

Francine Mirele Numer

**CÁLCULO DE VOLUME DE MONUMENTOS A PARTIR DE INTEGRAIS
DEFINIDAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO COM APOIO DO SOFTWARE
GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^a Doutora Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS.
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da
Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

NUMER, FRANCINE MIRELE

Cálculo de volume de monumentos a partir de integrais
definidas para alunos do Ensino Médio com o apoio do
software GeoGebra / Francine Mirele Numer.- 2017.
169 p.; 30 cm

Orientadora: Doutora Claudia Candida Pansonato
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2017

1. Integrais Definidas 2. Geometria Espacial 3.
GeoGebra 4. Resolução de Problemas 5. Modelagem
Matemática I. Pansonato, Doutora Claudia Candida II.
Título.

Francine Mirele Numer

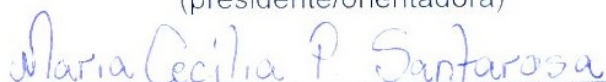
**CÁLCULO DE VOLUME DE MONUMENTOS A PARTIR DE INTEGRAIS
DEFINIDAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO COM APOIO DO SOFTWARE
GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 23 de agosto de 2017:



Claudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)
(presidente/orientadora)



Maria Cecilia Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)



Alvaro Alves Sant'Ana, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, RS
2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu conseguisse obter este título. Em especial:

- à minha família e amigos que entenderam minha ausência, me apoiaram quando precisei, acreditaram em mim e me incentivaram durante todo o processo. Com certeza sem vocês nada disso teria sentido;

- aos meus companheiros de viagem, de aula, de jantares, risadas, estudos e momentos de desespero: Bruno, "meus" Diegos e Fabi. Esta última, um presente que a turma de 2014 me deu para que eu não fosse a única menina no curso todo. Vocês tornaram minhas viagens mais divertidas e emocionantes e minha caminhada possível;

- à minha orientadora pelas dicas, correções, cobranças e ajuda;

- aos professores do PROFMAT da UFSM pela dedicação, apoio e estímulo.

Por acreditarem no programa e mais ainda em nós;

- aos meus alunos por me mostrarem que um novo amanhã é possível, pelo carinho que dedicaram ao realizar as atividades e por me incentivarem diariamente a ser uma professora e uma pessoa melhor;

- à Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha por permitir que eu pudesse realizar meu trabalho e todas as diferentes atividades que planejo;

- ao IMPA, SBM e CAPES pelo apoio financeiro.

**"Uma mente que se abre a uma nova ideia jamais
volta ao seu tamanho original."**

- Albert Einstein -

RESUMO

CÁLCULO DE VOLUME DE MONUMENTOS A PARTIR DE INTEGRAIS DEFINIDAS PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO COM APOIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

AUTORA: Francine Mirele Numer
ORIENTADORA: Claudia Candida Pansonato

A Geometria Espacial é um conteúdo comumente trabalhado nos currículos de Ensino Médio na maioria das escolas no Brasil. Acrescentar uma outra forma para o cálculo de volumes a partir de Integrais Definidas é dar mais uma ferramenta aos alunos para resolver questões. As didáticas de Resoluções de Problemas e de Modelagem Matemática são excelentes formas de estimular o aluno a aprender, a pensar e a desenvolver o senso crítico e, por exemplo, aplicar seus conhecimentos de Integral Definida para o cálculo de volumes, podendo tornar a aprendizagem mais significativa. Aliada ao GeoGebra, *software* de Geometria Dinâmica que possibilita a visualização geométrica, algébrica e gráfica de funções, a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática poderão auxiliar positivamente a aprendizagem dos alunos. Neste trabalho, são apresentadas atividades realizadas com os alunos envolvendo cálculo de volumes de monumentos com a utilização de integrais definidas.

Palavras - chave: Resolução de Problemas. Modelagem Matemática. GeoGebra. Integrais Definidas. Geometria Espacial.

ABSTRACT

MONUMENTS VOLUME CALCULATION USING DEFINITE INTEGRALS FOR HIGH SCHOOL STUDENTS WITH THE SUPPORT OF GEOGEBRA SOFTWARE

AUTHOR: Francine Mirele Numer
MENTOR: Claudia Candida Pansonato

Spatial Geometry is a currently applied content on the high school curriculum in most high schools in Brazil. Proposing a different way to calculate volumes from Definite Integrals is giving students one more tool to solve the questions. Didactics of Problem Solving and Mathematical Modeling are excellent ways to stimulate students to learn, think and develop critical sense, as well as to apply their Definite Integral knowledge when calculating volumes, being able to turn the common learning much more meaningful. Allied to GeoGebra, a Dynamic Geometry *software* that enables geometric, algebraic and graphic visualization of functions, Problem Solving and Mathematical Modeling can effectively foster students learning. In this present work, activities performed with the students involving calculus of monument's volumes using definite integrals are presented.

Keywords: Problem Solving. Mathematical Modeling. GeoGebra. Definite Integrals. Spatial Geometry.

LISTA DE ABREVEATURAS E SIGLAS

cm centímetros

cm³ centímetros cúbicos

cm² centímetros quadrados

m metros

m³ metros cúbicos

m² metros quadrados

u.a. unidades de área

u.m. unidades de medida

u.v. unidades de volume

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO, UMA PROPOSTA VIÁVEL?	20
2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ALTERNATIVA PARA CONSTRUIR CONHECIMENTOS DE FORMA MAIS FLUIDA.	24
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO INCENTIVO A APRENDIZAGEM	27
2.3 ESTUDO DE CASO	31
2.4 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA ANÁLISE DE RESULTADOS E APRENDIZAGEM.....	32
2.5 COMO A GEOMETRIA ESPACIAL É RETRATADA NOS LIVROS DIDÁTICOS	34
3 A INTEGRAL DEFINIDA PARA CÁLCULO DE VOLUMES	36
3.1 A INTEGRAL DEFINIDA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS	36
3.2 A INTEGRAL DEFINIDA PARA CÁLCULO DE ÁREA ENTRE DUAS FUNÇÕES	38
3.3 INTEGRAL DEFINIDA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES POR FATIAMENTO	39
3.4 VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	40
3.5 VOLUME POR ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO X	42
3.6 VOLUME POR DISCOS E ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO Y	45
3.7 VOLUME POR CAMADAS CILÍNDRICAS	46
4 METODOLOGIA DE PESQUISA E APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA	49
4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA: ESTUDO DE CASO.....	49
4.2 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA	50
4.3 AVALIAÇÃO	52
5 RELATO DE EXPERIÊNCIA	53
5.1 DESCRIÇÃO DOS TRABALHOS QUE FORAM CONSTRUÍDOS CONFORME OS OBJETIVOS PROPOSTOS	55
5.1.1 Catedral São Sebastião da cidade do Rio de Janeiro	55
5.1.1.1 <i>Construção da Maquete</i>	56
5.1.1.2 <i>Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas</i>	56
5.1.1.3 <i>Cálculo do Volume por Integral</i>	58
5.1.1.4 <i>Representação no GeoGebra 3D</i>	59
5.1.1.5 <i>Volume no GeoGebra 3D</i>	59
5.1.1.6 <i>Análise de Erro</i>	60
5.1.1.7 <i>Opinião Sobre o Trabalho</i>	60
5.1.2 Caixa da Água da Fundação Liberato em Novo Hamburgo - Grupo 1	61
5.1.2.1 <i>Construção da Maquete</i>	61
5.1.2.2 <i>Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas</i>	62
5.1.2.3 <i>Cálculo do Volume por Integral</i>	62
5.1.2.4 <i>Representação no GeoGebra 3D</i>	63
5.1.2.5 <i>Volume no GeoGebra 3D</i>	64
5.1.2.6 <i>Análise de Erro</i>	64
5.1.2.7 <i>Opinião Sobre o Trabalho</i>	65
5.1.3 Caixa da Água da Fundação Liberato em Novo Hamburgo - Grupo 2	65
5.1.3.1 <i>Construção da Maquete</i>	65
5.1.3.2 <i>Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas</i>	66
5.1.3.3 <i>Cálculo do Volume por Integral</i>	66
5.1.3.4 <i>Representação no GeoGebra 3D</i>	66
5.1.3.5 <i>Volume no GeoGebra 3D</i>	67
5.1.3.6 <i>Análise de Erro</i>	68

5.1.3.7 Opinião Sobre o Trabalho	68
5.1.4 Obelisco da Cidade de São Paulo.....	69
5.1.4.1 Construção da Maquete	69
5.1.4.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	70
5.1.4.3 Cálculo do Volume por Integral	72
5.1.4.4 Representação no GeoGebra 3D	75
5.1.4.5 Volume no GeoGebra 3D	76
5.1.4.6 Análise de Erro.....	76
5.1.4.7 Opinião Sobre o Trabalho	77
5.1.5 Batistério da cidade de Pisa na Itália.....	77
5.1.5.1 Construção da Maquete	77
5.1.5.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	78
5.1.5.3 Cálculo do Volume por Integral	81
5.1.5.4 Representação no GeoGebra 3D	83
5.1.5.5 Volume no GeoGebra 3D	84
5.1.5.6 Análise de Erro.....	85
5.1.5.7 Opinião Sobre o Trabalho	85
5.1.6 Big Ben da cidade de Londres na Inglaterra.....	86
5.1.6.1 Construção da Maquete	86
5.1.6.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	87
5.1.6.3 Cálculo do Volume por Integral	88
5.1.6.4 Representação no GeoGebra 3D	90
5.1.6.5 Volume no GeoGebra 3D	91
5.1.6.6 Análise de Erro.....	91
5.1.6.7 Opinião Sobre o Trabalho	92
5.1.7 Coliseu da cidade de Roma na Itália.....	92
5.1.7.1 Construção da Maquete	93
5.1.7.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	94
5.1.7.3 Cálculo do Volume por Integral	95
5.1.7.4 Representação no GeoGebra 3D	97
5.1.7.5 Volume no GeoGebra 3D	97
5.1.7.6 Análise de Erro.....	98
5.1.7.7 Opinião Sobre o Trabalho	98
5.1.8 Obelisco da cidade de Buenos Aires na Argentina.....	99
5.1.8.1 Construção da Maquete	100
5.1.8.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	100
5.1.8.3 Cálculo do Volume por Integral	101
5.1.8.4 Representação no GeoGebra 3D	102
5.1.8.5 Volume no GeoGebra 3D	103
5.1.8.6 Análise de Erro.....	103
5.1.8.7 Opinião Sobre o Trabalho	104
5.1.9 Edifício Copan da cidade de São Paulo	104
5.1.9.1 Construção da Maquete	104
5.1.9.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	105
5.1.9.3 Representação no GeoGebra 3D	105
5.1.9.4 Cálculo do Volume por Integral	107
5.1.9.5 Volume no GeoGebra 3D	108
5.1.9.6 Análise de Erro.....	109
5.1.9.7 Opinião Sobre o Trabalho	110
5.1.10 Centro Administrativo Fernando Ferrari	111

5.1.10.1 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	111
5.1.10.2 Construção da Maquete	113
5.1.10.3 Cálculo do Volume por Integral	116
5.1.10.4 Representação no GeoGebra 3D	119
5.1.10.5 Volume no GeoGebra 3D	120
5.1.10.6 Análise de Erro	120
5.1.10.7 Opinião Sobre o Trabalho	122
5.1.11 O "olho" do museu Oscar Niemeyer da cidade de Curitiba	122
5.1.11.1 Construção da Maquete	123
5.1.11.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas	124
5.1.11.3 Cálculo do Volume por Integral	127
5.1.11.4 Representação no GeoGebra 3D	129
5.1.11.5 Volume no GeoGebra 3D	130
5.1.11.6 Análise de Erro	130
5.1.11.7 Opinião Sobre o Trabalho	130
5.2 DESCRIÇÃO DOS TRABALHOS QUE NÃO FORAM CONSTRUÍDOS CONFORME OS OBJETIVOS PROPOSTOS.....	131
6 ANÁLISE DOS RESULTADOS	139
7 CONCLUSÃO	144
REFERÊNCIAS.....	146
ANEXO A - PLANO DE TRABALHO DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO CURSO TECNICO DE ELETRÔNICA DA FUNDAÇÃO LIBERATO NO ANO DE 2017	149
ANEXO B - PLANTA BAIXA DA CAIXA DA ÁGUA DA FUNDAÇÃO LIBERATO	150
ANEXO C - PLANTA BAIXA DO "OLHO" DO MUSEU OSCAR NIEMEYER	151
ANEXO D - DIMENSÕES DO "OLHO" DO MUSEU OSCAR NIEMEYER	152

1 INTRODUÇÃO

O programa do Ensino de Matemática brasileiro para o Ensino Médio possui um conjunto de temas que geralmente são distribuídos em três anos. Como não há uma exigência nacional em como deve ser feita a distribuição desses temas ano a ano, a maioria das escolas associa essa distribuição aos livros didáticos. Porém, é nítido que nos livros os temas estão distribuídos de formas independentes e não correlacionadas.

Esta divisão em compartimentos estanques não se traduz em um ensino efetivo e provoca problemas na aprendizagem matemática. Outra falha grande é a pequena inter-relação entre os conteúdos matemáticos e os conteúdos de outras disciplinas. Por exemplo, geralmente no primeiro ano do Ensino Médio são trabalhados os conceitos de funções afim e quadrática em matemática que poderiam ser associados, respectivamente, a escalas termométricas e ao movimento uniformemente variado em Física.

Quando os conteúdos não são relacionados a situações práticas, ou seja, quando não são contextualizados, há uma maior resistência quanto a aprendizagem por conta dos educandos. E, em muitas situações, eles questionam: "mas sora, onde eu vou usar isso?".

A necessidade de responder a tradicional pergunta nas aulas de matemática: "mas para quê isso serve?" torna-se um motivo para a busca de atividades contextualizadas a fim de exemplificar quais e quando os conteúdos explicados são aplicados. Conjuntamente a isso, a utilização de *softwares* no ensino da matemática permite explorar uma outra maneira de ver e abordar determinados problemas, contribuindo para uma aprendizagem significativa¹ e eficaz.

¹ De acordo com Marco Antônio Moreira, em *Aprendizagem Significativa*, Organizadores Prévios, Mapas Conceituais, Diagramas V e Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, disponível em: < <http://www.faatensino.com.br/wp-content/uploads/2014/04/Aprendizagem-significativa-Organizadores-pr%C3%A9vios-Diagramas-V-Unidades-de-ensino-potencialmente-significativas.pdf>>, acesso em 07/09/2017, a aprendizagem significativa, proposta por David Ausubel em sua obra mais recente, *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*, publicada, em 2000, por Kluwer Academic Publishers, traduzida (*Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*) e publicada, em 2003, por Plátano Edições Técnicas, Lisboa, se caracteriza pela interação entre conhecimentos novos e conhecimentos prévios, e essa interação é não-literal, ou seja, não ao pé da letra e não arbitrária, ou seja com algum conhecimento relevante existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende. Assim, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios novos significados e maior estabilidade cognitiva.

Tendo em vista as dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos geométricos, pensamos em uma proposta de trabalho, utilizando a metodologia de estudo de caso, para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio do curso de Eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha que pudesse utilizar aplicações associadas a problemas da realidade. Além disto, como esses alunos possuem em sua grade curricular um curso introdutório de cálculo por necessitarem desta base para as disciplinas da área técnica a ideia então foi utilizar as ferramentas do cálculo diferencial para o cálculo de volumes.

Sabendo que o ensino, a partir da resolução de problemas e da modelagem matemática, oportuniza a associação de conceitos matemáticos a essas aplicações, pensamos então em uma proposta que associasse os conceitos de integral definida ao conteúdo estudado no terceiro trimestre, Geometria Espacial, a partir de um problema de modelagem matemática, utilizamos do aplicativo GeoGebra 3D e da confecção de maquetes.

Os alunos trabalharam com resolução de problemas e modelagem matemática nas diferentes fases do trabalho. A modelagem surge diretamente quando se propõe que o aluno escolha uma estrutura real e trabalhe a partir dela. O primeiro problema consistia na representação da maquete em 3D de forma proporcional. O segundo no cálculo do volume por fórmulas geométricas e o terceiro por integrais e, por fim, na representação dos sólidos no GeoGebra 3D.

Ainda que a Geometria Espacial seja um conteúdo de notória aplicação, os alunos saem do Ensino Médio sabendo calcular área e volume apenas de prismas, pirâmides, cilindros e esferas. Então estas atividades oportunizaram aos alunos uma aprendizagem além das exigidas no Ensino Médio já que permitiu o cálculo do volume de outras estruturas utilizando conceitos de integrais definidas.

Esta dissertação está estruturada em sete capítulos.

O primeiro, a Introdução, onde descrevemos o panorama geral sobre a dissertação, relacionando o Ensino de Matemática às metodologias de ensino Modelagem Matemática e Resolução de Problemas, com a utilização do *software* GeoGebra.

No segundo apresentamos um recorte sobre as metodologias de ensino: Resolução de Problemas e Modelagem Matemática; a metodologia de pesquisa: Estudo de Caso; a ferramenta para análise de resultados e aprendizagem: o

GeoGebra 3D e, por fim, o retrato de como a Geometria Espacial é retratada nos Livros Didáticos do Ensino Médio no Brasil.

No capítulo 3 há uma descrição, sintética, dos conceitos de Integral Definida utilizados no decorrer do trabalho para os cálculos de volume realizados.

No quarto capítulo está descrito como ocorreu a metodologia de pesquisa do estudo de caso e há a apresentação do trabalho com sua proposta e avaliação.

No quinto capítulo está descrito todo o relatório da experiência, onde os trabalhos desenvolvidos pelos alunos são analisados e redigidos um a um, com a análise dos resultados realizadas por eles e alguns comentários breves.

No sexto capítulo apresentamos a análise dos resultados obtidos e suas relações com as metodologias de pesquisa e de ensino. Análise dos erros cometidos pelos alunos na execução das metodologias e suas consequências relacionadas aos resultados finais.

No capítulo 7 apresentamos as conclusões e considerações finais acerca das atividades e metodologias envolvidas.

2 ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO, UMA PROPOSTA VIÁVEL?

Corriqueiramente ao se falar na disciplina de Cálculo nos cursos de graduação de Ciências Exatas ouve-se manifestações do tipo: "é muito difícil", "conheço alguém que reprovou muitas vezes" e realmente o número de reprovações nesta disciplina é bem elevado inclusive Barros e Meloni (2006) afirmam que:

O ensino de Cálculo nas universidades tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes nos primeiros períodos matriculados nesta disciplina (BARROS E MELONI, 2006, p.1).

Então questiona-se o porquê de não se trabalhar esses conceitos já no Ensino Médio, mesmo que de forma mais superficial. Até porque o ensino de Cálculo auxilia muito o entendimento de conceitos físicos e matemáticos e é uma ótima ferramenta para a simplificação dos cálculos, podendo ser associado além disso, a diversas áreas do conhecimento.

Ávila (1991) questiona sobre o Ensino de Cálculo no Ensino Médio:

Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Com isso percebe-se que há a necessidade de refletirmos sobre como e o que deve ser trabalhado na matemática do Ensino Médio. Ávila (1991) também questiona o porquê de não ensinar técnicas de derivação após o ensino de funções já que em 1960 era conteúdo obrigatório no que era o equivalente ao Ensino Médio.

Centenaro e Steffenon (2011) descrevem ainda que:

Atualmente, o ensino de Matemática é tema de diversas pesquisas, pois não está ocorrendo de forma satisfatória. Por um lado, educadores constataam que essa é uma área de conhecimento importante; por outro lado, esses mesmos educadores encontram-se insatisfeitos diante dos resultados do ensino e da aprendizagem. A constatação da importância da Matemática apoia-se no fato de que essa ciência desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona também como instrumento fundamental para a construção de conhecimentos em outras áreas. Além disso, influencia na estrutura do pensamento organizado e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

A insatisfação diante dos resultados obtidos na aprendizagem da Matemática nos revela que existem problemas a serem corrigidos, e um deles é o ensino centrado em procedimentos mecânicos, sem significados para o aluno (CENTENARO E STEFFENON, 2011, p.82).

Dessa forma, abordar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral associando-os a aplicações e situações-problema com alunos do Ensino Médio pode auxiliar na melhor construção dos conceitos matemáticos e físicos dos educandos e também este conhecimento poderá ser usado como uma ferramenta interdisciplinar a ser trabalhada de forma ampla a fim de construir conceitos nas mais diversas áreas do conhecimento transformando, assim, o ensino em algo mais qualificado e favorecedor de aprendizagens significativas.

Conforme afirma Pickover (2011), as aplicações a serem trabalhadas com o Cálculo Diferencial e Integral são as mais diversas:

Atualmente, o cálculo invadiu todos os campos do esforço científico e desempenha papéis inestimáveis na biologia, na física, na economia, na sociologia, e na engenharia, e em qualquer domínio em que algumas quantidades como a velocidade ou a temperatura, variam. O cálculo pode ser usado para explicar a estrutura de um arco-íris, ensinar como fazer mais dinheiro na bolsa de valores, pilotar uma nave espacial, prever o crescimento da população, projetar edifícios, e analisar a propagação de doenças. O cálculo causou uma revolução. Mudou a forma de olharmos o mundo. (PICKOVER, 2011, p.152)

Araújo e Moreira (2005) afirmam ainda que os alunos chegam à Universidade sem habilidades de interpretar a linguagem matemática, abstrair, generalizar e explorar problemas. Uma das formas de se minimizar essas falhas é que seja trabalhado com resolução de problemas e modelagem matemática ainda na Educação Básica, capacitando ao aluno compreender as aplicações do que é aprendido.

Através dos conhecimentos do Cálculo é possível trabalhar-se de forma interdisciplinar pois esse conhecimento atinge as mais diversas áreas do conhecimento. Relacionar conhecimento com aplicações é uma maneira de contextualizar e, portanto, dar significado para a aprendizagem, pois a explicação de fenômenos e exemplos práticos é geralmente mais atrativa que o conceito teórico abordado sozinho.

Portanto questiona-se a necessidade de se trabalhar com conceitos de Cálculo, ainda no Ensino Médio e de forma diferente da tradicional. Dessa maneira

não haveria uma redução no número de reprovações e um aproveitamento superior por parte dos alunos?

Mas se os conceitos de Cálculo são trabalhados, na maioria das instituições, de forma tradicional, qual é o problema deste ensino tradicional? Geralmente, as técnicas tradicionais de ensino na Matemática, trabalham como se os conceitos aprendidos estivessem fechados em gavetas. E acabam por não explorar de maneira eficiente as conexões que podem haver entre uma gaveta e outra. Por exemplo: um aluno ao resolver problemas em que aparece como unidade de medida um número escrito em forma de fração, abre a "gaveta das frações" e utiliza os conceitos que lá se encontram e depois os guarda novamente, descontextualizando a aprendizagem. De uma forma geral, embora os alunos saibam trabalhar com operações que envolvam frações, ainda sentem dificuldades de compreender que uma fração é uma parte de um todo. Isso porque o ensino tradicional trabalha muito bem métodos algébricos não dando muita ênfase para aplicações e conceitos mais aprofundados pois não resgatam conhecimentos prévios. Partem do pressuposto que os alunos já sabem a base necessária para a aprendizagem do novo conceito.

Lopes (1990 apud SILVA, 2013) afirma que:

Para que o aluno possa compreender os diversos métodos ensinados no curso de cálculo são necessários alguns conhecimentos matemáticos básicos que devem ser adquiridos antes do início da disciplina, normalmente durante o curso do ensino médio. A atual estrutura de educação básica nacional organiza o ensino de matemática em camadas que, conforme o aluno vai avançando entre as diversas etapas e séries, vão sobrepondo conhecimentos anteriores e os desenvolvendo cada vez mais, de maneira a obter uma maior capacidade de compreender conceitos mais complexos. Lopes (1990) coloca que talvez esse sistema de empilhamento de conhecimentos seja uma das principais razões da existência de tantas reprovações de cálculo no ensino superior e também levanta fortemente a hipótese de que se fossem abordados ainda no ensino médio tópicos iniciais de cálculo poderiam diminuir as deficiências de aprendizagem encontradas na universidade. (SILVA, 2013, p.15).

Portanto imagina-se que se os educandos já adquirissem conhecimento sobre o cálculo ainda no Ensino Médio, trabalhando de forma associada a funções, conceitos físicos e outros conteúdos no momento em que fossem trabalhados, haveria uma diminuição neste processo de empilhamento de conhecimentos e uma melhoria na exploração da aprendizagem.

De acordo com Silva (2013) tópicos de cálculo diferencial e integral já fizeram parte do Ensino Básico brasileiro. Através da reforma proposta por Benjamim

Constant em 1890 com propósito de trocar a formação literária pela científica, mas era um ensino desvinculado com outras áreas, e portanto perdeu o seu sentido, sendo extinto em 1900. Em 1931 houve uma reestruturação e uma padronização nacional do curso secundário e a disciplina de Cálculo Infinitesimal foi proposta novamente para integrar este curso. Mas os professores sentiram-se inseguros para trabalhar com as tantas mudanças propostas. Finalmente em 1942, através da Reforma Capanema, os conteúdos referentes ao Cálculo retornaram ao programa de matemática, porém de forma mais sintética, permanecendo até 1961.

O aluno que está cursando o último ano do Ensino Médio, de uma forma geral, é o mesmo que estará ingressando na Universidade no ano seguinte, ou seja, é o mesmo que, em alguns casos, cursará a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral três meses após a conclusão do Ensino Médio. Pensando nisso, Silva (2013), indaga:

Será mesmo que o desenvolvimento intelectual e a capacidade de compreender conceitos de um aluno podem aumentar tanto em tão pouco tempo a ponto de que ele já esteja apto a estudar o conteúdo de cálculo? Acredito que o período de transição entre o ensino médio e o superior é muito curto para que haja algum desenvolvimento intelectual realmente significativo que possa qualificar o aluno para aprender um novo conteúdo. Portanto, como o cálculo é trabalhado no ensino superior podemos concluir que é perfeitamente viável abordá-lo no final do ensino médio, no entanto Ávila (1996) vai mais além, afirmando que “[...] o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções [...]” (ÁVILA, 1996). Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA 1991, p. 7).(SILVA, 2013, p.21).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) (BRASIL - 1998) o currículo do Ensino Médio necessita de uma estruturação que garanta ao aluno a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente, integrados a outras áreas do conhecimento. No entanto, nem sempre é assim que os conteúdos são trabalhados, haja visto a grande defasagem de conhecimentos matemáticos detectada pelo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), exame nacional que avalia a aprendizagem do aluno ao final do Ensino Médio.

Os problemas envolvendo máximos e mínimos, no Ensino Médio, estão geralmente associados aos problemas físicos, já que a física se utiliza das taxas de

variações e análises gráficas nas construções de seus conceitos. Acredita-se que trabalhando com o conceito de derivada, associado a esses problemas, o aluno aprenderia com facilidade pois não ocasionaria numa dissociação de conteúdo, tornando, provavelmente, a aprendizagem mais significativa. Outro exemplo que pode ser explorado é o conceito de limite infinito e no infinito a partir da função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Neste trabalho optamos por, a partir de um problema de modelagem matemática, trabalhar conceitos de geometria espacial associados a integrais definidas para o cálculo de volumes de monumentos escolhidos pelos alunos.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ALTERNATIVA PARA CONSTRUIR CONHECIMENTOS DE FORMA MAIS FLUIDA.

Combinar problemas concretos com a resolução de problemas pode dar significado e relevância ao processo de aprendizagem permitindo uma conexão com conceitos e situações cotidianas para o aluno.

Pesquisadores como Schoenfeld (1985), Gage e Berliner (1992) consideram que levar os estudantes a resolverem situações-problema é a própria razão para se ensinar Matemática. Situações-problema que requeiram dos estudantes: levantar fatos básicos, identificar incógnitas, buscar significados as incógnitas desconhecidas, (re)conhecer as operações Matemáticas fundamentais, perceber as relações entre as operações e suas implicações em situações reais – formular, solucionar –, e ainda, avaliar e argumentar se a resposta encontrada é compatível com as informações disponíveis no problema (BIEMBENGUT, 2014, p.9).

As situações problemas também instigam o aluno a pôr-se em questionamento, de forma a utilizar o raciocínio de forma mais abrangente se comparada a reprodução de fórmulas ou regras. Dante (2010) afirma que:

A oportunidade de usar os conceitos e procedimentos matemáticos no dia a dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva de aluno em relação à matéria, evitando questionamentos como “Para que serve isso?” ou “Onde vou usar isso na minha vida?”. Não basta, por exemplo, saber executar mecanicamente os algoritmos das quatro operações ou as passagens na resolução de uma equação. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente(...) (DANTE, 2010, p.21).

A resolução de problemas permite ao aluno relacionar questões do cotidiano aos conteúdos curriculares trabalhados em sala de aula facilitando, assim, a compreensão dos conceitos.

Para Polya (2006) quando o aluno cria planos para resolver um problema nunca antes explorado está se utilizando da resolução de problemas matemáticos. E este processo se dá em quatro etapas: compreensão do problema; plano para resolver um problema; execução do plano; e exame da solução obtida.

Essas quatro fases não são lineares; há idas e vindas entre os vários passos. O fato é que quando se depara com um problema, mas não se dispõe de informações, métodos disponíveis, ou alguém a quem possa delegar, tem de ajustar-se a alguma heurística: a priori, recorrer às informações de que se dispõe e, assim, estabelecer meios para as informações novas. (BIEMBENGUT, 2014, p.9)

Durante essas quatro etapas, o professor deverá acompanhar o desenvolvimento do aluno e poderá questioná-lo no intuito de incentivar a construção e elaboração da resolução do problema.

O método de resolução de problemas auxilia não somente na aprendizagem do componente curricular associado como também possibilita o aluno compreender e comemorar progressos simples, e também validar os resultados obtidos tornando a aprendizagem proveitosa já que:

Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto de vista mais formal. (POLYA, 2006, p.131).

Porém “o que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro” (DANTE, 2010, p.11), isto é, podemos apresentar um mesmo exemplo a ser resolvido a diferentes pessoas e cada uma irá interpretar e solucionar este de diferentes formas: podendo trabalhar como um exercício se já tiver conhecimento acerca da resolução desse exemplo, ou podendo trabalhar como um problema, levando sua resolução às diferentes etapas que a resolução de problemas prevê. Cabe ao professor mediar e entender se um exemplo proposto não atender aos objetivos previstos, visto que a

classificação dos problemas está intimamente relacionada ao conhecimento de quem os resolve e ao meio em que os alunos estão inseridos.

Existe a necessidade de uma coerência e análise no momento de propor os problemas pois se eles estiverem muito além dos conhecimentos dos alunos poderão causar frustrações, uma vez que mesmo estabelecendo ou tentando estabelecer as melhores estratégias para solucioná-los poderão falhar por não terem o conhecimento mínimo necessário e então poderão ficar desmotivados. Em contrapartida propor problemas que não gerem questionamentos por sua simplicidade também desmotiva pois não há um desafio então o aluno não encara o problema como algo a ser resolvido, tornando-o um simples exercício mecânico que não precisa de reflexão ou estratégias para ser solucionado.

Um fator muito importante é que:

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que tem dos problemas da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (ARAÚJO, 2008, p.21).

Corriqueiramente confunde-se a proposta de ensino através de resolução de problemas com exercícios envolvendo problemas matemáticos, estes geralmente são repetitivos para a fixação dos conteúdos que foram estudados restando aos alunos a aplicação e reprodução de métodos anteriormente executados. Não se pode considerar esses exercícios como resolução de problemas pois eles não desenvolvem no aluno a possibilidade de transpor o raciocínio utilizado para o estudo de outros problemas.

Brasil (1997) afirma que é fácil distinguir um problema de um exercício porque "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início mas é possível construí-la." (BRASIL, 1997, p.29) e complementa que:

(...) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada (BRASIL, 1997 p.28).

Portanto, de acordo com Araújo (2010) para solucionar uma situação problema de matemática é preciso que o desenvolvedor descreva novas estratégias, percorra novos caminhos e então construa novas habilidades e formas de resolução. Quem soluciona o problema pode até conhecer os objetivos a serem alcançados porém não conhece os meios para resolvê-lo é isso que caracteriza a resolução de problemas: encontrar meios para resolver o que é proposto. Qualquer outra forma caracteriza uma aplicação de conhecimentos anteriormente obtidos e não um problema.

Para que o aluno resolva um problema é necessário elaborar uma ou várias etapas até a resolução, entre estas pode-se citar: fazer tentativas e formular hipóteses; comparar os resultados com os de outros e validar seus procedimentos (BRASIL, 1997).

Brasil (1997) acrescenta ainda que:

Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 1997, p.29)

Portanto, para finalizar, é muito importante que o aluno utilize diferentes estratégias para resolver o problema, faça uma comparação e analise os seus resultados para averiguar se chegou a solução correta.

Selecionar problemas de interesse dos alunos de acordo com suas realidades é tarefa do professor que quer trabalhar com resolução de problemas. Devendo também propor problemas que o aluno queira resolver, aguçando sua curiosidade, um desejo maior pela aprendizagem e motivando-o a questionar, raciocinar, pensar, criar estratégias e compartilhar ideias para solucionar o problema.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO INCENTIVO A APRENDIZAGEM

Cientificamente a evolução ocorre pela curiosidade ou dificuldade humana. Seja para minimizar um obstáculo ou para compreender algumas situações o

homem é motivado a buscar alternativas para transpor o problema diante dele. Na busca de alternativas a principal ferramenta vem do que já se conhece. Fazer adaptações e associações ao conhecimento já adquirido e modelar ao que se quer resolver também são ocorrências próprias do processo. Biembengut (2014) salienta que "essa capacidade de modelar uma coisa imaginada é que impulsionou e impulsiona o ser humano a criações cada vez mais avançadas e ousadas." (BIEMBENGUT, 2014, p.4).

Os desafios fazem os homens se desacomodarem e buscarem resultados diferentes. As mudanças impulsionam a tomar iniciativas, atitudes e usar artifícios diferentes. Modelar problemas matemáticos é também uma forma de desacomodar, pois propõe que se busque alternativas diferentes para se solucionar um problema.

Por diversas vezes o ensino tradicional de matemática não permite ao aluno perceber onde irá aplicar os conhecimentos adquiridos. Bassanezi (2002) afirma que a modelagem matemática transforma problemas reais em problemas matemáticos e os soluciona. Machado (2006) ainda acrescenta que é do interesse dos alunos que surgem os problemas, e os conteúdos matemáticos são gerados a partir da problematização destes fazendo o aluno compreender como aplicar os conhecimentos matemáticos aprendidos. O professor nesse cenário trabalha como mediador e orientador do trabalho.

A Modelagem Matemática vem se firmando no cenário da Educação Matemática brasileira, avalizada por vários autores (...) como uma metodologia capaz de trazer situações reais para fazer Matemática na sala de aula, transformando essa Ciência em um instrumento para que o aluno possa interpretar a realidade matematicamente, adquirindo habilidades tanto para se mover melhor no seu meio como para intervir sobre este (MACHADO, 2006, p.21).

A modelagem é rica por ser associada a situações reais e torna-se mais interessante quando isso ocorre de forma interdisciplinar, agregando conhecimentos de outras áreas de conhecimento, mantendo um vínculo maior com o cotidiano e aguçando mais a curiosidade; impulsionando assim uma busca maior pela solução do problema. Toda a situação problema que puder ser vinculada a situações do cotidiano dos alunos agrega contexto sociocultural e serve de alavanca motivadora para a busca da solução, pois se reconhece o propiciador do problema.

No dia a dia, na maioria das situações-problema que uma pessoa vivencia lhe requer a utilização de algumas representações, alguns modelos para solucioná-las.(...) Toda ação está inserida em um contexto sociocultural, portanto, sofre influência deste, da mesma forma que tal ação também exerce influência neste contexto.(...)

Por causa da própria natureza humana, algumas destas situações-problema excedem as necessidades da mera subsistência, instigando a pessoa a ter projetos, a prover-se de conhecimentos para alcançar algo, como um objeto, uma técnica, uma representação, ou melhor, um modelo que abarque em essência algo que lhe valha.(...)

Quando um desses projetos abarca o 'querer saber' mais sobre algo, requer-lhe dispor de um método de pesquisa para alcançar este 'saber'. Se este 'saber' tem como finalidade solucionar alguma situação-problema cujos dados disponíveis não são suficientes para se utilizar de um modelo existente, ou ainda, (re)criar ou produzir algo, esse método denomina-se modelagem (BIEMBENGUT, 2014, p.3).

