

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dionatan Ricardo Schmidt

**EXISTÊNCIA E CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS  
DIFERENCIAIS PLANARES**

Santa Maria, RS  
2018

Dionatan Ricardo Schmidt

**EXISTÊNCIA E CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS DIFERENCIAIS  
PLANARES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

ORIENTADOR: Prof. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS  
2018

Schmidt, Dionatan Ricardo  
EXISTÊNCIA E CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES EM  
SISTEMAS DIFERENCIAIS PLANARES / Dionatan Ricardo  
Schmidt.- 2018.  
79 p.; 30 cm

Orientador: Maurício Fronza da Silva  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2018

1. Existência de ciclos limites. 2. Configuração de  
ciclos limites em campos vetoriais polinomiais planares.  
3. Teoria Qualitativa. I. Fronza da Silva, Maurício II.  
Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

---

©2018

Todos os direitos autorais reservados a Dionatan Ricardo Schmidt. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

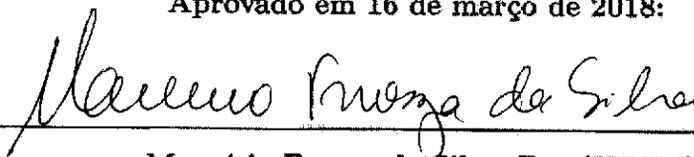
End. Eletr.: [dionatansp@yahoo.com.br](mailto:dionatansp@yahoo.com.br)

Dionatan Ricardo Schmidt

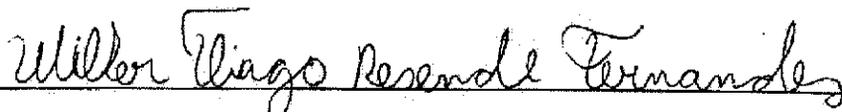
**EXISTÊNCIA E CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES EM  
SISTEMAS DIFERENCIAIS PLANARES**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

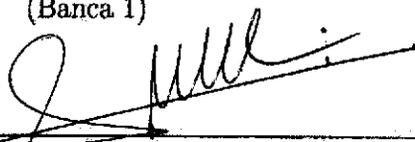
Aprovado em 16 de março de 2018:



Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)  
(Presidente/Orientador)



Wilker Thiago Resende Fernandes, Dr. (UFSJ)  
(Banca 1)



Alex Carlucci Rezende, Dr. (UFSM)  
(Banca 2)

Santa Maria, RS

2018

## DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, pelo apoio incondicional.*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço primeiramente aos meus pais, que sempre me incentivaram e estiveram comigo nessa caminhada, me apoiando e fazendo com que os momentos juntos fossem de grande alegria, tornando muitas vezes menos árdua toda essa trajetória.*

*Agradeço em especial aos meus grandes amigos, irmãos que escolhemos para a vida, em especial a Sabrine, Tele (Douglas), Pati, Everton, Guilherme e Cesar, tenho a mais absoluta certeza de que fazer parte de histórias com vocês é uma das mais importantes e prazerosas tarefas que tenho em minha vida.*

*Agradeço aos meus colegas de mestrado, Felipe, Nicolas e Lucas, pela parceria encontrada nesses dois anos de loucura, as intermináveis listas de exercícios feitas com muito animo, e por ouvirem sempre minhas histórias dos finais de semana.*

*Agradeço a minha família, avós, tios, primos e todos aqueles que em algum momento estiveram ao meu lado me apoiando e acrescentando em minha jornada.*

*Agradeço, em especial, ao professor Maurício Fronza, não apenas pela imensurável contribuição matemática em minha carreira, mas pela amizade que formamos, que para mim foi muito além de orientando e orientador, pelas sábias palavras e pelo incentivo em seguir em frente.*

*Agradeço ao MG Pantera Negra, por me ajudar a tomar um vento na cara quando preciso, e pelo companheirismo de estrada e caminhada.*

*Agradeço, por último, à CAPES pelo amparo financeiro.*

*“Você vive hoje uma vida que gostaria de viver por toda a eternidade?”*

*(Friedrich Nietzsche)*

## RESUMO

### EXISTÊNCIA E CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS DIFERENCIAIS PLANARES

AUTOR: Dionatan Ricardo Schmidt  
ORIENTADOR: Maurício Fronza da Silva

Neste trabalho, apresentamos resultados sobre existência de ciclos limites em sistemas diferenciais planares, configuração de tais ciclos e a dinâmica de sistemas não-lineares nas vizinhanças de órbitas periódicas.

**Palavras-chave:** Existência de ciclos limites. Configuração de ciclos limites em campos vetoriais polinomiais planares. Teoria Qualitativa.

## ABSTRACT

### EXISTENCE AND CONFIGURATION OF LIMIT CYCLES IN PLANAR SYSTEMS

AUTHOR: Dionatan Ricardo Schmidt

ADVISOR: Maurício Fronza da Silva

In this dissertation, we present results on the existence of limit cycles in planar differential systems, configuration of such cycles and the dynamics of nonlinear systems near periodic orbits.

**Keywords:** Existence of limit cycles. Configuration of limit cycles in planar polynomial vector fields. Qualitative theory.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Orientação das curvas do Exemplo 2.2.6. ....	14
Figura 2.2 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 2.7.2. ....	21
Figura 2.3 – Retrato de fase do sistema (2.4). ....	24
Figura 3.1 – Seção transversal $\Sigma$ e transformação de Poincaré. ....	33
Figura 3.2 – Classificação de ciclos limites. ....	34
Figura 3.3 – Órbita do tipo centro-externa e ciclo externo indefinido. ....	35
Figura 3.4 – Campo simétrico com relação ao eixo $y$ que não tem órbitas periódicas. ....	39
Figura 5.1 – Configurações $\alpha$ e $\beta$ . ....	61
Figura 5.2 – Ciclo limite $C_j$ e órbita periódica $\gamma$ . ....	69
Figura 5.3 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 5.4.1. ....	70
Figura A.1 – Configurações topologicamente equivalentes. ....	76
Figura A.2 – Configurações topologicamente equivalentes. ....	76

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ASPECTOS GERAIS</b> .....	<b>11</b>
2.1	ORDEM DE CRESCIMENTO DE FUNÇÕES .....	11
2.2	TEOREMAS DE JORDAN E GREEN .....	12
<b>2.2.1</b>	<b>Os teoremas da Curva de Jordan e Schonflies</b> .....	<b>12</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Teorema de Green</b> .....	<b>13</b>
2.3	CAMPO DE VETORES E FLUXO .....	14
2.4	EQUIVALÊNCIA E CONJUGAÇÃO DE CAMPOS DE VETORES .....	16
2.5	FLUXO TUBULAR .....	17
2.6	ESTABILIDADE DE LIAPUNOV .....	19
2.7	TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON .....	20
2.8	EXISTÊNCIA DE ÓRBITA PERIÓDICA PARA A EQUAÇÃO DE LIÉNARD .	22
2.9	INTEGRAIS PRIMEIRAS E SISTEMAS HAMILTONIANOS .....	27
<b>3</b>	<b>CRITÉRIOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS PLANARES</b> .....	<b>30</b>
3.1	RESULTADOS BÁSICOS .....	30
3.2	A TRANSFORMAÇÃO DE POINCARÉ .....	32
3.3	EXISTÊNCIA E NÃO-EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITES EM CAMPOS PLANARES .....	37
<b>4</b>	<b>O TEOREMA DO ‘AVERAGING’ CLÁSSICO</b> .....	<b>44</b>
4.1	O MÉTODO DO ‘AVERAGING’ PARA CAMPOS DE VETORES SUAVES ..	44
4.2	RESULTADOS ÚTEIS .....	46
4.3	DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DO ‘AVERAGING’ .....	51
4.4	EQUAÇÃO DE VAN DER POL .....	57
<b>5</b>	<b>REALIZAÇÃO DE UMA CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES</b> .....	<b>59</b>
5.1	O XVI PROBLEMA DE HILBERT .....	59
5.2	O TEOREMA PRINCIPAL .....	59
5.3	PRELIMINARES .....	60
5.4	DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.2.2 .....	62
	<b>APÊNDICE A – ESCLARECIMENTOS</b> .....	<b>73</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) busca entender o comportamento de soluções de EDO's sem explicitá-las. Um episódio muito importante no estudo dessa teoria se deu em 1900, em Paris, no *Congresso Internacional de Matemática*, quando o alemão David Hilbert enumerou, pela primeira vez, sua famosa lista de 23 problemas matemáticos, nos quais os mais proeminentes pesquisadores da época deveriam se ocupar para impulsionar o desenvolvimento da matemática como ciência. Até o momento, o XVI problema ainda permanece em aberto.

A segunda parte do XVI Problema de Hilbert tem o seguinte enunciado: Qual o número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial planar polinomial, e o que podemos dizer sobre as posições relativas dos seus ciclos limites?

Embora esta teoria tenha avançado muito ao longo das últimas décadas, ainda existem questões de difícil compreensão sobre o assunto. Por exemplo, J. ÉCALLE [05] e Y. IL'YASHENKO [16] mostraram no início da década de 1990, que o número de ciclos limites de um sistema polinomial planar é sempre finito. Resta ainda determinar uma cota superior para o número de ciclos limites de um campo polinomial planar que dependa somente do grau do polinômio que define o campo.

O conceito de ciclo limite para campos vetoriais planares, introduzido por Poincaré, modela oscilações não lineares em processos físicos. No final da década de 1920, Van der Pol, Liénard e Andronov, estudando oscilações não lineares de fenômenos elétricos, analisaram certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem verificando a ocorrência de ciclos limites. Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a existência e unicidade, entre outras propriedades, destes ciclos limites.

O principal objetivo desta dissertação é demonstrar uma espécie de recíproca do XVI problema de Hilbert, provada por J. LLIBRE e G. RODRÍGUEZ [07] em 2004. Isto é, dado um conjunto finito qualquer de curvas de Jordan no plano, duas a duas disjuntas, é possível explicitar um sistema de EDO's polinomial que tem exatamente tais curvas como ciclos limites. Mais do que isso, o resultado estabelece uma relação entre o número de curvas de Jordan dadas e o grau do polinômio que define o sistema de EDO's.

O método 'Averaging' também é abordado no presente texto. O 'Averaging' é uma ferramenta clássica que nos permite estudar a dinâmica dos sistemas diferenciais não-lineares sob forçamento periódico. Ele tem uma longa história começando com as obras clássicas de Lagrange e Laplace, que forneceu uma justificativa intuitiva do método. A primeira formalização desta teoria foi feita em 1928 por P. Fatou. As contribuições para a teoria do 'Averaging' foram feitas na década de 1930 por Bogoliubov-Krylov.

O método do 'Averaging' é uma ferramenta para o estudo de sistemas não lineares com coeficientes periódicos que consiste essencialmente em determinar a existência e es-

tabilidade de ciclos limites em um sistema de EDO's, a partir do estudo das singularidades de outro sistema, chamado de sistema promediado. Mais precisamente, a existência e estabilidade de cada singularidade do sistema promediado determina, sob certas hipóteses, a existência e estabilidade de órbitas periódicas do sistema original. Em particular, o método permite estudar a quantidade de ciclos limites de um sistema diferencial.

## 2 ASPECTOS GERAIS

Neste capítulo estabelecemos a notação e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do texto.

Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $\Delta$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Um ponto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  será denotado por  $(t, x)$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\|x\|$  denota uma norma de  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $k, m, n = 1, 2, \dots$ , o espaço vetorial das aplicações  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  que têm todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k$  contínuas será denotado por  $C^k(\Delta, \mathbb{R}^m)$ , e definiremos  $C^\infty(\Delta, \mathbb{R}^m)$  como o espaço vetorial de todas as aplicações  $X$  tais que  $X \in C^k(\Delta, \mathbb{R}^m)$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots\}$ . Denotaremos por  $C^\omega(\Delta, \mathbb{R}^m)$  o espaço vetorial de todas as aplicações analíticas  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Os elementos de  $C^k(\Delta, \mathbb{R}^m)$  são chamados de **aplicações de classe  $C^k$** .

Será denotada por  $Df(x)$  a matriz jacobiana de  $f$  avaliada no ponto  $x \in \Delta$ .

### 2.1 ORDEM DE CRESCIMENTO DE FUNÇÕES

Utilizaremos as notações de  $O$  e  $o$ , como segue abaixo, para estimar certos termos em uma determinada equação.

**Definição 2.1.1** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto contendo o ponto 0 e  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $g(x) \neq 0, \forall x \in \Delta$ . Escrevemos*

$$f(x) = O(g(x))$$

*se existirem constantes  $C$  e  $\delta > 0$  tais que*

$$0 < \|x\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \leq C,$$

*e*

$$f(x) = o(g(x))$$

*quando*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} = 0.$$

**Observação 2.1.2** *Vejamos algumas propriedades que decorrem diretamente da Definição 2.1.1:*

1. *Se  $f_1(x) = O(g(x))$  e  $f_2(x) = O(g(x))$ , então  $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$ ;*
2. *Se  $f_1(x) = O(g_1(x))$  e  $f_2(x) = O(g_2(x))$ , então  $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$ ;*

3. Se  $f(x) = O(\|x\|^m)$  e  $0 \leq n \leq m$ , então  $f(x)/\|x\|^n = O(\|x\|^{m-n})$ ;
4. Se  $f(x) = O(\|x\|^m)$ , então  $\|x\|^n f(x) = O(\|x\|^{m+n})$ ;
5. Se  $f(x) = O(\|x\|^m)$ , então  $f(x) = O(\|x\|^n)$ , para  $n \leq m$ ;

Analogamente, valem propriedades semelhantes para  $o$ . Ainda, vale que se  $f(x) = o(\|x\|^n)$ , então  $f(x) = O(\|x\|^n)$ .

## 2.2 TEOREMAS DE JORDAN E GREEN

O Teorema da Curva de Jordan desempenha papel importante ao longo deste texto e sua demonstração pode ser encontrada em J. MUNKRES [08].

Uma consequência útil é o Teorema de Schonflies, que afirma que a região limitada determinada por uma curva de Jordan é homeomorfa ao disco unitário no plano. A versão aqui apresentada pode ser encontrada em P. V. ARAÚJO [13].

Um instrumento fundamental de que necessitaremos é o Teorema de Green, também conhecido como Teorema de Stokes no plano. A versão apresentada aqui do Teorema de Green pode ser encontrada em M. G. SOARES [11].

### 2.2.1 Os teoremas da Curva de Jordan e Schonflies

O Teorema da Curva de Jordan possui muitas versões; utilizaremos aqui a mais conveniente para os resultados que seguem.

**Teorema 2.2.1** *(Teorema da Curva de Jordan)* Seja  $\gamma$  uma curva fechada simples em  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $\mathbb{R}^2 - \gamma$  tem exatamente duas componentes conexas, cuja fronteira comum é  $\gamma$ .

Como  $\mathbb{R}^2$  não é um conjunto limitado, uma das componentes de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$  é limitada e a outra não. Chamaremos de  $Int\gamma$  (interior de  $\gamma$ ) a componente limitada de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ , e de  $Ext\gamma$  (exterior de  $\gamma$ ) a componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ .

Uma curva satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.2.1 é usualmente chamada de *curva de Jordan*.

**Teorema 2.2.2** *(Teorema de Schonflies)* A região limitada por uma curva fechada simples é homeomorfa a um disco aberto.

A demonstração pode ser consultada em P. V. ARAÚJO [13]. No Apêndice desse texto apresentamos uma versão do Teorema de Schonflies para grafos, pois é mais conveniente para os objetivos desse trabalho.

### 2.2.2 Teorema de Green

Para enunciarmos o Teorema de Green necessitamos do conceito de compatibilidade de orientação entre um subconjunto do plano e sua fronteira.

**Definição 2.2.3** Um subconjunto não vazio  $U \subset \mathbb{R}^2$  chamado um domínio se  $U$  é aberto e se, dados dois pontos quaisquer  $p$  e  $q$  em  $U$ , existe um caminho de classe  $C^1$ , inteiramente contido em  $U$ , cujos pontos inicial e terminal são, respectivamente,  $p$  e  $q$ .

**Definição 2.2.4** Suponha que  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio de um caminho de classe  $C^1$ , e seja  $V \subset U$  um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira  $\partial V$  consiste de um número finito de curvas de Jordan de classe  $C^1$  e tal que  $V \setminus \partial V$  é um domínio. Para cada uma dessas curvas, adotamos o sentido de percurso para o qual o interior de  $V$  está sempre à esquerda quando a percorrermos. Nessas condições, dizemos que  $V$  e  $\partial V$  têm orientação compatível.

**Definição 2.2.5** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  é um caminho de classe  $C^1$  em  $U$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, sendo  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  para  $t \in [a, b]$ , definimos a integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$  (ou integral de linha de  $f$  ao longo de  $\gamma$ ) por:

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} u dx + v dy := \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Se  $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$  é a justaposição dos caminhos de classe  $C^1$  em  $U$ , a integral de  $f$  ao longo desse caminho é definida por:

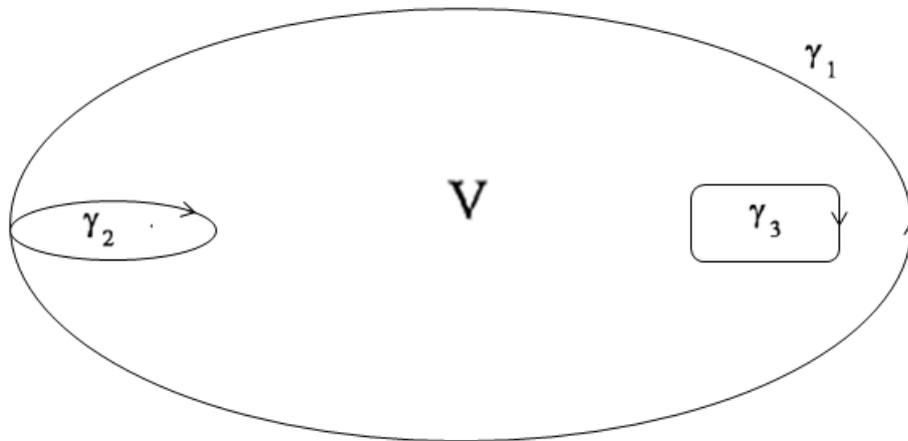
$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n} f := \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

**Exemplo 2.2.6** Para o conjunto  $V$  da Figura 1.1,  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $\partial V = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ . Para que a orientação seja compatível,  $\gamma_1$  deve ser percorrido no sentido anti-horário e  $\gamma_2, \gamma_3$  ambos no sentido horário.

**Teorema 2.2.7** (Teorema de Green) Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto conexo e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação suave. Seja  $V \subset U$  um subconjunto satisfazendo: (i)  $V$  é fechado e limitado, (ii) a fronteira  $\partial V$  de  $V$  consiste de um número finito de curvas de Jordan de classe  $C^1$ ,  $\partial V = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ , e (iii)  $V \setminus \partial V$  é um domínio. Suponha que  $V$  e  $\partial V$  têm orientação compatível. Então, escrevendo  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , temos que

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} u dx + v dy = \iint_V \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

Figura 2.1 – Orientação das curvas do Exemplo 2.2.6.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.3 CAMPO DE VETORES E FLUXO

Detalhes dos resultados apresentados nesta e nas demais seções deste capítulo podem ser encontrados em J. SOTOMAYOR [09].

**Definição 2.3.1** *Um campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ , é uma aplicação  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , onde  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  é aberto.*

Ao campo de vetores  $X$  está associada a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x) \quad (2.1)$$

e vice-versa. Aqui o ponto denota a derivada com respeito ao tempo  $t$ . A partir de agora, nesta seção,  $X$  sempre denota um campo de vetores definido em um aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $x_0 \in \Delta$  é um ponto tal que  $X(x_0) = 0$ , então  $x_0$  é dito *ponto singular*, caso contrário é chamado *ponto regular*.

As aplicações  $\varphi \in C^1(I, \Delta)$ , onde  $I$  é um intervalo da reta, tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo  $t \in I$ , são *soluções*, *trajetórias* ou *curvas integrais* de  $X$ . A imagem de uma trajetória é denominada *órbita*. Denotaremos por  $\gamma_p$  a órbita passando pelo ponto  $p \in \Delta$ .

Chama-se *solução máxima* de (2.1) a toda solução  $\varphi$  definida num intervalo  $I$ , denominado *intervalo máximo* de  $\varphi$ , tal que se  $\psi$  é outra solução no intervalo  $J$  com  $\psi : J \rightarrow \Omega$  tal que  $I \subseteq J$  e  $\varphi = \psi|I$ , então  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\varphi = \psi$ .

Apresentamos a seguir o teorema de existência e diferenciabilidade de soluções máximas com relação às condições iniciais.

**Teorema 2.3.2** *Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$  ou  $k = \omega$ , definido num aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

- i) **(Existência e Unicidade de soluções máximas)** *Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$  onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x : I_x \rightarrow \Delta$ , que satisfaz  $dy/dt = X(y)$ ,  $y(0) = x$ .*
- ii) **(Propriedade de grupo)** *Se  $y = \varphi(t, x)$  e  $t \in I_x$ , então  $I_y = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$  e  $\varphi(s, y) = \varphi(t + s, x)$  para todo  $s \in I_y$ .*
- iii) **(Diferenciabilidade em relação às condições iniciais)** *O conjunto  $D = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(t, x)$  é de classe  $C^k$ . Mais ainda,  $\varphi$  satisfaz a equação*

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \circ D_2 \varphi(t, x),$$

para todo  $(t, x) \in D$ .

