UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Jairo Renato Araujo Chaves

A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA

Jairo Renato Araujo Chaves

A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Karine Faverzani Magnago

Santa Maria, RS
2019

Chaves, Jairo Renato Araujo
A Interatividade do GeoGebra no Auxílio da Compreensão da Trigonometria / Jairo Renato Araujo Chaves.- 2019.
90 p.; 30 cm

Orientadora: Karine Faverzani Magnago
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2019

1. Trigonometria 2. Funções trigonométricas 3. GeoGebra I. Magnago, Karine Faverzani II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Jairo Renato Araujo Chaves

A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 18 de fevereiro de 2019:

Karine Faverzani Magnago

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Vera Lúcia Duarte Ferreira, Dra. (UNIPAMPA)

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

A minha amada esposa **Cristina** e ao meu amado filho **Bruno**, preciosos presentes de **DEUS** e fundamentais na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho e, de maneira especial, agradeço:

✓ primeiramente a DEUS pela sabedoria e capacitação na realização desse trabalho, pois com certeza experimentei o que está escrito: *"Porque o SENHOR dá a sabedoria; da sua boca é que vem o conhecimento e o entendimento"* (Bíblia Sagrada, Pv 2:6).

✓ em especial a minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Karine Faverzani Magnago, por acreditar na proposta desse trabalho, dando sugestões pertinentes na condução do mesmo. Obrigado pelo seu incentivo constante.

✓ as professoras Dr.ª Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dr.ª Vera Lúcia Duarte Ferreira e Dr.ª Janice Rachelli, integrantes da banca examinadora, pelas contribuições que enriquecem esse trabalho.

✓ ao Prof. Dr. Márcio Marques Martins, pela valiosa colaboração na análise dos dados estatísticos.

✓ aos professores do curso de Mestrado, que ajudaram no crescimento em minha formação docente.

✓ aos colegas do mestrado pelo convívio e compartilhamento de experiências, em particular ao Cel Vinícius, amigo e colega de trabalho no Colégio Militar de Santa Maria (CMSM).

✓ aos colegas do CMSM pela amizade, companheirismo e pelo suporte nos momentos de minha ausência.

✓ ao Comando do CMSM pelo irrestrito apoio a minha capacitação profissional.

✓ aos alunos voluntários do segundo ano do Ensino Médio do CMSM, que muito colaboram na pesquisa desse trabalho.

✓ ao meu irmão José Carlos (zé), que sempre teve preocupação pelo meu bem-estar.

RESUMO

A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA

AUTOR: Jairo Renato Araujo Chaves
ORIENTADORA: Karine Faverzani Magnago

A presente dissertação tem como foco central verificar se a utilização do software GeoGebra contribui para a compreensão por parte dos alunos, dos conceitos básicos da Trigonometria, explorando a interatividade e o dinamismo proporcionado por essa ferramenta computacional. Este trabalho faz uso de uma sequência de doze atividades elaboradas pelo professor, nas quais os alunos puderam utilizar applets (mini-aplicativos) construídos com o GeoGebra, como auxílio na resolução das atividades. A aplicação das atividades aconteceu com um grupo de 19 alunos voluntários do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria, que tinham como expectativa reforçar os conhecimentos acerca do assunto, pois os mesmos já tinham em séries anteriores estudado Trigonometria. A pesquisa realizada foi do tipo intervenção pedagógica, de caráter qualitativo e quantitativo e procurou investigar o ganho percentual na aprendizagem relacionado à aplicação das atividades por meio do Método de Richard Hake. Para isso, foram utilizados pré e pós-testes sobre o conteúdo abordado com as atividades estudadas. Como resultado, observamos ganhos na aprendizagem de 66,22%.

Palavras-chave: Trigonometria, Funções Trigonométricas, GeoGebra.

ABSTRACT

INTERACTIVITY IN GEOGEBRA HELPING TO UNDERSTAND TRIGONOMETRY

AUTHOR: Jairo Renato Araujo Chaves
ADVISOR: Karine Faverzani Magnago

This dissertation aims to verify whether the use of the software GeoGebra contributes for students' learning about the basic concepts of Trigonometry, exploring the interactivity and the dynamics which are provided by this computational tool. This work approaches a sequence of twelve teacher-made activities that allowed students to use applets (mini-apps) built by GeoGebra as a help tool to solve to activities. This activity was carried out with a group of 19 volunteer students of the 2nd year of high school of the Military School of Santa Maria, who wanted to strengthen their knowledge about the topic, once they had already studied Trigonometry in previous school years. This research was one of a pedagogic intervention type, with a qualitative and quantitative approach and aimed to investigate the percentage gain in learning related to the use of the activities by the Richard Hake Method. In order to do so, we have used before and after tests about the contents that were approached with the activities. As a result, we have observed learning gains of 66,22%.