A palavra modelagem advém de modelo e "modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa" (BIEMBENGUT, 2014, p.5), no contexto matemático Machado (2006) complementa que "o modelo nada mais é do que uma ferramenta que permite a interação entre realidade e a Matemática" (MACHADO, 2006, p. 23) com isso acreditamos que a Modelagem é uma estratégia de aprendizagem cujo objetivo não é encontrar um modelo imediatamente, mas agregar conhecimento à medida que as estratégias para a solução vão sendo aplicadas e o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

Os modelos quando criados necessitam de uma sequência de procedimentos que iniciam pela observação do problema a ser modelado, e, então, interpreta-se a experiência para captar o significado do que se produz. A esta sequência de estratégias para a solução do que é proposto dá-se o nome de modelagem (BIEMBENGUT, 2014).

Biembengut (2014) afirma ainda que ao trabalhar com modelagem é necessário que se utilize três etapas, as mesmas requeridas quando se trabalha com pesquisa: perceber e aprender, compreender e explicitar e, por fim, significar e expressar. Complementa também que a modelagem "oportuniza ao estudante estudar situações-problema por meio de pesquisa, instigando seu interesse e aguçando seus sentidos crítico e criativo. Pesquisar aqui não se refere à busca de dados ou informações." (BIEMBENGUT, 2014, p.6). Esta última frase é ressaltada pois ao se comentar aos alunos que necessitarão realizar uma pesquisa eles automaticamente se imaginam buscando dados em um computador ou um livro. Infelizmente utilizamos o termo "pesquisar", quando estamos ensinando, muito mais

no sentido de busca de dados ou informações do que no sentido de análise e investigação de problemas. Biembengut (2014) ainda reitera que:

A Modelagem Matemática é um método de pesquisa. O pesquisador utiliza-se da Modelagem quando espera solucionar uma situação-problema cujos dados disponíveis não são suficientes para aplicar em um modelo matemático e obter a solução, ou ainda, para (re)criar, aprimorar algo (objeto, técnica, teoria, etc.) (BIEMBENGUT, 2014, p.15).

Ainda sobre as etapas do processo da modelagem, Biembengut (2014) informa sobre a necessidade de o professor instigar o aluno a apresentar sugestões, ideias e hipóteses para a solução das questões nas fases que seguem:

- 1) Percepção e apreensão: apresentar o tema a ser modelado, propor/levantar questões sobre o tema; selecionar questão adequada ao desenvolvimento do conteúdo curricular e solicitar aos estudantes a buscarem dados, se julgar necessário.
- 2) Compreensão e explicitação: expressar os dados e sugerir/instigar algumas hipóteses/pressupostos; formular os dados de forma a suscitar o conteúdo matemático para resolver a situação-problema; apresentar o conteúdo curricular e apresentar exemplos similares.
- 3) Significação e expressão: formular um modelo, resolver a situação-problema em termos do modelo e solicitar aos estudantes a avaliar o resultado, quão válido é o modelo (BIEMBENGUT, 2014, p.7).

De uma forma geral o objetivo da modelagem é tornar o estudante capaz de desenvolver pesquisa em assuntos de seu interesse concomitantemente com a aprendizagem dos conteúdos curriculares conduzindo-os a:

apreciar as abordagens metodológicas para a solução de um problema de seu contexto, a aprender a arte de traduzir as relações entre as variáveis e as constantes do problema em formulações matemáticas, a praticar a habilidade de traduzir os resultados em linguagens adequadas para a compreensão geral e a desenvolver competências na expressão escrita e oral de seus resultados (BIEMBENGUT, 2014, p.7).

A modelagem matemática e a resolução de problemas são confluentes, ou seja, "há elementos que ligam estruturalmente esses métodos. Elementos essenciais que se combinam e recombinaem em expressões de certos conceitos básicos e, assim, permitem obter conhecimento, trazer informação." (BIEMBENGUT, 2014, p.14)

2.3 ESTUDO DE CASO

Segundo Lüdke e André (1986, p.17), "o estudo de caso é o estudo de *um* caso" bem delimitado, ou seja, de contornos definidos. Destaca-se por ser construído em uma unidade inserida em um sistema mais amplo e é único por estar relacionado ao meio inserido. Lüdke e André (1986, p.17) ainda complementam explicando que " Quando queremos estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo, devemos escolher o estudo de caso".

O estudo de caso tem por características básicas:

A busca de descoberta: no estudo de caso a teoria serve apenas como esqueleto para que os novos aspectos possam ser detectados e novas aprendizagens sejam obtidas. O conhecimento nunca está acabado, sempre está em construção e pode ser refeito.

A Interpretação em Contexto: as interações, reações e percepções estão ligadas ao local onde ocorre o estudo de caso. Para o pesquisador o interesse está em como as situações ocorrem e como os indivíduos se manifestam e reagem, nos processos e procedimentos.

Os estudos de caso buscam retratar a realidade de forma completa e profunda: revelando a multiplicidade presente nas situações ou problemas. Consideram a inter-relação de seus componentes.

Os estudos de caso usam uma variedade de fontes de informação: o pesquisador utiliza uma variedade de dados coletados em momentos variados, com públicos e situações variadas. É importante relacionar os dados da estrutura física, das pessoas que convivem e do entorno em que a pesquisa está inserida. Ao cruzar essas informações, o pesquisador poderá aceitar ou rejeitar hipóteses, descartar suposições e levantar hipóteses alternativas. Observa as situações onde o estudo está inserido, seja uma sala de aula, uma reunião ou um setor administrativo. O ambiente onde a pesquisa está sendo realizada é essencial para que se possa entendê-la.

Os estudos de caso revelam experiência e permitem generalizações naturalísticas: o pesquisador procura descrever suas experiências para que o leitor tenha condições de fazer as suas "generalizações naturalísticas", ou seja, permite ao leitor pensar como poderia aplicar os dados do estudo de caso para sua própria necessidade.

Estudos de caso procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vistas presentes em uma situação social: quando o objeto ou situação de estudo podem provocar opiniões divergentes, o pesquisador precisa evidenciar isso no seu trabalho e dar seu ponto de vista. Como a realidade é vista sob diferentes aspectos, com esta característica é possível que o leitor conclua por si pois são dados subsídios para isso. É importante que o pesquisador narre com clareza e detalhes os fatos para que o leitor possa interpretar e entender a situação. A narrativa deve ser rica em descrições pessoais, do ambiente e de comportamento.

Os relatos de estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa: a preocupação é com a transmissão clara do caso, aproximando a experiência pessoal ao leitor, e ela pode ser feita por desenhos, esquemas, fotos, etc.

No estudo de caso o objeto estudado é tratado como único, situando seu contexto social e histórico. Por isso, seu valor é individual.

Lüdke e André (1986, p.21) descrevem que há três fases no desenvolvimento de um estudo de caso, que muitas vezes se superpõem. A primeira é a fase exploratória ou aberta: é o momento de estabelecer os pontos críticos e as questões estabelecendo os contatos iniciais para a entrada em campo. A segunda, chamada de delimitação do estudo, pelos autores citados neste parágrafo, se refere a coleta de informações e dados. A terceira chamada de fase sistemática e elaboração do relatório ocorre com os relatórios aplicados, as observações feitas durante os estágios do estudo de caso e todo o material coletado durante a exploração do estudo de caso. Essa fase inicia junto com a primeira, também integra a segunda e conclui-se com o relatório do estudo de caso.

Ressaltando, o que é fundamental para o estudo de caso é que cada caso precisa ser observado e tratado como único, singular, respeitando as individualidades e o contexto em que a pesquisa está inserida.

2.4 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA ANÁLISE DE RESULTADOS E APRENDIZAGEM

Há muitos objetos e recursos matemáticos que se utilizam de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e que podem ser utilizados na preparação das aulas. Numer (2015) afirma que:

Com calma, curiosidade, disposição e dedicação consegue-se encontrar materiais de apoio disponíveis para os mais variados problemas e conteúdos. Com certeza trabalhar com TIC demanda ao professor bastante trabalho, pois precisa, anteriormente à proposta ser remetida aos alunos, se apropriar do que será trabalhado, explorar os recursos e ver as diferentes funcionalidades. Deve-se encarar as TIC's como uma ferramenta tão importante quanto o quadro, o giz ou a caneta, para que as atividades sugeridas aos alunos acordem com suas realidades e aspirações tecnológicas, já que os alunos são geralmente jovens conectados as mais diversas tecnologias (NUMER, 2015, p.10).

De acordo com Ventavoli, Borges e Borges:

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. (VENTAVOLI, BORGES, BORGES, ano desconhecido, p.3)

A TIC utilizada nesta proposta é o GeoGebra, por ser um *software* que, além do descrito acima, ocupa e demanda pouca memória do computador e é de acesso livre. No ambiente do *software* se pode trabalhar de diversas formas, e as construções são dinâmicas e interativas, o que faz do programa um importante recurso para a aprendizagem.

O GeoGebra 3D possui uma janela de visualização e construções de gráficos e outra janela de álgebra, em que os alunos conseguem observar as funções escritas, selecionar pontos, retas, ou outros objetos matemáticos, e fazer as associações necessárias para a aprendizagem relacionando com facilidade a parte gráfica à parte algébrica.

Embora o *software* GeoGebra 3D tenha algumas limitações, por exemplo, não constrói troncos de pirâmides e prismas, ele foi escolhido por contar com muitos recursos matemáticos e ser fácil observar as funções envolvidas nas construções. Os *softwares* utilizados na área de Engenharia minimizariam os problemas com algumas construções mas não comportam as estratégias matemáticas para solucionar alguns problemas.

2.5 COMO A GEOMETRIA ESPACIAL É RETRATADA NOS LIVROS DIDÁTICOS

As construções geométricas surgiram a partir de problemas simples como a construção da roda e as medidas e divisões das terras. Naquele momento a geometria se resumia a receitas para o cálculo de volumes e áreas. Boyer (1987) afirma que não se deve fazer afirmações sobre a origem matemática da Geometria visto que o início do assunto é até mais antigo que a arte de escrever.

(...) a Geometria formava a base das Ciências Exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico. A partir da metade do século, porém, o chamado movimento da "Matemática Moderna" levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial. Dessa forma, a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiros e segundo graus, com consequências que se fazem sentir até hoje (KALEFF, 1994, p.20)

De acordo com Carvalho (2008) nos primórdios da década 1960 o Brasil sofreu influências do movimento da Matemática Moderna que visava adaptar o Ensino de Matemática aos novos conceitos surgidos com a evolução dos conhecimentos matemáticos. Os livros didáticos desta época mostravam-se preocupados com a linguagem simbólica da Teoria dos Conjuntos e com as estruturas algébricas. E, quanto a geometria, Pavanello (1993) ressalta que "optou-se por acentuar as noções de figuras geométricas e intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da Teoria dos Conjuntos." (PAVANELLO, 1993, p.13). Ou seja, o movimento da Matemática Moderna exigia um trabalho com enfoque nas transformações para a Geometria, porém, isso não era de domínio da maioria dos professores. E, assim, fez com que muitos deixassem de ensinar Geometria sob qualquer enfoque. Contribuindo, a Lei nº 5.672/71 dava a liberdade aos professores para montarem seu programa baseado nas necessidades dos alunos e, assim, os alunos poderiam não ter contato com a Geometria no Ensino Fundamental.

Então, observando o declínio na aprendizagem de Geometria por parte dos alunos, Carvalho (2008) afirma que "A partir dos anos 1970, em todo o mundo iniciou-se um movimento a favor do resgate do Ensino de Geometria, visando a ampliar sua participação na formação integral do educando." (CARVALHO, 2008, p.46).

Lorenzato (1995) afirma que em muitos livros didáticos a Geometria é apresentada somente como um conjunto de definições, nomes, fórmulas e propriedades, com ausência de aplicações ou contextualização histórica ou lógica. Além disso, como quase sempre ela é apresentada nas partes finais do livro, acaba por aumentar as chances dela não ser estudada por falta de tempo.

Embora esses trabalhos tenham sido desenvolvidos há bastante tempo, pouca coisa mudou no Brasil sobre o ensino de Geometria.

De uma forma geral, os livros didáticos atuais fazem definições de sólidos geométricos a partir de descrições sem recorrer à Geometria Concreta, o que facilitaria a visualização e a compreensão pelos alunos, ou a partir de conteúdos sistematizados ou questões problemas que não permitem muita interação por parte dos alunos, ou seja, não facilitando a aprendizagem.

Para a definição de volume citam como este deve ser calculado e utilizam-se do Princípio de Cavalieri porém apenas o citam, sem demonstrar. Para o estudo do tronco de pirâmide há uma demonstração algébrica excessiva, em muitas vezes, que recorre a premissas que devem ser aceitas de modo intuitivo. O Teorema de Euler é geralmente apresentado a partir da sua fórmula sem a construção das relações existentes entre os elementos dos poliedros, em outros casos há uma contextualização histórica.

Quando os conceitos são trabalhados de forma a permitir uma maior interação por parte dos alunos a aprendizagem é significativa. No ensino de Geometria a exploração dos conceitos é de fundamental importância para o conhecimento. Associações históricas também ajudam no entendimento e reconhecimento das necessidades das estruturas geométricas.

A maioria dos livros de Ensino Médio possuem um capítulo específico que retrata a Geometria Espacial Métrica. São poucos os livros que recorrem a Geometria Métrica nos Polígonos para trabalhar com áreas nas superfícies e sólidos. Há poucas, e muitas vezes nenhuma, atividades propostas que se utilizam de *softwares* educacionais. Não há muita exploração na planificação dos sólidos geométricos. Poucos exercícios recorrem ao uso de demonstração ou raciocínio dedutivo; geralmente os exercícios favorecem a exploração algébrica apenas.

3 A INTEGRAL DEFINIDA PARA CÁLCULO DE VOLUMES

Segundo Thomas (2010), “[...] a integral possui muitas aplicações em estatística, economia, ciências e engenharia. Ela nos permite calcular quantidades que vão desde probabilidades e médias até consumo de energia e forças que atuam contra as comportas de uma represa”. Uma das aplicações mais utilizadas é no cálculo de áreas e volumes (THOMAS, 2010, p.354).

Larson (2011) complementa dizendo que "Nos estudos de geometria, aprendemos que área é um número que representa o tamanho de uma região limitada. Para regiões simples, como retângulos, triângulos e círculos, a área pode ser determinada por meio de fórmulas geométricas." (LARSON, 2011, p.356).

As possibilidades de modelagem de sólidos em formas diferentes dos poliedros, cilindros, cones e esferas produz um olhar matemático diferente do abordado pelos livros do Ensino Médio. Para calcular seus volumes, é necessário conhecer áreas e volumes de regiões não triviais, para as quais se utiliza do cálculo diferencial e integral, aliados a estratégias de cálculo numérico para o seu equacionamento em situações determinadas.

Neste trabalho, para encontrar o volume desses sólidos não triviais, foi trabalhado com os alunos conceitos de integrais definidas que possibilitassem o cálculo do volume de sólidos de revolução.

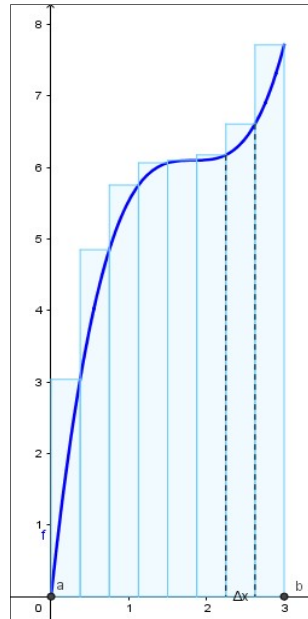
As definições a seguir são baseadas na estrutura adotada por Thomas (2010), Guidorizzi (2008) e Anton (2007).

3.1 A INTEGRAL DEFINIDA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS

A integral definida da função $f(x)$, positiva, em um intervalo $[a, b]$ é igual a área da região compreendida entre a curva dada por $y = f(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo determinado. Para uma partição regular divide-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e aproxima-se a área desta região pela soma das áreas dos retângulos de lados Δx e $f(x_k^*)$, com x_k^* um ponto aleatório do subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $1 \leq k \leq n$, dada por $f(x_k^*) \cdot \Delta x$.

Para x_k^* extremo superior de cada subintervalo para calcular os valores de f , teremos uma situação conforme a figura 1.

Figura 1 - Aproximação da área por excesso.



Fonte: a autora.

A soma das áreas (S_n) dos retângulos neste caso é dada por: $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n = f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^*) \cdot \Delta x$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x. \quad (1)$$

As aproximações ficam melhores à medida que dividimos $[a, b]$ em subintervalos cada vez menores, o que equivale a fazer n tender ao infinito, e, então:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x. \quad (2)$$

Nem sempre este limite existe, mas no caso de funções contínuas² ele sempre existirá. Neste caso ele é denotado por: $\int_a^b f(x) dx$.

Assim, define-se:

$$A \text{ (área sob a curva)} = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Mesmo que a função não seja positiva, ainda podemos formar as somas de

² Para que f seja contínua em um ponto $x = a$ é preciso que a função esteja definida em a e que os valores da $f(x)$, para x próximos de a , estejam próximos de $f(a)$.

Definição: Uma função f é contínua num ponto a se: $\exists f(a)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Riemann³ e obter a integral definida, que neste caso não será a área mas uma área líquida com sinal (ANTON, 2007).

3.2 A INTEGRAL DEFINIDA PARA CÁLCULO DE ÁREA ENTRE DUAS FUNÇÕES

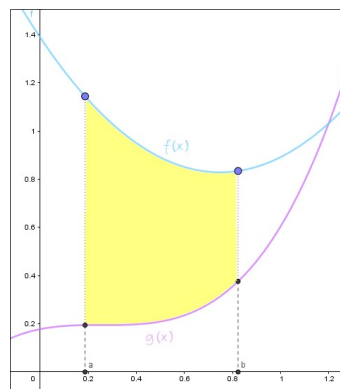
Para calcular a área entre duas funções podemos utilizar teorema que segue:

Teorema: A área entre os dois gráficos das funções f e g no intervalo $[a, b]$ está representada na figura 2 e é dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$

É importante observar que o módulo na fórmula (4) acima garante que, por tratar-se de uma área, o resultado será um valor positivo.

Figura 2 - A área entre os dois gráficos das funções f e g no intervalo $[a, b]$.



Fonte: a autora.

³ "Seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então $f: [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ também é contínua e limitada. Isso nos permite afirmar que existe máximo e mínimo da f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Logo, $m_i \leq f(\bar{x}_i) \leq M_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (*) onde m_i é o mínimo da f em $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Multiplicando-se a dupla desigualdade (*) pelos respectivos Δx_i , temos: $m_i \Delta x_i \leq f(\bar{x}_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} m_1 \Delta x_1 &\leq f(\bar{x}_1) \Delta x_1 \leq M_1 \Delta x_1 \\ m_2 \Delta x_2 &\leq f(\bar{x}_2) \Delta x_2 \leq M_2 \Delta x_2 \\ &(\dots) \\ m_n \Delta x_n &\leq f(\bar{x}_n) \Delta x_n \leq M_n \Delta x_n \end{aligned}$$

Adicionando os elementos de cada coluna formada com as desigualdades, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Considerando $s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ a soma dos produtos com valor mínimo m_i ; $S_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ a soma dos produtos com valor máximo M_i , temos: $s_n \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \leq S_n$ (**).

A soma $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$, descrita em (**), e chamada de **Soma de Riemann**." (BARBONI, p.174, 2015)

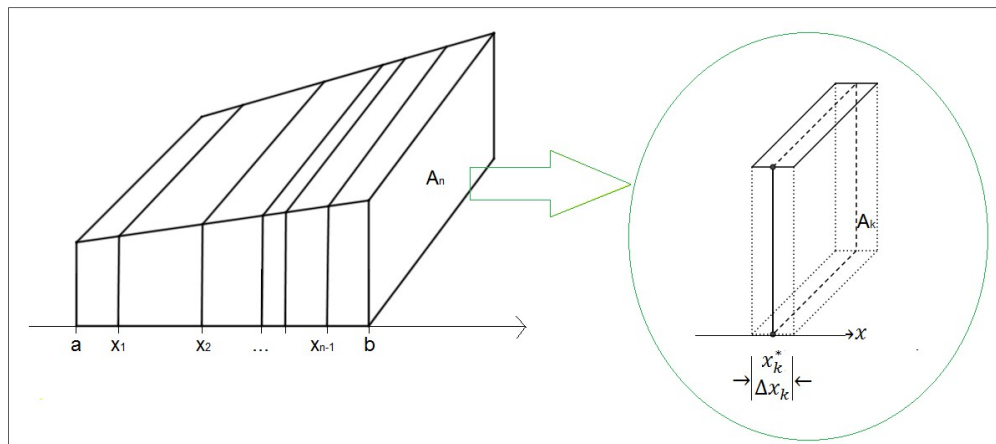
3.3 INTEGRAL DEFINIDA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES POR FATIAMENTO

Chamaremos de sólido a um objeto sólido tridimensional.

Segundo Anton (2007) para encontrar o volume de um sólido a ideia é dividir esse sólido em fatias finas, somar as aproximações para formar uma Soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral de volume.

Considere, um sólido ao longo do eixo x (Figura 3), delimitado pelos planos perpendiculares $x = a$ e $x = b$. Divide-se o intervalo em n subintervalos, o que é equivalente a dividir o sólido S em n fatias. Admitindo que a extensão do k -ésimo subintervalo é Δx_k , teremos que o volume V de cada fatia pode ser aproximado por $V = A(x_k^*)\Delta x_k$, em que $A(x_k^*)$ é a área da secção transversal, Δx_k é a altura e x_k^* é um ponto qualquer do k -ésimo intervalo.

Figura 3 - Aproximação do volume de um sólido por fatiamento.



Fonte: a autora.

Ao serem somadas essas aproximações, obtém-se a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n A(x_k^*)\Delta x_k. \quad (5)$$

Considerando $A(x)$ uma função contínua, com uma partição qualquer (irregular) tem-se que o limite $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k^*)\Delta x_k$ existe. Então definimos este limite como a integral abaixo:

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx. \quad (6)$$

De modo análogo ao caso anterior pode-se considerar um sólido que se estende ao longo do eixo y sendo delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo das ordenadas em $y = c$ e $y = d$. Seja $A(y)$ a área da secção transversal de S perpendicular ao eixo das ordenadas gerada para cada y no intervalo $[c, d]$, então o volume desse sólido é

$$V = \int_c^d A(y) dy, \quad (7)$$

desde que $A(y)$ seja integrável.

Como um caso particular do que foi visto acima serão considerados os chamados sólidos de revolução.

3.4 VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

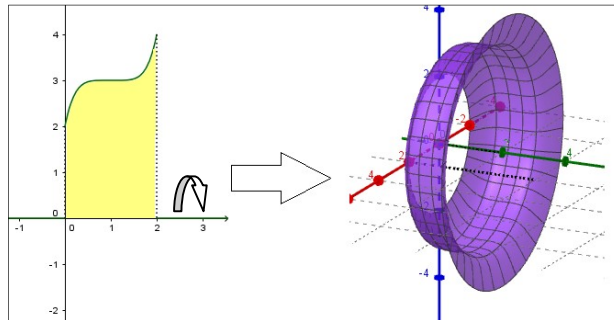
Considere R uma região plana e r uma linha reta (ou eixo) que pertence ao mesmo plano de R podendo tocá-la ou não. Rotacionando-se R em torno de r , obtém-se uma região no espaço tridimensional chamada de sólido de revolução. A reta em torno da qual se faz a revolução é denominada eixo de revolução.

Suponha que a região R em questão seja delimitada pela curva $y = f(x)$, com f função contínua em $[a, b]$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Suponha o eixo x como o de rotação. Neste caso a secção transversal do sólido tomada perpendicularmente ao eixo x no ponto x é um disco de raio $f(x)$. A área da região R é $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Assim, por (6), o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x (Figura 4) é dado por:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx. \quad (8)$$

Como as secções transversais têm a forma de disco, a aplicação dessa fórmula é conhecida como "método dos discos" (Figura 4).

Figura 4 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x .



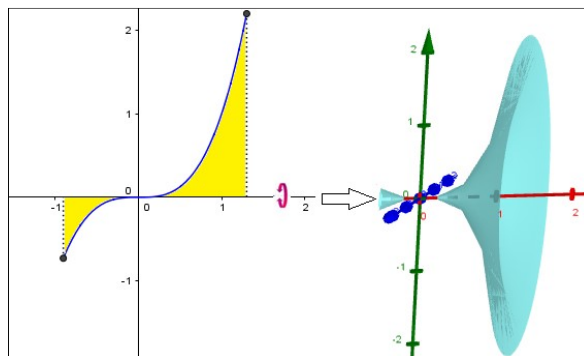
Fonte: a autora.

No caso apresentado na figura 5 em que temos um sólido obtido pela rotação da função $y = x^3$, com $0,9 \leq x \leq 1,3$, em torno do eixo das abscissas o volume é dado por:

$$V = \int_{-0,9}^{1,3} \pi(x^3)^2 dx = \pi \frac{x^7}{7} \Big|_{-0,9}^{1,3}.$$

Portanto, $V = \pi(0,06833 + 0,89641) = \pi \cdot 0,96474 \cong 3,031$.

Figura 5 - Sólido de revolução obtido pela rotação da função $y = x^3$ em torno do eixo das abscissas.



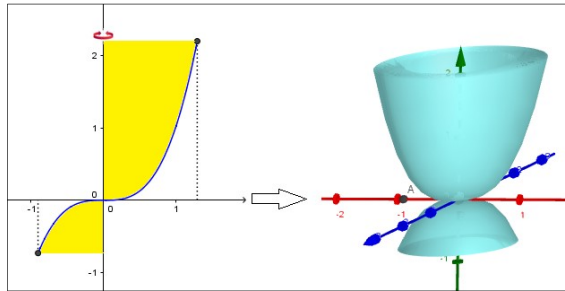
Fonte: a autora.

Serão considerados também os casos em que o eixo de rotação é o eixo y como no exemplo apresentado na figura 6 em que temos um sólido obtido pela rotação da função $y = x^3$, com $-0,73 \leq y \leq 2,2$, em torno do eixo das ordenadas o volume é dado por:

$$V = \int_{-0,73}^{2,2} \pi(\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \left(\frac{x^{5/3}}{5/3} \Big|_{-0,73}^{2,2} \right) = \pi \cdot 258793.$$

Então, $V \cong 8,13$.

Figura 6 - Sólido de revolução obtido pela rotação da função $y = x^3$ em torno do eixo das ordenadas.

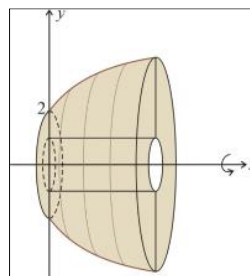


Fonte: a autora.

3.5 VOLUME POR ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO X

O método dos discos pode ser estendido para o método das arruelas. Este método é aplicável aos sólidos de revolução quando a seção transversal é um anel circular de raio maior $f(x)$ e raio menor $g(x)$, x em $[a, b]$ (Figura 7).

Figura 7 - Imagem de um anel circular de raio maior $f(x)$ e raio menor $g(x)$.



Fonte: ebah - EP13 - C2-2013-1 - Gabarito.⁴

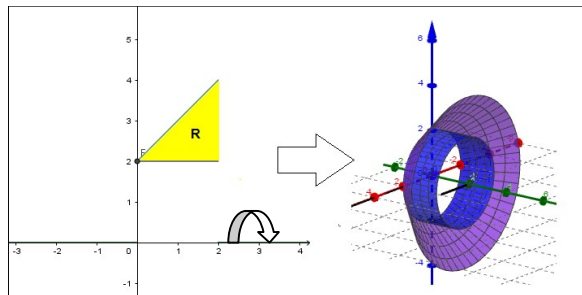
Neste caso, a área da seção transversal é dada pela área do círculo maior menos a área do círculo menor, isto é, $A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi\{[f(x)]^2 -$

⁴ Disponível em: <<http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAAwUwAB-36.jpg>>. Acesso em maio de 2017.

$[g(x)]^2$. Assim, por (6), o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x (Figura 8) é dado por:

$$V = \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx. \quad (9)$$

Figura 8 - Sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x .



Fonte: a autora.

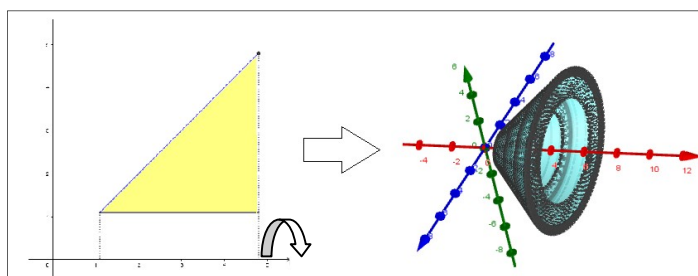
Calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada pelas retas $y = 1$, $y = x$ e $x = 4$ em torno do eixo das abscissas. O sólido de revolução gerado terá como secção transversal um anel (Figura 9) cujo volume pode ser calculado por:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 dx. \quad (10)$$

Considerando, $a = 1$, $b = 4$, $f(x) = x$ e $g(x) = 1$, teremos:

$$V = \int_1^4 \pi(x)^2 dx - \int_1^4 \pi(1)^2 dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^4 = 18\pi.$$

Figura 9 - Rotação da região limitada pelas retas $y = 1$, $y = x$ e $x = 4$.



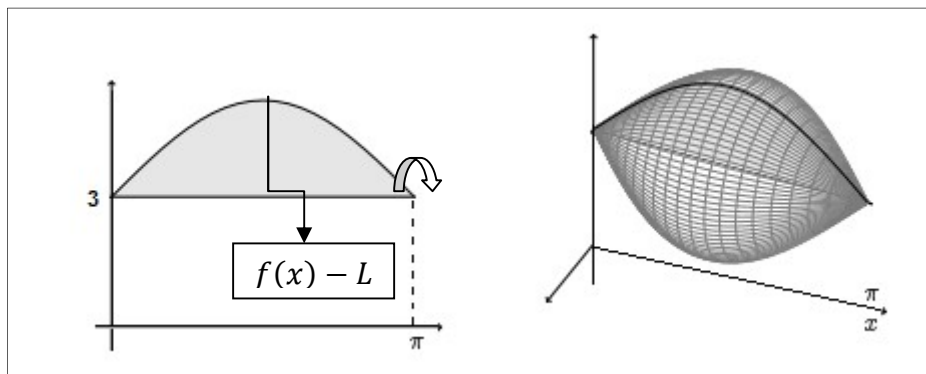
Fonte: a autora.

Como as secções transversais têm a forma de arruelas, a aplicação dessa fórmula é conhecida por "método das arruelas".

Se o eixo de revolução é horizontal, ou seja, for a reta $y = L$ (Figura 10), teremos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx. \quad (11)$$

Figura 10 - Rotação da função $y = \text{sen}x + 3$, limitada pelo intervalo $[0, \pi]$, em torno da reta $y = 3$.



Fonte: adaptado de e-scola⁵.

Obtendo o volume da região determinada pela rotação da função $f(x) = \text{sen}x + 3$, limitada pelo intervalo $[0, \pi]$, em torno da reta $y = 3$.

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx = \pi \int_0^\pi [(\text{sen}x + 3) - (3)]^2 dx = \pi \int_0^\pi (\text{sen}x)^2 dx$$

Como $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$ (12) e $\text{cos}(2x) = \text{cos}^2x - \text{sen}^2x$ (13), subtraindo a equação (13) da equação (12), teremos: $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x - (\text{cos}^2x - \text{sen}^2x) = 1 - \text{cos}(2x)$, e, então que $\text{sen}^2x = \frac{1}{2}[1 - \text{cos}(2x)]$. E então, substituindo sen^2x na integral teremos:

$$V = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}[1 - \text{cos}(2x)] dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\text{sen}(2x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Se o eixo de revolução é vertical, ou seja, for a reta $x = M$, temos:

⁵ Disponível em: < https://e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=1&id_materia=6&id_capitulo=72&Itemid=220>. Acesso em julho de 2017.

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy. \quad (14)$$

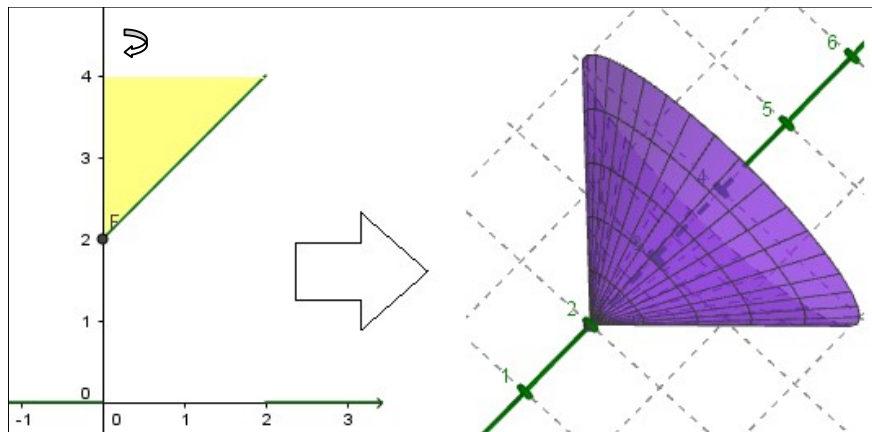
3.6 VOLUME POR DISCOS E ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO Y

Quando uma região R é girada em torno do eixo y o método dos discos e arruelas se aplica analogamente ao caso do eixo x .

Então o volume pelo método dos discos em torno do eixo y pode ser representado graficamente conforme a figura 11 e é dado por:

$$V = \int_c^d \pi [u(y)]^2 dy. \quad (15)$$

Figura 11 - Volume pelo método dos discos em torno do eixo y .

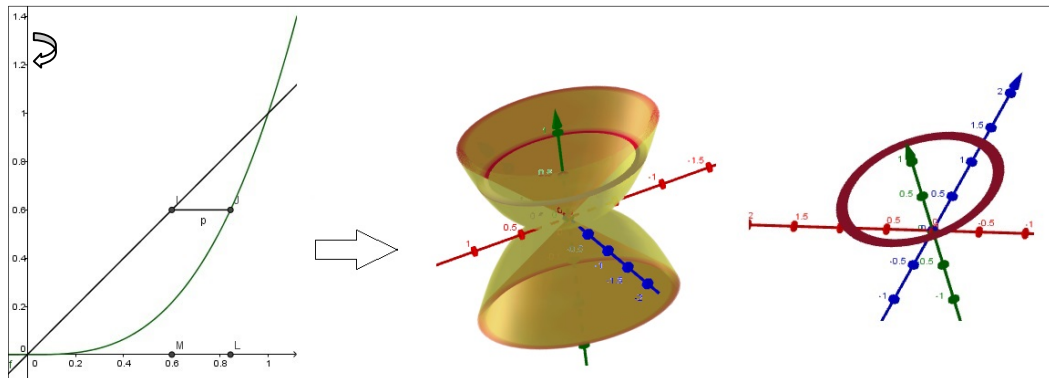


Fonte: a autora.

O volume pelo método das arruelas em torno do eixo y pode ser representado graficamente conforme a figura 12 é dado por:

$$V = \int_c^d \pi \{ [w(y)]^2 - [v(y)]^2 \} dy. \quad (16)$$

Às vezes, o sólido de revolução é gerado em torno de um eixo que pode ser paralelo a " x " ou a " y ". O método dos anéis circulares, pode ser aplicado, desde que se identifique o raio do giro.

Figura 12 - Volume pelo método das arruelas em torno do eixo y .

Fonte: a autora.

3.7 VOLUME POR CAMADAS CILÍNDRICAS

Quando a área da secção transversal não puder ser facilmente encontrada ou a integração for muito difícil, pode-se utilizar o "método das cascas cilíndricas".

Seja f contínua e não-negativa em $[a, b]$ e seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. V é o volume do sólido de revolução S gerado pela rotação da região R em torno do eixo y .