Aqui o símbolo  $D_2 \varphi(t, x)$  representa a matriz  $n \times n$  cujas colunas coincidem com as  $n$  últimas colunas de  $D\varphi(t, x)$ . Já o símbolo  $D_1 D_2 \varphi(t, x)$  denota a derivação das entradas de  $D_2 \varphi(t, x)$  com relação à variável  $t$ . A aplicação  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  dada no Teorema 2.3.2 é chamada de *fluxo* de  $X$ .

Se  $q \in \gamma_p$ , então existe  $t_1 \in I_p$  tal que  $q = \varphi(t_1, p)$ , logo  $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$  e  $I_p - t_1 = I_q$ . Pelo Teorema 2.3.2 segue que  $\gamma_p = \gamma_q$ . Em outras palavras, dadas duas órbitas de  $X$ , então elas coincidem ou são disjuntas.

**Observação 2.3.3** *Como  $\varphi(t, \varphi(-t, x)) = x$ , segue que para cada  $t \in I_x$  fixo, a aplicação  $x \mapsto \varphi(t, x)$  é um difeomorfismo.*

Seja  $\varphi$  uma curva integral de  $X$ . Dizemos que ela é *periódica* se existe um número real  $T > 0$  tal que  $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é não constante. Nesse caso, dizemos que a órbita associada é uma *órbita periódica*. Observamos que uma singularidade não corresponde à uma órbita periódica.

O próximo resultado assegura-nos que, dada uma solução  $\varphi$  de um campo de vetores  $X$ , ela é ou um ponto, ou uma linha homeomorfa à  $\mathbb{R}$  ou uma órbita periódica.

**Teorema 2.3.4** *Se  $\varphi$  é uma curva integral máxima de (2.1) em  $I$ , verifica-se uma única das seguintes alternativas:*

- i)  $\varphi$  é uma bijeção;

ii)  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante;

iii)  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica, isto é, existe  $T > 0$  tal que  $\varphi(t + T) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

O próximo resultado estabelece que órbitas com intervalo máximo limitado ‘escapam’ de compactos. Logo, toda órbita limitada está associada a uma solução cujo intervalo maximal é igual a  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.3.5** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  um aberto contendo um ponto  $x_0$ ,  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $(\alpha, \beta)$  o intervalo máximo da solução  $x$  para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

*Assuma que  $\beta < \infty$ . Então dado um compacto  $K \subset \Delta$ , existe  $t \in (\alpha, \beta)$  tal que  $x(t)$  não pertence a  $K$ .*

**Teorema 2.3.6** *Se  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo de classe  $C^1$ , definido em um aberto simplesmente conexo  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe  $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $\nabla H = X$ ;*
2.  *$\int_{\gamma} X = 0$  para todo caminho fechado simples em  $U$ ;*
3.  *$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X$  não depende do caminho que liga os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ .*

## 2.4 EQUIVALÊNCIA E CONJUGAÇÃO DE CAMPOS DE VETORES

A fim de comparar retratos de fases de dois campos vetoriais, faremos algumas considerações.

**Definição 2.4.1** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos definidos nos abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  que leva a órbita de  $X_1$  em órbitas de  $X_2$ , preservando a orientação. O homeomorfismo  $h$  é dito uma equivalência topológica entre  $X_1$  e  $X_2$ . Se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^r$ , com  $r = 1, 2, \dots, \infty$  ou  $r = \omega$ , dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -equivalentes.*

Mais precisamente, se  $p \in U_1$  e  $\gamma_p$  é a órbita orientada de  $X_1$  que passa por  $p$ , temos  $h(\gamma_p) = \alpha_{h(p)}$ , onde  $\alpha_{h(p)}$  é a órbita orientada de  $X_2$  que passa por  $h(p)$ .

**Definição 2.4.2** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos definidos nos abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Sejam ainda  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos associados aos campos de vetores  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  tal que  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ , para todo  $(t, x) \in D_1$ . O homeomorfismo  $h$  é dito uma conjugação topológica entre  $X_1$  e  $X_2$ . Se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^r$ , dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -conjugados e, neste caso,  $h$  é dito uma  $C^r$ -conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$ .*

Cada uma das duas definições anteriores estabelece uma relação de equivalência no conjunto dos campos de vetores definidos em  $U_1$  e  $U_2$ . Além disso, no caso da Definição 2.4.2 temos necessariamente que trajetórias correspondentes têm o mesmo intervalo máximo. Uma equivalência  $h$  leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Além disso, se  $h$  for uma conjugação, o período das órbitas periódicas é preservado. Observe ainda que toda conjugação é uma equivalência, mas o contrário não é válido.

**Exemplo 2.4.3** *Sejam  $X_1 = (y, -x)$  e  $X_2 = (2y, -2x)$ . Temos  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -equivalentes, pois basta tomar  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função identidade dada por  $h(x) = x$ . Mas  $X_1$  e  $X_2$  não são conjugados, pois o período das órbitas difeomorfas não são iguais.*

A seguir apresentamos uma caracterização de conjugação diferenciável.

**Proposição 2.4.4** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos vetoriais de classe  $C^r$  definidos nos abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, e  $h : U_1 \rightarrow U_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \infty$  ou  $\omega$ . Então  $h$  é uma conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$  se, e somente se,*

$$Dh(X_1(x)) = X_2(h(x)),$$

para todo  $x \in U_1$ .

## 2.5 FLUXO TUBULAR

Nosso próximo objetivo é mostrar que todo ponto regular de um campo de vetores possui uma vizinhança na qual o campo é diferenciavelmente conjugado ao campo constante. Este resultado é bem conhecido e trata-se do Teorema do Fluxo Tubular.

**Definição 2.5.1** *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^k$  e  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  um aberto. Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow \Delta$  de classe  $C^k$  chama-se seção transversal local de  $X$  (de classe  $C^k$ ) quando, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)$  e  $X(f(a))$  geram o espaço*

$\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$ . Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  é um homeomorfismo então dizemos que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $X$ . Quando  $0 \in A$  e escrevemos  $p = f(0)$  dizemos ainda que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $X$  em  $p$ .

**Observação 2.5.2** Sejam  $p \in \Delta$  um ponto regular de  $X$  e  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i.$$

Como  $\Delta$  é aberto existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $B_{\delta_1}(p) \subset \Delta$ . Mas  $g$  é contínua e  $g(0) = p$ , logo existe  $\delta > 0$  tal que  $g(B_\delta(0)) \subset B_{\delta_1}(p)$ . Fazemos  $f = g|_{B_\delta(0)}$  e obtemos  $f : B_\delta(0) \rightarrow \Delta$ . Ainda,  $f$  é de classe  $C^\omega$  e, como  $Df(0)$  e  $X(f(0))$  são linearmente independentes,  $f$  é uma seção transversal local de  $X$  satisfazendo  $f(0) = p$ . Temos ainda que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $X$  em  $p$ .

**Teorema 2.5.3 (Fluxo Tubular)** Seja  $p$  um ponto regular de  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  e  $f : A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $X$  de classe  $C^k$  com  $f(0) = p$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\Delta$  e um difeomorfismo  $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  de classe  $C^k$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centro na origem  $0 = f^{-1}(p)$  tal que:

- i)  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
- ii)  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $X|_V$  e o campo constante  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.5.4** Sejam  $\Sigma$  uma seção transversal de um campo  $X$  de classe  $C^1$ , definida no aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ , e  $p \in \Sigma$ . Então existem uma vizinhança  $V$  de  $p$ ,  $\epsilon = \epsilon(p) > 0$  e uma função  $\tau : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$  tal que  $\tau(V \cap \Sigma) = 0$  e:

- a) Para qualquer  $q \in V$ , a curva integral  $\varphi(\cdot, q)$  de  $X|_V$  é definida e biunívoca em  $J_q = (\tau(q) - \epsilon, \tau(q) + \epsilon)$ ;
- b)  $\eta(q) := \varphi(\tau(q), q)$  é o único ponto onde  $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$  intercepta a  $\Sigma$ ;
- c)  $\eta : V \rightarrow \Sigma$  é de classe  $C^k$  e  $D\eta(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\eta(q)}\Sigma$  é sobrejetiva para qualquer  $q \in V$ . Mais ainda,  $D\eta_q \cdot v = 0$  se, e somente se,  $v = \alpha X(q)$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$

## 2.6 ESTABILIDADE DE LIAPUNOV

Nesta seção, trataremos do Critério de Liapunov para estabilidade de um ponto singular de um sistema autônomo. Mais geralmente, consideremos o campo dado pelo sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.2)$$

onde  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ .

**Definição 2.6.1** *Um ponto singular  $p \in \Delta$  do campo dado por (2.2) é dito **estável** quando para toda vizinhança  $U$  de  $p$ , existe uma vizinhança  $U_1$  de  $p$  tal que toda solução  $\varphi$  de (2.2) com  $\varphi(0) \in U_1$ , tem-se que  $\varphi(t) \in U$  para todo  $t \geq 0$ . Se além disso  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = p$ , então  $p$  é dito **assintoticamente estável**.*

Seja  $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se  $\varphi$  é solução de (2.2) definida no intervalo  $I$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(\varphi(t))) &= \nabla V(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= \nabla V(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)), t \in I, \end{aligned}$$

onde  $\cdot$  denota o produto escalar de  $\mathbb{R}^n$ . Denotando por  $x = \varphi(0)$  temos

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t))|_{t=0} = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

Ponhamos, para cada  $x \in \Delta$ ,

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

**Definição 2.6.2** *Seja  $p \in \Delta$  um ponto singular de (2.2). Uma função de Liapunov para  $p$  é uma função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , definida em um aberto  $U$  contendo  $p$ , satisfazendo as seguintes condições:*

i)  $V(p) = 0$  e  $V(x) > 0; \forall x \neq p$ ;

ii)  $\dot{V} \leq 0$  em  $U$ .

*A função de Liapunov  $V$  diz-se estrita quando*

iii)  $\dot{V} < 0$  em  $U - \{p\}$ .

O critério de Liapunov para o sistema (2.2) é dado pelo teorema seguinte:

**Teorema 2.6.3** *Seja  $p$  um ponto singular de (2.2). Se existe uma função de Liapunov para  $p$ , então  $p$  é estável. Se a função for estrita, então  $p$  é assintoticamente estável.*

## 2.7 TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

**Definição 2.7.1** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  um aberto, e  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$  ou  $k = \omega$ . Seja  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$  o intervalo máximo de  $p \in \Delta$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$ , define-se o conjunto*

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

*Analogamente, se  $\omega_-(p) = -\infty$ , define-se o conjunto*

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

*Os conjuntos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados, respectivamente, de **conjunto  $\omega$ -limite** e **conjunto  $\alpha$ -limite** de  $p$ .*

**Exemplo 2.7.2** *Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $X(x, y) = (x, -y)$ . Assim,  $\varphi(t, p) = (c_1 e^t, c_2 e^{-t})$ . Consequentemente,*

- *Se  $p = (0, 0)$ , então  $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$ .*
- *Se  $p \in \{(x, 0); x \neq 0\}$ , então  $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$  e  $\omega(p) = \emptyset$ .*
- *Se  $p \in \{(0, y); y \neq 0\}$ , então  $\alpha(p) = \emptyset$  e  $\omega(p) = \{(0, 0)\}$ .*
- *Se  $p \in \{(x, y); xy \neq 0\}$ , então  $\alpha(p) = \omega(p) = \emptyset$ .*

*Veja Figura 1.2.*

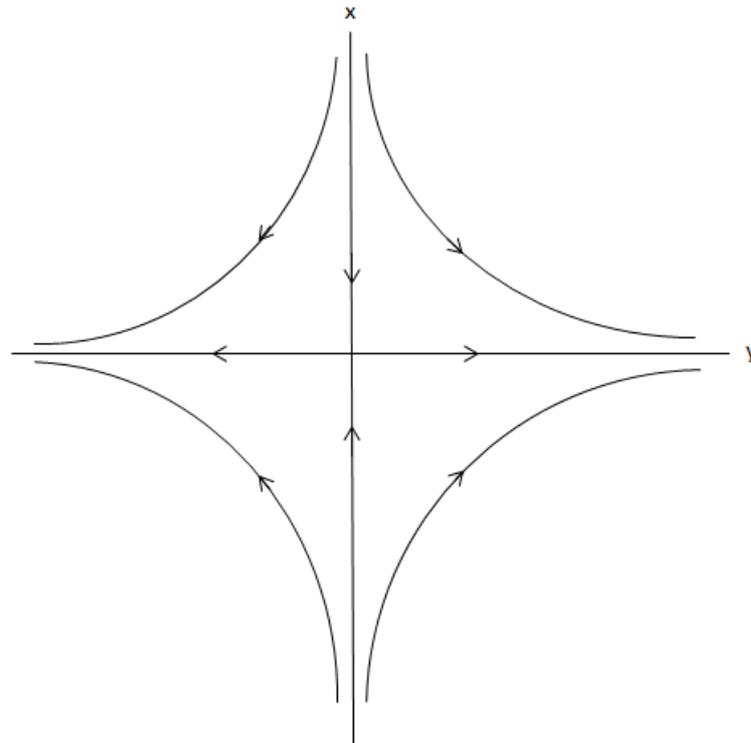
**Observação 2.7.3** *Sejam  $\varphi_p$  a curva integral do campo  $X$  pelo ponto  $p$  e  $\psi_p$  a curva integral do campo  $-X$  pelo ponto  $p$ , então  $\varphi_p(-t) = \psi_p(t), \forall t \in I_p$ . Segue daí que o  $\omega$ -limite de  $p$  com relação ao campo  $X$  é igual ao  $\alpha$ -limite de  $p$  com relação ao campo  $-X$ , e reciprocamente. Por este motivo, para estudarmos as propriedades gerais dos conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de órbitas é suficiente nos restringirmos ao estudos do conjunto  $\omega$ -limite.*

Apresentamos a seguir propriedades gerais do conjunto  $\omega$ -limite.

**Teorema 2.7.4** *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$ , e  $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$  (respectivamente  $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p); t \leq 0\}$ ) a semi-órbita positiva (respectivamente a semi-órbita negativa) do campo  $X$  pelo ponto  $p$ . Se  $\gamma^+(p)$  (respectivamente  $\gamma^-(p)$ ) está contida num subconjunto compacto  $K \subset \Delta$ , então:*

- i)  $\omega(p) \neq \emptyset$  (respectivamente  $\alpha(p)$ );
- ii)  $\omega(p)$  é compacto (respectivamente  $\alpha(p)$ );

Figura 2.2 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 2.7.2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

iii)  $\omega(p)$  é invariante por  $X$  (respectivamente  $\alpha(p)$ ), isto é, se  $q \in \omega(p)$ , então a curva integral de  $X$  por  $q$  está contido em  $\omega(p)$ ;

iv)  $\omega(p)$  é conexo (respectivamente  $\alpha(p)$ );

v)  $d(\phi(t, p), \omega(p)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Observação 2.7.5** Se  $\gamma_p$  é a órbita de  $X$  pelo ponto  $p$  e  $q \in \gamma_p$ , então  $\omega(p) = \omega(q)$ .

Com efeito, se  $q \in \gamma_p$  existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t, p) = \varphi(t+c, q)$ . Analogamente,  $\alpha(p) = \alpha(q)$ .

A observação anterior permite que definamos o conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\Gamma)$  de uma órbita  $\Gamma$  como o conjunto  $\omega$ -limite de qualquer um dos pontos de  $\Gamma$ .

Nosso próximo objetivo é apresentar o Teorema de Poincaré-Bendixson. Trata-se de um dos principais resultados da Teoria Qualitativa de EDO's no plano, pois classifica os conjuntos  $\omega$ -limites de campos planares. Cabe ressaltar que o resultado não é válido para campos de dimensão  $\geq 3$ . Lembremos que a semi-órbita positiva por  $p$ , denotada por  $\gamma_p^+$ , segundo o Teorema 2.7.4, é definida por  $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$ .

**Definição 2.7.6** Dado um campo de vetores  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\Delta$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , entendemos por ciclo limite uma órbita periódica de  $X$  que seja isolada no conjunto de

todas as órbitas periódicas de  $X$ , ou seja, uma órbita periódica  $\gamma$  é um ciclo limite se existe uma vizinhança  $V$  de tal forma que  $\gamma$  seja a única órbita periódica contida em  $V$ .

**Teorema 2.7.7 (Poincaré-Bendixson)** *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , campo de classe  $C^1$ , definido no aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  e  $p \in \Delta$  tal que  $\gamma_p^+$  esteja contida num compacto  $K \subset \Delta$ . Suponha que o campo  $X$  possua um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ . Têm-se as seguintes alternativas:*

- i) *se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica;*
- ii) *se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares, então  $\omega(p)$  consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ;*
- iii) *se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto singular.*

**Corolário 2.7.8** *Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  num conjunto aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $\gamma$  é uma órbita fechada de  $X$  tal que  $\text{Int}\gamma \subset \Delta$  então existe um ponto singular de  $X$  contido em  $\text{Int}\gamma$ .*

A demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson é feita em uma sequência de lemas. Destacamos um deles, que será útil no decorrer do texto.

**Lema 2.7.9** *Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  e um conjunto aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ , e  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  contida em  $\Delta$ . Se  $\gamma$  é uma órbita de  $X$  e  $p \in \Sigma \cap \gamma$ , então,  $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$  intercepta  $\Sigma$  numa sequência monótona  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$*

## 2.8 EXISTÊNCIA DE ÓRBITA PERIÓDICA PARA A EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Utilizaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson para demonstrar a existência de uma órbita periódica para a equação de Liénard, uma das mais estudadas equações diferenciais planares.

No Capítulo 3, estudaremos a equação de Van de Pol, um caso particular da equação de Liénard. Nessa oportunidade, desenvolveremos uma ferramenta que permite chegar de modo mais conciso a resultados mais específicos sobre a equação de Van de Pol.

Nesta seção seguiremos os resultados de J. SOTOMAYOR[09] e L. PERKO[10].

**Teorema 2.8.1 [Equação de Liénard]** *Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $G(u) = \int_0^u g(s) ds$  é ímpar em  $u$ ,  $G(u) \rightarrow \infty$  se  $u \rightarrow \infty$ , existe  $\beta > 0$  tal que se  $u > \beta$ ,  $G$  é crescente, e existe  $\alpha > 0$  tal que  $G(u) < 0$  se  $0 < u < \alpha$ . Então, a equação de segunda ordem*

$$u'' + g(u)u' + u = 0 \quad (2.3)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v - G(u), \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \quad (2.4)$$

admite uma solução periódica.

**Demonstração:** Mostraremos que, dado  $v_0$  suficientemente grande, o conjunto  $\omega(A)$ , onde  $A = (0, v_0)$ , está contido em uma região limitada, e através do Teorema de Poincaré-Bendixson, é uma órbita fechada. Mas antes, observemos algumas propriedades do sistema (2.4).

1. A única singularidade de (2.4) é  $0 = (0, 0)$ .
2. Para a solução  $t \mapsto (u(t), v(t))$  de (2.4) temos que:  $u$  é crescente onde  $v(t) > G(u(t))$  e decrescente onde  $v(t) < G(u(t))$ . Também  $v$  é decrescente se  $u(t) > 0$  e crescente se  $u(t) < 0$ . Além disso, o campo  $(v - G(u), -u)$  é horizontal no eixo  $v$  e vertical na curva  $v = G(u)$ .
3. Do fato de  $G$  ser ímpar, decorre que as soluções  $t \mapsto (u(t), v(t))$  de (2.4) são invariantes por reflexões, isto é,  $t \mapsto (u(t), v(t))$  é solução de (2.4) se, e somente se,  $t \mapsto (-u(t), -v(t))$  também o for. Em particular, conhecendo o arco  $ABCD$  de uma órbita de (2.4), como mostra a Figura 1.3, sua reflexão com respeito a origem também é arco de uma órbita. Se  $A = (0, v_0)$ ,  $D = (0, -v_4)$  e  $v_4 < v_0$ , então a semi-órbita positiva que passa por  $A$  é limitada e portanto está contida na região limitada pela curva de Jordan  $J$  formada pelo arco  $ABECD$ , por sua reflexão com respeito à origem e pelos segmentos do eixo  $v$  que ligam os extremos desses arcos.

Aqui,  $A = (0, v_0)$ ,  $B = (u_1, v_1)$ ,  $E = (u_2, v_2)$ ,  $C = (u_3, v_3)$ ,  $D = (0, v_4)$  e  $\gamma = ABECD$  é um arco da trajetória de (2.4).

De fato, vamos mostrar que qualquer solução de (2.4) saindo do ponto  $A = (0, v_0)$ , com  $v_0 > \beta^2$ , pois  $\dot{v} < -u \leq -\beta \Rightarrow v(t) > -\beta t + \beta^2$ , tem uma órbita tal como mostra a Figura 1.3. Vamos verificar que as soluções se aproximam da origem, para isso observemos as curvas onde  $\dot{u} = 0$  e  $\dot{v} = 0$ .

