UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Rosana Piovesan Pinheiro

O USO DO CÓDIGO BRAILLE COMO RECURSO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Santa Maria, RS.
2016

Rosana Piovesan Pinheiro

O USO DO CÓDIGO BRAILLE COMO RECURSO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio (EAD) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio.**

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS.
2016

Rosana Piovesan Pinheiro

O USO DO CÓDIGO BRAILLE PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio (EAD) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Aprovado em 14 de maio de 2016:

____

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)
(Orientador)

____

Luis Sebastião Barbosa Bemme, Me. (UNIFRA)

____

Maria Cecília Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS.
2016

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força nos momentos de insegurança e dificuldade.

A meus pais, que sempre me apoiaram, me incentivaram e me ajudaram de todas as maneiras possíveis para a realização desse sonho.

A meus irmãos, Romolo e Roberto, pela parceira e por serem pessoas a quem sempre posso confiar.

Ao meu noivo, Diogo, melhor amigo e companheiro, por todo amor e carinho, obrigado por sempre me apoiar em todas as minhas decisões.

Ao professor orientador, Ricardo, pela orientação, apoio e confiança.

A Escola Estadual de Ensino Médio 9 de Outubro, pelo espaço e confiança em mim depositada.

Aos alunos da turma 214, pela colaboração e aprendizagem trocadas.

Aos amigos, pelo incentivo e carinho.

E a todos que direta ou indiretamente, fizeram parte deste trabalho, o meu muito obrigada.

RESUMO

O USO DO CÓDIGO BRAILLE PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

AUTORA: Rosana Piovesan Pinheiro

ORIENTADOR: Ricardo Fajardo

Minha proposta com o trabalho de conclusão é o desenvolvimento de atividades que motivem e provoquem interesse no professor e nos alunos com o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio. Preocupada em facilitar o trabalho do professor e a aprendizagem do aluno, percebo que a maioria dos educadores da área da matemática considera a Análise Combinatória muito difícil de ser ensinada e os alunos tem muita demora no entendimento porque geralmente são induzidos a decorar a fórmula e aplicar em exercícios diretos, tornando difícil a aprendizagem. Apresento neste trabalho de conclusão uma forma de trabalhar cada atividade proposta partindo de um assunto curioso “O Código Braille”, através de folha com atividades impressa, explorar o problema e encontrar soluções, utilizando o raciocínio combinatório com o objetivo de compreender em que medida a organização de uma sequência didática pautada em atividades de diferentes contextos pode contribuir para aprendizagem em sala de aula.

Palavras-Chave: Análise Combinatória; Ensino Médio; Código Braille; Raciocínio Combinatório

ABSTRACT

USE OF THE BRAILLE CODE FOR THE TEACHING OF COMBINING ANALYSIS

AUTHOR: Rosana Piovesan Pinheiro

ADVISOR: Ricardo Fajardo

My proposal to the course competition assignment is to develop activities that motivate and provoke interest of the teacher and the students with the combinatorial analysis high school content. Concerned to facilitate the teacher's work and student's learning.Most of mathematics educators consider combinatorial analysis very difficult to teach and the students have a lot of delay in understanding because they are usually induced to decorate the formula and apply in direct's exercise, making it difficult learning.I Introduce in this final paper a way to work each proposed activity starting from a curious subject "The Braille Code" through page with printed activities, explore the problem and find solutions using the combinatorial reasoning in order to understand to what extent the didactic sequence organization guided in different contexts activities can contribute to learning in the classroom.

Keywords: Combinatorial analysis; High school; Braille Code; Combinatorial reasoning

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho de monografia tem por objetivo relatar como pode ser trabalhada uma introdução à Análise combinatória por meio do Código Braille.

Uma dos desafios para se tornar um professor de Matemática é conhecer a realidade através da prática docente e a proposta de trabalho da escola e do professor em relação à disciplina em sala de aula, as metodologias aplicadas, bem como sua eficácia e aceitação pelos alunos, as possíveis problemáticas e a relação professor aluno.

Portanto apresentamos esta monografia visa fortalecer a relação teoria e prática utilizando os conhecimentos adquiridos, quer na vida acadêmica quer na vida profissional e pessoal. Sendo assim, o trabalho constitui-se em importante instrumento de conhecimento e de integração do aluno na realidade social, econômica e em sua área profissional.

Percebe-se, constantemente, os alunos expressando opiniões do tipo: “a Matemática é uma matéria que causa medo”; “é uma disciplina difícil de ser entendida”; “é muito complicada”; “esta matéria não serve para nada”, “onde vou ocupar isso no futuro?” “esta aula não é atrativa”, além de outras indagações. Para mudar o modo como é conduzido o ensino da Matemática na escola, e com isso torná-la dinâmica, rica, viva, é preciso mudar antes o conceito que se tem dessa disciplina. É preciso reconhecer que ela é fruto do trabalho humano e, como tal, está sujeita a erros e acertos. É preciso também reconhecer que ela evolui e se modifica no tempo, em função do uso que se faz dela. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998, p. 15):

> A Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Nós como professores, precisamos pensar em estratégias para diminuir essas opiniões dos alunos. Escolhi esse tema devido a preocupação com o método atual de ensino e aprendizagem que não desperta interesse dos alunos.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, tem um amplo campo de investigação com intensa atividade devido às numerosas aplicações nas mais diversas áreas. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1):

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Esse trabalho tem como objetivo compreender em que medida a organização de uma sequência didática pautada em atividades de diferentes contextos pode contribuir para aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Para isso organizo a escrita deste trabalho no seguinte modo: na introdução apresento o tema a ser desenvolvido "O Código Braille na Análise Combinatória", o qual me despertou interesse pelo fato de perceber a grande dificuldade dos alunos com Análise Combinatória, acreditando que o Código Braille despertaria o interesse, facilitando a aprendizagem. No capítulo um, apresento a escola onde a atividade foi realizada. No decorrer do texto destacamos o conteúdo abordado e o plano de aula. Para finalizar aponto algumas considerações a cerca do conteúdo trabalhado e curso de Pós-Graduação.

2. CAMINHOS METODOLÓGICOS

Neste capitulo iremos abordar tópicos importantes sobre a escola e a turma onde foi aplicado o plano de aula.

2.1 A Escola

Nome da escola: Escola Estadual de Ensino Médio 9 de Outubro

Endereço: Rua Ivoti, 185, Portão, RS

Telefone: (51) 3562 1019

Diretora: Lucilene Girotto Woievoda

Coordenadora Pedagógica: Simone Roese Algayer

Supervisora: Caren Verone Menger Kangberg

A Escola Estadual de Ensino Médio 9 de Outubro foi fundada em 1964, atua nos turnos manhã, tarde e noite, trabalha com os níveis de ensino de Ensino Fundamental, Ensino Médio na modalidade regular e EJA, atende 874 alunos. A infraestrutura é composta por:

- Dez salas de aula;
- Biblioteca ampla, onde os alunos possuem cadastro e os livros são registrados, é aberta nos turnos da manhã e tarde. Os alunos só podem retirar livros se estiver com as devoluções em dia;
- Sala de vídeo e laboratório de informática com 20 computadores onde o professor que deseja ocupá-las deve marcar com antecedência;
- Fotocopiadora junto à secretaria, onde cada professor tem um determinado número de copias por mês; os alunos têm acesso, mas com custo de R$ 0,30 a folha;
- Sala de orientação pedagógica e docente que visa mobilizar os alunos e família para a participação mais ativa dentro da escola, integrando-o com o ambiente escolar;

- Refeitório amplo, onde todos os alunos ganham merenda e tem acesso ao refeitório durante o recreio;
- Auditório para eventos e reuniões;
- Laboratório de física e química.

2.1.1 Objetivos da escola

A escola apresenta no Projeto Político Pedagógico (PPP) e no Regimento Escolar, os seguintes objetivos:

- ✓ Criar e oferecer aos alunos todas as oportunidades possíveis para alcançar a aprendizagem;
- ✓ Proporcionar ao aluno um ensino de qualidade, para que o educando tenha condições de acompanhar o processo evolutivo da sociedade;
- ✓ Desenvolver o trabalho administrativo, através de ações conjuntas, numa linha democrático-participativa para obter melhorias na qualidade de ensino, bem como na convivência;
- ✓ Proporcionar e estimular o trabalhador em educação à formação permanente, a constante atualização, competência, realização pessoal e profissional;
- ✓ Buscar a participação cooperativa no desempenho de tarefas;
- ✓ Desenvolver um trabalho visando a permanência do aluno na escola através de atividades que venham a auxiliar no processo de inclusão;
- ✓ Trabalhar princípios filosóficos, éticos, morais e religiosos, contribuindo para o desenvolvimento intelectual e moral;
- ✓ Contribuir ativamente para a melhoria do meio ambiente e qualidade de vida.