Key words: Trigonometry. Trigonometric Functions. GeoGebra

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a disciplina de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, exige dos docentes competências e habilidades metodológicas que transcendem as fronteiras de um ensino tradicional.

A presente pesquisa desencadeou-se pela necessidade de tornar o estudo dos conceitos básicos da Trigonometria mais efetivo e interessante para o aluno. Nasceu da percepção de que, muitas vezes, os discentes simplesmente decoram tabelas e valores numéricos para o seno, cosseno e tangente, sem ao menos compreenderem os seus reais significados. Gráficos, domínios, imagens e períodos das principais Funções Trigonométricas tornam-se enigmas, e os alunos passam a decorar mecanicamente, informações e símbolos, para eles, muitas vezes desconhecidos.

Por outro lado, os estudantes, no seu dia a dia, são bombardeados por uma infinidade de recursos digitais, sejam eles aplicativos de celulares, redes sociais, plataformas de ensino, vídeo aula e também por toda a sorte de informações. Sendo assim, vivem num mundo globalizado e dinâmico que está em constante transformação. Contrapondo-se a isso, no ensino tradicional, as aulas são, em sua maioria, monótonas e estagnadas. O professor é mero expositor de um ensino conteudista e a sala de aula é estática.

Buscando-se aliar o estudo da Trigonometria a um recurso computacional de geometria dinâmica, nesse caso o GeoGebra, deu-se esta investigação, realizada com alunos do segundo ano, do Ensino Médio, no Colégio Militar de Santa Maria, no terceiro trimestre de 2018.

A razão da escolha do segundo ano, para o desenvolvimento da pesquisa, foi devido ao fato desses alunos terem estudado Trigonometria no primeiro ano e assim, delimitar-se o foco da pesquisa, baseado na questão: **O uso do GeoGebra contribui para a compreensão pelos alunos sobre conceitos básicos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como das Funções Seno, Cosseno e Tangente?**

Para responder a esse questionamento, foi aplicado um pré-teste em que os alunos responderam a um conjunto de questões relacionadas aos conceitos básicos da Trigonometria e Funções Trigonométricas. Na sequência do trabalho, foram propostas 12 atividades de Trigonometria no laboratório de informática, onde foi utilizado o software GeoGebra como ferramenta para a visualização das interações e simulações gráficas. Na sequência, aplicou-se novamente o mesmo questionário inicial, sendo chamado agora de pós-teste, a fim de serem comparados os conhecimentos prévios com os conhecimentos adquiridos após a execução das atividades.

Este trabalho está estruturado em mais quatro capítulos, relacionados a seguir:

Capítulo 2 – **Fundamentação teórica** – procura-se, nesse capítulo, no pensamento de alguns autores, o embasamento teórico para validar o ensino de matemática de uma maneira dinâmica, bem como o uso de tecnologias na sala de aula. Discorre-se sobre o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e uma breve referência sobre a ferramenta de ensino MOODLE. São mencionados trabalhos do banco de dissertações do PROFMAT em linhas similares da pesquisa. Apresentam-se também alguns conceitos básicos da Trigonometria envolvida na pesquisa.

Capítulo 3 – **Procedimentos metodológicos** – são relatados a abordagem metodológica, o problema de pesquisa, o objetivo geral e os específicos e os participantes da pesquisa, bem como os instrumentos utilizados para a coleta dos dados.

Capítulo 4 – **Descrição e análise das atividades desenvolvidas –** para a compreensão do desenvolvimento do processo da pesquisa, serão tabulados os resultados das respostas do pré-teste e pós-teste para uma análise comparativa e estatística entre eles; também será feita a análise de duas perguntas dessas atividades, de cunho qualitativo e por fim, a descrição das atividades de Trigonometria.

Capítulo 5 – **Considerações finais** – aqui os resultados da investigação foram analisados e discutidos criticamente.

Finaliza-se a dissertação, indicando-se as **Referências** e os **Apêndices** nos quais se encontram o termo de livre consentimento, as questões do pré-teste e pós-teste e também as atividades de Trigonometria, desenvolvidas durante as aulas no laboratório de informática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Enquanto professor, muitas vezes, não se é pesquisador. Para isso se faz necessário, buscar dentre autores-pesquisadores, argumentos que alicercem uma transformação metodológica no fazer pedagógico, no dia a dia da sala de aula. Atenta-se, portanto, para a opinião de alguns autores, como também dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), transitando-se por um caminho de investigação, desde o uso das Tecnologias de Informação e Inserção Digital no ensino, como do uso do *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra, discorrendo-se também sobre a relevância no estudo da Trigonometria até o embasamento teórico dos seus conteúdos básicos.

2.1 INSERÇÃO DIGITAL NO ENSINO

Segundo Passos (2007), pensar a informática como um recurso pedagógico é pensá-la como uma ferramenta que pode propiciar um aumento na eficiência e na qualidade da aprendizagem, voltada para a busca de novas estratégias para a produção do conhecimento e auxiliar na busca de superação de problemas na aprendizagem. A autora cita ainda que a introdução da informática em nossas escolas deve ter um cunho pedagógico, eliminando-se possibilidades de criação de novas disciplinas para tal.