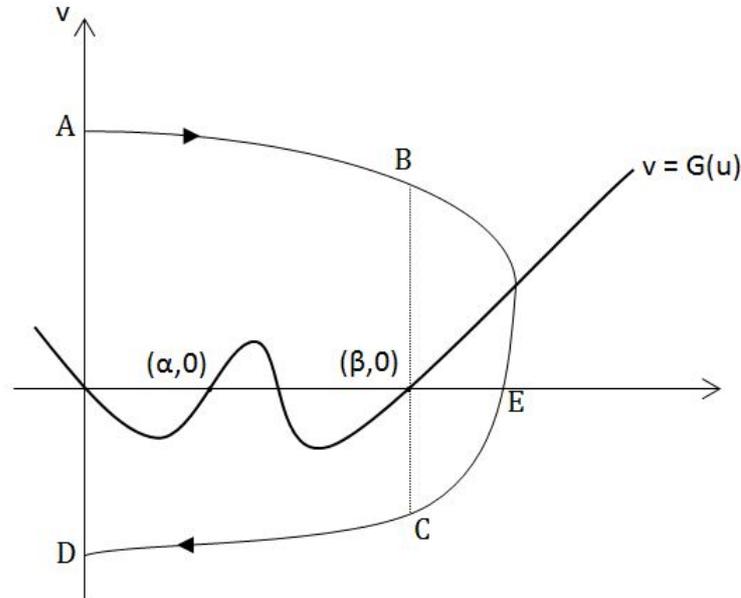
Definamos:

$$V^+ = \{(0, v) : v > 0\},$$

$$V^- = \{(0, v) : v < 0\},$$

$$g^+ = \{(u, v) : v = G(u), u > 0\},$$

Figura 2.3 – Retrato de fase do sistema (2.4).



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$g^- = \{(u, v) : v = G(u), u < 0\},$$

e consideremos  $\zeta$  a região entre  $V^+$  e  $g^+$ ,  $\xi$  a região entre  $g^+$  e  $V^-$ ,  $\kappa$  a região entre  $V^-$  e  $g^-$ , e  $\theta$  a região entre  $g^-$  e  $V^+$ .

Sejam  $(u_0, v_0) \in V^+$  e  $(u(t), v(t))$  solução de (2.4) passando por  $(u_0, v_0)$ . Logo,  $\dot{u}(0) > 0$  de modo que a solução entra em  $\zeta$  e  $u_1 = u(t_1) > 0$ , para  $t_1 > 0$  pequeno, enquanto a solução permanece na região  $\zeta$ . Assim, se  $\dot{u} > 0$  então  $u(t) \geq u_1$ .

Seja a região  $\{(u, v) : u \geq u_1, v \leq v_0, (u, v) \in \zeta\}$  com,  $\dot{v} \leq -u < 0$ , então a solução só pode sair de  $\zeta$  atravessando a curva  $g^+$  em algum momento  $t_2 > 0$ .

Seja  $(u_2, v_2) \in g^+$  a solução no tempo  $t_2$ . A trajetória entra em  $\xi$  para algum tempo  $t_3 > t_2$ . Além disso, ao longo de todo  $g^+$ ,  $\dot{v} < 0$ ; então uma vez que a trajetória sai de  $(u_2, v_2)$ , ela não pode retornar a  $g^+$ . Assim, ao longo da trajetória, há um limite superior em  $\dot{u}$ ,  $\dot{u} \leq -\alpha < 0$  para  $t > t_3$  e  $u(t) \leq u_3 - \alpha(t - t_3)$  enquanto permanece na região  $\xi$ .

Então, a trajetória pode deixar  $\xi$  apenas passando por  $V^-$  ou tornando-se ilimitada. Por  $\dot{u} \leq -\alpha < 0$ ,  $u(t)$  se torna zero quando  $t = t_3 + u_3/\alpha$ . No entanto, nesse intervalo de tempo,  $\dot{v} = -u \geq -u_3$ , e então  $v(t) \geq v_3 - u_3(\frac{u_3}{\alpha})$ .

Mas dado que a priori,  $v(t)$  é limitada nesse intervalo, a solução deve atravessar  $V^-$  saindo de  $\xi$ .

Pela simetria da equação, podemos fazer a mesma argumentação, segundo ajustes apropriados, para a região simétrica ao eixo  $v$ .

Agora vamos mostrar que se  $v_0$  é suficientemente grande temos que  $v_4 < v_0$  e portanto o conjunto  $\Omega(A)$  estará contido em uma região limitada, e então, pelo Teorema de Poincaré-Bendixon,  $\Omega(A)$  será uma órbita fechada já que  $\Omega(A) \neq (0, 0)$  pois,  $(0, 0)$  é uma fonte de (2.4), como mostraremos abaixo.

Seja a função

$$R(u, v) = \frac{1}{2}(u + v).$$

Para uma solução  $u = u(t), v = v(t)$  de (2.4) temos

$$\frac{d}{dt}R(u(t), v(t)) = u(v - G(u)) + v(-u) = -u(t)G(u(t)). \quad (2.5)$$

Assim temos, com  $A = (0, v_0)$  e  $D = (0, v_4)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_4^2 - v_0^2) &= R(D) - R(A) = \int_{ABECD} dR \\ &= \left[ \int_{AB} + \int_{CD} \right] dR + \int_{BEC} dR. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8.2, segue

$$\frac{1}{2}(v_4^2 - v_0^2) = \left[ \int_0^\beta + \int_0^\beta \right] \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du + \int_{v_1}^{v_3} G(u) dv.$$

Pelo Lema 2.8.3, segue que as duas primeiras integrais tendem monotonicamente a zero quando  $v_0 \rightarrow \infty$ .

Ao longo do segmento  $BEC$  os limites de integração correspondentes a  $v$  estão fixos em  $v = v_1$  e  $v = v_3$ , e para cada  $v \in [v_1, v_3]$ , temos então

$$\int_{BEC} G(u) dv = \int_{v_1}^{v_3} G(u) dv.$$

Notemos que

$$\psi(v_0) = \int_{v_1}^{v_3} G(u) dv$$

satisfaz a

$$-\psi(v_0) = - \int_{v_1}^{v_3} G(u) dv.$$

Logo, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno ,

$$-\psi(v_0) = \int_{v_3}^{v_1} G(u) dv > \int_{v_3 - \epsilon}^{v_1 + \epsilon} G(u) dv$$

$$> G(\epsilon) \int_{v_3-\epsilon}^{v_1+\epsilon} dv = G(\epsilon)[v_1 - v_3 - 2\epsilon] > G(\epsilon)[v_1 - 2\epsilon].$$

Como  $v_1 \rightarrow \infty$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ , isto prova que  $\psi(v_0) \rightarrow -\infty$  se  $v_0 \rightarrow \infty$ . Portanto  $v_4^2 < v_0^2$ , se  $v_0$  é grande.

Assim, por (2.5), se  $0 < |u| < \alpha$ ,  $\dot{R}(u(t), v(t)) > 0$ , logo  $-\dot{R}$  é definida negativa. Então, pelo Teorema de Estabilidade de Liapunov,  $(0, 0)$  é solução assintoticamente estável de (2.4) para  $t \rightarrow -\infty$ , e portanto  $(0, 0)$  é uma fonte de (2.4), isto é,  $(0, 0)$  é o  $\alpha$ -limite de todo ponto numa vizinhança de  $(0, 0)$ , terminando aqui a prova de que  $(0, 0)$  é uma fonte.

**Lema 2.8.2** *Seja  $R$  como na demonstração do Teorema 2.8.1. Então,*

$$\left[ \int_{AB} + \int_{CD} \right] dR + \int_{BEC} dR = \left[ \int_0^\beta + \int_0^\beta \right] \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du + \int_{v_1}^{v_3} G(u) dv.$$

**Demonstração:** Em  $AB$  consideremos a parametrização  $u \rightarrow (u, v(u))$  e teremos

$$\int_{AB} dR = \int_0^\beta R'(u) du = \int_0^\beta \left( u + v \frac{dv}{du} \right) du =$$

$$\int_0^\beta \left( u + v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} \right) du = \int_0^\beta \left[ u + v(-u) \frac{1}{v - G(u)} \right] du = \int_0^\beta \frac{-uG(u)}{v(u) - G(u)} du.$$

Análogo para  $CD$ .

Já para  $BEC$  consideremos a parametrização  $v \rightarrow (u(v), v)$ ,  $v_1 \leq v \leq v_3$ , e temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}(R(u(v), v)) &= u \frac{du}{dv} + v = u \frac{du}{dt} \frac{dt}{dv} + v \\ &= u(v - G(u)) \left( \frac{-1}{u} \right) + v \\ &= G(u(v)). \end{aligned}$$

Assim,

$$- \int_{BEC} dR = \int_{CEB} dR = \int_{v_1}^{v_3} G(u(v)) dv. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.8.3** *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.8.2 para  $u$ ,  $v$  e  $G(u)$ , temos que*

$$\left[ \int_0^\beta + \int_0^\beta \right] \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du$$

tendem monotonicamente a zero quando  $v_0 \rightarrow \infty$ .

Observemos que a igualdade que decorre do Lema 2.8.2 para as duas integrais tem o mesmo intervalo de integração e a única ressalva é que uma integral é para a curva de cima, enquanto a outra é a integral pela mesma curva por baixo.

**Demonstração:** Sejam  $M = \max\{u + G(u) : 0 \leq u \leq \beta\}$  e  $N = \max\{|uG(u)| : 0 \leq u \leq \beta\}$  e tomando  $v_0$  suficientemente grande de modo que  $v(\beta) > M$ , então no intervalo considerado temos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u}{v - G(u)} > -1 \Rightarrow v(u) \geq v_0 - u$$

Logo,

$$\left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq \int_0^\beta \frac{|uG(u)|}{v(u) - G(u)} du \leq \int_0^\beta \frac{|uG(u)|}{v_0 - (u + G(u))} du.$$

Assim,

$$0 \leq \left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq N \int_0^\beta \frac{du}{v_0 - M} \rightarrow 0,$$

quando  $v_0 \rightarrow \infty$ .

Portanto, temos que  $\int_{AB} dR \rightarrow 0$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ . Prova análoga para  $\int_{CD} dR \rightarrow 0$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ , pois  $v_0 \rightarrow \infty$  implica  $v_1 \rightarrow \infty$ . ■

## 2.9 INTEGRAIS PRIMEIRAS E SISTEMAS HAMILTONIANOS

**Definição 2.9.1** *Sejam  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  definido em um aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Dizemos que  $H$  é uma integral primeira de  $X$  em  $\Delta$  se  $H$  permanece constante ao longo das órbitas de  $X$  contidas em  $\Delta$  e, além disso,  $H$  não é constante em todo subconjunto aberto de  $\Delta$ .*

Desta forma,  $H$  é tal que  $(H \circ \varphi)'(t) = 0, t \in I$ , para toda solução  $\varphi = \varphi(t)$  do campo  $X$  definida no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Em particular, cada solução do campo permanece em uma única curva de nível  $H_c = \{(x, y) \in \Delta; H(x, y) = c\}$ . Assim, as curvas de nível  $H_c$  em  $\Delta$  são suficientes para descrever o retrato de fase de  $X$  em  $\Delta$ .

**Definição 2.9.2** *Sejam  $\Delta$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e  $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^2$ . Um sistema da forma*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Delta \quad (2.6)$$

*é chamado um sistema hamiltoniano.*

A aplicação  $H$  é chamada uma *função Hamiltoniana* do campo dado em (2.6).

Note que  $H$  é constante ao longo de cada solução de (2.6). De fato, dada uma solução  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  de (2.6) temos:

$$(H \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, t \in I.$$

Conseqüentemente, para descrever o retrato de fase de um sistema Hamiltoniano em  $\mathbb{R}^2$  basta descrever as curvas de nível  $H(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$ .

O exemplo que segue trata de um sistema que descreve o movimento de um pêndulo não-amortecido, por ser equivalente à equação de segunda ordem  $\ddot{x} = -kx$ . Observe que a função hamiltoniana nesse caso é a energia total do sistema.

**Exemplo 2.9.3** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -kx$$

e a função  $H$  dada por

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + kx^2),$$

onde  $k > 0$  é uma constante. Segue que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = kx \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, o sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

ou seja, é Hamiltoniano.

Em seguida, mostraremos que os fluxos de sistemas Hamiltonianos preservam área, no seguinte sentido:

**Definição 2.9.4** *Um difeomorfismo  $h : \Delta \rightarrow \Delta$ , onde  $\Delta$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , preserva área quando, para qualquer aberto  $\Delta_1 \subset \Delta$  de área finita, os conjuntos  $h(\Delta_1)$  e  $\Delta_1$  têm a mesma área.*

**Teorema 2.9.5** *Um difeomorfismo  $h : \Delta \rightarrow \Delta$ , de classe  $C^1$ , com  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$  preserva área se, e somente se, o determinante de  $Dh$  tem valor absoluto constante e igual a 1.*

**Definição 2.9.6** *Seja  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , um campo de vetores de classe  $C^1$  definido num aberto  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$  cujo fluxo  $\varphi$  está definido para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Delta$ . Dizemos que o fluxo do campo  $X$  preserva área se, para cada  $t \in \mathbb{R}$  e todo aberto  $\Delta_1 \subseteq \Delta$  de área finita temos*

$$A(\varphi_t(\Delta_1)) = A(\Delta_1),$$

sendo  $\varphi_t$  a aplicação dada por  $x \mapsto \varphi(t, x)$ .

**Proposição 2.9.7** (*Fórmula de Liouville-Ostragradski*). *Se  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo de classe  $C^1$ , no aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  e  $\varphi$  o seu fluxo, então:*

$$\det D(\varphi_t(x)) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div}(X(\varphi_s(x))) ds \right),$$

com  $x \in \Delta$ .

**Teorema 2.9.8** (*Teorema de Liouville*). *Se um campo de vetores planar de classe  $C^1$  tem divergente nulo, então seu fluxo preserva área.*

Notemos que o Teorema 2.9.8 nos dá algumas relações entre as trajetórias de um campo de vetores planar, pois considerando um feixe de trajetórias com condições iniciais em um aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ , como esse fluxo preserva área não é possível que todas essas trajetórias se afastem (respectivamente, aproximem) umas das outras, já que isso causaria uma expansão (respectivamente, compressão) da área inicial.

**Proposição 2.9.9** *Fluxos associados a sistemas Hamiltonianos preservam área.*

### 3 CRITÉRIOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS PLANARES

O conceito de ciclo limite para campos vetoriais planares, introduzido por Poincaré, modela oscilações não lineares em processos físicos. No final da década de 1920, Van der Pol, Liénard e Andronov, estudando oscilações não lineares de fenômenos elétricos, analisaram certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e verificaram a ocorrência de ciclos limites. Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a existência e unicidade, entre outras propriedades, destes ciclos limites. Este capítulo está baseado no Capítulo 7 de F. DUMORTIER, J. LLIBRE and J.C. ARTÉS [01].

#### 3.1 RESULTADOS BÁSICOS

Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (3.1)$$

onde  $x$  e  $y$  são variáveis reais,  $P$  e  $Q$  são funções  $C^1$  definidas em um aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, estamos sob as condições do Teorema de Existência e Unicidade de Picard.

Classificamos a seguir os diversos tipos de órbitas periódicas de campos planares.

Seja  $\gamma$  uma órbita periódica do sistema (3.1). Se para alguma vizinhança externa (interna) da órbita periódica  $\gamma$  não existem outras órbitas periódicas de (3.1), então  $\gamma$  é chamado de *ciclo limite externo* (interno). Uma órbita periódica que seja ciclo limite externo e interno é chamada de *ciclo limite*.

Assim, um ciclo limite é uma órbita periódica isolada de (3.1).

Se existe uma vizinhança externa (interna) da órbita periódica  $\gamma$  formada pela união de órbitas periódicas, então  $\gamma$  é chamada de *órbita periódica de tipo centro-externa* (centro-interna).

Se em qualquer vizinhança externa (interna) de  $\gamma$  existem órbitas periódicas e não periódicas, diferentes de  $\gamma$ , então  $\gamma$  é chamado de um *ciclo externo (interno) indefinido*. Se uma órbita periódica  $\gamma$  for ciclo externo indefinido ou ciclo interno indefinido, chamamos  $\gamma$  de um *ciclo indefinido*.

**Proposição 3.1.1** *Se  $\gamma$  é uma órbita periódica do sistema planar (3.1) então existe uma vizinhança  $U$  suficientemente pequena de  $\gamma$  satisfazendo as três seguintes afirmações:*

- (a)  $U$  não contém pontos singulares;

- (b) para qualquer ponto  $p \in \gamma$  existe um segmento transversal  $\Sigma_p$  de  $X$  em  $p$ ;
- (c) toda órbita periódica contida em  $U$  intercepta  $\Sigma_p$  transversalmente em um único ponto. Qualquer órbita não periódica em  $U$  intercepta  $\Sigma_p$  em um número infinito de pontos, que estão no mesmo lado de  $\gamma$ .

**Demonstração:**

(a) Seja  $p \in \gamma$  qualquer, então  $X(p) \neq 0$ , pois  $\gamma$  é órbita periódica. Pela continuidade, existe aberto  $U_p$  tal que  $q \in U_p$ ,  $X(q) \neq 0$ . Basta tomarmos  $U = \cup_{p \in \gamma} U_p$ , assim  $U$  é aberto que não contém pontos singulares.

(b) O campo  $X$  é de classe  $C^1$ ,  $U_p$  é aberto, logo pela Definição 1.5.1 temos que para cada  $p \in \gamma$ , existe um segmento transversal  $\Sigma_p$ .

(c) Sejam  $\Sigma_p$  uma seção transversal de  $X$  em  $p$  com  $p \in \gamma$ , e  $V$  a vizinhança aberta de  $\Sigma_p$ , dada pelo Teorema do Fluxo Tubular. Então, toda órbita de  $X$  que passa por  $V$  intercepta  $\Sigma_p$  transversalmente.

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definamos

$$W_t = \{\varphi(t, x); x \in V\},$$

que é um conjunto aberto pela Observação 2.3.3.

Seja  $T > 0$  o período de  $\gamma$ , e definamos

$$W = \bigcup_{t \in [0, T]} W_t$$

que é um aberto do  $\mathbb{R}^2$ .

Diminuindo  $U$  se necessário, podemos supor que  $W \subset U$ . Dado  $q \in U$ , temos da definição de  $W$  que  $q = \varphi(t, x)$ , para algum  $t \in [0, T]$ , e algum  $x \in \Sigma_p$ . Logo, a órbita que passa por  $q$  intercepta  $\Sigma_p$  em um ponto, a saber, o ponto  $\varphi(-t, q) = x$ . Como toda órbita que passa por  $V$  intercepta  $\Sigma_p$  transversalmente, o aberto de  $q$  intercepta  $\Sigma_p$  transversalmente.

Se  $\gamma_q$  não é uma órbita periódica, pelo Lema 2.7.9,  $\gamma_q^+$  intercepta  $\Sigma_p$  segundo uma sequência monótona de pontos. Se dois desses pontos coincidem, então  $\gamma_q$  seria periódica. Se dois desses pontos estivessem em lados distintos de  $\gamma$  então, por continuidade, algum ponto de  $\gamma_q$  interceptaria  $\gamma$ , contradizendo o Teorema de Picard.

■

### 3.2 A TRANSFORMAÇÃO DE POINCARÉ

A ferramenta básica para o estudo de órbitas periódicas é a Transformação de Poincaré associada a uma órbita periódica  $\gamma$ , a qual é um difeomorfismo  $\pi$  que definiremos a seguir. Esta transformação descreve o comportamento das órbitas do campo numa vizinhança de  $\gamma$ .

Apresentaremos a definição da Transformação de Poincaré para campos em  $\mathbb{R}^n$ , e depois a utilizaremos para estudar ciclos limites de sistemas planares.

Seja então  $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq \tau_0\}$  uma órbita periódica de período  $\tau_0 > 0$  de um campo  $X$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , definido em  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma$  uma seção transversal de  $X$  em  $p$ . Em virtude da continuidade do fluxo  $\varphi$  de  $X$ , para todo ponto  $q \in \Sigma$  próximo de  $p$ , a trajetória  $t \mapsto \varphi(t, q)$  permanece próxima a  $\gamma$ , com  $t$  no intervalo compacto  $[0, 2\tau_0]$ . Define-se  $\pi(q)$  como o primeiro ponto onde  $\gamma$  volta a interceptar  $\Sigma$ . Seja  $\Sigma_0$  o domínio de  $\pi$ . Naturalmente  $p \in \Sigma_0$  e  $\pi(p) = p$ , Veja Figura 2.1.

A seguir, demonstraremos que  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  sobre sua imagem  $\Sigma_1$ . Vamos usar o Teorema do Fluxo Tubular. Como  $\varphi(\tau_0, p) = p$ , existe uma vizinhança  $\Sigma_0$  de  $p$  em  $\Sigma$  tal que  $\varphi(\tau_0, q) \in V$  para todo  $q \in \Sigma_0$ . Seja  $\eta : V \rightarrow \Sigma$  a aplicação definida já definida, e pomos  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ ,  $\pi(q) = \eta(\varphi(\tau_0, q))$ .

Outra expressão para  $\pi$  é  $\pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$ , onde  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  é o tempo  $\tau(x)$  que leva a órbita por  $x$  em  $V$  para interceptar  $\Sigma$ . Do Teorema da Função Implícita,  $\tau$  é de classe  $C^k$ .

