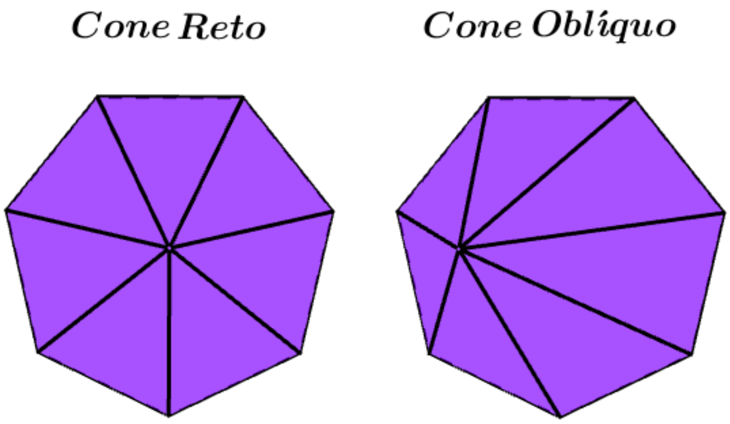
Figura 67 – Exemplo de cone reto e oblíquo



Fonte: Elaborada pelo autor.

O mesmo resultado obtido nos cilindros, sobre as suas projeções ortogonais, também é válido para os cones, isto é, o vértice do cone sobrepõe-se ao centro geométrico da base quando o cone é reto, caso contrário, é oblíquo (figura 68).

Figura 68 – Projeções ortogonais de um cone



Fonte: Elaborada pelo autor.

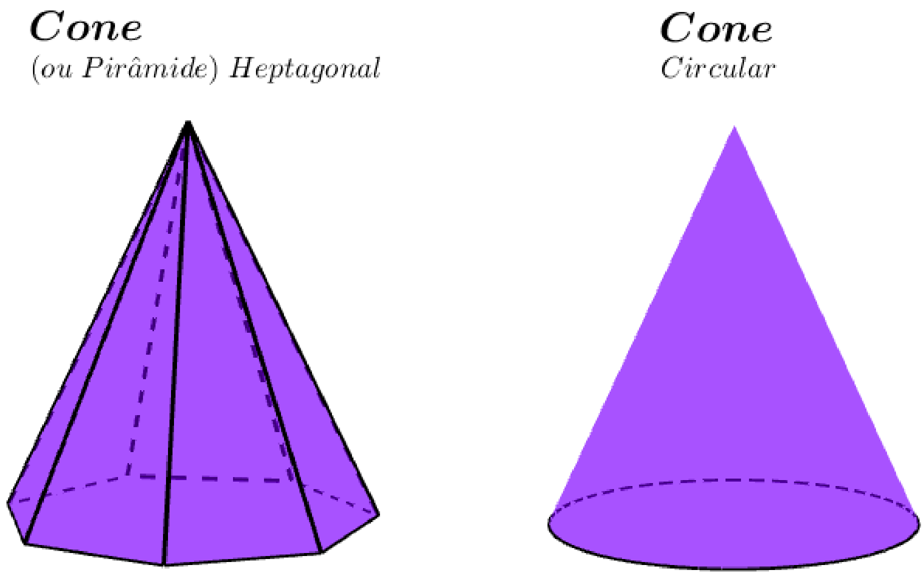
xxxi) Agora, marque a opção "Classificação quanto a Base", movimente o controle "Região Fechada" e analise se há alguma relação entre a base determinada e sua classificação.

Com a mesma funcionalidade que o *applet* sobre o estudo dos cilindros, este permite aos participantes verificar que a classificação dos cones também depende de sua base. Provavelmente, os participantes relacionarão estes, fato fundamental para uma aprendizagem significativa.

xxxii) Ainda com a opção "Classificação quanto a Base" marcada, movimente o controle deslizante "Região Fechada" e reflita sobre o que é necessário para o cone não ser classificado como uma pirâmide.

Quando os alunos selecionarem uma base poligonal para o cone, o *applet* exibe uma alternativa na nomenclatura, pirâmide, o que não ocorre quando a base é um círculo (figura 69).

Figura 69 – Exemplo de cone e pirâmide (à esquerda) e somente cone (à direita)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao buscarem uma relação com o conteúdo estudado previamente e com o auxílio visual que a construção proporciona, supõe-se que os participantes lograrão êxito ao identificar que o cone não é uma pirâmide quando sua base não é um polígono. Caso contrário, têm-se um cone e uma pirâmide simultaneamente.

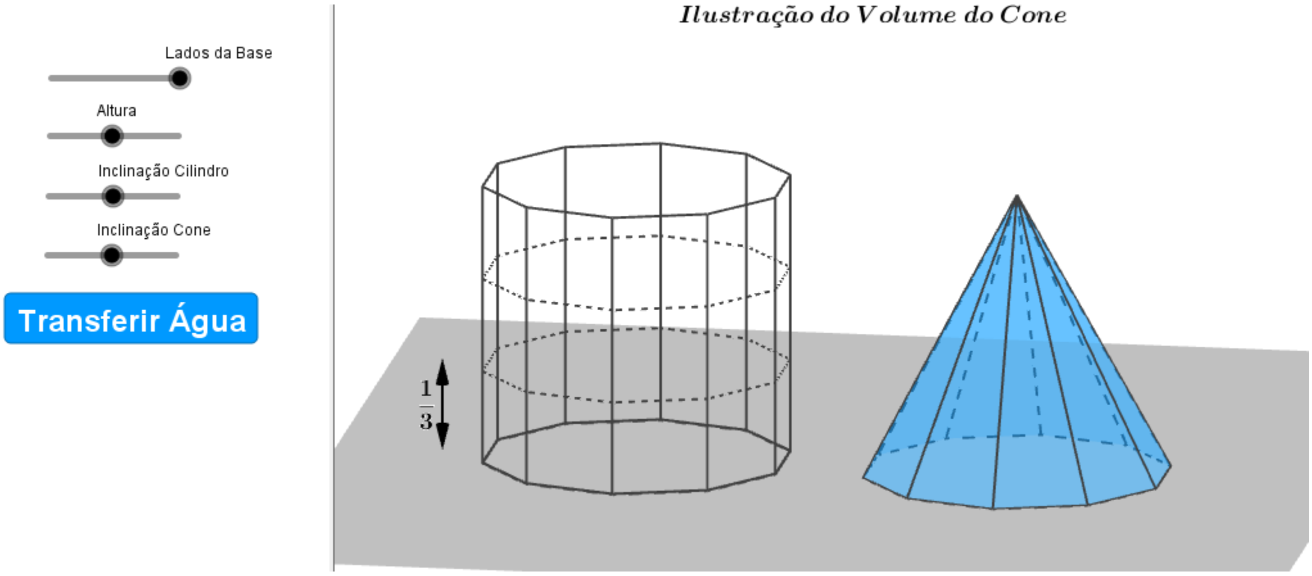
xxxiii) Como calcular o volume de um cone?

Depois de muitas justificativas e/ou demonstrações visuais estudadas sobre áreas e volumes, no caso de alunos que não tiveram trabalhado uma matemática com objetivo similar ao dessa sequência didática, é natural que eles reflitam sobre qual é o motivo de a "fórmula" utilizada na escola ser verdadeira. Entretanto, sem apresentar argumentos, indica-se uma aprendizagem mecânica, ou seja, eles têm conhecimento de que cálculo realizar, mas sem saber indicar justificativas das operações realizadas.

xxxiv) Abra o *applet* "Volume do Cone"; sabendo que a base da projeção do cilindro é congruente a do cone e que ambos têm mesma altura, o que ocorre quando clicamos em "Transferir Água"?

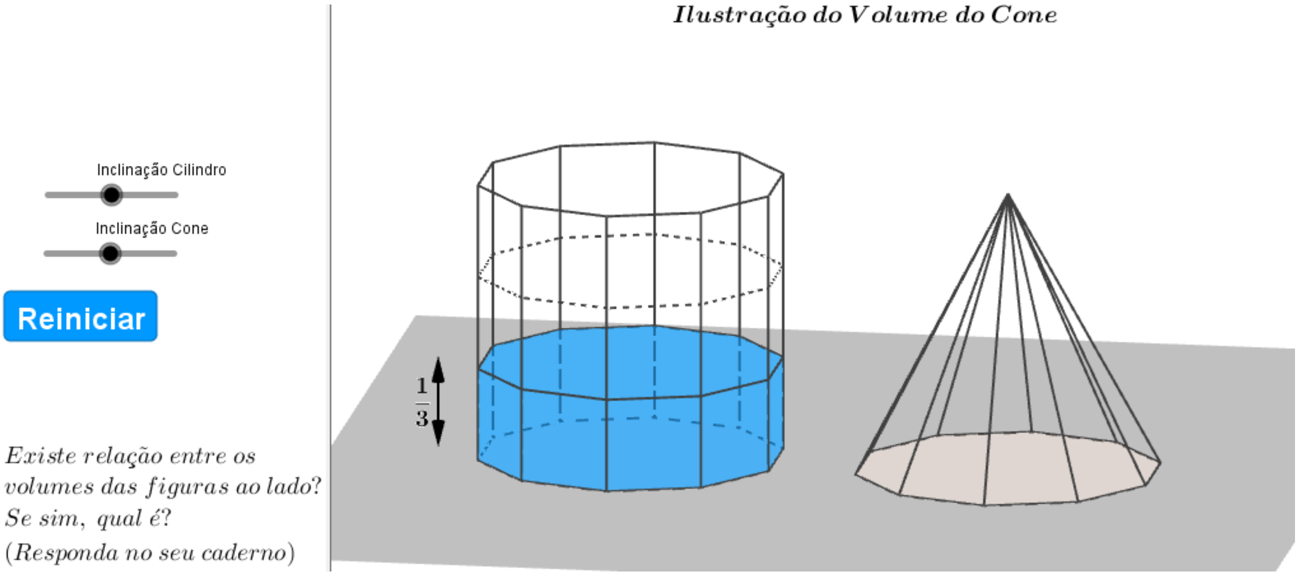
Para buscar uma forma de determinar o volume do cone, optou-se por produzir, no GeoGebra, a ilustração de uma importante propriedade desse sólido. Nessa construção, são exibidos um cilindro "vazio" e um cone "cheio de água", ambos com mesma área da base e altura (figura 70). Há também possibilidade para alterar tais medidas e incliná-los. Ao clicar no botão “transferir água”, a quantidade de água do cone passa a encher o cilindro; finalizado o processo, o cone fica “vazio” e o cilindro, com a terça parte de seu volume (figura 71).

Figura 70 – Ilustração do volume do cone (início)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 71 – Ilustração do volume do cone (fim)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para chegar a tal conclusão, prefere-se realizar esta ilustração da propriedade exibida acima, porque uma justificativa próxima de sua demonstração, isto é, que um prisma pode ser decomposto em três pirâmides semelhantes, não indica, em um primeiro momento, a sua generalização para pirâmides de uma base qualquer, muito menos para o caso geral dos cones.

Observação: importante destacar que o *applet* utilizado nessa questão, por uma limitação de comandos, só exibe cones com bases poligonais, isto é, pirâmides. No entanto, os participantes serão informados da validade da generalização para quaisquer cones.

xxxv) Isso ocorre para cones com outras bases? Verifique no *applet*.

O questionamento sobre a validade da propriedade em foco é uma tentativa de convencer os participantes a respeito da relação existente entre os volumes do cone e do cilindro, sugerida durante a “transferência” de água.

xxxvi) Existe uma sentença matemática capaz de expressar o volume de um cone? Se sim, qual?

Diante da ilustração que revela o volume do cone como a terça parte do volume do cilindro, acredita-se que os estudantes estarão seguros de que, dada área da base (A_b) e altura (a) do cone, seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot a = \frac{A_b \cdot a}{3}$$

xxxvii) Acesse a construção “Volume da Esfera”. Na janela 3D, está representado (à esquerda) o volume interior ao cilindro e exterior aos cones congruentes e (à direita) a esfera. Responda:

a) Qual é a altura de cada sólido?

b) O plano horizontal aos sólidos determina seções de mesma área?

c) O que o Princípio de Cavalieri sugere sobre o volume desses sólidos?

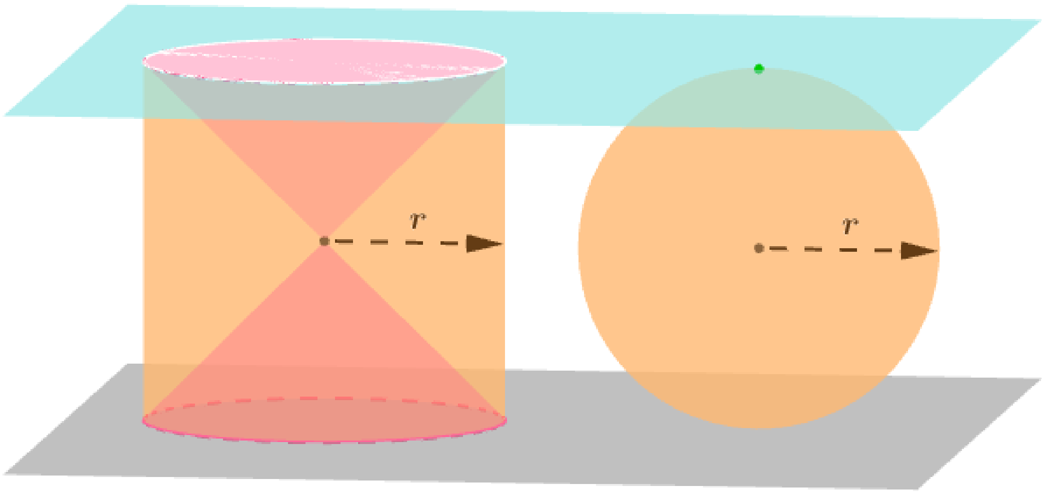
d) Há dados suficientes para calcular o volume da figura à esquerda? Justifique.

e) Qual é esse volume da esfera?

Novamente, será utilizada uma sequência de perguntas aliadas a um *applet* para o estudo de um volume. Dessa vez, o da esfera, atentos às observações dos sólidos, presente no próprio enunciado.

A esfera tem a medida de seu raio expressa por *r*, apesar de permitir que tal medida seja arbitrária com um controle deslizante. Movendo o controle "plano horizontal" ou a janela 3D, é possível perceber que ambos os sólidos possuem mesma altura, ou seja, *2r* (figura 72).

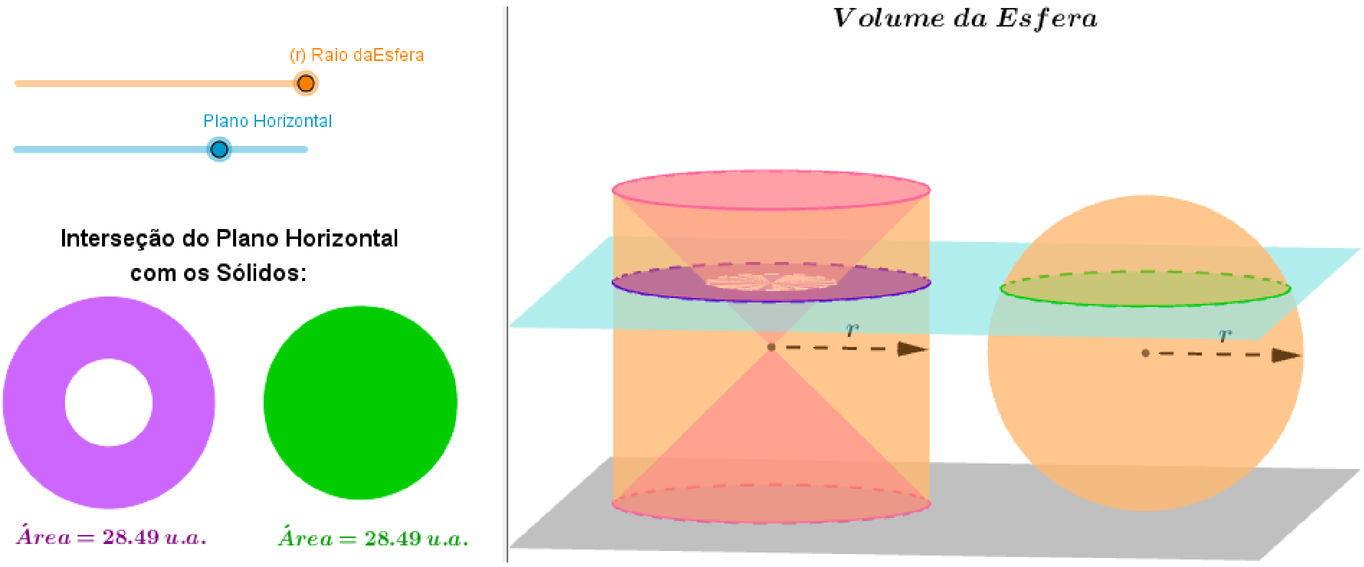
Figura 72 – Ilustração do volume da esfera (a)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na janela de comandos, à direita, são exibidas as interseções entre o plano horizontal e os dois sólidos com suas respectivas medidas de área, que, como pode ser verificado, sempre são iguais (Figura 73).

Figura 73 – Ilustração do volume da esfera (b)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Realizadas as duas observações – que ambos os sólidos possuem mesma altura e que um plano paralelo determina, em cada um, regiões equivalentes em toda sua extensão –, os estudantes serão indagados sobre o que o Princípio de Cavalieri sugere sobre seus volumes, cujo questionamento é exibido ao marcar a caixa "pergunta" do *applet*. Com a expectativa de que todos respondam que os dois sólidos têm o mesmo volume, serão confrontados com a próxima questão.

Analisando o sólido formado pela diferença entre o cilindro e os dois cones, todos circulares, é importante relembrar que, para encontrar o volume desses sólidos, é necessário conhecer as áreas das bases e suas alturas. Verificado que a altura do cilindro é *2r*, pode-se concluir que *r* é a altura de cada cone, pois eles são congruentes. Além disso, todos têm mesma base, um círculo de raio *r*, cuja área também já foi estudada previamente. Conclui-se, portanto, que é possível determinar o volume desse sólido.

Por fim, questionados a responder qual é o volume da esfera, basta utilizar o resultado de que as duas figuras têm volumes equivalentes. Uma opção para determiná-lo é a seguinte:

$$Volume\ do\ cilindro - 2 \cdot (volume\ do\ cone)$$

$$= A_b \cdot (altura\ do\ cilindro) - 2 \cdot \left(\frac{A_b \cdot altura\ do\ cone}{3}\right)$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot (2r) - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2 \cdot (r)}{3}\right) = 2\pi r^3 - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^3}{3}\right) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Assim, chega-se ao desfecho de que o volume da esfera pode ser expresso por:

$$Volume\ da\ esfera = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Conclui-se, portanto, o presente estudo sobre as principais áreas e volumes encontrados em livros didáticos e indicados nos PCN referentes à Educação Básica.

