

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT**

Mariel de Paula Chaves

**A MATEMÁTICA NA MÚSICA:
DIVISIBILIDADE DO COMPASSO**

Santa Maria, RS, Brasil

2018

Mariel de Paula Chaves

**A MATEMÁTICA NA MÚSICA: DIVISIBILIDADE DO
COMPASSO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Santa Maria, RS

2018

de Paula Chaves, Mariel

A Matemática na Música: Divisibilidade do Compasso / por Mariel de Paula Chaves. – 2018.

90 f.: il.; 30 cm.

Orientadora: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, RS, 2018.

1. Matemática. 2. Música. 3. Divisões de Tempos Musicais. I. de Fátima Maciel Cardoso Brum, Valéria. II. Título.

© 2018

Todos os direitos autorais reservados a Mariel de Paula Chaves. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: marielpcpc@hotmail.com

Mariel de Paula Chaves

A MATEMÁTICA NA MÚSICA: DIVISIBILIDADE DO COMPASSO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

Aprovado em 5 de março de 2018.

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dr^a.
(Presidente/Orientadora)

Lidiane Buligon, Dr^a. (UFSM)

Vitalino Cesca Filho, Dr. (UNIPAMPA)

Karine Faverzani Magnago, Dr^a. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

A minha família, minha esposa Keila Beatrís e a nossas filhas Kêmilly e Ketlym, a meus pais Mario e Teresinha, minha irmã Marcieli, aos sogros Valdecir e Suzeni e a todos meus cunhados.

AGRADECIMENTOS

A efetivação deste trabalho ocorreu, pela cooperação, compreensão e dedicação de várias pessoas. Agradeço a Deus e a todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste estudo e, de uma maneira especial, agradeço:

- a minha orientadora Prof^a. Dr^a. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum pela oportunidade de trabalhar minhas duas paixões música e matemática, pela confiança em mim depositada, e pela pessoa incentivadora e dedicada, grato pela orientação;

- à minha esposa Keila Beatris Eichhoff dos Reis Chaves, pelo carinho, força e compreensão que necessitei em todos os momentos nessa caminhada;

- à minhas filhas Kêmilly e Kettlym pela compreensão em repartir nosso tempo com os estudos;

- aos meus pais Mario Dennes Chaves e Teresinha de Paula Chaves pelo incentivo e apoio em todos os momentos;

- à minha irmã Marieli pelo apoio nos conhecimentos de pedagogia;

- aos meus sogros Valdecir e Suzeni pelo apoio e confiança;

- aos meus cunhados pela compreensão e apoio;

- à banca examinadora, Prof^a. Dr^a. Lidiane Buligon, Prof^a. Dr^a. Karine Faverzani Magnago e Prof. Dr. Vitalino Cesca Filho pelos apontamentos;

- aos colegas *profmatianos* que muitas madrugadas passamos acordados estudando, em especial, Arlindo, Gustavo, Márcio, Oneide, Scharles, Silvio, Tiago Stefanello;

- ao excelentíssimo quadro de professores da UFSM, pela inspiração, dedicação e o exemplo de profissionalismo;

- ao PROFMAT pela oportunidade em melhorar a qualificação do ensino básico;

- a Escola Estadual de Ensino Indígena Marechal Cândido Rondon pelo apoio e incentivo, em especial, a diretora Silvana, Coordenador Vanderlei Silva Abreu e Cacique Adilson Policena;

- Ao Gestor da CORSAN Unidade de Não Me Toque Paulo Roberto Cervi e ao Superintendente Regional João Batista Corim da Rosa pelo incentivo e adequação dos horários;

Enfim a todos que fazem parte da minha vida e são importante na minha construção.

*“A música é um exercício de aritmética secreta
e aquele que a ela se consagra ignora que
manipula números”*

— GOTTFRIED LEIBNIZ

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

A MATEMÁTICA NA MÚSICA: DIVISIBILIDADE DO COMPASSO

AUTOR: MARIEL DE PAULA CHAVES

ORIENTADORA: VALÉRIA DE FÁTIMA MACIEL CARDOSO BRUM

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 5 de março de 2018.

Este trabalho apresenta um estudo sobre a relação da música com a matemática, ressaltando os grandes matemáticos envolvidos e suas contribuições para evolução do estudo teórico musical. Também, buscou-se uma resposta teórica a um questionamento do autor sobre a impossibilidade de preencher um compasso $\frac{4}{4}$ sem utilizar figuras repetidas ou ponto de aumento, que matematicamente significa estudar $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Posteriormente, foi observado a existência do paradoxo de Zenão, sobre a flecha atingir o alvo, e reescrito em tempos musicais para ser respondido de forma análoga ao problema do preenchimento de um compasso $\frac{4}{4}$. Além disso, neste trabalho estudou-se a escala pitagórica e as simplificações apresentada por Gioseffo Zarlino, assim como o sistema suave de afinação de Marin Mersenne. Após, foi comparado o comprimento de uma corda e suas subdivisões em cada escala e foram observadas as características de cada uma. Analisou-se as frequências das notas musicais na escala temperada e a capacidade audível do ouvido humano. Os resultados foram analisados em um programa elaborado em linguagem VBA para auxiliar na construção e estudo de um monocórdio. Também foi apresentada uma proposta de aula para o ensino médio envolvendo música e matemática. Concluiu-se que a relação entre a música e a matemática gerou grandes resultados e desmonstrou que existe muito ainda a ser explorado sobre a beleza e exatidão que ambas proporcionam juntas.

Palavras-chave: Matemática. Música. Divisões de Tempos Musicais.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Professional Master's in Mathematics in National Network - PROFMAT
Federal University of Santa Maria

MATHEMATICS IN MUSIC: COMPASS DIVISIBILITY
AUTHOR: MARIEL DE PAULA CHAVES
ADVISOR: VALÉRIA DE FÁTIMA MACIEL CARDOSO BRUM
Defense Place and Date: Santa Maria, March 5st, 2018.

This work presents a study on the relation between music and mathematics, highlighting the great mathematicians involved and their contributions to the evolution of the theoretical musical study. Also, a theoretical response was sought to a questioning of the author on the impossibility of filling a compass $\frac{4}{4}$ without using repeated figures or point of increase, which mathematically means to study $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Subsequently it was observed the existence of a Zeno paradox, on the arrow reaching the target, and rewritten in musical timings to be answered in a way analogous to the problem of filling a compass $\frac{4}{4}$. In addition, the work studied the Pythagorean scale and simplifications presented by Gioseffo Zarlino, as well as Marin Mersenne's smooth tuning system. Afterwards, the length of a rope and its subdivisions in each scale was compared and the characteristics of each one were observed. The frequencies of the musical notes on the tempered scale and the audible capacity of the human ear were analyzed. The results were presented in a program developed in VBA language to assist in the construction and study of a monocord. Also presented was a proposal for a high school class involving music and mathematics. It was concluded that the relationship between music and mathematics generated great results and revealed that there is still much to be explored of the beauty and accuracy that both provide together.

Keywords: Mathematics. Music. Divisions of Musical Timings.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Monocórdio	16
Figura 1.2 – Ciclo das Quintas	17
Figura 1.3 – Arquitas de Tarento	18
Figura 1.4 – Guido d’ Arezzo	19
Figura 1.5 – Gioseffo Zarlino	19
Figura 1.6 – Marin Mersenne	20
Figura 1.7 – Johannes Kepler	20
Figura 1.8 – René Descarte	21
Figura 1.9 – Jean Philippe Rameau	22
Figura 2.1 – Nome das Notas	24
Figura 2.2 – Pentagrama ou Pauta	25
Figura 2.3 – Linhas Suplementares	25
Figura 2.4 – Clave de Sol	26
Figura 2.5 – Clave de Fá Quarta Linha.....	27
Figura 2.6 – Clave de Sol e Fá	27
Figura 2.7 – Clave de Dó	27
Figura 2.8 – Figuras Musicais	28
Figura 2.9 – Divisão de Tempos	29
Figura 2.10 – Ponto de Aumento	29
Figura 2.11 – Compasso 4/4.....	31
Figura 2.12 – Preenchimento de Compassos.....	32
Figura 4.1 – Arqueiro de Zenão	49
Figura 4.2 – Distância entre A e B	50
Figura 4.3 – Compasso Inicial Binário.....	51
Figura 4.4 – Gráfico Divisões dos Tempos	53
Figura 4.5 – Intervalo de Oitava	55
Figura 4.6 – Intervalo de Oitava Completo	57
Figura 4.7 – Intervalo de Oitava de Zarlino	57
Figura 4.8 – Ondas Sonoras	58
Figura 4.9 – Frequências.....	59
Figura 4.10 – Relação Frequência e Nota	60
Figura 4.11 – Intervalos de Semitom.....	62
Figura 4.12 – Diferença Entre Escala Temperada e Escala de Zarlino	62
Figura 4.13 – Gerador de Escala.....	64
Figura 4.14 – <i>Visual Basic for Applications</i>	64
Figura 4.15 – Gerador de Escala Temperada	67
Figura 4.16 – Gerador de Escala e Frequência.....	67
Figura 4.17 – Leonardo de Pisa.....	68
Figura 4.18 – Números de Fibonacci no Piano.....	69
Figura 5.1 – Valores das Figuras.....	70
Figura 5.2 – Somas de Tempos	71
Figura A.1 – Tábua	78
Figura A.2 – cantoneira	78
Figura A.3 – Ganchos	78
Figura A.4 – Construção de Monocórdio	79

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DO MONOCÓRDIO	78
APÊNDICE B – PARTE DA PARTITURA DE HANDEL	80

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A – HINO DE SÃO JOÃO BATISTA	86
ANEXO B – <i>Compendium Musicae</i>	87

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UC Unidade de Compasso

UT Unidade de Tempo

VBA *Visual Basic for Applications*

Hz Hertz

LISTA DE SÍMBOLOS

\emptyset	vazio
Γ	Gama
\forall	Para todo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 NOÇÕES SOBRE TEORIA MUSICAL	23
2.1 NOTAS	24
2.2 PENTAGRAMA OU PAUTA	25
2.3 CLAVES	26
2.3.1 Clave de Sol.....	26
2.3.2 Clave de Fá	26
2.3.3 Clave de Dó	27
2.4 VALORES DAS NOTAS MUSICAIS	28
2.4.1 Ponto de Aumento	29
2.5 COMPASSO MUSICAL	30
2.5.1 Compassos Simples	31
2.5.2 Compassos Compostos	31
2.5.3 Compasso 4/4	31
3 REVISÃO DE LITERATURA	33
3.1 SEQUÊNCIAS.....	33
3.1.1 Limites de Sequências	33
3.1.2 Subsequência.....	34
3.1.3 Supremo e Ínfimo de um conjunto	35
3.1.4 Valor de Aderência	36
3.2 SÉRIES NUMÉRICAS.....	41
3.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES	45
3.3.1 Teste da comparação.....	45
3.3.2 Teste da razão	46
3.3.3 Teste da Raiz	46
4 RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA	48
4.1 PARADOXO DE ZENÃO	49
4.2 ESTUDANDO AS DIVISÕES DOS TEMPOS DE UMA PARTITURA	52
4.3 ESCALA PITAGÓRICA	53
4.3.1 Construção da Escala Pitagórica.....	55
4.3.2 Simplificações de Zarlino	57
4.4 FREQUÊNCIA DA NOTA	58
4.4.1 Ondas Sonoras	58
4.4.2 Relação Entre Notas e Frequência	59
4.4.3 Escala Temperada	61
4.5 GERADOR DE ESCALA	63
4.5.1 Construção do Programa Gerador de Escala.....	63
4.5.2 Comparação Entre Escalas	66
4.5.3 Frequência no Programa Gerador de Escala	66
4.6 NÚMEROS DE FIBONACCI NAS FREQUÊNCIAS	68
5 PROPOSTA PARA SALA DE AULA	70
6 CONCLUSÃO	73
REFERÊNCIAS	75
APÊNDICES	77
ANEXOS	85

1 INTRODUÇÃO

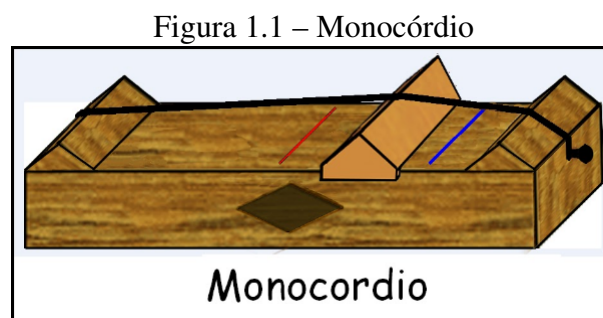
O enlace da música com a matemática é conhecido desde a antiguidade. Mesmo tendo seus primeiros registros como áreas bem distintas, a relação entre as duas foi tornando-se naturalmente cada vez mais evidente e seus resultados apareceram de forma espontânea. No livro *Matemática e Música* (Oscar João Abdounur) segue:

É inevitável falar desta relação sem registrar a grande contribuição dada por Pitágoras, pois foi ele que cientificamente deu início aos estudos da relação entre a música e a matemática. Segundo (ABDOUNUR, 2015, p. 10):

O primeiro registro científico, de fato, associando matemática e música ocorre por volta do século VI a.C na Grécia Antiga, na escola pitagórica. Esses pensadores relacionaram intervalos musicais com o conceito matemático de razões, há mais de 2000 anos, fazendo uso de instrumento de uma corda que denominaram monocórdio. Cientificamente como o primeiro registrado, tal experimento promove um vasto número de discussões na Grécia e posterior à cultura grega sobre teoria musical, possuindo razões matemáticas como característica principal.

Conta uma lenda que o monocórdio foi fruto de uma observação feita por Pitágoras ao transitar próximo de uma oficina. Ele notou que as batidas dos martelos, de massas diferentes, tinham certas combinações agradáveis aos ouvidos.

O monocórdio como o próprio nome representa, *mono*= um e *córdio*=corda, é um instrumento de somente uma corda sobre uma base de madeira, onde o som é gerado pela vibração da corda no momento do toque, (Figura 1.1).