Desta expressão resulta que  $\pi$  é da mesma classe de diferenciabilidade que  $X$ . A inversa  $\pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  de  $\pi$  é definida tomando-se a campo  $-X$ . Fica provado que  $\pi$  é um difeomorfismo  $C^k$ .

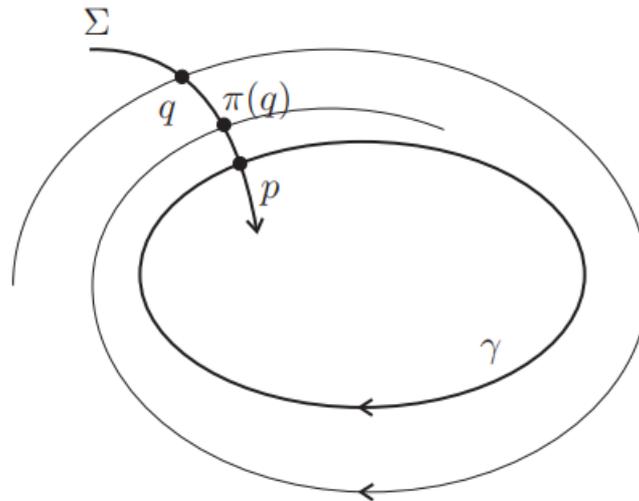
Muitas propriedades do retrato de fase de  $X$  perto de  $\gamma$  se refletem em  $\pi$  e reciprocamente. Por exemplo, as órbitas periódicas de  $X$  vizinhas de  $\gamma$  correspondem aos pontos fixos de  $\pi$ , que são pontos  $q \in \Sigma_0$  para as quais  $\pi(q) = q$ . O comportamento assintótico das órbitas de  $X$  perto de  $\gamma$  também é descrito por  $\pi$ . Assim, é possível demonstrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ , onde  $d(\varphi(t, q), \gamma) = \inf\{|\varphi(t, q) - r|, r \in \gamma\}$ .

**Definição 3.2.1** *Com a notação acima, a órbita fechada  $\gamma$  é um atrator periódico (ou então  $\gamma$  diz-se orbitalmente estável) quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q$  numa vizinhança de  $\gamma$ .*

O próximo resultado mostra que existem apenas três tipos de ciclos limites em sistemas planares.

**Proposição 3.2.2** *Sejam  $X : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $\gamma$  um ciclo limite de  $X$  e  $V_\gamma$  a vizinhança de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita periódica de  $X$  que intercepta  $V_\gamma$ . Então existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites:*

Figura 3.1 – Seção transversal  $\Sigma$  e transformação de Poincaré.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- (a) *estável*, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;
- (b) *instável*, quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;
- (c) *semi-estável*, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap Ext\gamma$ ; e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap Int\gamma$ , ou o contrário.

Veja Figura 2.2.

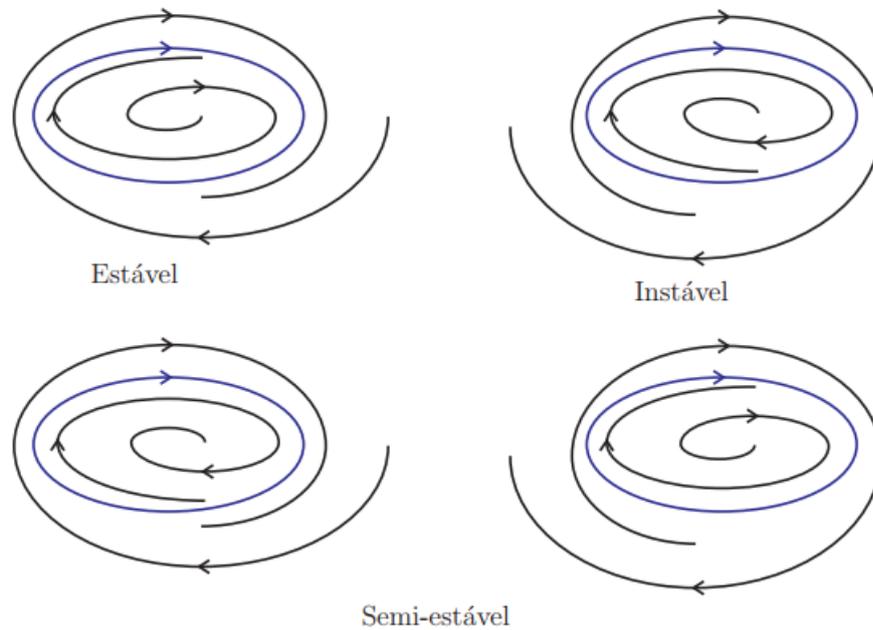
**Demonstração:** Seja  $p \in \gamma$  qualquer. Diminuindo a vizinhança  $V_\gamma$  se necessário, podemos supor pela Proposição 2.1.1, que ela não contém singularidades e que  $\Sigma$  é uma seção transversal a  $X$  em  $p$ . Seja  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré. Suponhamos que  $\Sigma$  esteja ordenado, sendo o sentido positivo de  $Ext\gamma$  para  $Int\gamma$ . Dado  $q \in \Sigma_0 \cap Ext\gamma$ , temos que  $\pi(q) \neq q$  pois, caso contrário, a órbita que contém  $q$  seria periódica. Então  $\pi(q) > q$  ou  $\pi(q) < q$ .

Suponhamos  $\pi(q) > q$ . Seja agora a região  $A$  limitada por  $\gamma$ , pelo arco de trajetória  $\widehat{q\pi(q)}$  e pelo segmento  $\overline{q\pi(q)} \in \Sigma_0$ . A região  $A$  é compacta, logo pelo item v) do Teorema 2.7.4 temos que  $d(\varphi(t, p), \omega(p)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Se  $\pi(q) < q$ , considerando o campo  $-X$ , fica provado que  $d(\varphi(t, p), \omega(p)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

As mesmas considerações podem ser feitas em  $Int\gamma$ . Combinando todas as possibilidades podemos provar a proposição. ■

Figura 3.2 – Classificação de ciclos limites.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na notação da Proposição 3.2.2-(c), quando ocorre  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap Ext\gamma$ , dizemos que  $\gamma$  é um *ciclo limite externamente estável*. Análogo para *internamente estável*, *externamente instável* e *internamente instável*.

**Observação 3.2.3** Com as notações da Proposição 3.2.2, segue que  $\gamma$  é um ciclo limite se, e somente se,  $p$  é um ponto fixo isolado de  $\pi$ . Além disso,

- $\gamma$  é estável se, e somente se,  $|\pi(x) - p| < |x - p|$  para todo  $x \neq p$  suficientemente próximo de  $p$ ;
- $\gamma$  é instável se, e somente se,  $|\pi(x) - p| > |x - p|$  para todo  $x \neq p$  suficientemente próximo de  $p$ ;
- $\gamma$  é semi-estável se, e somente se,  $|\pi(x) - p| < |x - p|$  para todo  $x \in \Sigma \cap Ext\gamma$  suficientemente próximo de  $p$  e  $|\pi(x) - p| > |x - p|$  para todo  $x \in \Sigma \cap Int\gamma$  suficientemente próximo de  $p$ , ou o contrário.

**Proposição 3.2.4** Qualquer órbita periódica  $\gamma$  é, ou um ciclo limite externo (interno), ou uma órbita periódica do tipo centro-externa (interna) ou ainda um ciclo externo indefinido (interno).

**Demonstração:** Consideraremos a transformação de Poincaré  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ . Então existem 3 casos.

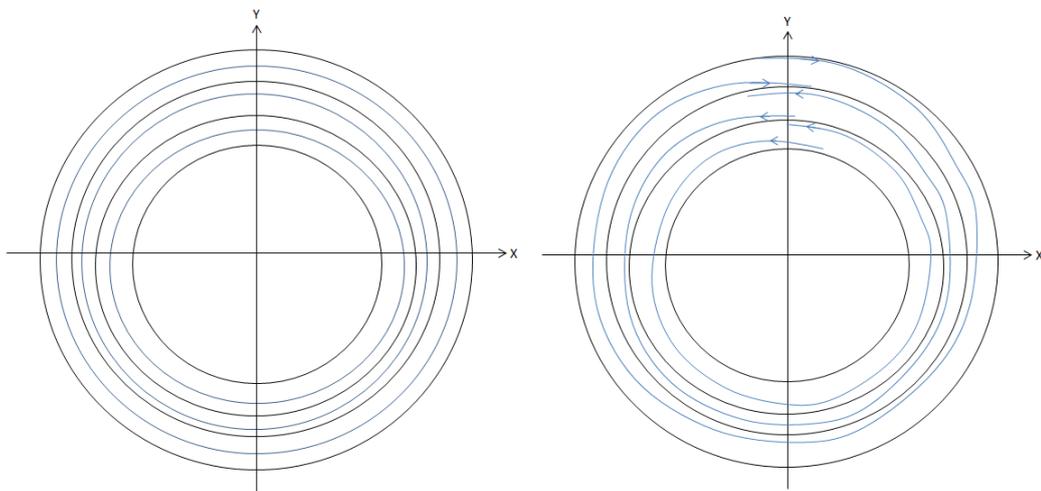
Primeiro caso: existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\pi(x) \neq x$ , para todo  $x \in (p, p + \epsilon)$ . Esse caso segue imediatamente da Proposição 3.2.2.

Segundo caso: existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\pi(x) = x$  para qualquer  $x \in (p, p + \epsilon)$ , é uma órbita periódica do tipo centro-externa (interna), pois existe uma vizinhança externa (interna) da órbita periódica formada pela união de órbitas periódicas.

Terceiro caso: para todo  $\epsilon > 0$ , existem  $x, y \in (p, p + \epsilon)$  onde  $\pi(x) = x$  e  $\pi(y) \neq y$ . Nesse caso, da definição da transformação de Poincaré, a órbita de  $x$  é periódica e a órbita de  $y$  não.

■

Figura 3.3 – Órbita do tipo centro-externa e ciclo externo indefinido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 2.3 mostra os casos 2 e 3 da Proposição 3.2.4.

**Observação 3.2.5** Como  $\pi$  é diferenciável, se  $\pi'(p) < 1$  podemos concluir que  $\gamma$  é estável e se  $\pi'(p) > 1$  que  $\gamma$  é instável.

Demonstramos a seguir que, para os sistemas analíticos, ocorrem uma restrição na classificação das órbitas periódicas.

**Proposição 3.2.6** Se  $P$  e  $Q$  são funções analíticas, então o sistema (3.1) não tem ciclos indefinidos.

**Demonstração:** Por  $P$  e  $Q$  serem funções analíticas, temos que a aplicação de Poincaré também é analítica. Então pelo princípio dos zeros isolados das funções analíticas, temos que o sistema (3.1) não ocorre o terceiro caso da demonstração da Proposição 3.2.4.

■

**Definição 3.2.7** O divergente do campo  $X = (P, Q)$  é o traço da matriz jacobiana de  $X$ , ou seja,

$$\operatorname{div}(X(x, y)) = \operatorname{tr}DX(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

O teorema a seguir nos dá condições sobre a estabilidade de ciclos limites de sistemas planares analisando o divergente do campo.

**Teorema 3.2.8** Sejam  $X = (P, Q) : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $\gamma$  uma órbita periódica de  $X$  de período  $T$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré associada a uma seção transversal  $\Sigma$  de  $X$  em  $p \in \gamma$ . Então:

$$\pi'(p) = \exp \left( \int_0^T \operatorname{div}(X(\gamma(t))) dt \right) = \exp \left( \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\gamma(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma(t)) \right) dt \right).$$

Em particular, se  $\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt < 0$  então  $\gamma$  é estável e se  $\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt > 0$ , então  $\gamma$  é instável.

**Demonstração:** Para cada  $t$ , suponhamos  $A(t) = DX(\gamma(t))$ . Seja  $\phi(t)$  a matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ , com  $\phi(0) = I$ : Pela fórmula de Liouville, temos

$$\det \phi(T) = \exp \left[ \int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt \right].$$

Vamos mostrar que  $\pi'(p) = \det \phi(T)$ . Seja  $\varphi$  o fluxo de  $X$ . Temos que  $\phi(T) = D_2\varphi(T, p)$ , e notemos primeiro que  $D_2\varphi(T, p).X(p) = X(p)$ . De fato, como  $D_1\varphi(t, p)|_{t=0} = X(p)$ , vem

$$\begin{aligned} D_2\varphi(T, p).X(p) &= \frac{d}{dt}\varphi(T, \varphi(t, p))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(T + t, p)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(t, p)|_{t=0} = X(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $g : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$  é uma parametrização de  $\Sigma$  tal que  $g(0) = p$ , o conjunto  $B = \{X(p), g'(0)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Por definição,  $\pi(g(s)) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, g(s))), g(s))$ , donde

$$\begin{aligned} \pi'(p).g'(0) &= \frac{d}{ds}\pi \circ g(s)|_{s=0} = D_1\varphi(T, p)a + D_2\varphi(T, p).g'(0) \\ &= aX(p) + D_2\varphi(T, p).g(0), \end{aligned}$$

onde  $a$  é a derivada de  $\tau(\varphi(T, g(s)))$  em  $s = 0$ . Portanto, a matriz de  $D_2\varphi(T, p)$  na base  $B$  é

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \pi'(p) \end{pmatrix}$$

e assim obtemos que  $\det \phi(T) = \pi'(p)$ . ■

### 3.3 EXISTÊNCIA E NÃO-EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITES EM CAMPOS PLANARES

Nesta seção apresentamos resultados clássicos relacionados à existência e não-existência de ciclos limites em campos vetoriais planares.

Quando nos referirmos a uma *região anular*, estamos considerando como sendo a região delimitada por duas curvas simples fechadas do plano, com interseção igual ao vazio, e que uma esteja contida no interior da outra.

**Proposição 3.3.1** *Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são órbitas periódicas que formam a fronteira de uma região anular  $A$ , e não existem pontos singulares e nem outras órbitas periódicas em  $A$ , então a órbita  $\gamma_1$  em  $A$  é o conjunto  $\omega$ -limite ( $\alpha$ -limite) e  $\gamma_2$  é o conjunto  $\alpha$ -limite ( $\omega$ -limite) de todos os pontos de  $A$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  órbitas periódicas que formam a fronteira de uma região anular  $A$ ; obviamente  $A$  é compacto. Seja  $p \in A$ . Então, pelo Teorema de Picard,  $\gamma_p^+ \subset A$ . Logo  $\omega(p) \neq \emptyset$ .

Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson,  $\omega(p)$  é órbita periódica e suponhamos  $\omega(p) = \gamma_1$ . Então, pelo Lema 2.7.9, teremos que  $\alpha(p) = \gamma_2$ . Resta mostrar que  $\forall q \in A$ , vale que  $\omega(q) = \gamma_1$  e  $\alpha(q) = \gamma_2$ . Se  $\omega(q) = \gamma_2$  então temos uma contradição com a continuidade do fluxo. ■

**Teorema 3.3.2 (Região Anular de Poincaré)** *Seja  $A$  uma região anular que não contém pontos singulares,  $\partial A$  não contém órbitas periódicas e que cada órbita que cruza a fronteira de  $A$  move-se do exterior para o interior. Então existe pelo menos um ciclo limite externamente estável em  $A$  e existe também um ciclo limite internamente estável em  $A$ , sendo possível que ambos ciclos limites coincidam, de modo a ser um único ciclo limite estável.*

**Demonstração:** A ideia para a prova consiste em utilizar o Lema de Zorn. Consideremos a seguinte família de conjuntos

$$\Gamma = \{\gamma : \gamma \text{ órbita periódica contida em } A\}.$$

Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson temos que  $\Gamma \neq \emptyset$ , e estabelecendo a seguinte relação

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \overline{Int\gamma_2} \subseteq \overline{Int\gamma_1}$$

facilmente vemos que  $\leq$  é uma relação de ordem (reflexiva, antissimétrica e transitiva) de  $\Gamma$ . Seja agora  $S$  um conjunto totalmente ordenado de  $\Gamma$ , devemos mostrar que  $S$  tem uma cota superior. Seja

$$\delta = \bigcap_{\gamma_i \in S} [\overline{Int\gamma_i} \cap \overline{A}].$$

Notemos que  $\delta \neq \emptyset$  pois cada  $\overline{Int\gamma_i} \cap \overline{A}$  é compacto e a família  $\{\overline{Int\gamma_i} \cap \overline{A}, \gamma_i \in S\}$  tem a propriedade da interseção finita.

Seja  $q \in \delta$ . Temos então que  $\omega(q)$  é uma órbita periódica pelo Teorema de Poincaré-Bendixson e  $\omega(q) \in \delta$  (pois  $\delta$  é invariante e não contém pontos singulares), e assim,  $\Omega(q)$  é cota superior de  $S$ .

Pelo Lema de Zorn,  $\Gamma$  contém um elemento maximal  $M$ , com  $\gamma \leq M \Rightarrow \overline{IntM} \subseteq \overline{Int\gamma}, \forall \gamma \in \Gamma$ .

Então,  $M$  é órbita periódica internamente estável.

A outra parte da demonstração é inteiramente análoga, fazendo os devidos ajustes dos conjuntos. ■

**Proposição 3.3.3 (Princípio da Simetria)** *Suponhamos que no sistema (3.1) ocorre*

$$P(x, y) = P(-x, y), \quad Q(-x, y) = -Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

*e a origem é o único ponto singular no eixo  $y$ . Se a órbita  $\gamma$  começa sobre o eixo positivo  $y$  e retorna ao eixo  $y$  negativo, então  $\gamma$  é uma órbita periódica. Se todas as trajetórias próximas à origem possuem essas propriedades, então a origem é um centro.*

Observe que a hipótese de que a órbita comece e retorne ao eixo  $y$  é essencial, como mostra a Figura 2.4.

**Demonstração:** Digamos que  $\gamma$  seja a imagem da trajetória  $f(t) = (x(t), y(t))$  para  $t \in I$ , sendo  $I$  intervalo máximo.

Suponha que  $f(0) = (0, y_0)$  e  $f(t_1) = (0, -y_1)$  para algum  $t_1 > 0$ , sendo  $y_0, y_1 > 0$ . É suficiente mostrar que  $f(-t_1) = f(t_1)$ . Para isso, provamos inicialmente que  $-t_1 \in I$ .

Definamos

$$\begin{cases} u(t) = -x(-t), & \text{com } t \in -I = \{s \in \mathbb{R}; -s \in I\} \\ v(t) = y(-t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Então, por hipótese, verifica-se que:

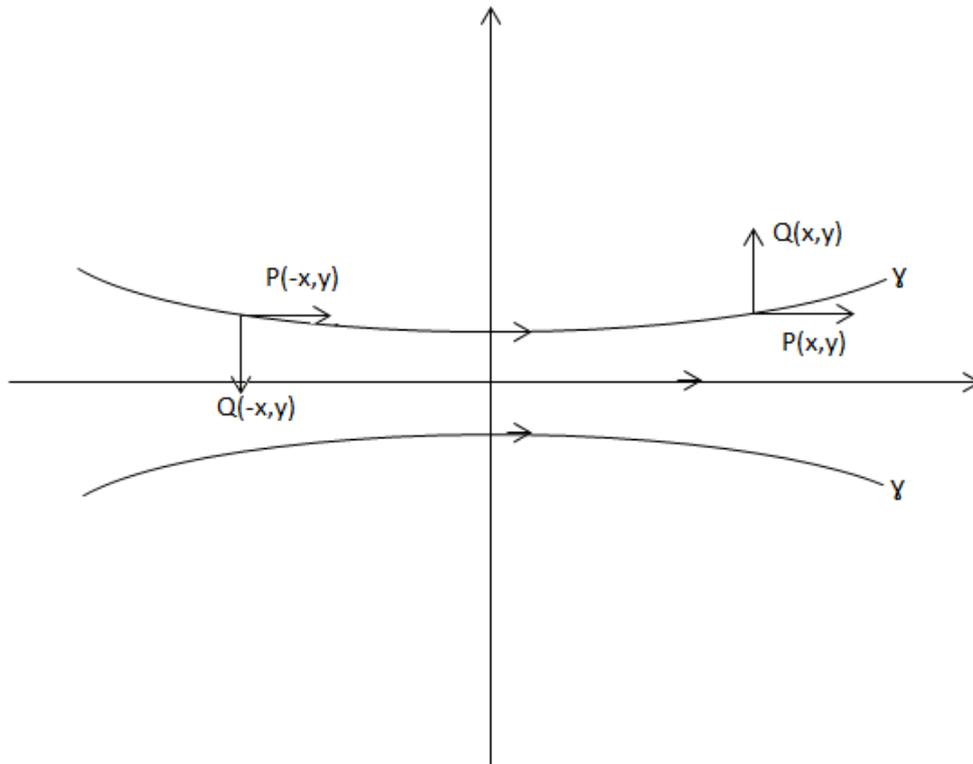
$$\begin{cases} \dot{u}(t) = P(u(t), v(t)), \\ \dot{v}(t) = Q(u(t), v(t)), \\ u(0) = 0, \\ v(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pelo Teorema de Picard, temos  $u(t) = x(t)$  e  $v(t) = y(t)$ , para qualquer  $t \in -I$ , logo  $x(-t) = -x(t)$ ,  $y(t) = y(-t)$ , para qualquer  $t \in -I$ .