Uma camada cilíndrica é um sólido envolvido por dois cilindros retos concêntricos. O volume V de uma camada cilíndrica cujo raio interno é r_1 , raio externo é r_2 e altura é h pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 V &= [\text{área da secção transversal}] \cdot [\text{altura}] \\
 &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \cdot h \\
 &= \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot h \\
 &= \pi(r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1) \cdot h \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{2}(r_2 + r_1) \right] \cdot h \cdot (r_2 - r_1)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Porém, $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ é o raio médio da camada e $r_2 - r_1$, sua espessura; assim

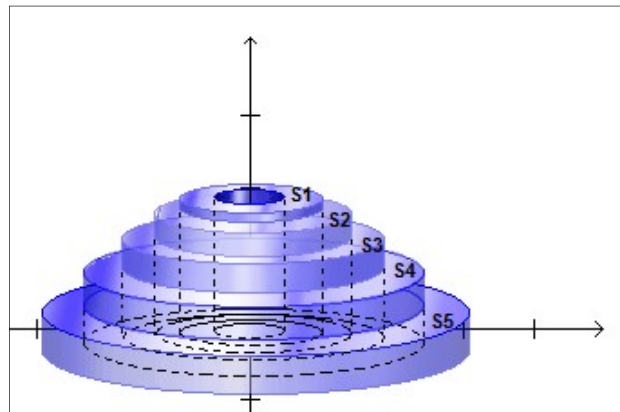
$$V = 2\pi \cdot [\text{raio médio}] \cdot [\text{altura}] \cdot [\text{espessura}]. \tag{18}$$

Considerando o sólido de revolução S divide-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e, dessa forma, subdivide-se a região R em n faixas, R_1, R_2, \dots, R_n . Ao girar a região R em torno do eixo y , cada faixa gera um sólido. Esses sólidos S_1, S_2, \dots, S_n em "forma de tubo", alinhados um dentro do outro, juntos, formam a

completude do sólido S . Logo, o volume V do sólido (Figura 13) pode ser obtido somando-se os volumes dos tubos; ou seja,

$$V = V(s_1) + V(s_2) + \dots + V(s_n). \quad (19)$$

Figura 13 - Volume de um sólido por camadas cilíndricas.



Fonte: adaptado de e cálculo⁶.

Como os tubos terão superfícies superiores curvas, não haverá uma fórmula simples para seus volumes. Mas, se as faixas forem finas, pode-se aproximar cada uma por um retângulo. Esses retângulos, quando giram em torno do eixo y , produzem camadas cilíndricas cujos volumes se aproximam muito dos volumes gerados pelas faixas originais. Somando os volumes das camadas cilíndricas, podemos obter uma soma de Riemann que aproxima o volume V e, tomando o limite das somas de Riemann, podemos obter a integral do volume V .

Suponha que a k -ésima faixa se estenda do ponto x_{k-1} ao ponto x_k e que a extensão dessa faixa seja $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

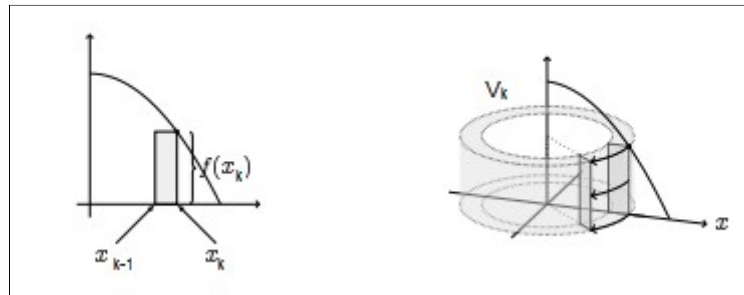
Se x_k^* for o ponto do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e se conseguirmos um retângulo de altura $f(x_k^*)$ acima desse intervalo, então, fazendo esse retângulo girar em torno do eixo y , obtemos uma camada cilíndrica de altura $f(x_k^*)$, raio x_k^* e espessura Δx_k . A partir de (18), o volume V_k (Figura 14) dessa camada cilíndrica é

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (20)$$

⁶

Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/integrais/aplicacoes_integral/volumes_solidos/volumes_solidos.htm. Acesso em julho de 2017.

Figura 14 - Volume de uma camada cilíndrica.



Fonte: adaptado de e-scola⁷.

Somando os volumes das n camadas cilíndricas, obtemos a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (21)$$

Tomando o limite quando n cresce e a extensão dos subintervalos tende a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (22)$$

Resumindo, teremos o seguinte resultado. Seja f contínua e não-negativa em $[a, b]$ e seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. O volume V do sólido de revolução S gerado pela rotação da região R em torno do eixo y e é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (23)$$

7

Disponível em: <https://e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=&id_materia=6&id_capitulo=72&id_pagina=164&Itemid=220>. Acesso em julho de 2017.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA E APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA: ESTUDO DE CASO

A proposta de plano de aula foi aplicada aos alunos do 3º ano do Ensino Médio do Curso Técnico de Eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, na cidade de Novo Hamburgo, no estado do Rio Grande do Sul, no terceiro trimestre do ano de 2016. As atividades foram realizadas no período do contraturno para os alunos interessados. A avaliação do trabalho não contou como nota para a disciplina.

A Fundação Liberato é uma escola de Ensino Médio Técnico Integrado, referência na região Vale do Sinos por seu ensino de qualidade e por oferecer inúmeras oportunidades aos seus alunos, que trabalha com alunos de mais de 50 municípios da região, onde a matemática é componente curricular nos três primeiros anos, dos quatro anos de ensino presencial que a escola oferece.

Embora a Fundação Liberato receba os livros fornecidos pelo MEC, nenhum dos disponíveis no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) atende as demandas dos Cursos de Ensino Médio Técnico Integrado da escola. Devido ao fato de os cursos terem uma distribuição do programa de matemática diferente das escolas regulares alguns professores optam por não utilizar os livros didáticos para que outros professores possam utilizar de dois ou três volumes da coleção e então obter o apoio necessário para sua distribuição curricular. Em especial, os alunos da eletrônica trabalham com o volume 1 da coleção "Matemática - Ciências e Aplicações" de Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e de Almeida no 1º ano do Ensino Médio quando estudam conjuntos, funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, trigonometria no triângulo retângulo e progressões aritmética e geométrica. No 2º ano do Ensino Médio, estes alunos trabalham com os volumes 2 e 3 desta coleção pois estudam matrizes, determinantes, sistemas lineares, números complexos, geometria analítica, trigonometria e funções trigonométricas. Por fim, no 3º ano do Ensino Médio os alunos estudam polinômios e funções polinomiais, equações algébricas, noções de limites, derivadas e integrais, geometria plana, geometria espacial, análise combinatória e probabilidade, sem apoio de livro didático.

A Fundação conta em sua estrutura com seis laboratórios físicos de informática. Quatro deles com 32 computadores, que comportam qualquer uma de suas turmas, visto que o número máximo de alunos por turma é de 32 alunos. E os outros dois laboratórios possuem 22 computadores. Todos os laboratórios de informática fixos contam com Data Show instalado. Além destes laboratórios a Fundação também conta com dois laboratórios de informática itinerantes, um composto com 32 notebooks e o outro composto por 32 net books. A internet wi-fi não funciona de forma excelente, mas a rede por cabos funciona muito bem.

Um dos eventos organizados pela escola é a Mostratec: Mostra Internacional de Ciência e Tecnologia, cujos trabalhos científicos são produzidos por jovens cientistas do Ensino Médio ou Ensino Médio técnico do Brasil e de mais de 20 outros países, em diversas áreas do conhecimento. Em razão da escola organizar essa feira os alunos são motivados a realizar pesquisa desde o primeiro ano do Ensino Médio, tendo incluído na grade curricular a disciplina de Projetos de Pesquisa para os alunos de todos os cursos nos primeiros e segundos anos.

Para realizar as atividades os seguintes pré-requisitos eram necessários: encontrar funções para modelar objetos; construir funções no GeoGebra 3D; encontrar o valor do volume de estruturas a partir do GeoGebra 3D; calcular volume a partir de integrais aplicadas a funções conhecidas; calcular o valor de integrais definidas; saber utilizar o GeoGebra 3D em suas funções básicas; saber montar uma maquete; e saber aproximar volume de estruturas geométricas.

4.2 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

Como o curso de Eletrônica da Fundação Liberato já possui no seu plano de ensino de matemática a inserção de conceitos de limite, integral e derivada, pensamos numa proposta que utilizasse esses conhecimentos aplicados ao cálculo de volumes.

Proposta do trabalho: encontrar o volume de monumentos a partir de técnicas de integração ou outro método de melhor adequação, conferir os valores com o GeoGebra 3D e comparar esses valores ao volume real. Para facilitar a implementação da figura em 3D no *software* GeoGebra, foi também requisitado que os alunos realizassem uma maquete proporcional do monumento escolhido.

Primeiramente pensamos que as atividades pudessem ser realizadas individualmente. Mas como os alunos trocam ideias e conhecimentos com os colegas e a aprendizagem flui com facilidade nesse sistema e ainda podem discutir sobre suas respostas e analisar seus resultados, optamos por aplicar a atividade em duplas, apenas um aluno preferiu realizar a atividade sozinho e como havia um número ímpar de interessados foi permitida esta configuração.

Por conta da dificuldade em adequar as atividades deste projeto ao calendário e ao plano de ensino escolar solicitamos que os alunos interessados em realizar a proposta fossem no contraturno. Foram atendidos 33 alunos, apenas meninos, atendendo ao todo 16 duplas e o menino que optou por realizar a atividade individualmente.

O tempo de duração foi de 11 períodos de 50 minutos no 3º trimestre do ano de 2016.

Revisão de conteúdo: foi realizada uma revisão de integral definida já trabalhada no 2º trimestre de 2016 e trabalhado com os alunos cálculo de volume através de integrais a partir das técnicas de fatiamento, discos, arruelas e camadas cilíndricas. O livro de referência foi o Anton, volume 1.

Construção da maquete: num segundo momento os alunos deveriam construir uma maquete o mais fidedigna possível, proporcionalmente, ao monumento real, colocando a escala de redução utilizada. Foi a partir da maquete, que os alunos foram instigados a construir o projeto do monumento no GeoGebra 3D para então fazer a construção no *software*.

Assessoramento na construção da maquete e na construção com o *software* GeoGebra: no terceiro momento o grupo foi dividido em três grupos menores de 12, 11 e 10 alunos para que fosse possível uma atenção especial e um olhar mais singular aos trabalhos das duplas. Foi muito importante estarem em grupos menores para o assessoramento mais efetivo. Cada grupo foi atendido em 2 períodos. Os alunos construíram, a partir das dimensões da maquete, o esqueleto do monumento no *software* GeoGebra 3D com funções ou estruturas conhecidas. Por meio dessa inserção de dados, foi calculado o volume pelo *software* GeoGebra 3D; alguns alunos que não executaram a construção conforme solicitado, ou seja, a partir de estruturas em 3D, necessitaram utilizar outros métodos para encontrar o volume do sólido gerado pelo *software*.

No quarto momento foi solicitado aos alunos que calculassem o volume do monumento a partir das funções criadas no GeoGebra 3D ou outras escolhidas por aproximação de figuras cujas áreas ou volumes fossem facilmente calculáveis com as técnicas de integração estudadas, também foi pedido que fizessem um ajuste, devido a escala utilizada na montagem da maquete, que comparassem ao volume real do monumento e ao adquirido a partir da construção feita no *software* GeoGebra 3D. Além disso, que encontrassem os possíveis motivos de erros, caso existissem. Finalmente foi solicitado que os alunos comparassem, fisicamente, as maquetes por eles realizadas com as impressões 3D obtidas pelo *software* GeoGebra 3D.

Quadro 1 - Descrição das atividades, duração e objetivos.

Período	Atividade	Objetivos
1º, 2º e 3º	Explicação dos tipos de integração para cálculo de volumes de figuras geométricas espaciais. Lançamento da ideia de construção da maquete do monumento escolhido.	Compreender os conceitos de cálculo de volume a partir de técnicas de integração. Aplicar nos cálculos dos diferentes tipos de monumentos escolhidos. Escolher um monumento possível de se calcular o volume.
4º, 5º e 6º	Construção das maquetes dos monumentos.	Confeccionar as maquetes com o material levado pelos alunos.
7º e 8º	Construção do sólido no <i>software</i> GeoGebra 3D	Inserir e construir uma réplica proporcional do monumento no <i>software</i> GeoGebra 3D.
9º, 10º e 11º	Cálculo de volume a partir de integrais baseado nas funções ou estruturas obtidas na construção das réplicas no <i>software</i> GeoGebra 3D e comparação do volume obtido com o volume final. Análise de erro e conclusão.	Calcular o volume do sólido construído no GeoGebra 3D a partir das técnicas de integração estudadas no início do trabalho. Analisar as diferenças de cálculos obtidos e justificar o porquê deles.

Fonte: a autora.

4.3 AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados durante todo o processo, pela iniciativa, comprometimento e interação deles com as atividades. Também foram avaliados pela entrega do relatório das atividades e das maquetes ao final do trabalho.

5 RELATO DE EXPERIÊNCIA

A aula de técnicas de integração para cálculo de volumes foi ministrada no auditório da Fundação Liberato no turno da noite para todos os alunos de 3º e 4º anos do curso técnico de Eletrônica com participação voluntária. Todos os alunos convidados já possuíam conhecimento em técnicas de integração por partes, substituição, regras de integrações trigonométricas e domínio de cálculo de integral definida. O plano de trabalho da disciplina de matemática do ano de 2016 do curso técnico de eletrônica da Fundação Liberato encontra-se no anexo A desse trabalho. Para o andamento da aula foram revisados conceitos de integrais definidas, cálculo de áreas entre curvas e reversão das variáveis x e y .

Após essas revisões foram trabalhados os métodos de cálculo de volumes por fatiamento, discos e arruelas, perpendiculares aos eixos, camadas cilíndricas e suas variações.

Os alunos se mostraram bastante interessados. À medida que exemplos eram trabalhados diversas perguntas surgiam. Essas perguntas variavam desde as melhores técnicas para o cálculo de volumes de objetos específicos até sobre noções de conceitos que para eles não havia ficado claro ainda.

De uma forma geral, a aula explicativa foi bastante produtiva. Todos os alunos presentes acompanharam a aula por meio de projeção e das cópias dos slides impressas para eles. Sanaram suas dúvidas e relataram terem aprendido muito com a experiência.

Após a aula sobre técnicas de integração, os alunos do 3º ano foram orientados a, em duplas, escolherem um monumento cujo cálculo do volume pudesse ser obtido com uma das técnicas de integração estudadas. Um aluno optou por fazer o trabalho individualmente. Além disso deveriam pensar como representar seus monumentos a partir de maquetes, pois precisariam levar os materiais necessários para a escola em um segundo momento. E então construir a maquete do monumento escolhido usando de suas criatividade e destrezas. Para isso estava à disposição dos alunos paquímetros e régua.

Cada dupla escolheu o monumento e precisou justificar a escolha. O contexto histórico vinculado a origem do monumento, embora pudesse ser um fator motivador para a escolha e interesse dos alunos não foi solicitado porque o tempo para a realização das atividades era muito pequeno e uma pesquisa com este propósito e

magnitude requereria um tempo de execução mais prolongado. A orientação na hora da escolha era que os alunos pudessem aplicar um dos métodos estudados para o cálculo do volume do monumento.

Os monumentos escolhidos foram os seguintes: Catedral São Sebastião da cidade do Rio de Janeiro, Monumento ao Expedicionário da cidade de Porto Alegre, Arco do Triunfo da cidade de Paris na França (escolhido por dois grupos), Miyajima Torii de uma das províncias de Hiroshima no Japão, Caixa da Água da Fundação Liberato em Novo Hamburgo (outro escolhido por dois grupos), Obelisco da Cidade de São Paulo, Batistério da cidade de Pisa na Itália, Big Ben da cidade de Londres na Inglaterra, Coliseu da cidade de Roma na Itália, Edifício Copan da cidade de São Paulo, Centro Administrativo Fernando Ferrari, Obelisco da cidade de Buenos Aires na Argentina, Estádio Olímpico Monumental da cidade de Porto Alegre, O "olho" do museu Oscar Niemeyer da cidade de Curitiba, Templo Kukulcan da cidade de Tinum no México, e, por fim, uma peça que representa o Rei no tabuleiro de xadrez.

Este último grupo havia escolhido o Monumento ao Sapateiro da Cidade de Novo Hamburgo (Figura 15), porém não era um monumento próprio para a aplicação das técnicas de integração estudadas. Portanto, foi solicitado que eles mudassem de monumento. Sem muita criatividade, eles pediram para calcular o volume da peça Rei que estava no tabuleiro de xadrez a frente deles, o que foi permitido. Assim o trabalho precisou ser readequado e, por ficar muito diferente dos demais, optamos por tirar sua descrição das atividades.

Figura 15 - Imagem do Monumento ao Sapateiro.



Fonte: Jornal NH⁸.

⁸Disponível em: <http://www.jornalnh.com.br/_conteudo/2016/04/multimedia/fotos/306228-novo-hamburgo-comemora-nesta-terca-feira-89-anos.html>. Acesso em junho de 2017.

Abaixo seguem os cálculos para a obtenção dos resultados, fotos dos monumentos escolhidos e de suas maquetes representativas, bem como a justificativa para a escolha do monumento. Também estará descrito o passo a passo de cada grupo para obter as medidas reais para os monumentos, seus volumes por integrais e sua representação no *software* GeoGebra 3D. Os dados e as formas com que cada dupla trabalhou e escreveu no relatório foi preservada mesmo quando ocorreram erros algébricos, conceituais ou de medidas. Somente após a descrição do passo a passo feito pelos alunos é que esses erros foram relatados e corrigidos.

5.1 DESCRIÇÃO DOS TRABALHOS QUE FORAM CONSTRUÍDOS CONFORME OS OBJETIVOS PROPOSTOS

Seguem os trabalhos que aceitaram o convite à modelagem e cumpriram as etapas de resolução de problemas nos seus cálculos e conceitos:

5.1.1 Catedral São Sebastião da cidade do Rio de Janeiro

Um dos alunos conheceu pessoalmente a Catedral (Figura 16) e ficou encantado com sua arquitetura. Também a dupla acreditou que o formato se ajustava muito bem para aplicação das técnicas de integração estudadas.

Figura 16 - Imagem da Catedral São Sebastião do Rio de Janeiro.



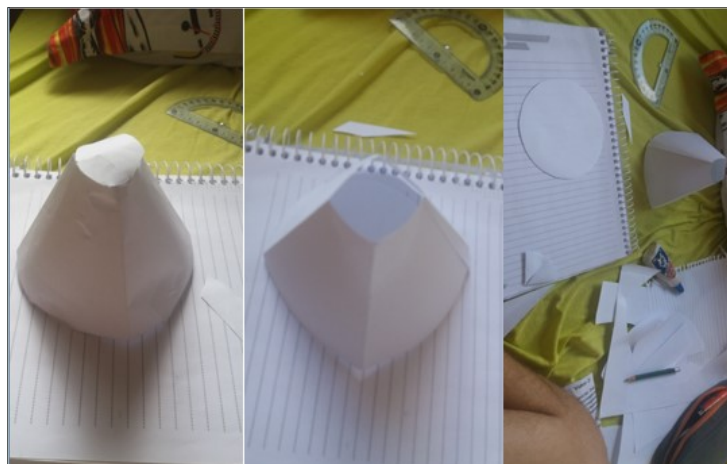
Fonte: Alo Rio de Janeiro⁹.

⁹ Disponível em: < <http://aloriodejaneiro.com/2015/05/04/catedral-metropolitana-do-rio-de-janeiro/>>. Acesso em abril de 2017.

5.1.1.1 Construção da Maquete

Os alunos construíram a maquete (Figura 17) com uma planificação em papel de um tronco de cone. Para representar os vitrais os alunos fizeram vincos no papel de modo a dar uma ideia de plano sobre a lateral do tronco confeccionando uma estrutura com escala de 1:1000.

Figura 17 - Construção da maquete da Catedral São Sebastião, RJ.



Fonte: a autora.

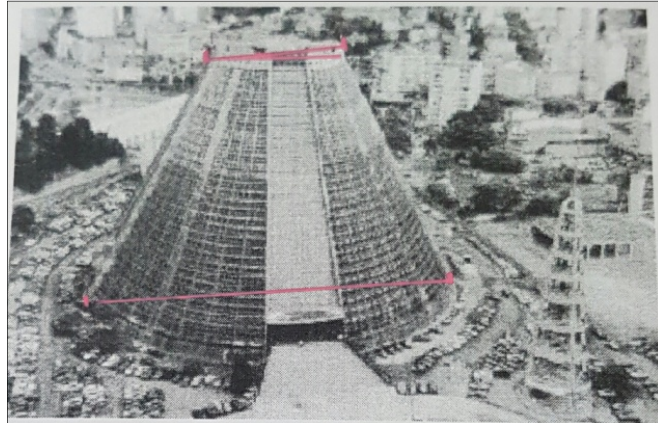
5.1.1.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

A dupla pesquisou no site da Catedral¹⁰, na aba "Construção" e encontrou as seguintes informações de medidas para ela: "75 metros de altura externa e 64 metros de altura interna, 106 metros de diâmetro externo e 96 de diâmetro interno, cada vitral: $64,5 \times 17,8 \times 9,6$ metros; área de 8.000m^2 ". A partir dessas informações contidas no site pode-se constatar que a base da Catedral seria formada por uma coroa circular de raio do círculo maior igual a 53 metros e o raio do círculo menor igual a 48 metros, o que equivale a dizer que as paredes da construção possuem uma espessura de 5 metros.

¹⁰ Disponível em: < <http://www.catedral.com.br/construcao.php>>. Acesso em abril de 2017.

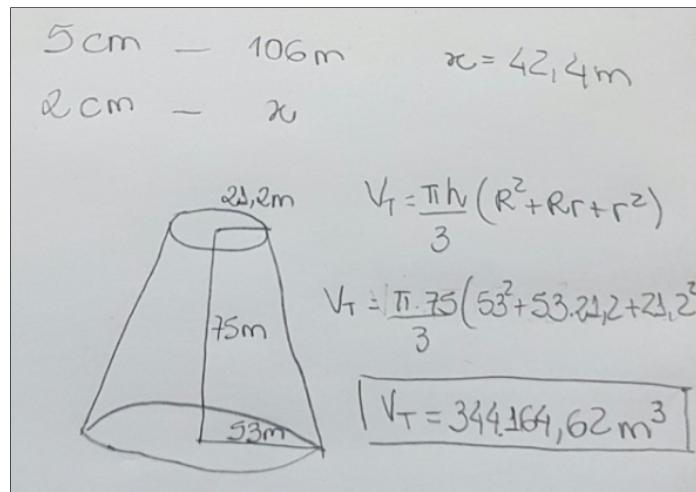
Para encontrar o volume real, a partir das medidas fornecidas no site, uma foto com a imagem real foi impressa (Figura 18) e por proporção foram obtidas as demais medidas (Figura 19). O volume então foi obtido conforme segue:

Figura 18 - Imagem da Catedral usada para calcular o volume real por proporção.



Fonte: Catedral São Sebastião - 1998¹¹.

Figura 19 - Cálculo realizado pelos alunos para obter o volume real do monumento, incluindo suas paredes.



Fonte: acervo dos alunos.

Obtém-se assim que o volume da Catedral foi de:

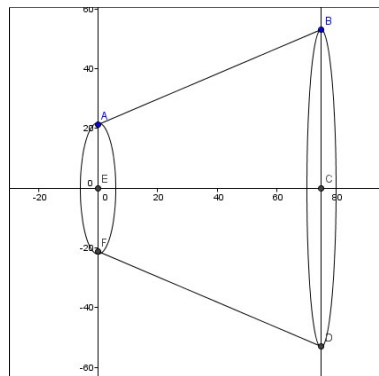
$$V_{Catedral} = 344.164,62\text{ m}^3.$$

¹¹ Disponível em: < http://www.acmerj.com.br/CMRJ_HIST.htm>. Acesso abril de 2017.

5.1.1.3 Cálculo do Volume por Integral

Para encontrar a medida do volume da Catedral por integral os alunos projetaram a estrutura da Catedral no GeoGebra 3D (Figura 20) para encontrar a função a ser integrada e, após, utilizaram o *software* "Microsoft Mathematics¹⁵" para obter o resultado da integração.

Figura 20 - Representação da estrutura da Catedral no *software* GeoGebra 3D.



Fonte: acervo dos alunos.

A dupla optou por integrar a função $f(x) = \frac{53}{125}x + 21,2$, com $0 \leq x \leq 75$ e usou o método de integração por discos. Para isso, escreveu no *software* a seguinte expressão:

$$\int_0^{75} \pi \left(\frac{53}{125}x - 21,2 \right)^2 dx$$

O resultado obtido pode ser verificado conforme figura 21.

Figura 21 - Imagem do resultado obtido no *software*.

Entrada	$\int_0^{75} \pi \left(\frac{53}{125}x + 21,2 \right)^2 dx$
Saída	109551 π
Saída Decimal	344164.61679341545

Fonte: acervo dos alunos.

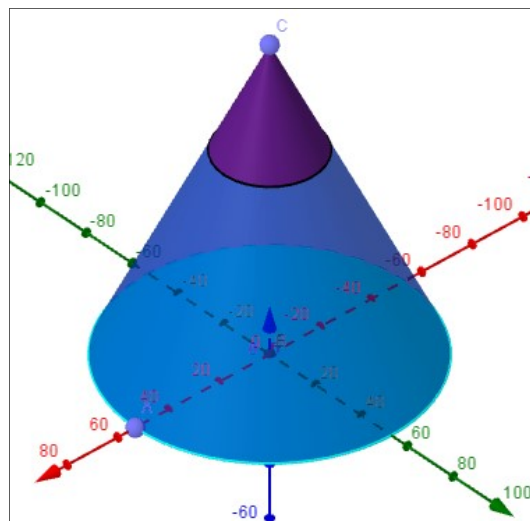
5.1.1.4 Representação no GeoGebra 3D

Esta dupla encontrou uma dificuldade na hora de projetar a maquete no GeoGebra 3D pois neste *software* não está habilitada a construção de troncos de cones ou pirâmides. Em virtude disso, foi solicitado que a dupla construísse o cone gerador do tronco. Posteriormente, construísse também o cone gerado pela secção para obtenção do tronco de mesmo vértice do cone gerador.

Então, para construir o objeto os alunos realizaram a criação mais simples, marcaram os pontos de raio e altura para dois cones e então utilizaram a opção para criar os cones.

Os alunos ficaram chateados em razão da representação (Figura 22) não estar fiel àquilo que eles gostariam de apresentar. Foi tentado junto com eles manipular a transparência dos objetos e alterar suas cores para tentar chegar ao resultado esperado porém nenhuma combinação tomou a forma esperada.

Figura 22 - Projeto da Catedral São Sebastião no GeoGebra 3D.

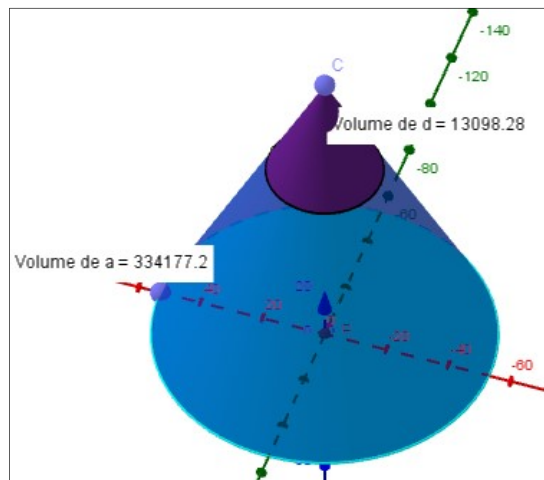


Fonte: a autora.

5.1.1.5 Volume no GeoGebra 3D

O volume disponibilizado no GeoGebra dos dois cones (Figura 23) permitiu aos alunos realizar uma subtração para encontrar o volume do tronco de cone.

Figura 23 - Volume da construção no GeoGebra 3D.



Fonte: acervo dos alunos.

$$\text{Volume cone maior} = 334177,2 \text{ u. v.};$$

$$\text{Volume cone menor} = 13098,28 \text{ u. v.};$$

$$\text{Volume do tronco de cone} = 321078,92 \text{ u. v.}$$

5.1.1.6 Análise de Erro

O erro encontrado entre o volume real e o volume por integral foi insignificante, e em relação ao erro da representação do sólido no GeoGebra 3D foi de aproximadamente 6,7%, provavelmente causado por alguma falha de percepção em relação aos pontos marcados.

5.1.1.7 Opinião Sobre o Trabalho

De acordo com a dupla: "o trabalho não foi muito complexo, mas certamente não apresentou muitas facilidades, desde a confecção da maquete até os cálculos das integrais de volume. Logo, como todo jovem estudante do ensino médio, achamos o trabalho bem "chatinho"."

O grupo ainda não conhecia o GeoGebra 3D, pelo menos não totalmente, mas gostou do *software* pois é possível trabalhar com gráficos de forma simples. Relatam ainda que o trabalho também serviu para reforçar que deixar as coisas pra última hora pode causar problemas.

Afirmaram ainda que para o monumento escolhido o cálculo por integral foi bastante trabalhoso. Pois enquanto na Geometria Espacial bastaria colocar os dados dos raios (da base maior e da base menor) e altura do tronco de cone na fórmula para o cálculo do volume de tronco de cone, no cálculo por integral foi necessário descobrir a função que gerasse o tronco de cone. Porém afirmam que provavelmente, em algum momento posterior, eles não vão mais lembrar da fórmula para volume de troncos de cone e então, para calcular, ou farão a subtração do volume de dois cones, como feito na representação no GeoGebra 3D, ou utilizarão o recurso de calcular por integral pois será mais difícil esquecer dele.

5.1.2 Caixa da Água da Fundação Liberato em Novo Hamburgo - Grupo 1

A dupla justificou sua escolha alegando que a Caixa da Água da Fundação Liberato (Figura 24) é vista praticamente todos os dias pelos estudantes, ou seja, de certa forma faz parte do dia a dia dos alunos. Para realizar o trabalho a dupla solicitou na Prefeitura da escola uma cópia da planta baixa da Caixa da Água (Anexo B).

Figura 24 - Caixa da Água da Fundação Liberato.



Fonte: acervo dos alunos.

5.1.2.1 Construção da Maquete

Os alunos, a fim de deixar a maquete (Figura 25) o mais fiel possível à estrutura real da construção, confeccionaram, com autorização, a maquete em casa pois utilizaram gesso como matéria prima.

Figura 25 - Confeção da maquete Caixa da Água da Fundação Liberato (Grupo 1).



Fonte: acervo dos alunos.

Os alunos construíram a maquete em gesso e numa escala 1:50 e de forma proporcional.

5.1.2.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para o cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas utilizaram a fórmula para troncos de cone

$$V = \left(\frac{1}{3}\right) \pi h (R^2 + Rr + r^2), \quad (24)$$

cujas medidas reais de altura, raio da base e raio da secção são, respectivamente, 20,5m, 2,5m e 1m.

$$V = \left(\frac{1}{3}\right) \pi \cdot 20,5m \cdot ((2,5m)^2 + (2,5m \cdot 1m) + (1m)^2)$$

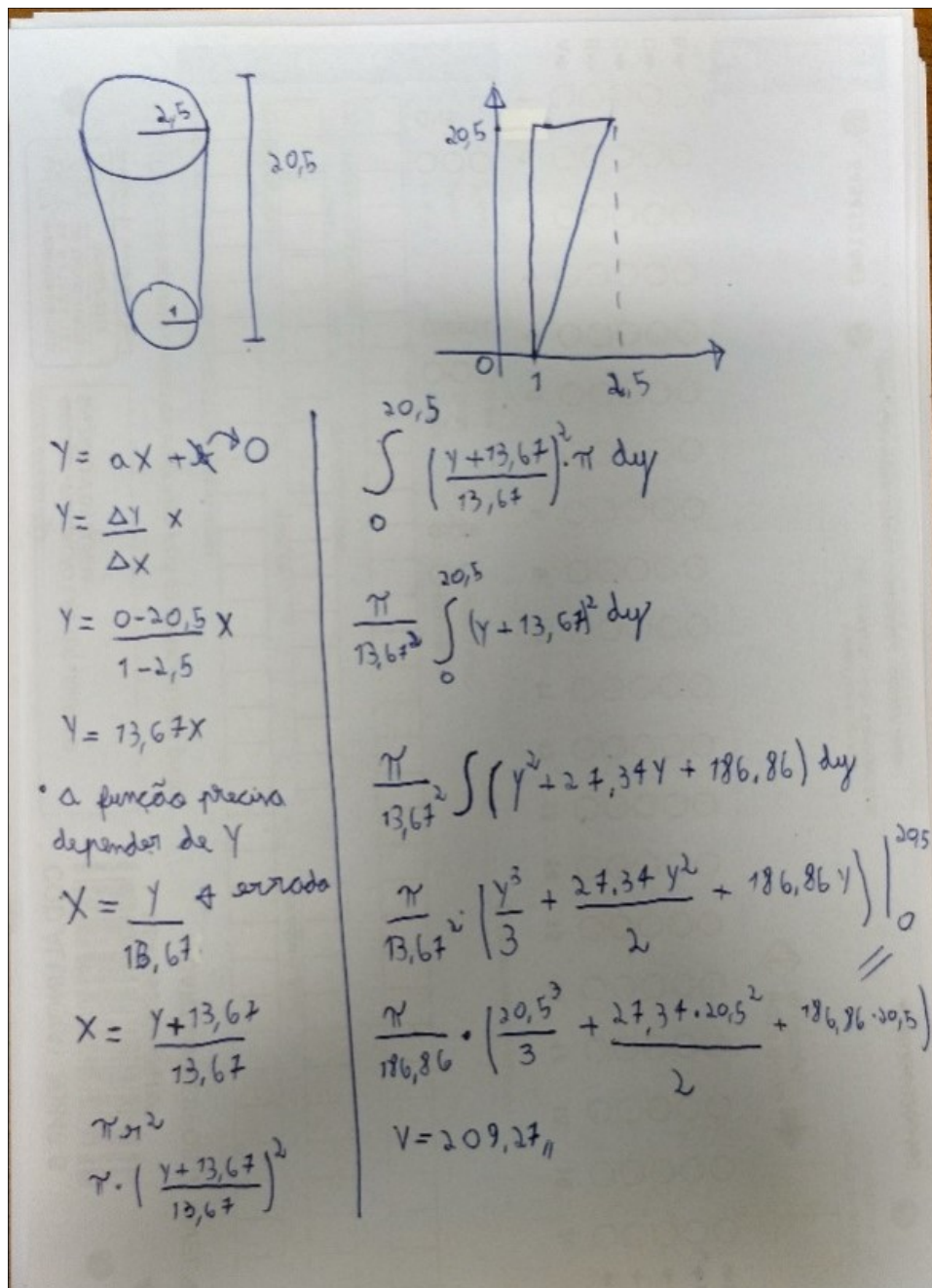
$$V = 66,625\pi m^3$$

$$V_{Caixa\ d'\ \acute{A}gua} \cong 209,308m^3$$

5.1.2.3 Cálculo do Volume por Integral

Na figura 26 está o cálculo realizado pelos alunos para obter o volume do monumento por integral.

Figura 26 - Cálculo do volume da Caixa da Água por integral.

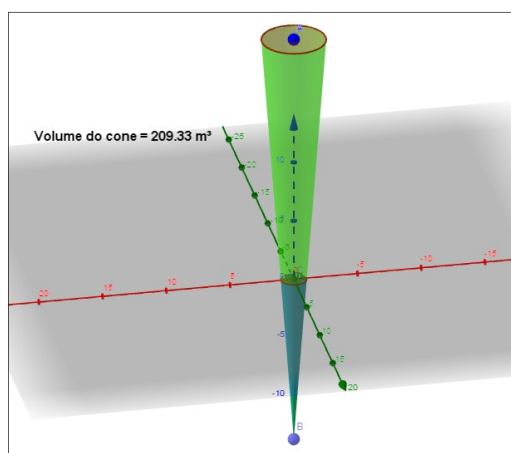


Fonte: a autora.

5.1.2.4 Representação no GeoGebra 3D

Mais um grupo utilizou a estratégia de sobreposição de dois cones de mesmo vértice para a construção no GeoGebra 3D de um tronco de cone (Figura 27).