2.1.2 Filosofia da escola

A Escola Estadual de Ensino Médio 9 de Outubro, diante da realidade histórica atual, pretende auxiliar na construção de pessoas conscientes de suas responsabilidades e aptas de suas competências, proporcionando, com isso, condições de desenvolver as estruturas das mudanças que se fazem necessárias na nossa sociedade. (PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO, 2011).

Para tanto, buscará um trabalho voltado à construção e ao crescimento da cidadania, perpassando por:

a) Conscientização para atingir o crescimento pessoal;
b) Assimilação dos valores éticos e culturais;
c) Criação de espaços para o estabelecimento de parcerias visando ao companheirismo e a fraternidade.

Dessa forma, a Escola deseja colaborar na construção de um mundo humano, justo e igualitário, envolvendo todos os seres partícipes deste processo.

2.1.3 Projeto Político Pedagógico da escola

O Projeto Político Pedagógico da nossa escola é um instrumento que visa ajudar a enfrentar os desafios do cotidiano da escola de uma forma sistematizada, consciente e participativa. É o caminho mais acertado para reinventar a escola, ressignificando suas finalidades e objetivos.

Mais do que o papel, compromete, com suas diretrizes, todos os envolvidos neste processo – pais, professores, equipe diretiva, funcionários, alunos e comunidade – delineando o horizonte da caminhada, estabelecendo a referência geral, expressando o desejo e o compromisso do grupo. (PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO, 2011).

Deve ser compreendido numa perspectiva dinâmica, em constante reformulação, ainda que algumas partes, como o Marco Referencial, sejam de durabilidade maior.

Esperamos que, através deste projeto, a Escola possa resgatar o papel que dela se espera: que ela ofereça um espaço de construção e vivência de um currículo com ideais e de lutas onde todos possam construir a esperança em um projeto de vida, em que a alegria seja a tônica do viver. (PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO, 2011).

2.2 A turma

O projeto foi realizado com a turma 204 do 2º ano do Ensino Médio, composta por 30 alunos na qual a maioria dos alunos mora em casa própria sendo de área regularizada ou não, com renda familiar média baixa. A escolaridade dos pais e/ou responsáveis é, aproximadamente 20% com Ensino Fundamental incompleto, 40% Ensino Fundamental completo, 30% com Ensino Médio completo e 10%, com Ensino Superior. A faixa etária predominante da turma varia de 16 a 19 anos, sendo 19 meninas e 11 meninos. Esses jovens se apresentam desmotivados, sem perspectivas de um futuro melhor. Muitos ingressam no mercado de trabalho para auxiliar nas despesas da família, outros cuidam dos irmãos menores e de tarefas domésticas.

3. BASE DE PESQUISA

Para elaboração desse trabalhado foram utilizados como base de pesquisa o conceito e a sistemática do Código Braille e o estudo da Analise Combinatória.

3.1 Código Braille

Neste capitulo iremos abordar o conceito e origem do sistema utilizado por deficientes visuais para comunicação.

Segundo Costa (2009, p. 1):

> O Código Braille é um processo de escrita e leitura baseado em 64 símbolos em relevo, resultantes da combinação de até seis pontos dispostos em duas colunas de três pontos cada. Pode-se fazer a representação tanto de letras, como algarismos e sinais de pontuação. Ele é utilizado por pessoas cegas ou com baixa visão, e a leitura é feita da esquerda para a direita, ao toque de uma ou duas mãos.

Sua origem remete a França através de Louis Braille, deficiente visual, que teve sua vida baseada em adaptações que facilitariam seu desempenho acadêmico. Tais adaptações se tornariam mais tarde o que hoje conhecemos como Código Braile. Para entendermos um pouco melhor a origem vamos nos aprofundar na história de Louis.

Nascido no início do século XIX. Louis Braille vivia um pequeno distrito próximo a cidade de Paris. Quando tinha três anos de idade, enquanto manuseava uma das ferramentas da oficina de seu pai, sofreu um acidente e perdeu a visão dos dois olhos. Mesmo sem enxergar e escrever freqüentou a escola junto das outras crianças. Para suprir essa necessidade, Braille desenvolveu a capacidade de memorizar todas as lições passadas por seus mestres. Seu bom desempenho o levou a ingressar em uma instituição de ensino para cegos. (SOUSA, 2016).

Sousa (2016) afirma que “nessa escola, os textos eram adaptados de forma que as letras eram impressas em alto relevo. O método exigia a confecção de livros pesados e grandes”. Essa forma fazia com que o material ficasse bastante extenso sendo necessário grande quantidade de tempo para a leitura, dificultando o acesso a informação.

Visando facilitar a leitura foram buscadas novos métodos que agilizassem o processo.

> Sob tal contexto, o capitão de artilharia Charles Barbier de La Serre apresentou um método conhecido como “sonografia” ou “escrita noturna”. Nesse novo sistema, o usuário utilizava um código feito em pontos que poderia ser lido com a ponta dos dedos. Apesar de oferecer várias facilidades, o código apresentado por Barbier apresentava dois sérios problemas: era complexo demais para ser memorizado e os símbolos usados não permitiam a soletração das palavras. (SOUSA, 2016)

Braille, que agora havia entrado no mundo da música se interessou por um aparelho que permitia a leitura e a composição de partituras para piano. Mais tarde, já se apresentando em famosos concertos conheceu Thibaud, que o questionou sobre um método que permitisse os cegos lerem e escreverem. Após três anos de pesquisas e experimentos Braille fundou um sistema em que era possível a leitura e escrita por deficienteis visuais, chegando a publicar em seu livro “Processo para escrever as palavras, a música e o canto-chão, por meio de pontos, para uso dos cegos e dispostos para eles”. Braille faleceu em 1852 sem ter visto seu trabalho reconhecido. (SOUSA, 2016)

Dois anos após a morte de Braille o sistema chega ao Brasil no Instituto Benjamin Constant, no Rio de Janeiro, que educava e profissionalizava pessoas com deficiência visual. Segundo Costa (2009) “o Brasil foi o primeiro país da América Latina a adotar o sistema, trazido por José Alvares de Azevedo, jovem cego que teve contato com o Braille em Paris”.

De acordo com Souza (2016)

> o código Braille é composto por uma combinação de pontos dispostos em uma célula de três linhas e duas colunas. Por meio da combinação destes símbolos, o deficiente visual pode realizar a leitura e a escrita de qualquer tipo de texto. Em situações mais simples, o texto em Braille pode ser produzido com a utilização de uma régua especial e um estilete que registra os pontos em uma base que marca os lugares marcados.

A Figura 1 apresenta a produção do texto em braille.

Figura 1 - Produção do Código Braille

Fonte: http://origemdascoisas.com/a-origem-do-braille/

Segundo Costa (2009) “o Braille hoje já está difundido pelo mundo todo e, segundo pesquisa “Retratos da Leitura no Brasil”, de 2008, do Instituto Pró-Livro, 400 mil pessoas lêem Braille no Brasil”.

A falta de informação é ainda o principal problema em relação ao Braille. Muitos professores acham que é simples ensinar o Braille a um aluno cego. No entanto, a alfabetização com esse sistema tem suas especificidades, e o professor, para realizar essa tarefa com êxito, tem de buscar ajuda. Existem máquinas adaptadas que produzem textos em Braille. É possível também através de um comando de voz produzir textos em computadores. Dessa forma as limitações podem ser superadas e deficientes visuais podem realizar tarefas, produzir trabalhos e passar o conhecimento adquirido para novas gerações.

3.2 Análise Combinatória

Neste capítulo revisaremos alguns conceitos que se farão necessários para facilitar a compreensão e a explicação das atividades propostas tanto para o professor como para o aluno. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações no ensino da Matemática, uma vez que o ensino se dá através de conceitos bem fundamentados e explicações bastante claras para que o aluno possa transpor para a prática através de exercícios.

Inicialmente, procuraremos apresentar alguns conceitos relacionados à Análise Combinatória que serão bastante úteis como métodos de resolução de problemas combinatórios, embora exista uma variedade de técnicas que possam ser usadas para resolver problemas combinatórios.