6 RELATOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi aplicada em sete encontros semanais, com duração média de 2 horas cada, no Laboratório de Informática do Departamento de Matemática da UFSM. Esse Laboratório dispunha de computadores com acesso à internet a todos os participantes, lousa com caneta e projetor multimídia. Os conteúdos trabalhados em cada semana estão elencados na tabela 3.

Tabela 3 – Atividades desenvolvidas durante os encontros

Semana	Atividades desenvolvidas
1	Aplicação do Questionário Inicial
2	Área do retângulo Área do quadrado Classificação dos quadriláteros
3	Área do paralelogramo Área do triângulo Área do losango
4	Área do trapézio Área do círculo
5	Volume do bloco retangular
6	Volume dos cilindros Volume dos cones Volume da esfera
7	Aplicação do Questionário Final

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, seguem os principais destaques ocorridos durante o desenvolvimento da sequência didática, como dúvidas, colaborações, observações, entre outras situações que foram auferidas a partir do diário do pesquisador construído durante os encontros.

6.1 PRIMEIRO ENCONTRO

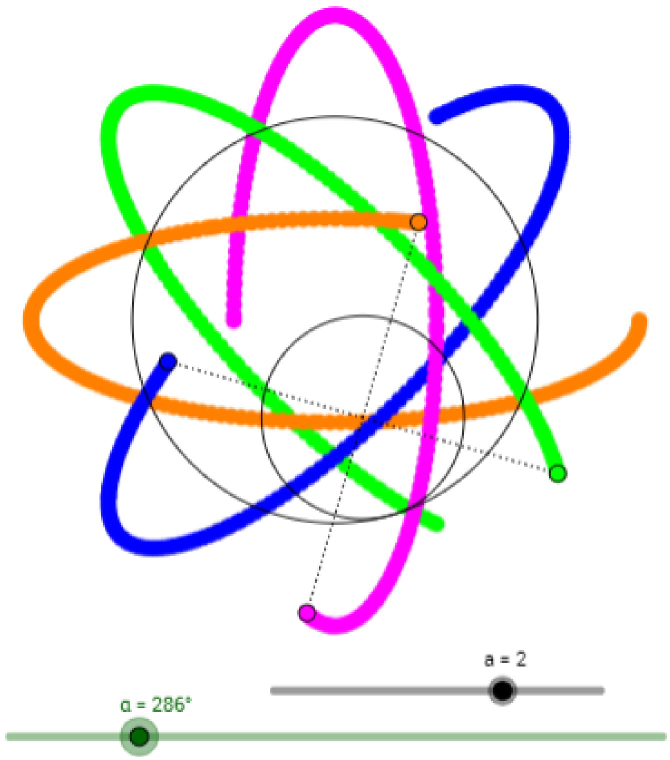
Nesse primeiro dia, quinze calouros estiveram presentes, embora, na semana anterior, em um momento de aula cedido por uma de suas professoras, já tivesse sido explicado a natureza dessa pesquisa de dissertação e os motivos pelos quais eles foram convidados. Teve-se a preocupação e o zelo de informá-los, novamente, sobre esses pontos. Entregou-se a todos duas cópias do Termo de Confidencialidade (Apêndice C) e duas do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice D), em que uma ficaria com eles e a outra com o pesquisador. Explicou-se o conteúdo presente nesses documentos e, apesar de não terem apresentado dúvidas, foram avisados de que, a qualquer momento, mesmo por e-mail, poderiam contatar o pesquisador.

Todos foram muito receptivos com os objetivos propostos e, após assinarem o TCLE, entregou-se o questionário (Apêndice A) para o preencherem. Foi comentado que esse questionário serviria para que o pesquisador pudesse analisar e ter conhecimento da escolaridade deles e seus conhecimentos prévios em relação aos conteúdos a serem trabalhados nos próximos encontros.

Mesmo após terem siso informados de que o questionário era anônimo, que não haveria problemas no caso de errarem as respostas, que não era permitido consultar seus colegas e pesquisar na internet, alguns estudantes pareciam inquietos por não saberem resolver alguns exercícios que constavam no Questionário Inicial. Dessa forma, procurou-se tranquilizá-los, informando-os de que seria absolutamente normal que dificuldades viessem à tona e que, durante as aulas, essas dúvidas seriam respondidas.

Como alguns alunos responderam o questionário de maneira muito rápida e percebeu-se que outros levariam muito mais tempo para finalizar, teve-se a ideia de indicar que acessassem uma antiga construção do pesquisador, “Círculos mágicos” (figura 74), para aproveitarem o tempo ocioso enquanto seus colegas terminavam de responder. Não foi dada instrução alguma, simplesmente foi pedido para acessarem-na.

Figura 74 – Círculos mágicos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa sugestão mostrou-se uma excelente ideia, pois, de maneira natural, os participantes descobriram que poderiam alterar os controles deslizantes e formar desenhos diferentes a partir dos parâmetros selecionados. Após todos finalizarem o questionário, comentou-se, brevemente, sobre o *software* GeoGebra e que eles trabalhariam com construções como esta, isto é, com produções autoexecutáveis, que também são chamadas de *applets*.

Foi indicado que os *applets*, posteriormente estudados, teriam mecanismos próximos a este, pois permitiriam uma interatividade a partir da movimentação de controles e um dinamismo, no sentido de que, alterando-se tais controles, as relações geométricas são mantidas. Diante da interação com essa construção, os alunos mostraram-se animados, com comentários positivos, e ansiosos para conhecer outras construções nos próximos encontros.

6.2 SEGUNDO ENCONTRO

Dando início ao estudo de áreas proposto na sequência didática, onze calouros estiveram presentes. Como esperado, os alunos souberam encontrar a área do retângulo, dadas as medidas da base e altura, e não conseguiram justificar o porquê de o cálculo realizado representar a área da figura. Além da área do retângulo, os participantes indicaram conhecimento em calcular a área de quadrado, triângulo, trapézio, círculo e losango.

Em um primeiro momento, foi dito que a área do losango é "a soma das medidas das diagonais dividida por dois"; um dos alunos, discordando parcialmente, tomou a iniciativa de pesquisar, na internet, e corrigiu-o dizendo que o correto é "o produto das medidas das diagonais dividido por dois", contando, a seguir, com a concordância dos demais. Apesar de indicar várias fórmulas para o cálculo de áreas, nenhum dos estudantes soube justificar o motivo de tais fórmulas serem verdadeiras, o que permite concluir que, na formação escolar, tal objetivo não era incentivado, resultando, assim, em um ensino que visava somente a aplicações de fórmulas, isto é, uma aprendizagem mecânica.

Quando pedido para acessarem o *applet* "Área do retângulo", o pesquisador ficou surpreso, porque, automaticamente, os alunos foram movimentando os controles deslizantes e verificando as modificações que ocorriam nas medidas da base e altura do retângulo. Foi muito satisfatório perceber que os comandos da construção são bem intuitivos, os alunos divertiam-se ao alterar tais medidas.

Depois de registrar o número de quadradinhos que formavam os retângulos de medidas 3x2 e 1x3, não tiveram dificuldades em comparar qual era o maior. No entanto, quando foi pedido que argumentassem sobre o porquê da escolha pelo triângulo 3x2, os estudantes demonstraram-se tímidos em responder. O mesmo ocorreu quando perguntados sobre o que se deve calcular para comparar o tamanho de dois retângulos.

Embora um aluno tenha sussurrado a resposta correta, "área", teve-se o cuidado de lembrá-los de que um dos retângulos tem mais quadradinhos do que o outro e que essa quantidade a mais pode ser utilizada como justificativa. O retângulo com mais quadradinhos terá a maior área, isto é, maior superfície, e, por isso, o quadradinho de lado uma unidade é adotado como uma unidade de área, também chamado de quadrado unitário.

Nos exercícios seguintes, em que se questionava a área dos retângulos, os participantes manifestaram compreensão de que, para expressar a área de um retângulo, bastava determinar o número de quadrados unitários que os determinavam e que, para não contá-los um a um, era suficiente calcularem o produto entre as medidas da base e da altura. Porém, identificou-se uma relevante dificuldade que os estudantes tinham em argumentar a justificativa desse resultado.

Trocando ideias entre si, por meio de gestos, indicavam a ideia de distribuição correta dos quadradinhos ao longo do comprimento da base e altura. Acredita-se que o motivo da dificuldade em apontar justificativas ou demonstrações de propriedades matemáticas seja por uma provável omissão em exigi-las durante a Educação Básica.

Para não haver dúvidas, procurou-se ilustrar a todos, com o projetor multimídia, que a quantidade de quadrados unitários distribuída sobre o comprimento da base sempre se repetirá conforme a medida da altura, o que se demonstrou suficiente para que os participantes compreendessem por que é suficiente determinar o produto dessas medidas para encontrar sua área.

Quando questionados sobre a validade desse cálculo para quaisquer números reais positivos, a maioria dos estudantes respondeu positivamente, mas sem esboçar argumentos, apenas diziam que, na escola, foi dito que era válido. Para auxiliar nessa justificativa, a alternativa algébrica utilizada demonstrou muito êxito. Todos indicaram que esta era a primeira vez que estavam conhecendo o motivo da validade da fórmula do retângulo.

Sobre a possibilidade de utilizar outra figura para representar uma unidade de área, em um primeiro momento, grande parte dos participantes indicou o uso de triângulos. A seguir, incluíram a restrição de o triângulo ser isósceles, diante de uma facilidade em encaixá-los de maneira adjacente. Por fim, ao utilizá-lo para determinar a área de um retângulo, alguns perceberam que este deveria ser isósceles e retângulo, isto é, uma figura equivalente ao quadrado dividido pela sua diagonal. Dessa forma, concluíram que não seria vantajoso utilizar outra figura que não o quadrado.

Os estudantes também compreenderam a validade do cálculo realizado no caso de o retângulo ter base e altura de mesmo tamanho. Nesse caso específico do retângulo, alguns participantes consideravam a figura exclusivamente como um quadrado, enquanto outros, em menor número, opinavam por considerá-lo como um retângulo e quadrado simultaneamente; ainda, havia outros sem saber opinar.

Na tentativa de sanar tais dúvidas, o *applet* “Quadriláteros” evidenciou-se como uma importante ferramenta para apresentar uma classificação esclarecedora desses polígonos. Os participantes, por exemplo, não tinham conhecimento de que retângulo, losango e quadrado são todos paralelogramos. Outro ponto que era novidade para muitos é o fato de os quadriláteros ainda poderem ser classificados como trapézios ou quadriláteros quaisquer.

Um dos participantes, perplexo com alguns dos resultados dessa atividade investigativa, por iniciativa própria, decidiu pesquisar, na internet, sobre a classificação dos quadriláteros. Embora não tenha sido objetivo da atividade, esse fato demonstrou o quanto as novidades apresentadas estavam deixando os alunos inquietos e surpresos.

Diante dessa reorganização da classificação dos quadriláteros, repleta de detalhes quanto ao paralelismo entre lados opostos, às medidas dos lados e aos ângulos internos, inicialmente, os participantes tiveram dificuldade em elencar o que era necessário para um quadrilátero ser retângulo, quadrado, losango, paralelogramo e trapézio. Contudo, conforme um participante manifestava sua opinião, os demais acrescentavam suas colaborações, e, ao final da aula, chegaram à correta distinção entre todos eles.

6.3 TERCEIRO ENCONTRO

Para dar início à aula, ideias e conceitos trabalhados na semana anterior foram revisados. Para tanto, expôs-se o seguinte questionamento aos participantes: entre duas cidades diferentes, para percorrermos o menor caminho, o que devemos calcular? Sem dificuldade, os estudantes responderam: “a distância de cada caminho”. Dando continuidade, foram questionados: entre dois retângulos diferentes, para escolher o de menor superfície, o que devemos calcular? De maneira correta, responderam “a área de cada retângulo”, relembrando, assim, que, ao determinarem o valor de uma área, estarão medindo o tamanho de sua superfície.

A seguir, ao serem questionados sobre quais medidas de comprimento e de área os alunos conheciam, pôde-se conferir que todos se lembravam das medidas do sistema internacional de unidades – metro (m), metro quadrado (m^2) e seus respectivos múltiplos e submúltiplos. Quanto à unidade de medida de área, comentou-se que a incidência da palavra “quadrado” está presente, justamente, porque é a partir dessa figura que se define a unidade de área.

Seguindo com a revisão, pediu-se para que os alunos comentassem o que é necessário para um quadrilátero ser um trapézio ou um paralelogramo, questão que levantou algumas indefinições no início, mas que, com a participação de todos, pôde-se chegar à correta definição.

Adiante, discutiram sobre quando um paralelogramo é classificado como retângulo, losango e quadrado. De início, novamente, surgiram algumas dúvidas, o que era aguardado diante de uma quase ausência dessas informações em materiais de nível fundamental e médio. Porém, contando com troca de ideias entre os participantes que se ajudavam, concluíram sobre a correta distinção entre eles, inclusive de que o quadrado é tanto um retângulo quanto um losango.

É oportuno relatar que, durante a classificação dos quadriláteros, um dos alunos, por iniciativa própria, acessou o *applet* "Quadriláteros", utilizado no encontro anterior, para relembrar as diferenças existentes. Considerou-se surpreendente a atitude desse estudante, que, diante da praticidade que a construção disponibilizada na internet permite, buscou, com simplicidade, uma forma de acesso à informação.

Seguindo o estudo de áreas, agora com a construção "Área do paralelogramo", os participantes identificaram, por meio dos recortes, que sempre será possível formar um retângulo a partir do paralelogramo. Acerca disso, dois alunos, discutindo essa ideia, concluíram que "o paralelogramo foi transformado em um retângulo. Área é a medida da superfície e ela não teve nenhum acréscimo ou decréscimo, então a área modificada é equivalente à área do paralelogramo". Outros comentaram: "então dá para transformar o paralelogramo em um retângulo e esse a gente já viu como se calcula a área". A partir dessas ideias e trocas de informação, todos compreenderam que a área de um paralelogramo qualquer é equivalente a de um retângulo.

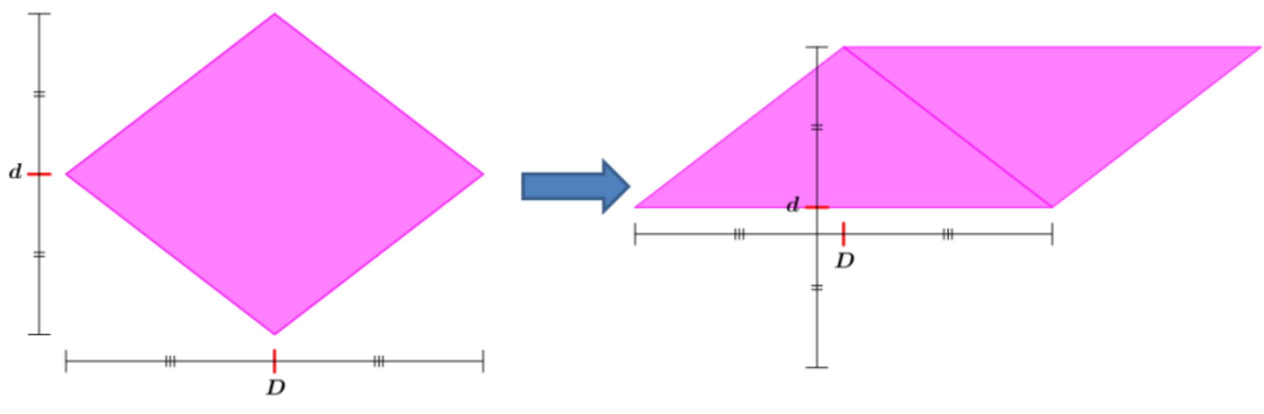
Definida a área do paralelogramo, passou-se a estudar a área do triângulo por meio do seu *applet* específico. Como esta era a primeira construção com a ferramenta caixa de seleção, os alunos, como ainda não os conheciam, ficaram restritos mais em interagir com os controles deslizantes, até que foram alertados sobre esse novo comando.

Marcando a caixa de seleção, puderam verificar que as produções no GeoGebra podem possibilitar uma interatividade ainda maior do que apenas selecionar medidas arbitrárias. Ficaram, novamente, surpresos quando esse *applet* exibia perguntas sobre as figuras exibidas na tela; dessa forma, foram entendendo que novas ferramentas apareciam na construção conforme respondiam corretamente os campos de resposta.

Dentre as perguntas exibidas, uma delas era se os triângulos formados da divisão do paralelogramo pela sua diagonal eram congruentes. Uma das alunas não sabia esse significado; então, foi explicado a todos que congruente, na Geometria, significa objetos de mesma forma e medida. Esclarecido isso, os participantes puderam verificar que o paralelogramo é composto por dois triângulos congruentes e, consequentemente, de mesma área. Portanto, a área de um triângulo equivale à metade de um paralelogramo.

O último tópico estudado, neste encontro, foi a área do losango, que, em seu *applet* em específico, também exibia caixa de seleção e uma sequência de perguntas para os alunos interagirem. A transformação do losango em um paralelogramo, inicialmente, não ficou clara para todos, percebiam que o losango foi transformado em um paralelogramo de mesma área. No entanto, quando os participantes foram questionados sobre a possibilidade de determinar a área do paralelogramo com os dados fornecidos, houve uma grande dificuldade em interpretar as medidas das diagonais do losango no paralelogramo transformado (figura 75).

Figura 75 – Transformação do losango em paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebi que o principal causador dessa dificuldade deveu-se ao fato de o losango ser um polígono cuja área é explicitada sem necessitar da medida de seus lados, e sim das suas diagonais, situação que não ocorreu com as figuras anteriores. Desse modo, os participantes confundiram-se com a projeção das diagonais na nova figura.

Esse episódio foi elucidado com a projeção multimídia desse *applet*, para que todos visualizassem enquanto era indicado que uma das diagonais ficava projetada sobre a base do paralelogramo, e metade da outra diagonal projetava-se como altura, sendo esta a que mais gerou dificuldades de interpretação correta.

Quando questionados sobre a possibilidade em expressar a área do losango por uma sentença matemática, os estudantes não demonstravam muita convicção, o que se acredita ser causado pela dificuldade em compreender as projeções das diagonais e, também, devido ao fato de eles hesitarem, muitas vezes, em fazer registros em seus cadernos.