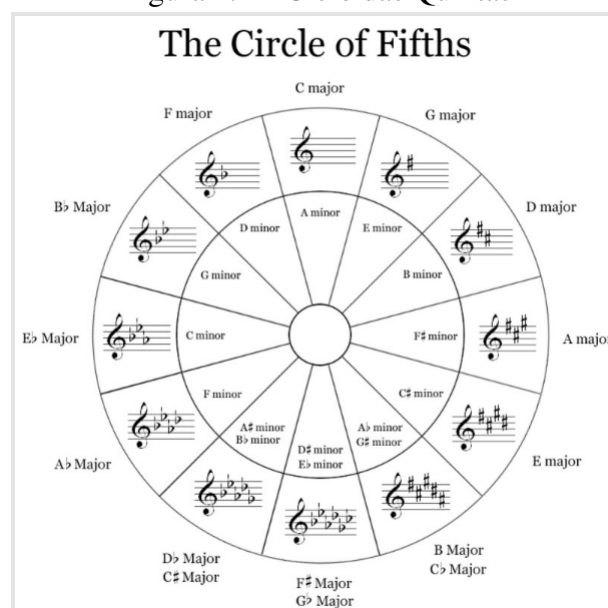
Fonte: <http://paratodosmusica.wordpress.com>

O estudo no monocórdio provou que dividindo a vibração da corda ao meio, a tonalidade

gerada é igual a produzida pela corda inteira, porém uma oitava acima. Isto é, o som apresentado é mais agudo e com a mesma afinação. Seguindo divisões $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ da corda esticada, foram descobrindo as oitavas, quartas e quintas, respectivamente, que eram exatamente as combinações de sons mais agradáveis.

Os chineses já desenvolviam teorias complexas três mil anos antes de Cristo, por exemplo, o círculo das quintas, como na Figura 1.2 com notação atual. Também pode-se encontrar varias citações bíblicas em que a música é relacionada com o poder de adoração e estado espiritual, além de citações orientando quais instrumentos executariam cada voz e quais alturas formariam as harmonias.

Figura 1.2 – Ciclo das Quintas



Fonte: <http://blog.kennedyviolins.com>

No período clássico grego, a música teve uma colaboração importante nos seus fundamentos racionais proporcionada pelo grande teórico Arquitas de Tarento (430-360 a.C.), (Figura 1.3), que escreveu vários trabalhos científicos relacionados a estes fundamentos. Existe grande possibilidade de Arquitas ter transformado média subcontrária em média harmônica, provavelmente pelo fato do intervalo de quinta ter seu valor harmônico grandemente admirado pelos gregos, isto é, $\frac{2}{3}$ da corda inteira.

Figura 1.3 – Arquitas de Tarento



Fonte: <http://www.dec.ufcg.edu.br>

Tarento acreditava que em uma consonância, o ouvido receberia apenas um som, ou seja, quando executadas mais de um som o ouvido receberia tudo como único som. Sobre isto (ABDOUNUR, 2015, p. 37) escreve:

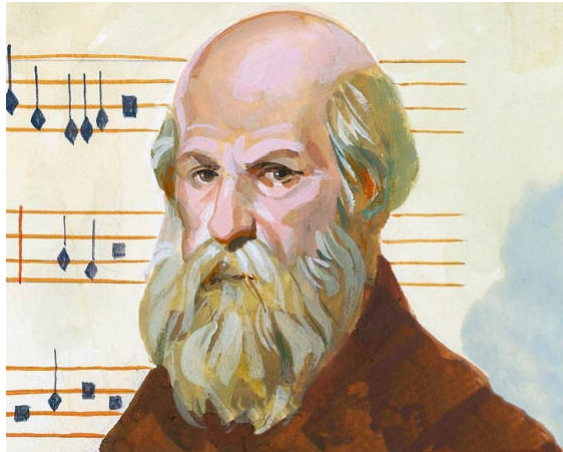
À luz do conhecimento acústico-musical da época, tais reflexões levantavam dúvidas e questões paradoxais, pois se sons originavam-se em movimentos - sons mais agudos produziam-se por movimentos mais rápidos e vice-versa -, mostrava-se lógico que os sons referidos apresentariam duas velocidades diferentes, ao mesmo tempo que movimentos distintos pareciam unificar-se.

As primeiras músicas polifônicas que começaram aparecer por volta do século IX, eram chamada de *Organum Paralelo*. O *Organum Paralelo* consistia de uma voz principal acompanhada por intervalos de quartas ou quintas, podendo ser duplicadas em oitavas. Essa contextualização harmônica despertou algo muito interessante, pois estas consonâncias coincidem com as três primeiras distâncias intervalares de um som em Série de Fourier, que somente dez séculos depois apresenta o estudo de sua teoria. Passados dois séculos, a voz organal evolui da execução paralela para movimentos contrários, oblíquos e diretos.

Um dos grandes responsáveis por isso, foi o italiano teórico musical e pedagogo Guido d' Arezzo (995-1050), (Figura 1.4). Dentre seus feitos está a nomeação das sete principais notas musicais. Ele registrou cada uma, retirando as sílabas iniciais do hino São João Batista (ver anexo A), antes disso, as notas eram representadas pelas sete primeiras letras do alfabeto.

Também comprometido com o estudo da razão das consonâncias perfeitas, o teórico italiano de Chioggia Gioseffo Zarlino (1517-1590) (Figura 1.5), mostrou os primeiros reconhecimentos da tríade em termos harmônicos, pois até então eram conhecidos somente como inter-

Figura 1.4 – Guido d' Arezzo



Fonte: <http://www.palomavaleva.com>

valos. Além disso, ele também estabeleceu uma regra de divisão do braço de um instrumento em doze semitons semelhantes utilizando média geométrica, divisão esta que estudaremos posteriormente.

Figura 1.5 – Gioseffo Zarlino



Fonte: <http://www.nacion.com>

Contemporaneamente, surgiu um dos principais pensadores franceses do século XVII. O matemático, filósofo e músico teórico Marin Mersenne (1588-1648) (Figura 1.6), ele trocava conhecimentos com grandes pensadores tais como: Galileu, Descartes, Fermat, Huygens, Pascal, Torricelli, Roberval, Desargues, Gassendi e Cavaliere. Mersenne divulgava pesquisas e conhecimentos envolvendo música e matemática através de suas correspondências.

Entre as obras feitas por Mersenne está o estudo sobre as leis de vibração da corda tensionada, no qual determinou a maneira que a frequência diminuía em relação aos parâmetros físicos da corda. Para isto, foram utilizadas cordas de linho e arame com mais de 30 metros es-

Figura 1.6 – Marin Mersenne



Fonte: <http://www.avozarm.sk>

ticadas por pesos suspensos em dois postes. Desta forma, utilizando o comprimento, densidade linear e a tensão, foi possível determinar frequência de vibração da corda.

Nesta mesma época, o matemático e astrônomo da corte do imperador Rudolfo II em Praga, Johannes Kepler (1571-1630), (Figura 1.7), foi responsável por grandes contribuições na ciência musical. Ele considerou insatisfatório o estudo dos intervalos consonante feito pelos pitagóricos utilizando o monocórdio, uma vez que, possivelmente o estudo no monocórdio teria desconsiderado o intervalo de terças e sextas como consonâncias.

Figura 1.7 – Johannes Kepler



Fonte: <http://www.thekeplerstory.org>

Em 1619 Kepler publicou a obra *Harmonices Mundi* composta por 5 livros, em que o último volume que abordava a Harmonia das Esferas, recebeu grande crítica de Mersenne, que também orientou que tivessem cuidado na aceitação desta teoria. Nesta obra Johannes acreditava que cada planeta soava semelhante uma música, o qual dependia somente da variação da velocidade de cada planeta, onde os movimentos rápidos e lentos estariam relacionados respectivamente a sons agudo e grave.

Neste período, o francês matemático e filósofo René Descartes (1596-1550) (Figura 1.8), apresentou sua grande contribuição para relação entre a música e a matemática. O desejo de Descartes era sistematizar o conhecimento desta relação, semelhantemente aos modelos axiomático da geometria euclidiana.

Figura 1.8 – René Descarte



Fonte: <http://www.biography.com>

Seguindo este desejo, Descartes escreveu uma teoria envolvendo todos os sentidos na obra *Compendium Musicae* na qual demonstrou uma linha humanista rapidamente distante do pensamento cartesiano. Estas preliminares em forma axiomática podem ser vista no anexo B, em que o pitagorismo é vivenciado nesta formulação.

Descartes defendia que uma frequência só era audível se a sua oitava superior também era. Segundo (ABDOUNUR, 2015, p. 97) "Tal resultado corroborou a importância do intervalo de oitava, ainda valorizado por ser produzido pela divisão da corda por 2 - primeira seção possível".

Foi Descartes que relacionou a velocidade da música com a sensação provocada, onde os sentimentos de medo, tristeza, orgulho, tensão, etc, seriam despertados pelos movimentos mais lentos, enquanto passos mais rápidos despertavam emoções semelhante a alegria, euforia, etc.

Além de Descartes e Zarlino, o compositor e teórico francês Jean Philippe Rameau (1683-1764) (Figura 1.9), estudou os intervalos consonantes fazendo a partição da corda em seis partes no máximo. Segundo Rameau, as consonâncias estavam submetidas a números consecutivos, de tal forma que representavam sua perfeição.

Figura 1.9 – Jean Philippe Rameau



Fonte: <http://www.allmusic.com>

Rameau foi o primeiro a estabelecer os acordes e suas inversões, utilizando para isto relações numéricas a fim de indicar as diferentes dissonâncias, e estudou como as consonâncias de Descartes apareciam nos acordes.

Este trabalho é resultado do encontro de duas áreas que fascinam o autor, que desde muito cedo teve contato com a teoria musical e tendo como consequência o surgimento de uma paixão pela matemática. O que norteará esta dissertação é uma pergunta que acompanha o autor durante o estudo da teoria musical. Por que quando executado o solfejo de um compasso quaternário, de tal forma que não sejam utilizadas figuras de notas repetidas ou ponto de aumento, intuitivamente nota-se que o compasso foi preenchido, mesmo isto sendo teoricamente impossível?

Matematicamente, significa estudar $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Com o objetivo de responder tal questionamento veremos no capítulo 2 noções sobre Teoria Musical, no capítulo 3 uma revisão de literatura, na qual constam várias definições e Teoremas Matemáticos que serão usados para compreensão deste trabalho e no capítulo 4 algumas outras relações entre a Matemática e a Música e uma proposta de aula para o ensino médio envolvendo música e matemática.

2 NOÇÕES SOBRE TEORIA MUSICAL

Música é a arte de combinar os sons simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção, dentro do tempo. Ela é constituída por quatro partes; Melodia, Harmonia, Contraponto e Ritmo. No livro Teoria da Música (Bohumil Med) segue:

Melodia é a combinação dos sons sucessivos, ou seja, dispostos uns após outros. É conhecido como a concepção horizontal da música.

A Harmonia é a combinação dos sons simultaneamente, isto é, executados de uma só vez. Ela é chamada de concepção vertical da música.

O Contraponto é o conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea. Neste caso refere-se a concepção horizontal e vertical da música.

E finalmente o Ritmo é a combinação dos valores dos tempos, ou seja, ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia.

O som pode ser definido como a sensação percebida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. A vibração movimentando o ar em ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. As ondas atingem a membrana do tímpano fazendo-a vibrar. Estas vibrações provocadas na membrana do tímpano são transformadas em impulsos nervosos e transmitidas ao cérebro que faz a identificação dos diferentes tipos de sons, ou seja, o som é decodificado pelo cérebro.

A vibração é dividida em regular e irregular. A primeira produz sons de alturas definidas, chamado de sons musicais ou notas musicais. Por exemplo, som do órgão, do violino, etc. A vibração irregular produz som de alturas indefinidas, também conhecidas como barulhos. Por exemplo, som dos instrumentos de percussão, do trem, de um motor, etc.

As principais características do som são a altura, duração, intensidade e timbre. A altura pode ser definida pela frequência das vibrações. Logo, quanto maior for a velocidade da vibra-

ção, mais agudo será o som.

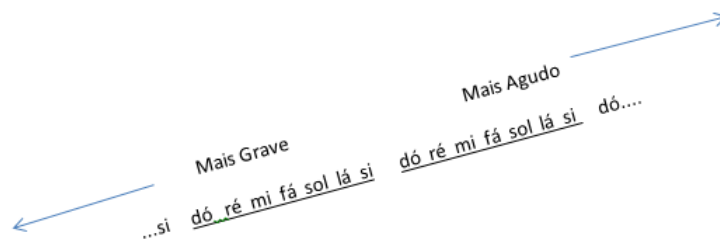
O tempo da emissão das vibrações, determina a extensão de um som, também chamado de duração. Já a intensidade, ou amplitude das vibrações, é determinada pela força ou pelo volume do agente que as produz.

O timbre é a combinações de vibração determinadas pelas espécies dos agentes que as produz. Todo som musical tem estas quatro características simultaneamente.

2.1 NOTAS

A música tem sete notas musicais Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si. Elas repetem-se de sete em sete conforme Figura 2.1.

Figura 2.1 – Nome das Notas



Fonte: Autor

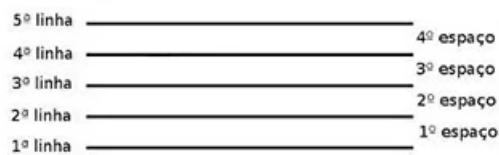
Estas notas podem ser facilmente observadas no piano, pois estão representadas pelas teclas brancas, onde as notas mais grave estão à esquerda e consequentemente as mais agudas à direita.

As notas são representada graficamente na pauta musical com símbolos no formato oval, e conforme for sua posição no pentagrama, será indicado notas mais graves ou mais agudas, como será explicitado a seguir.

2.2 PENTAGRAMA OU PAUTA

A Pauta Musical ou Pentagrama é constituída pelo conjunto de cinco linhas paralelas e equidistantes formando entre si quatro espaços, esta estrutura é usada para o notação musical. As linhas e os espaços são contados de baixo para cima, conforme Figura 2.2.

Figura 2.2 – Pentagrama ou Pauta

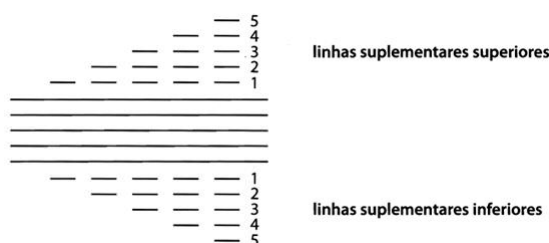


Fonte: <http://tablaturasecifras.com.br>

As notas escritas nos espaços, não poderão passar para linha de cima e nem para linha de baixo. Por outro lado, as notas escritas nas linhas deverão estar com a metade no espaço superior à linha e a outra metade no espaço inferior à linha.