3.2.1 Contagem

Vamos citar um exemplo do cotidiano para entendermos melhor o conceito de contagem. São vários os veículos que circulam no mundo atualmente. Cada veículo deve possuir uma identificação única e exclusiva. Essa identificação é feita através da placa do veículo, composta por um conjunto de letras e números. Para que seja única essa combinação não pode se repetir na mesma ordem.

Atualmente as placas são formadas por uma combinação de três letras e quatro números. Com isso quantas placas são possíveis produzir de forma que cada uma seja única e exclusiva?

De acordo com Leonardo (2013) "Resolver esse problema implica quantificar todas as combinações possíveis com três letras e quatro algarismos para formar diferentes placas. Problemas de contagem desse tipo permeiam nosso cotidiano".

Leonardo (2013, p.246) ainda afirma que:

> análise combinatória é o campo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto. Seu estudo encontra aplicação nas mais diversas situações, como na Química, ao se investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, na montagem das tabelas de campeonatos.

Desenvolver mais o texto antes da próxima citação.

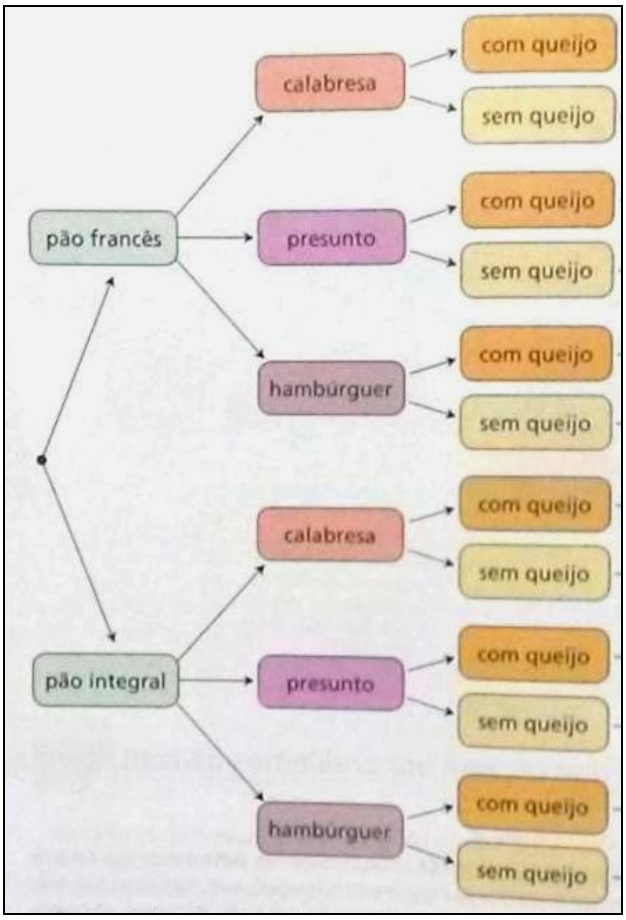
A seguinte situação recai em um problema de contagem.

> Para comprar um lanche na cantina da escola, Raul avalia as seguintes opções: são oferecidos 2 tipos de pão (francês e integral) e 3 tipos de

> recheio (calabresa, presunto e hambúrguer). Os sanduíches podem ser servidos com ou sem queijo. Quantos tipos de sanduíche Raul pode montar? (LEONARDO, 2013, p.248).

Organizando as opções em uma árvore de possibilidades, temos na figura 2:

Figura 2 - Árvore de possibilidades



Fonte: (LEONARDO, 2013, p.248)

Raul possui duas possibilidades de escolha para o pão:

- Pão fancês,
- Pão integral.

Possui três possibilidades de escolha para o recheio:

- Calabresa,

- Presunto,
- Hambúrguer.

E duas possibilidades de escolha do acompanhamento

- Com queijo,
- Sem queijo.

Então, Raul pode escolher entre $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, ou seja, 12 tipos de sanduíches.

3.2.2 O Princípio Multiplicativo da Contagem

Para resolver o exemplo anterior, empregamos o princípio multiplicativo da contagem, também chamado de Princípio Fundamental da Contagem, que consiste no seguinte:

> Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma, B pode ocorrer de n maneiras o número de maneiras de ocorrência do acontecimento é m x n. (LEONARDO, 2013, p.249).

Vamos fazer o seguinte exemplo: Um gaúcho possui 4 bombachas (vestuário típico da região) e 3 cintos. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas vestimentas?”

Consideremos as bombachas como *b* e os cintos como *c*, podemos organizar isso numa tabela da seguinte forma:

Tabela 1 – Possibilidades de vestir bombachas e cintos

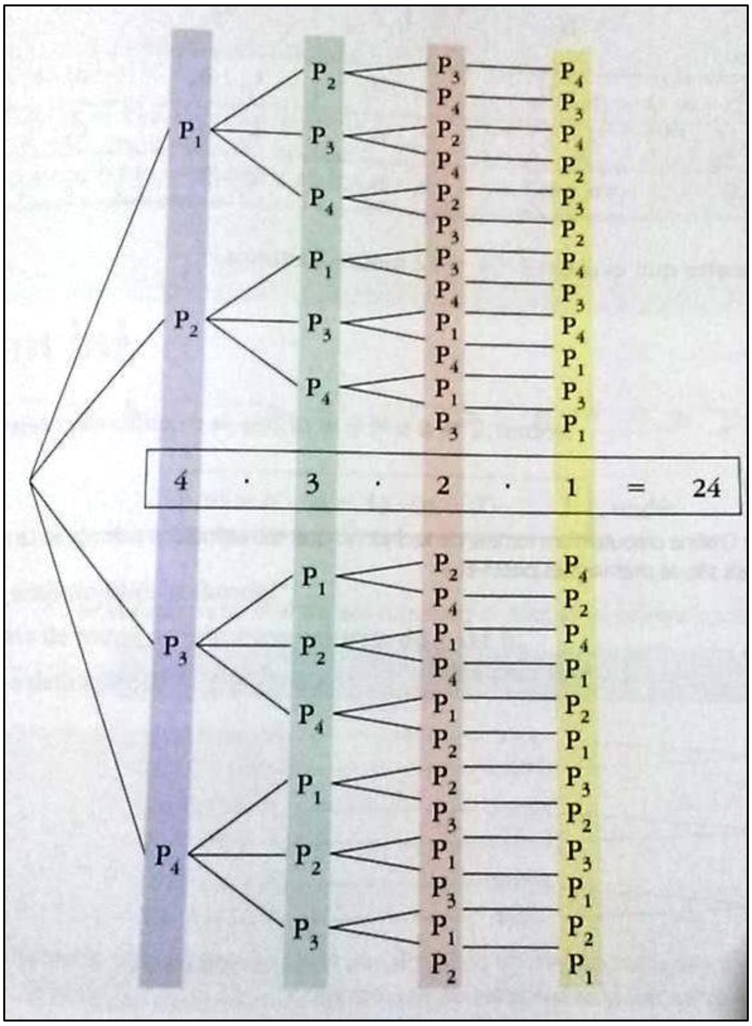
	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_4}$
$\boldsymbol{c_1}$	$c_1 \cdot b_1$	$c_1 \cdot b_2$	$c_1 \cdot b_3$	$c_1 \cdot b_4$
$\boldsymbol{c_2}$	$c_2 \cdot b_1$	$c_2 \cdot b_2$	$c_2 \cdot b_3$	$c_2 \cdot b_4$
$\boldsymbol{c_3}$	$c_3 \cdot b_1$	$c_3 \cdot b_2$	$c_3 \cdot b_3$	$c_3 \cdot b_4$

Fonte: Produção da autora.

Portanto, o gaúcho possui $4 \cdot 3 = 12$ modos distintos de se vestir.

Agora vamos para outro exemplo de Barreto Filho (2003, p.185), “em quantas ordens diferentes 4 pessoas podem se sentar num sofá de 4 lugares?” Descrevendo a árvore de possibilidades:

Figura 3 - Árvore de possibilidades



Fonte: (BARRETO FILHO, 2003, p. 185).

Sabendo que o sofá tem quatro lugares, consideramos P_1 a possibilidade do 1º lugar do sofá, P_2 a possibilidade do 2º lugar do sofá, P_3 a possibilidade do 3º lugar do sofá e P_4 a possibilidade do 4º lugar do sofá.