Figura 27 - Representação do monumento no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.2.5 Volume no GeoGebra 3D

A dupla relata que primeiramente, para a criação do sólido, utilizaram 2 cones, sendo o primeiro com raio $2,5u.m.$, ponto inicial em $20,5u.m.$ e ponto final em $-13,67u.m.$. O segundo possuía raio igual a $1u.m.$, ponto inicial na origem e ponto final em $-13,67u.m.$.

Afirmam que isto foi necessário pois o GeoGebra 3D não oferece um meio direto para calcular ou estruturar o volume de um tronco de cone. Portanto, precisaram criar dois cones, e o volume do tronco é o volume do maior cone menos o volume do menor. Obtendo, com isso, um volume de $209,33u.v.$.

5.1.2.6 Análise de Erro

Os resultados obtidos durante a realização do trabalho estão abaixo.

Volume a partir das integrais = $209,27u.v.$

Volume a partir da planta baixa = $209,3m^3$.

Volume a partir do GeoGebra 3D = $209,33u.v.$

A dupla descreve que ambas as variações das integrais e do GeoGebra 3D em relação à planta baixa são de aproximadamente $0,014\%$ e que os erros ocorreram devido a utilização de aproximações e arredondamentos de números, como, por exemplo, o número π .

5.1.2.7 Opinião Sobre o Trabalho

Os alunos relataram que o trabalho realizado foi, de certa forma, interessante, pois permitiu uma aplicação prática de conteúdos vistos anteriormente somente de forma teórica.

Que o GeoGebra 3D não era conhecido, mas que após este trabalho, ele se mostrou um excelente e completo *software* para sua proposta, possuindo diversas funcionalidades. Com esta atividade, observam que foi aprendido a calcular volume por meio de integrais e também a utilizar o *software* GeoGebra 3D, que eventualmente, no futuro, poderá ser útil para algum outro trabalho que poderá ser desenvolvido.

5.1.3 Caixa da Água da Fundação Liberato em Novo Hamburgo - Grupo 2

A dupla justificou que o monumento é de grande importância e necessidade para a Fundação Liberato pois faz o fornecimento de água para a escola inteira. Além de servir como um ponto de referência e encontro aos que frequentam a escola.

5.1.3.1 Construção da Maquete

Para construir a maquete a dupla utilizou um pedaço de folha de ofício recortada e montada em forma de tronco de cone e um pedaço de cartolina utilizado como suporte para a maquete.

Os alunos construíram a maquete em papel (Figura 28) em uma escala 1:100 proporcional.

Figura 28 - Maquete da Caixa da Água da Fundação Liberato (Grupo 2).



5.1.3.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

O grupo realizou os cálculos para o volume real iguais aos do grupo 1, que encontra-se no item 5.1.2.2 e encontrou os mesmos valores para este. Os dados foram obtidos a partir da planta baixa da construção emprestada pela outra dupla.

5.1.3.3 Cálculo do Volume por Integral

Projetando a altura do monumento (20,5u.m.) no eixo das abscissas e os pontos (0,1) e (20,5,2,5) os alunos observaram que precisavam de uma função afim para rotacionar em torno do eixo x . Fizeram então um sistema para encontrar a função desejada da seguinte forma.

$$f(x) = \begin{cases} 1 = b \\ 2,5 = 20,5a + b \end{cases}$$

$$1,5 = 20,5a \Rightarrow a = \frac{1,5}{20,5}$$

Sabendo que: $y = ax + b$:

$$f(x) = \frac{1,5x}{20,5} + 1.$$

Tomando vários discos de raio $f(x)$, cuja área é calculada através da equação $A(x) = \pi[f(x)]^2 dx$, os alunos calcularam o volume do sólido a partir da técnica de integração por discos.

Assim o volume do sólido encontrado foi:

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx. \quad (25)$$

$$\int_0^{20,5} \pi \left(\left(\frac{1,5x}{20,5} + 1 \right)^2 \right) dx.$$

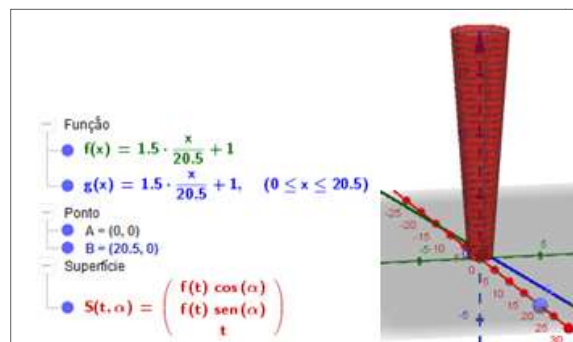
$$\mathbf{Volume = 209,3091m^3.}$$

5.1.3.4 Representação no GeoGebra 3D

Esta dupla, para contornar o problema da ausência de uma figura que projetasse o tronco de um cone (Figura 29), obteve uma função que modelasse o problema que estavam tentando resolver. Porém os alunos não conseguiram obter o volume a partir do *software* pois ele utiliza-se das construções em 3D projetadas e,

nessa situação, embora a dupla tenha conseguido construir uma forma em 3D, eles não utilizaram as estruturas pré-construídas, conseguindo como figura apenas a casca externa da estrutura, impedindo, assim, que o *software* encontrasse o volume do objeto.

Figura 29 - Projeto Caixa D'Água da Fundação Liberato no GeoGebra 3D.

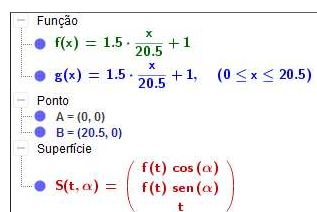


Fonte: a autora.

5.1.3.5 Volume no GeoGebra 3D

De acordo com o relatório entregue pela dupla: "é impossível obter o volume no GeoGebra 3D diretamente pois a opção fica disponível apenas para estruturas feitas com as formas geométricas padrões do *software*". Como a dupla projetou o sólido por funções (Figura 30), não tiveram como ver o volume da estrutura no programa.

Figura 30 - "Janela da Álgebra" da construção feita no *software* GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

Para projetar o monumento no *software* os alunos utilizaram uma função que projeta superfícies. Para tanto, escreveram o seguinte comando no campo de

entrada do programa: "*função* $S(t, \alpha): S = Superficie [f(t) * (\cos(\alpha)), f(t) * (\sin(\alpha)), t, t, x(A), x(B), \alpha, 0, 2\pi]$ ".

5.1.3.6 Análise de Erro

O erro foi de aproximadamente $0,1066m^3$, já que o volume real calculado é de $209,2025m^3$ e pela integral resultou em $209,3091m^3$, isto é 0,05% de erro aproximadamente.

No GeoGebra 3D não foi possível ver o volume, mas o grupo, analisando a diferença entre os volumes (real e pela integral), pode perceber que a diferença não é algo que afete significativamente a estrutura. Entretanto, os erros se devem aos arredondamentos feitos durante os cálculos.

5.1.3.7 Opinião Sobre o Trabalho

Para a dupla foi muito interessante realizar o trabalho, pois aprenderam um conteúdo novo que não aprenderiam numa disciplina regular e entenderam na prática como se dá o cálculo de volume de estruturas. Além disso, perceberam que através do trabalho puderam chegar ao volume muito próximo do real utilizando integral definida.

Acrescentam que não conheciam o *software*, mas o acharam bem interativo e de razoável manuseio. E que valeu a pena realizar o trabalho pois agora possuem mais uma ferramenta para utilizar quando necessário. Destacam ainda que aprenderam que existem várias formas de calcular o volume de diferentes estruturas por integrais definidas, cujo valor se aproxima do volume real e também a manusear razoavelmente bem o programa GeoGebra 3D.

Também descreveram que pesquisaram bastante para descobrir uma alternativa para projetar o sólido no GeoGebra 3D de forma perfeita e que, apesar do *software* não ter permitido a eles calcular o volume do sólido, estão contentes com o resultado gráfico obtido. Acrescentam uma crítica ao *software* pois, com as inúmeras ferramentas que ele possui, deveriam construir uma que "escondesse" uma estrutura projetada. Se assim o fizessem, vários problemas seriam solucionados. Se eles fizessem uma ferramenta geradora de troncos também

diminuiriam alguns problemas, não tantos quanto os resolvidos pela ferramenta que subtrai estruturas.

5.1.4 Obelisco da Cidade de São Paulo

O motivo da escolha do monumento (Figura 31) foi o "formato interessante". O grupo relata ainda que pretendia utilizar o Obelisco de Washington no trabalho mas não conseguiram encontrar as medidas reais. Pesquisando, na expectativa de encontrá-las, descobriram que havia um monumento similar na cidade de São Paulo e que possuía as informações necessárias para a obtenção do volume real do monumento.

Figura 31 - Obelisco da cidade de São Paulo



Fonte: Wikipedia - Obelisco de São Paulo¹².

5.1.4.1 Construção da Maquete

Para a maquete (Figura 32) os alunos construíram a estrutura em papel com algumas colagens pois não pensaram na planificação da estrutura, nem calcularam as medidas em representação. Escala utilizada foi de 1:300.

¹² Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Obelisco_de_S%C3%A3o_Paulo>. Acesso em abril de 2017.

Figura 32 - Maquete do Obelisco de São Paulo.



Fonte: a autora.

5.1.4.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para encontrar o volume real do monumento os alunos trabalharam como se a parte de baixo do monumento fosse um tronco de pirâmide quadrangular regular, e a parte superior uma pirâmide quadrangular regular.

Para isso projetaram uma pirâmide quadrangular regular inteira, depois subtraíram, desta, a pirâmide de base formada pela secção da base menor e cuja altura é igual a distância da base menor até o vértice da pirâmide anteriormente construída. Após, somaram a esse valor, o volume da pirâmide quadrangular regular de mesma base da secção do tronco e altura determinada pelo monumento.

Encontraram então que o volume do Obelisco da Cidade de São Paulo é igual a $V_{Obelisco\ SP} = 4536\ m^3$ (Figura 33).

Figura 33 - Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas, do Obelisco de São Paulo, realizado pelos alunos.

Handwritten mathematical work showing the calculation of the volume of the Obelisco de São Paulo. The work is on lined paper and includes the following steps:

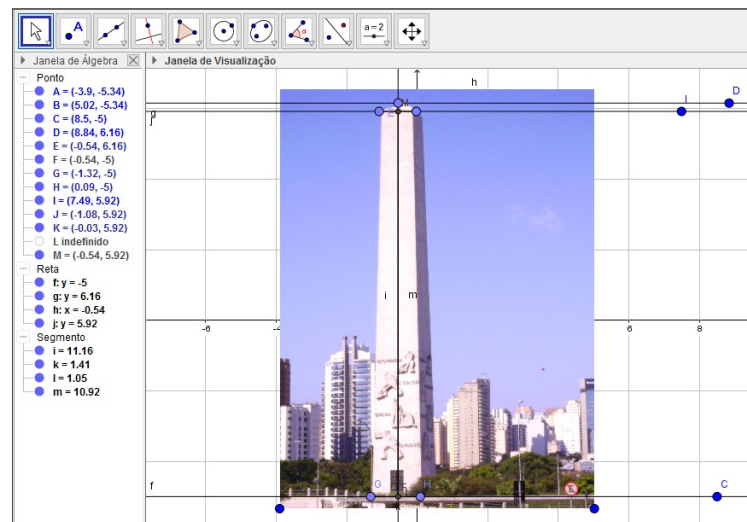
- Formula for the volume of a pyramid: $V = \frac{1}{3} l^2 h$
- Calculation for the large pyramid: $V = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 315 = 8505$ (labeled "pirâmide grande")
- Calculation for the small pyramid: $V = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 215 = 4001,66$ (labeled "pirâmide da ponta")
- Subtraction: $V = 8505 - 4001,66 = 4503,34$
- Final calculation: $V = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 2 = 32,66$
- Final sum: $V_T = 4503,34 + 32,66 = 4536\ m^3$

Fonte: a autora.

Como os alunos não descreveram como obtiveram as medidas que utilizaram nos cálculos, foi necessário encontrar uma forma para conferir se as medidas estavam de acordo.

Para isso, a ferramenta utilizada foi o *software* GeoGebra 3D. Foi inserida uma imagem do Obelisco de São Paulo no *software* e a partir de alguns pontos feitos através do programa sobre a figura estabeleceu-se por proporção as medidas necessárias (Figura 34).

Figura 34 - Verificação das medidas encontradas pelos alunos.



Fonte: a autora.

De acordo com o site Wikipedia¹² o Obelisco de São Paulo possui 72 m de altura, com a medida do lado de sua base quadrada igual a 9 m . No site também há a informação que a base menor do trapézio que compõe uma das suas faces laterais é igual a 7 m . Porém, nos cálculos por proporção, não foi esta a medida encontrada.

No GeoGebra 3D o segmento $i = 11,16\text{ u.m.}$ representa 72 m no monumento real. A partir dessa informação obtém-se que o lado da base quadrada maior do tronco, representado pelo segmento $k = 1,41\text{ u.m.}$, mediria aproximadamente $9,09\text{ m}$ no monumento real. E que o lado da base quadrada menor, representado pelo segmento $l = 1,05\text{ u.m.}$, mediria aproximadamente $6,77\text{ m}$, e não os 7 m descritos no site. A altura do tronco desta pirâmide, representada pelo segmento $m = 10,92\text{ u.m.}$, nos determina uma altura real de aproximadamente $70,45\text{ m}$. Assim, obtém-se que o

volume do tronco de pirâmide quadrangular regular que forma o monumento é de aproximadamente $4461,8 m^3$.

A altura da pirâmide quadrangular regular do topo do obelisco, no GeoGebra 3D é representada pelo segmento i menos o segmento m , isto é, será equivalente a $0,24 u.m.$. E, dessa forma, no monumento real essa altura seria de aproximadamente $1,55 m$. Assim, conclui-se que o volume dessa pirâmide quadrangular regular é de aproximadamente $23,68 m^3$ no monumento.

Conclui-se, assim, que o volume total do monumento é de aproximadamente $4484,68 m^3$.

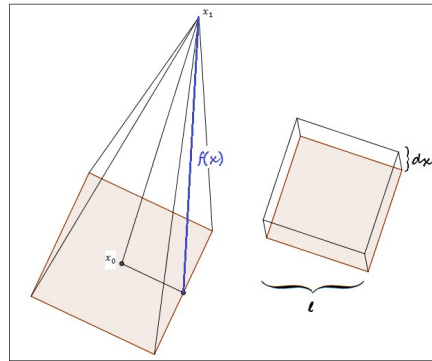
Após essas medidas percebeu-se que os alunos, para calcular o volume real do tronco de pirâmide quadrangular regular do monumento, trataram o sólido primeiramente como uma pirâmide quadrangular regular de lado da base igual a $9 m$ e altura igual a $315 m$ e, deste sólido, subtraíram volume de uma outra pirâmide quadrangular regular de lado da base igual a $7 m$ e altura igual a $245 m$, restando, então, um tronco de pirâmide quadrangular regular de lados das bases, maior e menor, iguais a $9 m$ e $7 m$, respectivamente, e altura igual a $70 m$. Depois somaram a este volume o de uma pirâmide quadrangular regular de $2 m$ de altura e lado da base quadrada igual a $7 m$, obtendo assim, o resultado anterior, bastante próximo do obtido pelas aproximações feitas no GeoGebra 3D.

5.1.4.3 Cálculo do Volume por Integral

Acordando com o escrito no relatório dos alunos o volume de um prisma é dado por $v = A_b \cdot h$, no qual A_b é a área da base do prisma e h é a altura dele. Podemos determinar que o lado da base de um prisma quadrangular regular é igual a l e a altura dx , e então, pode-se reescrever seu volume como: $v = l^2 \cdot dx$. Pode-se ainda afirmar que uma pirâmide quadrangular regular é formada, aproximadamente, por infinitos prismas quadrangulares regulares de alturas infinitesimais dx , onde o lado l , de sua base, varia, decrescentemente, para cada prisma, de acordo com a secção feita paralela a sua base. A soma dos volumes desses prismas será dada por: $v = \frac{1}{3} A_b \cdot h$.

Segue abaixo a demonstração desta fórmula reescrita na íntegra conforme a produção dos alunos. Também pode-se observar na figura 35 a legenda de algumas das estruturas utilizadas na demonstração.

Figura 35 - Desenho esquemático para demonstração do volume de uma pirâmide.



Fonte: a autora.

Chamando de y a metade do lado do quadrado da base da pirâmide quadrangular regular teremos que:

$$\frac{l}{2} = y \Rightarrow l = 2y. \quad (26)$$

$$dv = (2y)^2 \cdot dx \Rightarrow dv = 4y^2 \cdot dx. \quad (27)$$

$$V = \int dv = \int 4y^2 \cdot dx \Rightarrow v = \int_{x_0}^{x_1} 4y^2 \cdot dx. \quad (28)$$

O que equivale dizer que $v = 4 \int_{x_0}^{x_1} [f(x)]^2 \cdot dx$, com $[f(x)]^2 = \text{área da base}$ e x_0 e x_1 são os limites da área sob a curva, ou seja,

$$v = 4 \int_{x_0}^{x_1} (ax)^2 \cdot dx = 4 \cdot \frac{a^2 x^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{4}{3} a^2 [(x_1)^3 - (x_0)^3]. \quad (29)$$

Como $x_0 = 0$, teremos $v = \frac{4}{3} a^2 (x_1)^3$. Como $f(x) = ax \Rightarrow y_1 = a \cdot x_1 \Rightarrow a = \frac{y_1}{x_1}$.

Logo, $v = \frac{4}{3} \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 (x_1)^3 \Rightarrow v = \frac{4}{3} (y_1)^2 \cdot x_1$, mas $y_1 = \frac{l}{2}$ e $x_1 = h$, ou seja,

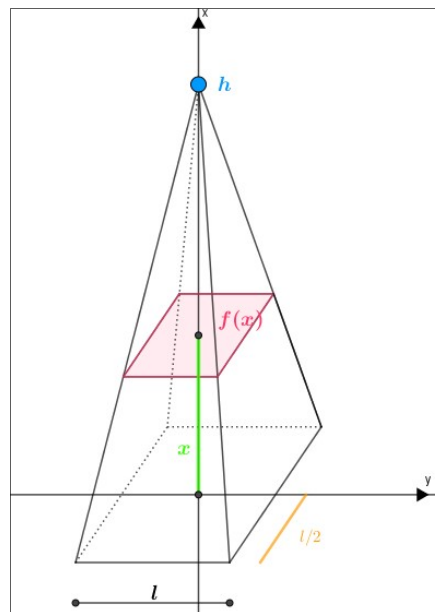
$v = \frac{4}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot h \Rightarrow v = \frac{4}{3} \cdot \frac{l^2}{4} \cdot h \Rightarrow v = \frac{1}{3} l^2 \cdot h$. Como $l^2 = A_b$, conclui-se que

$$v = \frac{1}{3} A_b \cdot h. \quad (30)$$

E assim foi a forma que os alunos encontraram para demonstrar o volume de uma pirâmide.

A forma correta para realizar esta demonstração deveria ser baseada na figura 36 e na demonstração que segue. Na demonstração feita acima, pelos alunos, há um erro entre o desenho e os cálculos.

Figura 36 - Desenho esquemático para a demonstração do volume de uma pirâmide.



Fonte: a autora.

Então, por semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{y}{l/2} = \frac{h-x}{h} \rightarrow y = \frac{l/2}{h}(h-x). \quad (31)$$

Como, para cada x , a área da base é dada por

$$(2y)^2 = \left[2 \frac{l/2}{h}(h-x) \right]^2 = \left[\frac{l}{h}(h-x) \right]^2 = \frac{l^2}{h^2}(h-x)^2.$$

Logo, para $A(x)$ a área da seção transversal, teremos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \left[\frac{l^2}{h^2}(h-x)^2 \right] dx = \left[\frac{l^2}{h^2} \frac{(h-x)^3}{3} (-1) \right]_0^h = \left(-\frac{l^2}{h^2} \right) \left(0 - \frac{h^3}{3} \right) = \\ &= \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{A_b \cdot h}{3}. \end{aligned}$$

Então, a partir desta demonstração, os alunos substituíram na fórmula acima os valores para área da base quadrangular regular $A_b = 81 \text{ m}^2$ e altura $h = 315 \text{ m}$ e encontraram o volume da pirâmide quadrangular regular inteira e dela subtraíram o volume de uma pirâmide quadrangular regular menor de área da base igual a $A_b = 49 \text{ m}^2$ e altura igual a $h = 245 \text{ m}$, formando o volume do tronco de pirâmide quadrangular regular do monumento. Após somaram ao resultado o volume da pirâmide menor de área da base quadrangular regular igual a $A_b = 49 \text{ m}^2$ e altura igual a $h = 2 \text{ m}$, encontrando os resultados (Figura 37) abaixo:

Figura 37 - Resultados obtidos pela dupla.

$$\frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{81 \cdot 315}{3} = \frac{25.515}{3} = 8505$$

$$A_b \cdot h = \frac{49 \cdot 245}{3} = 4.001,66$$

$$8505 - 4.001,66 = 4503,34$$

$$4503,34 + 32,66$$

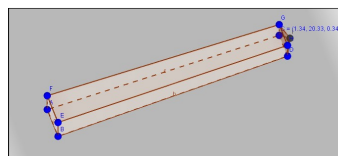
$$V_T = 4.536 \text{ m}^3$$

Fonte: acervo dos alunos.

5.1.4.4 Representação no GeoGebra 3D

A dupla construiu o monumento (Figura 38) a partir de pontos e polígonos ao invés de construir a estrutura a partir de poliedros. Então, por não usarem estruturas em 3D, calcularam o volume do sólido construído no GeoGebra 3D manualmente.

Figura 38 - Construção do Obelisco de São Paulo no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.4.5 Volume no GeoGebra 3D

A dupla calculou o volume da estrutura construída no *software* conforme a figura 39.

Figura 39 - Cálculo do volume do Obelisco de São Paulo construído no GeoGebra 3D.

Handwritten calculations on lined paper:

$$V = \frac{1}{3} l^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 105$$

$$V = 315 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5,42 \cdot 81,66$$

$$V = 147,55 \text{ cm}^3$$

$$V = 315 - 147,55$$

$$V = 167,45 \text{ cm}^3$$

$$V_I = 167,45 + 1,19$$

$$V_I = 168,64 \text{ cm}^3$$

Fonte: acervo dos alunos.

5.1.4.6 Análise de Erro

Os alunos relatam não encontrar erros no volume da integral definida em relação ao volume real, mas afirmam que quando comparam com o volume da maquete e do GeoGebra 3D encontram um pequeno erro por causa da conversão da escala, o volume de $168,64 \text{ cm}^3$ no GeoGebra 3D corresponde a $4553,28 \text{ m}^3$, que quando comparado ao volume real e ao obtido por integral, iguais a 4536 m^3 , resulta um erro de aproximadamente, 0,38%. Ressaltam ainda que o erro do volume do GeoGebra 3D é devido a algum pequeno erro de arredondamento na escala, pois no GeoGebra 3D utilizaram as medidas da maquete, então há uma pequena diferença de valores.

Embora os alunos não tenham descrito como encontraram as medidas utilizadas, ao compará-las com as calculadas percebe-se que a diferença entre a calculada por eles, igual a 4536 m^3 , e a calculada para a conferência, igual a $4484,68 \text{ m}^3$, provoca um erro de 1,14% que pode ser considerado aceitável.

5.1.4.7 Opinião Sobre o Trabalho

Os alunos acrescentam ainda que o trabalho foi muito interessante, pois possibilitou uma outra forma de calcular o volume de objetos e estruturas, o que não era possível antes. Complementam que o grupo já conhecia esse *software* devido as aulas dos anos anteriores e acreditam que é um ótimo programa para se trabalhar com as equações matemáticas. Por fim relatam que com o trabalho puderam aprender uma nova forma para calcular o volume de objetos com formatos diversos, além de trabalhar com a montagem de maquetes.

5.1.5 Batistério da cidade de Pisa na Itália

A escolha foi justificada pelas características únicas do monumento, além de ele ser um importante ponto turístico da Itália (Figura 40).

Figura 40 - Batistério da cidade de Pisa na Itália.



Fonte: Dicas da Itália.¹³

5.1.5.1 Construção da Maquete

Na internet a dupla encontrou apenas duas informações sobre as dimensões do monumento. A altura total (55 m) e a circunferência máxima (108 m). Para realizar a confecção da maquete e os cálculos do volume real a dupla obteve as dimensões descritas na tabela 1, abaixo, multiplicando as medidas da foto por uma constante de proporção igual a aproximadamente $k_2 = \frac{5}{2,3} = 2,17$. Esta constante foi obtida a partir do diâmetro da semiesfera, igual a 10cm, comprada para a montagem

¹³ Disponível em: <<http://www.dicasdaitalia.com.br/2016/03/batisterio-de-pisa.html>>. Acesso em abril de 2017.

da maquete. Então as demais dimensões da maquete foram obtidas de modo a se adaptar proporcionalmente a essa medida e estão descritas na tabela abaixo. A escala da maquete (Figura 41) é de cerca de 1: 272,2. No topo da maquete colocou-se uma esfera de silicone e as demais estruturas foram construídas com papelão.

Tabela 1 - Tabela comparativa entre as dimensões na imagem da foto e as dimensões na maquete do Batistério projetadas.

Altura (h)	Foto (cm)	Maquete (cm)
Total	9,3	20,2
Altura do cilindro	5	10,9
Raio da semiesfera maior	2,3	5
Altura do tronco de cone	1,1	2,4
Raio da semiesfera menor	0,5	1,1
Altura da antena	0,4	0,9

Fonte: a autora.

Figura 41 - Maquete do Batistério da cidade de Pisa na Itália.



Fonte: a autora.

5.1.5.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para encontrar o volume real do monumento os alunos dividiram o sólido em 4 estruturas: um cilindro, uma semiesfera, um tronco de cone e uma semiesfera menor.

Para encontrar as medidas do monumento e poder realizar os cálculos inicialmente a dupla calculou uma constante k_1 a partir da altura total do monumento igual a 55 m, obtida na internet, e seu valor correspondente a esta altura na foto

impressa, igual a 9,3 cm. Esta constante $k_1 = \frac{5500}{9,3}$ encontrada foi de aproximadamente $k_1 \cong 591,4$. Então, para obter as medidas reais das demais estruturas do monumento, foram multiplicadas as medidas obtidas na foto por esta constante e foi encontrada a aproximação da medida real de cada estrutura. Os resultados obtidos foram utilizados para preencher a tabela 2 abaixo:

Tabela 2 - Tabela comparativa entre as dimensões na imagem da foto e as dimensões projetadas como medidas reais para o Batistério.

Estrutura	Foto (cm)	Medida Real (m)
Total	9,3	55
Altura do cilindro	5	29,6
Raio da semiesfera maior	2,3	13,6
Altura do tronco de cone	1,1	6,5
Raio da semiesfera menor	0,5	3
Altura da antena	0,4	2,4

Fonte: a autora.

Com os dados da tabela 2 os alunos conseguiram montar a tabela 3 comparativa entre as dimensões na imagem da foto, as dimensões obtidas por proporção e utilizadas como reais e as dimensões na maquete construída.

Tabela 3 - Tabela comparativa entre as dimensões na imagem da foto, as dimensões projetadas como medidas reais e as dimensões obtidas na maquete do Batistério.

	Foto (cm)	Medida Real (m)	Maquete (cm)
Total	9,3	55	20,2
Altura do cilindro	5	29,6	10,9
Raio da semiesfera maior	2,3	13,6	5
Altura do tronco de cone	1,1	6,5	2,4
Raio da semiesfera menor	0,5	3	1,1
Altura da antena	0,4	2,4	0,9

Fonte: a autora.

Para calcular o volume real, realizaram alguns cálculos:

a) Cilindro:

De acordo com o site "Dicas da Itália"¹³ os alunos obtiveram a circunferência do monumento, igual a 108 m, e então calcularam seu raio.

$$\text{circunferência} = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r_{\text{cilindro}} = \frac{\text{circunferência}}{2\pi} \Rightarrow$$

$$r_{\text{cilindro}} = \frac{108 \text{ m}}{2\pi} \cong 17,2 \text{ m}.$$

Como a altura do cilindro foi encontrada na proporção, a dupla encontrou o volume do cilindro.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r_{\text{cilindro}}^2 \cdot h = \pi \cdot (17,2 \text{ m})^2 \cdot 29,6 \text{ m} = 27510,5 \text{ m}^3.$$

b) Semiesfera maior:

Os alunos obtiveram, por proporção, que o raio da semiesfera maior ($r_{\text{semi maior}}$) é igual a 13,6 m. Com o raio, calcularam diretamente o volume da semiesfera.

$$V_{\text{semiesfera maior}} = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot (r_{\text{semi maior}})^3 = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot (13,6 \text{ m})^3 = 5268,4 \text{ m}^3.$$

c) Tronco de cone:

Como visto na tabela 1, por proporção os alunos obtiveram que a altura do tronco de cone é de 6,5 m. O raio da sua base menor é o mesmo raio da semiesfera menor, ou seja, $r_{\text{base menor}} = 3 \text{ m}$, valor também obtido por proporção.

Para encontrar o raio da base maior os alunos recorreram novamente à foto e trabalharam com proporção.

De acordo com a foto o diâmetro da semiesfera menor mede 1 cm e o diâmetro da base maior do tronco de cone mede 1,4 cm. Com isso, os alunos obtiveram que a constante de proporção entre o raio da base maior e o raio da base menor é de aproximadamente 1,4. Assim concluíram que o raio da base maior é $R_{\text{base maior}} = 3 \text{ m} \cdot 1,4 = 4,2 \text{ m}$.

Então, com todas as medidas necessárias a dupla constatou que o volume do tronco de cone é de:

$$V_{\text{tronco}} = \frac{\pi \cdot h_{\text{tronco}}}{3} \cdot ((R_{\text{base maior}})^2 + R_{\text{base maior}} \cdot r_{\text{base menor}} + (r_{\text{base menor}})^2) \quad (32)$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{\pi \cdot 6,5 \text{ m}}{3} \cdot ((4,2 \text{ m})^2 + (4,2 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}) + (3 \text{ m})^2) = 267,1 \text{ m}^3.$$

d) Semiesfera menor:

Como o raio da esfera já é conhecido e igual a 3 m, o volume da esfera foi obtido da seguinte maneira:

$$V_{\text{semiesfera menor}} = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot r_{\text{semiesfera menor}}^3 = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot (3 \text{ m})^3 \cong 56,5 \text{ m}^3.$$

Os alunos descartaram o cálculo do volume da antena que há no topo do monumento por sua espessura não ser significativa, logo afirmaram não ser possível medi-la pelo método utilizado para encontrar as demais partes que compõem o monumento.

Por fim, obtiveram então que o volume total do Batistério foi de:

$$V_{total} = V_{cilindro} + V_{semiesfera\ maior} + V_{tronco} + V_{semiesfera\ menor}$$

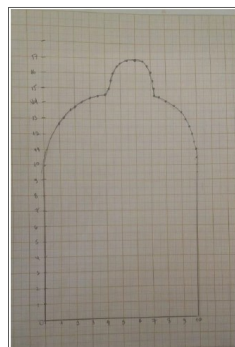
$$V_{total} = 27510,5\ m^3 + 5268,4\ m^3 + 267,1\ m^3 + 56,5\ m^3.$$

$$V_{Batistério} = 33102,5\ m^3.$$

5.1.5.3 Cálculo do Volume por Integral

Primeiramente os alunos projetaram o contorno do monumento no papel milimetrado, conforme a figura 42, na proporção das medidas obtidas para a maquete. Após, identificaram os seguintes pontos pertencentes ao contorno da imagem: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,12.2), (1.3,13), (2,13.8), (3,14.4), (4,14.6), (4.5,16), (5,16.7), (5.5,16.9), (6,16.9), (6.5,16.8), (7,16), (7.5,14.4), (8,14.2), (8.5,13.9), (9,13.5), (9.5,12.5), (10,11), (10,10), (10,9), (10,8), (10,7), (10,6), (10,5), (10,4), (10,3), (10,2), (10,1) e (10,0).

Figura 42 - Representação do contorno do monumento em papel milimetrado.



Fonte: acervo dos alunos.

Feito isso, lançaram esses pontos no interpolador online¹⁴. E desse recurso obtiveram as três funções abaixo.

¹⁴ Disponível em: < <http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=es&form=lagrange>>. Acesso em dezembro de 2016.

Função 1, gerada pelos pontos: (1,12); (2,13.5); (3,14.2); (4,14.6):

$$L_1(x) = 0.08\bar{3}x^3 - 0.9x^2 + 3.61\bar{6}x + 9.1\bar{9}. \quad (33)$$

Função 2, gerada pelos pontos: (4.2,15); (5,16.7); (6,17); (7,16); (8,14.5):

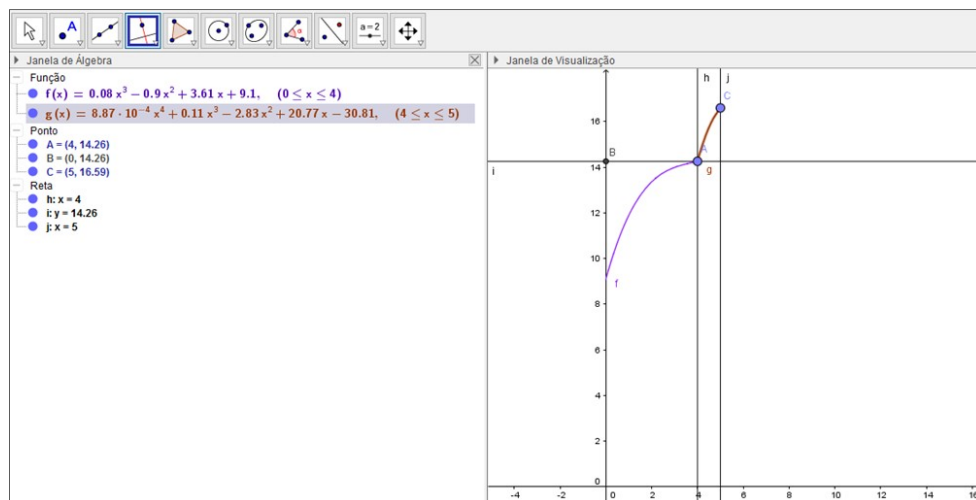
$$L_2(x) = 8.87 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 + 0.11x^3 - 2.83x^2 + 20.77x - 30.81 \quad (34)$$

Função 3, gerada pelos pontos: (8.5,13.5); (9,13); (9.5,12.5); (9.8,11.5):

$$L_3(x) = -2.24x^3 + 60.57x^2 - 545.63x + 1652.53 \quad (35)$$

Utilizaram essas funções para tentar gerar a imagem do sólido no GeoGebra 3D, porém, não obtiveram sucesso. Assim, eles tentaram retomar e perceberam que o erro estava na colocação dos pontos no papel milimetrado. Para solucionar o problema de forma simples optaram por usar somente a metade esquerda da figura 42 pois esta representação estava com os dados corretos. Para isso, usaram as funções $L_1(x)$ e $L_2(x)$, representadas por (33) e (34), respectivamente. Logo, no GeoGebra 3D, os alunos utilizaram o comando "Função[<Função>,<Valor de x inicial>,<Valor de x final>]" com as funções $L_1(x)$ e $L_2(x)$ acima e projetaram a figura 43 no *software*.

Figura 43 - Representação no GeoGebra 3D das funções $L_1(x)$ e $L_2(x)$ obtidas no interpolador¹⁴.



Fonte: a autora.

Como a imagem lembrava a formação do sólido a dupla resolveu calcular o volume por integrais a partir dessas duas funções com o auxílio de uma das variações do método das cascas cilíndricas conforme segue.

Denominando $L_1(x)$ por $f(x)$ e $L_2(x)$ por $g(x)$, $f(x) = 0.08\bar{3}x^3 - 0.9x^2 + 3.61\bar{6}x + 9.1\bar{9}$ e $g(x) = 8.87 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 + 0.11x^3 - 2.83x^2 + 20.77x - 30.81$ determinaram que a integral

$$\int_{-5}^{-1} 2 \cdot \pi \cdot x \cdot f(x) \cdot dx + \int_{-1}^0 2 \cdot \pi \cdot x \cdot g(x) \cdot dx \quad (36)$$

descreveria o volume cujo resultado era pretendido.