Assim, multiplicando a primeira igualdade por  $-1$  e tomando  $t = -t_1$  temos  $-x(t_1) = x(-t_1)$  e  $y(-t_1) = y(t_1) = -y_1$ , mas  $x(t_1) = 0$ , logo  $x(-t_1) = 0$ . Então  $x(-t_1) = 0$  e  $y(-t_1) = -y_1$ .

■

Figura 3.4 – Campo simétrico com relação ao eixo  $y$  que não tem órbitas periódicas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vejamos agora alguns resultados de não-existência de órbitas periódicas. Seja  $F \in C^1(\Delta, \mathbb{R})$  definido no aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ .

**Proposição 3.3.4 (Método de Poincaré das Curvas Tangenciais)** Considere a família de curvas  $F(x, y) = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ . Se a função

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y}$$

tem sinal constante em  $\Delta$  e o conjunto de pontos de  $\Delta$  nos quais

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

não contém uma órbita completa de (3.1), então o sistema (3.1) não possui uma órbita periódica que esteja inteiramente contida em  $\Delta$ .

**Demonstração:** Suponha que

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} \geq 0 \quad (3.4)$$

em  $\Delta$ .

Digamos que  $\gamma$  é a imagem da aplicação  $t \mapsto (x(t), y(t))$  de período  $T > 0$ . Se integramos  $F$  ao longo de  $\gamma$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) dt = F(x(T), y(T)) - F(x(0), y(0)). \end{aligned}$$

Como  $\gamma$  é órbita periódica de período  $T$ , temos então que o lado direito da igualdade é nulo, logo,

$$\int_{\gamma} F = 0$$

Mas daí,

$$0 = \int_{\gamma} F = \int_0^T P(x(t), y(t)) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t)) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) dt.$$

De (3.4) temos que o integrando da integral à direita é  $\geq 0$  em  $[0, T]$ . Logo,  $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$  sobre  $\gamma$ , contradizendo a hipótese. ■

**Teorema 3.3.5 (Bendixson)** *Suponha que a função divergente  $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$  do sistema (3.1) tem sinal constante em uma região simplesmente conexa  $R$ , e não é identicamente nula em qualquer sub-região de  $R$ . Então o sistema (3.1) não tem órbita periódica que se encontra totalmente contida em  $R$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que o sistema (3.1) possua uma órbita periódica  $\gamma \subset R$ . Como  $R$  é simplesmente conexa, então  $\gamma$  e seu interior estão totalmente contidos em  $R$ . Agora pela fórmula de Green temos

$$\int_{\gamma} P dy - Q dx = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.5)$$

Mas  $P dy - Q dx = 0$  ao longo de toda  $\gamma$ , dado que  $\gamma$  é uma órbita. Assim temos que o lado esquerdo de (3.5) é zero, mas o integrando do lado direito tem sinal constante e não é identicamente nulo em  $S$ , logo a integral dupla é diferente de zero, o que gera uma contradição.

**Observação 3.3.6** Com o uso da fórmula de Green, segue que, em qualquer região limitada por órbitas periódicas, a integral da divergência, conforme definido em (3.5) é igual a zero.

**Teorema 3.3.7 (Dulac)** Se existe uma função real  $B$ , de classe  $C^1$ , em uma região simplesmente conexa  $R$  tal que  $\partial(BP)/\partial x + \partial(BQ)/\partial y$  de sinal constante e não nula em qualquer sub-região de  $R$ , então o sistema (3.1) não possui órbita periódica completamente contida em  $R$ .

**Demonstração:** A prova é análoga a do Teorema 3.3.5, utilizando  $BP$  e  $QP$  no lugar de  $P$  e  $Q$ , respectivamente.

**Observação 3.3.8** Chamamos uma função  $B$  como do Teorema 3.3.7 de função de Dulac  $B(x, y)$ , e o método de prova de não existência de órbita periódica, dado no Teorema 3.3.7, é chamado de método da função de Dulac.

Os Teoremas 3.3.5 e 3.3.7 podem ser generalizados da seguinte forma.

**Teorema 3.3.9 (Dulac Generalizado)** Se mudarmos a região  $R$  do Teorema 3.3.5 e no Teorema 3.3.7 por  $n$ -multiplamente conexa (isto é,  $R$  possui uma ou várias curvas exteriores limitadas e  $n - 1$  curvas interiores limitadas), então o sistema (3.1) tem no máximo  $n - 1$  órbitas periódicas que estão inteiramente contidas em  $R$ .

**Demonstração:** A partir da prova do Teorema 3.3.5, sabemos que, se houver uma trajetória fechada  $\gamma$  do sistema (3.1) em  $R$ , então  $\gamma$  deve conter pelo menos uma curva limitada interna  $C$  de  $R$  em seu interior. Da mesma forma, também sabemos que se o interior de  $\gamma$  também contém outras trajetórias fechadas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , então a região no interior de  $\gamma$ , mas no exterior de todas as trajetórias  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , também contém pelo menos uma curva limitada interna  $C$ , por causa da Observação 3.3.8. Dizemos que  $C$  corresponde a  $\gamma$ . Podemos ver que para diferentes  $\gamma$  as curvas correspondentes  $C$  também são diferentes. Portanto, se o número de trajetórias fechadas em  $R$  for superior a  $n - 1$ , o número de conexos de  $R$  deve ser maior que  $n$ . Assim o teorema é provado.

Daremos agora um exemplo da aplicabilidade do Teorema de Dulac. O exemplo pode ser encontrado em X. HUANG, Y. WANG and A. CHENG [15].

**Exemplo 3.3.10 (Um sistema presa-predador cúbico)** Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1 + a_2x - a_3x^2) - kxy, \\ \frac{dy}{dt} = y(-1 + x - y). \end{cases} \quad (3.6)$$

Se  $a_1 + a_2 > a_3$  e  $k \neq 1$ , o sistema (3.6) não tem ciclo limite.

**Demonstração:** Consideramos a função de Dulac  $B(x, y) = x^{-2}y^{-1}$  e seja

$$P(x, y) = x(a_1 + a_2x - a_3x^2) - kxy, \quad Q(x, y) = y(-1 + x - y).$$

Então, temos

$$\operatorname{div}(BP, BQ) = \frac{\partial BP}{\partial x} + \frac{\partial BQ}{\partial y} = -a_1x^{-2}y^{-1} - a_3y^{-1} + (k-1)x^{-2}.$$

Se  $k \neq 1$ ,  $\operatorname{div}(BP, BQ) < 0$ , e em qualquer sub-região do domínio,  $\operatorname{div}(BP, BQ) \neq 0$ . Então pelo Teorema 3.3.7, o sistema (3.6) não possui ciclos limites. ■

**Proposição 3.3.11** Se  $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y \equiv 0$ , isto é,

$$Pdy - Qdx = 0 \tag{3.7}$$

então o sistema (3.1) não tem ciclo indefinido, nem ciclo limite externo e nem ciclo limite interno em  $\Delta$ .

**Demonstração:** Seja a integral geral de (3.7) dada por  $\Phi(x, y) = C$  que representa a equação de uma família de trajetórias do sistema (3.1). Ao longo de cada trajetória,  $\Phi$  tem valor constante, e ao longo de trajetórias diferentes, mas adjacentes,  $\Phi$  não pode ter o mesmo valor. Se houver um ciclo limite  $\gamma$  de (3.1), então cada trajetória em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\gamma$  tem  $\gamma$  como  $\omega(\alpha)$ -limite. Daí pela continuidade de  $\Phi(x, y)$  sabemos que nessa vizinhança  $\Phi(x, y) \equiv C_\gamma$ , o que é impossível. Agora, se  $\gamma$  é ciclo limite indefinido, então em trajetórias não fechadas que cobrem uma região anular aberta próxima de  $\gamma$  na qual  $\Phi(x, y)$  deve ser identicamente igual a uma constante. O que não acontece devido ao teorema de Green para órbitas constantes e por um lado só ter órbitas periódicas. ■

Introduziremos a seguir resultados que permitem localizar órbitas periódicas de campos planares.

Uma função  $R \in C^1(\Delta, \mathbb{R})$  tal que

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in \Delta, \tag{3.8}$$

é o *fator integrante* do campo de vetores  $X$ . A função  $R$  é um fator integrante de  $X$  em  $\Delta$  se, e somente se,  $R$  é a solução da equação diferencial parcial

$$P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)R \tag{3.9}$$

em  $\Delta$ .

A função  $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , é um *fator integrante inverso* do campo de vetores  $X$ , se  $V$  verifica a equação diferencial parcial

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V \quad (3.10)$$

em  $U$ . Notemos que  $V$  satisfaz (3.10) em  $\Delta$  se, e somente se,  $R = 1/V$  satisfaz (3.9) em  $\Delta \setminus \{(x, y) \in \Delta : V(x, y) = 0\}$ .

**Teorema 3.3.12** *Seja  $(P, Q)$  campo de vetores  $C^1$  em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $V = V(x, y)$  uma solução de (3.10). Se  $\gamma$  é um ciclo limite do campo de vetores  $(P, Q)$  no domínio simplesmente conexo de definição de  $V$ , então  $\gamma$  está contido em  $\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}$ .*

**Demonstração:** A existência do fator integrante inverso  $V$ , definido em uma região simplesmente conexa  $U$  implica que o campo de vetores  $(P/V, Q/V)$  é hamiltoniano em  $U \setminus \Sigma$ . Uma vez que o fluxo de um campo vetorial hamiltoniano preserva a área, e em uma vizinhança de um ciclo limite, um fluxo não preserva a área, segue o teorema

■

No Capítulo 4, veremos uma aplicação do Teorema 3.3.12.

## 4 O TEOREMA DO 'AVERAGING' CLÁSSICO

O método do 'Averaging' é uma ferramenta para o estudo de sistemas não lineares com coeficientes periódicos. O método consiste essencialmente em associar ao sistema de EDO's em estudo, um novo sistema chamado de sistema promediado, de modo que cada singularidade do sistema promediado esteja associada a uma órbita periódica do sistema original.

Neste capítulo trataremos apenas do caso do 'Averaging' periódico de primeira ordem. A primeira formalização dessa teoria foi feita em 1928 por Pierre Joseph Louis Fatou. Este capítulo da dissertação está baseado em S. SCHECTER and F. SINGER [14], J.A. SANDERS, F. VERHULST and J. MURDOCK [04] e F. VERHULST [02].

Este capítulo está organizado do seguinte modo. Na Seção 4.1 é feita a apresentação do método do 'Averaging' clássico de primeira ordem. Os resultados preliminares a sua demonstração estão na Seção 4.2. A demonstração do método é feita na Seção 4.3, enquanto que na Seção 4.4 aplicamos o método para estudar a existência e estabilidade de um ciclo limite para a equação de Van der Pol.

### 4.1 O MÉTODO DO 'AVERAGING' PARA CAMPOS DE VETORES SUAVES

Consideremos o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

com  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  um conjunto aberto, limitado e conexo, e  $t \geq 0$ . Além disso, assumimos que  $F : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $R : [0, +\infty) \times D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções suficientemente regulares, sendo  $\epsilon_0 > 0$ . Suponha ainda que  $F$  e  $R$  são  $T$ -periódicas na primeira variável, isto é, existe  $T > 0$  tal que  $F(t + T, x) = F(t, x)$  e  $R(t + T, x, \epsilon) = R(t, x, \epsilon)$ , para todo  $t \in [0, +\infty)$ ,  $x \in D$  e  $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ . No momento apropriado estabeleceremos a regularidade de  $F$  e  $R$ .

Simplificando esse sistema através da eliminação do termo de ordem  $\epsilon^2$  para que o campo se torne autônomo, calcula-se a média com respeito a  $t$  do sistema. Então, a ideia do método é considerar a velocidade média do fluxo, pois assim, podemos definir um novo sistema que é autônomo e então comparar as respectivas soluções.

O **sistema promediado** associado ao sistema (4.1) é definido por

$$\begin{cases} \dot{z} &= \epsilon f^0(z), \\ z(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

onde a função  $f^0 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por

$$f^0(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, z) dt. \quad (4.3)$$

Chamamos  $f^0$  de **função promediado** associada a (4.2).

O principal objetivo é obter informações sobre existência e estabilidade de órbitas periódicas do sistema (4.1) através das singularidades do sistema (4.2). Mais precisamente, enunciamos a seguir o principal teorema deste capítulo.

**Teorema 4.1.1 ('Averaging' de primeira ordem clássico)** Consideremos o sistema:

$$\dot{x}(t) = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon), \quad (4.4)$$

com  $t \geq 0, x \in D, D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $F : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $R : [0, +\infty) \times D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $\epsilon_0 > 0$ . Suponha que:

(1) as funções  $F, R, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2$  e  $\partial R/\partial x$  são contínuas e limitadas por uma constante  $M > 0$ ;

(2) as funções  $F$  e  $R$  são  $T$ -periódicas na primeira variável.

Então são válidas as seguintes afirmações:

(a) se  $p$  é um zero da função promediada (4.3) tal que

$$\det \left( \frac{\partial f^0}{\partial z} \right) \Big|_{z=p} \neq 0, \quad (4.5)$$

então existe uma solução  $T$ -periódica  $t \mapsto x(t, \epsilon)$  do sistema (4.4) tal que  $x(0, \epsilon) \rightarrow p$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ;

(b) se todos os autovalores de

$$\left( \frac{\partial f^0}{\partial z} \right) \Big|_{z=p} \quad (4.6)$$

possuem parte real negativa então, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeno, a solução periódica  $t \mapsto x(t, \epsilon)$  correspondente do sistema (4.4) é assintoticamente estável, e se um dos autovalores de (4.6) possui parte real positiva então  $t \mapsto x(t, \epsilon)$  é instável.

Aqui o símbolo  $\partial F/\partial x$  denota a matriz  $n \times n$  formada pelas  $n$  últimas colunas da matriz jacobiana de  $F$ , análogo para  $\partial R/\partial x$ . O símbolo  $\partial^2 F/\partial x^2$  denota a matriz hessiana de  $F$ .

A ideia da prova do Teorema 4.1.1 consiste em introduzir uma mudança de coordenadas próxima da identidade que é usada para simplificar a equação (4.1). A hipótese (4.5) é utilizada para aplicar o Teorema da Função Implícita, o qual nos remete a uma vizinhança onde existe uma solução periódica de (4.1).

Antes da demonstração do Teorema 4.1.1, vejamos alguns resultados de caráter técnico que nos auxiliarão nessa tarefa.

## 4.2 RESULTADOS ÚTEIS

Os próximos resultados serão utilizados na demonstração do Teorema 4.1.1. Aqueles que consideramos mais conhecidos terão suas demonstrações omitidas.

**Teorema 4.2.1** *Seja  $f$  contínua no aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R} \times E \times A$ , com  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $D_2 f$  contínua em  $\Delta$ . Então, para  $\lambda$  fixo, a solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  de*

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

*é única e admite derivada parcial  $D_2 f$  com relação a  $x_0$ . Mais ainda, a aplicação  $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_2 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  é contínua no seu domínio*

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t, t_0, x_0, \lambda) \in \Delta, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\},$$

e

$$x(t) = D_2 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, t_0, x_0, \lambda),$$

para todo  $1 \leq k \leq \dim E$ , é solução de

$$\dot{x} = J(t)x, \quad x(t_0) = e_k,$$

onde

$$J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda).$$

A demonstração pode ser encontrada em J. SOTOMAYOR [09].

**Teorema 4.2.2** *Consideremos as funções  $F, R$  e  $f^0$  dadas nos sistemas (4.1) e (4.2). Suponhamos que  $F$  é lipschitziana na segunda variável e  $R$  é contínua. Então existe uma*

constante  $C > 0$  tal que

$$\|x(t, \epsilon) - z(t, \epsilon)\| \leq C\epsilon \text{ para } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon}$$

onde  $x(t, \epsilon)$  e  $z(t, \epsilon)$  são soluções de (4.1) e (4.2) respectivamente.

A prova do Teorema 4.1.1 que apresentaremos aqui, utiliza uma mudança de coordenadas próxima da identidade que transforma o sistema (4.4) em um sistema da forma

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + \epsilon^2 \tilde{S}(t, z, \epsilon),$$

sendo  $\tilde{S}$  uma função apropriada. Para isso precisamos do resultado que segue, que pode ser encontrado em J.A. SANDERS, F. VERHULST and J. MURDOCK [04].

**Teorema 4.2.3 (Perturbação da Identidade)** *Considere um aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $\epsilon^* > 0$ . Seja  $\mu : \mathbb{R} \times D \times [0, \epsilon^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe  $M_\mu > 0$  tal que*

$$\|\mu(t, y_1, \epsilon) - \mu(t, y_2, \epsilon)\| \leq M_\mu \|y_1 - y_2\|, t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in D, \epsilon \in [0, \epsilon^*].$$

Então existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que, para cada  $t \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$  fixados, a aplicação

$$U(t, y, \epsilon) = y + \epsilon \mu(t, y, \epsilon), y \in D,$$

tem uma inversa da forma

$$W(t, x, \epsilon) = x + \epsilon v(t, x, \epsilon),$$

definida em um conjunto  $U(t, D, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ , sendo  $v$  uma aplicação de classe  $C^1$ .

**Demonstração:** Escolha  $\epsilon_1$  tal que  $0 < \epsilon_1 < \min\{\epsilon^*, 1/M_\mu\}$ . Começamos demonstrando a injetividade de  $U$  para  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon_0 \in [0, \epsilon_1]$  fixados. Dados  $y_1, y_2 \in D$  com  $y_1 \neq y_2$ , temos

$$\begin{aligned} \|U(t_0, y_1, \epsilon_0) - U(t_0, y_2, \epsilon_0)\| &= \|y_1 - y_2 - \epsilon_0(\mu(t_0, y_2, \epsilon_0) - \mu(t_0, y_1, \epsilon_0))\| \\ &\geq \|y_1 - y_2\| - \epsilon_0 \|\mu(t_0, y_2, \epsilon_0) - \mu(t_0, y_1, \epsilon_0)\| \\ &\geq \|y_1 - y_2\| - \epsilon_0 M_\mu \|y_1 - y_2\| \\ &= (1 - \epsilon_0 M_\mu) \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \epsilon_0 M_\mu < 1$  segue a injetividade. Logo, a função  $U$  tem inversa única definida em um conjunto  $U(t_0, D, \epsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$ .

Utilizaremos o Teorema da Função Implícita para demonstrar a regularidade e a forma da função inversa. Considere a aplicação

$$V(t, y, \epsilon, x) = x - y - \epsilon \mu(t, y, \epsilon), t \in \mathbb{R}, y \in D, \epsilon \in [0, \epsilon_1], x \in \mathbb{R}^n.$$

Para cada  $y_0 \in D$ , tome  $x_0 = y_0 + \epsilon_0 v(t_0, y_0, \epsilon_0)$ , temos então que  $V(t_0, y_0, \epsilon_0, x_0) = 0$ . Como

$$\frac{\partial V}{\partial y}(t_0, y_0, 0, x_0) = -I_n,$$

segue do Teorema da Função Implícita que existem vizinhanças  $V_0$  e  $I_0 \times J_0 \times W_0$ , de  $y_0$  e  $(t_0, 0, x_0)$  respectivamente, e uma aplicação  $h : I_0 \times J_0 \times W_0 \rightarrow V_0$  de classe  $C^1$ , tais que

$$x - h(t, \epsilon, x) - \epsilon \mu(t, h(t, \epsilon, x), \epsilon) = 0, (t, \epsilon, x) \in I_0 \times J_0 \times W_0,$$

obtendo assim

$$h(t, \epsilon, x) = x - \epsilon \mu(t, h(t, \epsilon, x), \epsilon), (t, \epsilon, x) \in I_0 \times J_0 \times W_0.$$

É claro que podemos supor que  $J_0 \subset [0, \epsilon_1]$ .

Como já demonstramos que a função  $U$  tem uma inversa global, esta coincide com cada uma das inversas locais obtidas em seus respectivos domínios. ■

Os próximos resultados serão úteis na demonstração do item (b) do Teorema 4.1.1.

**Lema 4.2.4 (Desigualdade de Gronwall)** *Sejam  $\varphi, \psi : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não-negativas definidas no intervalo  $[t_0, t_0 + a]$ , sendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$  constantes. Suponha que*

$$\varphi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) \varphi(s) ds + \delta_2, t \in [t_0, t_0 + a], \quad (4.7)$$

onde  $\delta_i > 0$  para  $i = 1, 2$ . Então

$$\varphi(t) \leq \delta_2 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds}, t \in [t_0, t_0 + a].$$

A demonstração pode ser vista em J. K. HALE [06].

Estabelecemos a seguir o decaimento exponencial das soluções de sistemas lineares com coeficientes constantes, no caso em que todos os autovalores da matriz do sistema têm parte real negativa.

**Proposição 4.2.5** *Considere o sistema diferencial linear*

$$\dot{x} = Ax, \quad (4.8)$$

onde  $A$  é uma matriz real constante  $n \times n$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Então valem as seguintes afirmações:

1. (a) se  $\text{Re } \lambda_k < 0$  para  $k = 1, \dots, n$ , então para cada solução  $x$  de (4.8) tal que  $x(t_0) = x_0$ , com  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários, existem duas constantes positivas  $C$  e  $\mu$  satisfazendo

$$\|x(t)\| \leq C \|x_0\| e^{-\mu t}, t \geq 0.$$

2. (b) se  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$  para  $k = 1, \dots, n$ , então toda solução  $x$  é limitada para  $t \geq 0$ . Mais precisamente existe  $C > 0$  tal que

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|, t \geq t_0;$$

3. (c) se existe um autovalor  $\lambda_k$  com  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , então para cada vizinhança  $V$  da origem, existe uma solução  $x$  do sistema (4.8) tal que  $x(0) \in V$  e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

Seguindo a noção de estabilidade no sentido de Liapunov, na Proposição 4.2.5 temos que soluções como as dos itens (a) e (b) são casos especiais de soluções assintoticamente estáveis e estáveis, respectivamente. Uma solução como na afirmação (c) é chamada de instável.