A primeira pessoa que chegar para sentar terá 4 possibilidades de lugares (P_1, P_2, P_3 e P_4), a segunda pessoa que chegar, sendo que um lugar já estará ocupado pela primeira pessoa, terá 3 possibilidades de lugares$(P_2,\ P_3\ e\ P_4\ ou\ P_1,\ P_3\ e\ P_4\ ou\ P_1,$ $P_2\ e\ P_4\ ou\ P_1,\ P_2\ e\ P_3)$, a terceira pessoa que chegar, sendo que dois lugares já estarão ocupados pela primeira e segunda pessoa, terá 2 possibilidades e a quarta pessoa que chegar, terá 1 possibilidade.

Logo, teremos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos possíveis de 4 pessoas sentarem em um sofá de 4 lugares.

3.2.3 O Fatorial de um Número Natural

Boa parte dos problemas de Análise combinatória é resolvida por um produto de números naturais consecutivos, como $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n, sendo, no primeiro caso, $n = 3$ e, no segundo, $n = 8$.

Em geral, produtos do tipo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ serão escritos com a notação de fatorial.

O fatorial de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 2$

Exemplo: O fatorial de 4, ou seja, $4!$, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

3.2.4 A Permutação Simples

Leonardo (2013, p.253) define Anagrama de uma palavra como "qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, um anagrama da palavra AMOR é ROMA".

Quantos anagramas podemos formar com a palavra PATO?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (P, A, T e O). Para a segunda letra, há 3 possibilidades (A, T, O ou P, T, O ou P, A, O ou P, A, T), para a terceira letra há 2 possibilidades e 1 possibilidade para a quarta letra. Logo, pelo principio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja 24 anagramas.

Conforme Leonardo (2013, p. 253) a definição de permutação simples é:

> Dado um conjunto de n elementos, chama-se *permutação simples* dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos. O número de permutações simples de n elementos é dado por:$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $P_n = n!$

Por exemplo, para saber quantos anagramas da palavra LIVRO começam por L, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (L) e que as outras 4 letras podem ser permutadas entre si. Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot P_4 = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 4! = 24$.

Logo, há 24 anagramas de LIVRO começados por L.

3.2.5 Permutação com Elementos Repetidos

Vamos considerar agora a palavra CANOA. Nesse caso os anagramas não correspondem mais as permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra CANO ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a $5!$. Se as 2 letras A fossem distintas, (CA_1NOA_2), teríamos $5!$ anagramas. Assim, fixadas as letras C, N e O, a permutação das letras A_1 e A_2 daria, para cada anagrama de CANOA, a origem a $2!$ novos anagramas. Como essas letras são iguais, a permuta delas não gera um novo anagrama. Então, para descobrir o número de anagramas de CANOA, devemos dividir por $2!$

Logo, $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$, o total de anagramas da palavra CANOA é 60.

Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Por exemplo, na palavra BANANA, se as letras A fossem distintas, teríamos $3!$ anagramas em cada posição fixada para as demais letras. Se as letras N fossem distintas, teríamos $2!$ anagramas em cada posição fixada para as demais letras.

Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples ($6!$) por ($3! \cdot 2!$). Então, o número de anagramas da palavra BANANA é $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$, pois, das 6 letras, 3 são A e 2 são N.

De acordo com Leonardo (2013, p. 255) temos como definição de permutação com elementos repetidos: “O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo,..., n_k de um k-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ e é dado por: $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$”

3.2.6 Arranjo Simples

Como vimos anteriormente, a quantidade de permutações simples das letras da palavra PATO é igual a $4! = 24$. Isso significa que reordenando as 4 letras dessa palavra, resultamos em 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra PATO), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que primeiro precisamos escolher a primeira letra entre as 4 possíveis e em seguida, escolher a segunda letra entre as 3 possíveis. Aplicando o princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 = 12$. Logo, são 12 possibilidades de formar sequências de 2 letras.

Observe que, desse total de 12 possibilidades: Começam por P: PA, PT e PO; Começam por A: AP, AT e AO; Começam por T: TP, TA e TO; Começam por O: OP, OA e OT. Esses agrupamentos ordenados são arranjos simples dos 4 elementos distintos, tomados 2 a 2.

Para apontar a quantidade desses agrupamentos, denotamos e calculamos por: $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Leonardo (2013, p. 256) explica a definição de arranjo simples da seguinte forma:

> Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequencia) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.
> Para calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados p a p, com $0 < p \leq n$, indicados por $A_{n,p}$.
> Para $n = p$, temos $A_{n,p} = P_n = n!$

> Para $n > p$, temos n elementos distintos e vamos arranja-los p a p. Construindo a árvore de possibilidades, obtemos: na primeira posição: n possibilidades; na segunda posição: $(n-1)$ possibilidades; na terceira posição: $(n-2)$ possibilidades; na p-ésima posição: $n-(p-1)$ possibilidades.
>
> Aplicando o princípio multiplicativo, temos que o número total de possibilidades é dado por:
>
> $$A_{n.p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$$
>
> Multiplicando a expressão por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:
>
> $$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$
>
> Portanto:
>
> $$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, com\ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\ e\ 0 < p \leq$$

3.2.7 A Combinação Simples

Quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar com o conjunto formado pelas letras da palavra PATO?

A quantidade de agrupamentos ordenados, como já visto anteriormente, é dada por: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Analisando os conjuntos formados pelas letras PAT, PTA, APT, ATP, TPA e TAP percebemos que eles são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se altera.

Com isso, Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Pode-se, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra PATO: $\{P, A, T\}, \{P, A, O\}, \{P, T, O\}, \{A, T, O\}$

Chamamos esses agrupamentos de combinações simples dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

De acordo com Leonardo (2013, p. 258,259) temos como definição de Combinação Simples:

> Definição: Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinação simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os possíveis.

Para calcular o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo $\{2, 6, 8\}$, origina $3! = 6$, ou seja, 6 agrupamentos ordenados.

Portanto, $C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,3} = 10$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter p! permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter p! arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Portanto:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}, com\ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\ e\ p \leq n$$

Para finalizar este capítulo, segue uma tabela com um resumo dos tópicos vistos.

Tabela 2 - Resumo dos tópicos da Análise Combinatória

	Significado	**Fórmula**
Permutação Simples	Anagramas sem repetição	$P_n = n!$
Permutação com Elementos Repetidos	Anagramas com repetição	$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \cdots \cdot n_k!}$
Arranjo Simples	Agrupamento ordenado (sequencia) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
Combinação Simples	Agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis.	$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$

Fonte: Produção da autora.

4. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DA AULA

Para aplicação em sala de aula foi elaborado um plano de aula que será descrito a seguir bem como a análise da aula.

4.1 Plano de aula

Utilizando material disponível no curso de pós-graduação, os livros Matemática Discreta de Morais Filho e Malagutti (2013) e Conteúdo e Prática de Mattos, Rosa e Giraldo (2013) elaborei meu plano, com base nos objetivos que pretendia alcançar.

PLANO DE AULA

Escola Estadual de Ensino Médio 9 de Outubro

Série: 2º ano do Ensino Médio

Turma: 204

Professora regente: Rosana Piovesan Pinheiro

Tema ou Conteúdo: Análise Combinatória

Horas/aula: 3 horas aula

Objetivo Geral: Propor uma situação diferenciada para o ensino de Análise Combinatória e analisar qual a contribuição disso para a aprendizagem dos alunos.

Objetivos Específicos: Explicar o conceito do Código Braille; introduzir Análise combinatória; praticar exercícios e avaliar o aprendizado do aluno.

Recursos Didáticos: Quadro, material fotocopiado

Estratégias: Para a explicação do Código Braille, os alunos foram organizados em um semicírculo de modo que isso possibilitou a interação entre eles e o professor. Em seguida, os alunos foram organizados em duplas para realizar a atividade proposta. Foi apresentado o conteúdo como descrito a seguir, utilizando material fotocopiado, quadro e exposição oral.

Desenvolvimento da Aula:

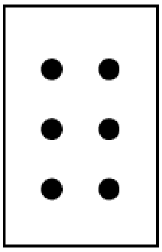
Inicialmente, distribui o material fotocopiado referente as noções básicas sobre o Código Braille.

O Código Braille é um método de escrita desenvolvido para que pessoas cegas possam ler usando o tato. Seu criador, Louis Braille (1809-1952), ficou cego aos três anos de idade em razão de um ferimento no olho causado por um objeto pontiagudo que seu pai usava para fabricar selas de animais. O ferimento infeccionou e provocou também a perda da visão do outro olho, deixando-o com deficiência visual total.