Observamos que para facilitar os cálculos os alunos trasladaram o eixo y para a reta $x = 5$ e também efetuaram a translação correspondente nos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$. Desta forma, o eixo de rotação é o eixo y .

Obtiveram, através da ferramenta: Microsoft® Mathematics¹⁵, o resultado da integral acima (36) conforme a figura 44.

Figura 44 - Resultado obtido no Microsoft® Mathematics¹⁵.

Entrada	$\int_{-5}^{-1} 2 \pi x (0.083 x^3 - 0.9 x^2 + 3.616 x + 9.19) dx + \int_{-1}^0 2 \pi x (8.87 \cdot 10^{-4} x^4 + 0.11 x^3 - 2.83 x^2 + 20.77 x - 30.81) dx$
Saída	$\frac{1526984513 \pi}{3000000}$
Saída Decimal	1599.0544427287293

Fonte: acervo dos alunos.

É importante ressaltar que o valor encontrado para o volume deve ser multiplicado pela constante $k_3 = \frac{5500}{20,2} \cong 272,28$ ao cubo, pois ela converte a medida da maquete na medida no monumento real, e, como se está trabalhando com o volume das estruturas, então este valor será proporcional ao cubo da constante de proporção.

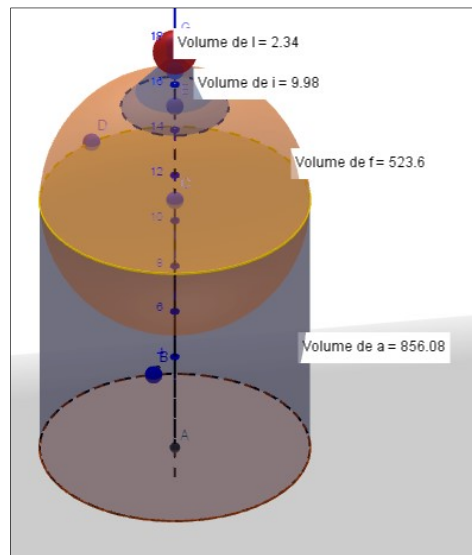
5.1.5.4 Representação no GeoGebra 3D

Novamente, para resolver o problema da construção da estrutura (Figura 45), foi utilizada a sobreposição de sólidos geométricos encontrados previamente no GeoGebra 3D.

¹⁵ Ferramenta matemática oferecida pela Microsoft® que realiza diversos cálculos.

A primeira etapa foi a criação do sólido em formato de cilindro, de raio 5 *cm*. Após isso, foi criada a primeira esfera, de raio 5 *cm* escondida parcialmente pelo cilindro, já que não se consegue construir estruturas parciais no *software*, a menos que se escolha uma função para estruturar apenas sua casca. A seguir, foi posto um cone em cima da primeira esfera e, então, foi colocada uma segunda esfera em cima do cone, de forma que ela ocultasse a ponta do cone, fazendo com que a imagem no GeoGebra 3D ficasse mais parecida com a maquete.

Figura 45 - Estrutura do Batistério projetada no *software* GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.5.5 Volume no GeoGebra 3D

Os alunos obtiveram o volume do sólido projetado no GeoGebra 3D conforme segue:

$$V_{total} = V_{cilindro} + \frac{V_{esfera}}{2} + V_{tronco} + \frac{V_{esfera_2}}{2}$$

$$V_{total} = 856.08 + \frac{523,6}{2} + 9,98 + \frac{2,34}{2}$$

$$V_{total} = 1129,03 \text{ u. v.}$$

Como a escala no GeoGebra 3D corresponde a escala da maquete, foi necessário multiplicar o volume encontrado no *software* e seus respectivos cálculos posteriores por $(k_3)^3$, obtendo-se um volume igual a $22790,4m^3$.

5.1.5.6 Análise de Erro

Como as figuras geométricas em cada cálculo eram diferentes os alunos não souberam identificar qual medida era a mais fiel à original.

No entanto, multiplicando a medida encontrada no cálculo a partir de integrais pela constante de proporção k_3 ao cubo encontraram um valor igual a aproximadamente $32375,7 m^3$ ou seja, um valor com um erro de 2,2% em relação ao volume real medido. Os alunos acrescentam que na representação para o cálculo de integral não estava contemplado o topo do monumento aproximado por um tronco de cone e uma semiesfera, o que já justifica, parcialmente, o erro obtido no cálculo.

Além disso relataram que os erros podem ter sido gerados pelos arredondamentos dos valores encontrados. Também pela utilização do π como 3,14. Erros na representação do sólido no *software* e nas funções também provocaram as diferenças nos valores.

5.1.5.7 Opinião Sobre o Trabalho

Na avaliação os alunos disseram que o trabalho foi muito importante para a fixação do conteúdo estudado e acrescentando que tiveram uma ótima oportunidade de aprender a utilizar um novo *software* concomitantemente. Ainda explicam que o trabalho possibilita lembrar e melhorar os conhecimentos relativos a integrais, embora declarem que enfrentaram dificuldades nessa etapa.

Quanto ao *software* relatam que já o conheciam, porém, nunca haviam trabalhado com ele. Afirmam ainda que trabalhar com um novo *software* foi muito interessante pois tiveram uma oportunidade de aprender de forma diferente. Acrescentam que a experiência de trabalhar com sólidos virtuais em 3D foi bastante diferente e proporcionou uma nova visão de como calcular volumes.

Por fim, concluem afirmando que aprenderam muitas coisas: como realizar a montagem de monumentos no GeoGebra 3D, como calcular o volume desses monumentos pelo próprio GeoGebra 3D, como calcular o volume real por proporções, como realizar a montagem de uma maquete proporcional ao monumento estudado e a calcular o volume desse mesmo monumento por integral.

5.1.6 Big Ben da cidade de Londres na Inglaterra

O monumento (Figura 46) já foi visitado por um dos integrantes da dupla. Além deste motivo o grupo o escolheu pois as formas geométricas que constituem sua construção são bem simples de trabalhar, o que facilitaria para fazê-lo no GeoGebra 3D e também a construção da sua maquete.

Figura 46 - Big Ben da cidade de Londres na Inglaterra.



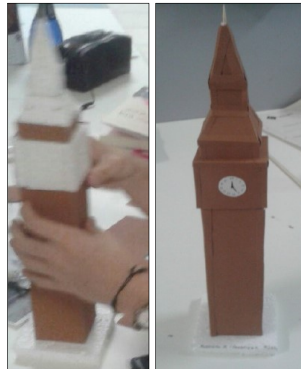
Fonte: Lego¹⁶.

5.1.6.1 Construção da Maquete

Para montar a maquete (Figura 47) os alunos imprimiram uma foto do monumento e mediram os segmentos de reta de acordo com a forma que iriam montar. Após, calcularam o volume da maquete. O grupo encontrou que o prisma quadrangular regular que compõe a estrutura da torre, que vai do chão até o grande paralelepípedo no qual está fixado o relógio, mede, na foto, $10,8\text{cm}$. Para a construção da maquete com tamanho adequado, definiu-se que essa medida de $10,8\text{ cm}$ equivaleria a 22 cm para a maquete, ou seja, 1 cm da imagem impressa equivaleria a aproximadamente $2,04\text{ cm}$ na maquete. A escala da maquete em relação ao monumento original ficou de 1 cm para cada 23 m aproximadamente. Ou seja, $1:2300$.

¹⁶ Disponível em: <<https://www.lego.com/en-us/architecture/explore/21013-big-ben>>. Acesso em abril de 2017.

Figura 47 - Maquete Big Ben.

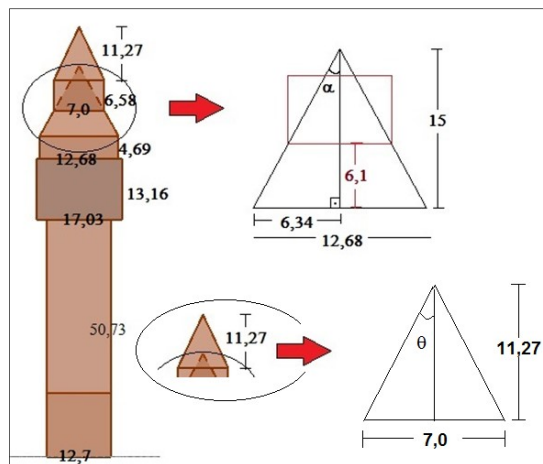


Fonte: a autora.

5.1.6.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para encontrar as medidas reais da Torre a dupla imprimiu uma imagem daquela em folha A4 e mediu sua altura na impressão. Encontrando um total de 20,5 cm. As demais medidas na folha impressa do Big Ben também foram encontradas até que todas as medidas estivessem com um tamanho definido pela foto. Dessa forma, utilizando regra de três, encontraram a medida de cada aresta da estrutura, em metros, e trataram todos os paralelepípedos descritos abaixo como prismas quadrangulares regulares. As medidas encontradas pela dupla estão descritas na figura 48.

Figura 48 - Medidas encontradas para o Big Ben.



Fonte: a autora.

Ao somarmos as alturas no desenho que serviu de esboço para o cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas e do volume por integral, pode-se observar que a altura total obtida pelos alunos foi de 92,53 m, no entanto, no início deste trabalho eles descrevem a altura como 96,5 m. Ao serem questionados sobre essa diferença os alunos disseram que sobre a torre ainda tem uma espécie de mastro e é por causa dele a diferença nos valores.

Para calcular o volume total do monumento a dupla dividiu-o em 6 partes: 4 prismas quadrangulares regulares, um tronco de pirâmide quadrangular regular e uma pirâmide, nomeados da seguinte forma: paralelepípedo maior, paralelepípedo com o relógio fixado, paralelepípedo acima do relógio, tronco de pirâmide, paralelepípedo sobre o tronco de pirâmide e, por fim, pirâmide.

Como a dupla obteve o volume real do monumento:

$$V_{\text{paralelepípedo maior}} = 12,7^2 \cdot 50,73 = 8182,24m^3.$$

$$V_{\text{paralelepípedo com o relógio fixado}} = 17,03^2 \cdot 13,16 = 3816,68m^3.$$

$$V_{\text{paralelepípedo acima do relógio}} = 12,68^2 \cdot 4,69 = 754,07m^3.$$

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{6,1}{3} (12,68^2 + 12,68 \cdot 7 + 7^2) = 607,04m^3.$$

$$V_{\text{paralelepípedo sobre o tronco de pirâmide}} = 7^2 \cdot 6,58 = 322,42m^3.$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{7^2 \cdot 11,27}{3} = 184,08m^3.$$

$$V_{\text{BigBen}} = 13.866,53m^3.$$

De acordo com a dupla no site "Brasileiros em Londres"¹⁷, há a informação que o Big Ben possui 96,3 metros de altura, o que difere dos outros que dizem possuir 96 metros. Mesmo assim o grupo optou por utilizar 96,3 metros como sua medida justificando que o site citado apresenta um grau maior de especificações sobre a Torre.

5.1.6.3 Cálculo do Volume por Integral

Embora possa parecer meio sem sentido calcular o volume de paralelepípedos por meio de integrais, como o trabalho requeria o cálculo da

¹⁷ Disponível em: <<http://www.brasileirosemlondres.co.uk/>>. Acesso em dezembro de 2016.

estrutura do monumento a partir de integrais os alunos escreveram os seguintes cálculos no relatório:

Volume do paralelepípedo maior:

$$h \int_0^{12,7} x dx \Rightarrow 50,73 \int_0^{12,7} 12,7 dx = 50,73 \cdot 161,29 = 8182,24m^3.$$

Volume do paralelepípedo com o relógio fixado:

$$h \int_0^{17,03} x dx \Rightarrow 13,16 \int_0^{17,03} 17,03 dx = 13,16 \cdot 290,02 = 3816,66m^3.$$

Volume do paralelepípedo acima do relógio:

$$h \int_0^{12,68} x dx \Rightarrow 4,69 \int_0^{12,68} 12,68 dx = 4,69 \cdot 160,78 = 754,06m^3.$$

Volume do tronco de pirâmide:

Para o cálculo do volume do tronco da pirâmide por integrais, precisamos saber a área da seção transversal $A(x)$. De acordo com a figura 48, temos:

Denominando a medida do lado da base do tronco de pirâmide quadrangular regular por l , a altura do tronco por h , e a área da base maior deste tronco de pirâmide por $A(x)$, tem-se:

$$\tan\alpha = \frac{6,34}{15} \Rightarrow \tan\alpha = 0,42 \Rightarrow \frac{l}{h} = 0,42 \Rightarrow l = 0,84h.$$

Logo $A(x) = l^2 = (0,84h)^2 = 0,71h^2$.

$$\int_0^h A(x) dx = \int_{8,9}^{15} 0,71h^2 dh = 0,71 \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_{8,9}^{15} = 0,71 \left(\frac{15^3 - 8,9^3}{3} \right) = 631,9m^3.$$

Volume do paralelepípedo sobre o tronco:

$$h \int_0^7 x dx \Rightarrow 6,58 \int_0^7 7 dx \Rightarrow 6,58 \cdot 49 \Rightarrow 322,42m^3.$$

Volume da pirâmide:

Denominando a medida do lado da base da pirâmide quadrangular regular por l , a altura do tronco por h , e a área da base por $A(x)$, tem-se:

$$\tan\theta = \frac{3,025}{11,27} \Rightarrow \tan\theta = 0,2684 \Rightarrow \frac{l}{h} = 0,2684 \Rightarrow l = 0,5368h.$$

Logo $A(x) = l^2 = (0,5368h)^2 = 0,28815h^2$.

$$\begin{aligned} \int_0^h A(x) dx &= \int_0^{11,27} 0,28815h^2 dh \Rightarrow 0,28815 \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_0^{11,27} = 0,28815 \left(\frac{11,27^3}{3} \right) \\ &= 137,49m^3. \end{aligned}$$

Onde está escrito $\tan\theta = \frac{3,025}{11,27}$ o correto, pelas medidas apresentadas no esboço feito pelos alunos, seria $\tan\theta = \frac{3,5}{11,27}$ e então encontrariam que o volume desta parte seria

$$\tan\theta = \frac{3,5}{11,27} \Rightarrow \tan\theta = 0,31 \Rightarrow \frac{l}{h} = 0,31 \Rightarrow l = 0,62h.$$

$$\text{Logo } A(x) = l^2 = (0,62h)^2 = 0,3844h^2.$$

$$\int_0^h A(x)dx = \int_0^{11,27} 0,3844h^2 dh \Rightarrow 0,3844 \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_0^{11,27} = 0,3844 \left(\frac{11,27^3}{3} \right) = 183,41m^3.$$

Com isso os alunos encontraram para o volume:

$$V_{BigBen} = 13.844,77m^3.$$

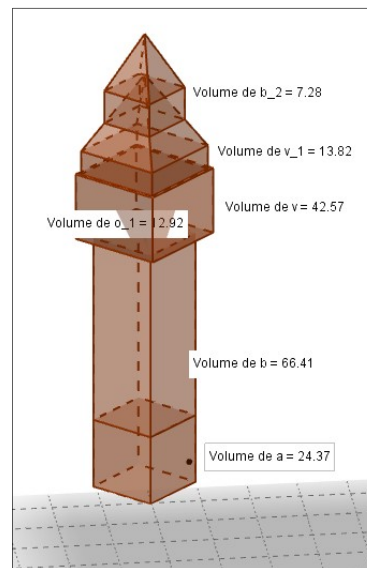
Enquanto que se tivessem realizado os cálculos corretamente o valor encontrado seria: $V_{BigBen} = 13890,69m^3$.

5.1.6.4 Representação no GeoGebra 3D

Mais uma vez a alternativa para resolver o problema da construção da estrutura no *software* foi a sobreposição de sólidos 3D.

A explicação da dupla para descrever a construção do sólido no GeoGebra 3D (Figura 49) foi a seguinte: "Para a base foi desenhado um quadrado utilizando uma ferramenta pronta. Depois foi colocado um prisma sobre ele dando o formato de um paralelepípedo. Para fazer o prisma no qual fica fixo o relógio, desenharam-se quatro esferas em cada lado da base com o raio do tamanho da distância dele para a torre de baixo. Para a altura, foi feito o mesmo método realizado para as esferas. Os paralelepípedos menores sobre a parte com o relógio foram desenhados do mesmo jeito descrito anteriormente. Para fazer as pirâmides apenas foi colocada uma esfera no centro da base e o raio do tamanho da altura e depois utilizada uma ferramenta pronta. Dessa forma a escala do monumento real para o desenho no programa ficou de aproximadamente 4,7 metros para cada 1 unidade de medida no *software*."

Figura 49 - Estrutura do Big Ben no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.6.5 Volume no GeoGebra 3D

Uma ferramenta do *software* dá o volume das partes da figura montada em 3D.

$$V_{\text{paralelepípedo maior}}: 24,37u. v. + 66,41u. v. = 90,78u. v.$$

$$V_{\text{paralelepípedo com relógio fixado}}: 28,67u. v.$$

$$V_{\text{paralelepípedo sobre o relógio}}: 7,29u. v.$$

$$V_{\text{tronco de pirâmide}}: 6,35u. v.$$

$$V_{\text{paralelepípedo sobre o tronco de pirâmide}}: 3,15u. v.$$

$$V_{\text{pirâmide}}: 1,8u. v.$$

$$V_{\text{total}}: 138,04u. v.$$

5.1.6.6 Análise de Erro

Com uma escala de $1u.m.$ do GeoGebra 3D para cada $4,7$ metros da estrutura real, o volume encontrado no *software* é equivalente a $14331,73m^3$ no monumento real. Para obter este valor, bastou multiplicar os $138,04u. v.$ encontrados por $4,7^3$.

O grupo encontrou um erro de 0,15% entre a medida por eles encontrada no cálculo por integral e o volume real, enquanto que o correto seria de 0,17% caso tivessem se dado conta do pequeno erro cometido na integração do volume da pirâmide. Enquanto que em relação ao GeoGebra 3D o erro por eles encontrado foi de 3,35%.

O grupo constata que o erro foi muito pequeno no *software* e insignificante no cálculo por integral. Relata ainda que para o *software* o erro se deu provavelmente na construção e na aproximação quando as medidas foram convertidas. E que os erros obtidos no trabalho se devem principalmente às pirâmides, uma vez que nelas foram usadas aproximações das tangentes para se conseguir os volumes.

5.1.6.7 Opinião Sobre o Trabalho

Acrescentam ainda que o trabalho foi muito interessante por ampliar o conhecimento dos membros do grupo com a utilização de uma ferramenta nunca utilizada antes por nenhum dos membros: o GeoGebra 3D. Descrevem que esse *software* é muito intuitivo e de fácil manejo para a criação das figuras desejadas. Por exemplo, quando queriam aumentar uma aresta, bastava puxar o ponto para colocá-lo onde gostariam. O grupo achou interessante o uso das esferas para encontrar o tamanho de uma altura e salienta que as ferramentas de projetar linhas perpendiculares e paralelas também foram essenciais.

Além disso, com o trabalho a dupla pode melhorar o entendimento de integral e aprendeu uma nova técnica para encontrar o volume de objetos espaciais. Consideram que o trabalho também proporcionou ao grupo desafiar suas capacidades cognitivas para fazer a maquete e a capacidade artística para deixá-la a mais bela possível.

5.1.7 Coliseu da cidade de Roma na Itália

Justificaram a escolha pois o Coliseu (Figura 50) é o maior anfiteatro já construído. É também um "símbolo da Roma Imperial" que se encontra hoje parcialmente arruinado por causa de danos causados por terremotos e saques, porém ainda permanece sendo uma das maiores e mais populares atrações turísticas da capital italiana.

Figura 50 - Coliseu da cidade de Roma na Itália.



Fonte: a autora.

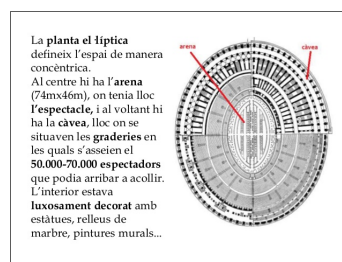
5.1.7.1 Construção da Maquete

Depois de pesquisar muito sobre funções os alunos descrevem que foi através das cônicas, mais precisamente com a elipse, que obtiveram a imagem alusiva ao resultado esperado.

Então a dupla decidiu aproximar por elipses a estrutura do Coliseu, para isso foram em busca dos dados para projetar essas elipses, interna e externa, que descrevem, juntas, o formato de um anel elíptico.

Encontraram, então, uma figura na internet (figura 51) que possuía em sua descrição as medidas para a arena do Coliseu. Esta arena é uma figura em formato elíptico localizada ao centro do monumento, definida, posteriormente, na representação do monumento, como elipse interna. Assim, obtiveram as medidas para os semieixos maior e menor das elipses, interna e externa, que compõem o anel elíptico que aproxima a área da base do monumento.

Figura 51 - Imagem com as medidas da arena do Coliseu.



Fonte: Coliseu¹⁸.

¹⁸ Disponível em: < <https://image.slidesharecdn.com/colosseu-141108152542-conversion-gate02/95/colosseu-de-roma-9-638.jpg?cb=1415460402>>. Acesso em abril de 2017.

Para estimar a área da base do monumento, que se aproxima de um anel elíptico, os alunos utilizaram as medidas obtidas nos sites "Tribune Sand Triumphs"¹⁹ e "Viagem Arquitetura"²⁰ de 188 m de comprimento, 156 m de largura como as medidas dos eixos maior e menor, respectivamente, da elipse externa. Utilizando os dados obtidos na figura 51, estimaram que a elipse interna teria 74 m no eixo maior e 46 m no eixo menor.

Então os alunos desenharam eixos coordenados em uma folha de papelão e sobre eles marcaram os extremos dos eixos maior e menor de cada uma das duas elipses, interna e externa, de forma proporcional as medidas obtidas para o monumento real, formando o esboço do anel elíptico que aproxima a base do monumento. E a partir deles, com argila, estruturaram o monumento (Figura 52), dando volume para a estrutura. A escala utilizada foi de 1: 1.000.

Figura 52 - Maquete do Coliseu.



Fonte: a autora.

5.1.7.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

De acordo com a dupla, segundo o site "Tribune Sand Triumphs"¹⁹ no ano de 72 d.C., na construção do anfiteatro Coliseu, foram usados aproximadamente 100.000 m³ de mármore travertino em seus 188 m de comprimento, 156 m de largura e 48 m de altura; já o site "Viagem Arquitetura"²⁰ diverge do anterior apenas quanto a altura, afirmando que este possui 52 m de altura e também reitera que dos 100.000 m³ de mármore travertino 45.000 m³ foram utilizados na parte externa. Com esses dados os alunos, em um primeiro momento, estimaram que o volume real do monumento seria de 100.000 m³.

¹⁹ Disponível em: <<http://www.tribunesandtriumphs.org/colosseum/dimensions-of-the-colosseum.htm>>. Acesso em dezembro de 2016.

²⁰ Disponível em: <<http://viagemarquitetura.com.br/destinos/10-incriveis-fatos-sobre-o-coliseu-romano/>>. Acesso em dezembro de 2016.

5.1.7.3 Cálculo do Volume por Integral

A partir da equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, os alunos isolaram a variável y , para facilitar alguns cálculos, obtendo a seguinte equação: $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, que descreve a parte superior da elipse, onde b é o semieixo menor e a é o semieixo maior.

Com os dados para os eixos maior e menor das elipses interna e externa que compõem o anel elíptico os alunos obtiveram as funções, centradas na origem, que determinam essas elipses que formam a base da estrutura do monumento.

Para a elipse externa encontraram a equação:

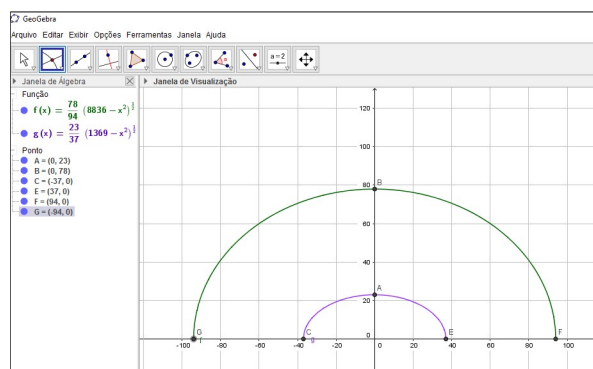
$$\frac{y^2}{78^2} + \frac{x^2}{94^2} = 1 \quad (37)$$

enquanto que a elipse interna a equação foi:

$$\frac{y^2}{23^2} + \frac{x^2}{37^2} = 1 \quad (38)$$

Para calcular o volume por integral os alunos substituíram parte da equação da elipse externa pela função $f(x) = \frac{78}{94}\sqrt{94^2 - x^2}$, isolando a variável y em (37) e a definindo como $f(x)$ e a equação da elipse interna pela função $g(x) = \frac{23}{37}\sqrt{37^2 - x^2}$, isolando a variável y em (38) e a definindo como $g(x)$. Também utilizaram a altura do monumento como 50 m, pois calcularam a média dos dois dados obtidos nos sites anteriormente descritos. Ao projetarem as funções $f(x)$ e $g(x)$ no GeoGebra 3D os alunos obtiveram a figura 53.

Figura 53 - Representação das funções que formam a base do Coliseu.



Fonte: a autora.

A partir dela puderam observar que as funções escolhidas definiam a área de metade do anel elíptico requerido. Também que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são funções pares pois há simetria em relação ao eixo das ordenadas. Observaram que a área da outra metade do anel elíptico que não foi descrito pela função é igual a área delimitada pelo semianel elíptico definido por $f(x)$ e $g(x)$ e o eixo das abscissas.

Após, concluíram que para encontrar a área do anel elíptico que aproxima a área da base do monumento, poderiam resolver a integral para o primeiro quadrante do anel elíptico e multiplicar este valor por quatro. Com este valor, bastaria multiplicar pela altura e obter a aproximação para o volume.

Os alunos relatam ainda que precisaram colocar a função no *software* WolframAlpha²¹ alegando não possuírem conhecimentos suficientes para resolver uma integral com uma função deste tipo.

Por fim, encontraram que o volume do anel formado pelas duas elipses é:

$$V = 4 \cdot 50 \cdot \left(\frac{78}{94} \int_0^{94} \sqrt{94^2 - x^2} dx - \frac{23}{37} \int_0^{37} \sqrt{37^2 - x^2} dx \right) \cong \mathbf{1.018.033,1m^3}$$

Os resultados encontrados no aplicativo são os que estão na figura 54.

Figura 54 - Resultado da integral pelo WolframAlpha.

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the logo and name 'WolframAlpha' are displayed with the tagline 'computational knowledge engine'. Below the logo is a search bar containing the input: $4*(78/94)*50*\text{integral of } \sqrt{94^2 - x^2} \text{ (to 94 from 0)} - 4*50*(23/37)* \text{integral of } \sqrt{37^2 - x^2}$. Below the search bar, there are navigation links: 'Exemplos de aplicativos da Web aleatórios'. The 'Input:' section shows the mathematical expression: $4 \times \frac{78}{94} \times 50 \int_0^{94} \sqrt{94^2 - x^2} dx - 4 \times 50 \times \frac{23}{37} \int_0^{37} \sqrt{37^2 - x^2} dx$. The 'Resultado da computação:' section shows the result: $\frac{4}{94} 78 \times 50 \int_0^{94} \sqrt{94^2 - x^2} dx - \frac{4}{37} 50 \times 23 \int_0^{37} \sqrt{37^2 - x^2} dx = 324050 \pi$. The 'Aproximação decimal:' section shows the decimal approximation: $1.01803309939577249892381958835172290962409274386750304... \times 10^6$. At the bottom, there is a 'Página de download' link and the text 'ATIVADO PELA LINGUAGEM WOLFRAM'.

Fonte: a autora.

²¹ Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com/>>. Acesso em março de 2017.

5.1.7.4 Representação no GeoGebra 3D

Os alunos, através dos valores determinados pelos sites descritos anteriormente, estabeleceram que o eixo maior da elipse externa que estruturava o monumento era de $188m$, que foi convertido para $18,8u.m.$ no GeoGebra 3D, enquanto o eixo menor foi delimitado com $15,6u.m.$ neste *software*. A partir desses dados projetaram todas as dimensões das equações encontradas anteriormente dividindo a medida usada como "medida real" por 10 unidades de medida. Para encontrar o foco, construíram um círculo de raio $9,4u.m.$ a partir de um dos extremos do eixo menor e marcaram a sua intersecção com o eixo maior. Assim determinaram que o foco dista $5,25u.m.$ do centro da elipse, obtendo uma excentricidade de aproximadamente 0,56.

Assim, encontraram que a equação da elipse maior no GeoGebra 3D é:

$$\frac{x^2}{9,4^2} + \frac{y^2}{7,8^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{7,8}{9,4} \sqrt{9,4^2 - x^2}.$$

Realizando os cálculos para a elipse menor de eixo maior igual a $7,4u.m.$ e eixo menor igual a $4,6u.m.$ encontraram como distância focal $5,8u.m.$, uma excentricidade de aproximadamente 0,78 e equação igual a $\frac{x^2}{3,7^2} + \frac{y^2}{2,3^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{2,3}{3,7} \sqrt{3,7^2 - x^2}$.

Com estes dados conseguiram construir o monumento da figura 54 abaixo no GeoGebra 3D.

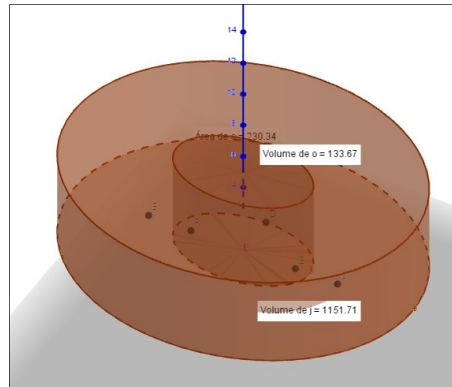
Para a altura utilizaram a medida de $5u.m.$. E a construção se deu a partir das elipses por "extrusão para prismas e cilindros".

5.1.7.5 Volume no GeoGebra 3D

Houve um problema no desenvolvimento do monumento no *software*, visto que era necessário "excluir" o volume da elipse menor (campo de batalha na época que o Coliseu era ativo). Como a exclusão não pode ser realizada, tampouco pode-se criar as arquibancadas, o volume do sólido ficou totalmente diferente do original. No GeoGebra 3D (Figura 55) o resultado foi de $1151,71u.v. - 133,67u.v = 1018,04u.v.$ Analisando que utilizaram uma escala de 1:10, os alunos determinaram

que o volume obtido no GeoGebra 3D, seria equivalente a $1018,04 \cdot 10^3 = 1018040m^3$.

Figura 55 - Construção do Coliseu no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.7.6 Análise de Erro

Comparando os resultados obtidos no cálculo por integral e no determinado pelo GeoGebra 3D com os dados fornecidos pelos site "Tribune Sand Triumphs"¹⁹ que diz que para a construção do Coliseu foram utilizados $100.000 m^3$ de mármore, utilizado como volume real do monumento, os alunos encontraram uma diferença dez vezes maior. O que os fez refletir que tratar a quantidade de um dos materiais utilizados na construção tornaria as medidas imprecisas para estabelecer o volume da estrutura. E constataram que não iriam conseguir o volume original do prédio, porém, sabiam que ele estava em torno de $1.000.000 m^3$ por conta dos dados obtidos por integral e no GeoGebra 3D.

Os alunos ainda descrevem que não conseguiram fazer uma cópia fiel ao monumento no GeoGebra 3D ou na maquete pois não conseguiram determinar as arquibancadas nem as estruturas subterrâneas.

5.1.7.7 Opinião Sobre o Trabalho

Observaram que o trabalho foi interessante, visto que usaram um *software*, que desconheciam a versão que projeta em 3D, para calcular, desenhar e projetar

algo que eles mesmos criaram ou copiaram (ou pelo menos tentaram copiar). Destacam que infelizmente não conseguiram criar o monumento da forma que queriam, mas que o trabalho serviu como um grande aprendizado por testarem quase todos os comandos do programa tentando recriar o monumento da forma mais perfeita possível.

Sobre o GeoGebra 3D descrevem que ele é um *software* bem feito e otimizado, o qual é simples de usar, porém, ressaltam que não encontraram uma ferramenta para desenhar o que queriam fazer no monumento deles.

Por fim, acrescentam que com esse trabalho, aprenderam a usar integral para o cálculo de volume de formas geométricas variadas e calcular o volume de formas mais complexas, como foi o caso do monumento escolhido por eles. Também aprenderam a usar o GeoGebra 3D, o que pode ser útil em outros trabalhos, não só em matemática.

5.1.8 Obelisco da cidade de Buenos Aires na Argentina

Os alunos iniciaram escrevendo que "facilmente neste monumento são vistas duas figuras geométricas espaciais: o tronco de uma pirâmide e uma pirâmide" (Figura 56) e assim, justificam a escolha deste monumento.

Figura 56 - Obelisco de Buenos Aires.



Fonte: Buenos Aires Travel²².

²² Disponível em: <<http://www.buenosaires.travel/pt/plaza-de-la-republica/>>. Acesso em abril de 2017.

5.1.8.1 Construção da Maquete

Os alunos projetaram em papelão a estrutura planejada do monumento nas proporções determinadas numa escala de 1cm para cada 225cm. Após recortaram, dobraram e montaram a maquete da estrutura (Figura 57).

Figura 57 - Montagem da maquete do Obelisco de Buenos Aires.



Fonte: a autora.

5.1.8.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para chegarem ao volume real os alunos dividiram a estrutura em dois sólidos: um tronco de pirâmide quadrangular regular na parte inferior e uma pirâmide quadrangular regular na parte superior.

De acordo com os dados constantes no site Wikipedia²³ os alunos fizeram um esboço do desenho do monumento (Figura 58) e, com isso, calcularam as medidas para seu volume conforme segue:

H - altura do tronco = 63,5m;

A - aresta da base maior = 6,8m;

a - aresta da base menor = 3,5m;

h - altura da pirâmide = 4m.

$$V_{\text{tronco}} = \frac{H}{3}(A^2 + A \cdot a + a^2).$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{63,5m}{3}((6,8m)^2 + (6,8m \cdot 3,5m) + (3,5m)^2).$$

$$V_{\text{tronco}} = 1741,81m^3.$$

²³ Disponível em: < https://es.wikipedia.org/wiki/Obelisco_de_Buenos_Aires>. Acesso em dezembro de 2016.

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h.$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot (3,5m)^2 \cdot 4m.$$

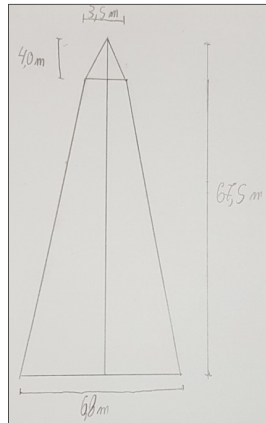
$$V_{pirâmide} = 16,33m^3.$$

$$V_{ObeliscoBA} = V_{tronco} + V_{pirâmide}.$$

$$V_{ObeliscoBA} = 1741,81m^3 + 16,33m^3.$$

$$V_{ObeliscoBA} = \mathbf{1758,14m^3}.$$

Figura 58 - Esboço para o cálculo das medidas do Obelisco de Buenos Aires.



Fonte: a autora.

5.1.8.3 Cálculo do Volume por Integral

Os alunos já conheciam as alturas do tronco de pirâmide quadrangular regular e da pirâmide que está na parte superior do monumento.

Como eles não souberam calcular o volume do tronco de pirâmide, usando a fórmula de volume que é a integral da seção transversal resolveram obter as áreas das bases menor e maior do tronco de pirâmide quadrangular regular a partir de integrais.

Cada valor da integral teve como base os pontos estabelecidos no GeoGebra 3D, tendo em vista suas posições no eixo das abscissas no eixo das ordenadas, conforme segue:

Área da maior base quadrangular regular do tronco:

$$S_B = \int_0^{680} 680dx = 462400cm^2 = 46,24m^2.$$

Área da menor base quadrangular regular do tronco:

$$S_b = \int_{165}^{515} 350 dx = 122500 \text{ cm}^2 = 12,25 \text{ m}^2.$$

Fica claro que não faz sentido encontrar a área de um quadrado a partir do cálculo de uma integral, porém, como um dos itens do trabalho era encontrar o volume do monumento a partir de integrais, os alunos optaram por utilizar o cálculo de integrais para estabelecer a área das bases quadrangulares regulares do tronco de pirâmide do monumento.