O próximo resultado também é conhecido como Teorema de Poincaré-Liapunov, e estende a Proposição 4.2.5 localmente para sistema não lineares.

**Teorema 4.2.6** *Sejam  $D$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem,  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $t_0 \in I, x_0 \in D$  arbitrários. Considere o sistema diferencial*

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.9)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A$  é uma matriz real constante  $n \times n$  com todos os seus autovalores com parte real negativa,  $B$  é uma matriz real  $n \times n$  cujas entradas são contínuas em  $I$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ . Suponha que a função  $f$  seja contínua e lipschitziana em  $x$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{\|x\|} = 0 \text{ uniforme em } t,$$

então existem constantes positivas  $C, \delta$  e  $\mu$  tais que  $\|x_0\| \leq \delta$  implica

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} \text{ para } t \geq t_0.$$

Apresentaremos a seguir o Teorema de Floquet e algumas de suas consequências. Maiores detalhes podem ser encontrados em J. K. HALE [06]. Consideremos agora o sistema linear diferencial da forma

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (4.10)$$

onde  $A$  é uma matriz real  $n \times n$ , com entradas contínuas em  $\mathbb{R}$  e  $T$ -periódicas.

Observe que mesmo  $A$  sendo periódica, as soluções do sistema (4.10) podem não manter essa propriedade, como mostra o exemplo  $\dot{x} = (1 + \operatorname{sen} t)x$ , cujas soluções são da

forma  $x(t) = ce^{t-cost}$ .

O próximo resultado, geralmente chamado Teorema de Floquet, diz que a matriz fundamental do sistema (4.10) pode ser escrita como um produto de uma matriz  $T$ -periódica e uma matriz não periódica.

**Teorema 4.2.7** *Considere o sistema linear diferencial (4.10) sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$ , com entradas contínuas e  $T$ -periódicas. Então, cada matriz fundamental  $\Phi$  do sistema (4.10) pode ser escrita como um produto de duas matrizes  $n \times n$*

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $P$  é  $T$ -periódica e  $B$  é uma matriz constante.

O próximo resultado permite obter informações do sistema (4.10) a partir de um sistema de coeficientes constantes.

**Corolário 4.2.8** *A mudança de coordenadas  $x \mapsto P(t)x$  transforma o sistema (4.10) no sistema de coeficientes constantes*

$$\dot{x} = Bx.$$

**Definição 4.2.9** *(Matriz de monodromia) Uma matriz de monodromia do sistema (4.10) é qualquer matriz não singular  $C$  tal que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)C, t \in \mathbb{R}$ , sendo  $\Phi$  uma matriz fundamental de (4.10).*

**Definição 4.2.10** *(Multiplicadores característicos) Os multiplicadores característicos são os autovalores de uma matriz de monodromia  $C$ .*

**Observação 4.2.11** *Se  $\Phi$  e  $\Psi$  são matrizes fundamentais de (4.10) e  $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , então existe matriz não singular  $D$  tal que  $\Psi(t) = \Phi(t)D$ . Logo  $\Psi(t+T) = \Phi(t+T)D = \Phi(t)CD = \Psi(t)D^{-1}CD$  e assim  $D^{-1}CD$  é matriz monodromia relativamente a  $\Psi(t)$ .*

Assim as matrizes de monodromia relativas a matrizes fundamentais distintas são similares, possuindo então os mesmos autovalores. Concluimos que os multiplicadores característicos são unicamente determinados.

**Observação 4.2.12** *(Expoente Característico) Um expoente característico é qualquer número complexo  $\lambda$  tal que  $e^{\lambda T}$  é multiplicador característico.*

Verifica-se que sempre podemos escolher os expoentes característicos como os autovalores de uma matriz  $B$  satisfazendo  $C = e^{TB}$ .

Apresentamos a seguir uma versão do Teorema 4.2.6 para sistemas periódicos. O resultado pode ser encontrado em J. K. HALE [06].

**Proposição 4.2.13** *Considere o sistema diferencial*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (4.11)$$

em que  $A$  é uma matriz real  $n \times n$  com entradas contínuas e  $T$ -periódicas,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua na primeira variável e numa vizinhança da origem na segunda variável. Suponha que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{\|x\|} = 0 \text{ uniforme em } t.$$

Se a parte real de todos os expoentes característicos do sistema

$$\dot{y} = A(t)y \quad (4.12)$$

são negativos, então a solução  $x = 0$  do sistema (4.11) é assintoticamente estável.

### 4.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DO 'AVERAGING'

Finalmente, passamos à prova do Teorema 4.1.1.

**Demonstração: (Afirmção (a)).**

Introduzimos a função  $T$ -periódica:

$$\mu(t, x) = \int_0^t (F(s, x) - f^0(x)) ds, \quad t \geq 0, x \in D,$$

Afirmamos que

$$\|\mu(t, x)\| \leq 2MT, \quad t \geq 0, x \in D, \quad (4.13)$$

onde  $M$  e  $T$  são dados no enunciado do Teorema 4.1.1.

De fato, para  $0 \leq t \leq T$  e  $x \in D$  temos:

$$\begin{aligned} \|\mu(t, x)\| &= \left\| \int_0^t (F(s, x) - f^0(x)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t F(s, x) ds - \int_0^t f^0(x) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t F(s, x) ds \right\| + \left\| \int_0^t f^0(x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(s, x)\| ds + \int_0^t \|f^0(x)\| ds \\ &\leq \int_0^t M ds + \int_0^t \|f^0(x)\| ds. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\|f^0(x)\| = \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|F(s, x)\| ds \leq \frac{1}{T} \int_0^T M ds = \frac{MT}{T} = M.$$

Assim,

$$\|\mu(t, x)\| \leq 2 \int_0^t M ds = 2M \int_0^t ds,$$

logo

$$\|\mu(t, x)\| \leq 2MT, 0 \leq t \leq T. \quad (4.14)$$

Se  $t > T$ , temos que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < t - mT \leq T$ . Logo,

$$\mu(t, x) = \sum_{j=1}^m \int_{(j-1)T}^{jT} (F(s, x) - f^0(x)) ds + \int_{mT}^t (F(s, x) - f^0(x)) ds.$$

Como  $F$  e  $f^0$  são  $T$ -periódicas, para  $j = 1, 2, \dots, m$ , segue que:

$$\mu(t, x) = m \int_0^T (F(s, x) - f^0(x)) ds + \int_0^{t-mT} (F(s, x) - f^0(x)) ds.$$

Da definição de  $f^0$  resulta que a primeira integral do lado direito da igualdade acima é zero.

Logo

$$\mu(t, x) = \int_0^{t-mT} (F(s, x) - f^0(x)) ds, \quad (4.15)$$

provando a afirmação, por ser reduzida ao caso em que  $0 \leq t \leq T$ . De (4.14) segue então (4.13).

Afirmamos agora que

$$\left\| \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(t, x) \right\| \leq 2MT, t \in \mathbb{R}, x \in D. \quad (4.16)$$

De fato, para cada  $j = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{R}$  e  $x \in D$  temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(t, x) \right\| &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^t (F(s, x) - f^0(x)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, x) - \frac{\partial f^0}{\partial x_j}(x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \left\| \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, x) - \frac{\partial f^0}{\partial x_j}(x) \right\| ds \\ &\leq \int_0^t \left\| \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, x) \right\| ds + \left\| \int_0^t \frac{\partial f^0}{\partial x_j}(x) \right\| ds, \end{aligned}$$

logo

$$\left\| \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(s, x) \right\| \leq MT + \int_0^t \left\| \frac{\partial f^0}{\partial x_j}(x) \right\| ds. \quad (4.17)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f^0}{\partial x_j}(x) \right\| &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, x) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, x) \right\| ds \leq M. \end{aligned}$$

Portanto, de (4.17) segue que

$$\left\| \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(s, x) \right\| \leq MT + M.$$

Como podemos supor que  $T \geq 1$ , segue (4.16).

Diminuindo  $D$  se necessário, podemos supor que  $p \in D$  e que  $D$  é um aberto conexo com fecho compacto. De (4.16) segue que podemos aplicar o Teorema do Valor Médio e concluir que  $\mu$  é uma função lipschitziana na segunda variável. Assim, pelo Teorema 4.2.3, estabelecemos a mudança de variável:

$$x(t) = z(t) + \epsilon \mu(t, z(t)), \quad (4.18)$$

no qual  $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$  e  $\epsilon_1$  é dado no Teorema 4.2.3. Reescreveremos o sistema (4.4) na variável  $z$ . Para simplificar a notação omitiremos a dependência de  $x$  e  $z$  da variável  $t$ . Assim, diferenciando (4.18) em relação a  $t$  e utilizando a equação (4.4) obtemos a equação:

$$\dot{z} + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z) + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \dot{z} = \dot{x} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon),$$

que podemos reescrever como:

$$\left[ I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z). \quad (4.19)$$

Da definição de  $\mu$  segue que

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z) = F(t, z) - f^0(z),$$

logo de (4.19) temos

$$\left[ I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) - \epsilon (F(t, z) - f^0(z)). \quad (4.20)$$

Seja

$$S = \epsilon F(t, z + \epsilon \mu(t, z)) - \epsilon F(t, z) + \epsilon^2 R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon), \quad (4.21)$$

então podemos reescrever (4.20) como:

$$\left[ I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \epsilon f^0(z) + S. \quad (4.22)$$

Como  $\partial^2 F / \partial x^2$  é limitada e  $D$  é conexo com fecho compacto, segue que  $\partial \mu / \partial z$  é lipschitziana na segunda variável. Assim, diminuindo  $\epsilon_1$  se necessário, pelo Teorema 4.2.3 podemos inverter a matriz do lado esquerdo de (4.22). Da fórmula

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - A + A^2 - \dots,$$

válida para matrizes tais que  $\|A\| < 1$ , obtemos então a seguinte expressão:

$$\left[ I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I_n - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) + O(\epsilon^2), \quad (4.23)$$

para  $t \geq 0$  e  $z \in D$ .

Afirmamos que, para  $S$  definida em (4.21) temos  $S = O(\epsilon^2)$ . De fato, como  $\partial F / \partial x$  é limitada e  $D$  é conexo, do Teorema do Valor Médio segue que  $F$  é uma função lipschitziana na segunda variável. Denotamos a constante de Lipschitz por  $L_F > 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} \|S\| &= \|\epsilon F(t, z + \epsilon \mu(t, z)) - \epsilon F(t, z) + \epsilon^2 R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon^2 L_F \|\mu(t, z)\| + \epsilon^2 \|R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\|. \end{aligned}$$

Da estimativa (4.13) e da hipótese 1 do Teorema 4.1.1,

$$\begin{aligned} \|S\| &\leq \epsilon L_F \|\mu(t, z)\| + \epsilon^2 \|R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon^2 L_F 2MT + \epsilon^2 M \\ &\leq \epsilon^2 K, \end{aligned}$$

sendo  $K$  definido por  $K = L_F 2MT + M$ . Assim,

$$S = O(\epsilon^2). \quad (4.24)$$

Portanto, de (4.22), (4.23) e de (4.24) temos que  $\dot{z}$  satisfaz uma equação da forma:

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + S - \epsilon^2 \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) f^0(z) + O(\epsilon^3). \quad (4.25)$$

Utilizando a Fórmula de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} F(t, z + \epsilon\mu(t, z)) - F(t, z) &= \epsilon \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \frac{\partial F}{\partial z}(t, z)\mu(t, z) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Definamos agora  $\tilde{S}(t, z, \epsilon)$  por:

$$\tilde{S}(t, z, \epsilon) = \frac{\partial F}{\partial z}(t, z)\mu(t, z) - \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z)f^0(z) + R(t, z, \epsilon) + O(\epsilon),$$

onde  $R(t, z + \epsilon\mu(t, z), \epsilon) = R(t, z, \epsilon) + O(\epsilon)$ , que é obtido através da Fórmula de Taylor de primeira ordem. Combinando (4.26), (4.21) e  $R(t, z + \epsilon\mu(t, z), \epsilon) = R(t, z, \epsilon) + O(\epsilon)$ , podemos escrever (4.27) como:

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + \epsilon^2 \tilde{S}(t, z, \epsilon). \quad (4.27)$$

Observemos que  $O(\epsilon^3) = \epsilon^2 O(\epsilon)$ , e portanto, podemos incorporar tal símbolo no termo  $\epsilon^2 \tilde{S}(t, z, \epsilon)$ .

Pelas condições de regularidade nas hipóteses, temos que  $\tilde{S}(t, z, \epsilon)$  é de classe  $C^1$  com respeito a  $z$ , e que é  $T$ -periódica pois  $\mu$ ,  $F$ ,  $R$  e o erro  $O(\epsilon^3)$  são  $T$ -periódicos.

Mostraremos a seguir que, pela escolha de  $\mu$ , uma solução  $T$ -periódica  $z$  de (4.27) corresponde a uma solução  $T$ -periódica  $x$  de (4.4). De fato, suponhamos que  $z(t_0) = z(t_0 + T)$ , então

$$x(t_0) - \epsilon\mu(t_0, z(t_0)) = x(t_0 + T) - \epsilon\mu(t_0 + T, z(t_0 + T)).$$

Mas

$$\begin{aligned} \mu(t_0 + T, z(t_0 + T)) &= \int_0^{t_0+T} [F(s, z(t_0 + T)) - f^0(z(t_0 + T))] ds \\ &= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - f^0(z(t_0))] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_0+T} [F(s, z(t_0)) - f^0(z(t_0))] ds \\ &= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - f^0(z(t_0))] ds \\ &\quad + \int_0^T [F(s, z(t_0)) - f^0(z(t_0))] ds \\ &= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - f^0(z(t_0))] ds \\ &= \mu(t_0, z(t_0)). \end{aligned}$$

Assim  $x(t_0) = x(t_0 + T)$ , e portanto  $x$  é  $T$ -periódica.

Escrevendo (4.27) na sua forma integral temos:

$$z(t) = z(0) + \epsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \epsilon^2 \int_0^t \tilde{S}(s, z(s), \epsilon)ds.$$

Como uma solução  $z$  da equação acima é  $T$ -periódica se, e somente se,  $z(0) = z(T)$ , temos que uma solução  $T$ -periódica  $z$  do sistema (4.27) é solução de:

$$\int_0^T f^0(z(s))ds + \epsilon \int_0^T \tilde{S}(s, z(s), \epsilon)ds = 0. \quad (4.28)$$

Considere a aplicação  $w = w(t, a, \epsilon)$  tal que  $\dot{w}$  é a solução do sistema (4.27) com  $w(0, a, \epsilon) = a$ , onde  $a \in D$  e  $\epsilon \in [0, \epsilon_1)$  são quaisquer. Como as soluções de (4.27) dependem diferenciavelmente dos parâmetros (veja o Teorema 4.2.1), segue que  $w$  é de classe  $C^1$ . Observe que se  $\epsilon = 0$  então de (4.25) resulta que  $w$  é a função constante igual a  $a$ , logo

$$\frac{\partial w}{\partial a}(t, a, 0) = I_n, t \in \mathbb{R}, a \in D.$$

Defina

$$h(a, \epsilon) = \int_0^T f^0(w(s, a, \epsilon))ds + \epsilon \int_0^T \tilde{S}(s, w(s, a, \epsilon), \epsilon)ds,$$

então

$$h(p, 0) = \int_0^T f^0(p)ds.$$

Por hipótese  $f^0(p) = 0$ , logo  $h(p, 0) = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial a}(a, 0) &= \frac{\partial}{\partial a} \int_0^T f^0(w(s, a, 0))ds \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial a} f^0(w(s, a, 0))ds \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f^0(w(s, a, 0)) \frac{\partial w}{\partial a}(s, a, 0)ds \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f^0(w(s, a, 0))I_n ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial h}{\partial a}(p, 0) = T \frac{\partial}{\partial x} f^0(p).$$

Da hipótese 2 do Teorema 4.1.1 segue que  $\partial h / \partial a(p, 0)$  é inversível.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto  $V \subset D$ , tal que  $(p, 0) \in V \times [0, \epsilon_1)$  e, para cada  $\epsilon \in [0, \epsilon_1)$ , existe um único  $a \in V$  tal que a solução do sistema (4.27), com  $z(0) = a$ , satisfaz (4.28).

Ainda pelo Teorema da Função Implícita, temos que  $z$  é uma função diferenciável com relação ao parâmetro  $\epsilon$ . Em particular, da sua continuidade, podemos inferir que  $z(\epsilon) \rightarrow p$  se  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Demonstração da (Afirmação (b))** Começamos linearizando a equação (4.4) em uma vizinhança da solução periódica  $t \mapsto x(t, \epsilon)$ . Depois, fazendo uma translação  $x =$

$z + x(t, \epsilon)$ , expandindo com respeito a  $z$ , omitindo os termos não lineares e renomeando as variáveis dependentes novamente por  $x$ , obtemos a equação diferencial linear com coeficientes  $T$ -periódicos

$$\dot{x} = \epsilon A(t, \epsilon)x, \quad (4.29)$$

onde

$$A(t, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x} [F(t, x) + \epsilon R(t, x, \epsilon)]_{x=x_\epsilon(t)}$$

Definimos a matriz  $T$ -periódica

$$B(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, p),$$

e pelo item (a) temos que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(t, \epsilon) = B(t)$ . Definimos também as matrizes

$$B^0 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt \quad \text{e} \quad C(t) = \int_0^T [B(s) - B^0] ds.$$

Note que  $B^0$  é a matriz promediada do sistema linearizado. A matriz  $C(t)$  é  $T$ -periódica e a sua média é zero. Tomando a transformação definida por  $y = (I_n - \epsilon(t))x$  obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon \dot{C}(t)x + (I - \epsilon(t))\dot{x} \\ &\quad - \epsilon(t)x + \epsilon B^0 x (I - \epsilon C(t)) \epsilon A(t, \epsilon)x \\ &\quad [\epsilon B^0 + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t)) - \epsilon^2 C(t)A(t, \epsilon)](I - \epsilon C(t))^{-1}y \\ &\quad \epsilon B^0 y + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t))y + \epsilon^2 S(t, \epsilon)y. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A função  $S(t, \epsilon)$  é  $T$ -periódica e limitada. Notemos que  $A(t, \epsilon) - B(t) \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e também que o expoente característico do sistema diferencial (4.30) depende continuamente do parâmetro  $\epsilon$ . Portanto, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o sinal da parte real dos expoentes característicos é igual ao sinal da parte real dos autovalores da matriz  $B^0$ . Obtemos a mesma conclusão, usando a transformação  $y = (I - \epsilon C(t))x$ , para os expoentes característicos do sistema diferencial (4.29).

Aplicando agora a Proposição 4.2.13, obtemos a estabilidade da solução periódica no caso em que todos os autovalores possuem parte real negativa. Se um autovalor possuir parte real positiva, a transformação de Floquet e a aplicação da Proposição 4.2.7 fornecem a instabilidade da solução periódica.

#### 4.4 EQUAÇÃO DE VAN DER POL

Apresentaremos uma interessante aplicação do Teorema 4.1.1 a equação diferencial de Van der Pol

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

a qual pode ser escrita como campo de vetores suave como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \epsilon(1 - x^2)y.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , esse sistema torna-se

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \epsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= -1 + \epsilon \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Agora tomando  $\theta$  como nova variável independente em (4.32) e expandindo em série de Taylor em  $\epsilon$  obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = -\epsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\epsilon^2).$$

Notemos que o campo de vetores acima está na forma padrão para aplicar o Teorema 4.1.1. Tomando  $x = r$ ,  $t = \theta$ ,  $T = 2\pi$  e  $F(t, x) = -r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$ , temos que

$$F^1(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

A única raiz positiva de  $F^1(r)$  é  $r = 2$ . Como  $dF^1/dr(2) = 1$ , pela afirmação (a) do Teorema 4.1.1, segue que o campo (4.31) tem, para  $|\epsilon| \neq 0$  suficientemente pequeno, um ciclo limite bifurcando da órbita periódica de raio 2 do sistema não perturbado (4.31), com  $\epsilon = 0$ . Além disso, como  $dF^1/dr(2) = 1 > 0$ , pela afirmação (b) do Teorema 4.1.1, este ciclo limite é instável.

## 5 REALIZAÇÃO DE UMA CONFIGURAÇÃO DE CICLOS LIMITES

Neste capítulo mostraremos uma espécie de recíproca do XVI problema de Hilbert, isto é, dado um conjunto finito qualquer de curvas de Jordan no plano, duas a duas disjuntas, é possível exibir explicitamente um sistema de EDO's polinomial, que tem exatamente tais curvas como ciclos limites. Mais do que isso, o resultado estabelece uma relação entre o número de curvas de Jordan dadas e o grau do polinômio que define o sistema de EDO's.

A única ressalva feita sobre o estudo do teorema central deste capítulo é de que não temos controle sobre a estabilidade dos ciclos limites construídos, pois podem ser estáveis, semi-estáveis ou instáveis.