Ao inventar seu método de escrita, Braille fez um grande beneficio a todos os deficientes visuais e à humanidade. Atualmente, em elevadores, caixas eletrônicos, etc., há varias informações escritas em Braille, o que propicia aos deficientes visuais uma inserção social mais efetiva.

O Código Braille é baseado em uma disposição 3 x 2 de pontos, dispostos como uma pedra de dominó.

Figura 4 - Disposição de pontos do Código Braille



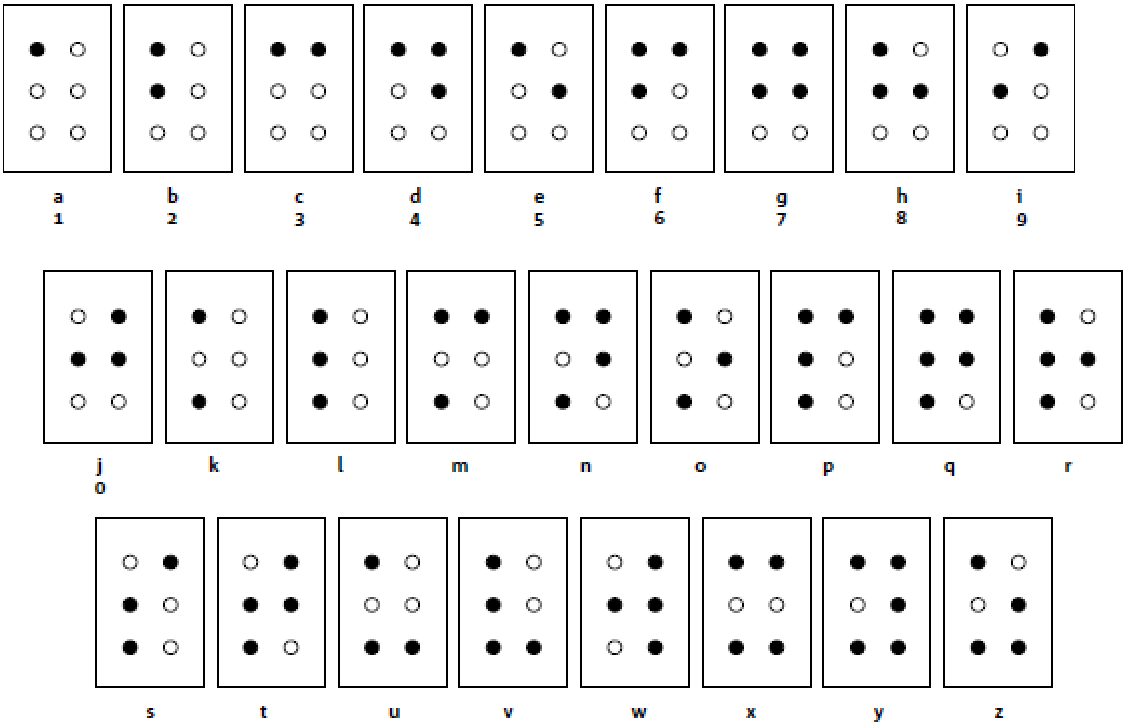
Fonte: Morais Filho e Mallagutti (2013, p.38).

Para registrar uma letra do alfabeto, alguns desses 6 pontos são marcados ou perfurados, para que fiquem sobressalentes e possam ser sentidos com as pontas dos dedos das mãos. E é assim que os deficientes visuais conseguem ler: usando as mãos.

Nos símbolos escritos em Braille a seguir, um circulo negro (preenchido) indica que o ponto está marcado, e um circulo branco indica que o ponto não está marcado.

Veja como é a maneira usual de codificar as letras minúsculas e os algarismos na linguagem Braille:

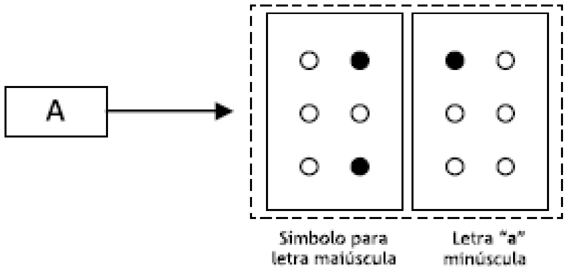
Figura 4.1 - Código das letras e números no Código Braille



Fonte: Morais Filho e Mallagutti (2013, p.40).

Para codificar as letras maiúsculas usamos um símbolo antes da letra que desejamos que seja maiúscula, por exemplo com a letra A

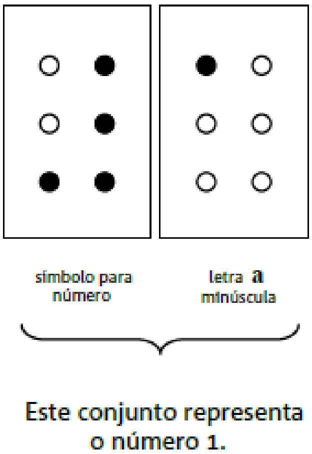
Figura 4.2 - Código para letra maiúscula no Código Braille



Fonte: Morais Filho e Mallagutti (2013, p.40).

Para utilizarmos uma configuração como um número, devemos antecedê-la com um símbolo que indique esse fato, como por exemplo o numero 1:

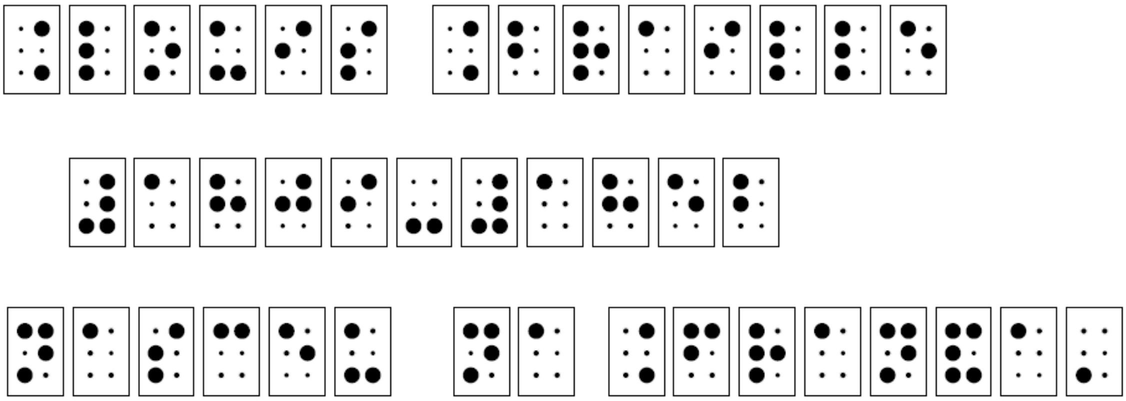
Figura 4.3 - Código para números no Código Braille



Fonte: Morais Filho e Mallagutti (2013, p.41).

Agora que você já aprendeu o caminho das pedras, tente decifrar a mensagem da introdução:

Figura 4.4 - Código para decifração dos alunos em sala de aula.



Fonte: Morais Filho e Mallagutti (2013, p.41).

Em seguida ditribui uma folha como a do ANEXO A e aplicarei a primeira atividade da seguinte forma:

Atividade 1: Focando na quantidade de pontos, independente de estarem marcados ou não.

Vamos construir as possibilidades de símbolos a partir do número de pontos no cartão.

De posse de cartões sem marcações, farei as seguintes indagações aos alunos:

1) Iniciando da posição mais à esquerda e superior, represente um ponto nestes cartões, lembrando que cada ponto quando representado pode estar ou não marcado. Quantas possibilidades foram encontradas?

2) Supondo agora que o código Braille tenha apenas 2 pontos, iniciando da posição mais à esquerda e superior, represente as possíveis possibilidades para marcar esses dois pontos no cartão?

3) Seguindo o mesmo procedimento das questões anteriores, vamos supor agora que o código Braille tenha 3 pontos, dois superiores e o da esquerda da segunda linha, quantas possibilidades podemos obter?

4) Seguindo no mesmo raciocínio das questões anteriores, vamos supor que agora o código Braille tenha 4 pontos, quantas possibilidades podemos obter?

5) Somente com essas 4 questões já concluímos as possibilidades do código Braille? Porque?

6) Com esses 4 exercícios podemos deduzir qual é o total de possibilidades para as 6 posições do código Braille?