Diante desse impasse, pediu-se que indicassem a medida da base (D) e da altura do paralelogramo (d/2), para que fosse registrada na lousa, ao mesmo tempo que o projetor multimídia exibia a imagem. Assim, por meio dos registros expostos, concluíram que a área do losango será equivale à metade do produto de suas diagonais.

Finalizado esse resultado, houve aluno que comemorou dizendo: "foi isso que eu tinha encontrado". Foi muito satisfatório ver a felicidade não só desse aluno, mas dos outros que também expressavam satisfação em estar encontrando a origem de resultados que eles já sabiam, mas não compreendiam. A cada resultado concluído, era possível verificar contentamento entre os alunos.

6.4 QUARTO ENCONTRO

Revisando os conteúdos estudos anteriormente, foi perguntado qual a unidade de medida de área que está sendo utilizada. Os primeiros a manifestarem-se responderam que era cm^2 e m^2; então, pediu-se para acessarem a construção da área do retângulo e verificarem que havia referência a essas unidades.

Questionou-se que: se a área do retângulo é expressa pela quantidade de quadrados unitários que estão dentro dele, então onde estariam as referências a medidas como cm^2 ou m^2? Com essa observação, os estudantes recordaram que a unidade é, simplesmente, o quadrado de lado um. Então, comentou-se que, nos casos em que uma área é expressa, por exemplo, em 12 cm^2 ou $17m^2$, significa que essas regiões são equivalentes a 12 quadrados de lado 1 cm e 17 quadrados de lado 1 m, respectivamente.

Também foram revisadas as sentenças que expressam as áreas do retângulo, paralelogramo, triângulo e losango. No primeiro, os alunos permaneciam com dificuldades de expressar, verbalmente, uma justificativa de seu cálculo; já para o paralelogramo e triângulo, tiveram facilidade, talvez devido ao fato de estarem mais acostumados a lidar com esses objetos.

Interagindo com a construção da área do paralelogramo, disseram que é possível transformá-lo em um retângulo de superfície equivalente, por isso, bastava multiplicar as medidas da base e altura. Para o triângulo, de imediato, alguns alunos sinalizaram que é metade da área do paralelogramo, pois este dividido na sua diagonal forma dois triângulos congruentes.

Durante a revisão da área do losango, os alunos tiveram uma pequena dificuldade em relembrar. De início, a turma dividiu-se entre os que achavam que área do losango era metade do produto das diagonais e metade da soma das diagonais. Com essa indefinição, alguns alunos decidiram abrir o *applet* dessa área para tirar a dúvida e, assim, verificaram que o correto era a segunda opção.

Considera-se que a dúvida tenha sido muito pertinente, pois os alunos não ficaram tentando lembrar-se de qual fórmula haviam memorizado durante os anos escolares, e sim tiveram a iniciativa de analisar qual era o modo correto. Por meio dessa construção, revisaram que o correto, para determinar a área do losango, é calcular a metade do produto de suas diagonais. Em vez de utilizarem um resultado pronto, os estudantes tiveram disposição para analisar qual seria o resultado correto.

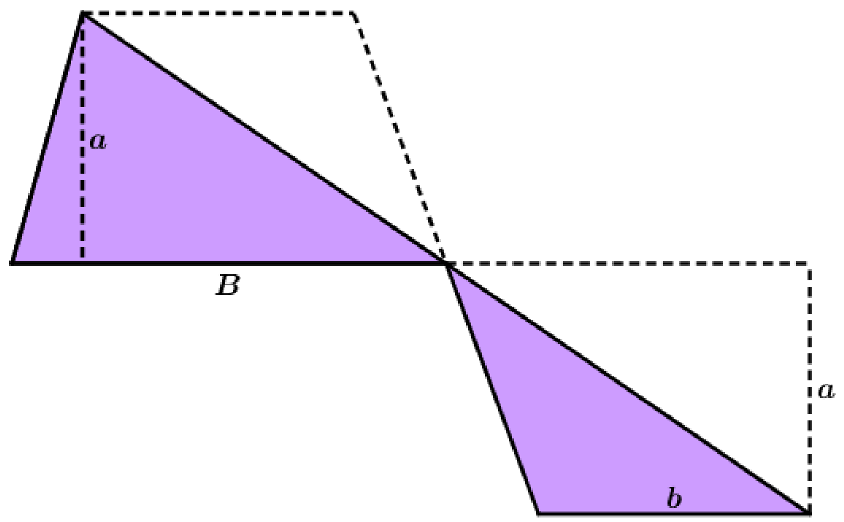
Quando questionados sobre o significado de área, aguardado um breve momento para que os alunos trocassem ideias entre si, um aluno indicou que era o "tamanho das superfícies"; outro complementou com "superfícies planas", o que motivou mais algumas trocas de ideias. Para tornar clara a necessidade de essa figura ser plana ou não, procurou-se exemplificar da seguinte forma: sabendo a área de uma folha de papel, essa medida sofre alteração se a sanfonarmos?

Como o tamanho da superfície manter-se-ia preservada, os alunos compreenderam que não é necessária a exigência de ela ser plana. No entanto, comentou-se que o objetivo deste estudo e da maioria dos cálculos de áreas do Ensino Fundamental e Médio é para regiões planas. Aproveitando essa discussão, informou-se que, durante a graduação em Matemática, tanto em licenciatura quanto em bacharelado, serão estudadas formas para o cálculo de regiões não planas, situação que despertou surpresa e curiosidade nos acadêmicos.

Continuando o estudo de áreas, quando solicitado para interagirem com o *applet* “Área do trapézio A”, mais uma vez, foi possível perceber o quanto as construções cativavam os participantes. Com semblantes alegres e olhos arregalados, os alunos divertiam-se com as mudanças de medida do trapézio e com a desconstrução desse polígono em dois triângulos.

Compreenderam que a área do trapézio pode ser obtida como a soma das áreas dos triângulos, evidenciada na construção (figura 76). Sobre esses triângulos, tiveram facilidade em entender que era possível calcular sua área, pois as medidas das bases e da altura estavam indicadas. Entretanto, assim como em momentos anteriores, quando seria vantajoso e importante que fizessem anotações em seus cadernos, os acadêmicos apresentaram dificuldades em expressar o resultado da soma dessas áreas, porque hesitavam em anotar informações importantes, tais como suas medidas das bases, mesmo sendo incentivados.

Figura 76 – Transformação do trapézio em dois retângulos



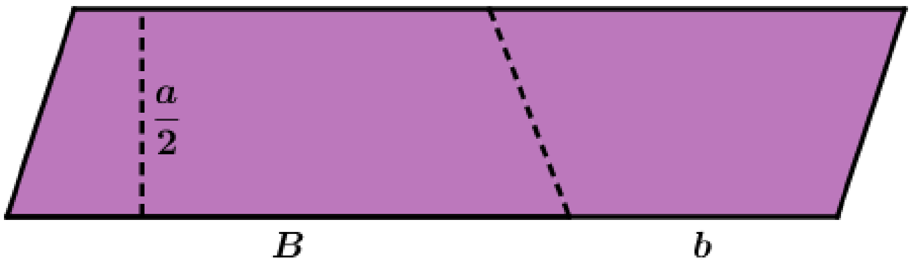
Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar desse descuido, é importante destacar que a maioria trocava ideias e informações com seus colegas. Seguiu-se, então, com a estratégia de registrar as ideias na lousa a partir das informações sugeridas pelos participantes. Conforme se questionavam as medidas como base e altura dos triângulos, um aluno por vez auxiliava na resposta, que culminou com a sentença equivalente à área do trapézio.

Quando questionados se conheciam tal sentença, responderam de modo afirmativo. Porém, quando questionados se eles sabiam o motivo de ela expressar a área do trapézio, como aguardado, a resposta era desfavorável.

Com a construção "Área do trapézio B", de novo, os alunos ficaram encantados com as animações proporcionadas. Após uma breve troca de ideias entre eles, compreenderam que a figura formada pela desconstrução do trapézio era um paralelogramo (figura 77).

Figura 77 – Transformação do trapézio em paralelogramo



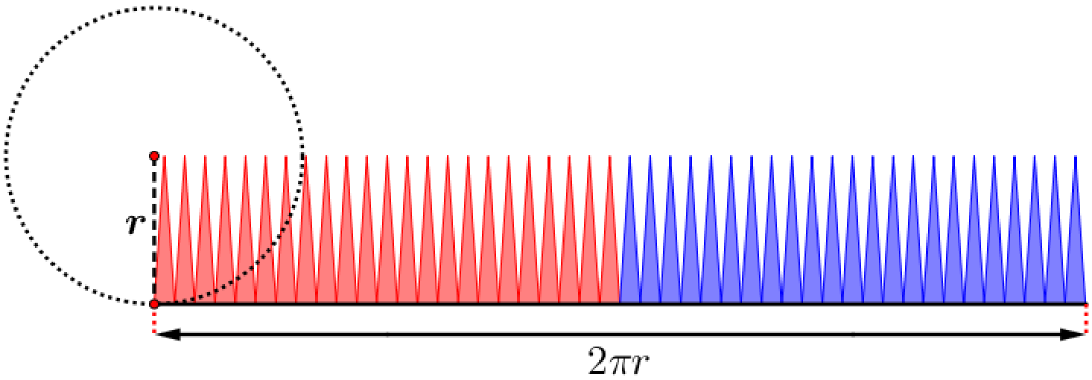
Fonte: Elaborada pelo autor.

Manteve-se o planejamento de contar com a colaboração dos alunos para anotar as medidas da base e altura no quadro, o que, sem dificuldades, terminou com eles mesmos percebendo que, em ambos os *applets* do trapézio, a expressão final do cálculo de sua área é a mesma. Por curiosidade, ainda se questionou sobre qual das construções auxiliava no entendimento da área desse polígono com maior simplicidade; foi então que a maioria indicou a segunda opção, com a justificativa de que esta não exigia fatoração e soma com frações.

Antes de iniciar o estudo da área do círculo, fez-se uma abordagem perguntando o que os alunos conheciam sobre seu perímetro e o número π. As respostas de alguns foram meio vagas e desencontradas, por isso, para esclarecimento de todos, explicou-se que π é obtido pela razão entre o perímetro de qualquer círculo e seu diâmetro (ou dobro da medida de seu raio). Além disso, demonstrou-se que essa relação permite que seja possível determinar o perímetro do círculo. Também foi necessário revisar os conceitos de setores e coroas circulares.

Após essa revisão, os participantes acessaram o *applet* “Área do círculo A”. De forma quase instantânea, um dos participantes, ao alinhar os setores circulares sobre a projeção do perímetro, disse: “meu Deus, que trabalhão deve ter dado fazer isso daqui” (figura 78). O pesquisador ficou surpreso pela capacidade de o aluno mensurar a complexidade da construção, visto que são calouros da graduação em Matemática e que nenhum deles tinha experiência em produzir *applets* com o GeoGebra, até que um deles revelou que os alunos da licenciatura já estavam realizando construções matemáticas com o uso desse *software* na disciplina Recursos Tecnológicos no Ensino da Matemática I.

Figura 78 – Alinhamento dos setores circulares sobre o perímetro da circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das atividades desenvolvidas nessa disciplina, os alunos que a cursavam já realizavam a plotagem de algumas funções tridimensionais, além de trabalhar com retas, segmentos e pontos. Assim, eles já tinham, mesmo que minimamente, uma ideia da quantidade de trabalho que foi necessário para se chegar ao resultado final do *applet*.

Sobre o estudo da área do círculo, ao alinhar os setores circulares, alguns identificavam que a superfície do círculo foi transformada em um paralelogramo, enquanto outros indicavam um retângulo. Conferindo as suas telas dos monitores, pôde-se perceber que a identificação em paralelogramo tinha ocorrido naqueles que tinham secionado o círculo em uma quantidade de setores circulares menor. Já para os alunos que determinaram um número muito grande desses setores, a figura formada aproximava-se mais de um retângulo.

Como o cálculo, tanto para o paralelogramo quanto para o retângulo, é resultado do produto das medidas da base e altura, todos chegaram à mesma conclusão de que a área dessas regiões expressa uma aproximação para a área do círculo.

Já com o *applet* "Área do círculo B", nenhum aluno hesitou em identificar que a superfície do círculo aproximava-se a do triângulo. Realizando os cálculos da área dessa aproximação, os participantes puderam conferir que o resultado era o mesmo que havia sido encontrado na produção anterior.

Quando questionados sobre qual *applet*, na opinião deles, contribuía com maior simplicidade para chegar à conclusão sobre a área do círculo, a maioria teve preferência pela última construção. Entre os motivos mais citados, estava que esta possuía menos informações na tela, o que ratifica a Teoria da Carga Cognitiva, pois informações em excesso, ao invés de tornar a aprendizagem mais simples, acabam por atrapalhar.

Ao longo das justificativas e/ou demonstrações visuais estudadas, era, facilmente, perceptível que os participantes estavam sentindo prazer em descobrir a legitimidade de as fórmulas memorizadas na Educação Básica serem verdadeiras por meio da interação e praticidade que as construções permitiam.

6.5 QUINTO ENCONTRO

Retomando os assuntos trabalhados na aula anterior, questionou-se sobre quais figuras o trapézio e o círculo foram transformados como estratégia para encontrar suas áreas. Das duas formas trabalhadas para cada uma dessas figuras, as mais lembradas foram as que desconstruíam o trapézio e o círculo em triângulos. Posteriormente, para que recordassem as outras, sugeriu-se que as acessassem.

Para justificar a área do trapézio, não houve dificuldade. Os alunos, alguns com suporte do *applet*, sinalizavam de que sua área é resultado da soma das áreas dos triângulos determinados pela divisão da diagonal desse quadrilátero. No caso do círculo, embora os alunos também já conhecessem a expressão de sua área, foram mais dependentes do recurso do *applet* para conseguir justificar esse resultado.

Um dos participantes iniciou a explicação da área do círculo com: "ele é 'desmanchado' e forma-se um triângulo", enquanto outro complementou: "e esse triângulo tem o contorno como base e o raio como altura". Adiante, utilizando esses dados para determinar a área desse triângulo, com simplicidade, os participantes conseguiram encontrar a área do círculo.

Finalizado o estudo das áreas, partiu-se para o estudo de volumes, que, de forma similar ao ocorrido no início do estudo de áreas, deixou claro o conhecimento dos participantes em calcular o volume do bloco retangular. Todos, acertadamente, respondiam que, para determinar o seu volume, bastava multiplicar as suas três dimensões. No entanto, manifestaram desconhecimento em argumentar o motivo de o cálculo realizado expressar o resultado.

Com o *applet* "Volume do bloco retangular" aberto, os participantes assimilaram bem o conceito desse sólido e do cubo, em específico. Assim como o quadrado unitário como unidade de medida de área, os participantes demonstraram compreensão em adotar-se o cubo unitário como unidade de volume.

Ao construírem, nesse *applet*, o bloco retangular de medidas 3x2x1, sem empecilhos, verificaram que este era formado por 6 pequenos cubos, fato suficiente para que os acadêmicos conseguissem identificar que o número de cubos unitários é equivalente ao produto das três dimensões.

Nesse momento, foi perguntado se algum deles saberia expor o significado de volume, e, surpreendentemente, um aluno esboçou a ideia de quantidade de espaço ocupada por um objeto tridimensional. Embora o entendimento desse aluno estivesse correto, deixei que os demais discutissem se a ideia do colega estava correta.

Alguns aproveitavam para recordar o conceito de área como medida de superfície; a partir dessa ideia, após algumas reflexões, todas concordaram com a primeira sugestão, de volume como a medida de espaço ocupada por um sólido. Adiante, os estudantes construíram outros blocos retangulares e, com facilidade, certificaram-se de que o número de cubos unitários era sempre equivalente ao produto das três dimensões.

Assim, os participantes demonstraram compreensão de que o número de cubinhos expressa o volume do bloco retangular e que, para determinar essa quantidade, é suficiente multiplicar as medidas do comprimento, largura e altura. Embora tenham demonstrado esse entendimento, os estudantes apresentavam dificuldade em expressar uma justificativa verbalmente, assim como ocorreu na área do retângulo.

Trocando explicações entre si, percebia-se que gesticulavam que os cubos distribuídos sobre o comprimento seriam repetidos conforme a largura e altura, mas hesitavam em enunciar suas ideias. Sobre essa situação, acredita-se que seja resultado de uma possível falta de estímulo em buscar tais justificativas durante a Educação Básica.

Sobre a generalização do volume do bloco retangular para medidas reais positivas, novamente, a alternativa algébrica utilizada demonstrou-se uma ótima opção. Os alunos foram levados ao entendimento de que o cálculo para determinar o volume não exige que as medidas sejam, necessariamente, inteiras.

Ainda sobre o estudo desse sólido, os participantes compreenderam o porquê de seu volume também poder ser obtido pelo produto entre a área da base e a medida da altura, sendo esta uma alternativa para o seu cálculo quando a área da base é explícita, independendo do conhecimento de seu comprimento e largura.

Finalizadas as justificativas sobre o volume do bloco retangular, quando questionados sobre como determinar o volume de um cilindro triangular, os acadêmicos tiveram as dificuldades que já eram aguardadas. Um dos alunos disse: "é só multiplicar a área da base pela altura", o que se sabe ser correto; porém, alertou-se de que, neste estudo, ainda não se obteve tal resultado.

Começando o estudo de cilindros com seu *applet* em específico, todos os participantes discordaram de que as figuras exibidas eram realmente cilindros, exceto a determinada pelas bases circulares. A seguir, verificaram que, ao modificar as regiões fechadas, determinavam-se sólidos com bases congruentes e paralelas, momento em que foi explicada a definição geral de cilindros, fato que os deixou completamente surpresos. Mesmo com a explicação de que o cilindro não exige que suas bases sejam circulares, alguns alunos replicavam com "não precisa mesmo?", evidenciando, assim, que os equívocos cometidos, nos livros didáticos, sobre esse assunto promovem uma compreensão igualmente equivocada.

Superado esse momento de conflito de ideias, os acadêmicos compreenderam que o cilindro pode ser classificado conforme sua inclinação e a partir da região que determina sua base. Além disso, verificaram que, quando essa base é um polígono, o cilindro também pode ser chamado de prisma. No caso de a base ser uma região não poligonal, como o círculo, concluíram que o sólido é apenas cilindro.

6.6 SEXTO ENCONTRO

Como de costume, o encontro iniciou com questões que versavam sobre os conteúdos trabalhados na semana anterior. Primeiramente, pediu-se para que os estudantes explicassem com suas palavras o significado de volume. Como não se lembravam perfeitamente, questionou-se qual era o significado de área, pois eles demonstravam ter essa compreensão muito bem fundamentada, tanto que responderam corretamente.