O pentagrama suporta somente nove notas, ou seja, é necessário um meio para poder expressar graficamente as notas mais agudas e as mais graves. Para isto, existe as linhas suplementares superiores e as linha suplementares inferiores, também conhecidas como linhas auxiliares. (Figura 2.3).

Figura 2.3 – Linhas Suplementares



Fonte: <http://musicalidadenaweb.blogspot.com.br>

2.3 CLAVES

Só com a escrita das notas no pentagrama é impossível de fazer identificação de sua altura. Desta forma, para convencionar o posicionamento delas na pauta usamos um sinal chamado clave, que é colocada no início da pauta.

Existem três tipos de claves; de sol, de fá e de dó. As duas últimas podem ser escritas em mais de uma linha.

2.3.1 Clave de Sol

A Clave de Sol (Figura 2.4) determina que a nota da segunda linha da pauta é sol, portanto podemos definir o posicionamento das outras notas, que estão dispostas em ordem, conforme visto na seção 2.1.

Figura 2.4 – Clave de Sol



Fonte: <http://www.deniswarren.com>

A clave de Sol é usada para os sons agudos. Uns dos instrumentos anotados nesta clave são: violino, trompete, saxofone alto, flauta, oboé, clarinete, cavaquinho, violão, etc.

2.3.2 Clave de Fá

A clave de fá (Figura 2.5) determina a localização da nota Fá, que pode ser anotada na terceira ou quarta linha, sendo esta última a mais utilizada.

A clave de fá é usada para os sons graves. Uns dos instrumentos anotados na clave de fá são: contra-baixo, sax tenor, trombone, violoncelo, tuba, fagote, etc.

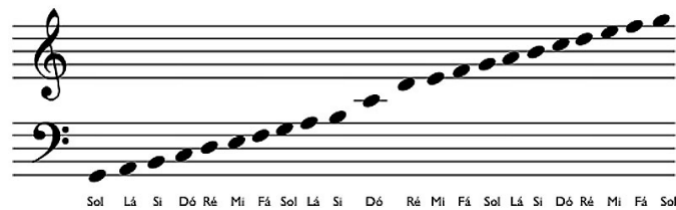
Figura 2.5 – Clave de Fá Quarta Linha



Fonte: <http://academiadecomposicao.com>

Para anotar os sons do piano é necessário o usar as claves de sol e de fá na quarta linha. A clave de fá é usada para os sons graves, ou seja, as teclas da esquerda e a clave de sol é usada para os sons agudos, isto é, as teclas da direita, tendo entre elas apenas uma linha suplementar que anota-se o dó central, conforme Figura 2.6.

Figura 2.6 – Clave de Sol e Fá

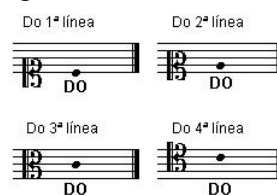


Fonte: <http://blog.cancaonova.com>

2.3.3 Clave de Dó

A clave de dó (Figura 2.7), determina a localização da nota dó, que pode ser anotada na primeira, segunda, terceira e quarta linha. A mais usada é na terceira linha. Esta clave é usada para sons médios.

Figura 2.7 – Clave de Dó



Fonte: <http://blogmusicada.blogspot.com.br>

A clave de dó é pouco usada, um dos instrumentos que utiliza a escrita nesta clave é a viola.















2.4 VALORES DAS NOTAS MUSICAIS

Na execução da música podem existir sons longos e sons breves ou até mesmo a interrupção da emissão do som. Este último chama-se silêncio. A duração de um som está relacionado à vibração de um corpo elástico podendo ser de menor ou maior continuidade.

A organização deste tempo é chamada de ritmo, que do grego *rhythmos* significa aquilo que flui, aquilo que se move, ou como Platão definia "o ritmo é a ordem do movimento".

Segundo (MED, 1996, p.20), no princípio eram as palavras mais ou menos que indicavam a duração de uma nota, porém no início do século XIII surgiram as primeiras figuras mensurais e só no século XVII começaram aparecer as figuras que são atualmente usadas.

Figura 2.8 – Figuras Musicais

FIGURA	PAUSA	NOME	NÚMERO
		SEMIBREVE	1
		MÍNIMA	2
		SEMÍNIMA	4
		COLCHEIA	8
		SEMICOLCHEIA	16
		FUSA	32
		SEMIFUSA	64

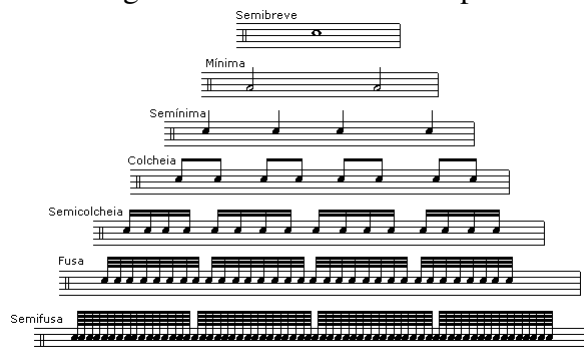
Fonte: Autor

Algumas figuras caíram em desuso como; a máxima, a longa e a breve, que indicavam tempos longos, e a quartifusa que indicava tempo mais breve. Atualmente são escritas a semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa conforme a Figura 2.8. Elas não estão somente relacionados à emissão de som, mas também à ausência, ou seja, seus valores representam tempo, e não altura da nota.

O valor de tempo de uma semibreve é o dobro do valor da mínima, o valor da mínima é o dobro da semínima, e de forma análoga relacionamos as demais figuras musicais.

Desta forma podemos notar que uma semibreve tem o mesmo valor que duas mínimas ou quatro semínimas ou oito colcheia ou 16 semicolcheia ou 32 fusa ou ainda 64 semifusas, como pode ser visto pela Figura 2.9.

Figura 2.9 – Divisão de Tempos



fonte: <http://musicalidadenaweb.blogspot.com.br>

Cada figura musical (Figura 2.8) é relacionada com um número da seguinte forma: semibreve(1), mínima(2), semínima (4), colcheia (8), semicolcheia (16), fusa (32) e semifusa(64). Essa numeração é fundamental para escrever e ler um compasso.

2.4.1 Ponto de Aumento

O ponto de aumento representa a duração da figura musical aumentada pela metade, ou seja, se a figura normal vale 1 tempo, a figura pontuada valerá 1,5 tempo.

Especificamente na Figura 2.10 temos uma mínima pontuada, que tem sua duração

Figura 2.10 – Ponto de Aumento

$$♩. = ♩ + ♩$$

fonte: <http://www.descomplicandoamusica.com>

correspondente a uma mínima mais uma semínima. Uma figura pode receber mais de uma

pontuação, desse modo, a cada pontuação sua duração é aumentada pela metade, e quando não recebe nenhuma pontuação é dita figura simples.

2.5 COMPASSO MUSICAL

O compasso musical representa a divisão de um trecho da música em partes iguais, com a missão de organizar e facilitar a leitura, e é graficamente representada por uma fração. Podemos resumir, segundo (MED, 1996, p.114), que o compasso é o agente métrico do ritmo.

Como em tudo que necessitamos medir utilizamos uma unidade de medida. Na música as unidades de medidas relacionadas ao compasso utilizadas são UC que é Unidade de Compasso e UT que é Unidade de Tempo. A unidade de compasso, UC, é a figura musical que sozinha ou com auxílio de uma pontuação de aumento tem o valor que preenche o compasso inteiro. Também é denominado unidade de som.

A unidade de tempo é valor dado por um movimento do compasso, e o compasso é formado pela soma destes movimentos. A classificação de um compasso é feita pela quantidade de UT da seguinte forma: unário um tempo, binário dois tempos, ternário três tempos, quaternário quatro tempos e assim prossegue a classificação.

Os compassos são classificados em duas teorias divergentes. Uma delas define sua classificação pelos tempos que são representados pelo valor de uma figura simples ou pontuada. A outra classifica pelo número de tempos fortes inseridos no compasso.

Segundo (MED, 1996, p.121) a primeira teoria é bastante estudada na França, Brasil e Rússia enquanto que a segunda é estudada na Alemanha. Por esse motivo são indetificadas pelos teóricos como Teoria Francesa e Teoria Alemã.

Neste trabalho vamos seguir a linha de pensamento da Teoria Francesa.

2.5.1 Compassos Simples

O compasso simples é facilmente identificado pela unidade de tempo, pois ela é escrita por uma nota simples sem pontuação de aumento. O numerador da fração descreve o compasso simples é um número que não é divisível por três, com exceção do compasso 3/4.

Nos compassos simples o numerador indica a quantidade de tempos do compasso e o denominador representa a figura (Figura 2.8) que preenche cada tempo, ou seja, o denominador é a UT.

2.5.2 Compassos Compostos

O compasso composto tem como unidade de tempo uma figura composta pontuada, e o numerador da fração que o descreve é sempre divisível por três.

A fórmula que representa o compasso composto é o produto de um compasso simples pela razão 3/2.

Existem vários tipos de compassos, porém iremos estudar particularmente o compasso simples quaternário $\frac{4}{4}$.

2.5.3 Compasso 4/4

O compasso simples quaternário, geralmente vem indetificado pela escrita 4/4 na pauta ou simplesmente a letra C. Tem-se que na razão 4/4 o numerador indica a quantidade de tempo do compasso e o denominador indica a figura que preenche esse tempo, ou seja, o compasso terá quatro tempos e cada tempo será preenchido por uma semínima, conforme figura 2.11.

Figura 2.11 – Compasso 4/4



fonte: Elaborada pelo Autor

Esse compasso pode ser preenchido pela sua unidade de compasso, a semibreve, pois a mesma vale quatro semínimas. Além disso, ela pode ser escrita por duas mínimas ou ainda por muitas outras combinações objetivando completar quatro tempos. Segue na figura 2.12 algumas das formas que poderíamos preencher o compasso quaternário.

Figura 2.12 – Preenchimento de Compassos



fonte: Elaborada pelo Autor

No primeiro compasso temos uma figura de 4 tempos, o segundo é formado por duas mínimas $2+2=4$, a composição do terceiro é $2+1+1 = 4$, no quarto $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, no quinto $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4$ e no sexto $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 4$.

Problema 2.5.1. *Observando o sexto compasso da figura 2.12 notamos que houve repetição da semifusa no preenchimento do compasso. Sabendo que os três primeiros tempos estão definidos por uma mínima que neste compasso vale dois tempos e uma semínima, que vale um tempo, buscaremos uma forma genérica de possíveis preenchimentos do compasso obedecendo a regra, a fim de verificar se é impossível preencher o compasso com figuras musicais sem pontuação de maneira que todas sejam diferentes.*

Antes de reponder esta questão vamos revisar um pouco de Teoria Matemática a respeito de sequência e séries de números reais.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Esta seção apresenta Teoremas bem estabelecidos na matemática que serão necessários para o entendimento do trabalho. Particularmente foram utilizados os livros o Curso de Análise Volume 1 - (Elon Lages Lima) e Fundamentos de Cálculo - (Antonio Caminha Muniz Neto) .

3.1 SEQUÊNCIAS

Definição 3.1.1. *Seja o conjunto de números naturais \mathbb{N} e o conjunto de números reais \mathbb{R} . Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que leva cada $n \in \mathbb{N}$ ao número real $f(n) = a_n$.*

O termo a_n é chamado de termo geral da sequência.

3.1.1 Limites de Sequências

Definição 3.1.2. *Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número real l se, quando tomado um erro $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.*

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para l , a sequência é convergente e tem um como limite l . Do contrário a sequência é divergente.

Se a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l então escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Teorema 3.1.3. *Se a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir, então seu limite é único.*

Demonstração: Por contradição, sejam l_1 e l_2 números reais diferentes e suponha que a sequência converge para l_1 e l_2 simultaneamente. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2} |l_1 - l_2| > 0$, a definição de limite garante a existência $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |a_n - l_1| < \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow |a_n - l_2| < \varepsilon$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então para todo $n > n_0$, temos que $|a_n - l_1| < \varepsilon$ e $|a_n - l_2| < \varepsilon$.

Assim $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| = |a_n - l_1| +$

$|a_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$, o que é um absurdo.

Logo $l_1 = l_2$, ou seja, o limite é único.

□

3.1.2 Subsequência

Definição 3.1.4. Dada a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência é definida como a restrição de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ do conjunto de índices. Sabendo que a função $j \mapsto n_j$ de \mathbb{N} em \mathbb{N}_1 é uma bijeção, qualquer subsequência de uma sequência é também uma sequência, e pode ser denotada como $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Teorema 3.1.5. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência com limite l .

(a) Se $l < a$ (respectivamente $l > a$), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < a$ (respectivamente $a_n > a$) para todo $n > n_0$.

(b) Se $a_n \geq a$ (respectivamente $a_n \leq a$), para todos $n \geq 1$, então $l \geq a$ (respectivamente $l \leq a$).

(c) Toda subsequência $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainda converge para l .

Demonstração:

(a) Suponha $l < a$. Tome $\varepsilon = a - l$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$. Assim $a_n < l + \varepsilon = l + (a - l) = a$.

O caso $l > a$ pode ser provado de forma análoga.

(b) Por contraposição, segue imediatamente de (a).

(c) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Porém, como $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, existe um índice n_i na subsequência tal que $n_i > n_0$, Assim $j \geq i \Rightarrow n_j > n_0 \Rightarrow |a_{n_j} - l| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$.

□

Definição 3.1.6. Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita limitada se existir $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1.7. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para o limite l . Então dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1$. Logo, pela desigualdade triangular segue que $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$.

Seja $M = \max\{1 + |l|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$, então $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

□

Teorema 3.1.8. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Demonstração:

Visto que (b_n) é limitada, existe $L > 0$ tal que $|b_n| < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, temos que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{L}$.

Assim, $n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$.

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$

□

3.1.3 Supremo e Ínfimo de um conjunto

Definição 3.1.9. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente, um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo do subconjunto X , ($\text{Sup } X$), quando b é a menor das cotas superiores de X em \mathbb{R} .

Segue então que para que $b \in \mathbb{R}$ seja supremo de X é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições abaixo.

(i) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição (ii) pode ser reformulada como segue:

(iii) Dado $c < b$ em \mathbb{R} , existe $x \in X$ tal que $c \leq x$.

Com efeito, a condição (iii) diz que nenhum elemento de \mathbb{R} , que seja inferior a b pode ser cota superior de X .