Várias escolas criaram a disciplina de informática em que um profissional, que em alguns casos não é professor, orienta os alunos no novo mundo da informática, ensinando tarefas como digitar e formatar textos, desenhar e pintar figuras, gravar arquivos. Verifica-se então a necessidade de usar a informática como ferramenta de grande potencial no processo de ensino e aprendizagem. Passos (2007) destaca ainda que cada vez mais o ambiente de aprendizagem informatizado ganha espaço como estratégia de ensino.

É inevitável que os profissionais de educação devam cada vez mais buscar conhecer e aplicar as novas Tecnologias da Informação em suas aulas, pois o aluno espera por um professor atualizado que saiba qual a melhor metodologia a aplicar em cada um de seus conteúdos. Nos tempos atuais não há mais espaço para discussões sobre se a escola deve ou não utilizar computadores, pois esses já fazem parte do cotidiano de todos nós, sendo portanto mais proveitoso discutir como utilizá-los de maneira adequada e produtiva em nossas escolas.

Segundo Borba e Penteado (2001) a utilização das Tecnologias da Informação na educação faz com que o professor deixe a chamada “zona de conforto”, em que quase tudo é conhecido, previsível e controlável, caminhando em direção à uma “zona de risco”, que aparece principalmente em decorrência de problemas técnicos e da diversidade de caminhos e dúvidas que surgem quando os alunos trabalham com um computador. O professor, na medida do possível, deve estar preparado para enfrentar muitos imprevistos, questões e indagações às quais poderá não saber responder, muito mais do que em aulas sem o uso das tecnologias.

Sobre as novas tecnologias Perrenoud (2000, p. 139), comenta:

> As novas tecnologias podem reforçar a contribuição dos trabalhos pedagógicos e didáticos contemporâneos, pois permitem que sejam criadas situações de aprendizam ricas, complexas, diversificadas, por meio de uma divisão de trabalho que não faz mais com que todo o investimento repouse sobre o professor, uma vez que tanto a informação quanto a dimensão interativa são assumidas pelos produtores dos instrumentos.

A sociedade, em geral, está mergulhada no uso crescente das Tecnologias de Informação e Comunicação. A redução significativa do custo, aliada à diminuição constante do tamanho dos equipamentos, bem como a diversidade de opções de uso dos mesmos, foram fatores importantes para a disseminação social da informática e para a política governamental de inclusão digital.

Essa política educacional de inserção digital equipou muitas escolas com laboratórios de informática, porém, provocava pouco reflexo no processo ensino-aprendizagem, pois em muitas escolas os laboratórios de informática, quando usados, como já foi citado, eram apenas para edição de textos, planilhas e busca de informações na *internet*, conforme comenta Valente (1999, p.12):

> Uma outra abordagem muito comum nas escolas, hoje, é a utilização do computador em atividades extraclasse, com o intuito de ter a Informática na escola, porém sem modificar o esquema tradicional de ensino. Certamente, essa abordagem não se encaixa no que entendemos como Informática na Educação. Em geral, essa atividade extraclasse é desenvolvida por um especialista em Informática, cuja função é desenvolver alguma atividade de uso do computador na escola.

A informática, com toda a diversidade de aplicativos e softwares, no sistema educacional, pode ser encarada como uma grande aliada no processo de aprendizagem, desde que seus recursos sirvam para auxiliar a compreensão e a construção do conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), dizem que a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação.

Pais (2002, p.144) comenta que fazer uso do computador, como uma tecnologia favorável a expansão da inteligência, depende da forma como ocorre a relação entre o usuário e as informações contidas no programa utilizado. Sobre essa relação o autor ainda acrescenta:

> Quanto mais interativa for essa relação, maiores serão as possibilidades de enriquecer as condições de elaboração do saber. Este é um dos principais argumentos para justificar a importância do estudo da interatividade no contexto da inserção dos computadores da educação escolar.

Podemos ter diferentes graus de interatividade dentro do contexto didático escolar. Conforme Pais (2002), as situações interativas podem ser diferenciadas em grau de envolvimento entre os interlocutores. O autor afirma ainda que o uso de recursos digitais pode contribuir na expansão de situações interativas, ou seja, as mídias digitais podem expandir o grau de interação.

Outro aspecto importante para a aprendizagem é a simulação propiciada pelo uso dos recursos computacionais. Com esses recursos, o aluno tem a possibilidade de manipular parâmetros, observar, fazer conjecturas e comprová-las, e esses aspectos intervêm diretamente na elaboração dos conceitos e dos conhecimentos em questão.