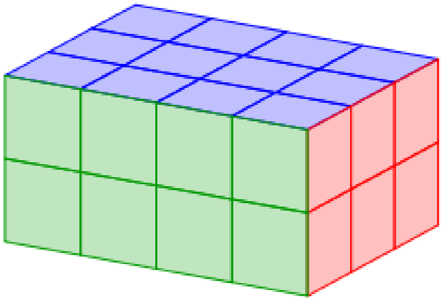
Com esse retorno satisfatório, pediu-se para que tentassem relacionar o conceito de área com o de volume, uma vez que essa estratégia foi utilizada na aula anterior. A partir desse raciocínio, as ideias passaram a aflorar, e os estudantes trocaram opiniões entre si, as quais convergiram para o entendimento de volume como medida de espaço ocupado por um sólido.

Durante a revisão do volume do bloco retangular, de imediato, um aluno disse: "é a área da base vezes a altura". Quando perguntado sobre outra possibilidade para expressar esse volume, também de forma instantânea, esse mesmo aluno respondeu "pode multiplicar as três medidas [dimensões]". Embora as respostas tenham sido corretas, assim como ocorreu durante o estudo da área do retângulo, os alunos não conseguiam expressar, verbalmente, uma justificativa para tais formas de cálculo.

Um fato que chamou muito a atenção foi que, novamente, alguns participantes manifestavam com gestos a ideia de que o bloco retangular era composto de cubos unitários. Contudo, a dificuldade em verbalizar o raciocínio permanecia muito profunda.

Após deixá-los trocando ideias por alguns minutos e percebendo que a dificuldade mantinha-se, com a projeção multimídia do *applet* desse sólido, indicou-se a todos que o número de cubos unitários distribuídos sobre a base, isto é, pelo comprimento e largura, repete-se de maneira proporcional à medida da altura (figura 79). Por isso, o volume do bloco retangular pode ser obtido pelo produto dessas medidas.

Figura 79 – Bloco retangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com aceitação dessa ideia, revisou-se a ideia de cilindro. Uma aluna, ainda surpresa com a definição trabalhada no encontro passado, disse "cilindro é um 'monte de coisa', não precisa ser circular", expondo, mais uma vez, que os participantes concebiam o cilindro apenas com base circular.

Para aperfeiçoar a contribuição da colega acerca desse sólido, questionou-se sobre o que seria esse "monte de coisa". Visualizando o *applet* "Cilindros", os demais alunos foram acrescentando informações, como o fato de as bases serem paralelas e congruentes e que estas podem ser quaisquer regiões fechadas, desde que não haja auto-interseções. Sobre o "entorno" do cilindro, a superfície lateral, demonstraram entendimento de que é determinado por segmentos paralelos, com uma extremidade, em cada curva, que determina as bases.

Dando continuidade à sequência didática, levantou-se a dúvida de como calcular o volume de um cilindro se é estudado somente como calcular o volume de um bloco retangular. Sem hesitar, um aluno respondeu corretamente "área da base vezes altura", complementando com: "não sei o porquê, mas dá certo".

Os participantes foram lembrados de que, neste estudo, a técnica utilizada para calcular volume é completar o sólido com cubos unitários, o que não ocorre sem deixar espaços vazios em um cilindro qualquer, como, por exemplo, o cilindro triangular. Um aluno sugeriu completar o sólido com quantos cubinhos fosse possível e, depois, calcular o volume restante. Entretanto, outro aluno explicou que a forma para determinar esses espaços vazios é um problema equivalente à situação inicial. Portanto, seria impraticável com o conhecimento estudado até o momento.

Diante dessas reflexões, solicitou-se que abrissem o *applet* "Princípio de Cavalieri A". Os acadêmicos identificaram, nessa construção, que os sólidos exibidos eram cilindros e indicaram corretamente que ambos possuíam bases congruentes e mesma altura. Incentivou-se que movimentassem o controle deslizante do plano horizontal para visualizarem que a interseção desse plano com os cilindros determina, em cada um, regiões de mesma área em toda a extensão do sólido.

A seguir, foi perguntado se algum dos presentes já havia estudado o Princípio de Cavalieri durante o Ensino Médio. Dos onze acadêmicos, somente dois manifestaram lembrança em tê-lo ouvido, mas não sabiam dizer do que se tratava. Diante dessa situação, já esperada, explicou-se a todos o seu enunciado e sua consequência a partir das premissas exigidas, o que foi suficiente para todos inferirem que os cilindros exibidos no *applet* têm mesmo volume.

Com a produção "Princípio de Cavalieri B", verificaram, sem problemas, que, assim como a construção anterior, os dois cilindros ilustrados têm mesma área da base e altura. Além disso, o plano horizontal apontava mesmo resultado obtido anteriormente, e, portanto, os dois sólidos, novamente, tinham mesmo volume.

Com os comandos que permitiam entortar, secionar e transferir seções, os participantes encantavam-se com os efeitos apresentados. Todos revelaram que a ilustração do Princípio de Cavalieri, por meio da mecânica do *applet*, tornava mais compreensível seu resultado. O entusiasmo dos estudantes com essa construção foi tanta que foi dado um tempo extra para continuarem divertindo-se.

Partindo dessa compreensão, foi comentado que, dado um cilindro qualquer, sempre será possível construir um bloco retangular com mesma área da base e altura, que, em decorrência do referido princípio, permite concluir que ambos terão mesmo volume. Com essas explicações, combinando os dois *applets*, os acadêmicos demonstraram entendimento do motivo de o volume de um cilindro qualquer ser equivalente ao mencionado pelo seu colega no início dessa aula: o produto entre a área da base e a medida da altura.

Seguindo o estudo do volume dos sólidos, com o *applet* "Cones", os participantes relacionaram o fato de prismas serem cilindros ao fato de pirâmides serem cones. Isso evidencia que a estratégia escolhida promove uma aprendizagem significativa, isto é, um novo conhecimento, nesse caso, os cones, ganha um significado ainda mais bem estruturado ao relacionar-se e interagir com um conhecimento prévio, nesse caso, os cilindros.

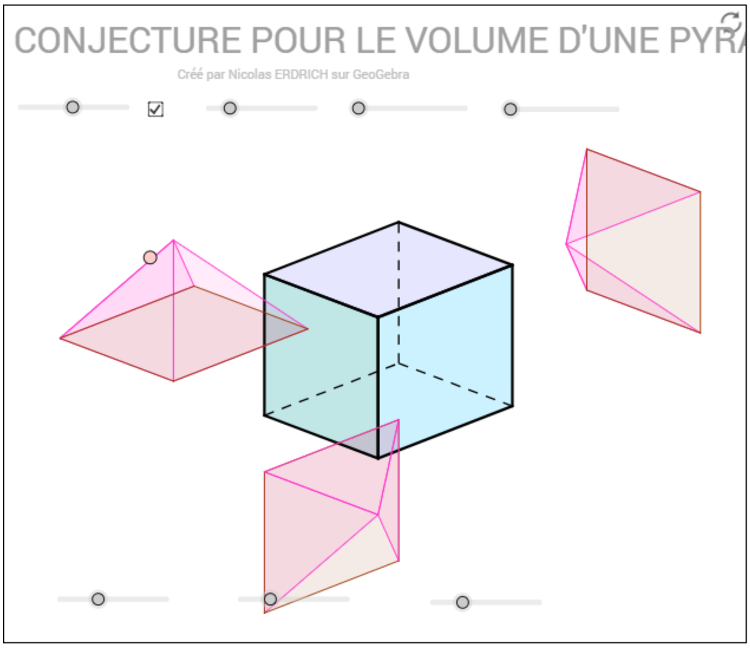
Com os controles deslizantes da construção, verificaram que, ao modificar a região fechada do cone, todas as figuras tinham uma base e uma "ponta" (vértice). Então, da mesma forma que foi explicada a ideia generalizada do cilindro, procurou-se apresentar a dos cones. A definição foi muito bem recebida pelos participantes, embora tenham ficado surpreendidos, novamente, em saber que um cone não precisa ter base circular exatamente.

Ainda sobre os cones, tiveram facilidade em compreender que estes podem ser oblíquos ou retos e que o formato da sua região fechada é o responsável pela sua nomenclatura. Também entenderam que todas as pirâmides são cones e que o recíproco é falso, porque existem cones cuja base não é um polígono.

Quando a sequência didática chegou à questão de como calcular o volume dessas figuras, enquanto se esperava que os alunos não soubessem responder, um dos presentes disse: "três pirâmides formam um bloco retangular, então tem que dividir o volume por três". Isso faz todo o sentido, desde que haja cuidado em indicar as medidas desses sólidos.

O aluno foi convidado, então, a compartilhar seu raciocínio na lousa para os demais colegas. Ele tentou expressar a ideia de que o bloco retangular é formado por três pirâmides semelhantes. No entanto, como o aluno não se havia preparado previamente, o desenho ficou de difícil entendimento. Essa estratégia não estava no planejamento, mas, entendendo que seria oportuno apresentá-la, exibiu-se o *applet* elaborado por Erdrich (2014), que estava salvo no computador do pesquisador e que foi projetado na sala de aula, para que todos o visualizassem (figura 80).

Figura 80 – Volume de uma pirâmide quadrangular



Fonte: ERDRICH (2014).

Por meio dos controles deslizantes, os estudantes puderam compreender a ideia indicada por seu colega, de que o bloco retangular determina três pirâmides semelhantes, isto é, de mesmo volume. Portanto, o volume de cada uma equivale à terça parte do volume do bloco retangular.

Para não generalizar esse resultado das pirâmides quadrangulares, para quaisquer cones, pediu-se que abrissem o *applet* "Volume do cone" e verificassem o que ocorria ao clicar em "transferir água". Durante o efeito, uma aluna disse "a água sai de um e passa para o outro", o que é correto, mas ainda não indicava a relação existente entre tais volumes. Por isso, acrescentou-se que o cone estava totalmente cheio de água e, dessa forma, seu volume equivalia àquela quantidade de líquido. Quando transfere-se a água para o cilindro, seu volume fica indicado pelo nível da água (sua terça parte).

Tais observações foram suficientes para os alunos identificarem e para os convencer de que o volume de um cone equivale à terça parte do volume de um cilindro de mesma área da base e altura, propriedade compatível com o *applet* da pirâmide quadrangular.

Finalizando o estudo de sólidos, com a construção "Volume da esfera", rapidamente, um participante indicou a altura dos sólidos como o diâmetro da esfera.

Porém, pensando-se que essa resposta, mais adiante, não seria tão prática para expressá-la algebricamente, foi contra-argumentado que não havia controles deslizantes para o diâmetro. Diante disso, outro aluno respondeu que “então pode usar 2r para a altura, porque o diâmetro é duas vezes o raio”, o que é igualmente correto e gera simplicidade no momento de indicar a altura de cada cone.

Os acadêmicos também concluíram que o plano horizontal define seções de mesma área em cada sólido e, diante disso, com o Princípio de Cavalieri, poder-se-ia concluir que os dois sólidos têm mesmo volume. Quanto à possibilidade para calcular o volume interior ao cilindro e exterior aos cones, após algumas trocas de ideias entre si, os acadêmicos argumentaram que era possível, pois eles tinham as áreas das bases do cilindro e dos cones, e a altura deles era 2r e r, respectivamente.

Adiante, pediu-se para esboçarem, em seus cadernos, uma estratégia para calcular esse volume. Apesar de os participantes terem o costume de reagir com pouco interesse em realizar registros em seus materiais, pôde-se perceber que o raciocínio de todos foi o mesmo: calcular o volume do cilindro e subtrair duas vezes o volume de um dos cones. Após alguns minutos, convidou-se uma aluna para expor seu raciocínio que, com a ajuda dos demais, resultou na correta expressão do volume.

Os acadêmicos demonstraram-se, novamente, surpresos em compreender de onde “saem” os resultados memorizados por tantos anos. Disseram que nunca tinham visto uma justificativa ou um esboço de convencimento para as sentenças matemáticas verificadas e que as construções utilizadas tornaram esse tipo de estudo muito mais divertido e esclarecedor.

6.7 SÉTIMO ENCONTRO

No último dia, como era de conhecimento dos estudantes, foi proposta a resolução de um segundo questionário (Apêndice B), para que, junto com o diário do pesquisador, fosse possível elaborar uma análise do quanto este estudo contribuiu ou não para as suas aprendizagens.

Dos onze participantes que permaneceram, regularmente, desde o segundo encontro, três não puderam comparecer por motivos pessoais. Os presentes receberam o questionário com questões que, assim como o primeiro, versavam sobre os conteúdos de áreas e volumes. Tais questões foram respondidas individualmente.

Pôde-se identificar que alguns alunos ficaram um pouco aflitos por terem esquecido um detalhe ou outro das aulas, assim como houve alunos mais confiantes em resolver as perguntas. Infelizmente, também aconteceu de uma minoria não se comprometer em resolver o questionário com o empenho que seria capaz. No entanto, a participação de todos os alunos, ao longo desses encontros, trouxe significativas observações aqui apresentadas.

7 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Seguem abaixo as análises dos questionários preenchidos pelos participantes da pesquisa. O primeiro, oferecido antes do início dos estudos, e o segundo, no último encontro, em que, além de sua análise, constam comentários sobre a evolução do desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos trabalhados.

7.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO INICIAL

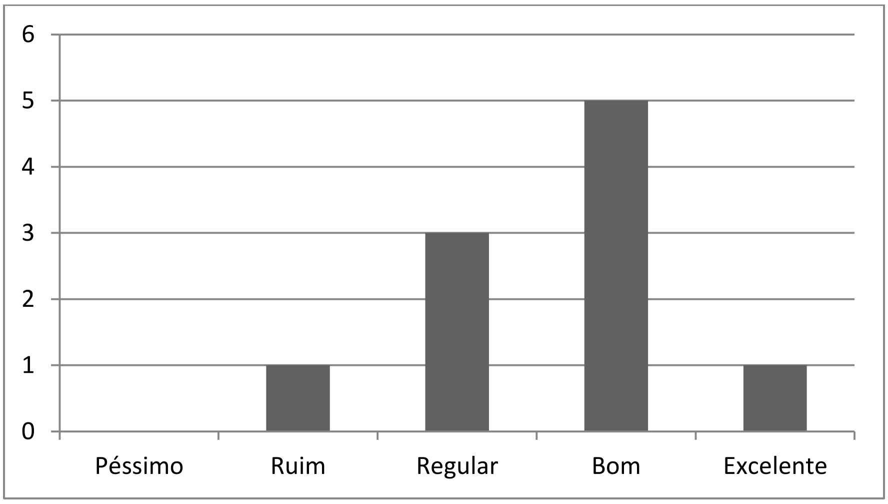
Esta análise do Questionário Inicial (Apêndice A) ocorreu antes da execução da sequência didática de áreas e volumes, o que possibilitou a identificação de alguns dos conhecimentos prévios e o quanto os calouros da graduação em Matemática, participantes dessa pesquisa, dominam o conteúdo. Diante da participação regular de onze estudantes a partir do segundo encontro, os questionários dos alunos que compareceram somente no primeiro dia não fizeram parte da análise.

Sobre o perfil escolar dos calouros participantes, somente um não cursou a Educação Básica no Rio Grande do Sul (RS), tendo sua formação ocorrida na cidade do Rio de Janeiro. Nove estão matriculados no curso de licenciatura e dois no bacharelado. Destes, nenhum está cursando disciplina específica de Geometria Plana ou Espacial.

Durante o Ensino Fundamental e Médio, nenhum dos alunos participou de intervenções didáticas com uso de *softwares* educacionais durante o ensino de Geometria. Além disso, um dos estudantes não teve o conteúdo de áreas e volumes trabalhado na escola. Nesse caso, como previsto, as perguntas que seguiam no seu questionário não fizeram parte da análise.

Quanto à classificação por parte dos alunos sobre o estudo desses conteúdos durante a Educação Básica, pode-se observar, no gráfico 1, que a maioria avalia de forma positiva o modo como os conteúdos foram desenvolvidos.

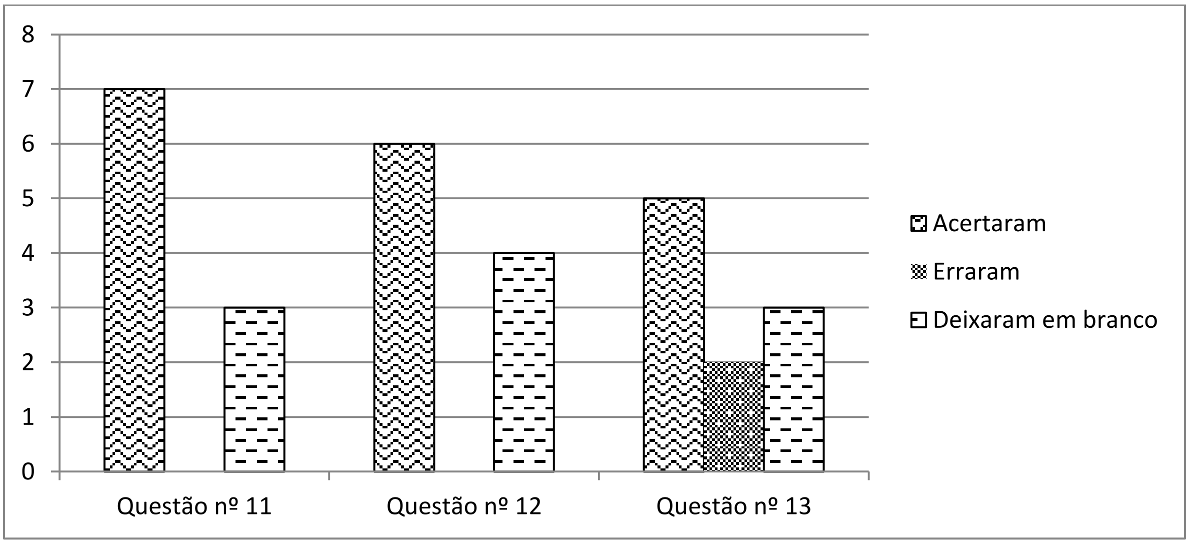
Gráfico 1 – Classificação sobre o estudo de áreas e volumes na Educação Básica



Fonte: Dados da pesquisa.

Adiante, sucediam as questões 11, 12 e 13, que perguntavam as áreas do quadrado, triângulo e trapézio, respectivamente. Os resultados podiam ser obtidos com contas simples, a partir dos dados disponibilizados nos exercícios (base e altura). O desempenho dos participantes pode ser conferido no gráfico 2.