Dando continuidade aos cálculos, os alunos obtiveram os seguintes resultados:

Volume da pirâmide:

h : altura da pirâmide.

$$h = 400 \text{ cm} \Rightarrow 4 \text{ m}.$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{S_b \cdot h}{3} = \frac{12,25 \cdot 4}{3} = 16,33 \text{ m}^3.$$

Volume do tronco de pirâmide quadrangular regular:

h_t : altura do tronco de pirâmide.

$$V_{\text{tronco}} = \frac{h}{3} (S_B + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b).$$

Os valores para S_B e S_b foram obtidos pelas integrais acima, já o valor h_t os alunos obtiveram através do GeoGebra 3D e encontraram que $h_t = 63,5 \text{ m}$. Então,

$$V_{\text{tronco}} = \frac{63,5 \text{ m}}{3} (46,24 \text{ m}^2 + \sqrt{46,24 \text{ m}^2 \cdot 12,25 \text{ m}^2} + 12,25 \text{ m}^2) = 1741,81 \text{ m}^3.$$

Volume total do monumento: tendo os valores do volume do tronco de pirâmide quadrangular regular e o volume da pirâmide do topo do monumento, bastou somá-los para obterem o volume total do Obelisco de Buenos Aires:

$$V_{\text{total}} = V_{\text{pirâmide}} + V_{\text{tronco}} = 16,33 \text{ m}^3 + 1741,81 \text{ m}^3.$$

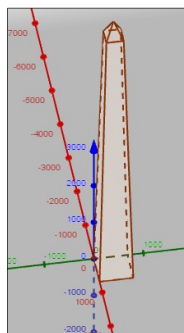
$$V_{\text{total}} = 1758,14 \text{ m}^3.$$

5.1.8.4 Representação no GeoGebra 3D

No GeoGebra 3D este Obelisco (Figura 59), assim como o Obelisco do trabalho anterior, também foi construído ligando os pontos e construindo as estruturas a partir de figuras geométricas planas, ou seja, não construíram a partir de uma estrutura de figuras em 3D. Para encontrar o volume do sólido também

optaram por calcular algebricamente pois, como não utilizaram as ferramentas necessárias no *software* para encontrar este valor automaticamente, não conseguiram obter o valor diretamente pelo *software*.

Figura 59 - Obelisco Buenos Aires construído no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.8.5 Volume no GeoGebra 3D

O objeto foi projetado criando os quatro pontos que formam a base maior do tronco quadrangular regular, depois, à distância necessária da base maior, os quatro pontos que formam a base menor deste mesmo tronco (os quais também formam a base da pirâmide) também foram criados e, por fim, foi criado o ponto que é o ponto mais alto da pirâmide do topo do monumento e, por consequência, do monumento.

Tendo esses pontos, os alunos os ligaram utilizando a ferramenta “polígono” do GeoGebra 3D. Também utilizaram o *software* para medir a área da base maior e a área da base menor do tronco. Além disso, mediram a altura do tronco e da pirâmide pelo *software*. Tendo todos esses valores, calcularam o volume da pirâmide e do tronco, separadamente. E depois, apenas somaram os dois valores. Como os valores obtidos no GeoGebra 3D são iguais aos do cálculos do volume por integral anteriormente descrito, consequentemente, o volume também foi.

5.1.8.6 Análise de Erro

Segundo relato dos alunos não houve nenhum erro para os valores encontrados pelo *software*, por integrais ou por geometria espacial, pois utilizaram o mesmo cálculo para os dois últimos, e os dados obtidos diretamente no *software*.

5.1.8.7 Opinião Sobre o Trabalho

O grupo achou bem interessante o trabalho, pois, principalmente, os fez, por instantes, parar, refletir, reconhecer e observar figuras geométricas espaciais em monumentos famosos no mundo inteiro. Algo que, sem esse trabalho, dificilmente fariam, relata a dupla. Acrescentam ainda que além disso, aprenderam, mesmo que de maneira bem básica, a utilizar o *software* GeoGebra 3D além do acréscimo na aprendizagem de matemática. Por isso, acharam que o trabalho proposto foi bem completo.

O grupo sabia da existência desse programa, porém, nunca o havia utilizado. Acharam o GeoGebra 3D bem interessante pelo grande número de possibilidades referentes ao ensino da matemática que com ele se pode trabalhar.

5.1.9 Edifício Copan da cidade de São Paulo

Por possuir uma forma não convencional para uma construção, o que chamou a atenção da dupla, o prédio (Figura 60) foi escolhido. Também por ser um dos poucos edifícios brasileiros que fogem do padrão em arquitetura e engenharia.

Figura 60 - Edifício Copan.



Fonte: Design Nova²⁴.

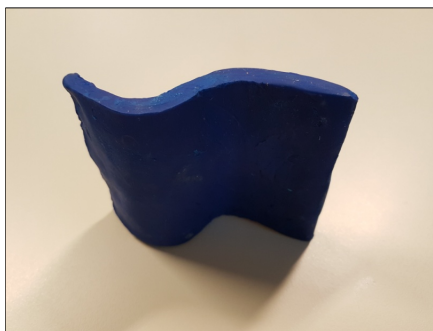
5.1.9.1 Construção da Maquete

Com massa de biscoito e a partir de uma foto da vista aérea do prédio, cuja escala é de 1:1333,3, os alunos moldaram a estrutura do prédio e construíram a

²⁴ Disponível em: <<https://designinnova.blogspot.com.br/2011/10/os-45-anos-do-edificio-copan.html>>. Acesso em abril de 2017.

maquete. A escala da maquete em relação a estrutura original é 1:1666,7 (Figura 61).

Figura 61 - Maquete do edifício Copan.



Fonte: a autora.

5.1.9.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

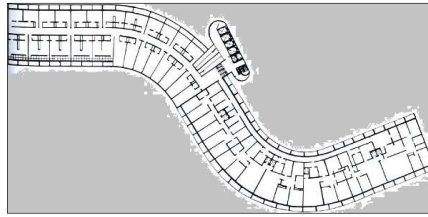
De acordo com a dupla não foi possível calcular o volume real, uma vez que não existem informações o suficiente sobre as dimensões do edifício na internet. Relatam ainda que enviaram um e-mail no dia 11/12/2016 para os responsáveis pelo prédio por meio da página de contatos, no site²⁵ deles, pedindo a equação das curvas que regem os limites do edifício ou o volume real do mesmo, porém até a data de entrega do relatório 21/12/2016, não haviam recebido respostas, dessa forma, os alunos optaram por desenhar o sólido em escala no GeoGebra 3D para assim obterem o volume “real”.

5.1.9.3 Representação no GeoGebra 3D

O desenho foi projetado marcando-se no GeoGebra 3D, pontos sobre a figura da planta baixa (Figura 62) obtida na internet, inserida no *software*, e, contornando essa imagem com pontos (Figura 63). Por extrusão foi obtido no *software* que o volume seria de $59,32\text{cm}^3$, que, através da conversão com a escala de $0,6\text{cm}$ para cada 10m , resulta em um volume de $274629,63\text{m}^3$.

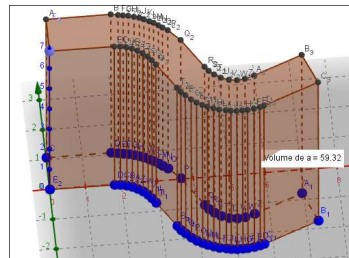
²⁵ Disponível em: < <http://www.copansp.com.br/>>. Acesso em dezembro de 2016.

Figura 62 - Planta baixa do Edifício Copan.



Fonte: Sampaulo, De Lá Pra Cá²⁶.

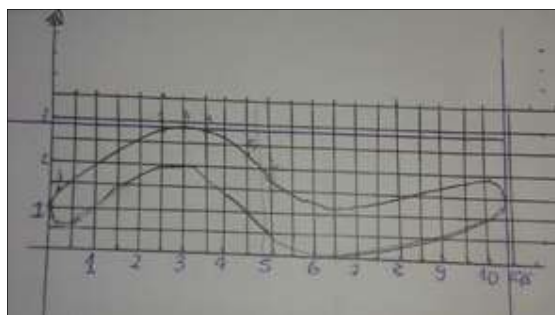
Figura 63 - Imagem construída sobre a imagem da planta baixa no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

Para conseguir montar a função que gera o sólido a dupla utilizou de um interpolador online¹⁵, cujos pontos para gerar as funções foram obtidos desenhando a base da maquete em um papel que foi quadriculado posteriormente. O esboço deste papel encontra-se na figura 64.

Figura 64 - Esboço para encontrar pontos e obter a função que descreve o contorno da estrutura do prédio.

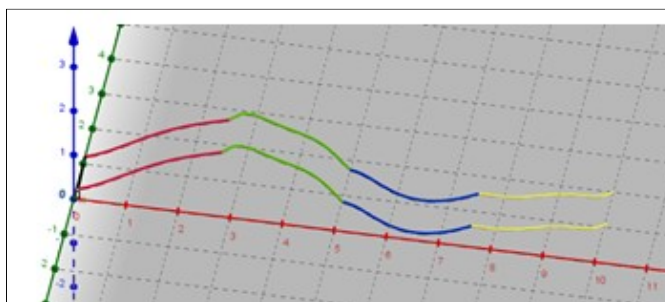


Fonte: a autora.

²⁶ Disponível em: <<http://sampaolodelapraça.com/2016/06/pode-entrar-que-a-mesa-e-sua/>>. Acesso em abril de 2017.

Então os alunos pegaram 6 pontos obtidos no esboço acima para formar cada uma das funções desenhadas e separadas por cores conforme a figura abaixo. E usaram, ao todo, quatro funções. Cada função obtida está desenhada de uma cor diferente das demais: vermelho, verde, azul e amarelo (Figura 65).

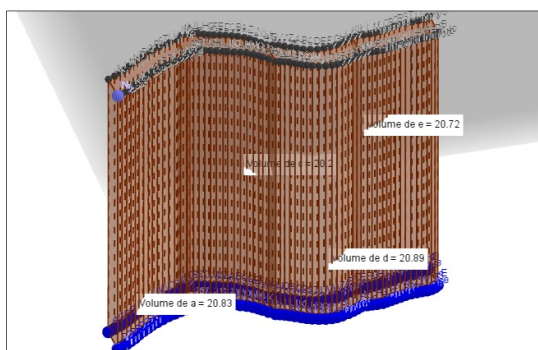
Figura 65 - Esboço das funções que descrevem a estrutura do Edifício Copan.



Fonte: acervo dos alunos.

A partir dessas funções, com a ferramenta "extrusão para prismas e cilindros", foi obtido o sólido em três dimensões no GeoGebra 3D (Figura 66).

Figura 66 - Edifício Copan projetado no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.9.4 Cálculo do Volume por Integral

Com as funções fornecidas pelo interpolador¹⁵, já classificadas a partir de cores, os alunos calcularam a área da região determinada por cada uma da seguinte forma:

Área da parte vermelha:

$$\int_0^{2.5} [(0,0\bar{6}x^4 - 0,4x^3 + 0,68\bar{3}x^2 + 0,35x + 1,2) - (0,0\bar{6}(x - 0,027)^4 - 0,4(x - 0,027)^3 + 0,68\bar{3}(x - 0,027)^2 + 0,35(x - 0,027) + 0,28)]dx.$$

$$A_{vermelha} = 2,32662cm^2.$$

Área da parte verde:

$$\int_{2.5}^5 [(0,17x^5 - 3,41\bar{6}x^4 + 26,5\bar{6}x^3 - 101,99x^2 + 193,17x - 141,3) - (0,17\bar{3}x^5 - 3,41\bar{6}x^4 + 26,5\bar{6}x^3 - 101,99x^2 + 193,17x - 142,24)]dx.$$

$$A_{verde} = 2,28613cm^2.$$

Área da parte azul:

$$\int_5^{7.5} [(0,04x^5 - 1,3x^4 + 17,71\bar{6}x^3 - 116,91\bar{6}x^2 + 381,9x - 491,5) - (0,04x^5 - 1,3x^4 + 17,71\bar{6}x^3 - 116,91\bar{6}x^2 + 381,99\bar{3}x - 492,5)]dx.$$

$$A_{azul} = 2,28566cm^2.$$

Área parte amarela:

$$\int_{7.5}^{10} [(0,1\bar{3}x^5 - 5,7\bar{3}x^4 + 98,3x^3 - 839,9\bar{6}x^2 + 3577,11\bar{6}x - 6072,5) - (0,1\bar{3}x^5 - 5,7\bar{3}x^4 + 98,3x^3 - 839,9\bar{6}x^2 + 3577,11\bar{6}x - 6073,4)]dx.$$

$$A_{amarela} = 2,28613cm^2.$$

O volume foi determinado pela soma de todas as áreas multiplicadas pela altura (h), $h = 9cm$.

$$A_{vermelha} + A_{verde} + A_{azul} + A_{amarela} = 2,32662cm^2 + 2,28613cm^2 + 2,28566cm^2 + 2,28613cm^2 = 9,18454cm^2.$$

$$V = 9,18454cm^2 \cdot 9cm = 82,66086cm^3.$$

5.1.9.5 Volume no GeoGebra 3D

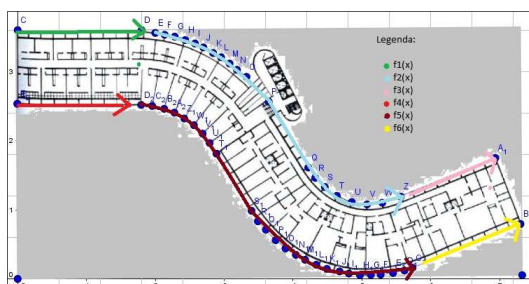
No GeoGebra 3D os alunos utilizaram as funções descritas em 5.1.9.4 e montaram o sólido projetando diversos segmentos ao invés de utilizar a ferramenta geradora de prismas por extrusão que haviam utilizado para calcular a aproximação do volume real do prédio, logo, não obtiveram o volume do sólido diretamente pelo *software*.

Os alunos obtiveram as 4 áreas das bases do sólido, uma para cada função, e multiplicaram seus valores pela altura do prédio, encontrando os resultados a seguir: $20,83 + 20,2 + 20,89 + 20,72 = 82,64u.v.$

5.1.9.6 Análise de Erro

Insatisfeitos com a não obtenção do volume “real” puseram uma imagem da planta, no site Sampaolo, De Lá Pra Cá²⁶, em escala no fundo do GeoGebra 3D e, em seguida, traçaram as curvas por cima de alguns dos pontos (Figura 67) obtendo seis funções.

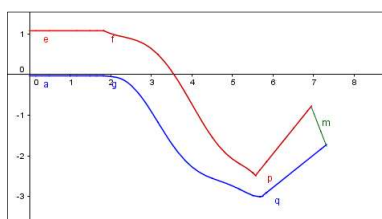
Figura 67 - Funções geradas pelo *software* GeoGebra 3D.



Fonte: acervo dos alunos.

Como pode ser visto na figura 67, há uma legenda com 6 funções: verde, azul, lilás, vermelha, vinho e amarela. Mas os alunos não conseguiram encontrar a função que regia cada uma delas e eles queriam obter as funções, e, para tal, puseram todos os pontos mostrados acima no Excel para obter a função que passa por todos eles. O resultado foi o da figura 68.

Figura 68 - Representação dos pontos no *software* Excel.



Fonte: acervo dos alunos.

Como podemos observar o resultado ficou muito diferente do esperado, então os alunos mantiveram o cálculo do volume a partir da versão do GeoGebra 3D.

As medidas das áreas obtidas através de integral e no GeoGebra 3D, quando foram postas as mesmas funções que foram integradas, geraram um volume muito próximo com um erro de apenas 0,02%, visto que foram baseadas nas mesmas funções. Já, quando essas medidas são comparadas ao valor considerado "real", obtido pela representação dos pontos da planta baixa no GeoGebra 3D, o erro se torna absurdo, equivalente a 28,2%

Os alunos justificam este erro grande porque aproximação das funções que não ficou boa, porque mesmo que os seis pontos projetados dessem uma ideia da função geradora do prédio, ainda sim são muito poucos para uma precisão grande. Além disso, relatam que as funções foram interpoladas através de pontos definidos pela maquete, que não respeita perfeitamente a escala de 0,6cm para 10m na vida real, tendo, na verdade, 0,75cm para todo 10m real, o que já gera uma diferença enorme.

Ao perceberem esta diferença, os alunos ajustaram as medidas para uma mesma escala e obtiveram os seguintes resultados:

$$V_{\text{real}} = 59,32 \cdot 16,67^3 = 274629,6m^3.$$

$$V_{\text{integral}} = 82,66 \cdot 13,33^3 = 195934,8m^3$$

$$V_{\text{geogebra}} = 82,64 \cdot 13,33^3 = 195740,5m^3$$

Mesmo alterando as escalas os erros continuaram próximos de 30% e portanto, perceberam que há erro na representação de algum dos sólidos.

5.1.9.7 Opinião Sobre o Trabalho

Para a dupla o trabalho foi bastante complicado principalmente pela parte que envolvia encontrar as funções que regem o edifício e a parte de utilizar o GeoGebra 3D, pois não o conheciam. Também encontraram muitas dificuldades na montagem da maquete, cuidando pra que estivesse em escala, mas não conseguiram mesmo assim.

Com o trabalho, aprenderam que é muito difícil de se obter a equação de uma curva a partir de poucas informações. Além disso aprenderam que fazer maquetes em escala é uma tarefa bem complicada que exige bastante destreza com as mãos.

5.1.10 Centro Administrativo Fernando Ferrari

Os alunos escolheram este edifício (Figura 69) pois um dos integrantes da dupla morou em Porto Alegre por 14 anos e ambos já conheciam o prédio em questão. Também justificam a escolha pois a construção atendia as necessidades exigidas nas regras do trabalho.

Figura 69 - Centro Administrativo Fernando Ferrari.



Fonte: Wikipedia²⁷.

5.1.10.1 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para obter as medidas reais, a dupla acessou o serviço Google Earth²⁸ para pegar uma visão superior do prédio. Como o Google Earth²⁸ fornece a escala das imagens é possível encontrar os valores reais das medidas usando regra de três.

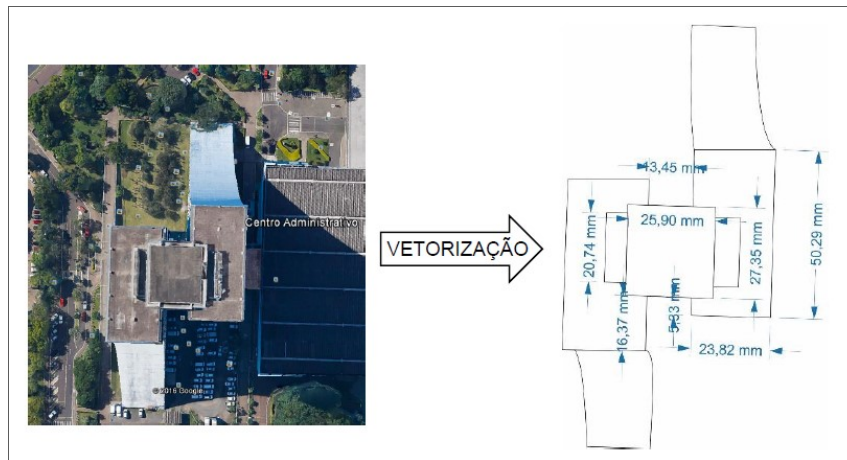
Os alunos utilizaram a vetorização de imagens para conseguir a planta do edifício e descreveram que esse processo se resume em criar uma série de vetores por cima de uma imagem comum (jpeg, png, etc), contornando as formas da imagem e, após vetorizar todas as linhas da imagem original (Figura 70), deve-se apagá-la, restando somente as linhas vetorizadas. Após esse procedimento, por se tratar de vetores, e não um conjunto de pixels, é possível ampliar a imagem da forma que quiser sem prejudicar sua resolução. No trabalho isso foi feito somente com o intuito de tornar a imagem do prédio mais definida.

²⁷

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Centro_Administrativo_do_Estado_do_Rio_Grande_do_Sul>. Acesso em abril de 2017.

²⁸ Disponível em: <<https://www.google.com.br/intl/pt-PT/earth/>>. Acesso em abril de 2017.

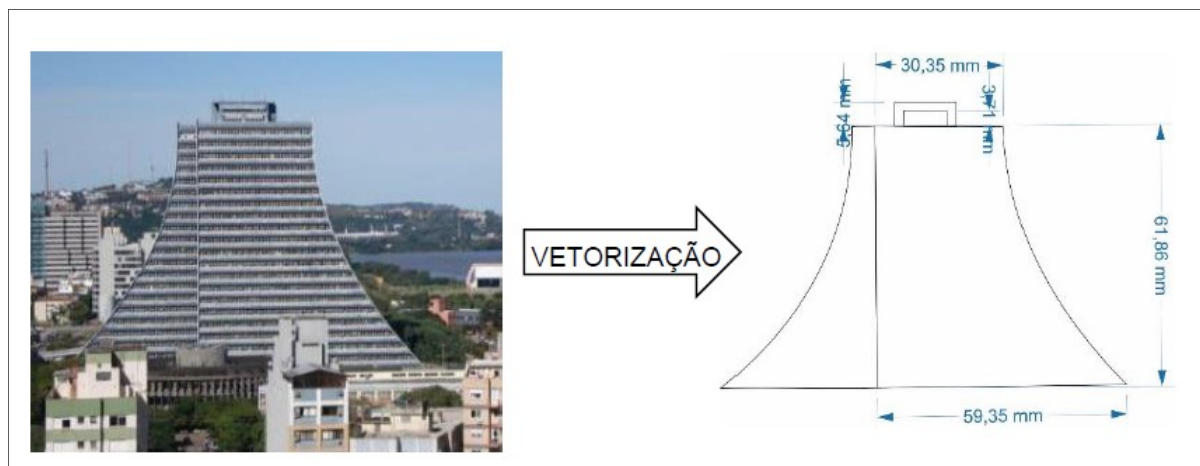
Figura 70 - À esquerda a imagem do prédio visto de cima pelo Google Earth e ao lado dela o resultado da vetorização no Corel Draw obtida pelos alunos.



Fonte: Google Earth²⁹ e acervo dos alunos.

Para conseguirem as medidas laterais como a altura e o comprimento da base, por exemplo, uma imagem do Google Imagens (Figura 71) foi escolhida para ser vetorizada da mesma forma que a figura 70 e o resultado está a seguir:

Figura 71 - À esquerda a imagem do prédio visto de cima pelo Google Earth e ao lado dela o resultado da vetorização no Corel Draw obtida pelos alunos.



Fonte: Wikimapia³⁰ e acervo dos alunos.

²⁹ Disponível em: < <https://earth.google.com/web/@-30.03971462,-51.23131614,44.38208136a,524.11014067d,35y,0.00000001h,44.99761058t,0r>>. Acesso em dezembro de 2016.

³⁰ Disponível em: <<http://wikimapia.org/104487/pt/Centro-Administrativo-Fernando-Ferrari#/photo/263709>>. Acesso em abril de 2017.

Os valores apresentados após a vetorização (Tabela 4), não são os reais mas estão proporcionais aos reais. A partir deles foi possível obter as medidas reais. A escala usada na imagem superior é de 79m reais para 72,67mm na tela do monitor, a partir desse valor bastou fazer regras de três para conseguir os outros dados.

Tabela 4 - Medidas reais obtidas pelas medidas obtidas na vetorização (vista superior).

	Real	Monitor
Escala do mapa;	79 m	72,67mm
Comprimento da base superior;	54,67m	50,29mm
Comprimento da cobertura;	29,73m	27,35mm
Largura da cobertura;	28,16m	25,90mm
Comprimento da lateral da cobertura;	22,55m	20,74mm
Largura dos prédios;	25,89m	23,82mm
Distância entre os prédios;	14,62m	13,45mm

Fonte: a autora.

A imagem lateral não possui escala, porém os alunos relataram ser possível encontrar uma relação entre os valores vetorizados e os reais, pois, como o comprimento da base superior está presente nas duas imagens, e já foi obtido o valor real dessa medida, bastou usá-la como relação para as outras. E assim foram obtidas as demais medidas (Tabela 5).

Tabela 5 - Medidas reais obtidas pelas medidas obtidas na vetorização (vista lateral).

	Real	Monitor
Comprimento da base superior;	54,67m	30,35mm
Comprimento da base inferior;	106,91m	59,35mm
Altura do prédio;	111,43m	61,86mm
Altura da cobertura;	10,16m	5,64mm
Altura da cobertura lateral.	6,68m	3,71mm

Fonte: a autora.

5.1.10.2 Construção da Maquete

O material usado para a construção da maquete foi isopor, os cálculos para as medidas foram baseados na espessura da placa de isopor (Tabela 6), para

facilitar no corte do material. A dupla ainda relata que as duas imagens possuem escalas diferentes embora sejam proporcionais, e, por isso, precisaram estabelecer uma relação para cada uma delas, que foi dada pelo comprimento da base superior, já que é uma medida comum as duas imagens. Primeiro estabeleceram a relação das medidas com a espessura do isopor que é de 7,5cm.

Tabela 6 - Tabela comparativa entre a imagem da foto e a maquete do Centro Administrativo Fernando Ferrari.

	Medida na imagem	Medida na maquete
Espessura do isopor	23,82mm	7,5cm
Base superior na imagem superior	50,29mm	15,8cm
Base superior na imagem lateral	30,35mm	15,8cm

Fonte: a autora.

Com esses três valores da tabela 6 calcularam todos os outros necessários para a construção da maquete. Da imagem lateral retiraram seis pontos para a criação de uma função que modelasse a curva da estrutura, dois deles foram o topo e o chão.

Antes de aplicar o cálculo da função encontraram os valores da altura, base inferior e base superior da maquete (Tabela 7).

Tabela 7 - Quadro comparativo entre a imagem da foto e a maquete do Centro Administrativo Fernando Ferrari (Vista Lateral)

	Medida na imagem	Medida na maquete
Altura	61,86mm	32,2cm
Base inferior	59,35mm	30,9cm
Base superior	30,35mm	15,8cm
Distância entre a base inferior até a superior	29mm	15,1cm

Fonte: a autora.

A partir dos valores do eixo x , foi descontado o valor da base superior para que a função iniciasse em $x = 0 \text{ cm}$ e acabasse em $x = 15,1 \text{ cm}$ (Quadro 2). Para o eixo das ordenadas (Quadro 3) foi necessário apenas fazer a conversão do valor real para o valor proporcional à maquete. A medida projetada é proporcional a medida da maquete multiplicada por uma razão de proporção igual a 2,04.

Quadro 2 - Quadro comparativo entre a imagem da foto, a maquete e medida projetada no GeoGebra 3D, para o eixo das abscissas, do Centro Administrativo Fernando Ferrari (Eixo das abscissas).

Medida na imagem	Medida na maquete	Medida projetada
59,35mm	30,9cm	15,1cm
29,72mm	17,8cm	8,7cm
16,14mm	9,7cm	4,7cm
6,97mm	4,2cm	2,1cm
1,84mm	1,1cm	0,5cm

Fonte: a autora.

Quadro 3 - Quadro comparativo entre a imagem da foto e a maquete para o eixo das ordenadas do Centro Administrativo Fernando Ferrari (Eixo das ordenadas).

Medida na imagem	Medida na maquete
111,43mm	32,2cm
80mm	23,1cm
60mm	17,3cm
40mm	11,6cm
20mm	5,8cm

Fonte: a autora.

Para montar a maquete os alunos montaram um quadro com as coordenadas de cada ponto (Quadro 4).

Quadro 4 - Quadro comparativo entre o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas do Centro Administrativo Fernando Ferrari.

Eixo das abscissas(cm)	Eixo das ordenadas (cm)
15,1	0,0
8,7	5,8
4,7	11,6
2,1	17,3
0,5	23,1
0,0	32,2

Fonte: a autora.

Com os valores das coordenadas foi montado um gráfico em uma cartolina e desenhados os pontos nele, após isso, foi desenhada manualmente a função ajustando-se os pontos com curvas suaves. Com isso a cartolina foi cortada e

colocada sobre a placa de isopor, como um molde, para que o corte dessa peça fosse realizado.

Esse processo foi repetido para todas as outras peças da maquete: primeiro calculavam os pontos, após desenhavam na cartolina, cortavam-na e colocavam o molde em cartolina sobre o isopor para finalmente o corte ser realizado.

Também foi calculada a proporção da maquete para o prédio real, esse cálculo foi baseado na altura real de $111,43\text{ m}$ e na altura da maquete que é de $32,2\text{ cm}$. Portanto com o quociente desses valores encontrou-se a razão de proporção que é de $3,46$, ou seja, 1 cm na maquete corresponde à $3,46\text{ m}$ no prédio verdadeiro. Também foi calculada a porcentagem que a maquete representa do prédio, e foi encontrado que a maquete corresponde a $0,29\%$ do prédio original.

Após todas as peças estarem cortadas, as mesmas foram pintadas e deixadas para secar, para então serem coladas com uma cola especial para isopor e assim a maquete foi montada (Figura 72). A escala utilizada foi de $1:34,6$.

Figura 72 - Construção da maquete do Centro Administrativo Fernando Ferrari.



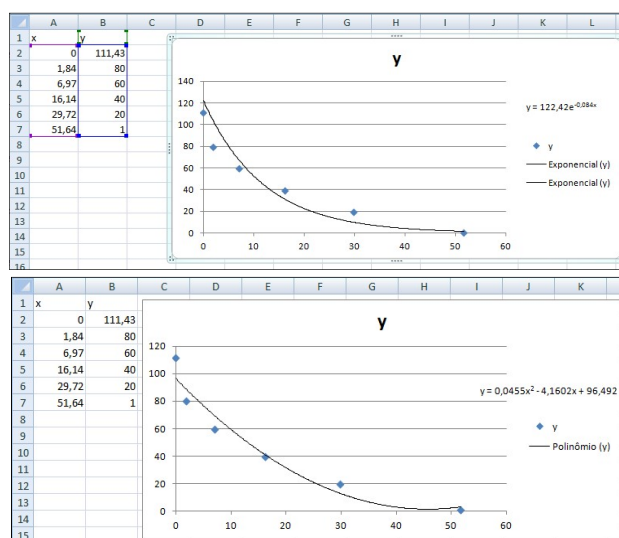
Fonte: a autora.

5.1.10.3 Cálculo do Volume por Integral

Os alunos relatam que várias funções foram criadas no programa Excel, a partir dos pontos obtidos nas representações para a confecção da maquete, para usar no cálculo da integral definida, e que a escolhida tinha que ser a que melhor se aproximasse aos pontos reais do prédio. A curva que melhor aproxima uma situação não necessariamente passa pelos pontos experimentais.

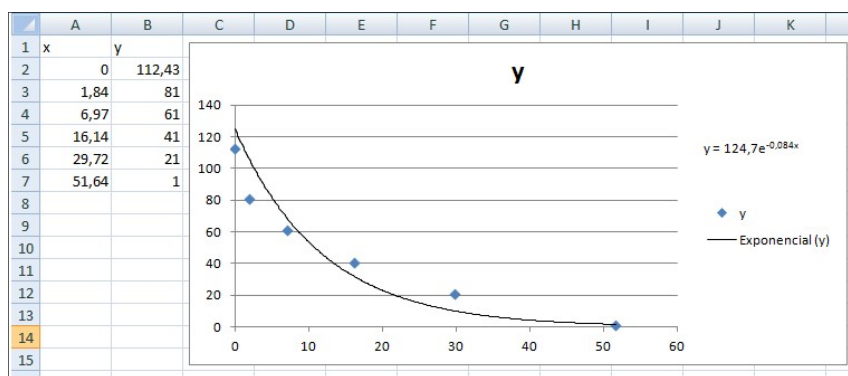
A seguir estão duas imagens das funções criadas, aproximadas e descartadas (Figura 73). A que foi escolhida como melhor aproximação foi uma outra que está na figura 74.

Figura 73 - Funções aproximadas e descartadas.



Fonte: acervo dos alunos.

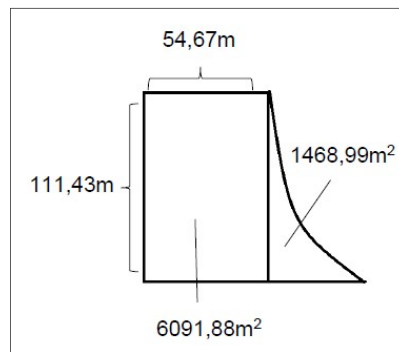
Figura 74 - Função obtida como melhor aproximação.



Fonte: a autora.

Após a escolha da função, a dupla calculou a área da região abrangida pela própria função e o eixo das abscissas, limitada pelas retas $x = 0$ e $x = 54,24$, para isso foi feita a integração da mesma com os limites em $x = 0$ e $x = 54,24$, encontrando a área da região que não possui formato retangular da figura 75.

Figura 75 - Medidas da vista lateral do edifício.



Fonte: acervo dos alunos.

$$\int_0^{54,24} 124,7 \cdot e^{-0,084x} dx = \frac{124,7e^{-0,084 \cdot 54,24}}{-0,084} - \frac{124,7e^{-0,084 \cdot 0}}{-0,084} = 1468,99m^2.$$

Esse valor obtido, somado com a área lateral do prédio restante, resulta na área lateral total, que multiplicada pela espessura do edifício resulta no volume de um dos prédios principais, cujo volume é igual, numericamente, ao outro, portanto esse valor multiplicado por dois resulta no volume dos dois prédios principais, restando somar a ele o volume dos anexos (Tabela 8) e, então, irá se obter o volume total.

Volume dos prédios principais:

Área lateral total de um prédio (A_{lp}): $A_{lp} = 7\,560,87m^2$.

Espessura do prédio = $25,89m$.

Volume de um prédio (V_p): $V_p = 25,89m \cdot 7\,560,87m^2 \Rightarrow V_p = 195\,750,92m^3$.

Volume dos dois prédios (V_{2p}): $V_{2p} = 2 \cdot 195\,750,92m^3 \Rightarrow V_{2p} = 391\,501,85m^3$.

Tabela 8 - Dimensões e volume dos prédios anexos ao edifício.

	Viga Central	Cobertura	Parte lateral da cobertura
Altura (m)	111,43m	10,16m	6,68m
Comprimento (m)	29,73m	28,16m	6,68m
Espessura (m)	14,62m	29,73m	22,55m
Volume da estrutura (m^3)	$111,43m \cdot 14,62m \cdot 29,73m$ $= 48\,433,34m^3$	$10,16m \cdot 28,16m \cdot 29,73m$ $= 8\,505,24m^3$	$22,55m \cdot 6,68m \cdot 6,68m$ $= 1\,006,24m^3$

Fonte: a autora.

Como são duas as partes laterais da cobertura, então o volume das duas partes laterais da cobertura será igual a $1\,006,24m^3 \cdot 2 = 2\,012,48m^3$.