### 5.1 O XVI PROBLEMA DE HILBERT

O XVI problema de Hilbert ainda é um dos poucos problemas em aberto da famosa lista de problemas formulada pelo matemático alemão David Hilbert durante o *Congresso Internacional de Matemática* de Paris em 1900, lista que influenciou, e influencia ainda, muitos matemáticos que buscam por seu nome na história dos números. Ele trata dos ciclos limites em sistemas diferenciais polinomiais e pode ser dividido em duas partes. A segunda parte do problema tem o seguinte enunciado: qual o número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial, e o que podemos dizer sobre as posições relativas dos seus ciclos limites?

J. ÉCALLE [05] e Y. IL'YASHENKO [16] mostraram que o número de ciclos limites de um sistema polinomial planar é sempre finito, mas não existem resultados que mostrem uma cota uniforme para esse número. Em contrapartida, existem exemplos mostrando que se o campo não for polinomial, o número de ciclos limites pode ser infinito.

### 5.2 O TEOREMA PRINCIPAL

O enunciado preciso do resultado principal deste trabalho requer algumas definições preliminares.

#### **Definição 5.2.1**

(a) *Uma configuração de curvas fechadas é um conjunto finito  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  de curvas fechadas, simples e, duas a duas disjuntas do plano.*

(b) Dada uma configuração de curvas fechadas  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ , a curva  $C_i$  é dita primária se não existe curva  $C_j$  da configuração  $C$  contida em  $\text{Int}C_i$ .

(c) Duas configurações de curvas fechadas  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  e  $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$  são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$h \left( \bigcup_{i=1}^n C_i \right) = \bigcup_{i=1}^m C'_i.$$

(d) Um campo vetorial planar  $X$  realiza a configuração de curvas fechadas  $C$  como uma configuração de ciclos limites se o conjunto de todos os ciclos limites de  $X$  for topologicamente equivalente a  $C$ . Neste caso, dizemos que a configuração  $C$  é realizável por  $X$ .

(e) Um ciclo limite é dito algébrico se for uma componente de uma curva algébrica.

Com a nomenclatura acima temos o seguinte resultado, devido a J. LLIBRE and G. RODRÍGUEZ [07].

**Teorema 5.2.2** *Sejam  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  uma configuração de curvas fechadas e  $r$  o número de curvas primárias de  $C$ . Então valem as afirmações:*

(a) a configuração  $C$  é realizável por um campo vetorial planar polinomial,

(b) a configuração  $C$  é realizável como ciclo limite algébrico por um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a  $2(n + r) - 1$ .

A afirmação (a) do Teorema 5.2.2 foi obtida pela primeira vez por S. SCHECTER and F. SINGER [14], mas nesse trabalho os autores não fornecem um campo vetorial polinomial explícito satisfazendo a dada configuração de ciclos limites, tampouco estabelecem a cota apresentada no item (b) do Teorema 5.2.2. Na demonstração do Teorema 5.2.2 será construído explicitamente um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a  $2(n + r) - 1$  realizando  $C$  por ciclos limites algébricos. A ideia do modo como é feita a construção explícita do campo de vetores na demonstração do Teorema 5.2.2 provém de M. I. AL'MUKHAMEDOV [12], que chama a construção de segundo problema inverso da teoria qualitativa das equações diferenciais, mas a referida demonstração tem algumas sutilezas em contraponto com a forma apresentada em M. I. AL'MUKHAMEDOV [12], o que permitem a construção explícita do campo de vetores polinomial.

### 5.3 PRELIMINARES

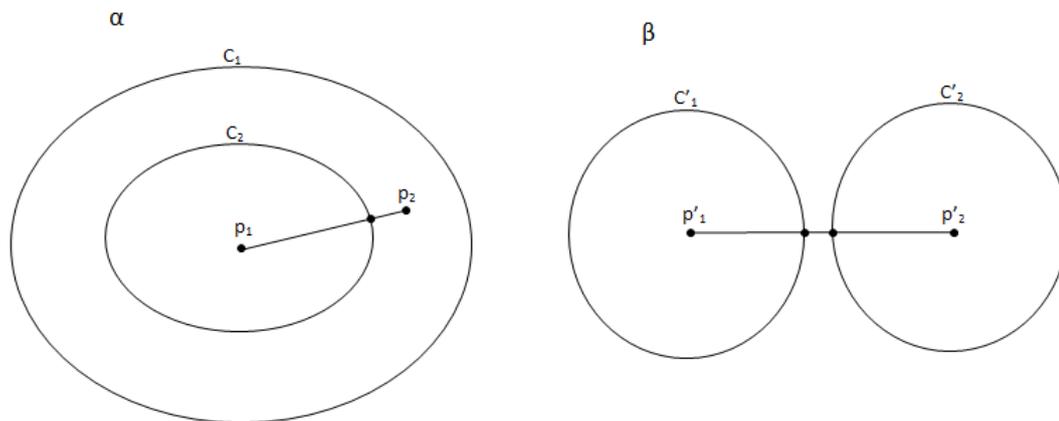
A prova do Teorema 5.2.2 requer alguns preliminares que apresentamos a seguir.

**Observação 5.3.1** Observemos que se  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  e  $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$  são configurações de curvas fechadas topologicamente equivalentes então  $n = m$ .

Apresentaremos a seguir um exemplo de duas configurações de curvas fechadas que não são topologicamente equivalentes, apesar de serem formadas pelo mesmo número de curvas fechadas.

**Exemplo 5.3.2** As configurações de curvas fechadas  $\alpha = \{C_1, C_2\}$  e  $\beta = \{C'_1, C'_2\}$  dadas na Figura 4.1 não são topologicamente equivalentes.

Figura 5.1 – Configurações  $\alpha$  e  $\beta$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

De fato, suponhamos que as configurações  $\alpha$  e  $\beta$  são topologicamente equivalentes. Tome  $C_2 \subset \text{int}C_1$ ,  $p_1 \in \text{int}C_1 \setminus (C_2 \cup \text{Int}C_2)$  e  $p_2 \in \text{Int}C_2$  [ $\alpha$ -Figura 1.1], assim o segmento  $\overline{p_1 p_2}$ , intersecciona  $C_2$ , pelo Teorema da Alfândega. Então, supondo que  $\alpha$  e  $\beta$  são topologicamente equivalentes, temos que o segmento  $\overline{p'_1 p'_2}$ , com  $p'_1 \in \text{Int}C'_1$  e  $p'_2 \in \text{Int}C'_2$ , deve também interseccionar apenas  $C'_2$ . Mas temos que, como por hipótese,  $C'_1$  e  $C'_2$  são disjuntas, e  $C'_2 \subset \text{Ext}C'_1$ , então  $\text{Dist}(C'_1, C'_2) = \epsilon > 0$  logo, o segmento  $\overline{p'_1 p'_2}$  deve interseccionar  $C'_1$  e  $C'_2$ , o que é um absurdo, pois o segmento não deve interseccionar  $C'_1$  em  $\beta$ .

Nosso próximo objetivo é demonstrar que, para efeito de realização de uma dada configuração de curvas fechadas  $C$ , sempre podemos considerar os elementos de  $C$  como círculos. Para isso necessitamos do:

**Teorema 5.3.3** Dada uma configuração de curvas fechadas  $C$ , existe uma configuração de curvas fechadas  $C' = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$  topologicamente equivalente a  $C$  tal que  $C'_j$  é um círculo, para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

A prova será feita usando uma versão do Teorema de Schonflies para grafos e apresentada no Apêndice.

O teorema a seguir se deve a H. GIACOMINI, J. LLIBRE, and M. VIANO [03] e demonstra que os ciclos limites estão localizados nas curvas de nível de fatores integrantes inversos, quando este existe.

**Teorema 5.3.4** *Seja  $X$  um campo de vetores  $C^1$  definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  um fator integrante inverso de  $X$ . Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $X$ , então  $\gamma$  está contido em  $\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}$ .*

**Demonstração:** Por hipótese, existe um fator integrante inverso  $V$  definido em  $U$ . Então,  $X/V$  é Hamiltoniano em  $U \setminus \Sigma$ . Então  $X/V$  e  $X$  são topologicamente equivalentes. Sabemos que o fluxo de um campo de vetores Hamiltoniano preserva área (o Teorema de Liouville garante que se um campo de classe  $C^1$  tem divergência nula, então seu fluxo preserva volume) e em uma vizinhança de um ciclo limite a área não é preservada, assim, temos que o ciclo limite  $\gamma \not\subset U \setminus \Sigma$ , portanto,  $\gamma \subset \Sigma$  ■

#### 5.4 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.2.2

Seja  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  a configuração de curvas fechadas dada no enunciado do Teorema 5.2.2. Do Teorema 5.3.3 podemos supor que cada curva  $C_j, j = 1, \dots, n$ , é dada pela circunferência definida por

$$f_j(x, y) = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 - r_j^2 = 0, \quad (5.1)$$

sendo  $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$  e  $r_j > 0$  são escolhidos de modo conveniente. Renomeando as curvas, podemos supor que  $C_j$  é uma curva primária, para  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Para cada curva primária  $C_j, j = 1, \dots, r$ , definimos  $p_j = (x_j, y_j)$  e as funções complexas dadas por

$$\begin{aligned} f_{n+2j-1}(x, y) &= (x - x_j) + i(y - y_j) \\ f_{n+2j}(x, y) &= (x - x_j) - i(y - y_j). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por conveniência, no momento apropriado faremos uma restrição no domínio das funções acima para  $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$ , onde  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{j=1}^r (-\infty, x_j] \times \{y_j\}$ .

Definamos agora o campo de vetores  $X$  abaixo e provaremos que satisfaz a condição (b) do Teorema 5.2.2. Seja

$$X(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde

$$P(x, y) = - \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ . Além disso,  $\lambda_{n+2j-1} = 1 + i$  e  $\lambda_{n+2j} = 1 - i$  para  $j = 1, \dots, r$ .

Mostraremos a seguir que  $P$  e  $Q$  são polinômios reais de grau  $\leq 2(n+r) - 1$ . Faremos a prova para  $P$ , e de forma análoga é mostrado que  $Q$  é polinômio real. Reescrevendo  $P$  da forma

$$P = - \sum_{k=1}^n \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) 2y - \sum_{k=n+1}^{n+2r} \lambda_k \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l.$$

temos

$$P = - \sum_{k=1}^n \left( \prod_{l=1, l \neq k}^n f_l \right) \left( \prod_{l=n+1}^{n+2r} f_l \right) 2y - \sum_{k=n+1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1}^n f_l \right) \left( \prod_{l=n+1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right). \quad (5.3)$$

No primeiro somatório de (5.3), para  $k = 1, 2, \dots, n$ , de (5.1) temos que  $\prod_{l=1, l \neq k}^n f_l$  é um polinômio real de grau  $2(n-1)$ , enquanto que  $\prod_{l=n+1}^{n+2r} f_l$  é um polinômio real de grau  $2r$ , pois

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

Como  $2y$  é um polinômio de grau 1, o primeiro somatório em (5.3) é um polinômio real de grau  $\leq 2(n-1) + 2r + 1 = 2(n+r) - 1$ .

Denotamos o segundo somatório de (5.3) por  $S$ . Com o objetivo de analisarmos  $S$ , para cada  $k = 1, 3, \dots, 2r-1$ , definimos:

$$h_k = \prod_{\substack{l=n+1, \\ l \neq n+k \\ l \neq n+k+1}}^{n+2r-1} f_l,$$

que é um polinômio real de grau  $2(r-1)$  por (5.4).

Então

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=n+1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1}^n f_l \right) \left( \prod_{\substack{l=n+1 \\ l \neq k}}^{n+2r} f_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{n+k} \left( \prod_{l=1}^n f_l \right) \left( \prod_{\substack{l=n+1 \\ l \neq n+k}}^{n+2r} f_l \right) \\
&= \prod_{l=1}^n f_l \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{n+k} \left( \prod_{\substack{l=n+1 \\ l \neq n+k}}^{n+2r} f_l \right).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Mas por definição, para  $k = 1, 2, \dots, 2r - 1$  temos

$$\lambda_{n+k} f_{n+k+1} = \overline{\lambda_{n+k+1} f_{n+k}},$$

logo

$$\begin{aligned}
S &= \prod_{l=1}^n f_l \sum_{\substack{k=1, \\ k=2n-1}}^{2r-1} ((1+i)f_{n+k+1} + (1-i)f_{n+k}) \prod_{\substack{l=n+1, \\ l \neq n+k \\ l \neq n+k+1}}^{n+2r} f_l \\
&= \prod_{l=1}^n f_l \sum_{\substack{k=1, \\ k=2n-1}}^{2r-1} 2 \operatorname{Re} [(1+i)f_{n+k+1}] h_k.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

De (5.2) verifica-se que  $\operatorname{Re} [(1+i)f_{n+k+1}]$  é um polinômio real de grau 1, e de (5.1) segue que  $\prod_{l=1}^n f_l$  é um polinômio real de grau  $2n$ . Portanto,  $S$  é um polinômio real de grau  $2n+1+2(r-1) = 2(n+1)-1$ . Isso prova que  $P$  é um polinômio real de grau  $\leq 2(n+r)-1$ .

Resta mostrar que o conjunto de órbitas periódicas de  $X$  é igual a  $C$  e que cada elemento de  $C$  é um ciclo limite de  $X$ . Para isso introduziremos funções que permitam o uso de Teorema 5.3.4.

Consideremos agora a função definida em  $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$  por

$$\tilde{H} = f_1^{\lambda_1} \dots f_n^{\lambda_n} \cdot f_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \dots f_{n+2r-1}^{\lambda_{n+2r-1}} \cdot f_{n+2r}^{\lambda_{n+2r}} = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}.$$

Mostraremos que  $\tilde{H}$  é real e dada por

$$\tilde{H} = A(x, y)B(x, y)C(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega},$$

onde

$$A(x, y) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2], \quad (5.7)$$

$$B(x, y) = \prod_{j=1}^r [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2], \quad (5.8)$$

$$C(x, y) = \exp \left( -2 \sum_{j=1}^r \arg \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)} \right). \quad (5.9)$$

De (5.1) segue imediatamente que o produto dos primeiros  $n$  fatores de  $\tilde{H}$  formam exatamente  $A$ .

Para a justificativa de  $B$  e  $C$ , consideremos  $1 \leq j \leq r$ , e  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$ . Defina  $z_j = x - x_j + i(y - y_j)$ . De (5.2),

$$f_{n+2j-1}^{n+2j-1}(x, y) \cdot f_{n+2j}^{n+2j}(x, y) = [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] [((x - x_j) + i(y - y_j))^i ((x - x_j) - i(y - y_j))^{-i}],$$

logo de (5.4), temos

$$f_{n+2j-1}^{n+2j-1}(x, y) \cdot f_{n+2j}^{n+2j}(x, y) = [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] z_j^i \bar{z}_j^{-i}.$$

Assim, tomando  $A$  como em (5.7), resulta

$$\tilde{H}(x, y) = A(x, y) \prod_{j=1}^r [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \prod_{j=1}^r z_j^i \bar{z}_j^{-i}.$$

Portanto, tomando  $B$  como em (5.8), temos

$$\tilde{H}(x, y) = A(x, y) B(x, y) \prod_{j=1}^r \left( \frac{z_j}{\bar{z}_j} \right)^i.$$

Podemos escrever  $z_j$  com  $r_0 e^{i\theta}$ , com  $r_0 > 0$ . Então, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$  com  $x \neq x_j$ , temos

$$\left( \frac{z_j}{\bar{z}_j} \right)^i = \left( \frac{r_0 e^{i\theta}}{r_0 e^{-i\theta}} \right)^i = \left( \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \right)^i = (e^{2i\theta})^i,$$

como  $x \neq x_j$  temos que  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , logo pela definição de potência complexa

$$\left( \frac{z_j}{\bar{z}_j} \right)^i = e^{i \operatorname{Log} e^{2i\theta}},$$

onde  $\text{Log}$  denota o ramo principal do logaritmo complexo. Segue que

$$\left(\frac{z_j}{\bar{z}_j}\right)^i = e^{2i\theta}. \quad (5.10)$$

Se  $x = x_j$ , então  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e

$$\left(\frac{z_j}{\bar{z}_j}\right)^i = \left(\frac{i(y - y_j)}{-i(y - y_j)}\right)^i = (-1)^i = (e^{i\pi})^i = e^{i \log e^{2i\pi}} = e^{-\pi},$$

logo (5.10) é válido para  $x = x_j$ .

De (5.4) e (5.10) segue que podemos escrever

$$\tilde{H}(x, y) = A(x, y).B(x, y).C(x, y),$$

onde  $C$  é dado por (5.9). Assim, a função  $\tilde{H}$  é claramente real em  $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$ .

Mostraremos agora, que a função  $V$  definida por  $V = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k$  é fator integrante inverso do campo vetorial polinomial  $X$ .

Observemos que da definição de  $V$  e de (5.4)

$$V(x, y) = A(x, y) \prod_{j=1}^r ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.11)$$

Logo  $V$  é uma função polinomial real definida em todo  $\mathbb{R}^2$ .

Embora  $B$  e  $C$  sejam positivas, a função  $A$  pode assumir valores negativos, logo o mesmo ocorre com  $\tilde{H}$ . Assim, tomamos  $R > 0$  suficientemente grande de modo que  $C_j \subset B[0, R]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Então  $\tilde{H} > 0$  no aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  definido por  $(\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}) \cap (\mathbb{R}^2 - B[0, R])$ . Defina então  $H = \text{Log} \tilde{H}$ , que é uma função real  $\Omega$ .

Provemos agora que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q}{V}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{-P}{V}, \quad (5.12)$$

em  $\Omega$ , ou seja, que  $H$  é uma função hamiltoniana de  $X/V$  em  $\Omega$ .

Observemos que, pela Regra de Leibniz para derivação do produto,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial(\text{Log} \tilde{H})}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{H}} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}} \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k f_k^{\lambda_k - 1} \frac{\partial f_k}{\partial x} \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l^{\lambda_l} \right) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{1}{f_k}$$

e

$$\frac{Q}{V} = \frac{\sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial x}}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k} = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{1}{f_k}.$$

Daí segue a primeira igualdade em (5.12). A segunda é análoga e terá sua demonstração omitida.

De (5.12) obtemos

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = V \left( -\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right). \quad (5.13)$$

Por outro lado, podemos reescrever (5.12) da forma

$$P = -V \frac{\partial H}{\partial y}, Q = V \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Derivando a primeira igualdade com relação a  $x$ , a segunda com relação a  $y$  e somando os resultados obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (5.14)$$

De (5.13) e de (5.14) segue que  $V$  é um fator integrante inverso de  $X$  em  $\Omega$ , ou seja, que

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V, \quad (5.15)$$

em  $\Omega$ . Como  $P, Q$  e  $V$  são polinômios, a igualdade (5.15) é válida em  $\mathbb{R}^2$ .

Pelo Teorema 5.3.4 os ciclos limites de  $X$ , se existirem, estão contidos no conjunto  $V = 0$ . De (5.11) resulta

$$V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left( \bigcup_{i=1}^n C_i \right) \cup \{p_1, \dots, p_r\} \quad (5.16)$$

Assim, temos que se  $X$  possui ciclos limites, eles devem ser os círculos  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Resta mostrar que os círculos  $C_i$  são ciclos limites.

Mostraremos agora que sobre cada  $C_i$  não existe um ponto singular de  $X$ . Para isso, suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto singular de  $X$  em  $C_i$ , para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ , isto é

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = f_i(x_0, y_0) = 0,$$

logo, da definição de  $P$  e  $Q$

$$P(x_0, y_0) = -\lambda_i \left( \prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

e

$$Q(x_0, y_0) = \lambda_i \left( \prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Como  $f_l(x_0, y_0) \neq 0$ , para todo  $l \neq i$ , obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0.$$

Assim,  $2(x_i - x_0) = 0$  e  $2(y_i - y_0) = 0$ , o que implica que  $x_0 = x_i$  e  $y_0 = y_i$ . Portanto,  $(x_0, y_0)$  é um ponto do centro do círculo  $C_i$ , o que é uma contradição. Então o círculo  $C_i$  é uma órbita de  $X$ .

Para concluir a demonstração, resta mostrar que cada  $C_i, i = 1, 2, \dots$ , é um ciclo limite.

Suponhamos que  $C_i$  não seja ciclo limite. Então existe uma órbita periódica

$$\gamma = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\},$$

diferente de  $C_i, 1 \leq i \leq n$ , e suficientemente próxima de  $C_i$  tal que em  $\text{Int}\gamma$  existem os mesmos pontos de  $\{p_1, \dots, p_r\}$  do que em  $\text{Int}C_i$ . Sem perda de generalidade, assumamos que esses pontos são  $\{p_1, \dots, p_s\}$ .