Sobre ambientes informatizados Gravina e Santarosa (1998), comentam que os mesmos podem ser um grande aliado em minimizar os obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. Na verdade, eles se apresentam como ferramentas com grande potencial, pois favorecem a exploração, a elaboração de conjecturas e gradativa construção de uma teoria matemática formalizada. As autoras ressaltam ainda que os ambientes informatizados oferecem outra importante vantagem, como a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, o qual não é possível na utilização estática de quadro e giz.

Pode-se fazer um melhor uso dos computadores quando são utilizados softwares de Geometria Dinâmica que permitem interações e simulações gráficas, favorecendo uma melhor compreensão sobre o comportamento das funções, como por exemplo, das Funções Trigonométricas, um dos objetivos deste trabalho. Evidentemente, esses softwares, podem ser utilizados para outras finalidades dentro do estudo da Matemática.

Outro fato importante a considerar é que as Instituições de Ensino estão cada vez mais fazendo uso da plataforma de ensino MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment – em Português Ambiente de Aprendizagem Dinâmico Modular Orientado a Objeto), sendo o mesmo um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) a distância.

Peres (2013) comenta que o sistema MOODLE permite a inclusão de conteúdo em etapas, bem como a inserção de material de mídias variadas (textos, vídeos, links) e com diversas possibilidades de interação, como fóruns e chats.

O CMSM (Colégio Militar de Santa Maria) disponibiliza a plataforma MOODLE como um espaço de compartilhamento e troca de conhecimentos entre docentes e alunos, possibilitando ao aluno adequar seu ritmo de estudo e aprendizagem às suas necessidades educacionais.

Atendendo a essas orientações, nesta pesquisa, o professor procurou fazer uso do potencial que existe nas ferramentas computacionais, principalmente no que diz respeito à possibilidade de interação do aluno com um software de Geometria Dinâmica, a fim de minimizar as dificuldades quanto à compreensão dos conceitos básicos da Trigonometria.

2.2 GEOGEBRA, UM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Em outras áreas de trabalho, verifica-se que os profissionais estão sempre buscando novas tecnologias, pois temem ficar obsoletos e perderem clientela num mercado de trabalho altamente competitivo. Há avanços na medicina, engenharia em todas as suas especificidades, processos de industrialização, comércio, transportes, lazer, e em muitas outras atividades. Com o professor de Matemática parece ser diferente, Como afirma D'Ambrósio (2001, p.16):

> O fracasso escolar, particularmente em educação matemática, é irreverssível no quadro conservador que predomina. A sociedade está mudando, as crianças estão mudando, o conhecimento está mudando. Não há como ser conservador com a educação matemática.

Portanto, é necessária uma busca por parte dos profissionais de educação para adequar-se aos novos tempos, pois vivemos num mundo impregnado pela informação e a cultura matemática. Os avanços científicos e tecnológicos estão revolucionando esse campo, e isso traz novas necessidades de aprendizagem, novos conteúdos e modificações substantivas ao ensino.

Existem muitos softwares utilizados para o ensino de Matemática, e em especial os softwares de Geometria Dinâmica, que assim são denominados por serem desenvolvidos em ambientes computacionais, permitindo a construção de objetos geométricos.

Braviano e Rodrigues (2002) comentam, em artigo da Revista do Professor de Matemática, que a Geometria Dinâmica permite a elaboração de construções geométricas no computador, nas quais os elementos básicos podem ser movimentados (interação) sem alterar as posições relativas entre esses elementos e os objetos construídos a partir deles.

Outro aspecto importante são as simulações de situações que podem ser implementadas com a Geometria Dinâmica, mais especificamente no estudo do comportamento dos diversos tipos de funções. Em consonância, Merlo e Assis (2010, p.10) defendem:

> Os softwares de simulação envolvem a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real permitindo a exploração de progressos reais ou fictícios e os conduzindo a uma situação real de aprendizagem. A grande vantagem das simulações é a possibilidade de mudar e acrescentar dados e variáveis, manipulando assim os elementos que irão intervir na experiência. A simulação motiva respostas, a análise dos resultados e refina conceitos.

Dentre os softwares de Geometria Dinâmica, destaca-se o GeoGebra por ser um software livre reunindo Geometria, Álgebra e Cálculo. O projeto de seu desenvolvimento teve início em 2001 e acabou sendo objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter, da Universidade Austríaca de Salzburgo, com o objetivo de servir como instrumento apropriado ao ensino de Matemática em sala de aula, juntando operações algébricas e geométricas.

O GeoGebra está disponível em múltiplas plataformas, rodando em qualquer sistema operacional, podendo suas construções serem livremente divulgadas na rede de computadores, o que possibilita que qualquer professor ou aluno tenha acesso e usufrua de toda a interatividade que o software proporciona. O mesmo pode ser obtido gratuitamente no site https://www.geogebra.org/.