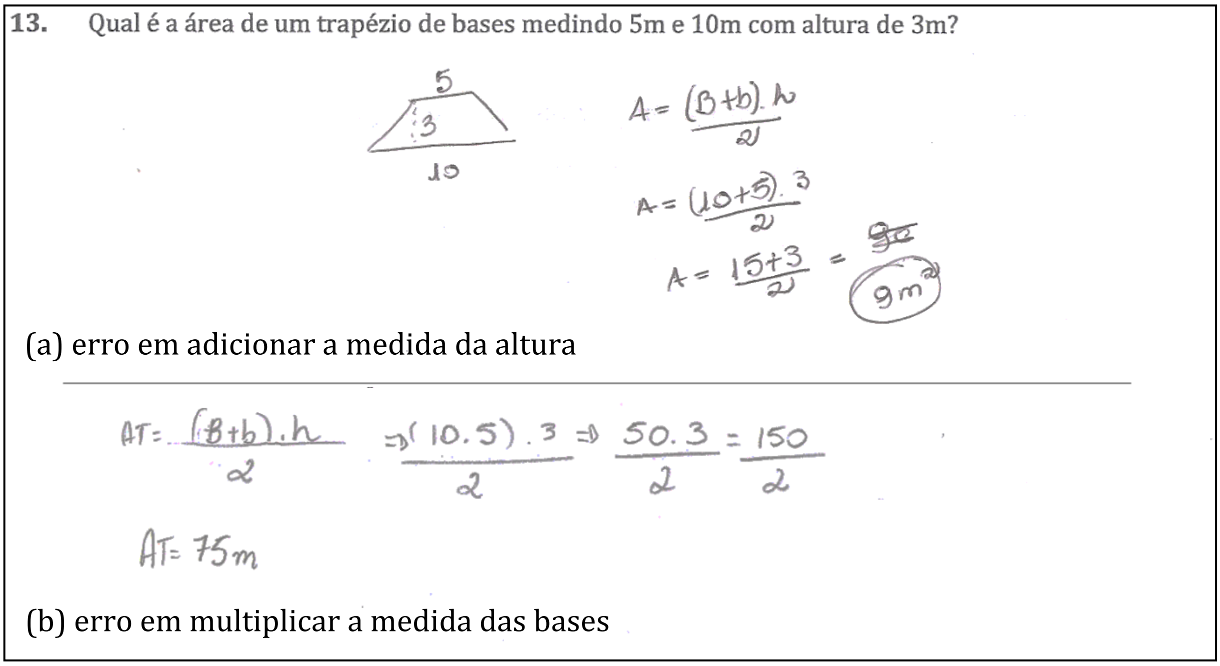
Gráfico 2 – Desempenho nas questões 11, 12 e 13 (Questionário Inicial)



Fonte: Dados da pesquisa.

O gráfico 2 permite observar que, à medida que a quantidade de operações para determinar a área das figuras aumenta, o número de acertos diminui, visto que o cuidado com os dados para resolução torna-se ainda maior. Os dois erros cometidos na questão 13 ilustram bem essa situação (figura 81), pois os alunos identificaram a forma correta de encontrar as áreas das figuras dadas. No entanto, por descuido, os resultados obtidos estavam incorretos.

Figura 81 – Erros cometidos na questão 13 (Questionário Inicial)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 14, momento de justificar o motivo de os cálculos realizados apresentarem as respostas corretas, dos nove alunos que tentaram resolver pelo menos uma das três questões anteriores, dois não apresentaram justificativas, e os outros sete tiveram respostas muito parecidas, que indicavam uma simples aplicação de fórmulas estudadas na escola. Inclusive, todas as respostas continham a palavra “fórmula”, evidenciando uma aprendizagem mecânica, como se não houvesse um raciocínio lógico matemático em sua utilização. Segue um exemplo dessas respostas na figura 82.

Figura 82 – Exemplo de resposta na questão 14 (Questionário Inicial)

14. Caso tenha respondido a(s) questão(ões) nº 11 ou 12 ou 13, justifique o motivo do cálculo realizado apresentar a resposta correta.

A APLICAÇÃO DA FÓRMULA PARA OBTER O RESULTADO.

AS OUTRAS CONTAS NÃO FORAM DESENVOLVIDAS PELO FATO DE NÃO LEMBRAR DAS FÓRMULAS.

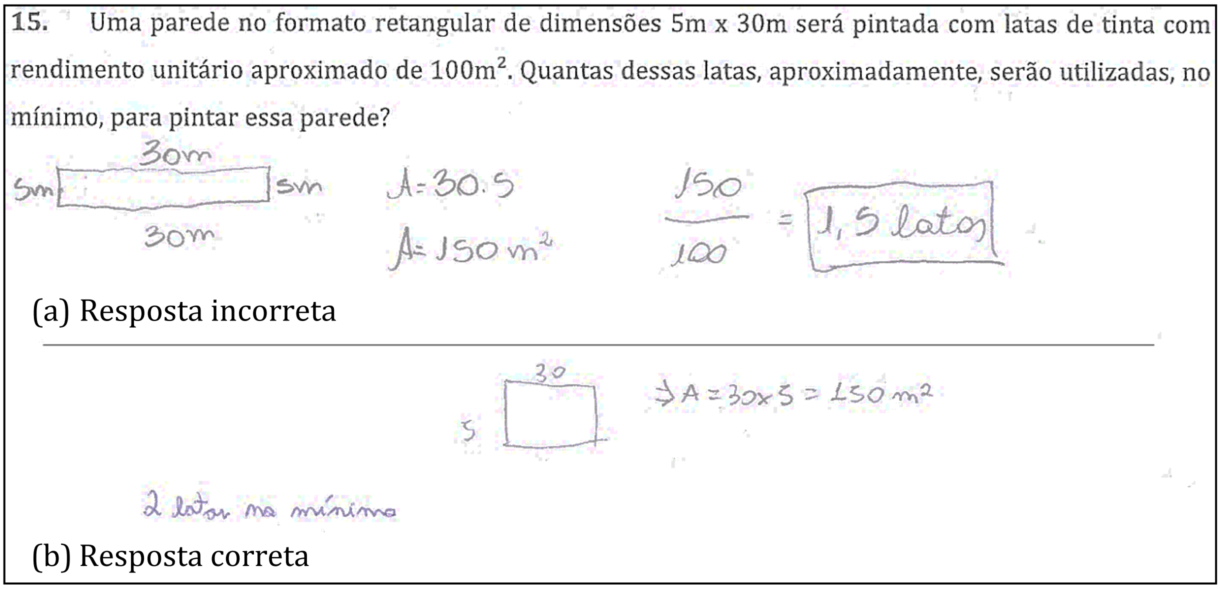
Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 15 relacionava uma superfície retangular a ser pintada com o rendimento de uma lata de tinta. Dos dez alunos aptos a resolvê-la, dois não responderam. Os demais adotaram a mesma estratégia de resolução: comparar o rendimento da lata de tinta com a área da superfície.

No entanto, somente dois apresentaram a resposta correta, isto é, duas latas de tinta. Os outros seis responderam uma lata e meia, o que não é possível diante da especificação do exercício: latas de tinta unitárias.

O erro em apresentar uma resposta inviável diante das limitações de um exercício ratifica a forma mecânica de que alguns alunos encaravam os exercícios. Aplicavam fórmulas e realizavam cálculos sem preocuparem-se se os valores encontrados são possíveis, dadas as informações do exercício. Nas figuras 83a e 83b, encontram-se exemplos de respostas apresentadas por dois calouros.

Figura 83 – Exemplos de resposta da questão 15 (Questionário Inicial)


15. Uma parede no formato retangular de dimensões 5m x 30m será pintada com latas de tinta com rendimento unitário aproximado de 100m². Quantas dessas latas, aproximadamente, serão utilizadas, no mínimo, para pintar essa parede?

30m
5m 5m
30m
A=30.5
A=150 m²
$\frac{150}{100} = \boxed{1,5 \text{ latas}}$

(a) Resposta incorreta

30
5
→ A = 30x5 = 150 m²

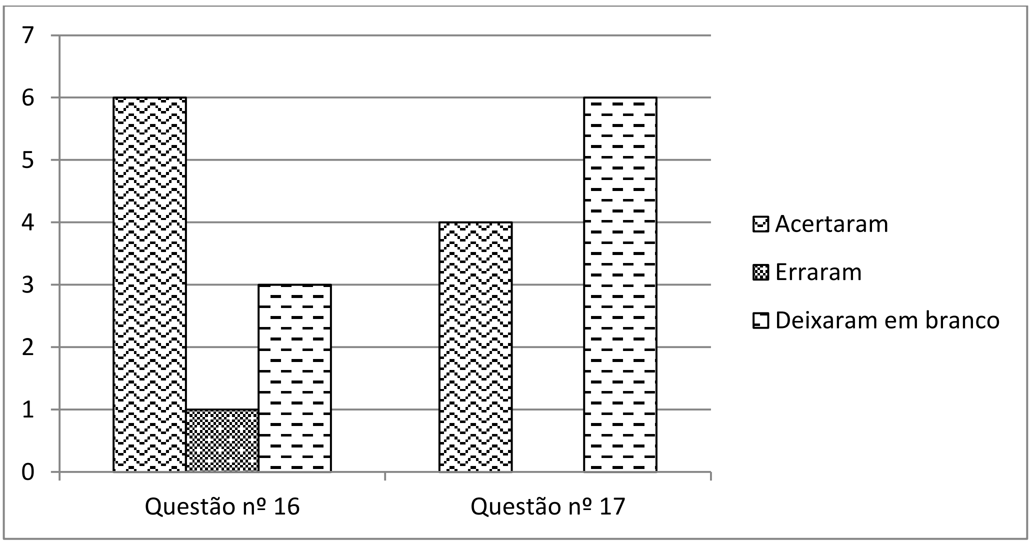
2 latas no mínimo

(b) Resposta correta

Fonte: Dados da pesquisa.

As questões seguintes, 16, 17 e 18 versavam sobre volumes. Destas, as duas primeiras perguntavam os volumes do cubo e do bloco retangular, respectivamente, em que os resultados podiam ser encontrados, novamente, com cálculos simples, pois os exercícios informavam as dimensões desses sólidos. O desempenho dos participantes pode ser conferido no gráfico 3.

Gráfico 3 – Questões 16 e 17 do Questionário Inicial



Fonte: Dados da pesquisa.

Dos acertos nas questões 16 e 17, todos chegaram ao resultado correto ao determinar os seus volumes pelo produto de suas dimensões. O único erro foi cometido, possivelmente, por mais uma falta de atenção, pois o estudante, em vez de elevar a medida ao cubo, multiplicou-a por três (figura 84).

Figura 84 – Erro na questão 16 (Questionário Inicial)

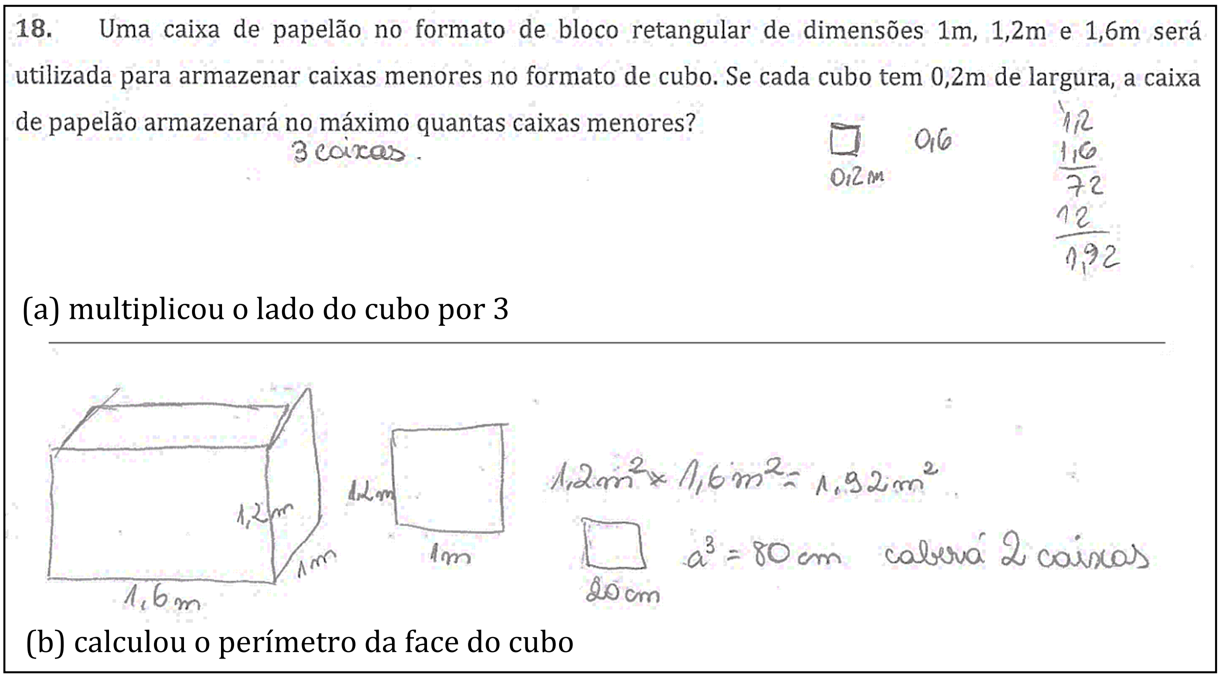
16. Qual é o volume de um cubo de largura 12,1? 36,3 .

Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 18 voltou a relacionar duas medidas, dessa vez, de volumes: uma caixa no formato de bloco retangular armazena certo número de caixas menores no formato de cubos. Dos estudantes aptos a resolvê-la, apenas metade tentou encontrar solução, e somente três acertaram o resultado, 240 caixas cúbicas.

Os dois erros cometidos foram ocasionados ao determinar o volume do cubo. Enquanto a figura 85a permite concluir que a medida da largura do cubo foi, novamente, multiplicada por três, a figura 85b mostra que o estudante, possivelmente, confundiu-se e determinou o perímetro da face do cubo, embora tenha explicitado a fórmula de seu volume corretamente.

Figura 85 – Erros cometidos na questão 18 (Questionário Inicial)



18. Uma caixa de papelão no formato de bloco retangular de dimensões 1m, 1,2m e 1,6m será utilizada para armazenar caixas menores no formato de cubo. Se cada cubo tem 0,2m de largura, a caixa de papelão armazenará no máximo quantas caixas menores?

3 caixas.

0,2m

0,6

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times\ 1,6 \\ \hline 72 \\ 12 \\ \hline 1,92 \end{array}$$

(a) multiplicou o lado do cubo por 3

1,2m

1m

1,6m

1,2m

1m

$1,2m^2 \times 1,6m^2 = 1,92m^2$

20cm

$a^3 = 80$ cm caberá 2 caixas

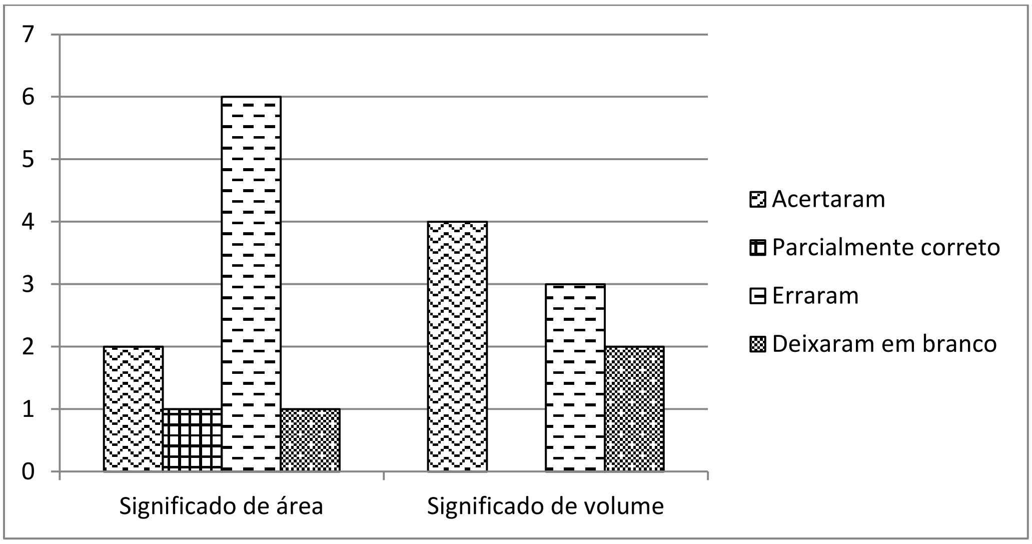
(b) calculou o perímetro da face do cubo

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, pode-se constatar que o conhecimento das fórmulas não é suficiente para obter êxito nas questões. O seu conhecimento é importante para chegar aos resultados, porém é indispensável desenvolver um raciocínio durante a resolução dos exercícios.

Duas perguntas finalizaram este questionário, uma sobre o significado de área e a outra sobre o de volume. As respostas foram bem diversificadas, e o desempenho dos alunos é retratado no gráfico 3.

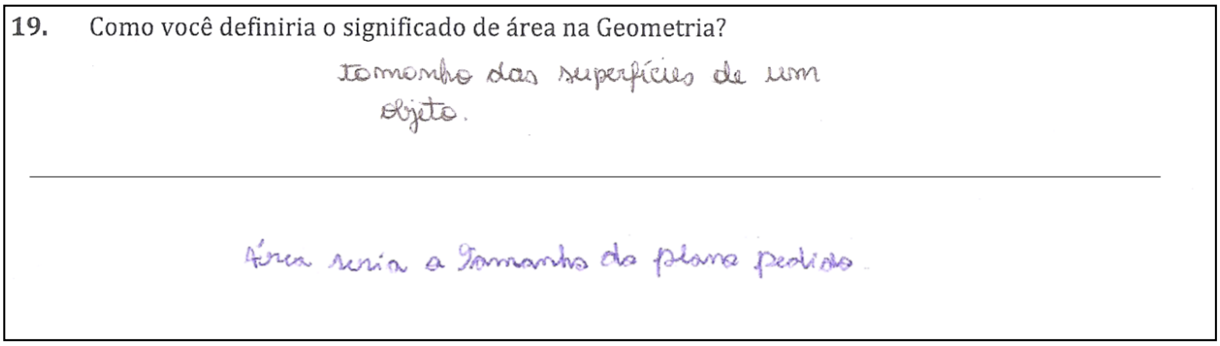
Gráfico 4 – Significado de área e volume (Questionário Inicial)



Fonte: Dados da pesquisa.