Passamos então para a Atividade 2, focando na quantidade de pontos pintados. Utilizando novas fotocópias do ANEXO B e aplicando as seguintes perguntas:

1) Qual a quantidade de cartões distintos podemos obter marcando somente um dos pontos em qualquer uma das posições?
2) Pensando agora em marcar dois pontos em cada cartão. Quantos cartões distintos foram obtidos? Como você fez para marcar os pontos sem repetir ou se perder?
3) Utilizando a mesma estratégia, vamos construir os cartões com três pontos marcados. Quantos são os novos cartões encontrados?
4) Vamos encontrar o total de cartões com quatro posições marcadas. Quantos são? Será que você consegue identificar alguma coincidência com algum dos resultados obtidos anteriormente?
5) Quantos foram os cartões obtidos quanto marcamos cinco pontos?

6) Encontre uma relação entre os valores obtidos nas questões anteriores.
7) O total de possibilidades ou cartões distintos é mesmo feito no Roteiro 1?

4.2 Análise da aula

Iniciei minha aula desejando um bom dia a todos os alunos. Pedi para que se organizassem em semi circulo e distribui para cada aluno o material fotocopiado, referente as noções básicas do Código Braille.

Pedi para que alguns alunos fizessem a leitura de um parágrafo cada um.

Durante a leitura do texto os alunos ficaram bastante entusiasmados com o tema querendo aprofundar o conhecimento sobre o assunto. Apresentei a eles dois livros de historias escritos em Braille que a educadora especial da escola me disponibilizou. Fiquei surpresa ao ver a curiosidade e entusiasmo da turma com os livros, pois nunca haviam visto. Durante o manuseio dos livros pedi para que eles tentassem descobrir as letras. Após questionei os alunos sobre as dificuldades encontradas e eles acharam muito difícil, uns disseram que era falta de sensibilidade nos dedos, outros que era preciso muita prática e alguns alegaram dificuldade em memorizar as letras.

A seguir pedi que fizessem o exercício de decifração, proposto no material fotocopiado já entregue. Eles gostaram de realizar a atividade, porém tiveram dificuldade com as letras maiúsculas, pontuação e números. Conforme foram surgindo as dificuldades fui tirando as duvidas e mostrando onde eles estavam errando. Como o Código Braille não é o objetivo principal da disciplina, foi passado somente a nível de conhecimento.

Após a realização dos exercícios, pedi que sentassem em duplas e entreguei o material, cartões sem marcação (ANEXO A). De posse dos cartões fiz as perguntas para que a dupla encontrasse a resposta. Quando todos tivessem encontrado a resposta perguntava a uma das duplas o resultado e questionava se alguma dupla havia encontrado resultado diferente. Caso houvesse um resultado diferente, debatíamos para descobrir qual o resultado correto. Apresentando todas as duplas o mesmo resultado, os alunos eram questionados de como haviam encontrado a resposta.

Finalizando a atividade do anexo I, todos chegaram a conclusão que o Código Braille possui 64 possibilidades.

Continuando, distribui o cartão sem marcação (ANEXO B) e utilizei a mesma metodologia do exercício anterior (ANEXO A). Os alunos se surpreenderam pois perceberam duas formas distintas de chegar ao mesmo resultado.

Durante as questões, alguns alunos tiveram dificuldades em encontrar o número correto de possibilidades, porém como estavam em duplas, um ajudava o outro, e no final acabavam encontrando o número correto.

Ao final da atividade expliquei aos alunos que podemos encontrar o número de possibilidades sem necessariamente usar as fórmulas de Análise Combinatória. Perguntei aos alunos o que acharam da atividade, em torno de 80% da turma falaram que gostaram, que acharam interessante, que teriam interessem em aprofundar seu conhecimento dentro do Código Braille, que foi legal encontrar o número de possibilidades sem o uso da fórmula. Porém, o restante, acharam a atividade “chata” e muito repetitiva no momento das perguntas.

Como a turma não estava vendo este conteúdo no momento da aplicação do plano de aula, após a aula, retornaram ao seu conteúdo normalmente, não podendo dar seguimento ao conteúdo de Análise Combinatória.

Apesar da turma ainda não ter o conhecimento de Análise Combinatória, conseguiram atingir o objetivo proposto, participando e interagindo na aula.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar o curso de Pós-graduação, não imaginei que aumentaria tanto os meus conhecimentos na educação, a importância de levar a teoria para a prática docente, sendo que o trabalho de conclusão permite ao educador uma visão que nos traz experiências profissionais diferentes, pois foi parte fundamental para a minha prática profissional. Percebi que com muita dedicação e estudo obtive conhecimentos em matemática para ajudar meus alunos e conseguir expressar de forma natural as resoluções solicitadas, esclarecendo as dúvidas e dificuldades da turma.

Consegui através da prática, trabalhar dinâmicas e material diferenciado para que os alunos vissem a matemática de forma diferente, não mais como um bicho papão e sim como uma disciplina importante, que traz dificuldades, mas que podem ser facilmente superadas.

No decorrer do trabalho, foi desenvolvida uma pesquisa referente ao Código Braille, sua história, como e onde surgiu, como é produzido e quem o utiliza. Em seguida, foi feito uma pesquisa referente a Análise Combinatória, conceitos básicos, sua origem, importância, seus tópicos e como é dividida, para facilitar a compreensão e a explicação das atividades propostas. Num terceiro momento, foi elaborado o plano de aula e definido a turma e a escola que seria aplicado. Durante estes passos, surgiram algumas dificuldades, que foram superadas com estudo e dedicação.

Constatei que para ser um profissional, principalmente na matemática requer dedicação, gosto pela docência e muito compromisso.

Para mim, o curso de Pós-Graduação foi uma realização profissional que guardarei sempre nas minhas lembranças. Sinto-me vitoriosa, alcancei meus objetivos, superei as dificuldades que surgiram e pude ajudar a muitos alunos que ao final me agradeceram.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, B., & SILVA, C. X. **Matemática aula por aula**. 1 ed. São Paulo: FDT, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

COSTA, R. Como Funciona o Sistema Braille? **Revista Escola**, Brasil, setembro 2009, disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/informacao/como-funciona-sistema-braille-496102.shtml Acesso em fevereiro de 2016,

DANTE, L. R. ***Matemática: Contexto e Aplicações*** .2 ed. São Paulo: Atica, 2013.

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO 9 DE OUTUBRO. **Projeto Político Pedagógico**. Portão, 2011.

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO 9 DE OUTUBRO. **Regimento Escolar**. Portão, 2011.

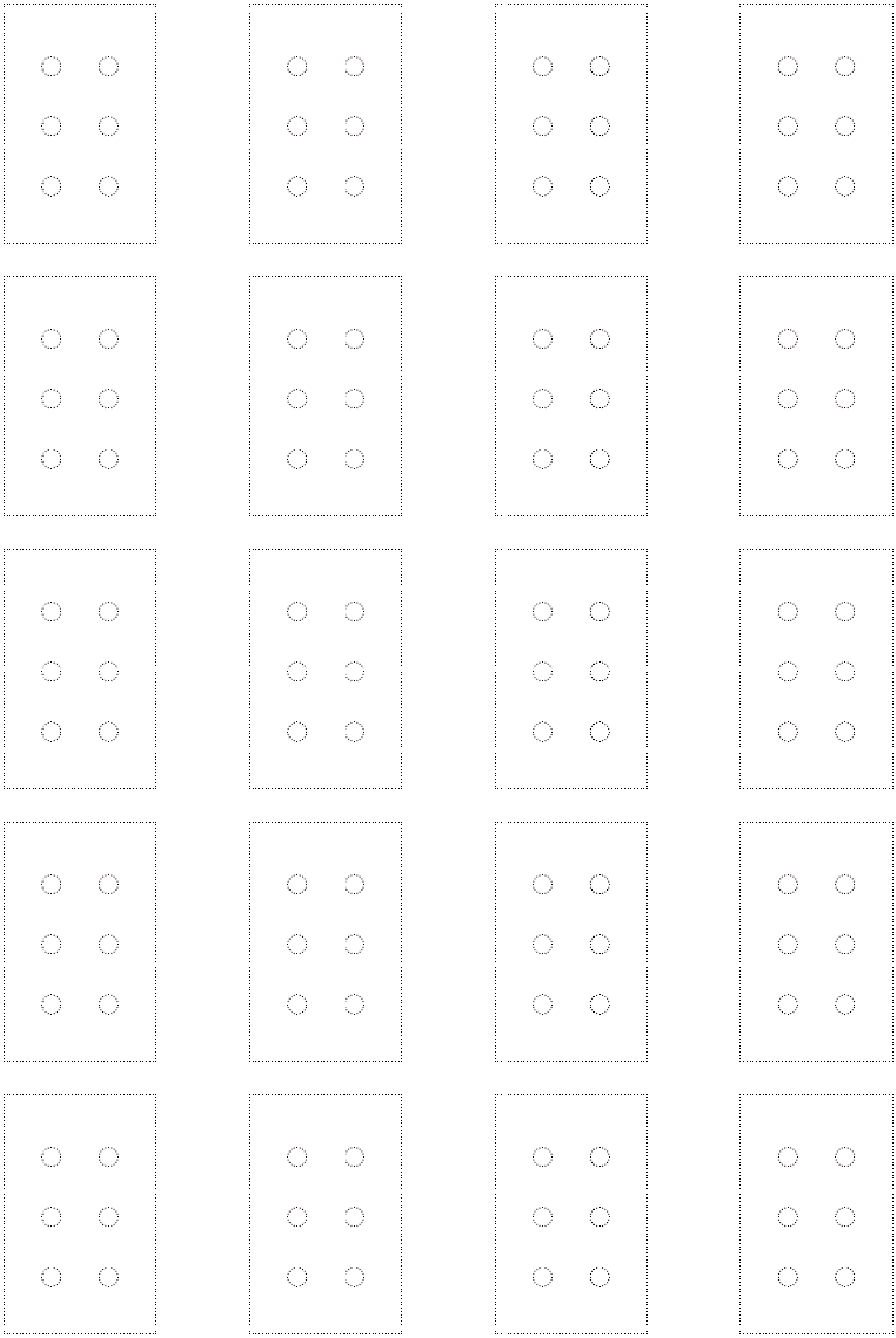
LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MATTOS, F. R. P.; ROSA, M. B DA; GIRALDO, V. A. **Conteúdo e Pratica: olhar conceitual na sala de aula: móduloII**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013