O software apresenta um menu de opções com ícones que representam os objetos que se pode construir ao serem clicados pelo usuário, apresentando uma janela de Álgebra, na qual aparecem as coordenadas de pontos e equações; uma área de trabalho em que aparecem as figuras e objetos e por fim uma linha de entrada de comandos situada na parte inferior da tela, que tem por objetivo a digitação de equações ou condições que definem os objetos a serem representados na tela (HOHENWARTER, 2018).

Assim, o professor buscou dentre os recursos de aplicativos matemáticos, o GeoGebra. Esse permite que se façam construções geométricas, utilizando-se pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, etc. Também possibilita inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente. Assim, tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as propriedades geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

O projeto do GeoGebra tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. O programa ganhou diversos prêmios internacionais, concedidos pela Alemanha, Áustria, França e Suécia.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), as tecnologias nas mais variadas formas e usos são um dos mais importantes agentes de transformação da nossa sociedade, tanto pelas mudanças que exercem sobre os meios de produção, quanto pelas consequências de suas aplicações no cotidiano das pessoas. Os recursos da informática influenciam cada vez mais a escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem, inserindo-se um grande e novo desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho novas formas de comunicar e conhecer.

2.3 A RELEVÂNCIA DO ESTUDO DA TRIGONOMETRIA

O estudo da Trigonometria no Ensino Fundamental é apresentado como necessário, por exemplo, na resolução de problemas envolvendo cálculo de medidas de distâncias inacessíveis, necessitando que o aluno já tenha conhecimento sobre semelhança de triângulos e do Teorema de Tales para sua solução, dentre outros.

Aos alunos do Ensino Médio, deve-se salientar, como exemplo, a existência de fenômenos repetitivos e que obedecem a determinado período de repetição, justificando assim, a aplicação da Trigonometria no ciclo trigonométrico e o estudo das Funções Circulares.

De acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000), a Trigonometria, apesar de importante, é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações, em detrimento dos aspectos importantes das Funções Trigonométricas e da análise de seus gráficos.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) disponibiliza em sua página na internet (http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes) uma lista de dissertações concluídas nas diversas instituições que fazem parte do programa de Mestrado. Ao utilizar a busca no banco de dados pelo título “trigonometria” encontramos noventa trabalhos que contemplam o assunto, sendo que cinco deles foram escolhidos para apreciação, pois fazem uma abordagem da Trigonometria mais coerente com esse trabalho . Os mesmos estão citados no Quadro 1 e serão descritos na sequência.

Quadro 1 – Trabalhos consultados na base de dados do PROFMAT

Referência	Instituição	Título
Freitas (2016)	UFMS	Trigonometria: Um estudo teórico e seu ensino em sala de aula como o auxílio do software GeoGebra.
Oliveira (2014)	UFCG	Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente.
Tokuyama (2018)	CPII	Trigonometria no Ensino Fundamental. Introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano.
Rêgo (2016)	PUC	O uso do GeoGebra como ferramenta de ensino em trigonometria.
Santiago (2015)	UESB	O ensino da trigonometria usando o software GeoGebra como ferramenta de ensino - aprendizagem.

Fonte: Autor

Freitas (2016) propõe um estudo dos principais conceitos e definições necessários para que o ensino e aprendizagem da Trigonometria, na educação básica, tenham uma maior consistência, com demonstrações e gráficos, facilitando a visualização, interpretação e compreensão dos conceitos trigonométricos. A autora, em sua conclusão, declara que os alunos participantes da experiência obtiveram um melhor desempenho do que aqueles em que o conteúdo foi trabalhado de forma tradicional (lousa/caderno).

Oliveira (2014) apresenta um estudo sobre o ensino da Trigonometria no Ensino Médio, contemplando as recomendações sobre esse conteúdo encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e uma breve análise desses conteúdos em alguns dos livros recomendados pelo Guia de Livros Didáticos de Matemática-PNLP (2012). Destaca-se a formação do conceito de radiano, a extensão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente estudadas no triângulo retângulo para as Funções Trigonométricas de domínio real, além de várias demonstrações geométricas. Apresenta, também, uma sequência didática, com atividades adaptadas ao uso do *software* GeoGebra.

Tokuyama (2018) apresenta, no seu trabalho, uma proposta de antecipar para o nono ano o ensino da circunferência trigonométrica e estender os conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos não agudos. A autora propõe construir a circunferência trigonométrica utilizando-se régua e compasso e, a partir disso, definir os conceitos de seno, cosseno e tangente. Trabalhou ainda com as razões trigonométricas no triângulo retângulo e também explorou o uso de simetrias, com o intuito de relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano. No final do seu estudo apresentou uma atividade realizada com alunos do nono ano de uma escola pública, localizada no município do Rio de Janeiro. Considerou o experimento com resultado positivo, pois obteve retorno de alguns alunos já cursando o Ensino Médio no ano seguinte. Esses relataram que estudar Trigonometria no primeiro ano ficou mais tranquilo devido ao fato de terem estudado o conteúdo básico de Trigonometria no ano anterior.