Para o conceito de área, duas respostas foram consideradas corretas e uma parcialmente correta. As corretas indicavam um entendimento de área como medida de superfícies (figura 86), enquanto, na questão considerada parcialmente correta, o aluno apresentava uma ideia coerente de comparação com uma unidade de área, porém expressava tal relação com o espaço, o que não procede (figura 87).

Figura 86 – Respostas corretas na questão 19 (Questionário Inicial)


19. Como você definiria o significado de área na Geometria?

tamanho das superfícies de um objeto.

Área seria o Tamanho do plano pedido.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 87 – Resposta parcialmente correta na questão 19 (Questionário Inicial)

19. Como você definiria o significado de área na Geometria?

Quantos m^2 tem num determinado espaço.

Fonte: Dados da pesquisa.

Já as respostas incorretas, que foram maioria, não convergiram para uma ideia única, embora dois alunos tenham apresentado o significado de perímetro.

Quanto ao significado de volume, quatro respostas foram consideradas corretas, por mencionarem uma ideia de espaço ocupado por um sólido (figura 88).

Figura 88 – Exemplos de resposta correta na questão 20 (Questionário Inicial)

20. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

Volume é o espaço que há dentro de formas geometricas na geometria espacial

O espaço que determinado figura ocupa.

Fonte: Dados da pesquisa.

As três respostas incorretas, novamente, não convergiram para um mesmo conceito. Um dos participantes demonstrou entendimento ao relacionar volume com sólidos geométricos, mas não especificou a relação existente (figura 89).

Figura 89 – Exemplo de erro na questão 20 (Questionário Inicial)

20. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

É todo objeto que está em três dimensões (comprimento, largura e altura).

Fonte: Dados da pesquisa.

A análise deste questionário sugere que, mesmo com uma avaliação positiva pela maioria dos calouros, sobre o estudo dos referidos conteúdos na Educação Básica, este não é um assunto de pleno conhecimento. Das quatro questões para determinar o valor das áreas (11, 12, 13 e 15), houve 50% de acertos no total, já para as três questões em que deveriam determinar volumes (16, 17 e 18), o resultado foi ainda pior, cerca de 43%.

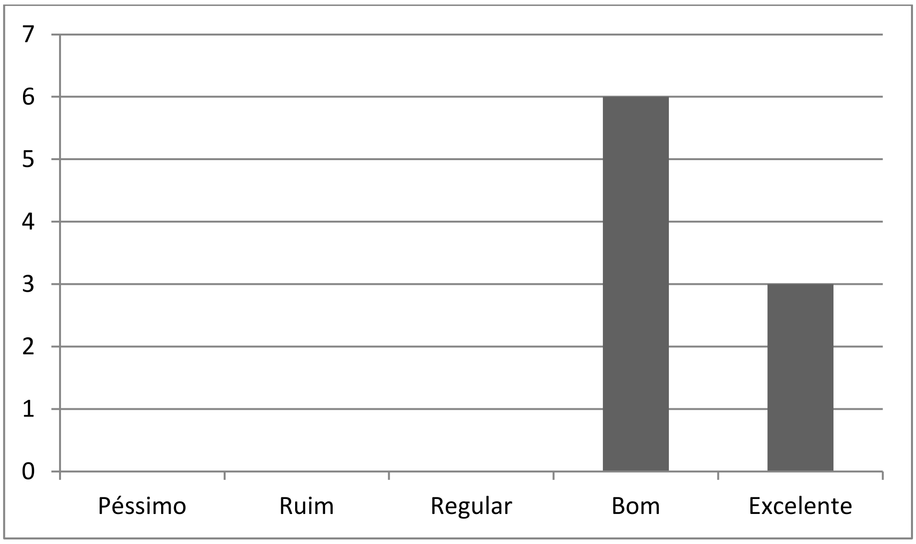
Além disso, as respostas prestadas pelos estudantes indicam que o ensino desses conteúdos ocorreu mediante uma aprendizagem mecânica, ou seja, os alunos foram, provavelmente, apresentados a fórmulas sem estabelecer uma interação com conhecimentos prévios, apenas memorizaram tais resultados. Essa conclusão é ratificada, sobretudo, pela justificativa dos alunos ao explicarem o porquê dos cálculos realizados nos exercícios de área: nenhum atribuiu raciocínio dedutivo às fórmulas utilizadas.

A partir da memorização dessas fórmulas, aplicaram-nas para encontrar resultados sem atribuir significados, pois, como se percebe ao final do questionário, mesmo com o acerto de algumas dessas questões, a maioria dos alunos não conseguia atribuir significado adequado aos números encontrados, uma vez que não tinham entendimento correto dos conceitos de área e volume.

7.2 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO FINAL

Após o desenvolvimento da sequência didática junto aos acadêmicos, foi oferecido o Questionário Final (Apêndice B), que culminou nesta análise para auxiliar na verificação do quanto os *applets* produzidos no GeoGebra contribuíram para tornar o cálculo de área e volume mais esclarecedor. Dos onze estudantes avaliados no primeiro questionário, nove participaram do segundo. A avaliação por parte dos alunos acerca do estudo dos conteúdos trabalhados durante a sequência didática pode ser observada no gráfico 5, que demonstra um retorno muito positivo sobre a execução do planejamento elaborado.

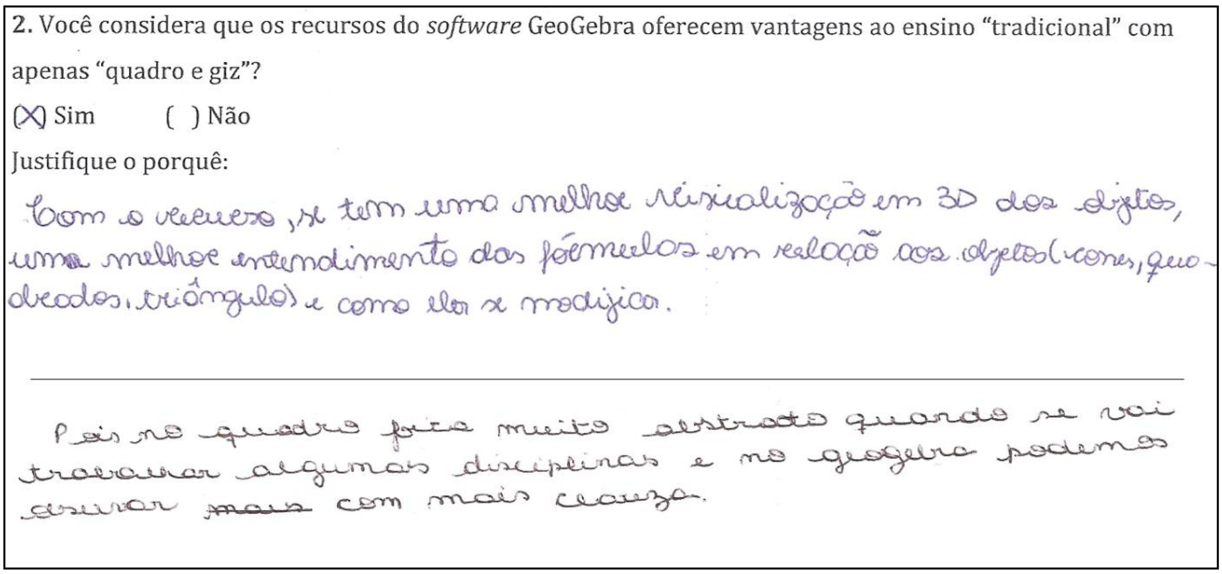
Gráfico 5 – Classificação sobre o estudo de áreas e volumes da sequência didática



Fonte: Dados da pesquisa.

Questionados se consideravam que os recursos do *software* GeoGebra ofereciam vantagens ao ensino tradicional, unanimemente responderam que sim. As principais virtudes citadas foram referentes à capacidade de movimentar figuras com a preservação de suas propriedades e a facilidade que o recurso visual traz para o entendimento das formas geométricas. Algumas dessas respostas são expostas na figura 90.

Figura 90 – Exemplos de resposta na questão 2 (Questionário Final)



2. Você considera que os recursos do *software* GeoGebra oferecem vantagens ao ensino “tradicional” com apenas “quadro e giz”?

(X) Sim ( ) Não

Justifique o porquê:

Com o recurso, se tem uma melhor visualização em 3D dos objetos, uma melhor entendimento das fórmulas em relação aos objetos (cones, quadrados, triângulos) e como eles se modificam.

Pois no quadro fica muito abstrato quando se vai trabalhar algumas disciplinas e no geogebra podemos ensinar ~~mais~~ com mais clareza.

Fonte: Dados da pesquisa.

Adiante, todos responderam que as justificativas e/ou convencimentos apontadas nos *applets* conseguiram minimizar dúvidas sobre o ensino de áreas e volumes deixadas na Educação Básica. Esse posicionamento foi justificado por conseguirem compreender o motivo de algumas das fórmulas referentes a esses conteúdos serem válidas por meio das construções no GeoGebra. Algumas dessas respostas são expostas na figura 91.

Figura 91 – Exemplos de resposta na questão 3 (Questionário Final)

3. As justificativas e/ou convencimentos sugeridas nos *applets* foram capazes de minimizar as lacunas deixadas acerca dos conteúdos de áreas e volumes durante a Educação Básica?

(X) Sim ( ) Não

Justifique o porquê:

Porque entendemos o "nascimento" da fórmula, assim não apenas decoramos as fórmulas de área e volume, mas aprendemos.

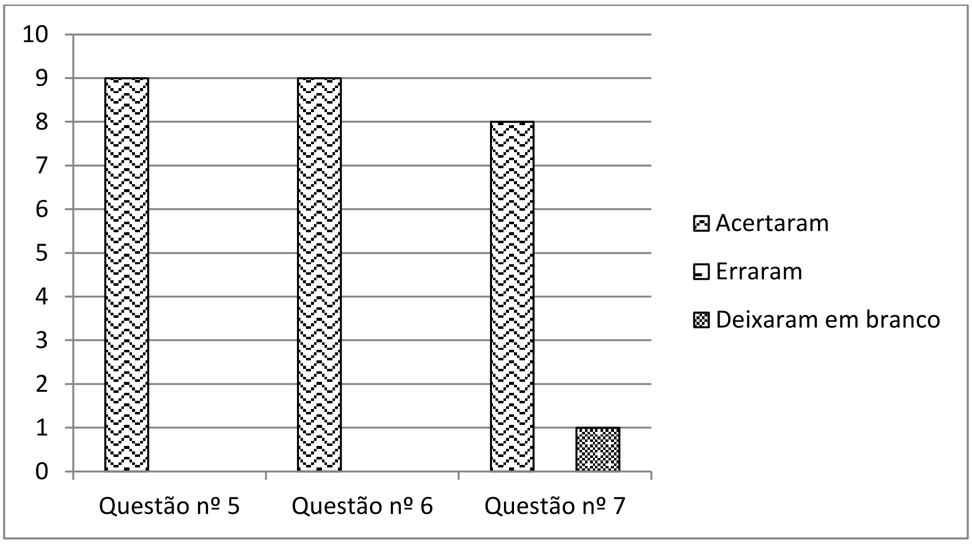
Pois na Educação Básica aprendemos apenas as fórmulas e não como elas "surgiram".

Fonte: Dados da pesquisa.

No questionamento se os acadêmicos já tinham participado de alguma atividade com relação a explicações de origens de fórmulas dos conteúdos deste estudo, apenas um aluno respondeu que sim. Entretanto, não especificou quais foram as justificativas e/ou convencimentos abordados.

As questões 5, 6 e 7 perguntavam, respectivamente, sobre a área do retângulo, triângulo e losango. Tais áreas poderiam ser obtidas de forma simples, pois as medidas das bases e da altura do retângulo e triângulo eram dadas, bem como as diagonais do losango. O desempenho dos estudantes foi excelente e pode ser conferido no gráfico 6.

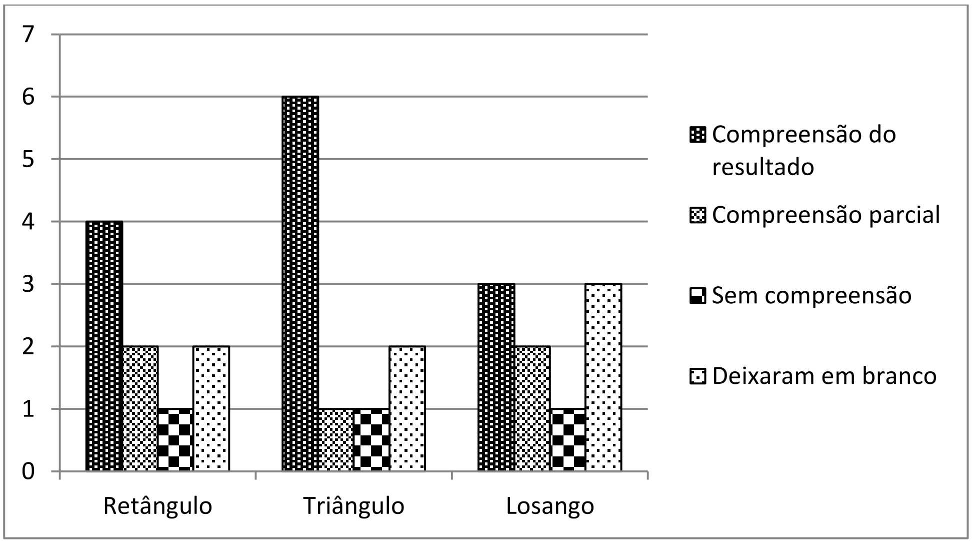
Gráfico 6 – Questões 5, 6 e 7 (Questionário Final)



Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 8 era o momento dos alunos justificarem os motivos dos cálculos realizados nos exercícios anteriores. Como os participantes não haviam trabalhado com deduções de fórmulas de áreas e volumes na Educação Básica, era esperado que encontrassem dificuldades em expressar-se. O desempenho dos participantes segue no gráfico 7.

Gráfico 7 – Justificativas para os cálculos de área (Questionário Final)



Fonte: Dados da pesquisa.

Diferentemente do primeiro questionário, a maior parte dos alunos buscou apresentar um raciocínio lógico a partir dos *applets* trabalhados. Algumas dessas justificativas são expostas na figura 92.

Figura 92 – Exemplos de resposta na questão 8 (Questionário Final)

8. Caso tenha respondido a(s) questão(ões) nº 5 ou 6 ou 7, justifique o motivo do cálculo realizado apresentar a resposta correta.

(base · altura pq se contarmos quantos "quadrados" há na base, veremos que ele se repetirá pelo nº de " que terá na altura)

(a) exemplo justificativa para o cálculo da questão 5

Se analisarmos o triângulo, veremos que ele tem a metade da área de um paralelogramo com mesma base e altura

(b) exemplo de justificativa para o cálculo da questão 6

7- Pois um losango é um retângulo (paralelogramo) e você tem que dividir por dois, pois a altura precisa ser dividida para dar certo.

(c) exemplo de justificativa para o cálculo da questão 7

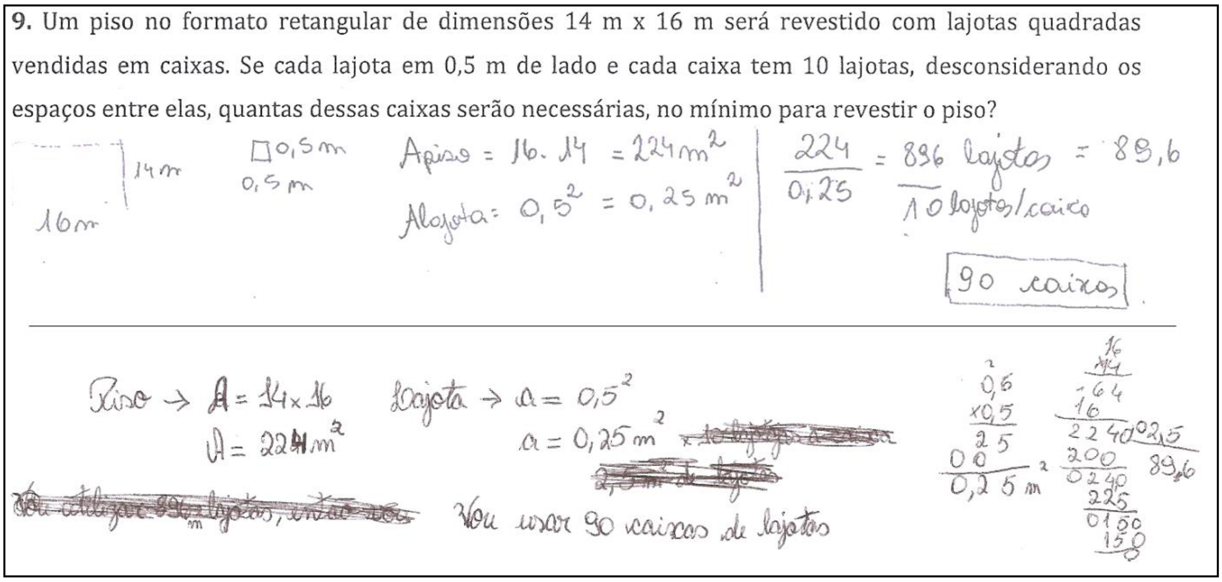
Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se observar que os alunos descreveram estratégias para a validade de seus cálculos, embora nem todas estivessem corretas e/ou bem especificadas. Na justificativa da área do losango, por exemplo, um aluno menciona que "você tem que dividir por dois, pois a altura tem que ser dividida para dar certo", mas não aponta o motivo. Talvez estivesse claro ao estudante a necessidade dessa operação, porque o losango pode ser decomposto em um paralelogramo de altura equivalente à metade de uma de suas diagonais. Porém, tal especificação ficou omissa.

Na questão seguinte, número 9, havia um exercício que relacionava duas superfícies: um piso retangular a ser revestido com lajotas quadradas vendidas em caixas com 10 unidades. Para resolvê-lo, os estudantes poderiam utilizar a mesma estratégia da questão número 15 do primeiro questionário, isto é, calcular quantas vezes a área menor cabe dentro da maior. Entretanto, como as lajotas eram vendidas a cada 10 unidades, ainda precisariam estabelecer uma relação a mais que no questionário anterior, para descobrir o número de caixas necessárias.

Dos nove participantes, sete responderam corretamente (90 caixas), um deixou em branco e outro respondeu de maneira incorreta. Dos acertos, é pertinente destacar que todos arredondaram, adequadamente, o resultado para 90, uma vez que os cálculos indicavam a necessidade mínima de 89,6 caixas, que é uma resposta inadequada para esse exercício, pois as lajotas não poderiam ser vendidas avulsas. Alguns exemplos de respostas corretas são expostos na figura 93.