Definição 3.1.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo do subconjunto X , $(\inf X)$, quando a é a maior das cotas inferiores de X em \mathbb{R} .*

Segue então que para que $a \in \mathbb{R}$ seja ínfimo de X é necessário e suficiente que:

(i) Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$.

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

Ou equivalente,

(iii) Dado $c > a$ em \mathbb{R} , existe $x \in X$ tal que $c \geq x$.

Com efeito, a condição (iii) diz que nenhum elemento de \mathbb{R} , que seja superior ao elemento a pode ser cota inferior de X .

3.1.4 Valor de Aderência

Definição 3.1.11. *Um número real l chama-se valor de aderência de uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quando l é limite de alguma subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Seja (a_n) uma sequência limitada com $\alpha \leq a_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $X_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Temos que $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$

Logo, pondo $x_n = \text{Inf } X_n$ e $y_n = \text{Sup } X_n$, vem

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq \beta.$$

Sabendo que temos agora as sequências x_n e y_n , existem, portanto, os limites.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{Sup } x_n = \text{Sup}_n \text{Inf } X_n.$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{Inf } y_n = \text{Inf}_n \text{Sup } X_n.$$

Escrevemos $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Inf } a_n$ e $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup } a_n$, e diremos que a é o limite inferior da sequência (a_n) e b é o limite superior da sequência (a_n) .

Teorema 3.1.12. *Dados as sequências convergentes de números reais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e um número real c qualquer, segue:*

$$(a) \text{ Se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} c.a_n = c.a.$$

$$(b) \text{ Se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b.$$

$$(c) \text{ Se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.b_n = a.b.$$

$$(d) \text{ Se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \text{ com } b \neq 0, \text{ e cada } b_n \text{ seja não nulo, então}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Demonstração:

(a) Se $c = 0$, então $ca_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e sabendo que se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência constante, com $a_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, pois $\forall \varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$, logo é válido para $c = 0$.

Suponha agora que $c \neq 0$ e que seja dado $\varepsilon > 0$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow$

$a_n - a < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |ca_n - ca| = |c| |a_n - a| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$.

(b) Provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dado $\varepsilon > 0$, e existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $N > \max\{n_1, n_2\}$. Pela desigualdade triangular temos,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$.

A demonstração de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = a - b$ é análoga.

(c) Provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n - a \cdot b = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

Temos que $a_n \cdot b_n - a \cdot b = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$. Como a_n é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b = 0$, segue do teorema anterior que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n - b) = 0$.

Analogamente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} b(a_n - a) = 0$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a \cdot b$, pelo item (b).

(d) Se mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, então seguirá do item (c) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ para $n > n_1$. Então, usando a desigualdade triangular segue, para $n > n_1$,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b_n|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|} < \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}$. Seja $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$, então para $n > n_0$ temos que

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorema 3.1.13 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monótona não decrescente e limitada, isto é, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots < M$, para algum $M > 0$ (os outros casos podem ser tratados analogamente). Desta forma, M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Seja l o supremo do conjunto A , isto é, $\text{Sup}A = l$

Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. De fato, seja $\varepsilon > 0$, como $l - \varepsilon$ não é mais cota superior de A , algum elemento de A é maior que $l - \varepsilon$, ou seja, $a_{n_0} > l - \varepsilon$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \dots$, temos que $a_n > l - \varepsilon \forall n \geq n_0$.

Assim,

$$l - \varepsilon < a_n \leq l < l + \varepsilon,$$

$$\text{ou seja, } |a_n - l| < \varepsilon.$$

□

Lema 3.1.14 (Lema dos Intervalos Encaixantes). *Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0$, onde $|I_n| = b_n - a_n$, então existe um único $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{l\}$.*

Demonstração: Primeiramente, note que a interseção dos I_n é vazia ou unitária, visto que, se existissem dois reais a, b tal que $a < b$ na interseção, logo $[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e consequentemente $[a, b] \subset I_n$, desta forma $|I_n| \geq b - a \forall n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição pois $|I_n| \rightarrow 0$.

A condição de encaixe $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ garante que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots < b_1$, e o teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema 3.1.13, garante a existência de $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Seja $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, note que $a_n \leq l \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, fixado $m \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq b_m, \forall n \in \mathbb{N}$, e pelo item (b) do teorema 3.1.5 temos a garantia que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq b_m$. Porém, como

o natural m foi escolhido arbitrariamente, temos $l \leq b_m \forall m \in \mathbb{N}$.

Portanto, $l \in [a_n, b_m] = I_m \forall m \in \mathbb{N}$, ou seja, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

□

Em muitas situações não é necessário mostrar que uma sequência converge, mas apenas garantir que ela possui uma subsequência convergente. Para isto, o teorema de Weierstrass fornece a condição suficiente para que uma subsequência seja convergente, como segue:

Teorema 3.1.15 (Weierstrass). *Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja o intervalo de fechado e limitado $I_0 = [a_0, b_0]$ contendo todos os termos da sequência limitada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dentre os intervalos $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ e $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, tomemos um que contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e chamamos o intervalo de I_1 . Do mesmo modo, obtemos o intervalo fechado $I_2 \cap I_1$, tal que $|I_2| = \frac{1}{2} |I_1|$ e I_2 contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Desta forma, construímos indutivamente uma sequência I_1, I_2, I_3, \dots de intervalos fechados e limitados, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ e $|I_{n+1}| = \frac{1}{2} |I_n| \forall n \in \mathbb{N}$. Assim pelo lema 3.1.14, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Finalmente, escolhemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$. Em seguida, para cada $j \geq 1$, após termos escolhido $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_j} \in I_j$, tomemos $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ e $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$. Logo construímos uma subsequência $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} \in I_k \forall k \in \mathbb{N}$. Como $a_{n_k}, l \in I_k$, temos particularmente

$$|a_{n_k} - l| \leq |I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \rightarrow 0.$$

Logo $a_{n_k} \rightarrow l$ quando $k \rightarrow +\infty$.

□

Definição 3.1.16 (Sequência de Cauchy). *Uma sequência é chamada de sequência de Cauchy se, $\forall \varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Teorema 3.1.17. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$ podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$. Em particular para $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_0} - a_n| < 1$. Assim

para $m, n \geq n_0$ temos que $a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Sejam α e β o menor e o maior elemento, respectivamente, do conjunto $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0+1}\}$. Então $a_n \in [\alpha, \beta] \forall n \in \mathbb{N}$. Logo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

□

Teorema 3.1.18. *Se uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy possui uma subsequência convergindo para l então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.*

Demonstração: A sequência (a_n) é de Cauchy então dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como l é um valor de aderência de (a_n) existe um $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - l| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.

□

Teorema 3.1.19 (Cauchy). *Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$. Então dado $\varepsilon > 0$, pela definição de convergência existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo usando a desigualdade triangular para $m, n > n_0$ obtemos $|a_m - a_n| \leq |a_m - l| + |l - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, logo a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy. Pelo Teorema 3.1.17 ela é limitada. Assim pelo Teorema de Weierstrass (ver Teorema 3.1.15) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Logo pelo Teorema 3.1.18 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

□

3.2 SÉRIES NUMÉRICAS

Nesta seção estenderemos a operação de adição (até agora definida para um número finito de números reais) de modo atribuir um significado a uma igualdade do tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$

$\dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$, na qual o primeiro termo é uma soma com uma infinidade de parcelas.

Note que não tem significado somar uma sequência infinita de números reais, na verdade o que o primeiro membro da igualdade acima exprime é o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$.

Assim, definiremos somas infinitas através de limites.

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Construiremos a partir dela uma nova sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos elementos são as somas:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

O número real S_n é denominado a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. A série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é dita convergente se a sequência $(S_n)_{n \geq 1}$ converge, ou seja, se existe $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S. \text{ Neste caso escrevemos } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S$$

Teorema 3.2.1 (Série Geométrica). *Seja $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} a \cdot q^k$ converge se $|q| < 1$ e diverge se $|q| \geq 1$. Se a série convergir então sua soma é $\frac{a}{1-q}$.*

Demonstração:

(i) Primeiramente vamos supor que $|q| = 1$.

$$\text{Se } q = 1 \text{ então a série } \sum_{k=0}^{+\infty} a \cdot q^k = a + a + a + \dots$$

Dáí $S_n = a + a + a + \dots + a = (n+1)a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$ dependendo do sinal de a , logo diverge.

Se $q = -1$ então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a \cdot q^k = a - a + a - a + \dots$

Neste caso $S_n = a, 0, a, 0, \dots$ que diverge.

(ii) Vamos supor agora que $|q| \neq 1$, seja

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}.$$

(1).

Multiplicando ambos os lados da equação (1) por q obtemos,

$$q \cdot S_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

(2).

Subtraindo a equação (1) e a equação (2), temos,

$$S_n - q \cdot S_n = a - aq^n \Rightarrow (1 - q)S_n = a - aq^n.$$

Que resulta em:

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}(1 - q^n)$$

Se $|q| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Por outro lado, se $|q| > 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} = +\infty$. pois $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$.

Neste caso a série $\sum_{k=1}^{+\infty} aq^k$ diverge.

□

O teorema seguinte mostra como operar com séries convergentes.

Teorema 3.2.2. *Seja $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ séries convergentes e c é um número real qualquer, então:*

$$(a) \text{ a série } \sum_{k=1}^{+\infty} ca_k \text{ converge e } \sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

$$(b) \text{ a série } \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) \text{ converge e } \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

Demonstração:

(a) Seja S_n a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, isto é, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Então a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k$ é cS_n . Pelo item (a) do Teorema 3.1.12, $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k$ converge, pois

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} cS_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = c \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

(b) Seja S_n e T_n as n -ésimas somas parciais das séries $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, respectivamente.

Então a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ é $S_n + T_n$. Logo, pelo item (b) do Teorema 3.1.12 temos a garantia de convergência de $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ e segue,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

□

Teorema 3.2.3. *Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Como $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é uma série convergente então existe $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Evidentemente $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$. Então $0 = S - S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

□

Veremos no teorema seguinte um importante critério para a convergência de séries de termos positivos.

Teorema 3.2.4. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de termos não negativos, então $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se, e somente se, a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de suas somas parciais é limitada.*

Demonstração: Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$, logo pelo teorema 3.1.13 a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se, e somente se, é limitada.

□

3.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES

Nesta seção veremos alguns critérios de convergência para séries. Chamaremos uma série de absolutamente convergente se a série dos módulos é convergente.

3.3.1 Teste da comparação

Teorema 3.3.1. *Dadas as sequências de números reais $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ tais que $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq 1$. Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é absolutamente convergente e $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.*

Demonstração: Sejam $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ e $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$, para $1 \leq n < m$. Temos que:

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| \\ &\leq b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_m \\ &= t_m - t_n. \end{aligned}$$

Temos que a sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ é convergente logo ela é de Cauchy. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $t_m - t_n < \varepsilon$. Usando a desigualdade acima, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n > n_0$ então $|s_m - s_n| < \varepsilon$, então a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ também é de Cauchy, logo é convergente.

Analogamente às desigualdades acima, concluímos que $|s_n| \leq t_n$ para todo $n \geq 1$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ obtemos:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |s_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

□

3.3.2 Teste da razão

Teorema 3.3.2. *Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ de termos não nulos, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$. Se $l < 1$, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é absolutamente convergente se $l > 1$ a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é divergente, e se $l = 1$ o teste é inconclusivo.*

Demonstração: Se $l < 1$, tomemos um número real q tal que $l < q < 1$. Dado $\varepsilon = q - l > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - l \right| < \varepsilon = q - l$.

Segue pela desigualdade triangular para $n \geq n_0$ que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - l \right| + l < q - l + l = q.$$

Logo para $n \geq n_0$ temos, $|a_n| = |a_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq |a_{n_0}| q^{n-n_0}$.

Dessa forma os termos da série $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ são menores ou iguais aos termos da série $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{n_0}| q^{k-n_0}$. Como $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-n_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{q^{n_0}}$ é convergente pelo Teorema 3.2.1 a série $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| q^{k-n_0}$ converge, já que $q < 1$. Assim pelo Teorema 3.3.1 a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge absolutamente.

Se $l > 1$, tomando q um real tal que $1 < q < l$ e, como acima, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q$. Então, também como acima, temos $|a_n| \geq |a_{n_0}| q^{n-n_0}$ para $n \geq n_0$. Mas, sendo esse o caso, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, logo a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge, pelo Teorema 3.2.3.

□

3.3.3 Teste da Raiz

Teorema 3.3.3. *Seja $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ uma série numérica e a constante l definida pelo limite, quando existir: $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ então se $l < 1$, a série converge absolutamente, e se $l > 1$ a série*

diverge, e se $l = 1$, o teste é inconclusivo.

No caso de o limite não existir, este teste ainda é válido, substituindo a definição l por:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}$$

Demonstração: Vamos dividir esta demonstração em duas partes, como segue;

(i) Para $l < 1$.

Seja $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}$, e dado $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Como $l < 1$, $\varepsilon > 0$ e, portanto, existe um $N > 0$ tal que, $\sqrt[k]{|a_k|} < l + \varepsilon$, sempre que $n > N$ de forma que:

$$\sqrt[k]{|a_k|} < l + \varepsilon < l + \frac{1-l}{2} = 1 + \frac{l-1}{2} = 1 - \varepsilon < 1.$$

Logo, $|a_k| < (1 - \varepsilon)^k$, $k > N$ e o teste da comparação, Teorema 3.3.1, permite concluir que a série converge, comparando-a com a série geométrica, ver Teorema 3.2.1, de razão $q = 1 - \varepsilon < 1$

(ii) Para $l > 1$.

Seja $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, então existe $u > 1$ e uma subsequência $(a_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ tal que:

$$\sqrt[k_j]{|a_{k_j}|} \geq u, \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

e conseqüentemente:

$$|a_{k_j}| \geq u^{k_j}, \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Logo } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k| = \infty$$

Portanto a série não converge.

□

4 RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA

Voltando ao problema 2.5.1, no qual foi observado o sexto compasso da Figura 2.12 notamos que não é possível preencher com figuras musicias sem pontuação de maneira que todas sejam diferentes. Supondo que os três primeiros tempos estejam definidos por uma mínima que neste compasso vale dois tempos e uma semínima, que vale um tempo, vamos a partir de agora, analisar o quarto tempo que tem repetição de uma semifusa.