MORAIS FILHO, D. C. DE; MALAGUTTI, P. L. A. **Matemática Discreta: módulo II**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013

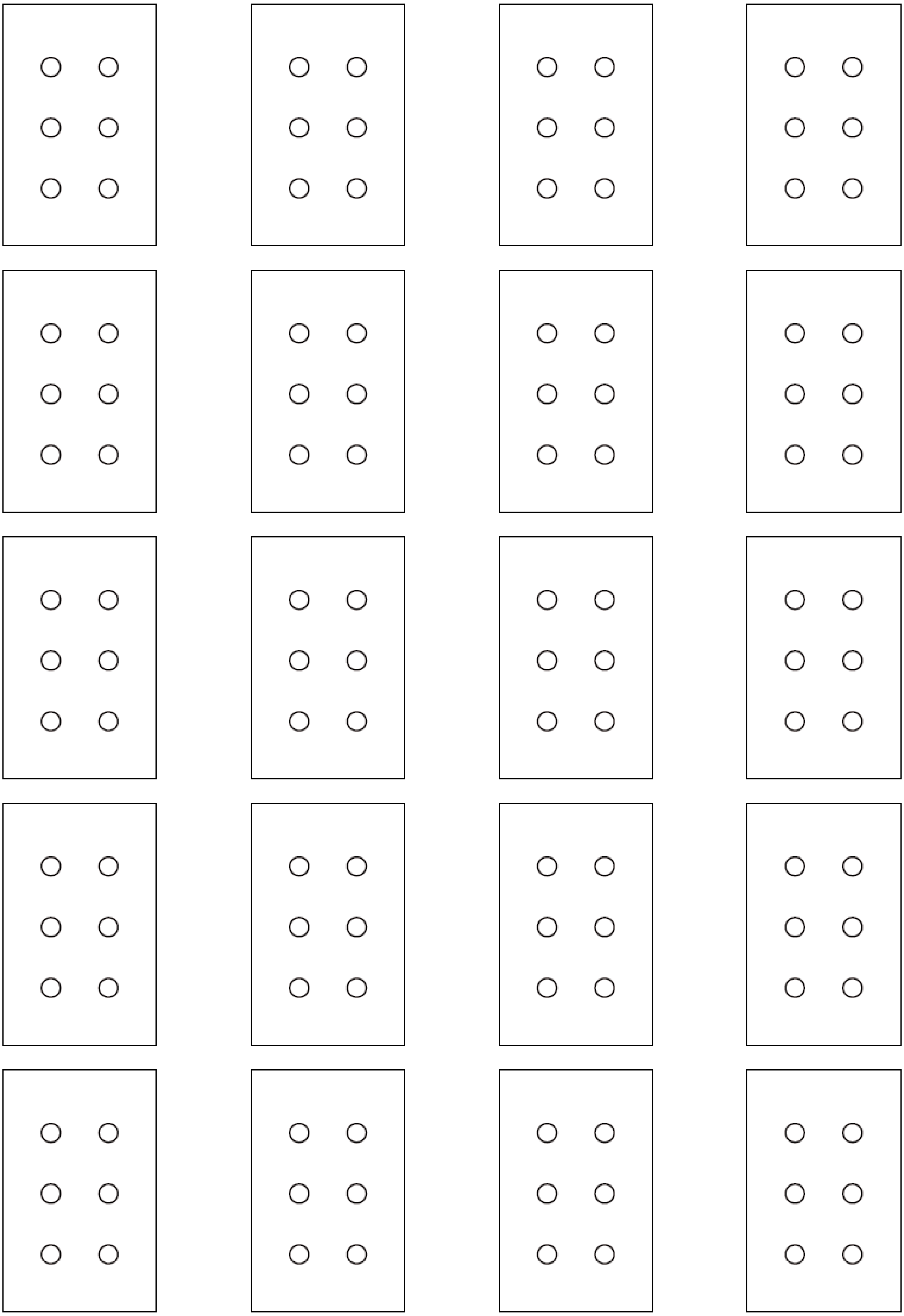
SOUSA, R. G. Código Braille**. Brasil Escola**, Brasil, janeiro 2016, disponível em Brasil Escola: http://brasilescola.uol.com.br/portugues/braile.htm Acesso em fevereiro de 2016.

ANEXO A



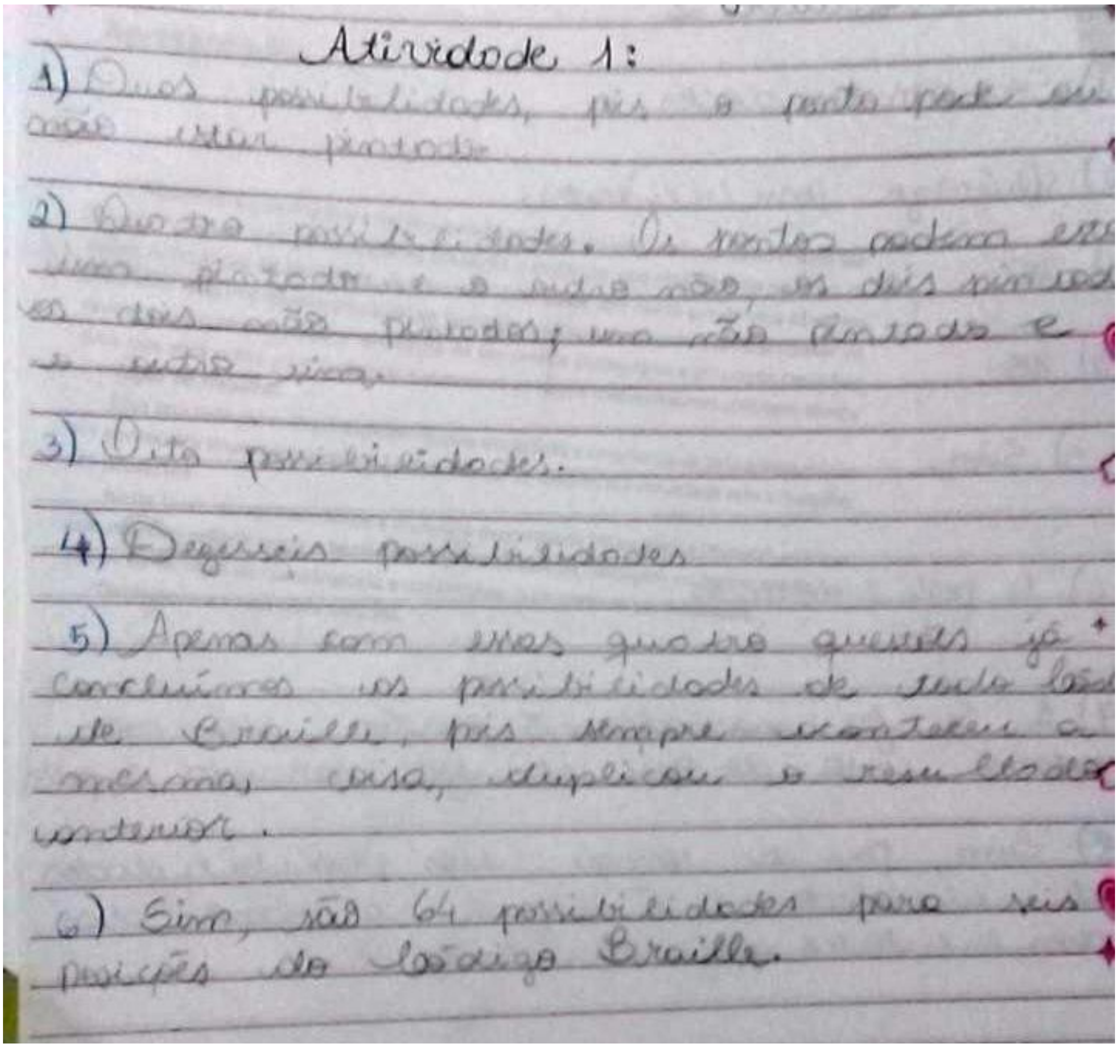
Fonte: Mattos, Rosa e Giraldo (2013, p.133).