Rêgo (2016) propõe e analisa as possibilidades do ensino de Trigonometria por meio do GeoGebra, objetivando complementar a explicação exposta em sala, por intermédio de construções geométricas, em seis turmas de nono ano do Ensino Fundamental. O autor focou em pontos em que é possível usar a tecnologia como ferramenta de ensino e instrumento para o aprender. Com as intervenções feitas pelos alunos, durante a atividade, o autor constatou a importância de se utilizar uma outra metodologia complementar ao ensino tradicional. Concluiu ao final da atividade que a adoção de um *software* de Geometria Dinâmica torna a aprendizagem mais significativa e prazerosa para o estudante.

Santiago (2015) apresenta uma alternativa para o ensino de Funções Trigonométricas, especificamente Função Seno e Função Cosseno, utilizando o GeoGebra para melhorar a visualização gráfica das funções. O autor comenta que tem como objetivo analisar o quanto o *software* pode contribuir para o ensino das Funções Trigonométricas, explorando suas variações diante dos recursos que o mesmo dispõe. Segundo ele, os resultados das atividades revelaram que, o GeoGebra apresenta-se como importante ferramenta educacional na visualização, no entendimento dos elementos, nos conceitos e suas variações.

2.4 HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Em Boyer (1996), constata-se que, na história da Matemática, houve a necessidade dos povos em resolver seus mais variados problemas. Em particular, a Trigonometria desempenhou importante função na resolução de problemas práticos, principalmente ligados à Astronomia, agrimensura e navegação.

Os antigos povos egípcios e babilônios (aproximadamente 1650 a.C.) já tinham conhecimento de teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes, mas com os gregos encontra-se pela primeira vez um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. Devido a essas relações entre as medidas de ângulos e de segmentos, a Trigonometria foi considerada, originalmente, como uma extensão da Geometria.

A palavra Trigonometria vem de três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metrom (medir), o que nos dá como significado medida dos triângulos.

Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio, servindo a Astronomia como grande impulsionadora no estudo e evolução da Trigonometria para muitos outros povos e civilizações.

Ainda sobre os egípcios (aproximadamente 1500 a.C.), existem referências de que associavam as sombras projetadas por uma vara vertical à sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógio de sol). Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, levando os egípcios a introduzirem o conceito de seqt, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical, podendo-se assim dizer que essas ideias seriam a origem da tangente e cotangente.

Ainda de acordo com Boyer (1996), na China, (aproximadamente 1110 a.C.), triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades, existindo evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas, quanto do conceito de ângulo e de suas medidas, porém não se tem registro de como eram feitas essas medições e quais as unidades de medida eram utilizadas.

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da Trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes; posteriormente essa ideia foi generalizada por Hiparco para qualquer círculo (EVES, 1995).

Os gregos do tempo de Hipócrates (460 a.C – 377 a.C.) já conheciam as propriedades das cordas como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos e acredita-se que Eudoxo possivelmente tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da lua. Na obra de Euclides (360 a.C – 295 a.C.) – Os Elementos – embora não havendo referência direta à Trigonometria, encontram-se alguns teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas.

Astrônomos como Eratóstenes de Cirene (276 a.C. – 194 a.C.) e Aristarco de Samus (310 a.C. – 230 a.C.) trabalhavam com problemas que estabeleciam relações entre ângulos e cordas. Em um período aproximado de dois séculos e meio, de Hipócrates a Erastótenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e suas aplicações à Astronomia.

Por volta de 140 a.C. Hiparco construiu as primeiras tabelas trigonométricas para uso na Astronomia, ganhando assim o direito de ser chamado o pai da Trigonometria. A divisão de uma circunferência em 360 partes parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, sendo provável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da Astronomia.

Para Eves (1995), o Almagesto foi uma obra de Astronomia atribuída a Ptolomeu, escrita por volta de 150 d.C. A Trigonometria encontrada nesta obra contém a fórmula para o seno e cosseno da soma de dois ângulos, abordando um começo da Trigonometria esférica. A obra de Ptolomeu foi considerada em trabalho de referência sobre a astronomia até os tempos de Copérnico e Kepler, pois nela encontra-se uma discussão sobre a projeção estereográfica, em que a posição dos lugares na Terra é determinada pela latitude e longitude, que são exemplos antigos de coordenadas sobre a esfera, e que serviram de base para construção do astrolábio, instrumento usado para determinação da posição sobre a terra até a introdução do octante, e mais tarde sextante, no século XVIII.