Note que os valores das figuras musicais, (Figura 2.9), formam uma sequência cujo termo geral é $a_n = (\frac{1}{2})^n$, ou seja, a razão entre as figuras é $\frac{1}{2}$. Assim podemos construir figuras que não estão associadas a nomes.

Reescrevendo o preenchimento do compasso quaternário com n figuras, observando a razão $\frac{1}{2}$ entre elas, onde a enésima forma dos dois últimos tempos é dada por.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Seja Q_n a composição da enésima forma de preenchimento do compasso quaternário Q , então

$$Q_n = 2 + S_n + \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Então } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Em que } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ é uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$, segue que esta série converge para $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

$$\text{Além disso, tem-se que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$\text{logo } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 2 + 2 + 0 = 4.$$

Portanto, embora não seja possível preencher o compasso com figuras musicais não repetidas ou sem pontuação, esta repetição, para um n grande converge para zero, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

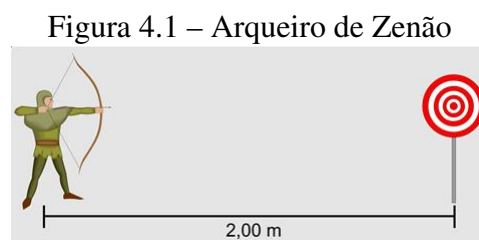
Usaremos este resultado para comparar com o paradoxo de aproximadamente 430 a.C. proposto por Zenão, para isto será feito alguns ajuste no sistema de medida utilizado na divisão dos tempos musicais.

4.1 PARADOXO DE ZENÃO

Por volta de 489 a.C nasceu em Eléia o filósofo Zenão, este foi o mais conhecido seguidor de Parmênides. Existem pouco relatos histórico de Zenão, um dos relatos defende que seu pai seria Teleutágoras conhecido pela coragem demonstrada na participação de uma conspiração contra um tirano. Platão testemunhava que os problemas elaborados por Zenão, tinha por objetivo defender teses apresentadas por Parmênides.

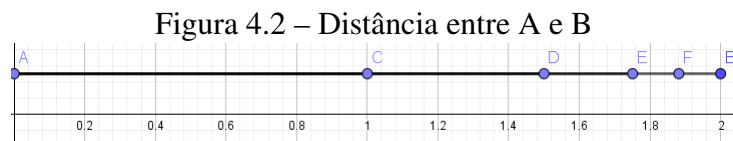
Um dos problemas apresentados por Zenão, foi o paradoxo da flecha disparada. Este paradoxo fala que um arqueiro está distante X metros do alvo. Admitindo que a flecha ao ser lançada percorra sempre a metade do caminho restante é possível que a flecha alcance o alvo?

Sendo a distância do arqueiro e o alvo de 2 metros temos o problema conforme a Figura 4.1.



Fonte: <http://www.mat.uc.pt>

Primeiramente, veremos a tentativa de resolução apresentada pela ideia euclideana. Dados dois pontos $A = 0$ e $B = 2$, saindo do ponto A para alcançar o ponto B, antes temos que passar pelo ponto C, que é o ponto médio de AB, Partindo agora de C para chegar em B é necessário passar pelo ponto D, ponto médio de CB, esse processo deve ser repetido sucessivamente.



Fonte: Autor

Na visão geométrica, ver figura 4.2, nunca chegaremos ao ponto B, pois partindo do ponto 0 em direção ao ponto 2, sempre teremos que passar pelo ponto médio do espaço restante até o ponto B, ou seja:

$$\overline{AC} = 1, \overline{AD} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \overline{AE} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \overline{AF} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8},$$

$$\overline{AG} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}, \dots$$

Dessa forma temos que $\overline{AC} < 2, \overline{AD} < 2, \overline{AE} < 2, \overline{AF} < 2, \overline{AG} < 2, \dots$

Como esclarecer este paradoxo à luz do conhecimento atual?

Note que, intuitivamente, vimos a crer que a flecha irá atingir o alvo após infinitas aproximações. Assim para resolver este problema precisamos usar o conceito de soma infinita ou série.

Em notação matemática podemos representar este problema da forma

$$\overline{AB} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Seja S_n a n ésima soma parcial da série $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, pois a série dada é uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{2} < 1$.

Portanto concluímos que após percorrer uma quantidade infinita de intervalos cada vez menores, a flecha de fato percorrerá a distância total de 2 metros.

Adaptando o paradoxo para linguagem da música, podemos comparar a distância do arqueiro até o alvo, como um compasso musical $\frac{2}{4}$, isto é, no lugar de calcularmos a distância de 2 metros, substituiremos por calcular dois tempos de um compasso binário. No paradoxo a flecha percorre sempre a metade do espaço restante, isto pode ser substituído pelo preenchimento do compasso com figura musical que tenha a metade do valor de tempo restante para completar o compasso.

Como vimos no capítulo 2, a notação musical tem nomeação até a semifusa nas figuras de menor valor, porém vamos supor que não exista essa limitação. Inicialmente teremos uma escrita musical semelhante à Figura 4.3.

Figura 4.3 – Compasso Inicial Binário



Fonte: Autor

Usando os conhecimentos das divisões apresentadas no início deste capítulo, notemos que os valores das figuras (Figura 4.3) formam uma sequência cujo termo geral é $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ou seja, a razão entre as figuras é $\frac{1}{2}$.

Preenchendo o compasso binário com n figuras, onde a n ésima forma é dada por.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Seja B o compasso binário, onde $B_n = S_n + \frac{1}{2^n}$.

$$\text{Então } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Agora note que } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ é uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$.

Segue que esta série converge para $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Além disso $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

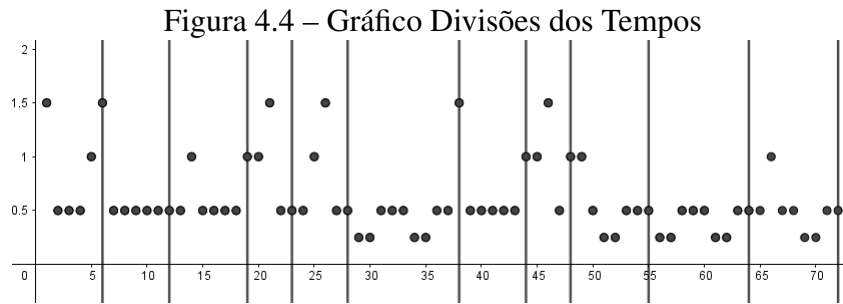
$$\text{Logo } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 2 + 0 = 2.$$

4.2 ESTUDANDO AS DIVISÕES DOS TEMPOS DE UMA PARTITURA

Para analisar as divisões dos tempos de uma partitura, foi selecionada uma parte da obra *Messiah* de Georg Friedrich Händel (1685-1759). A obra completa tem 51 movimentos divididos em 3 partes, sua apresentação dura aproximadamente 2 horas e 20 minutos. Precisamente, foi escolhido o 42º movimento, o famoso “Aleluia” que é conhecido pela maioria das pessoas, mesmo não sendo conhecedores da obra completa.

Foi lido a escrita do primeiro violino em onze compassos quaternários, ver trecho no apêndice B, nestes compassos a partitura apresentou três figuras musicais; semínima, colcheia e semicolcheia, o resultado foi analisado gráficamente no *GeoGebra* conforme Figura 4.4.

Observando o gráfico apresentado na Figura 4.4, notamos que a escrita permanece na maioria da execução dos compassos em notas de meio tempo, isto é, em colcheias. O tempo das divisões são de grande relevância para interpretação de uma música, porém nunca é analisado desta forma, sem a preocupação com altura da nota.



Fonte: Autor

4.3 ESCALA PITAGÓRICA

Na introdução vimos a grande contribuição que Pitágoras proporcionou para a relação entre música e matemática, também foi destacada a criação do monocórdio o qual estudaremos agora com mais detalhes.

A afinação da corda do monocórdio que Pitágoras usou para seu estudo é uma grande incógnita. Porém, isso não interfere na relevância do conteúdo, uma vez que, o interessante é a relação do som gerado pelo toque na corda solta e os outros sons obtidos quando pressionada a corda em posições diferentes. As notas originadas destas divisões, representam na escala atual, a oitava, a quinta e a quarta, relativas à tônica.

A oitava pode ser obtida pressionando a corda na metade de seu comprimento, a nota gerada representa a mesma nota gerada pelo toque da corda solta, porém mais aguda. Esse experimento pode ser feito e obtido o mesmo resultado, com instrumentos de cordas como; violinos, violão, violoncelo, etc.

Podemos encontrar outras oitavas superiores nas seguintes frações $\frac{c}{2}, \frac{c}{4}, \frac{c}{8}, \dots, (\frac{1}{2})^n c$. Ou seja, a cada grupo de sete notas repete-se a nota original porém cada vez mais aguda.

A quinta é encontrada quando a corda é tocada pressionada na razão de $\frac{2}{3}$ do comprimento total da corda. Em processo semelhante encontramos a quarta, porém a corda deve ser tocada pressionada na razão de $\frac{3}{4}$ do comprimento total da corda.

Também encontramos quartas em oitavas superiores da seguinte forma $\frac{3c}{4}, \frac{3c}{8}, \frac{3c}{16}, \dots, (\frac{1}{2})^n \cdot \frac{3c}{4}$,

semelhantemente as quintas são encontradas nas frações $\frac{2c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{6}, \dots, (\frac{1}{2})^n \cdot \frac{2c}{3}$.

Os gregos admiravam os sons harmoniosos e isso era obtido dividindo a corda em frações simples. Para os pitagóricos, a consonância era mais bela quanto mais simples seria a relação proporcional entre os sons. Essa observação dos pitagóricos pode ser claramente percebida no estudo do monocórdio, onde a nota tônica, oitava, quinta e quarta, podem ser representada pelas seguintes frações: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

Segundo (ABDOUNUR, 2015, p. 28) os pitagóricos tinham uma apreciação pelos números envolvidos nestas frações.

O Pensador de Samos justificou a subyacência de pequenos números inteiros às consonâncias pelo fato de que os números 1, 2, 3 e 4 - envolvidos nas frações mencionadas - geravam toda a perfeição. Os pitagóricos consideravam o número quatro - primeiro quadrado par - origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos integradores: o fogo, o ar, a terra e a água.

Quando observamos os denominadores das frações, descobrimos coisas místicas dos números usados pela escola pitagórica. Basta reescrever as frações acima da seguinte forma:

$$\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}.$$

Os números 6, 8, 9 e 12 que surgem nas frações, foram relacionados misticamente pelos pitagóricos, com média aritmética, média harmônica e proporção, como segue.

A média aritmética entre seis e doze resulta o número nove, $\frac{6+12}{2} = 9$.

A média harmônica entre seis e doze resulta o número oito, $\frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 8$.

Os números seis, oito, nove e doze formam uma proporção $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$.

Estas características notadas nestes números, reforçavam a beleza da escala pitagórica para os gregos e fortalecia a relação dos resultados musicais com a matemática.

4.3.1 Construção da Escala Pitagórica

A escala diatônica definida pelas sete notas musicais, é resultado de estudos das proporções descobertas por Pitágoras. Primeiramente, a escala possuía somente quatro sons e ao longo do tempo foi evoluindo até chegar às sete notas.

Para seguir este estudo, convencionamos que a primeira oitava será representada pela seguinte notação, $Dó_1$, $Ré_1$, Mi_1 , $Fá_1$, Sol_1 , $Lá_1$, Si_1 e $Dó_2$, em que $Dó_2$ é a repetição de $Dó_1$ uma oitava acima, (Figura 4.5). Assim representaremos a n -ésima oitava pelo intervalo de $Dó_n$ até $Dó_{n+1}$.

É fundamental supor que a corda do monocórdio de Pitágoras era afinada em dó, caso contrá-

Figura 4.5 – Intervalo de Oitava

$Dó_1$	$Ré_1$	Mi_1	$Fá_1$	Sol_1	$Lá_1$	Si_1	$Dó_2$
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
C			$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$			$\frac{1c}{2}$

Fonte: Autor

rio, o estudo procederia analogamente. No entanto, esta suposição facilita o entendimento das relações que usaremos para construção da escala pitagórica.

Para encontrar as notas musicais anteriores e posteriores, geralmente é utilizado o Ciclo das Quintas. Podemos relacionar a quinta a um comprimento de uma corda, que será determinada por $Q = \frac{2}{3} \cdot X_n$, tal que Q é a quinta e X_n é uma nota na n -ésima oitava.

O Ciclo das Quintas pode ser determinado da seguinte forma: escolhida uma nota como referência, podemos encontrar sua quinta, e novamente encontrar a quinta relativa a quinta já encontrada.

Por simplicidade de notação, usaremos $Dó_1$ como nota de referência, ou seja, o comprimento c total da corda quando tocada é $Dó_1$. De forma genérica, a m -ésima quinta que pertencerá a n -ésima oitava, pode ser encontrada na seguinte equação:

$$Q_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot Dó_1$$

Assim, vamos construir a quinta de $Dó_1$, $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$, logo essa fração é equivalente a nota Sol_1 .

A quinta de Sol_1 é, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, logo é equivalente a nota $Ré_2$, como está uma oitava acima, o comprimento da corda deve ser dobrado para representar $Ré_1$, ou seja, $2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.

A quinta de $Ré_1$ é, $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$ que é equivalente a $Lá_1$.

A quinta de $Lá_1$ é, $\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$ que é equivalente a Mi_2 , como está uma oitava acima, o comprimento da corda deve ser dobrado para representar Mi_1 , ou seja, $2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$.

A quinta de Mi_1 é $\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$ que é equivalente a nota Si_1 .

Notamos que para transportar as notas $Ré_2$ e Mi_2 a fração foi multiplicada por dois. Esse procedimento pode ser feito com qualquer nota que esteja na segunda oitava, isto é, entre $Dó_2$ e $Dó_3$, para transportá-lá para primeira oitava.

Genericamente, o comprimento de uma corda na oitava de ordem n , isto é, entre $Dó_n$ e $Dó_{n+1}$, é definida pelo intervalo, $[(\frac{1}{2})^n, (\frac{1}{2})^{n-1}]$ com $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, para transportar uma nota X_n de qualquer oitava para a primeira oitava basta usar a equação $X_1 = 2^{n-1} \cdot X_n$.

Finalmente, com os cálculos acima, podemos definir a relação dos comprimentos das cordas para cada nota em relação com a corda solta, conforme Figura 4.6.