Figura 93 – Exemplos de respostas corretas na questão 9 (Questionário Final)


9. Um piso no formato retangular de dimensões 14 m x 16 m será revestido com lajotas quadradas vendidas em caixas. Se cada lajota em 0,5 m de lado e cada caixa tem 10 lajotas, desconsiderando os espaços entre elas, quantas dessas caixas serão necessárias, no mínimo para revestir o piso?

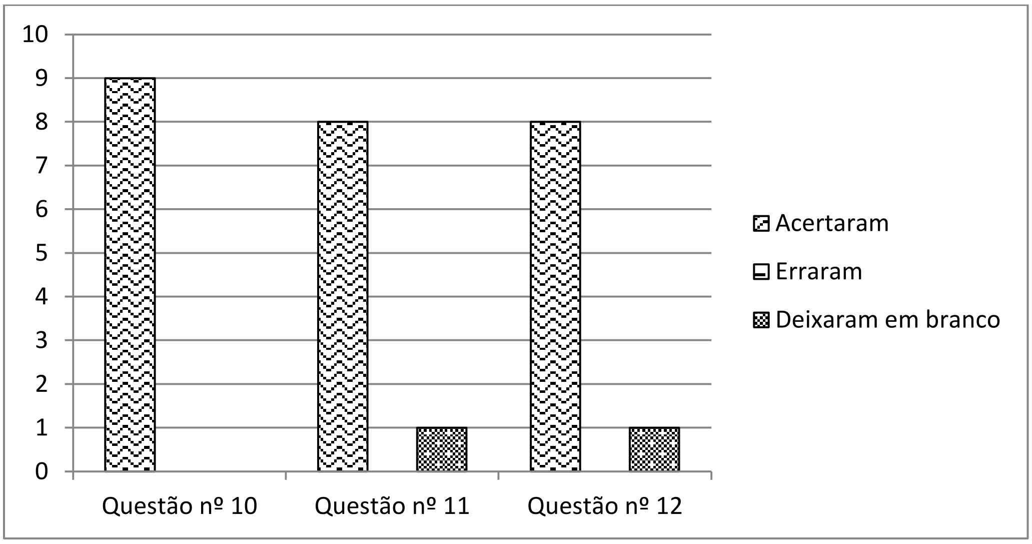
14m
16m
0,5m
0,5m
Apiso = 16 . 14 = 224 m²
Alajota: 0,5² = 0,25 m²
224 / 0,25 = 896 lajotas / 10 lajotas/caixa = 89,6
90 caixas

Piso → A = 14 x 16
A = 224 m²
Lajota → a = 0,5²
a = 0,25 m²
Vou usar 90 caixas de lajotas

Fonte: Dados da pesquisa.

As questões seguintes, 10, 11 e 12, perguntavam os volumes de um bloco retangular, um cilindro e um cone, respectivamente. O cilindro e o cone não tinham as suas bases especificadas. Na questão 10, o exercício fornecia as três dimensões do sólido, já as demais informavam que suas bases e alturas eram equivalentes a do bloco retangular da questão anterior. O desempenho dos estudantes pode ser acompanhado no gráfico 8.

Gráfico 8 – Questões 10, 11 e 12 (Questionário Final)

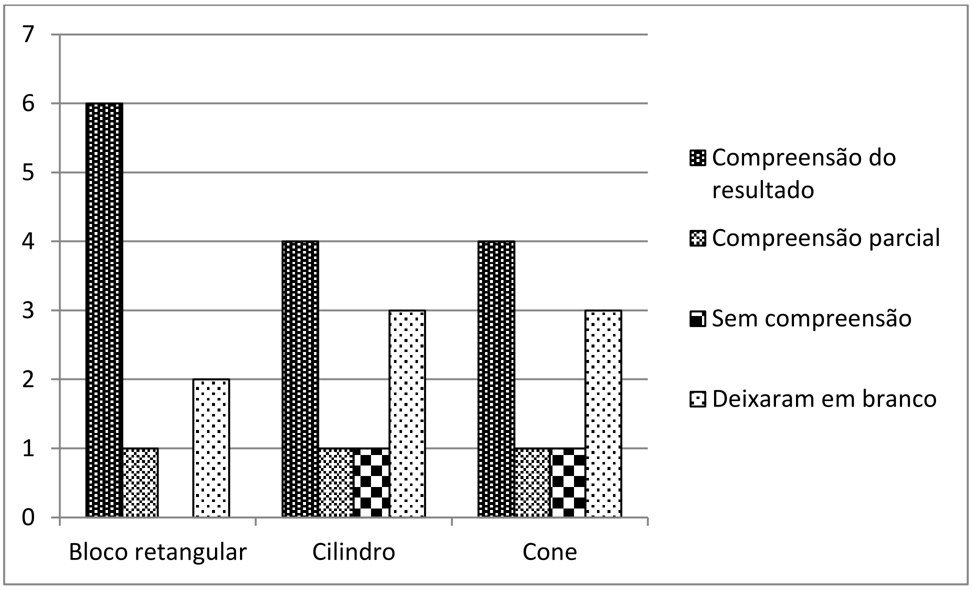


Fonte: Dados da pesquisa.

Além de todos determinarem corretamente o volume do bloco retangular, a maioria soube determinar os volumes do cilindro e do cone, mesmo sem o exercício explicitar o formato de suas bases.

A seguir, na questão 13, deveriam justificar os motivos de os cálculos realizados nos exercícios de volume apresentarem as respostas corretas. Novamente era aguardado dificuldade por parte dos alunos em apresentar essas razões. O gráfico 9 exibe os seus desempenhos.

Gráfico 9 – Justificativas para os cálculos de volume (Questionário Final)



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como ocorreu durante as justificativas dos cálculos de área, os estudantes faziam referências às deduções trabalhadas nos *applets* da sequência didática de volumes. Algumas dessas respostas são exibidas na figura 94.

Figura 94 – Exemplos de resposta na questão 13 (Questionário Final)

13. Caso tenha respondido a(s) questão(ões) nº 10 ou 11 ou 12, justifique o motivo do cálculo realizado apresentar a resposta correta.

10- base x altura x largura.
O nº de quadradinhos de cada carreira, multiplicado por outro, resultará na área. Multiplicando a área pelo nº de quadradinhos da carreira que sobrou, sempre resultará no volume pois será o nº de vezes que os cubinhos vão se repetir.

(a) exemplo de justificativa para o cálculo da questão 10

Já no caso do cone, ele tem a terça parte da capacidade de de um bloco com mesma área, por isso dividimos por 3.

(b) exemplo de justificativa para o cálculo da questão 11

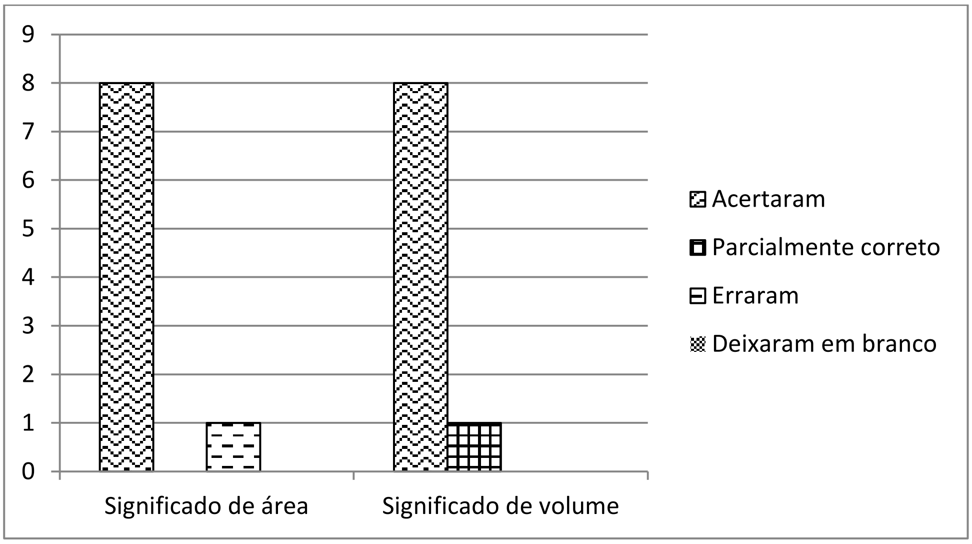
O cálculo foi o produto das 3 dimensões na primeira, e na seguinte foi a aplicação do princípio de cavalieri

(c) exemplo de justificativa para o cálculo da questão 12

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalizando o questionário, os calouros precisaram responder, assim como no Questionário Inicial, os significados de área e volume. O resultado foi muito bom, como demonstra o gráfico 10.

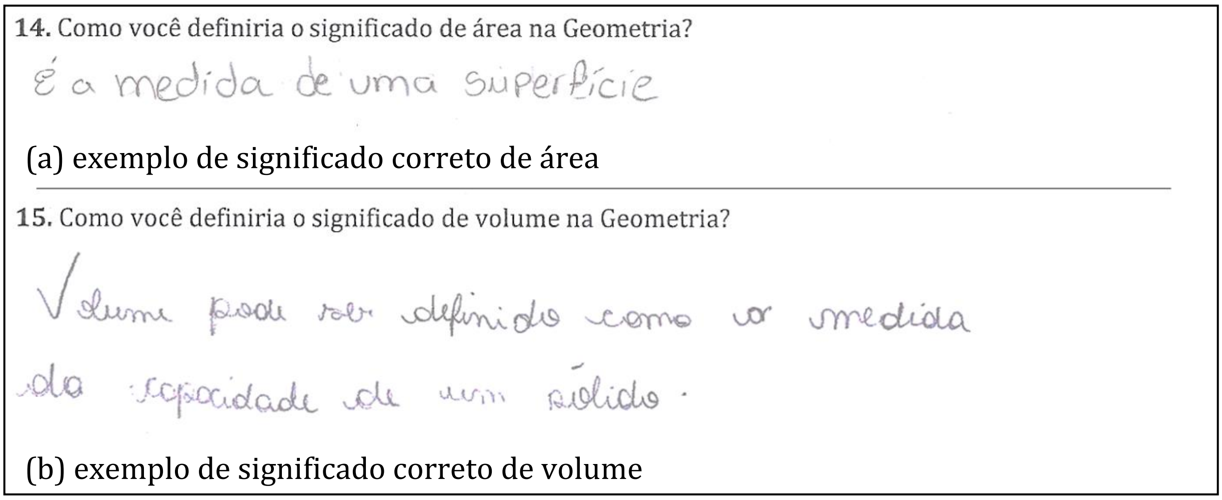
Gráfico 10 – Significado de área e volume (Questionário Final)



Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas corretas dos calouros convergiram para um entendimento de área e volume como uma medida, área de superfície e volume de espaço ocupado por um sólido. Na figura 95, são apresentados exemplos de respostas corretas prestadas.

Figura 95 – Exemplos de resposta correta nas questões 14 e 15 (Questionário Final)


14. Como você definiria o significado de área na Geometria?

É a medida de uma superfície

(a) exemplo de significado correto de área

15. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

Volume pode ser definido como a medida da capacidade de um sólido.

(b) exemplo de significado correto de volume

Fonte: Dados da pesquisa.

O erro cometido no significado de área não ocorreu por falta de relação com superfícies, mas por não apresentar o conceito de medida (figura 96a). Já o acerto parcial sobre o significado de volume sucedeu pelo argumento de o estudante validar somente o bloco retangular como sólido geométrico (figura 96b).

Figura 96 – Resposta incorreta na definição de área (a) e parcialmente correta na definição de volume (b)

14. Como você definiria o significado de área na Geometria?

A Área sempre será calculada com a base x altura.
Isso pq se multiplicarmos o número de "quadradinhos" de qualquer carreira, com outra carreira oposta, resultará na área.
A área é a "pacote do presente" ou a "casca do ovo", é o que está por fora.

(a) definição incorreta de área

15. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

Volume é a medida do tamanho que um objeto ocupa no espaço, ou seja, a multiplicação de suas dimensões.

(b) definição parcialmente correta de volume

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desses dados, pôde-se verificar que o desenvolvimento da sequência didática colaborou significativamente para os seus aprendizados. Tanto para as quatro questões de áreas (5, 6, 7 e 9) quanto para as três de volumes (10, 11 e 12), houve cerca de 92% de acertos, resultado muito superior ao do Questionário Inicial.

Ao justificarem os cálculos utilizados na resolução dos exercícios, os alunos não indicaram que as operações realizadas eram simples resultados de fórmulas memorizadas. Parte dos calouros apresentou os cálculos como resultado de um raciocínio lógico matemático.

Pôde-se perceber, também, que, diferentemente de antes da sequência didática, os alunos passaram a dar significado aos resultados obtidos, pois quase a totalidade dos alunos auferiu um adequado significado de área e de volume. Assim, a interpretação de exercícios relativos a esses conteúdos tornar-se-á mais clara e objetiva.

8 FENDAS CONCLUSIVAS

O trabalho desenvolvido nesta pesquisa objetivou analisar o quanto *applets* construídos no GeoGebra podem contribuir para tornar o cálculo de área e volume mais esclarecedor, a partir da interação entre estudantes, calouros do curso de Matemática, e tais construções. Para isso, foi elaborada uma sequência didática, que combinou a teoria da aprendizagem significativa e da carga cognitiva.

Há uma enormidade de *applets* produzidos no GeoGebra e disponibilizados em sua *homepage*. Dentre estes, existem muitos que são produzidos exemplarmente, mas que estão envoltos de explicações matemáticas, por vezes redundantes, ou que exibem uma demonstração absoluta, sem permitir momentos de reflexão para que o estudante estabeleça interação com seus conhecimentos prévios ou, pelo menos, que teste suas conjeturas, ou seja, que tenha uma aprendizagem significativa.

O conhecimento das teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva abre um novo horizonte para quem se aventurar em tais construções. Seguindo os fundamentos dessas teorias, realizaram-se produções que relacionam novas aprendizagens, a partir daquelas que os alunos eram apresentados em momentos anteriores, e abordou-se o estudo de determinados conteúdos, partindo, quando pertinente, da aprendizagem superordenada, ou seja, dos casos gerais aos específicos. Ademais, teve-se cautela com a forma como as informações foram dispostas aos participantes, tanto na ordem quanto na disposição na tela do computador, visto a necessidade de exibi-las com clareza, principalmente quando estavam combinadas a figuras; objetivando, dessa maneira, potencializar as aprendizagens.

Desde o primeiro encontro com o grupo de estudantes participantes da pesquisa, através da verificação do Questionário Inicial e pelas respostas nas primeiras questões da sequência didática, ficou claro que, durante a sua formação básica, o ensino de áreas e volumes ocorreu por meio de uma aprendizagem mecânica, mediante memorização de fórmulas. Esse fato colaborou para a falta de convicção quando pedido aos calouros que mencionassem as fórmulas estudadas. Os estudantes preocupavam-se muito mais em recordá-las do que em organizar ideias que resultassem nas sentenças matemáticas.

Em contrapartida, durante o desenvolvimento das atividades que possibilitavam a compreensão das justificativas dessas fórmulas, em diversos momentos, os alunos comentavam que compreender o motivo da validade das sentenças era, sobretudo, importante e necessário, pois, usando o raciocínio dedutivo, poderiam utilizá-las em outros momentos, sem a necessidade de memorizá-las. Os relatos prestados nos encontros, assim como no diário do pesquisador, expõe o quanto os estudantes sentiam prazer e conforto ao conhecerem, como alguns mencionavam, a "origem das fórmulas" por meio da interação com os *applets*.

As questões presentes na sequência didática foram o primeiro estímulo que muitos receberam sobre simples noções de demonstrações em Geometria, e os resultados obtidos foram bem profícuos. Durante as discussões em grupo, os estudantes trocavam ideias entre si e eles mesmos justificavam e determinavam as fórmulas pautadas no planejamento.

As vantagens constatadas ao utilizar as TIC foram muitas. Como observado em Awila (2015), Kenski (2012), Lagarto (2013), Richit et al. (2015) e outros, o uso das tecnologias digitais despertou um interesse natural nos estudantes por ainda ser uma novidade, algo fora da rotina das práticas didáticas majoritariamente utilizadas, pois, como mencionam Fernandes e Santomauro (2011), o modelo de aula expositiva tradicional permanece predominante. Os próprios estudantes, que estavam rodeados de tecnologias, entre elas, o *smartphone*, poderiam não imaginar como uma aula de Matemática é possível de ser planejada com o uso de computadores.

O uso dos *applets* para o estudo da Geometria trouxe benefícios difíceis de serem alcançados com outras dinâmicas. Por exemplo, na produção de figuras por meio de desenhos, recortes e colagens de papéis, existe o ônus em destinar parte do tempo da aula para essa organização, situação que não ocorre quando o professor utiliza o GeoGebra. Obviamente, no planejamento da pesquisa, muitas horas foram dedicadas para arquitetar os *applets*, mas existe a possibilidade de pesquisar construções disponíveis e utilizá-las do modo que entender ser mais vantajoso.

Assim, estima-se o cumprimento dos objetivos da pesquisa com um retorno muito positivo sobre a forma que os *applets* podem contribuir para elucidar os cálculos necessários para determinar as principais áreas e volumes trabalhadas durante a Educação Básica. Os alunos surpreenderam-se com a simplicidade com que as produções auxiliavam nas justificativas, enquanto outras os convenciam de que determinados cálculos são necessários para expressar tais sentenças matemáticas.

Desta pesquisa, fica o sentimento de ter-se semeado, nos participantes da pesquisa, uma visão reflexiva e crítica, na perspectiva de que uma fórmula é o produto final de um raciocínio lógico matemático. Todas podem ser justificadas, e a busca por compreender os passos necessários até chegar ao resultado final pode ser divertido, prazeroso e cercado de descobertas.

A inserção das tecnologias digitais como alternativa didática é um caminho bastante fértil para pesquisas em educação matemática e o *software* GeoGebra associado as teorias da aprendizagem significativa e da carga cognitiva mostraram-se poderosos aliados para promover novos conhecimentos. Utilizar essas observações para uma próxima pesquisa que vise à elaboração de uma sequência didática capaz de permitir que estudantes tenham maior controle com as palavras e clareza em suas argumentações para justificar determinados resultados matemáticos, respeitando seu nível de escolaridade, parece um desafio instigante e motivador.

REFERÊNCIAS

ATKINSON, R. C.; SHIFFRIN, R. M. Human memory: a proposed system and its control processes. In: SPENCE, K. W.; SPENCE, J. T. (Eds.). **The psychology of learning and motivation**: advances in research and theory. New York: Academic Press, 1968.