Os termos seno e cosseno apareceram com o povo hindu a partir de problemas de astronomia que precisavam ser solucionados por meio de uma reta que une dois pontos extremos de um arco de circunferência. O seno era chamado de Jya, significando corda em hindu, e traduzido para o latim como sinus em 1150. O termo co-sinus (cosseno) surgiu no século XVII para designar o seno complementar do ângulo. Entre os árabes, astrônomos como Al-Battano (858-929) e Abu-Wafa (940-997), deram importantes contribuições para a Trigonometria, devendo-se a eles a ampliação das Funções Circulares às seis funções atualmente em uso e o estabelecimento de suas relações.

Eves (1995) comenta sobre o desenvolvimento da Trigonometria no século XVI, quando o matemático francês Viète, embora estudando direito, dedicou-se ao estudo da Matemática desenvolvendo estudos e trabalhos de Trigonometria, Álgebra e Geometria. A obra Canon Mathematicus seu ad Triangula (1579) foi de grande importância no estudo da Trigonometria, pois se tratava do primeiro livro na Europa a abordar métodos de resolução de triângulos planos com auxílio das seis funções trigonométricas; por volta do século XVII foram encontradas aplicações da Trigonometria na refração e outras partes da Física.

O aspecto atual da Trigonometria foi dado por Euler (1707-1783) quando introduziu a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo. Encontramos a Trigonometria sendo usada como ferramenta em diversas áreas do conhecimento, tais como: as navegações marítimas e aéreas, engenharias, na arquitetura, astronomia, meteorologia e a sismologia, na física e até mesmo nas ciências da saúde com aplicações.

2.5 CONTEÚDOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA

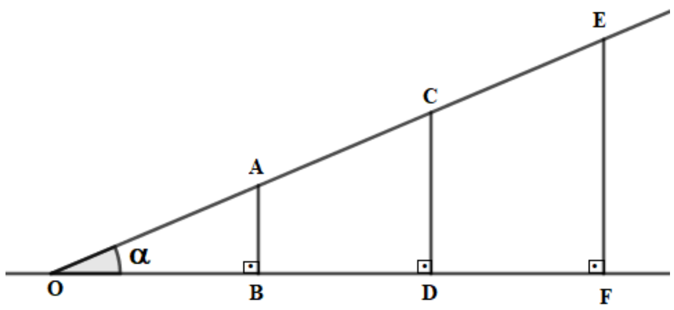
Serão apresentados os conteúdos básicos de Trigonometria que são pré-requisitos básicos para a realização das atividades propostas na sequência didática. As definições a seguir são baseadas em IEZZI et al (2010), PAIVA (1995) e LIMA (2014).

2.5.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Todos os triângulos retângulos que têm um ângulo agudo de medida α são semelhantes entres si. Veja alguns desses triângulos na Figura 1.

Da semelhança entre os triângulos OAB, OCD e OEF, ilustrados na figura 1, temos:

Figura 1: Triângulos retângulos semelhantes



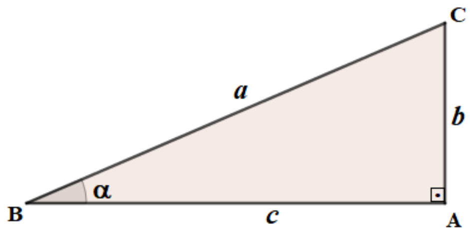
Fonte: Autor

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = r_1$$
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = r_2$$
$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = r_3.$$

As constantes r_1, r_2 e r_3 são **razões trigonométricas** chamadas, respectivamente, de seno de α (***sen α***), cosseno de α (***cos α***) e tangente de α (***tg α***).

Como essas razões são as mesmas para todos os triângulos retângulos semelhantes entre si, podemos defini-las com base em apenas um deles, apresentado na Figura 2.

Figura 2: Triângulo retângulo



Fonte: Autor

Daí:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto aposto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida do cateto adjacente a } \boldsymbol{\alpha}} = \frac{b}{c}.$$

Utilizando as razões anteriores, podemos escrever algumas relações importantes no estudo da Trigonometria.

Nas relações $sen\ \alpha = b/a$ e $cos\ \alpha = c/a$, obtemos $b = a.sen\ \alpha$ e $c = a.cos\ \alpha$. Substituindo $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ na relação $tg\ \alpha = b/c$, obtemos $tg\ \alpha = \frac{a.sen\ \alpha}{a.\text{Cos}\ \alpha}$ e, portanto, temos $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$

O Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ aplicado ao triângulo ABC representado na Figura 2, nos mostra imediatamente que

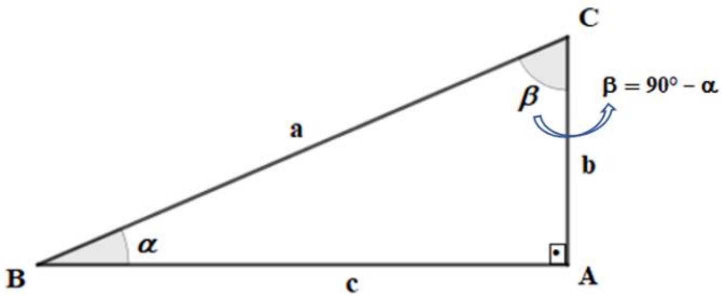
$$(\cos\alpha)^2 + (sen\ \alpha)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Lima (2014) comenta ser um costume tradicional, que convém adotar, escrever $cos^2\alpha$ e $sen^2\alpha$ em vez de $(\cos\alpha)^2$ e $(\text{sen}\ \alpha)^2$. Escrevemos, então, a relação fundamental

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Observando o triângulo retângulo na Figura 3 e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, temos que $\alpha + \beta = 90º$. Isso significa que os ângulos α e β são complementares e que $\beta = 90º - \alpha$.