Figura 4.6 – Intervalo de Oitava Completo

Dó ₁	Ré ₁	Mi ₁	Fá ₁	Sol ₁	Lá ₁	Si ₁	Dó ₂	
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	
C	$\frac{8c}{9}$	$\frac{64c}{81}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{16c}{27}$	$\frac{128c}{243}$	$\frac{1c}{2}$	

Fonte: Autor

4.3.2 Simplificações de Zarlino

Verificando que algumas razões entre os intervalos e comprimentos de cordas descobertas pelos pitagóricos eram tanto quanto complicadas (Figura 4.6), o Teórico italiano de Chioggia Gioseffo Zarlino propôs algumas simplificações. Estas mudanças foram facilmente acolhidas pela simplicidade das novas razões apresentadas.

As alterações ocorreram nos intervalos de terça, sexta e sétima, conforme Figura 4.7.

Figura 4.7 – Intervalo de Oitava de Zarlino

Dó ₁	Ré ₁	Mi ₁	Fá ₁	Sol ₁	Lá ₁	Si ₁	Dó ₂	
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	
C	$\frac{8c}{9}$	$\frac{4c}{5}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{3c}{5}$	$\frac{8c}{15}$	$\frac{1c}{2}$	

Fonte: Autor

Na seção 4.5 veremos estas informações na prática, através de um programa elaborado pelo autor. O programa foi construído em linguagem VBA *Visual Basic for Applications*, com

o objetivo de auxiliar na criação de um monocórdio ou outro instrumento de corda.

4.4 FREQUÊNCIA DA NOTA

Podemos definir frequência como a característica do som que pode ser classificada em agudo ou grave. As frequências altas geram sons mais agudos, ou seja, estridentes, enquanto que as frequências baixas geram sons mais graves.

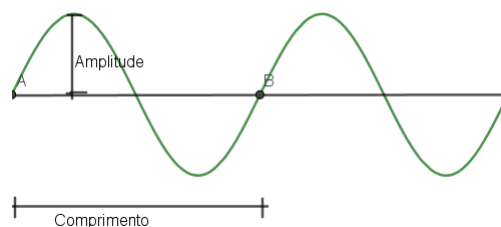
A frequência também é conhecida por velocidade de oscilação; sua amplitude é medida em Hertz (Hz) e a energia ou intensidade em decibéis. É interessante ressaltar que o ouvido humano é capaz de detectar frequências no intervalo de 20Hz a 20.000 Hz. As frequências abaixo de 20Hz são chamadas de infrassom, e acima de 20.000 hz de ultrassom.

4.4.1 Ondas Sonoras

O som se propaga em forma de ondas mecânicas que vibram em uma certa frequência, ver figura 4.8. Cada onda sonora é única, e a velocidade, frequência, amplitude e comprimento definem-na.

A amplitude é altura da onda, ou seja, a distância entre o eixo da onda e o pico.

Figura 4.8 – Ondas Sonoras

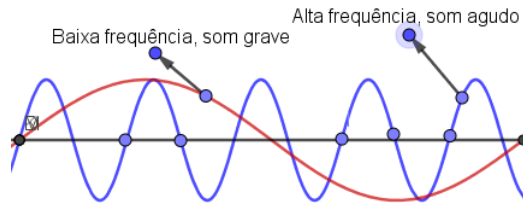


Fonte: Autor

Quanto maior for a quantidade de energia transportada, conhecido como volume, maior será a amplitude. É a amplitude de uma onda sonora que determina a intensidade do som que é medida em decibéis (dB).

Frequência é o número de oscilações da onda num certo período de tempo, (Figura

Figura 4.9 – Frequências



Fonte: Autor

4.9). Geralmente a medida utilizada é Hertz, se uma frequência é X Hz, isto significa que a onda completa X ciclos em 1 segundo.

O tempo necessário para se completar uma onda ou ciclo é chamado de período. O período e a frequência são grandezas inversas, ou seja, $f = \frac{1}{P}$ onde f é a frequência e P é o período medido em segundos.

O tamanho de uma onda é chamado de comprimento, ou seja, é a distância percorrida pelo som durante o período de vibração. Vamos representar o comprimento pela letra grega *lambda* (λ).

As ondas possuem uma velocidade (v), que pode ser definida como a distância percorrida pelo tempo gasto. Isto é, a velocidade é diretamente proporcional à frequência e ao comprimento da onda, assim temos:

$$v = \frac{\lambda}{P} = \lambda \cdot \frac{1}{P}$$

portanto,

$$v = \lambda \cdot f.$$

4.4.2 Relação Entre Notas e Frequência

Como vimos na introdução, o matemático francês Marin Mersenne fez uma relação entre o comprimento de uma corda esticada e a frequência da nota que ela produz. Dos experimentos mencionado na introdução, resultou a seguinte fórmula:

$$f = \frac{n}{2\lambda} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

Nesta fórmula temos que, f é a frequência da nota em vibrações por segundo, ou ciclos por Hertz, λ é o comprimento da corda em centímetros, n é um inteiro, T é a força ou tensão dada sobre a corda, medida em *Newtons*, e m é massa em gramas por centímetro de corda.

Na seção 4.4.1, observamos que o período e a frequência são grandeza inversas, isso ocorre também com a frequência e o comprimento da corda. Portanto, quanto maior for o comprimento da corda, menor será a frequência, e conseqüentemente, quanto menor for o comprimento da corda, maior será a frequência da nota. Na prática significa que se o comprimento da corda for maior o som será mais grave, e se o comprimento da corda for menor o som por ela produzida será mais agudo.

Dada a frequência da nota Lá da oitava mediana de um piano que é 440Hz, e utilizando a relação apresentada na figura 4.7, podemos encontrar as frequências das notas usando os cálculos dos comprimentos das cordas.

Sabendo que o comprimento da corda é inversamente proporcional à frequência, temos que $\frac{lá}{dó} = \frac{440Hz}{f.Hz} = \frac{\frac{3c}{5}}{c}$ como são inversamente proporcionais, invertemos uma das frações: $\frac{440Hz}{f.Hz} = \frac{c}{\frac{3c}{5}}$ e daí temos que $f = 264$. Repetindo este procedimento chegamos ao resultado apresentado na figura 4.10.

Figura 4.10 – Relação Frequência e Nota

Dó ₁	Ré ₁	Mi ₁	Fá ₁	Sol ₁	Lá ₁	Sí ₁	Dó ₂	
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	
264	297	330	352	396	440	495	528	Hertz (Hz)

Fonte: Autor

A razão entre os comprimentos das cordas e a razão entre as frequência das notas, acabaram apresentando uma diferença notória em outras oitavas, isso acontecia devido a aproximação, ou seja, tornava impossível acertar uma afinação em um instrumento com mais de uma oitava.

Para resolver esse problema, em 1635 o matemático e músico Marin Mersenne propôs o sistema de afinação suave, conhecido atualmente como escala temperada. Diferentemente da mudança proposta por Zalino que foi rapidamente aceita, o sistema de Mersenne só foi acolhido após as composições de Johann Sebastian Bach "O Cravo Bem Temperado" em 1722 e 1744.

4.4.3 Escala Temperada

O sistema de afinação suave consiste no pensamento que o intervalo entre as notas são semelhantes, isto é, cada nota é alcançada pela multiplicação da frequência da nota anterior por um valor (i), que veremos.

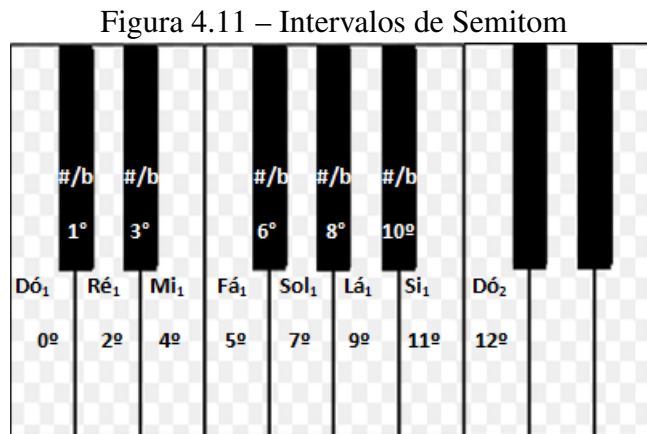
Primeiramente, é necessário buscar algumas definições na música, uma delas é que o \sharp (sustenido) aumenta a altura de uma nota em um semitom e o b (bemol) diminui a altura de uma nota musical em um semitom.

A escala maior é produzida obedecendo a construção da escala de dó, isto é, cinco tons e dois semitons na seguinte sequência; tom, tom, semitom, tom, tom, tom e semitom. Se observarmos o teclado de um piano, a escala de dó corresponde as tecla brancas, e onde entre duas teclas brancas não existe uma tecla preta o intervalo é de um semitom.

A escala menor natural é obtida elevando um semitom na terceira, sexta e sétima nota da escala maior, dessa forma a sequência menor é a seguinte: tom, semitom, tom, tom, semitom, tom e tom.

Os intervalos de uma oitava podem ser contados da seguinte forma: dó-dó \sharp , dó \sharp -ré, ré-ré \sharp , ré \sharp -mi, mi-fá, fá-fá \sharp , fá \sharp -sol, sol-sol \sharp , sol \sharp -lá, lá-lá \sharp , lá \sharp -si, si-dó, logo uma oitava possui 12 intervalos. É importante observarmos que dó \sharp e ré b representam a mesma altura ou frequência.

Sabendo que uma oitava possui 12 intervalos (Figura 4.11) e a frequência da nota



Fonte: Autor

dobra após os 12 intervalos, segue que a relação $i^{12} = 2$ é verdadeira. Sendo assim, é possível determinar o valor do intervalo (i) que foi proposta por Mersene, ou seja, se $i^{12} = 2$ então $i = 2^{\frac{1}{12}}$ e portanto $i \approx 1,0594631$.

Podemos perceber pela Figura 4.12, que a escala temperada não possui grande diferença do ajuste apresentado por Zarlino, além disso, a escala temperada permite realizar a afinação em outras oitavas distantes da mediana sem perder a afinação. Este resultado deve-se a relação estar em escala logarítmica.

Figura 4.12 – Diferença Entre Escala Temperada e Escala de Zarlino

Dó ₁	Ré ₁	Mi ₁	Fá ₁	Sol ₁	Lá ₁	Si ₁	Dó ₂			
261,6	296,6	329,6	349,2	391,9	440	493,8	523,2 (Hz)			
264	297	330	352	396	440	495	528 (Hz)			

Fonte: Autor

Usando novamente o fato da frequência ser inversamente proporcional ao comprimento da corda, podemos encontrar pela escala temperada a relação do comprimento da corda. Este resultado pode ser visto pelo programa gerador de escala que será apresentado na seção 4.5 (Figura 4.15).

4.5 GERADOR DE ESCALA

O programa Gerador de Escala (Figura 4.13) foi desenvolvido na linguagem VBA *Visual Basic for Applications* com o objetivo de auxiliar na criação de um monocórdio ou estudar outro instrumento de corda.

O programa usa os conceitos matemáticos desenvolvidos por Pitágoras para o entendimento dos intervalos das notas musicais. Além disso, também apresenta as simplificações da escala pitagórica feita por Gioseffo Zarlino e o sistema de afinação suave do matemático e músico Marin Mersenne.

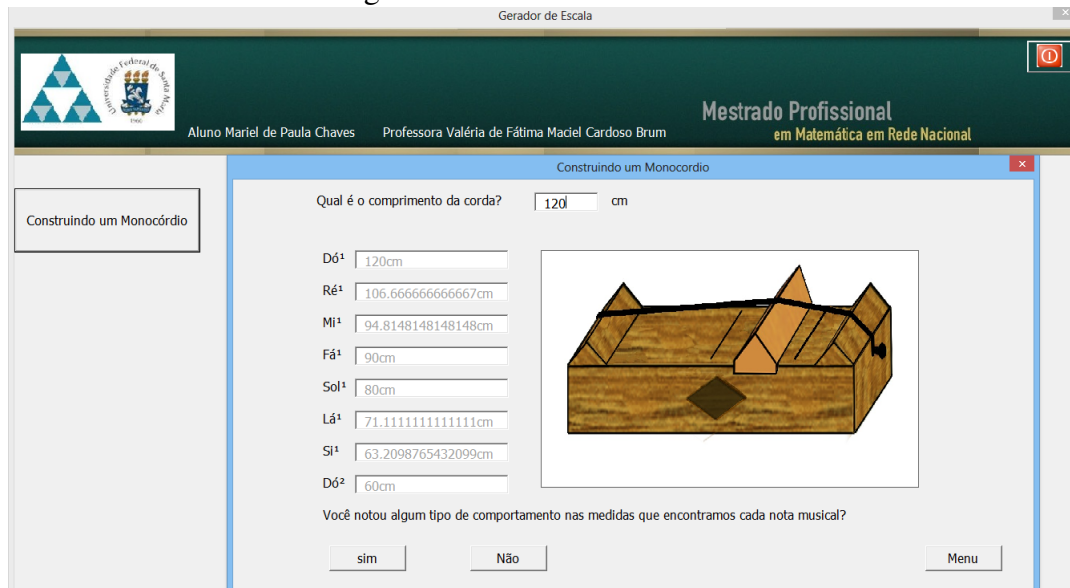
No apêndice A temos o manual detalhado da construção de um monocórdio, porém o estudo e características dos intervalos apresentado neste instrumento, pode ser perfeitamente entendida pelo programa, assim como analisar a relação entre escalas.

O *Visual Basic for Applications* (Figura 4.14) é uma ferramenta da *Microsoft* que trabalha como uma linguagem de programação, permitindo a criação de macros e a automatização de diversos processos dentro de aplicativos do *Microsoft Office*.