AWILA, H. F. de. **Uma alternativa didática para o estudo de prismas no ensino médio com applets construídos no GeoGebra**. 2015. 72 f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

______. **Applets do GeoGebra**. Brasil. 2017. Disponível em: <http://geogebra.org/hakel>. Acesso em: 01 jan. 2017.

BITTAR, M. A. A incorporação de um software em uma sala de matemática: uma análise segundo a abordagem instrumental. In: JAHN, A. P.; ALLEVANT, N. S. G. **Tecnologias e educação matemática**: ensino, aprendizagem e formação de professores. Recife: SBEM, 2010.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC / SEF, 1997.

______. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998a.

______. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC / SEF, 1998b.

BULEGON, A. M.; BISOGNIN, V. Iniciação Científica na Educação Básica com uso das Tecnologias de Informação e Comunicação. In: CLIOA, IX, 2015, Porto Alegre/RS. **Congresso Latino-Americano Interdisciplinar do Adolescente**. Porto Alegre/RS: Editora da UFRGS, 2015. v. 1. p. 1-10.

CHIELE, J. N. **A geometria no ensino médio**: um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume. 2007. 133p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2007.

DANTAS, S. C. **O que é o GeoGebra?**. [s.l.]. 2015. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/oqueeogeogebra.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2016.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 2. p. 216-225.

DIAS, C. C. et al. **Geometria espacial**: módulo II. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

ERDRICH, N. **Applets do GeoGebra**. França. 2014. Disponível em: <https://geogebra.org/m/ktb5ne3a>. Acesso em: 30 mar. 2017.

FERNANDES, E.; SANTOMAURO, B. Aula expositiva: o professor no centro das atenções. **Nova escola**, Rio de Janeiro, n. 246, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

FOGAÇA, L. dos S. **Registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruências de figuras geométricas planas**. 2015. 123 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

FONTOURA, L. R. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 2016. 143 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2016.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2001.

______. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez. 2015.

______. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, VII, 1996, Belo Horizonte/MG. **Anais**... Belo Horizonte/MG: Pontifícia Universidade Católica do RS, 1996. p. 1-14.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação do professor de matemática. Porto Alegre: Evangraf: 2012. p. 11-36.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 2, p. 221-231.

KAMPHORST, C. H. et al. Oficinas pedagógicas: vivências propiciadas pelo projeto PIBID. In: RODRIGUES, R. V. (org.). **O PIBID na URI II**: atividades desenvolvidas em 2012. Frederico Westphalen-RS: Frederico Westph, 2013. p. 153-169.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas: Editora Papirus, 2012.

LAGARTO, J. R. Inovação, TIC e sala de aula. In: CAVALHEIRI, A.; ENGERROFF, S. N.; SILVA, J. da C. S. (Org.). **As novas tecnologias e os desafios para uma educação humanizadora**. 1. ed. Santa Maria: Biblos, 2013. p. 133-158.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. 249 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2009.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2, p. 173-178.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 281-284.

LOPES, M. M. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, 2011, Recife/PE. **Anais**... Recife/PE: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 1-12.

LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; LOPES, S. V. de A. **Metodologia do ensino de matemática**. 20. ed. Curitiba: Ibpex, 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A educação matemática em revista**. SBM. Rio de Janeiro, n. 4, p. 3-13, set./1995.

MACHADO, L. V. **Princípio de Cavalieri**: PAPMEM. 2016. Disponível em: <http://youtube.com/watch?v=pFqWhIfNwfY>. Acesso em: 5 fev. 2017.

MANETTA, M. A. **Geometria dinâmica**. [s.l.]. 2011. Disponível em: <http://dinamatica.com.br>. Acesso em: 05 out. 2016.

MENTRARD, D. **Mathematiques et sciences physiques**. França. 2011. Disponível em: <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/>. Acesso em: 01 mai. 2016.

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 217-248.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadoras com tecnologias. In: ______. **Informática na educação**: teoria & aprendizagem, v. 3, n. 1. Porto Alegre: UFRGS, 2000.

MOREIRA, M. A. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências**: a teoria da aprendizagem significativa. Porto Alegre, 2009a.

______. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências**: comportamentalismo, construtivismo, humanismo. Porto Alegre, 2009b. p. 31-36.

OLIVEIRA, E. S. E. Matemática e informática: o geogebra como recurso de aprendizagem nas séries iniciais. **Revista acadêmica eletrônica de Sumarê**, 2006. Disponível em: <http://sumare.edu.br/Arquivos/1/raes/06/raesed06_artigo11.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2016

PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M. F. da. **Geometria espacial**. Caderno didático. Santa Maria: Gráfica da UFSM, 2003.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. da. Sequência didática na matemática. **Revista de educação do IDEAU**, Getúlio Vargas, v. 8, n. 17, p. 1-14, jan./jun. 2013.

PICADO, J. **Algumas classes especiais de superfícies**. Coimbra, 2003. Disponível em: <http://mat.uc.pt/~picado/geomdif/0405/Apontamentos/sII3.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2017.

REIS, M. de P. T. **Área e volume de prisma e pirâmide**. 2013. 139 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

RICHIT, A. et al. Tecnologias Digitais na abordagem de conceitos de Matemática: uma experiência com alunos do Ensino Médio. In: Simpósio internacional de informática educativa, XVII, 2015, Setubal/Portugal. **Anais**... 2015. v. 1. p. 184-192.

ROCHA, F. A. M. da. **Geometria no ensino básico**: aplicações práticas como ferramenta de apoio no ensino da matemática. 2015. 69 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

SANDHOLTZ, J. H.; RINGSTAFF, C.; DWYER, D. C. **Ensinando com a tecnologia**: criando salas de aula centradas nos alunos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SANTOS, L. M. A.; TAROUCO, L. M. R. A importância do estudo da teoria da carga cognitiva em uma educação tecnológica. **Revista novas tecnologias na educação**, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 1-9, jul. 2007.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar**: matemática. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 3, p. 113-122.

SOUZA, N. P. C. de. **Teoria da carga cognitiva**: origem, desenvolvimento e diretrizes aplicáveis ao processo ensino-aprendizagem. 2010. 173p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2010.

SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, A.; CALIXTO, R. A. GeoGebra 3D: uma ferramenta para estudo de volumes no ensino médio. **Revista da Universidade Vale do Rio Verde**, Três Corações, v. 12, n. 1, p. 755-764, jan./jul. 2014.

SWELLER, J.; van MERRIËNBOER, J. J. G. Cognitive load theory and complex earning: recent developments and future directions. **Educational psychology review**, New York, v. 17, n. 2, p. 147-177, June 2005.

VALENTE, J. A. Integração currículo e tecnologias digitais de informação e comunicação: a passagem do currículo da era lápis e papel para o currículo da era digital. In: CAVALHEIRI, A.; ENGERROFF, S. N.; SILVA, J. da C. S. (org.). **As novas tecnologias e os desafios para uma educação humanizadora**. 1. ed. Santa Maria: Biblos, 2013. p. 113-132.

VENTURI, J. J. **Desenvolver o raciocínio lógico é imprescindível**. São José dos Campos, 2012. Disponível em: <http://planetaeducacao.com.br/portal/artigo.asp?artigo=2336>. Acesso em: 14 nov. 2016.

VILLAS BOAS, F. et al. À caminho da compreensão matemática. **Educere et educare revista de educação**, Cascavel, v. 1, n. 1, p. 277-282, jan./jun. 2006.

WACHILISKI, M. **Didática e avaliação**: algumas perspectivas da educação matemática. Curitiba: Ibpex, 2007.

WAGNER, E. **Volumes:** PAPMEM. 2012. Disponível em: <http://youtube.com/watch?v=eWLzuMeTC_U>. Acesso em: 5 fev. 2017.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa "Uma Análise da Contribuição do GeoGebra como Recurso Interativo para o Estudo de Áreas e Volumes". Tem como objetivo avaliar o perfil dos possíveis participantes e seus conhecimentos prévios.

1. Em que cidade/UF concluiu o Ensino Fundamental?

2. Em que cidade/UF concluiu o Ensino Médio?

3. Ano de ingresso no curso de Matemática:

4. Semestre de ingresso no curso:

5. Cursa licenciatura ou bacharelado?

6. Já realizou na graduação alguma disciplina de geometria plana e/ou espacial?

( ) Sim ( ) Não

6.1 Caso negativo, já realizou algum estudo de geometria plana e/ou espacial? (Pode marcar mais de uma opção se necessário)

( ) Já realizei projeto a nível superior;

( ) Estudei por interesse próprio;

( ) Ainda não realizei.

7. Como classificaria o estudo de áreas e volumes que realizou durante a Educação Básica?

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

8. Seu professor de Matemática, durante a Educação Básica, já utilizou algum *software* durante as aulas de geometria?

( ) Sim ( ) Não

8.1 Caso afirmativo:

8.1.1 Qual era o software?

8.1.2 Considera que este recurso ofereceu vantagens em relação ao ensino "tradicional" com apenas "quadro e giz"?

( ) Sim ( ) Não

Justifique o porquê:

9. Já utilizou algum software matemático para estudo de áreas e/ou volumes?

( ) Sim ( ) Não

9.1 Caso afirmativo, qual era o software?

10. Qual é a área de um quadrado de lado 12 cm?

11. Quanto mede a área de um triângulo de base 13 e altura 17?

12. Um trapézio de bases medindo 5m e 10m com altura de 3m tem quanto de área?

13. Caso tenha respondido as questões n.º 10 ou 11 ou 12, justifique o motivo de o cálculo realizado apresentar a resposta correta.

14. Uma parede no formato retangular de dimensões 5m x 30m será pintada com latas de tinta com rendimento unitário aproximado de $100m^2$. Quantas dessas latas, aproximadamente, serão utilizadas, no mínimo, para pintar essa parede?

15. Qual é o volume de um cubo de largura 12,1?

16. Um paralelepípedo retângulo tem as seguintes dimensões: 4m, 5m e 6,4m. Quanto mede o seu volume?

17. Uma caixa de papelão no formato de bloco retangular de dimensões 1m, 1,2m e 1,6m será utilizada para armazenar caixas menores no formato de cubo. Se cada cubo tem 0,2m de largura, a caixa de papelão armazenará, no máximo, quantas caixas menores?

18. Como você definiria o significado de área na Geometria?

19. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO FINAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa “Uma Análise da Contribuição do GeoGebra como Recurso Interativo para o Estudo de Áreas e Volumes”. Tem como objetivo analisar a contribuição de *applets* do GeoGebra como recurso para o estudo de áreas e volumes.

1. Como você classifica o estudo de áreas e volumes em que participou neste minicurso?
( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

2. Você considera que os recursos do *software* GeoGebra oferecem vantagens ao ensino “tradicional” com apenas “quadro e giz”?
( ) Sim ( ) Não
Justifique o porquê:

3. As justificativas e/ou convencimentos sugeridas nos *applets* foram capazes de minimizar as lacunas deixadas acerca dos conteúdos de áreas e volumes durante a Educação Básica?
( ) Sim ( ) Não
Justifique o porquê:

4. Você já tinha trabalhado como aluno, em alguma instituição de ensino, justificativas e/ou convencimentos de sentenças matemáticas que determinam áreas e/ou volumes?
( ) Sim ( ) Não

4.1 Caso afirmativo, foi em qual instituição?

4.2 Quais foram as justificativas e/ou convencimentos?

5. Quanto mede a área de um retângulo de base 15 cm e altura 4 cm?

6. Quanto mede a área de um triângulo de base 20 m e altura 7 m?

7. Quanto mede a área de um losango cujas diagonais medem 10 dm e 5 dm?

8. Caso tenha respondido as questões n.º 5 ou 6 ou 7, justifique o motivo do cálculo realizado apresentar a resposta correta.

9. Um piso no formato retangular de dimensões 14 m x 16 m será revestido com lajotas quadradas vendidas em caixas. Se cada lajota em 0,5 m de lado e cada caixa tem 10 lajotas, desconsiderando os espaços entre elas, quantas dessas caixas serão necessárias, no mínimo, para revestir o piso?

10. Um bloco retangular tem 5 m de comprimento, 6 m de largura e 8 m de altura. Quanto mede o seu volume?

11. Um cilindro qualquer tem a mesma área da base e altura que o bloco retangular da **questão n.º 10**; quanto mede o seu volume?

12. Um cone qualquer tem a mesma área da base e altura que o bloco retangular da **questão n.º 10**; quanto mede o seu volume?

13. Caso tenha respondido as questões n.º 10 ou 11 ou 12, justifique o motivo do cálculo realizado apresentar a resposta correta.

14. Como você definiria o significado de área na Geometria?

15. Como você definiria o significado de volume na Geometria?

APÊNDICE C – Termo de Confidencialidade

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: **Uma Análise da Contribuição do GeoGebra como Recurso Interativo para o Estudo de Áreas e Volumes**

Pesquisadores responsáveis: Ricardo Fajardo e Hakel Fernandes de Awila.

Instituição: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) / Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

Telefone para contato: (xx) xxxxxxxxx e (xx) xxxxxxxxx

Local da coleta de dados: UFSM / Curso de Matemática – Licenciatura e Bacharelado

Os responsáveis pelo presente projeto se comprometem a preservar a confidencialidade dos dados dos participantes envolvidos no trabalho, que serão coletados por meio de questionários e possíveis encontros a combinar, no campus da UFSM.

Informam ainda, que estas informações serão utilizadas, única e exclusivamente, no decorrer da execução do presente projeto e que as mesmas somente serão divulgadas de forma anônima, bem como serão mantidas no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, 1000, prédio xx, Departamento de Matemática, sala xxxx, 97105-970 - Santa Maria - RS. Por um período de cinco anos, sob a responsabilidade de Ricardo Fajardo. Após este período os dados serão destruídos.

Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UFSM em 03/08/2016, com o número de registro CAAE 57047216.6.0000.5346.

Santa Maria,..........de março de 2017.

....

Assinatura do pesquisador responsável

APÊNDICE D – TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do projeto: **Uma Análise da Contribuição do GeoGebra como Recurso Interativo para o Estudo de Áreas e Volumes**

Pesquisadores responsáveis: Ricardo Fajardo e Hakel Fernandes de Awila
Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) / Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física / Departamento de Matemática
Telefones: (xx) xxxxxxxxx (Ricardo Fajardo) e (xx) xxxxxxxxx (Hakel Awila).
E-mails: xxxxxxxxxxxxxxx (Ricardo Fajardo) e xxxxxxxxxxxxxxx (Hakel Awila)
Endereço: Av. Roraima, 1000, prédio xx, sala xxxx, 97105-970 - Santa Maria - RS.
Local da coleta de dados: UFSM

Eu, Hakel Fernandes de Awila, responsável pela pesquisa "**Uma Análise da Contribuição do GeoGebra como Recurso Interativo para o Estudo de Áreas e Volumes**", sob orientação do prof. Dr. Ricardo Fajardo, convidamos você a participar como voluntário deste nosso estudo.

Esta pesquisa pretende investigar as contribuições que o uso de *applets*, como recurso interativo, pode trazer para tornar o estudo de áreas e volumes de figuras geométricas, mais claro e coeso. Serão construídos, por nós, *applets* com o *software* GeoGebra na tentativa de desenvolver recursos tecnológicos que sejam facilitadores para a interiorização/assimilação desses tópicos geométricos. Acreditamos na relevância desse trabalho porque esse conteúdo muitas vezes não recebe o devido aprofundamento em sala de aula. Alunos são apresentados a fórmulas "prontas" que apontam resultados de forma genérica. Essa conduta pode enfraquecer o raciocínio lógico e desencorajá-los a buscarem justificativas matemáticas em outros momentos. Uma alternativa para buscar tais fundamentos pode ocorrer com a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), por meio de recursos que permitam uma interatividade entre a construção geométrica e o estudante. Fomentando por intermédio de construções um caminho para compreender algumas fórmulas matemáticas. Para sua realização deste trabalho será feito o seguinte:

Alunos calouros de 2017 do curso de Matemática da UFSM serão convidados para participar de reuniões onde serão discutidas as justificativas de como se concebem as “fórmulas” do cálculo de áreas e volumes de algumas figuras geométricas na Educação Básica. Os universitários responderão a um questionário com a finalidade de analisar os conhecimentos prévios, maiores dificuldades e acertos que pontuarão os assuntos de encontros semanais na UFSM, em horário pré-estabelecido entre os envolvidos.

Durante as reuniões, a partir de questionamentos provenientes das discussões, serão apresentados *applets* que propõe com base na interatividade, uma alternativa lúdica para justificar os padrões que convergem nas populares “fórmulas”. Será realizado, portanto, uma pesquisa de campo através de uma pesquisa-ação, pois pretendo, a partir de uma inserção no ambiente a ser estudado, construir um diário do pesquisador no mesmo modelo do diário de professor, conforme Lytle e Cochran-Smith (1999 apud Fiorentini e Lorenzato, 2012, p. 73), a justificativa pela alteração do nome deve-se ao fato do papel de pesquisador durante a realização do projeto para verificar a validade, benefícios e contribuições das atividades desenvolvidas.

Pode haver riscos dos participantes sem conhecimentos prévios se sentirem constrangidos ou angustiados em não obterem as respostas corretas nos exercícios. No entanto, todos serão incentivados e auxiliados, se necessário, para lograrem êxito nas atividades.

Espera-se que ao final das discussões propostas, a utilização de *applets* contribua para que os participantes saibam as justificativas de algumas “fórmulas” de áreas e volumes de figuras geométricas e que tenham maior habilidade e domínio desse conteúdo quando estiverem atuando como professores de Matemática. Desejo também, dependendo do interesse dos participantes, oferecer uma oficina para a elaboração de outras construções no GeoGebra que possam tornar mais simples o entendimento do referido conteúdo para alunos da Educação Básica.

Durante todo o período da pesquisa você terá a possibilidade de tirar qualquer dúvida ou pedir qualquer outro esclarecimento. Para isso, fique à vontade para entrar em contato conosco ou com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

Em caso de algum problema relacionado com a pesquisa, você terá direito à assistência gratuita que será prestada por um dos pesquisadores para procurar minimizar eventuais dúvidas referentes a carências de conhecimentos prévios.

Você tem garantida a possibilidade de não aceitar participar ou de retirar sua permissão a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo pela sua decisão.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e poderão ser divulgadas, apenas, em eventos ou publicações, sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação. Também serão utilizadas imagens.

Autorização

Eu, ..., após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com os pesquisadores responsáveis, para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro para que minha participação é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

....

Assinatura do voluntário

....

Assinatura do responsável pela obtenção do TCLE

Santa Maria,..........de março de 2017.