Para o calcular o volume total (V_t) basta somar todos os valores obtidos na tabela 8 e para os prédios principais:

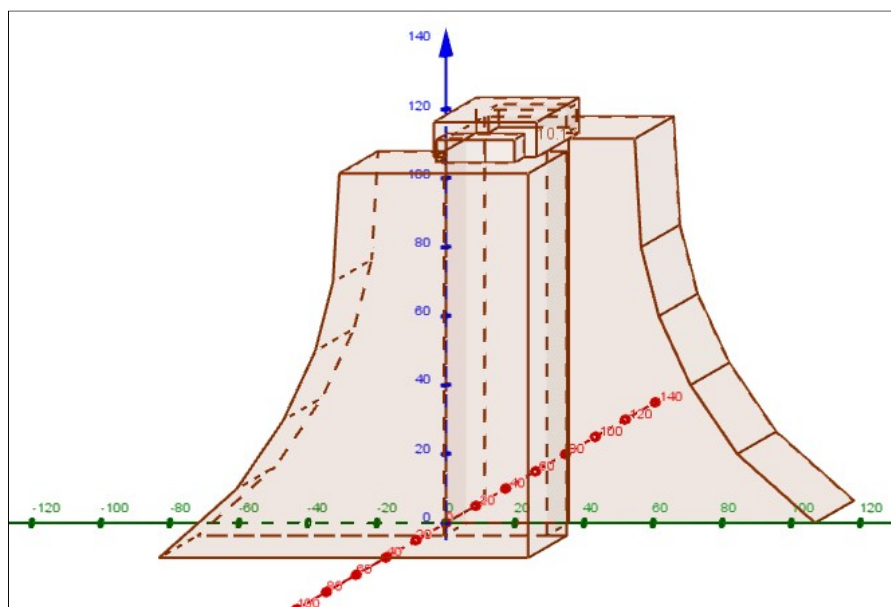
$$V_t = 391\,501,85m^3 + 48\,433,34m^3 + 8\,505,24m^3 + 2\,012,48m^3.$$

$$V_t = 450\,452,91m^3.$$

5.1.10.4 Representação no GeoGebra 3D

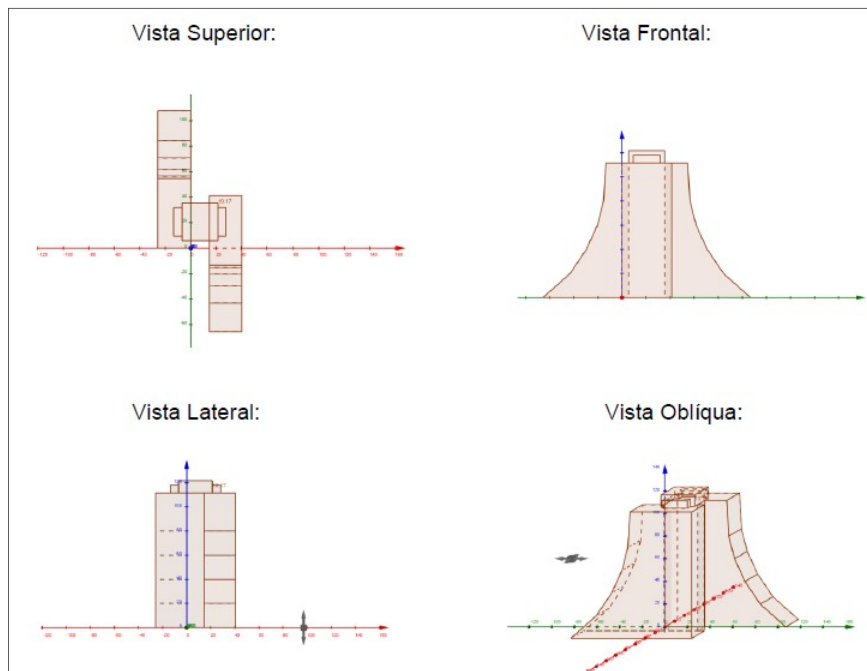
Para construir o sólido (Figura 76) os alunos não utilizaram as ferramentas de geometria em 3D oferecidas pelo *software*. Apenas marcaram pontos e construíram polígonos a partir dos pontos traçados. Os pontos foram obtidos a partir da construção da maquete. Os alunos ainda justificam que precisaram construir a estrutura a partir dos pontos por áreas e não de polígonos pois a estrutura que se assemelha a uma função exponencial decrescente não possibilita uma construção a partir de polígonos. Então, para que a imagem ficasse mais homogênea optaram por montar toda a construção a partir de polígonos. As vistas: superior, frontal, lateral e oblíqua também podem ser visualizadas na figura 77 que segue abaixo.

Figura 76 - Centro Administrativo Fernando Ferrari projetado no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

Figura 77 - Vistas do Centro Administrativo Fernando Ferrari no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.10.5 Volume no GeoGebra 3D

Para obter o volume do poliedro no GeoGebra 3D foram utilizadas as ferramentas “determinar área” e “distância entre pontos”.

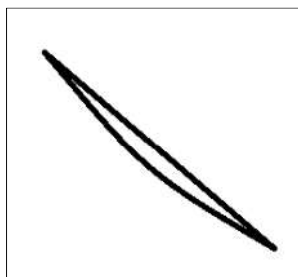
Como o monumento pode ser dividido em vários paralelepípedos e dois prismas em que um dos lados pode ser aproximado por uma função exponencial calculou-se o volume do sólido fazendo o produto da área da base pela altura em cada sólido e após todos os volumes foram somados. E o resultado foi: $458608,06m^3$.

5.1.10.6 Análise de Erro

A dupla relata não ter conseguido obter o volume real do prédio calculado pelos engenheiros que o projetaram, pois a planta da construção não está publicamente acessível. Então consideraram que a melhor aproximação desse valor foi obtida pelo GeoGebra 3D, já que os pontos da curva estavam mais próximos, visualmente, dos reais, obtidos pela imagem impressa e comparados aos que a

função exponencial oferece, embora não seja exato, pois a curva que foi traçada foi obtida com várias funções afins, gerando um pequeno erro no cálculo. A figura 78 a seguir exemplifica esse erro de aproximação.

Figura 78 - Erro de aproximação.

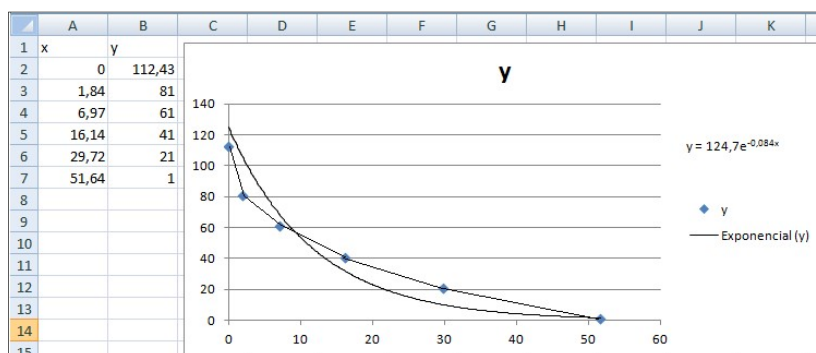


Fonte: acervo dos alunos.

A área compreendida entre as duas curvas ao lado, refere-se ao erro no resultado da área, porém ele é ainda menor que o gerado pela função usada para o cálculo da integral, por esse motivo a dupla considerou que o volume correto era o obtido através do GeoGebra 3D.

Observando a figura 79 da função exponencial, linha contínua em preto, e dos pontos obtidos na aproximação, pontos azuis, percebe-se que esse erro é maior, pois os pontos pertencentes à ela estão mais afastados dos pontos reais, isso ocorre porque a função é apenas uma aproximação.

Figura 79 - Função exponencial utilizada para aproximar a linha estrutural do prédio.



Fonte: a autora.

Comparando os dois volumes encontrados: o calculado no item 5.1.10.3, $Integral + Prismas = 450452,91m^3$ e o encontrado pelo *Geogebra* = $458608,06m^3$ percebe-se que ocorreu uma diferença de $8155,15 m^3$, isso representa 1,78% do volume total, ou seja, essa foi a taxa de erro entre o cálculo pela função e pelo GeoGebra 3D. Pode-se ainda dizer que esta diferença não foi significativa e possivelmente é devido a aproximação da exponencial pelo conjunto de funções lineares.

5.1.10.7 Opinião Sobre o Trabalho

Os alunos relatam que podem dizer que o resultado do trabalho foi satisfatório, pois os resultados foram atingidos. Quanto ao *software* afirmam que no início a dupla teve muita dificuldade de aprender a usar algumas ferramentas, tudo parecia muito confuso, mas após um certo domínio do programa, foi muito bom usá-lo, pois a quantidade de coisas possíveis de se fazer para manipular os gráficos bidimensionais e tridimensionais é muito grande, se tornou até mesmo divertido usar o GeoGebra 3D.

A dupla também adquiriu muitos conhecimentos na realização desse trabalho, a primeira foi construir uma função que se aproxime da curva real de um prédio, pois isso serviu para revisar o conteúdo de função exponencial. Muito importante, também, foi aprender a usar integral definida para achar a área de uma região delimitada por uma função, para então calcular o volume. O uso do GeoGebra 3D foi muito bom para a dupla, pois é importante saber usar um *software* gráfico, eles podem ser de muita utilidade no futuro, ainda mais se for um *software* completo como este.

5.1.11 O "olho" do museu Oscar Niemeyer da cidade de Curitiba

A escolha por este monumento (Figura 80) se deu pois em uma viagem à cidade um dos integrantes do grupo se interessou pela arquitetura do local e sugeriu o monumento por sua simplicidade visual apesar da complexa engenharia.

Figura 80 - Museu Oscar Niemeyer.



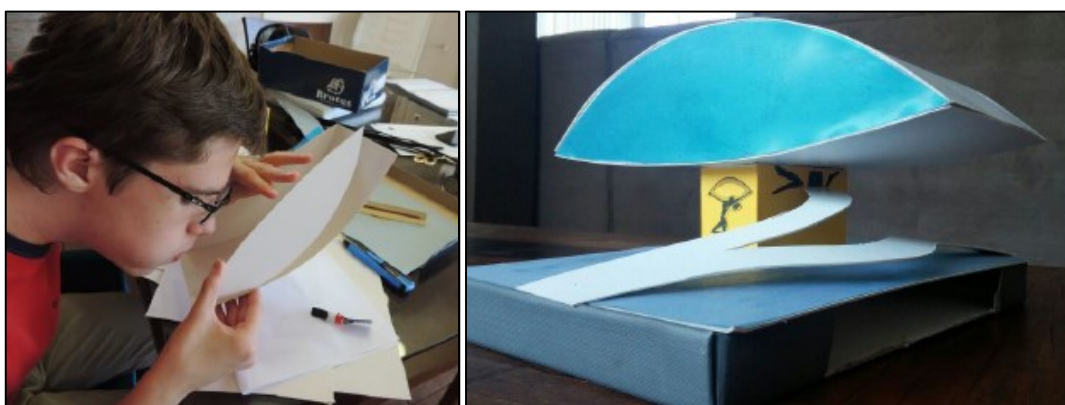
Fonte: Descubra Curitiba³¹.

5.1.11.1 Construção da Maquete

A estrutura da maquete (Figura 81) foi realizada pelo grupo em papel Smith e os acabamentos em folha de ofício A4 coloridas, sua escala foi de 1:250.

Para construir a maquete os alunos desenharam o contorno das suas faces no papel e após recortaram e colaram com cola de contato. Depois imprimiram as imagens da base do "Olho" e colaram tornando a maquete mais fiel ao monumento real.

Figura 81 - Construção da maquete do Museu Oscar Niemeyer.



Fonte: a autora.

³¹ Disponível em: <<http://www.descubracruzitiba.com.br/exposicoes/museu/584/museu-oscar-niemeyer/>>. Acesso em abril de 2017.

5.1.11.2 Cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas

Para realizar o cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas a dupla utilizou como base uma tese de doutorado de Simone Neiva Loures Gonçalves³² que apresenta uma imagem com escala do monumento (Anexo C).

As medidas reais do monumento foram obtidas multiplicando os dados encontrados na planta pela proporção determinada pela escala da planta. A escala no desenho é de 2,4 cm, equivalendo a 20 m. Então, para ter os valores reais, em metros, bastou multiplicar cada medida por 20/2,4, conforme consta na tabela 9.

Tabela 9 - Conversão das medidas do Olho do Museu Oscar Niemeyer.

Descrição	Planta	Real
comprimento do olho	8,4cm	70m
largura do olho	3,6cm	30m
altura total do olho no ponto máximo	2,1cm	17,5m
lado da base quadrada de apoio no subsolo	0,45cm	3,75m
altura total da torre de apoio do olho	2,52cm	21m
altura da torre amarela	2cm	16,7m
altura da parábola superior	1,7cm	14m
altura da parábola inferior	0,4cm	3,5m

Fonte: a autora.

Ao analisarem as medidas encontradas a partir do desenho, puderam confirmar as medidas descritas no texto que encontraram e consta no anexo D deste trabalho.

De acordo com Gonçalves (2010, p.55) "A cobertura do edifício é feita por uma grande curva parabólica" então com um *software* de CAD utilizaram as medidas fornecidas para encontrar o círculo que melhor aproxima a parábola, além de seus "ângulos internos", e então calcularam o volume do "olho". Os alunos chamam em sua descrição o arco determinado pela parábola de "ângulos internos".

Os alunos desenharam duas circunferências de raios diferentes e secantes entre si. A região delimitada pelas circunferências entre os pontos de intersecção delas forma a imagem do "Olho" cujo volume se quer calcular. Os alunos encontraram a

³² Disponível em: < <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16138/tde-30062010-093643/pt-br.php>>. Acesso em abril de 2017.

área dos setores circulares da figura para calcular a área total de uma das faces do "Olho".

Os cálculos realizados pelos alunos estão na figura 82 porém como eles estão parcialmente ilegíveis, foram reescritos conforme pode ser observado na sequência do texto. Ao reescrever os cálculos trocou-se as expressões "parábola menor" e "parábola maior" utilizadas pelos alunos por "parábola inferior" e "parábola superior", respectivamente. Também foram reconstruídas as circunferências desenhadas pelos alunos no *software* GeoGebra 3D para uma melhor visualização dos resultados (Figura 83).

Figura 82 - Desenho e cálculos realizados pelos alunos para encontrar a área de uma das faces do "Olho" do Museu Oscar Niemeyer.

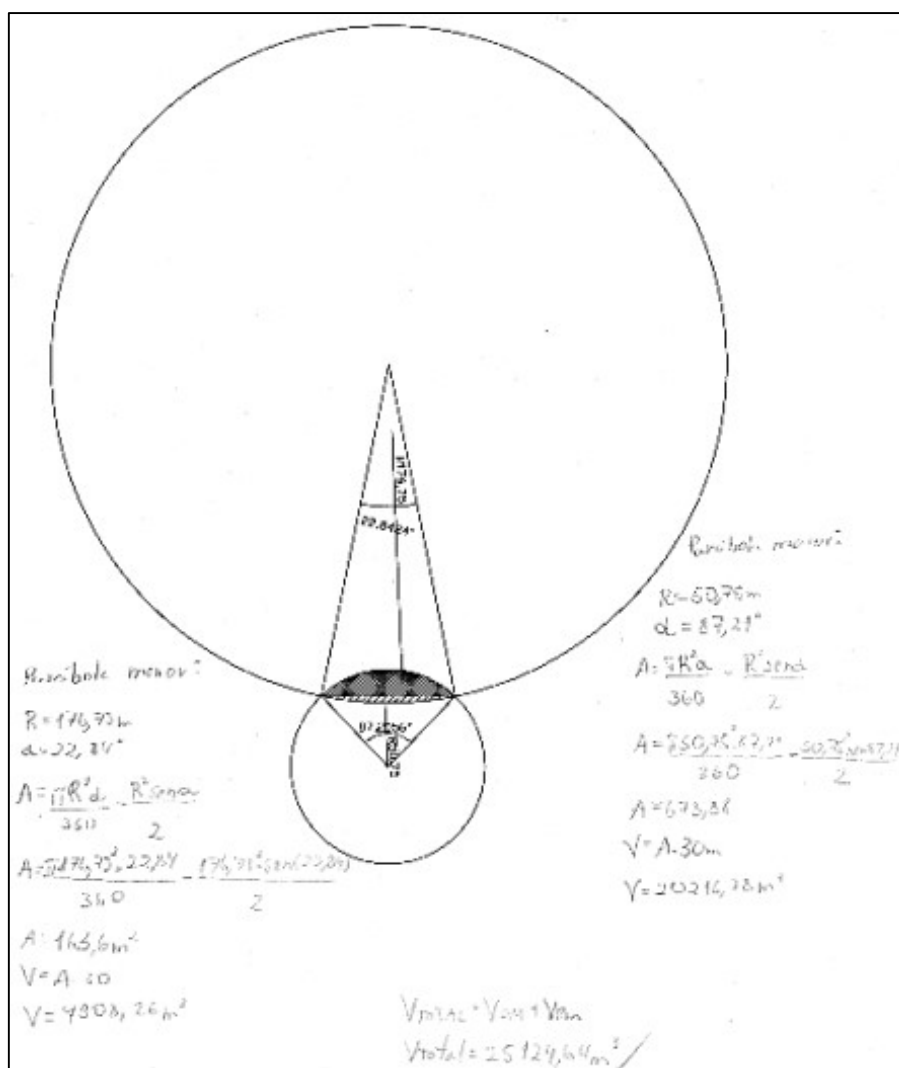
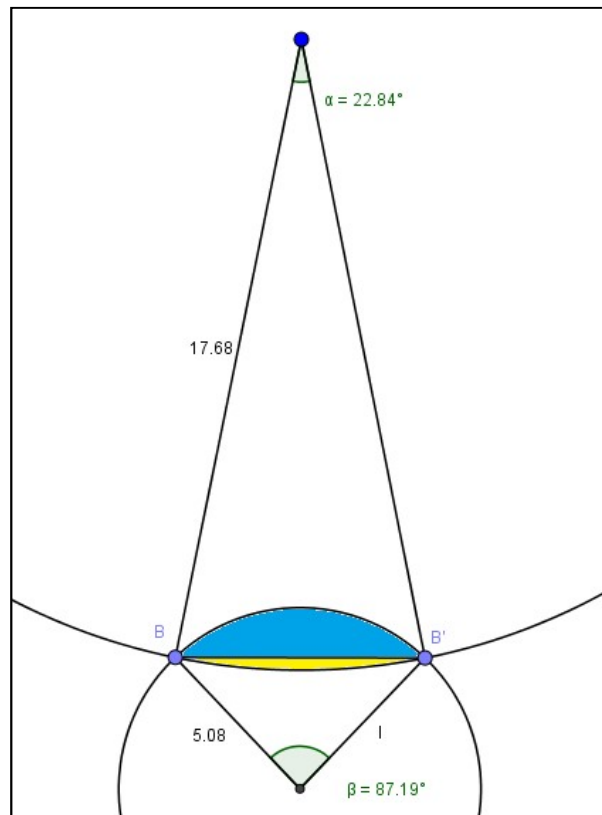


Figura 83 - Reconstrução do desenho feito para encontrar os dados que projetam o "Olho" do Museu Oscar Niemeyer.



Fonte: a autora.

Para encontrar a área de uma face do olho os alunos marcaram com um ponto cada uma das intersecções das parábolas superior e inferior e traçaram um segmento reto de um ponto ao outro (segmento $\overline{BB'}$). Após, para encontrar as áreas descritas na figura acima nas cores azul e amarela, os alunos construíram circunferências que aproximavam as parábolas descritas no monumento e mediram o ângulo do setor circular determinado por seus raios nas intersecções B e B'. Então calcularam a área desse setor circular: $A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$, α = ângulo delimitado pelo setor e R = raio da circunferência, e retiraram dela a área do triângulo formado pelos raios do círculo no setor circular limitados pelo segmento que é formado pela união das intersecções dos raios com a circunferência (segmento $\overline{BB'}$).

$$A_{triângulo} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha}{2} \left\{ \begin{array}{l} a = \text{um dos lados do triângulo} \\ b = \text{outro dos lados do triângulo} \\ \alpha = \text{ângulo formado entre os lados a e b} \end{array} \right. , \text{ aqui: } a = b = R$$

$$\text{Parábola inferior: } \begin{cases} R = 176,75m \\ \alpha = 22,84^\circ \\ h = 30m \end{cases} \quad A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{R^2 \cdot \text{sen} \alpha}{2}$$

$$A_{\text{inferior}} = \frac{\pi(176,75m)^2 \cdot 22,84^\circ}{360^\circ} - \frac{(176,75m)^2 \cdot \text{sen}(22,84^\circ)}{2}$$

$$A_{\text{inferior}} = 6226,76m^2 - 6063,15m^2 = 163,6m^2$$

$$V = A \cdot h \rightarrow V_{\text{inferior}} = 163,6m^2 \cdot 30m = 4908,26m^3$$

$$\text{Parábola superior } \begin{cases} r = 50,75m \\ \beta = 87,21^\circ \\ h = 30m \end{cases} \quad A = \frac{\pi r^2 \beta}{360^\circ} - \frac{r^2 \cdot \text{sen} \beta}{2}$$

$$A_{\text{superior}} = \frac{\pi(50,75m)^2 \cdot 87,21^\circ}{360^\circ} - \frac{(50,75m)^2 \cdot \text{sen}(87,21^\circ)}{2}$$

$$A_{\text{superior}} = 1960,13m^2 - 1286,25m^2 = 673,88m^2$$

$$V = A \cdot h \rightarrow V_{\text{superior}} = 673,88m^2 \cdot 30m = 20216,4m^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{superior}} + V_{\text{inferior}} \rightarrow V_{\text{total}} = 20216,4m^3 + 4908,26m^3 = 25124,66m^3$$

5.1.11.3 Cálculo do Volume por Integral

As funções foram encontradas baseando-se nos valores de pontos conhecidos, (0,0), (35,14) e (70,0) para a parte superior (Figura 84) e (0,0) (35,-3,5) e (70,0) na parte inferior (Figura 85). Como cada função descreve uma parábola, pode-se escrevê-las como $f(x) = ax^2 + bx + c$ e, com estes três pontos foi possível modelar as funções conforme segue.

Obtenção da parábola superior: $y = ax^2 + bx + c$.

Com o ponto (0, 0), obtém-se: $0 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = ax^2 + bx$.

Como o ponto (35, 14), obtém-se: $14 = a \cdot (35)^2 + b \cdot 35 \Rightarrow -a = \frac{35b-14}{35^2}$.

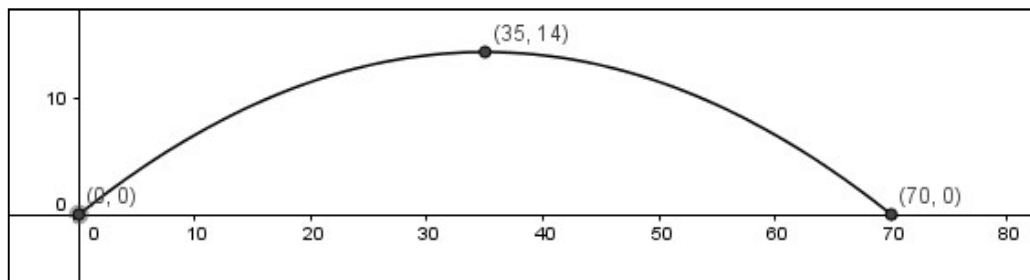
E, por fim, com o ponto (70, 0), obtém-se: $0 = a \cdot (70)^2 + b \cdot 70 \Rightarrow a = \frac{-70b}{70^2}$.

Assim, tem-se o seguinte sistema:
$$\begin{cases} -a = \frac{35b-14}{35^2} \\ a = \frac{-70b}{70^2} \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{35b-14}{35^2} + \frac{-70b}{70^2} \Rightarrow$$

$$b = \frac{4}{5} \text{ e } a = \frac{-2}{175}.$$

Então conclui-se que a função requerida é: $f(x) = \frac{-2}{175}x^2 + \frac{4}{5}x$.

Figura 84 - Parábola Superior.



Fonte: a autora.

Obtenção da parábola inferior:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Com o ponto $(0, 0)$, obtém-se: $0 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = ax^2 + bx$.

Como o ponto $(35, -3,5)$, obtém-se: $-\frac{7}{2} = a \cdot (35)^2 + b \cdot 35 \Rightarrow -a = \frac{35b+7/2}{35^2}$.

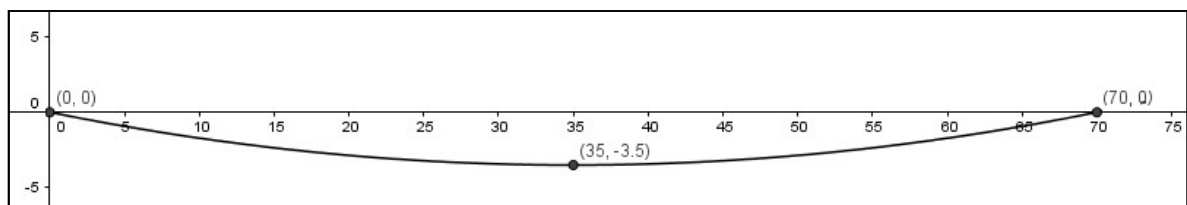
E, por fim, com o ponto $(70, 0)$, obtém-se: $0 = a \cdot (70)^2 + b \cdot 70 \Rightarrow a = \frac{-70b}{70^2}$.

$$\text{Assim, tem-se o seguinte sistema: } \begin{cases} -a = \frac{35b+7/2}{35^2} \\ a = \frac{-70b}{70^2} \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{35b+7/2}{35^2} + \frac{-70b}{70^2} \Rightarrow$$

$$b = \frac{-1}{5} \text{ e } a = \frac{1}{350}.$$

Então conclui-se que a função requerida é: $g(x) = \frac{1}{350}x^2 - \frac{1}{5}x$.

Figura 85 - Parábola Inferior.



Fonte: a autora.

Parábola Superior:

$$\int_0^{70} f(x) dx = \int_0^{70} \left(\frac{-2}{175} x^2 + \frac{4}{5} x \right) dx = \int_0^{70} \left(\frac{-2}{175} x^2 \right) dx + \int_0^{70} \left(\frac{4}{5} x \right) dx =$$

$$\frac{-2}{3 \cdot 175} x^3 + \frac{4}{2 \cdot 5} x^2 \Big|_0^{70} = \frac{-2}{3 \cdot 175} (70)^3 + \frac{4}{2 \cdot 5} (70)^2 = \frac{1960}{3} m^2$$

Parábola Inferior:

$$\int_0^{70} g(x) dx = \int_0^{70} \left(\frac{1}{350} x^2 - \frac{1}{5} x \right) dx = \int_0^{70} \left(\frac{1}{350} x^2 \right) dx + \int_0^{70} \left(-\frac{1}{5} x \right) dx =$$

$$\frac{1}{3 \cdot 350} x^3 - \frac{1}{2 \cdot 5} x^2 \Big|_0^{70} = \left| \frac{1}{3 \cdot 350} (70)^3 - \frac{1}{2 \cdot 5} (70)^2 \right| = \left| \frac{-490}{3} \right| m^2$$

$$\text{Área do olho: } A = \left(\frac{1960}{3} + \left| \frac{-490}{3} \right| \right) m^2 = \frac{2450}{3} m^2 = 816, \bar{6} m^2.$$

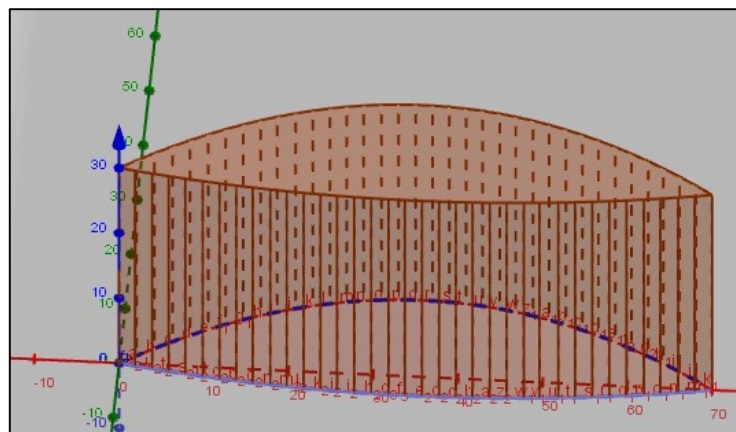
Após obter a área de uma das faces que compõe a estrutura do olho, bastou multiplicar este valor pela largura de 30m para encontrar o volume:

$$\text{Volume do olho: } 816, \bar{6} m^2 \cdot 30m = 24.500 m^3.$$

5.1.11.4 Representação no GeoGebra 3D

Para montar o monumento no GeoGebra 3D primeiramente foram colocadas as funções encontradas no plano 2d do *software* e limitou-se as mesmas para a largura do olho (70m). Para passar para o 3d, os alunos aproximaram a curva em um polígono de 70 lados no formato do olho, após passar para o 3d utilizou-se a ferramenta “extrusão para prisma ou cilindro” e determinou-se a profundidade do sólido para 30m (Figura 86).

Figura 86 - Representação do "Olho" do museu Oscar Niemeyer feita no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

5.1.11.5 Volume no GeoGebra 3D

O GeoGebra 3D foi capaz de calcular o volume e encontrou um valor de $24479.65m^3$, minimamente diferente do encontrado pela integral, com uma diferença de apenas 0,49%.

5.1.11.6 Análise de Erro

O volume real encontrado foi $25124,6m^3$, um pouco maior que o encontrado por integral e pelo GeoGebra 3D, com erros de aproximadamente 2,09% e 2,57% respectivamente.

Segundo a dupla a discrepância apresentada acima entre os volumes pode ser explicada por vários motivos, um deles é o fato de haver arredondamentos em todas as partes dos cálculos pois não há motivo para realizá-los com múltiplas casas depois da vírgula. Outro motivo é a imprecisão do método utilizado para encontrar as funções, já que os valores encontrados são aproximações.

No caso do GeoGebra 3D, relatam que como o *software* não permite a criação de um sólido com infinitos lados, foi necessário reduzir o número de arestas, nesse caso para 70. Embora a variação seja pequena ela ainda deve ser considerada.

Consideram ainda que na hora de conseguir as medidas através de escala, utilizou-se uma régua para a medição, causando um erro natural que, somado com as aproximações, aumentaram este. Esse erro é elevado ao cubo para o cálculo do volume, aumentando-o ainda mais.

5.1.11.7 Opinião Sobre o Trabalho

No que se refere à realização do trabalho, os alunos relatam que gostaram de realizá-lo pois aprenderam bastante ao confeccioná-lo e foram capazes de enxergar a aplicação da matemática na prática, saindo das teorias da sala de aula.

Nesse trabalho ainda consideram que aprenderam muitas coisas que podem vir a ser úteis no futuro acadêmico e profissional como a utilização do GeoGebra 3D e a realização de cálculos com integral definida, muito útil para calcular área e volume de figuras irregulares.

Em relação ao GeoGebra 3D, já conheciam o *software* para realizar funções em 2D, porém a parte 3D foi algo completamente novo para o grupo, em geral, acham o *software* completo e fácil de usar além de leve, podendo ser facilmente carregado em pen-drives e sistemas de nuvem.

5.2 DESCRIÇÃO DOS TRABALHOS QUE NÃO FORAM CONSTRUÍDOS CONFORME OS OBJETIVOS PROPOSTOS

Seguem os trabalhos que possuíam erros graves nos seus cálculos, conceitos ou construções.

A dupla que escolheu o monumento Miyajima Torii (Figura 87) justificou a escolha porque um dos alunos o visitou no ano anterior. Confeccionaram a maquete com argila, areia e palito de "churrasquinho" (Figura 88). Para calcular o volume da estrutura trabalharam com volume de diversos cilindros, porém para calcular o volume por integral utilizaram uma única função (Figura 89). Eles não tiveram dificuldades para fazer a construção do monumento no GeoGebra (Figura 90).

Figura 87 - Miyajima Torii.



Fonte: Wikipedia³³.

³³ Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Itsukushima_Shrine>. Acesso em abril de 2017.

Figura 88 - Maquete Miyajima Torii.



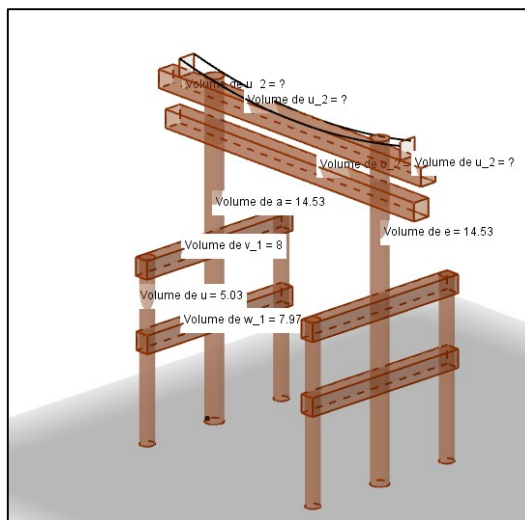
Fonte: a autora.

Figura 89 - Resultado da integral criada pelos alunos.

Entrada	$\int_1^{12} (x - 6.5)^2 (0.02) dx$
Saída	$\frac{1331}{600}$
Saída Decimal	2.21833333333333

Fonte: acervo dos alunos.

Figura 90 - Miyajima Torii projetado no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

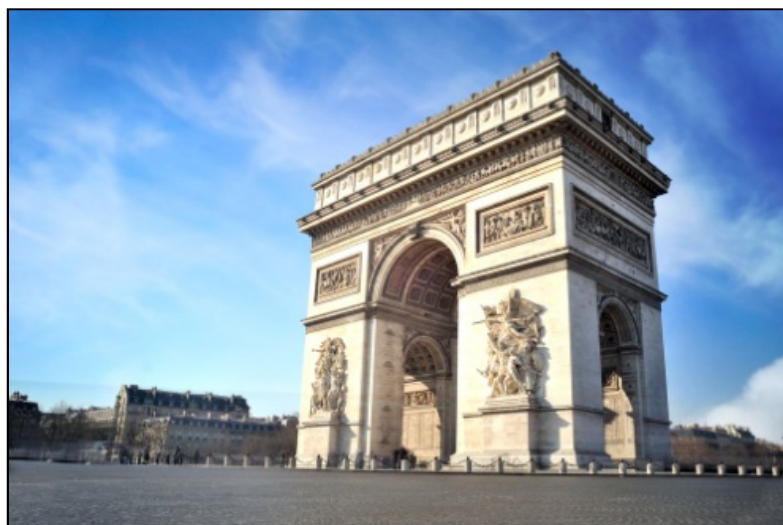
De acordo com a dupla o volume disponibilizado no GeoGebra 3D de cada figura geométrica leva ao resultado de $V = 98,2u.v$.

Os alunos relataram que observaram uma grande discrepância nas medidas obtidas em todas as situações analisadas mas não conseguiram explicar o porquê.

Os alunos relatam que o trabalho não provocou tantas dificuldades, mas que mesmo assim trabalhar com integral nunca pode ser chamado de uma tarefa fácil, acrescentam que conheceram o GeoGebra 3D através do trabalho, e que depois de passadas as dificuldades iniciais gostaram muito do *software*. Por fim comentam que o trabalho proporcionou principalmente a possibilidade de aprender e trabalhar com integrais definidas, assunto muito útil.

Nos trabalhos do Arco do Triunfo de Paris (Figura 91) os alunos não conseguiram trabalhar com Modelagem Matemática.

Figura 91 - Arco do Triunfo da cidade de Paris na França.



Fonte: Bolg Mundi³⁴.

Uma dupla comprou o projeto da maquete na internet (Figura 92), imprimiu a folha, recortou, dobrou colou e montou a maquete. Perdendo a experiência da construção proporcional. O que acarretou em uma falha na construção no GeoGebra (Figura 93) e não permitiu que eles calculassem o volume a partir de integrais.

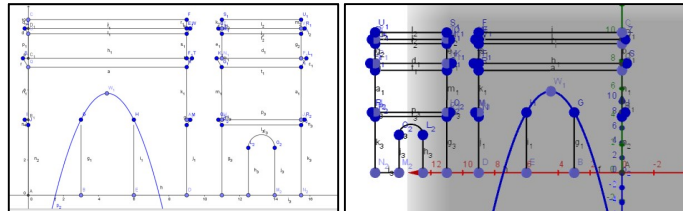
³⁴ Disponível em: <<http://blog.mundi.com.br/2012/10/03/paris-vista-alto-torre-eiffel-arco-triunfo/>>. Acesso em abril de 2017.

Figura 92 - Maquete do Arco do Triunfo montada pelos alunos.



Fonte: a autora.

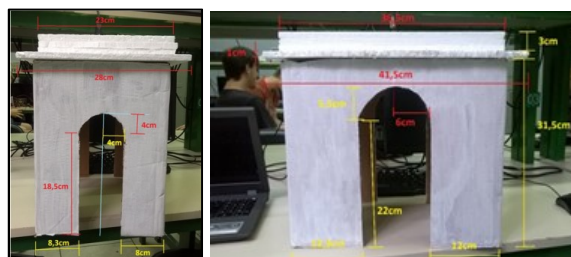
Figura 93 - Representação do sólido no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

O menino que optou por fazer o trabalho individualmente, que também escolheu o Arco do Triunfo, construiu a maquete a partir de uma caixa de papelão (Figura 94). Sem se importar com as proporções e definindo as medidas "a olho". Inclusive fez um quadro (Quadro 5) para mostrar a proporção individual de cada medida. Esta atitude também implicou em problemas na construção no GeoGebra (Figura 95) e no cálculo dos volumes das estruturas.