4.5.1 Construção do Programa Gerador de Escala

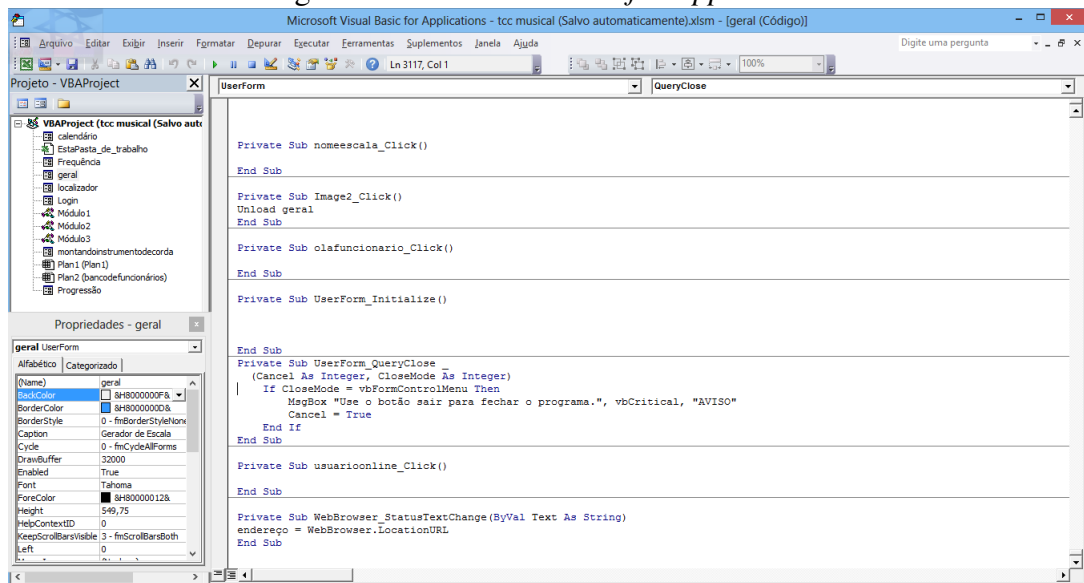
Primeiramente foi criado o *UserForm* necessário, isto é, a página que recebe os dados e apresenta os resultados obtidos. A segunda etapa, foi escrever a lógica na programação e inserir os comandos de conexão entre os *UserForm*.

Figura 4.13 – Gerador de Escala



Fonte: Autor

Figura 4.14 – Visual Basic for Applications



Fonte: Autor

As informações dos resultados da escala pitagórica são preenchidas por comando que relaciona a informação inserida no campo comprimento da corda, e multiplicada pela razão pitagórica da nota musical, este produto é dividido por 10 para que o resultado seja apresentado em centímetro, segue a lógica escrita.

$\text{caixatexto_do} = \text{caixatexto_comprimentodacorda} \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_re} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 8 / 90 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_mi} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 64 / 810 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_fa} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 3 / 40 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_sol} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 2 / 30 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_la} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 16 / 270 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_si} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 128 / 2430 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_do2} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / 20 \& \text{“cm”}$

Repetindo o processo da escala pitágorica as informações da simplificação de Zarlino são preenchidas, porém é multiplicada pela razão simplificada apresetado por Zarlino, como segue a programação:

$\text{caixatexto_doz} = \text{caixatexto_comprimentodacorda} \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_rez} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 8 / 90 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_miz} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 4 / 50 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_faz} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 3 / 40 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_solz} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 2 / 30 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_laz} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 3 / 50 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_siz} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 8 / 150 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_do2z} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / 20 \& \text{“cm”}$

O mesmo ocorre nas caixas de texto da escala temperada, uma vez que são preenchidas de forma análoga ao preenchimento da caixa de texto da escala pitagórica, no entanto é multiplicada pela razão apresentada por Mersenne, como segue a escrita.

$\text{caixatexto_dot} = \text{caixatexto_comprimentodacorda} \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_ret} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / (2 \hat{2} / 12) * 10 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_mit} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / (2 \hat{4} / 12) * 10 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_fat} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / (2 \hat{5} / 12) * 10 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_solt} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / (2 \hat{7} / 12) * 10 \& \text{“cm”}$
 $\text{caixatexto_lat} = (\text{caixatexto_comprimentodacorda} + \text{“0”}) * 1 / (2 \hat{9} / 12) * 10 \& \text{“cm”}$

caixatexto_sit = (caixatexto_comprimentodacorda + "0") * 1 / (2 $\hat{11}$ / 12) * 10) & "cm"

caixatexto_do2t = (caixatexto_comprimentodacorda + "0") * 1 / (2 $\hat{12}$ / 12) * 10) & "cm"

A programação das frequências das notas por oitava, foram feitas respeitando a Escala Temperada, ou escala suave como foi apresentada por Mersenne. Desta forma a lógica de apresentação dos resultados, foram escritas do seguinte modo.

caixa_frequenciado = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 261.6) & "Hz"

caixa_frequenciare = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 296.6) & "Hz"

caixa_frequenciami = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 329.6) & "Hz"

caixa_frequenciafa = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 349.2) & "Hz"

caixa_frequenciasol = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 391.9) & "Hz"

caixa_frequenciala = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 440) & "Hz"

caixa_frequenciasi = (2 $\hat{caixa_oitava}$) * 493.8) & "Hz"

As demais lógicas utilizadas no programa Gerador de Escala, seguem a linguagem de programação em VBA.

4.5.2 Comparação Entre Escalas

Utilizando o programa é possível comparar as relações dos comprimentos das cordas entre a escala pitagórica, as simplificações de Zarlino e a escala temperada apresentada por Mersenne (Figura 4.15).

Analisando as relações apresentadas pelo Gerador de Escala, fica claro o motivo pelo qual a proposta de Zarlino foi rapidamente aceita. Por outro lado, não é difícil entender a resistência que a proposta de Marin Mersenne enfrentou.

4.5.3 Frequência no Programa Gerador de Escala

O programa gerador de escala também auxilia no estudo das frequências. Ele está programado para respeitar a proposta feita por Mersenne em 1635 que foi estudado na seção 4.4.3.

Figura 4.15 – Gerador de Escala Temperada

Qual é o comprimento da corda? cm

	Escala Pitagórica	Simplificação de Zarlino	Escala Temperada
Dó¹	<input type="text" value="126cm"/>	<input type="text" value="126cm"/>	<input type="text" value="126cm"/>
Ré¹	<input type="text" value="112cm"/>	<input type="text" value="112cm"/>	<input type="text" value="112.253238485683cm"/>
Mi¹	<input type="text" value="99.5555555555556cm"/>	<input type="text" value="100.8cm"/>	<input type="text" value="100.006266273997cm"/>
Fá¹	<input type="text" value="94.5cm"/>	<input type="text" value="94.5cm"/>	<input type="text" value="94.3933458432309cm"/>
Sol¹	<input type="text" value="84cm"/>	<input type="text" value="84cm"/>	<input type="text" value="84.0949108127122cm"/>
Lá¹	<input type="text" value="74.6666666666667cm"/>	<input type="text" value="75.6cm"/>	<input type="text" value="74.9200482451714cm"/>
Si¹	<input type="text" value="66.3703703703704cm"/>	<input type="text" value="67.2cm"/>	<input type="text" value="66.7461749446356cm"/>
Dó²	<input type="text" value="63cm"/>	<input type="text" value="63cm"/>	<input type="text" value="63cm"/>

Você notou algum tipo de comportamento nas medidas que encontramos cada nota musical?

Fonte: Autor

No programa basta informar qual oitava deseja estudar, e automaticamente ele fornece a frequência de cada nota na referida oitava, conforme figura 4.16.

Figura 4.16 – Gerador de Escala e Frequência

Frequência

	-4 Oitava	-3 Oitava	-2 Oitava	-1 Oitava	Oitava Central	1 Oitava	2 Oitava	3 Oitava	4 Oitava	5 Oitava	6 Oitava
Dó	<input type="text" value="261,6Hz"/>										
Ré		<input type="text" value="296,6Hz"/>									
Mi			<input type="text" value="329,6Hz"/>								
Fá				<input type="text" value="349,2Hz"/>							
Sol					<input type="text" value="391,9Hz"/>						
Lá						<input type="text" value="440Hz"/>					
Si							<input type="text" value="493,8Hz"/>				

A faixa da frequência audível ao ouvido humano, está entre 20 Hz a 20.000Hz. As frequências abaixo de 20Hz são chamadas de infrassom, e acima de 20.000 hz de ultrassom.

Fonte: Autor

4.6 NÚMEROS DE FIBONACCI NAS FREQUÊNCIAS

Foi a partir do crescimento de uma população de coelhos, que em 1202 o matemático italiano Leonardo de Pisa (Figura 4.17), descobriu a sequência de Fibonacci. Esta sequência pode ser percebida em diversos fenômenos da natureza como nas conchas, na espiral das pinhas, abacaxis, sementes no centro de girassóis e margaridas, na distribuição das folhas nos caules, nas pétalas de algumas flores e também nas galáxias.

A sequência de Fibonacci é uma sucessão infinita de números começando com 0 e

Figura 4.17 – Leonardo de Pisa



Fonte: <http://www.dec.ufcg.edu.br>

1, os demais números podem ser encontrados pela soma dos dois números anteriores, isto é, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... . Escrevendo de forma genérica temos a seguinte forma $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Os estudos das sequências de Fibonacci buscam na música os padrões em acordes que soam suave aos ouvidos. Algumas proporções entre duas notas estão relacionadas aos números de Fibonacci, como o dó afinado em 264 Hz e o lá em 440 Hz, que estão numa proporção de 3/5. Essas combinações são conhecidas como naturalmente perfeitas.

Nas escala do piano são identificados os números de Fibonacci. Pois a escala é composta por 13 teclas sendo 8 brancas e 5 pretas, Além disso, as teclas pretas estão em grupos de 3 ou 2, conforme Figura 4.18.

Nas escalas básicas o complemento natural da 1ª nota de um acorde é construída pela 3ª, 5ª e 8ª nota, ou seja, temos os números de Fibonacci 1, 3, 5, 8. Os demais acordes não são

Figura 4.18 – Números de Fibonacci no Piano



Fonte: Autor

considerados naturais, e já foram chamados de *diabolus in musica* quando tais acordes eram proibidos. Além disso, estes acordes continuam sendo apreciados por poucos e considerados de difícil execução. O intervalo de quarta aumentada ou quinta diminuta não estão representados na sequência de Fibonacci, e não possuem um padrão matemático claro.

5 PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Com objetivo de apresentar uma atividade ao professor para ser aplicada em sala de aula no ensino médio, segue:

Título: Somando Figuras Musicais Distintas.

Pré-requisito: Conhecimento básico de preenchimento de compasso quaternário.

Objetivo: Apresentar o preenchimento de um compasso musical, utilizando ferramentas matemáticas.

Enunciado: Seja os valores de tempos das figuras musicais (Figura 5.1):

Figura 5.1 – Valores das Figuras

FIGURA	NOME	VALOR DO TEMPO
	SEMIBREVE	4
	MÍNIMA	2
	SEMÍNIMA	1
	COLCHEIA	$\frac{1}{2}$
	SEMICOLCHEIA	$\frac{1}{4}$
	FUSA	$\frac{1}{8}$
	SEMIFUSA	$\frac{1}{16}$

Fonte: Autor

Observe a Figura 5.2. Note que na primeira soma temos o resultado 2. Nas seguintes somas sempre foi acrescentada uma figura musical, tal que esta figura tenha a metade do valor da última figura acrescentada. Admitindo que existam outras figuras musicais obedecendo estas regras, qual seria a 11^{a} soma? Intuitivamente seguindo esta regra poderíamos preencher um compasso quaternário?

Figura 5.2 – Somas de Tempos

$$\text{♩} = 2$$

$$\text{♩} + \text{♩} = 2+1=3$$

$$\text{♩} + \text{♩} + \text{♪} = 2+1+1/2=7/2$$

$$\text{♩} + \text{♩} + \text{♪} + \text{♩} = 2+1+1/2+1/4=15/4$$

$$\text{♩} + \text{♩} + \text{♪} + \text{♩} + \text{♩} =$$

$$\text{♩} + \text{♩} + \text{♪} + \text{♩} + \text{♩} + \text{♩} =$$

Fonte: Autor

Solução:

Seja cada termo a_n da sequência, o valor do tempo de uma figura musical, e n a ordem da figura apresentada, ou seja:

a_1 é o valor da nota e 1 indica a primeira figura da soma, isto é, mínima.

a_2 é o valor da nota e 2 indica a segunda figura da soma, isto é, a semínima.

...

a_n é o valor da nota e n indica a enésima figura da soma.

Partindo disso, cada termo dessa sequência pode ser escrito em função do primeiro termo e da razão, ou seja:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = a_1q$$

$$a_3 = \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = a_1q^2$$

$$a_4 = \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = a_1q^3$$

$$a_5 = \frac{1}{8} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = a_1q^4$$

Logo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a_n = a_1q^n$

somando os termos, segue:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1}.$$

(1).

Multiplicando ambos os lados da equação (1) por q obtemos,

$$q.S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

(2).

Subtraindo a equação (1) e a equação (2), temos,

$$S_n - q.S_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow (1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

Que resulta em:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}(1 - q^n)$$

Portanto o valor da 11^{a} soma é $S_{11} = \frac{2}{1-(\frac{1}{2})}(1 - (\frac{1}{2})^{11}) \approx 3,9980469$.

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho foi possível vivenciar o bom relacionamento entre a música e a matemática. Desde dos primeiros relatos encontrados, notamos os desmedidos empenhos de grandes nomes da matemática para buscar o entendimento da ciência e da arte demonstrada na beleza musical.

Percebemos que a evolução da matemática trouxe teorias musicais mais complexas, e grandes dúvidas que permeavam a música foram provadas matematicamente sem perder a originalidade e característica musical. Identicamente, a evolução da notação musical foi substancial para o entendimento das complexidades que o tema exigiu.

Através de uma revisão literária de sequências e séries, ficou fortalecida a resposta matemática sobre a pergunta que acompanhava o autor, ou seja, não é possível teoricamente preencher um compasso $\frac{4}{4}$ sem utilizar figuras repetidas ou ponto de aumento, e a intuição de que na prática isso fosse possível, deve-se a repetição do último termo do compasso tender a zero.

Além disso, no desenvolvimento da resposta percebemos a existência de um paradoxo de Zenão, sobre a flecha atingir o alvo. Logo notamos que esse paradoxo poderia ser reescrito em tempos musicais e respondido de forma análoga ao questionamento do autor.

O estudo da escala pitagórica e as simplificações apresentadas por Gioseffo Zarlino despertaram a necessidade da elaboração de um programa que auxiliasse na construção e estudo do monocórdio. Dessa forma, foi elaborado um programa em linguagem VBA, que relacionou as escalas apresentadas e também o estudo das frequências do sistema de afinação suave apresentada por Marin Mersenne.

Logo foi percebido que o programa também poderia auxiliar no estudo de outros instrumentos de corda. O resultado apresentado foi satisfatório, pois além de possibilitar a comparação entre as escalas estudadas, mostrou coerência com a prática dos instrumentos.