Note que todos os círculos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  e todos os pontos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  estão na curva  $\tilde{H} = 0$  e que estas são as únicas órbitas de  $X$  nesse nível. Como  $\gamma$  é diferente de  $C_1, \dots, C_n$ , existe  $h \neq 0$  tal que

$$\tilde{H}(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))B(x(t), y(t)) \exp\left(-2 \sum_{j=1}^r \theta_j(t)\right) = h, t \in \mathbb{R},$$

onde

$$\theta_j(t) = \arg\left(\frac{y(t) - y_j}{x(t) - x_j}\right).$$

Notemos que  $t \mapsto A(x(t), y(t))B(x(t), y(t))$  é limitada pois  $\gamma$  é compacto. Pela definição de  $\theta_j$ , os ângulos  $\theta_1(t), \dots, \theta_s(t)$  tendem simultaneamente para  $+\infty$  ou  $-\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , enquanto os ângulos  $\theta_{s+1}(t), \dots, \theta_r(t)$  permanecem limitados quando  $t \rightarrow +\infty$ , como podemos ver na Figura o que é uma contradição. Portanto,  $C_i$  é ciclo limite para o campo vetorial  $X$ . Como  $i \in \{1, \dots, n\}$  é arbitrário, o teorema está provado. ■

Observe que, na demonstração do teorema fornecemos uma expressão explícita para o campo de vetores polinomial satisfazendo o item (b) do Teorema 5.2.2. Claramente, o item (a) segue diretamente do item (b).

Apresentamos a seguir, um exemplo que ilustra o Teorema 5.2.2, o exemplo pode ser encontrado em Y. ILYASHENKO [16].

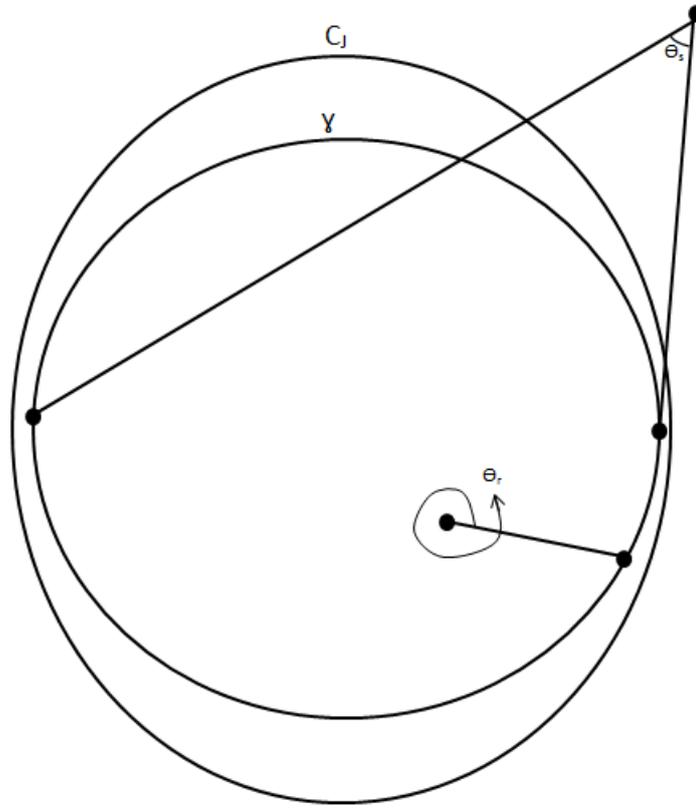
**Exemplo 5.4.1** Considere  $C = \{C_1, C_2\}$ , onde

$$C_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ e } C_2 = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Neste caso, temos que somente a curva  $C_1$  é primária. Defina

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

Figura 5.2 – Ciclo limite  $C_j$  e órbita periódica  $\gamma$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$f_3(x, y) = x + iy \text{ e } f_4(x, y) = x - iy$$

e seja a função

$$\tilde{H}(x, y) = [f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} f_4^{\lambda_4}](x, y) = \prod_{k=1}^4 f_k^{\lambda_k}(x, y),$$

com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1 + i$  e  $\lambda_4 = 1 - i$ . Assim,

$$\tilde{H}(x, y) = ((x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2))(e^{-2 \arctan(y/x)}),$$

De onde vemos que a função  $\tilde{H}$  é uma função real. Defina

$$H = \log \tilde{H} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \log f_k.$$

Notemos que  $H$  é também uma função real.

Definindo o campo de vetores

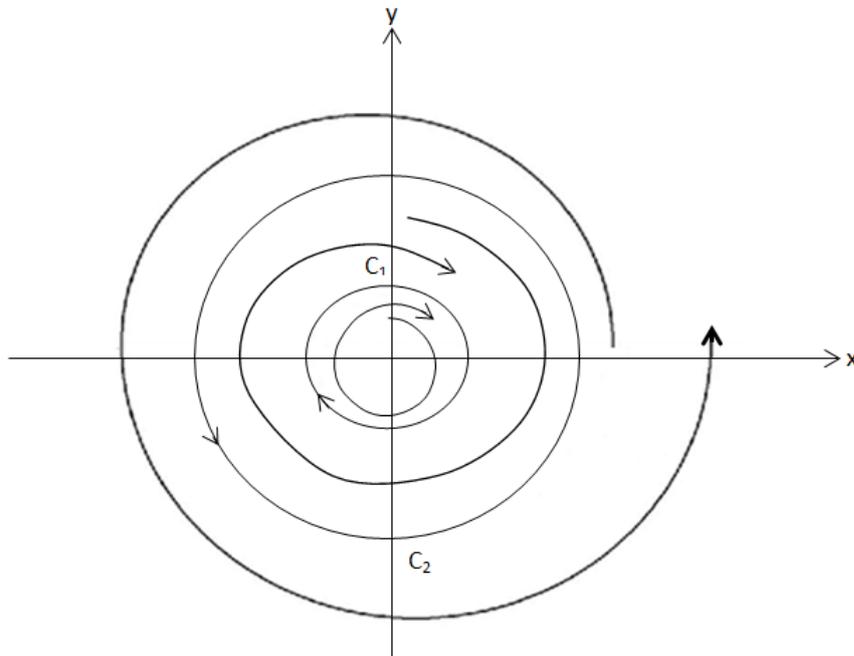
$$X = (-\lambda_1(f_2 f_3 f_4) \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2(f_1 f_3 f_4) \frac{\partial f_2}{\partial y} - \lambda_1(f_1 f_2 f_4) \frac{\partial f_3}{\partial y} - \lambda_1(f_1 f_2 f_3) \frac{\partial f_4}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial x} \\ + (\lambda_1(f_2 f_3 f_4) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2(f_1 f_3 f_4) \frac{\partial f_2}{\partial x} + \lambda_1(f_1 f_2 f_4) \frac{\partial f_3}{\partial x} + \lambda_1(f_1 f_2 f_3) \frac{\partial f_4}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial y},$$

que no nosso caso torna-se

$$X = -(6x^4 y + 12x^2 y^3 - 20x^2 y + 6y^5 - 20y^3 - 2x^5 - 2y^4 x - 4x^3 y^2 + 10x^3 + 10y^2 x + 8y - 8x) \frac{\partial}{\partial x} \\ + (6x^5 + 12x^3 y^2 - 20x^3 + 6y^4 x - 20y^2 x + 2x^4 y + 2y^5 + 4y^3 x^2 - 10yx^2 - 10y^3 + 8x + 8y) \frac{\partial}{\partial y},$$

Concluimos que o retrato de fase possui dois ciclos limites ( $C_1$  e  $C_2$ ) e um equilíbrio na origem. Seu esboço se encontra da Figura 4.2.

Figura 5.3 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 5.4.1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## REFERÊNCIAS

01. F. DUMORTIER, J. LLIBRE and J.C. ARTÉS; **Qualitative theory of planar differential systems**. Springer, 2006.
02. F. VERHULST; **Nonlinear differential equations and dynamical systems**. Epsilon Uitgaven, Utrecht, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
03. H. GIACOMINI, J. LLIBRE, and M. VIANO; **On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles**. *Nonlinearity*, 9:501–516, 1996.
04. J. A. SANDERS, F. VERHULST and J. MURDOCK; **Averaging methods in nonlinear dynamical systems**. Volume 59 of Applied Math. Sciences, Springer, 2000.
05. J. ÉCALLE; **Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de dulac**. *Actualités Math.* Hermann, Paris, 1992.
06. J. K. HALE; **Ordinary differential equations**. Krieger Publishin Company, 1980.
07. J. LLIBRE and G. RODRÍGUEZ; **Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields**. *J. Differ. Equat.* 198:374–380, 2004.
08. J. MUNKRES; **Topology**. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, 1975
09. J. SOTOMAYOR; **Lições de equações diferenciais**. volume 11 of [*Euclid Project*]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
10. L. PERKO; **Differential equations and dynamical systems**. Springer-Verlag, New York, 1991.
11. M. G. SOARES; **Cálculo em uma variável complexa**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999.

12. M. I. AL'MUKHAMEDOV; **On the construction of a differential equation having given curves as limit cycles.** Izv. Vyss. Ucebn. Zaved Matematika (in Russian), 44:3–6, 1963.
13. P. V. ARAÚJO; **Geometria diferencial.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.
14. S. SCHECTER and F. SINGER; **A class of Vector Fields on  $S^2$  That are Topologically Equivalent to Polynomial Vector Fields.** J. Differ. Equat. 57:406–435, 1985.
15. X. HUANG, Y. WANG and A. CHENG; **Limit cycles in a cubic predator-prey differential system.** J. Korean Math. Soc. No. 4, pp. 829-843, 2006.
16. Y. IL'YASHENKO; **Finiteness theorem for limit cycles.** volume 94 of Trans. of Math. Monogr. Am. Math. Soc. 1991.
17. C. THOMASSEN; **The Jordan-Schonflies theorem and the classification of surface.** The Amer. Math. Month., Vol. 99, No. 2 (Feb., 1992), pp. 116-131.

## APÊNDICE A – ESCLARECIMENTOS

Apresentamos aqui a demonstração do Teorema 4.3.3, o qual utiliza uma versão do Teorema de Schonflies para grafos. Para isto, precisamos de algumas definições e resultados de Topologia do plano.

Um arco simples no  $\mathbb{R}^n$  é a imagem de uma aplicação injetora contínua do intervalo real  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema A.0.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto conexo, então quaisquer dois pontos distintos de  $\Omega$  podem ser ligados por um arco simples em  $\Omega$ .*

**Lema A.0.2** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^2$  compacto,  $L \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\varphi : K \rightarrow L$  é contínua e injetiva, então  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem.*

**Lema A.0.3** *Seja  $X = A \cup B$ , onde  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A$  e  $B$  são fechados em  $X$ . Se  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  são contínuas,  $Y \subset \mathbb{R}^2$ , e  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ , então a função  $h : X \rightarrow Y$  definida por  $h(x) = f(x)$  se  $x \in A$  e  $h(x) = g(x)$  se  $x \in B$ , é contínua.*

Os resultados que seguem podem ser encontrados em C. THOMASSEN [17]. Começamos com uma versão do Teorema de Schonflies para uma única curva de Jordan.

**Teorema A.0.4** *Sejam  $C, C'$  curvas de Jordan no plano e  $h : C \rightarrow C'$  um homeomorfismo. Então existe um homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja restrição ao conjunto  $C$  coincide com  $h$ .*

As próximas definições têm por objetivo estender o Teorema de Schonflies para grafos.

**Definição A.0.5** *Um grafo  $G$  é a união de dois conjuntos disjuntos finitos disjuntos  $V(G)$  e  $E(G)$  (cujos elementos são chamados de vértices e arestas, respectivamente), de modo que para cada aresta estão associados dois vértices distintos  $x$  e  $y$ , chamados de extremidades da aresta. Denotamos uma aresta cujas extremidades são  $x$  e  $y$  por aresta  $xy$ .*

**Definição A.0.6** *Um caminho em  $G$  é um grafo com distintos vértices  $v_1, \dots, v_n$  e arestas  $v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ , se  $n \geq 2$ , e quando adicionamos uma aresta  $v_nv_1$  para este caminho, obtemos um ciclo.*

Se  $G$  é um grafo e  $A \subset V(G) \cup E(G)$ , então  $G - A$  é o grafo obtido de  $G$ , excluindo todos os vértices de  $A$ , e todas as arestas que estão em  $A$  ou são incidentes com um vértice em  $A$ . Se  $v$  é um vértice do grafo  $G$ , utilizando um abuso de notação, denotamos por  $G - \{v\}$  o grafo obtido a partir de  $G$ , excluindo o vértice  $v$  e as arestas que são incidentes com  $v$ .

**Definição A.0.7** Dizemos que  $G$  é conexo se todos os pares de vértices em  $G$  estão unidos por um arco simples.  $G$  é 2-conexo se for conexo e, para cada vértice  $v$ , também for conexo o grafo  $G - \{v\}$ , para qualquer vértice  $v$  de  $G$ .

**Definição A.0.8** Um grafo planar é um grafo cujos vértices são pontos do plano, as arestas são arcos simples em  $\mathbb{R}^2$  e além disso, quando duas arestas distintas têm no máximo suas extremidades em comum.

Se  $G$  é um grafo planar 2-conexo com pelo menos três vértices, então demonstra-se que  $\mathbb{R}^2 - G$  é a união de  $|V(G)| + |E(G)| + 2$  abertos conexos cada um dos quais tem um ciclo de  $G$  como fronteira. Cada uma delas é chamada uma face de  $G$  e a única face não limitada é chamada de face exterior de  $G$ . Aqui os símbolos  $|V(G)|$  e  $|E(G)|$  denotam a cardinalidade dos conjuntos de vértices e arcos de  $G$ , respectivamente. A fronteira da face exterior é chamada de ciclo exterior.

**Definição A.0.9** Um isomorfismo entre os grafos  $G$  e  $H$  é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de  $G$  e  $H$ ,  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , de tal forma que quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se,  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes em  $H$ . Nesse caso  $G$  e  $H$  são chamados de grafos isomorfos.

**Definição A.0.10** Um isomorfismo entre os grafos  $F$  e  $F'$  é chamado de isomorfismo-planar quando, um ciclo é a fronteira de uma face de  $F$  se e somente se, a imagem do ciclo é a fronteira de uma face de  $F'$  e, além disso, o ciclo exterior de  $F$  é aplicado no ciclo exterior de  $F'$ .

O próximo resultado é uma versão para grafos do Teorema de Schonflies A.0.4.

**Teorema A.0.11** Seja  $F$  e  $F'$  grafos planares 2-conexos tal que  $g$  é um homeomorfismo e um isomorfismo-planar de  $F$  em  $F'$ . Então  $g$  pode ser estendido para um homeomorfismo sobrejetivo definido em todo o plano.

Finalmente, passamos agora à prova do Teorema 4.3.3.

**Demonstração:** Seja  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  a configuração de curvas fechadas dada no Teorema 4.3.3. Consideremos o caso  $n \geq 2$ , pois o caso  $n = 1$  segue imediatamente do Teorema A.0.4. Suponha inicialmente que todas as curvas de  $C$  são primárias, tal como ilustrado na Figura A.1.

Para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  escolha um círculo  $C'_j$  de modo que todos os elementos da configuração de curvas fechadas dadas por  $C' = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$  sejam primárias. Considere ainda para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  um homeomorfismo  $h_j : C_j \rightarrow C'_j$ ; escolha  $p_j, q_j \in C_j$  e  $p'_j, q'_j \in C'_j$ , de modo que  $p_j \neq q_j$  e  $p'_j \neq q'_j$ .

Utilizando o Lema A.0.1, escolhemos um arco simples  $g_1 : [0, 1] \rightarrow G_1 \subset \mathbb{R}^2$  ligando  $p_1$  a  $p_2$  de modo que a imagem de  $g_1$  não intercepta as curvas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Analogamente,

para cada  $j = 2, \dots, n - 1$  escolhamos um arco simples  $g_j : [0, 1] \rightarrow G_j \subset \mathbb{R}^2$  ligando  $q_j$  a  $p_{j+1}$  de modo que a imagem de  $g_j$  não intercepta as curvas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , tampouco as imagens das curvas  $g_i$  com  $1 \leq i < j$ . Consideramos ainda  $g_n : [0, 1] \rightarrow G_n \subset \mathbb{R}^2$  como um arco simples ligando  $q_n$  a  $q_1$  de modo que a imagem de  $g_n$  não intercepta as curvas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , tampouco as imagens das curvas  $g_i, 1 \leq i < n - 1$ . Analogamente definimos  $g'_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , e  $g'_n$ .

Do Lema A.0.2 decorre que cada  $g_j$  é um homeomorfismo sobre sua imagem  $G_j$ . Análogo para  $g'_j$ .

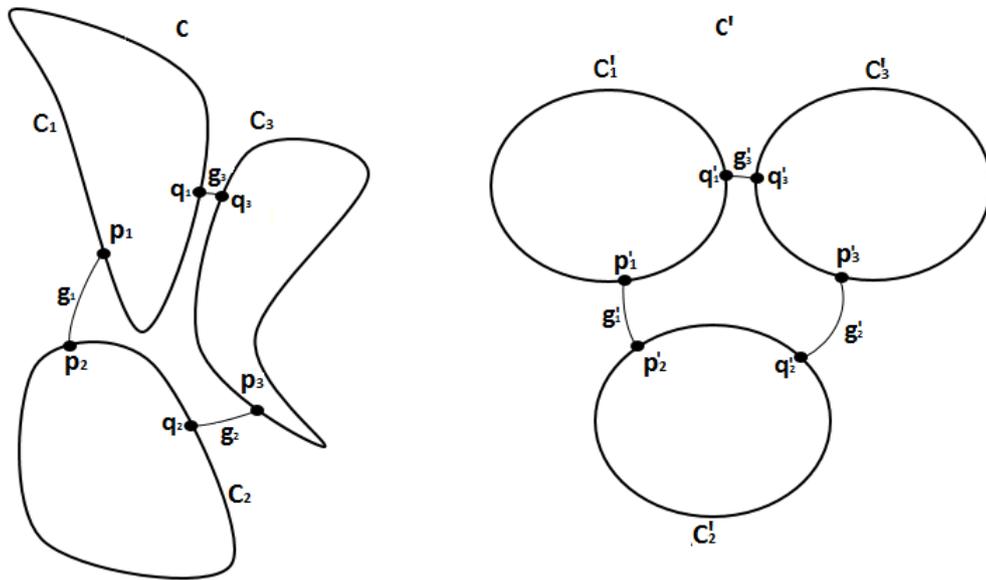
Denotamos por  $F$  o grafo 2-planar cujos vértices são os pontos  $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$  e cujas arestas são os elementos de  $C$  bem como os arcos de cada  $G_j$  ligando  $p_j$  a  $q_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Analogamente definimos o grafo  $F'$ .

Definimos então a aplicação  $h : F \rightarrow F'$  do seguinte modo. Se  $x \in C_j$  para algum  $j = 1, 2, \dots, n$ , então  $h(x) = h_j(x)$ , e se  $x \in G_j$  então  $h(x) = g'_j(g_j^{-1}(x))$ . Pelo Lema A.0.3 segue que  $h$  é um homeomorfismo, e da construção segue ainda que  $h$  é um isomorfismo planar. Do Teorema A.0.9 resulta que as configurações de curvas fechadas  $C$  e  $C'$  são equivalentes.

Suponha agora que exista um elemento de  $C$  que não é primária, digamos  $C_1, C_2, \dots, C_m \subset \text{Int}C_{m+1}$ , e  $C_{m+1}$  é curva primária. Nesse caso ligamos as curvas  $C_1, C_2, \dots, C_m$  entre si tal como se  $C_1, C_2, \dots, C_m$  fossem primárias, e depois ligamos um ponto de  $C_1$  a um ponto de  $C_{m+1}$  e um ponto de  $C_m$  a outro ponto distinto de  $C_{m+1}$ , como mostra a Figura A.2.

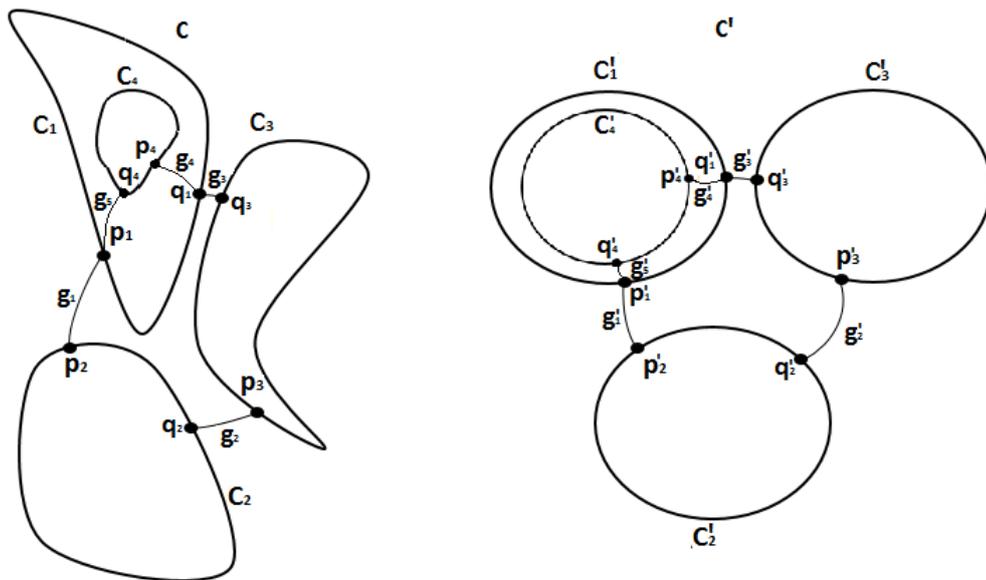
■

Figura A.1 – Configurações topologicamente equivalentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura A.2 – Configurações topologicamente equivalentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.