Figura 94 - Maquete do Arco do Triunfo - Grupo 2.



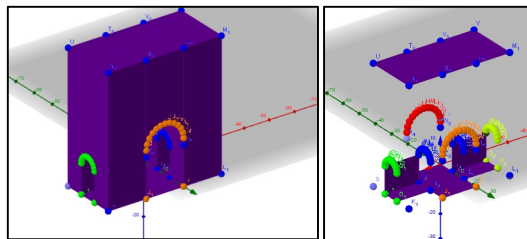
Fonte: a autora

Quadro 5 - Quadro comparativo para as escalas de cada dimensão do Arco do Triunfo e o tamanho real

Item	Tamanho real	Escala
Largura	45m	1cm/1,25m
Altura	50m	≈1cm/1,4m
Profundidade	22m	≈1cm/1m

Fonte: a autora.

Figura 95 - Representação do Arco do Triunfo no GeoGebra 3D - Grupo 2.



Fonte: a autora.

O monumento ao Expedicionário da cidade de Porto Alegre (Figura 96) foi escolhido por ser um dos cartões postais da capital do Estado e porque representa o centenário da Revolução Farroupilha.

Figura 96 - Monumento ao Expedicionário.

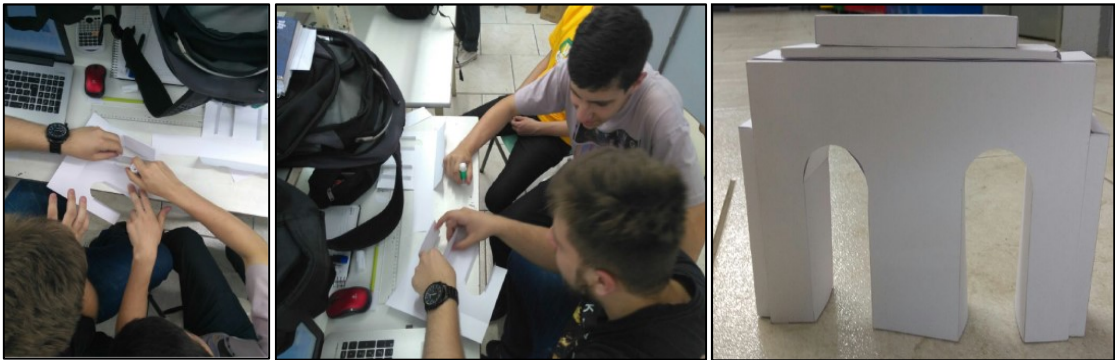


Fonte: Wikihaus³⁵.

Novamente houve falha na proporção quando construíram a maquete (Figura 97) o que acarretou em erros de cálculos e construções no GeoGebra (Figura 98).

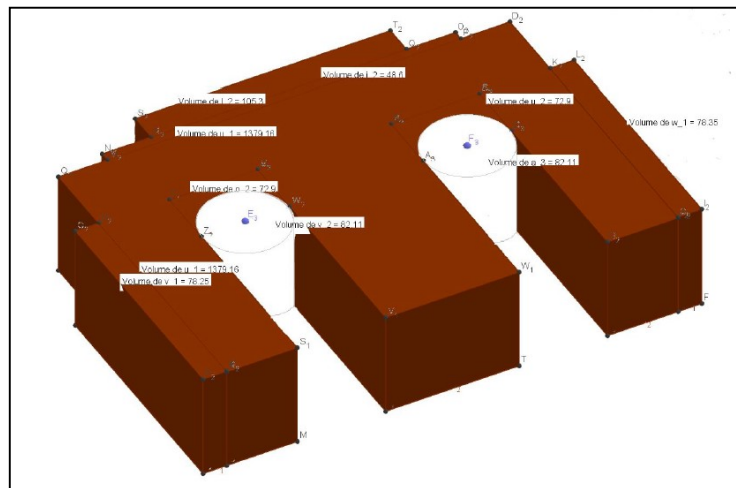
³⁵ Disponível em: <<https://wikihaus.com.br/arquitetura/3-lugares-que-todo-arquiteto-precisa-conhecer-em-porto-alegre/>>. Acesso em abril de 2017.

Figura 97 - Construção da maquete do Monumento ao Expedicionário.



Fonte: a autora.

Figura 98 - Projeto do Monumento a Expedicionário no GeoGebra em 3D.



Fonte: a autora.

A justificativa para a escolha do Estádio Olímpico Monumental, o antigo estádio do Grêmio FBPA (Figura 99) é que ele faz parte de uma grande história do futebol gaúcho sendo palco de vários títulos, portanto a dupla resolveu fazer uma homenagem a este estádio hoje inativo e à professora torcedora deste time. Os alunos não conseguiram construir a maquete em escala (Figura 100) perdendo proporções. Também trabalharam como se o monumento fosse um cilindro, quando tentaram calcular o seu volume, fazendo o trabalho perder o sentido. Na construção a partir do GeoGebra (Figura 101) fizeram uma estrutura oval, sem respeitar a forma original.

Figura 99 - Estádio Olímpico Monumental.



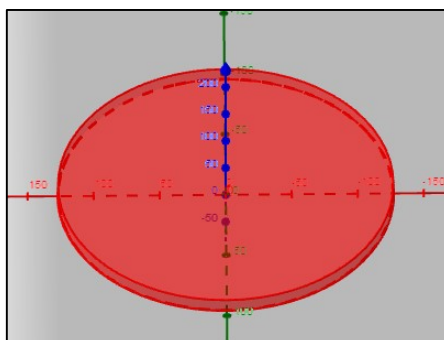
Fonte: Wikimapia³⁶.

Figura 100 - Construção da maquete do Estádio Olímpico.



Fonte: a autora.

Figura 101 - Construção do Estádio no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

A escolha do Templo Kukulcan da cidade de Tinum no México se deve a sua aparência (Figura 102), que para a dupla, é agradável e também acham viável a construção da maquete (Figura 103) e da representação no GeoGebra 3D (Figura 104). Essa dupla não tentou realizar os cálculos para o volume do monumento.

³⁶ Disponível em: <<http://wikimapia.org/1013294/pt/Est%C3%A1dio-Ol%C3%ADmpico-Monumental-Gr%C3%AAmio-Foot-Ball-Porto-Alegrense#/photo/1061233>>. Acesso em abril de 2017.

Figura 102 - Templo Kukulcan.



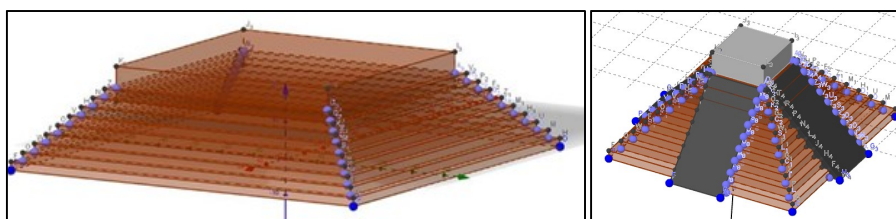
Fonte: Blog Mundi³⁷.

Figura 103 - Maquete do Templo Kukulcan.



Fonte: a autora.

Figura 104 - Construção do Templo Kukulcan no GeoGebra 3D.



Fonte: a autora.

³⁷ Disponível em: < <http://blog.mundi.com.br/2015/10/09/o-templo-kukulcan-e-sua-complexidade/>>. Acesso em abril de 2017.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este trabalho se deu como um estudo de caso pois houve a busca pela descoberta. Mesmo quando os alunos que não chegaram a um resultado final esperado, seus relatórios e suas conclusões foram considerados, evidenciando suas visões e compreensões divergentes; o contexto foi descrito e levado em consideração retratando a realidade da escola e observando a variedade de fontes de informação, permitindo ao leitor fazer suas "generalizações naturalísticas". Possivelmente se estivéssemos trabalhando em uma escola de Ensino Médio regular os alunos teriam mais dificuldades para desenvolver as atividades propostas, haja vista, que a Fundação Liberato trabalha muito com a autonomia e a busca pelo conhecimento de forma individual pelos alunos, assim sendo, vários buscaram alternativas para responder às questões propostas e sanar suas dificuldades.

Analisando a metodologia de ensino Resolução de Problemas pensamos em distribuir as etapas do trabalho conforme as etapas desta metodologia e dividi-las em duas estruturações: uma para a elaboração das maquetes e construções gráficas e a outra para os cálculos.

Na confecção das maquetes e construções gráficas a divisão ocorreu da seguinte forma: a compreensão do problema ocorreu com a escolha dos materiais e formas para a maquete, a elaboração do plano com a construção da maquete pois ela foi o suporte para a representação da estrutura no *software*, a execução do plano se deu com a reflexão sobre as proporções da construção e sua representação no *software* e o retrospecto e verificação com a análise dos resultados e comparação com a construção feita no GeoGebra 3D.

Para a análise dos cálculos a compreensão do problema se deu com a escolha do monumento, a elaboração do plano ocorreu com as estratégias usadas para a aproximação do volume real do monumento por fórmulas geométricas e do cálculo do volume por integral, a execução do plano se deu com o cálculo do volume por meio de fórmulas geométricas e o cálculo do volume por integral efetivamente e o retrospecto e verificação se deu com a análise dos resultados e avaliação dos erros.

Pode-se concluir que uma dupla não entendeu o problema pois não conseguiu pensar em um monumento que atendesse às necessidades solicitadas na atividade e que o aluno que resolveu obter as medidas do monumento "a olho" não

trabalhou com resolução de problemas. Ao se negar medir as dimensões das estruturas não conseguiu evoluir matematicamente. Alguns alunos inventaram funções para integrar, como no caso do Miyajima Torii, e, ao serem perguntados sobre a escolha da função, não souberam argumentar. Eles também não trabalharam com resolução de problemas pois, o que era simples para eles, como a representação no GeoGebra 3D, não era exatamente um problema porque não provocou as diferentes etapas para a resolução de problemas na execução da tarefa.

De acordo com Bassanezi (2002): "Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2002, p.16). Analisando a metodologia de ensino Modelagem Matemática as fases também estão presentes ao longo do trabalho. A fase da percepção e apreensão ocorreu quando foi proposto aos alunos que escolhessem um monumento cujo volume pudesse ser calculado empregando alguma das técnicas de cálculo, a partir de integrais definidas, trabalhadas em aula. A fase da compreensão e explicitação se deu ao questionar aos alunos como obter a aproximação do volume real dos monumentos projetados a partir de fórmulas geométricas, como construir a maquete de forma proporcional e como projetar o monumento no GeoGebra 3D. E a última fase que é da significação e expressão se deu ao calcular o volume por integrais, no GeoGebra 3D e a análise de erros.

Após a análise dessas metodologias de ensino podemos concluir que o GeoGebra 3D é uma boa ferramenta para se trabalhar com construção de sólidos em três dimensões e pode servir como apoio para chegar aos resultados esperados, já que um grupo utilizou o *software* para obter o volume real e, também, com o apoio do GeoGebra 3D que podemos confirmar a coerência nos resultados de um dos grupos.

Algumas duplas erraram na construção da maquete e conseqüentemente na representação dela no GeoGebra 3D, o que demonstra a importância de realizar um plano com coerência para a obtenção de resultados satisfatórios. Dos seis grupos que tiveram problemas na execução ou resultados do trabalho, apenas um deles conseguiu montar a maquete com proporção, porém, não conseguiu calcular o volume por integral e nem conseguiu montar a estrutura de forma a obter o volume

pelo *software*; todos os demais não construíram algo proporcional ou a proporção não pode ser verificada.

Na atividade proposta, os alunos foram orientados a utilizar o GeoGebra 3D como ferramenta de análise de resultados e construção dos sólidos. Para alguns alunos o *software* também foi útil para encontrar a função que regia o contorno do sólido, quer seja utilizando-se da janela da álgebra, quer seja colocando os pontos do esboço e utilizando um interpolador de polinômios online para encontrar a função. Analisando os resultados observamos que os alunos foram bastante criativos e utilizaram o *software* com sabedoria; ou seja, o GeoGebra 3D foi uma boa ferramenta para análise e construção das atividades.

Os materiais escolhidos para a construção das maquetes foram os mais variados: muitos optaram por construir desenhando em folhas de desenho, escolhidas por serem mais rígidas, recortando e montando as estruturas. Os alunos que optaram por esse processo de montagem justificaram sua estratégia por terem conhecimento em desenho técnico, disciplina cursada no primeiro ano do Ensino Médio na qual os alunos precisavam desenhar peças, e recriar, a partir de um esboço planejado estruturas de formas geométricas variadas.

Argila, gesso, cartolinas, isopor, biscuit, papel Smith e materiais reciclados, como papelão, folhas e tampinhas plásticas, também foram outros itens usados para construir as maquetes. Além da dupla que optou por imprimir uma estrutura pronta e apenas dobraram e colaram, ou seja, não agiram de acordo com o solicitado.

Os trabalhos que não observaram a escala na estruturação da maquete não chegaram a nenhum resultado com coerência e validade matemática. Concluiu-se então que a visualização das estruturas quando se vai calcular o volume é de extrema importância.

Observou-se que os alunos que conseguiram construir a maquete em proporção obtiveram mais êxito na representação do monumento no GeoGebra 3D e também, mesmo não conseguindo transpor a estrutura para o *software*, identificaram que havia erro na representação e onde era este erro, mesmo não identificando o porquê.

Uma dupla optou por construir o sólido no GeoGebra 3D primeiramente para depois construir a maquete; isso porque tiveram dificuldades para encontrar o valor do volume ou a estrutura da planta baixa então foi colocando pontos no Gegebra que conseguiram construir os demais itens do trabalho.

Aqueles alunos que foram minuciosos ao construir suas maquetes e ao relacionar e calcular suas estruturas, encontraram o volume do monumento com uma precisão maior, conseguiram colocar o monumento no GeoGebra 3D de forma proporcional e coerente e, portanto, executaram o cálculo do volume por integrais de forma mais eficiente. Os alunos que imprimiram a maquete conseguiram encontrar a aproximação para o volume real a partir de fórmulas geométricas mas não obtiveram êxito nem na estruturação 3D da maquete, nem no cálculo por integrais.

Os alunos aprenderam os conceitos de integrais no segundo trimestre mas apenas no terceiro eles viram a aplicação dos cálculos de integrais para encontrar volumes. Ou seja, eles primeiro aprenderam os conceitos e fórmulas de geometria da forma tradicional, com suas demonstrações e definições, sempre que possível, e, posteriormente, foi trabalhado como calcular volumes a partir de integrais. Acreditamos que esta ordem em que os conceitos foram trabalhados foi primordial para a escolha dos alunos nos cálculos do trabalho, por possuírem maior domínio nos conceitos de geometria tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio. Portanto, podemos observar que a grande maioria dos alunos utilizou os conceitos básicos de geometria espacial sempre que pode, ao invés de utilizar os cálculos por integral o que contribui para que depois de termos um conceito já bem formado fica bastante difícil recorrer a outros recursos, mesmo que facilitem os cálculos.

Os conceitos de integral foram aplicados, na sua grande maioria, por alunos que não conseguiam encontrar o volume das estruturas da forma geométrica "convencional", ou seja, com o uso das fórmulas e conceitos trabalhados convencionalmente no Ensino Médio. Isto é, não possuíam o "recurso tradicional" e portanto os novos conhecimentos foram explorados e validados. Aqueles que puderam calcular o volume do monumento por fórmulas diretas o fizeram sem precisar utilizar o conceito de integral.

Uma dupla, para modelar a função no GeoGebra, procurou por outras funções que projetassem a casca de troncos de cone. Outros alunos utilizaram polinômios interpoladores para gerar funções, já que as conhecidas por eles não atendiam com erros mínimos os problemas. Ou seja, os alunos buscaram alternativas diversas, estudaram e buscaram conhecimentos além do estudado em sala de aula. Como esta escola trabalha com projetos de pesquisa a partir do 3º ano do Ensino Médio valendo 12% da nota anual para todas as disciplinas, os alunos já possuem o hábito de buscar diversas alternativas e conhecimentos para executar o trabalho de

conclusão, e, provavelmente, esse fato contribuiu para que os alunos buscassem outras alternativas para solucionar o problema encontrado.

De uma forma geral os alunos buscaram alternativas além da matemática trabalhada em sala de aula para transpor suas dificuldades.

Alguns dos alunos que tentaram usar o *software* "Mathematics¹⁵" para calcular o volume do monumento por integral não souberam justificar o porquê da escolha das funções nem justificar o erro obtido pelo cálculo. Com isso podemos concluir que os aplicativos e recursos matemáticos existem e ajudam bastante nos cálculos, porém, os conceitos matemáticos precisam estar muito bem estabelecidos para utilizá-los. Senão o uso do recurso fica sem sentido e podemos nem perceber que os resultados encontrados podem não estar corretos, ou seja, que há problema na validação do resultado.

Com a atividade os alunos conseguiram entender algumas estruturas nos monumentos que alegaram jamais perceber em outros momentos. Entenderam que a matemática pode ser aplicada e que estruturação dos volumes de sólidos vai muito além da geometria.

7 CONCLUSÃO

Com este trabalho observamos a evolução no entendimento dos alunos quanto ao cálculo de volumes a partir de integrais definidas; também que o conhecimento de integrais definidas foi aplicado corretamente por alguns alunos apenas. Alguns utilizaram recursos computacionais para efetuar os cálculos alegando não possuir conhecimentos matemáticos para realizar os cálculos de outras formas.

Observamos também que quando os alunos não possuem algum conhecimento específico para solucionar matematicamente um problema ou não tomam o cuidado para executar com coerência algum plano para resolver o problema, por mais que consigam obter algumas soluções separadamente, não conseguem cumprir todas as etapas para chegar a uma análise de dados coerente. Cabe ao professor intermediar para que os alunos busquem solucionar o problema ou até ajudar a construir a resposta parcialmente para não desmotivá-los.

Podemos concluir que as didáticas da Resolução de Problemas e da Modelagem Matemática fazem com que o educando pense, estabeleça estratégias e, a partir delas, solucione o problema, averiguando sua resposta. Para isso os alunos desenvolvem vários mecanismos para a solução do problema que poderão utilizar em outras situações.

Mesmo sem conhecer as quatro etapas elaboradas por Polya (2006) os alunos acabaram, para resolver os problemas, executando cada uma delas contribuindo para sua aprendizagem.

Outro fator observado foi o importante crescimento no senso crítico dos alunos mediante as respostas para cada item. Os alunos estavam interessados em obter os resultados de forma correta e discutiam entre si para chegar a uma conclusão e não simplesmente aceitaram uma resposta pronta.

A maioria dos alunos utilizou o GeoGebra de forma eficiente: conseguiram construir estruturas, transpor da janela 2D para a 3D uma figura, obter o volume de uma estrutura, analisar funções na janela da álgebra e analisar os resultados numéricos a partir dos dados obtidos no *software*. Concluímos que esta é uma ferramenta útil pois complementa a aprendizagem e facilita o entendimento dos alunos.

Houve uma grande satisfação com os resultados obtidos nesta experiência podendo-se perceber que os alunos evoluíram muito e se interessaram pelo trabalho.

Para trabalhos futuros, acrescentar o contexto histórico dos monumentos seria considerável. Outras mudanças, na nossa opinião, não se fazem necessárias pois restringiriam os conteúdos trabalhados ou a liberdade de escolha promovida aos alunos.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1.

ARAÚJO, Ana Itamara Paz de. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. Ji - Paraná - RO, 2010. Disponível em: http://www.dmejpb.unir.br/menus_arquivos/1787_2010_ana_itamira.pdf. Acesso em janeiro de 2017.

ARAÚJO, Divânia Fernandes de. **O processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática em Situações Problemas como Formador da Cidadania Plena**. Universidade TUIUTI do Paraná, Curitiba, 2008. Disponível em: <http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2011/10/O-PROCESSO-DE-ENSINO-APRENDIZAGEM-DA-MATEMATICA-EM-SITUACOES-PROBLEMAS-COMO-FORMADOR-DA-CIDADANIA-PLENA.pdf>. Acesso em dezembro de 2016.

ARAÚJO, R.; MOREIRA, L. F. N. Monitoria da disciplina de Cálculo. In: **CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA**, 33, 2005, Campina Grande. Anais... Campina Grande: UFPB. CD-ROM.

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

BARBONI, AYRTON. **Cálculo e análise - Cálculo diferencial e integral a uma variável**. Reimpressão Walter Paulette. Rio de Janeiro: LTC, 2015. (Fundamentos de Matemática; 16).

BARROS, R. M.; MELONI, L. G. P. O processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recursos multimídia. **Anais do XXXIV COBENGE**. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006. Disponível em: http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2006/artigos/1_263_374.pdf. Acesso em janeiro de 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.197-219, novembro 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/38224/29125>. Acesso: março de 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/ SEF, 1998.

CENTENARO, G. F. C.; STEFFENON, R. R. Perímetro e Área: uma engenharia usando composição e decomposição de figuras. In: GARCIA, V. C. V.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. A.; GRAVINA, M. A. **Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática**. UFRGS, Porto Alegre, 2011.

CARVALHO, L. C. **Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos**. PUC-SP, 2008. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/11334>>. Acesso em março de 2017.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. São Paulo, Editora Ática, 2010. 192p.

GONÇALVES, Simone Neiva Loures. **Museus projetados por Oscar Niemeyer de 1951 a 2006: o programa como coadjuvante**. 2010. Tese (Doutorado em Projeto de Arquitetura) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. doi:10.11606/T.16.2010.tde-30062010-093643. Acesso em abril de 2017.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da GEOMETRIA em nossas mãos...** In: A Educação Matemática em Revista - SBEM. Ano I, n. 2 - 1º Semestre 1994 (p. 19 - 25).

LARSON, Ron; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 710 p.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista - SBEM. Ano 03, n.4 - 1º Semestre 1995 (p. 3-13).

LUDKE, Menga & ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACHADO, E. S. **Modelagem matemática e resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado, PUC - RS, 2006. DISPONÍVEL EM: <<http://hdl.handle.net/10923/2950>>. Acesso em março de 2017.

NUMER, Francine M. **Problemas de máximos e mínimos com o auxílio do software GeoGebra e conhecimento de derivadas**. Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização “Matemática, Mídias Digitais e Didática : tripé para formação do professor de matemática”, Programa de Pós-Graduação em Ensino de

Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: < <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134098>>. Acesso em: março de 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. In **Revista Zeteticé**. Ano I, n. 1, 1993 (p. 3-17).

PICKOVER, C. A. **O livro da matemática – De Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática**. Librero, b. v., Holanda, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2ª edição. Tradução Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 2006. 203p.

SILVA, G. P. **Pensando no infinito para entender cálculo: uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio**. Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/93273/000914069.pdf?sequence=1>. Acesso em 08 de novembro de 2016.

THOMAS, George B. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2010. v.1.

VENTAVOLI, F.; BORGES, R; BORGES, S. **Matemática dinâmica: software GeoGebra**. Ano desconhecido. E-book disponível em: <http://www.cursoscomcertificados.com.br/produto/matematica-dinamica-com-software-GeoGebra-kdp-amazon/>

ANEXO A - PLANO DE TRABALHO DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO CURSO TÉCNICO DE ELETRÔNICA DA FUNDAÇÃO LIBERATO NO ANO DE 2017

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA
DIRETORIA DE ENSINO - CENTRO PEDAGÓGICO

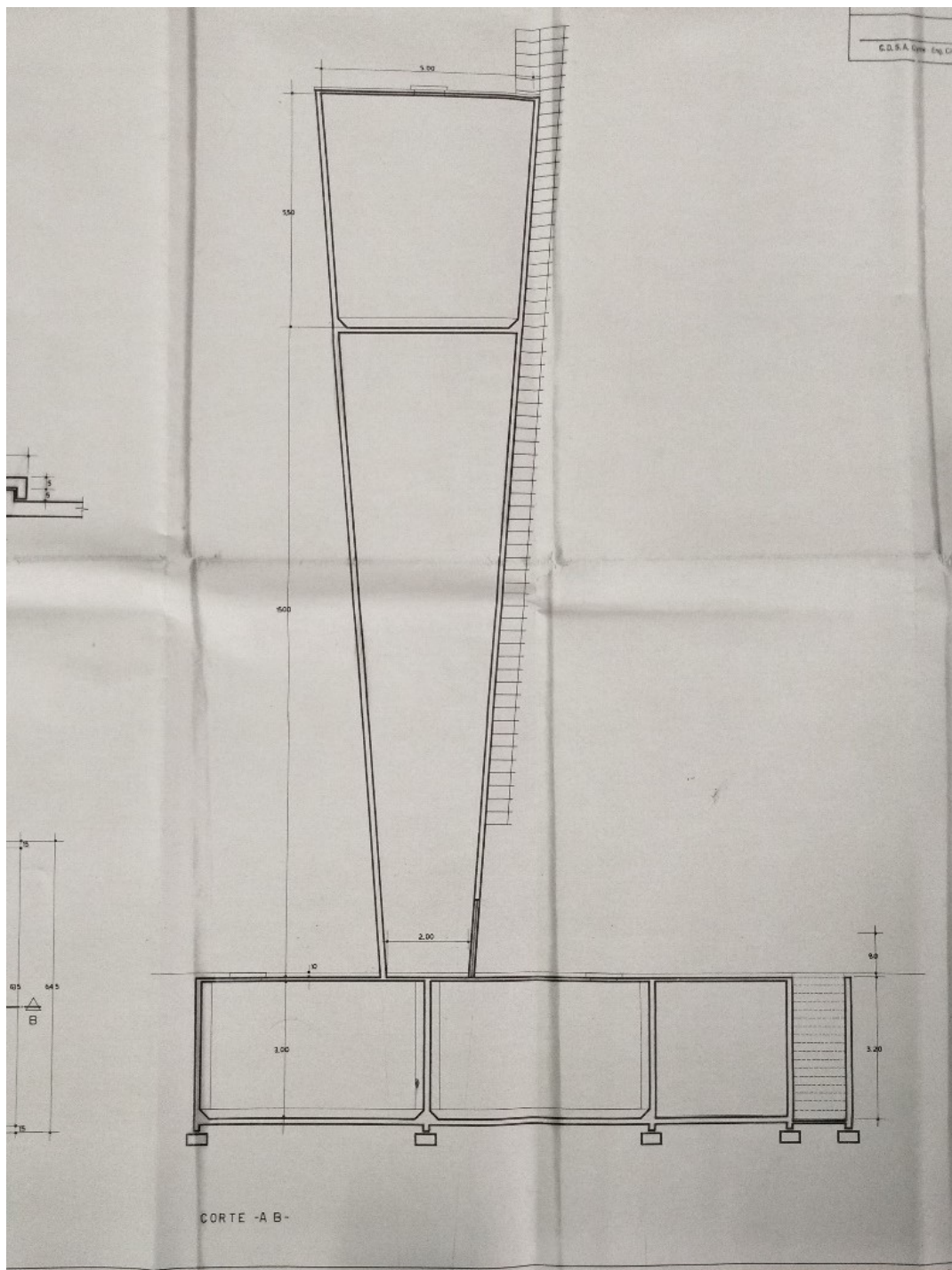
PLANO DE TRABALHO - DIURNO

Ano: 2016	Curso: Eletrônica	Disciplina: Matemática	Série: 3ª
Professor: FRANCINE MIRELE NUMER		Carga Horária Semanal: 03	Carga Horária Anual: 120

TRIMESTRES	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS	CONTEÚDOS	ATIVIDADES PROGRAMADAS	CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO
1º	Operações com polinômios. Dispositivo prático de Briot-Ruffini Composição de uma equação dadas as raízes Determinação das raízes de uma equação Montagem do esboço de gráfico de uma função de 3º grau ou maior, destacando as raízes reais, pontos de máximo e de mínimo e termo independente Resolução de problemas Análise de gráfico de função Determinação de valor específico de limite Cálculo de limites a partir de gráficos e expressões	Polinômios; Equações polinomiais; Raízes : Composição, Multiplicidade de uma raiz, Raízes nulas, Raízes complexas, Raízes racionais, Relações de Girard, Problemas e Teorema de Bolzano Limites	Exercícios passados no quadro branco e do livro texto Exercícios com gráficos de funções Exercícios com funções	Duas provas parciais e uma prova trimestral.
2º	Determinação de função derivada de funções Determinação do valor de derivada Regra de L'Hospital Regra da Cadeia Determinação de equação de reta tangente e normal Determinação de velocidade e aceleração de funções a partir da equação do espaço Determinação de pontos de máximo, mínimo e de funções Determinação de pontos de inflexão Montagem de esboço de gráfico de funções, salientando pontos de máximo e de mínimo, valor do termo independente e suas respectivas concavidades Resolução de problemas TFC Determinação da função primitiva (integral indefinida) Integrações por partes Integração por substituição Determinação da integral definida Determinação de áreas e volumes	Derivadas, interpretação geométrica. Integrais	Exercícios passados no quadro branco e do livro texto Exercícios com funções Problemas de Física	Duas provas parciais e uma prova trimestral.
3º	Determinação de medidas, áreas e volume de prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, tronco de pirâmide e de cone. Análise Combinatória e Probabilidade.	Geometria Espacial Combinação, arranjos e probabilidade.	Exercícios passados no quadro branco e do livro texto	Duas provas parciais e uma prova trimestral.

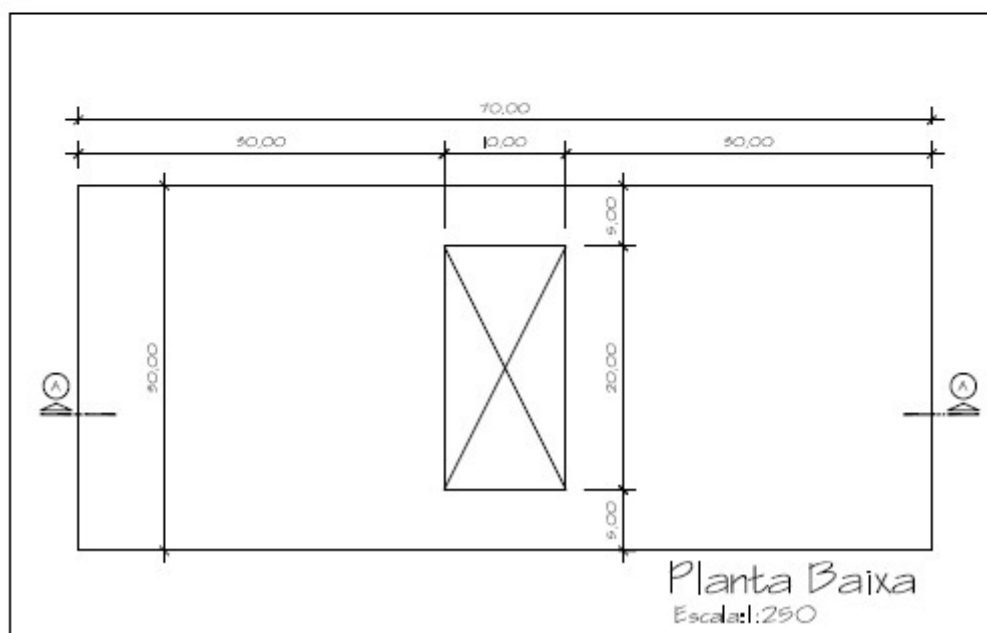
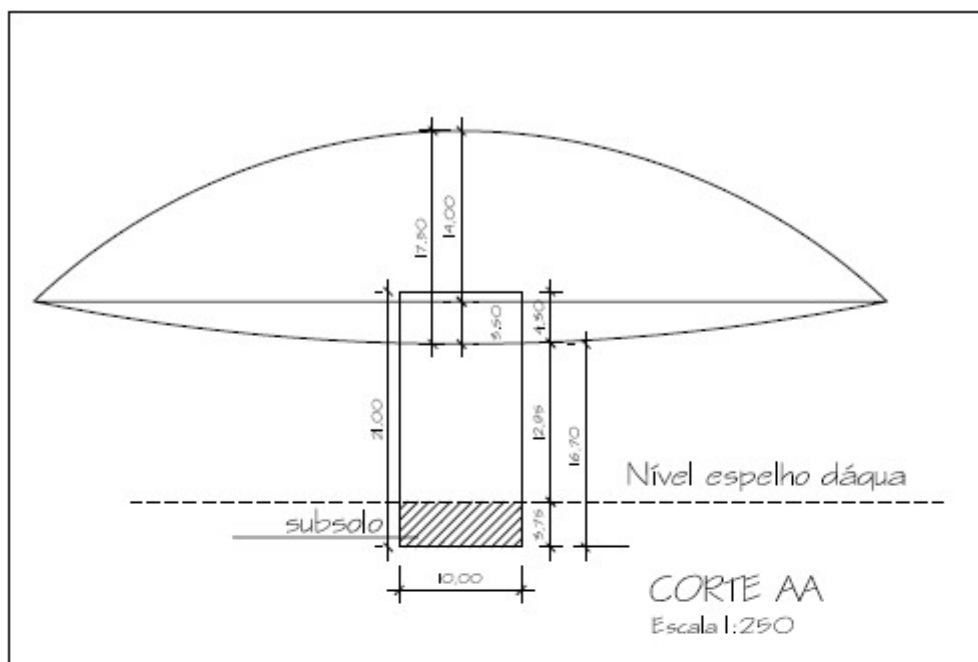
Bibliografia: material disponibilizado e elaborado pela professora.

Fonte: a autora.

ANEXO B - PLANTA BAIXA DA CAIXA DA ÁGUA DA FUNDAÇÃO LIBERATO

Fonte: acervo da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha.

ANEXO C - PLANTA BAIXA DO "OLHO" DO MUSEU OSCAR NIEMEYER



Fonte: Acervo dos alunos, adaptado de Gonçalves, 2010.

ANEXO D - DIMENSÕES DO "OLHO" DO MUSEU OSCAR NIEMEYER

222

A Cesbe, mesma empresa que executou o projeto do Edifício Castelo Branco, foi responsável pela execução do "Olho". O prazo estipulado pelos cronogramas era de 150 dias,⁹¹ o que forçou a aplicação do sistema construtivo pouco convencional (fig.210). O volume do "Olho" é suspenso por duas paredes portantes de 9,10 por 1,20 metros, de concreto protendido, que descarregam em dois blocos de fundação de 160 m³. As paredes portantes são lateralmente vedadas por outras duas paredes convencionais, ligeiramente abauladas e compondo uma torre de base retangular. Sobre a torre apoiam-se duas grandes vigas longitudinais de 70 metros (fig.211), afastadas das paredes portantes da torre em 5 metros e das paredes convencionais em 30 metros (fig.212). A cobertura do edifício é feita por uma grande curva parabólica, composta por vigas curvas longitudinais de concreto armado. Essas vigas vencem todo o vão e apoiam-se nas extremidades da viga inferior, completando o volume chamado "Olho" por compressão. Devido ao rígido cronograma, cogitou-se a utilização de uma cobertura metálica para o fechamento do volume, possibilidade descartada por Niemeyer (PAIVA, 2003, p.51).

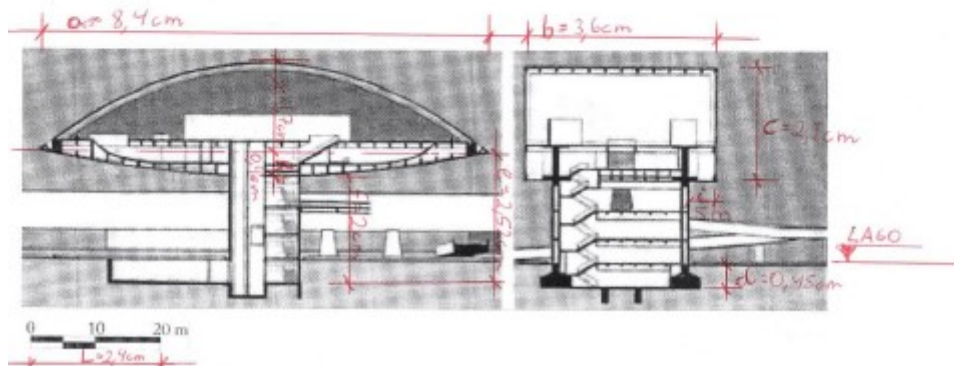


Figura 210. Museu Oscar Niemeyer (2002) – corte longitudinal e transversal do Edifício "Olho".

Fonte: (GONÇALVES, 2010, p.222).