A beleza sonora buscada pelos gregos nas frações simples, pôde ser evidenciada durante todo trabalho de tal forma que os números de Fibonacci, considerados por muitos como místicos, reforçaram a beleza musical que era afirmada na grécia. Também foi apresentada uma proposta de aula para o ensino médio envolvendo música e matemática.

Durante o trabalho percebemos que a linguagem matemática e a escrita musical aproximam-se, revelando a forte influência que os matemáticos tiveram na música. É inevitável a sensação de que os números governam as teorias musicais, ou como certa vez disse Leibniz segundo (ABDOUNUR, 2015, p. 239): “A música é um exercício de aritmética secreta e aquele que a ela se consagra ignora que manipula números”.

Todavia, este trabalho não é o ponto final do autor, pois existem conteúdos relacionados a física que serão estudados futuramente. Além disso, a criptografia musical encontrada em algumas obras, desperta para o estudos de obras famosas como “O Cravo Bem Temperado” de Johann Sebastian Bach e “*Messiah*” de Georg Friedrich Händel que serão estudadas.

Portanto, confiamos que o estudo de conteúdos matemáticos como ferramenta para música, será capaz de apresentar novos resultados, quem sabe mais um descobrimento encantador, fruto da beleza e da exatidão, da arte e da ciência.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música**. 1.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- CANTOS, M. R. **Messias: a história por trás do oratório**. 2001.61f. Monografia (Curso de Bacharel em Regência)-Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- CARVALHO, P. C.; CICCONE, M. **Música e Matemática em Três Episódios**. Disponível em: <<http://lvelho.impa.br/music-cnmac09/slides/ApresentacaoPC.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2017.
- COSTA, E. A. d. **Sobre o Movimento e o Paradoxo de Zenão**. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/jaimecs/mce13/textos/zenao.html-ftnref1>>. Acesso em: 20 set. 2017.
- DAVIS, R. **Music Theory Basics Part 3: key signatures**. Disponível em: <<http://blog.kennedyviolins.com/2013/01/music-theory-basics-part-3-key-signatures/>>. Acesso em: 9 jun. 2017.
- DESCARTES, R. **Compendium of Music**. Amstelodami: Apud Joannem Janssonium juniorum, 1956.
- LACERDA, O. **Regras de Grafia Musical**. 1.ed. São Paulo: Irmãos Vitale, 1968.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise: volume 1**. 7.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
- MED, B. **Teoria da Música**. 4.ed. Brasília: Musimed, 1996.
- MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- OLSON, H. F. **Music, Physics and engineering**. 2.ed. New York: Dover Publications, 1967.
- PALOMA VALEVA. **Origines de l'écriture Musicale**. Disponível em: <<https://palomavaleva.com/origine-des-notes-de-musique-ecriture-musicale/>>. Acesso em: 3 out. 2017.
- RAMEAU, J. P. **Treatise on harmony**. New York: Dover Publications, 1971.

SOUZA, M. M. **Os aspectos poético-musicais nas obras de Homero**: multitextualidade e performance (séc. viii a.c). 2017.252f. Tese (Doutorado em História)-Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

ZAMACOIS, J. **Teoria de la Música**: vol.1. 11.ed. Barcelona: Labor, 1975.

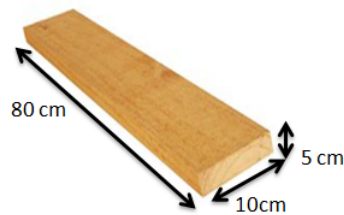
APÊNDICES

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DO MONOCÓRDIO

Este apêndice tem o como objetivo auxiliar na construção de um monocórdio de pitágoras, para isso, será necessário alguns materiais de fácil aquisição, como segue a lista:

Uma tábua (Figura A.1), de aproximadamente 80 cm de comprimento, 10 cm de largura

Figura A.1 – Tábua

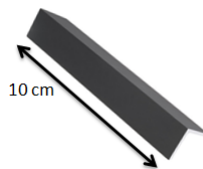


Fonte: Autor

e 5 cm de espessura;

Duas cantoneiras de metal de 10 cm de comprimento;

Figura A.2 – cantoneira



Fonte: Autor

Dois ganchos com rosca;

Figura A.3 – Ganchos



Fonte: Autor

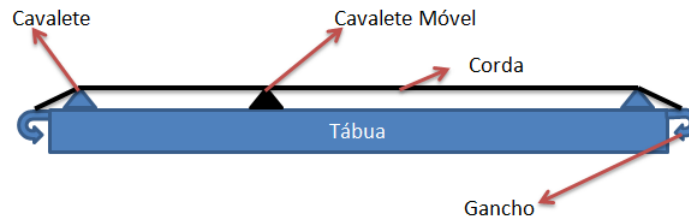
Um cavalete de madeira nas mesmas medidas do cavalete de metal;

Uma corda de nylon ou aço, pode ser uma corda de violão;

Uma régua com aproximadamente 80 cm.

Primeiramente fixamos nas extremidades da tábua os dois ganchos com rosca, que

Figura A.4 – Construção de Monocórdio



Fonte: Autor

servirão para segurar a corda tensionada. O próximo passo é instalar as cantoneiras de metal sobre a tábua.

Finalmente coloque a corda nos ganchos e tensione até a frequência desejada, depois é só correr o cavalete móvel nas proporções da escala pitagórica.

APÊNDICE B – PARTE DA PARTITURA DE HANDEL

Esta partitura foi retirado da obra *Messiah* de Georg Friedrich Händel (1685-1759), com o objetivo de estudarmos as divisões dos tempos musicais. Pelo fato da obra completa ser extensa, foram reescritos somente 12 compassos e adaptados para estudo.

Na edição desta partitura foi utilizado o programa *Encore versão 5.0.2*, este possibilita editar e executar uma partitura.

Chorus "Hallelujah!"

Allegro ♩ = 72

Georg Friedrich Handel (1685 - 1759)
Adaptada para estudo por Marlei de Paula Chaves

Oboe 1-2

Bassoon 1-2

Trumpet 1-2

Timpani

Violin 1

Violin 2

Viola

Violoncello

Contrabass

Soprano

Contralto

Tenor

Baixo

Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal
 Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal
 Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal
 Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal - le - lu - jah! Hal

This musical score is for the hymn "Hallelujah" in G major (one sharp) and 4/4 time. It consists of a vocal line and a piano accompaniment. The piano part includes a right-hand melody and a left-hand bass line. The vocal line has four parts: Soprano, Alto, Tenor, and Bass. The lyrics are:

le - - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le
le - - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le
le - - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le
le - - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le - lu - jah!	Hal - le

This musical score is for a hymn, featuring vocal parts and instrumental accompaniment. The score is written in a key signature of two sharps (F# and C#) and a 3/4 time signature. It consists of 12 staves. The first two staves are for the vocal parts (Soprano and Alto), and the last two are for the vocal parts (Tenor and Bass). The middle six staves are for the instrumental accompaniment, including a piano part and a string quartet (Violin I, Violin II, Viola, and Cello/Double Bass). The lyrics are: "lu-jahl Hal-le-lu-jahl Hal-le-lu-jahl for the Lord".

The lyrics for the vocal parts are as follows:

lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	for	the	Lord
lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	for	the	Lord
lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	for	the	Lord
lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	Hal-le-lu-jahl	for	thr	Lord

ANEXOS

ANEXO A – HINO DE SÃO JOÃO BATISTA

Ut queant laxis (Para que possam)

Resonare fibris (ressoar as maravilhas)

Mira gestorum (de teus feitos)

Famuli tuorum (com largos cantos)

Solve polluti (apaga os erros)

Labii reatum (dos lábios manchados)

Sancte Ioannes. (Ó São João).

(ABDOUNUR, 2015, p.46)

ANEXO B – *Compendium Musicae*

Segue a tradução da escrita original de René Descartes:

I - Todos os sentidos são capazes de experimentar prazer

II - Para sentir esse prazer, deve estar presente uma relação proporcional de algum tipo entre o objeto e o sentido em si mesmo. Por exemplo, o barulho de armas ou do trovão não é adequado à música, porque fere os ouvidos, assim como o clarão excessivo do sol machuca os olhos, se olhando diretamente.

III - O objeto deve ser tal que não impressione o sentido de maneira muito complicada ou confusa. Portanto, um desenho muito complexo, mesmo que seja regular, não é tão prazeroso à vista como outro consistindo de linhas semelhantes. A razão para isso é que o sentido encontra mais satisfação no último que no primeiro, onde há muito que não pode ser percebido de maneira distinta.

IV - Os sentidos percebem um objeto mais facilmente quando a diferença das partes é menor.

V - Nós podemos dizer que as partes de um objeto todo são tanto menos diferentes quanto maior a proporção entre elas.

VI - Essa proporção deve ser aritmética e não geométrica, pois no primeiro, há menos a perceber, já que todas as diferenças são totalmente iguais, Assim, a tentativa de perceber tudo diferentemente não esforça tanto o sentido. Por exemplo, a proporção obtida entre:

2 |—|—|

3 |—|—|—|

4 |—|—|—|—|

é mais fácil de se perceber visualmente do que entre:

2 |—|—|

$\sqrt{8}$ |————|

4 |—|—|—|—|
 . A B C

pois, no primeiro caso, é necessário perceber apenas que a diferença entre quaisquer duas linhas consecutivas é a mesma, enquanto que no segundo exemplo, é necessário comparar partes que são incomensuráveis. Portanto, eles não podem, em quaisquer circunstâncias, ser percebidos completamente de imediato, mas somente em relação a uma proporção aritmética, percebendo que AB consiste de duas partes, enquanto BC consiste de três. É claro que neste caso, a mente está constantemente perplexa.

VII - Entre os objetos dos sentidos, o mais agradável à alma não é aquele percebido mais facilmente ou mais dificilmente pelos sentidos, mas sim o que não é tão fácil de perceber que o desejo natural que leva os sentidos aos objetos não seja inteiramente satisfeito, nem igualmente tão difícil que fatigue o sentido.

VIII - Finalmente, deve ser observado que em todas as coisas, a variedade é mais prazerosa.

(DESCARTES, 1956)

Segue a escrita original em latim:

C O M P E N D I U M
M U S I C Æ.
R E N A T I C A R T E S I I.

Hujus objectum est Sonus.



Inis ut delectet, variosque in nobis moveat affectus, fieri autem possunt cantilenæ simul tristes & delectabiles, nec mirum tam diversa. Ita enim elegeiographi & tragœdi eo magis placent, quo majorem in nobis luctum excitant.

Media ad finem, vel Soni affectiones duæ sunt præcipuæ, nempe hujus differentia in ratione durationis vel temporis, & in ratione intensiõnis circa acutum aut grave, nam de ipsius soni qualitate, ex quo corpore & quo pacto gratior exeat, agunt Physici.

Id tantum videtur vocem humanam nobis gratissimam reddere, quia omnium maxime conformis est nostris spiritibus. Ita forte etiam amicissimi gratior est quam inimici ex sympathia & dispathia affectuum, in eadem ratione quâ ajunt ovis pellem tensam in tympano obmutescere si feriatur, lupinâ in alio tympano resonante.

Prænotanda.

1^o. Sensus omnes alicujus delectationis sunt capaces.

2^o. Ad hanc delectationem requiritur proportio quædam objecti cum ipso sensu, unde fit ut v. g. strepitus scloporum vel tonitruum non videatur aptus ad Musicam, quia scilicet aures læderet, ut oculos solis adversi nimius splendor.

3^o. Tale objectum esse debet ut non nimis difficulter & confusè cadat in sensum, unde fit ut v. g. valde implicata aliqua figura, licet regulares sit, qualis est mater in Astrolabio, non adeo

A

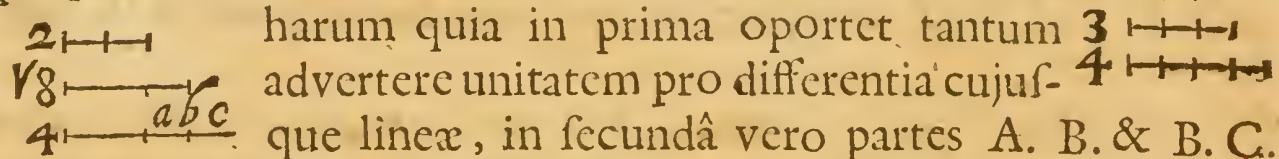
placeat

placeat aspectul, quam alia quæ magis æqualibus lineis constaret, quale in eodem rete esse solet: cujus ratio est, quia plenius in hoc sensus sibi satisfacit quam in altero, ubi multa sunt quæ satis distinctè non percipit.

4^o. Illud objectum facilius sensu percipitur, in quo minor est differentia partium.

5^o. Partes totius objecti minus inter se differentes esse dicimus, inter quas est major proportio.

6^o. Illa proportio Arithmetica esse debet non Geometrica, cujus ratio est, quia non tam multa in ea sunt advertenda, cum æquales sint ubique differentiæ. Ideoque non tantopere sensus fatigetur ut omnia quæ in ea sunt distinctè percipiat: Exemplum proportio linearum facilius oculis distinguitur, quam


 harum quia in prima oportet tantum 3 advertere unitatem pro differentia cujusque lineæ, in secundâ vero partes A. B. & B. C.

quæ sunt incommensurabiles. Ideoque, ut arbitror, nullo pacto simul possunt à sensu perfecte cognosci, sed tantum in ordine ad Arithmeticam proportionem, ita scilicet ut advertat in parte A. B. v. g. duas partes, quarum 3. in B. C. existant, ubi patet sensum perpetuo decipi.

7^o. Inter objecta sensus, illud non animo gratissimum est quod facillime sensu percipitur, neque etiam quod difficillime; sed quod non tam facile, ut naturale desiderium, quo sensus feruntur in objecta, plane non impleat, neque etiam tam difficulter, ut sensum fatiget,

8^o. Denique notandum est varietatem omnibus in rebus esse gratissimam, quibus positus agamus de 1^a. soni affectione, nempe.

De Numero vel Tempore in Sonis observando.

TEmpus in Sonis debet constare æqualibus partibus; quia illæ sunt quæ omnium facillime sensu percipiuntur ex 4^o prænotato, vel partibus quæ sint in proportione dupla vel tripla, nec ulterius fit progressio; quia hæ facillimè omnium auditu distinguuntur ex 5^o & 6^o prænotatis. Si vero magis inæquales essent mensuræ, auditus illarum differentias sine labore agnoscere

non