ANEXO B



Fonte: Mattos, Rosa e Giraldo (2013, p. 134)

APENDICE A



Atividade 1:

1) Duas possibilidades, pois o ponto pode ou não estar pintado.

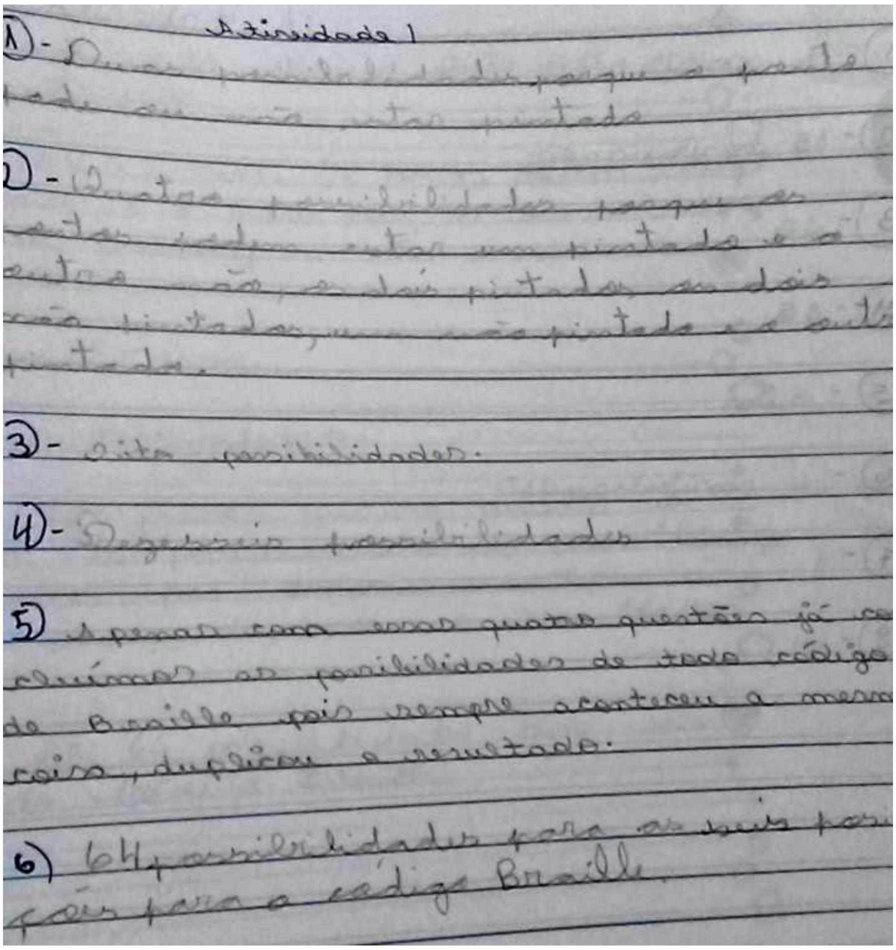
2) Quatro possibilidades. Os pontos podem estar um pintado e o outro não, os dois pintados, os dois não pintados; um não pintado e o outro sim.

3) Oito possibilidades.

4) Dezesseis possibilidades

5) Apenas com esses quatro quesitos já concluímos as possibilidades de cada cela de Braille, pois sempre acontece a mesma coisa, duplicou o resultado anterior.

6) Sim, são 64 possibilidades para seis posições do código Braille.



Atividade 1

1)- Duas possibilidades, porque o ponto pode ou não estar pintado

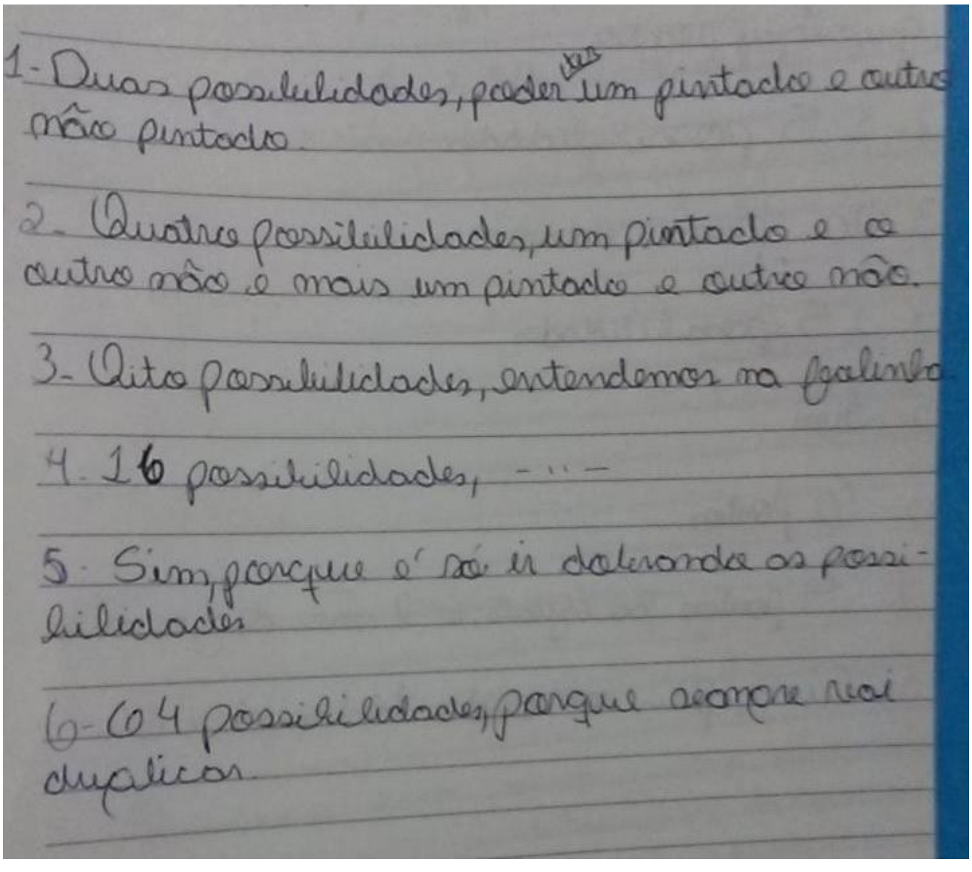
2)- Quatro possibilidades porque os pontos podem estar um pintado e o outro não, os dois pintados ou dois não pintados, um não pintado e o outro pintado.

3)- Oito possibilidades.

4)- Dezesseis possibilidades

5) Apenas com essas quatro questões já conseguimos as possibilidades de todo código do Braille pois sempre aconteceu a mesma coisa, duplicou o resultado.

6) 64 possibilidades para os seis pontos para o código Braille.



1- Duas possibilidades, poder ser um pintado e outro não pintado.

2- Quatro possibilidades, um pintado e o outro não e mais um pintado e outro não.

3- Oito possibilidades, entendemos na folinha

4- 16 possibilidades, ...

5- Sim, porque é só ir dobrando as possibilidades

6- 64 possibilidades, porque sempre vai duplicar.