Figura 3: Ângulos complementares



Fonte: Autor

Assim:

$$\left.\begin{array}{r} sen\,\alpha = \dfrac{b}{a} \\ \cos(90° - \alpha) = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow sen\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

e

$$\left.\begin{array}{r} cos\,\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \mathrm{sen}(90° - \alpha) = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow cos\,\alpha = \mathrm{sen}(90° - \alpha)\,.$$

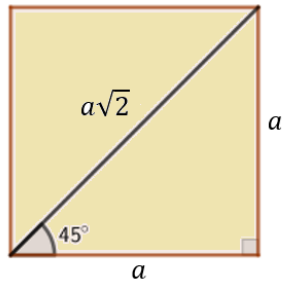
O *cosseno* de um ângulo agudo é igual ao *seno* do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra “cosseno” (seno do complemento).

2.5.2 Ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60°, pela frequência com que aparecem com problemas de geometria, são chamados de ângulos notáveis. Para a obtenção das razões trigonométricas desses ângulos, faremos uso de duas figuras planas bastante conhecidas: o quadrado de lado ***a*** e o triângulo equilátero de lado ***a***.

Pelo Teorema de Pitágoras temos a diagonal do quadrado como $a\sqrt{2}$, e que a mesma divide o ângulo reto em dois ângulos de 45°. (Figura 4).

Figura 4: Quadrado



Fonte: Autor

Assim temos:

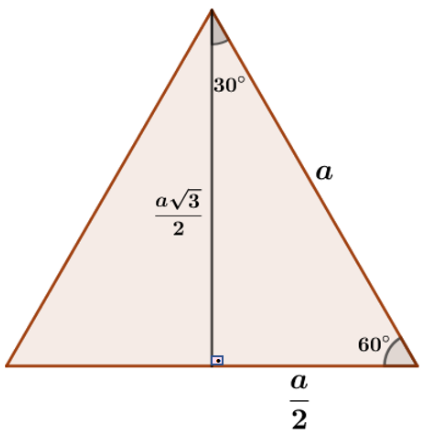
$$sen\ 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{a}{a} = 1\,.$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos a altura do triângulo equilátero como $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e que a mesma divide o ângulo de 60° em dois ângulos de 30°. (Figura 5).

Figura 5: Triângulo equilátero



Fonte: Autor

Assim, temos:

$$sen\ 30° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Temos, ainda, que 60º é o complemento de 30°. Logo:

$$sen\ 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = \mathrm{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$

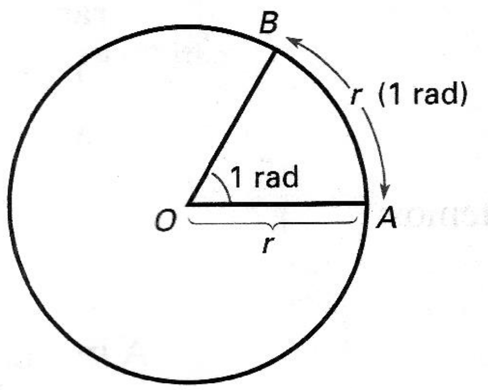
$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

2.5.3 Radiano: unidade de medida de ângulo

Um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Um ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 rad se, e somente se, determinar em uma circunferência de centro O um arco de 1 rad, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6: Radiano



Fonte: (PAIVA, 1995, p. 377).

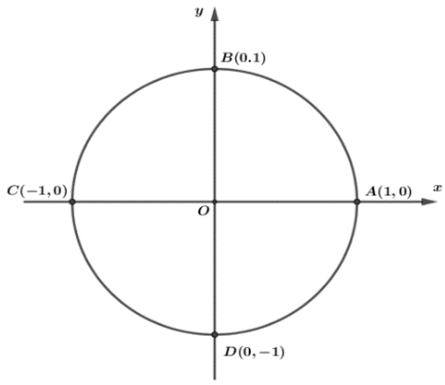
Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas são medidas de um mesmo arco, por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa.

Consequentemente, temos 180° equivalente a π rad.

2.5.4 Ciclo Trigonométrico

Consideremos uma circunferência de raio unitário (r = 1), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. (Figura 7).

Figura 7: Circunferência de raio unitário



Fonte: Autor

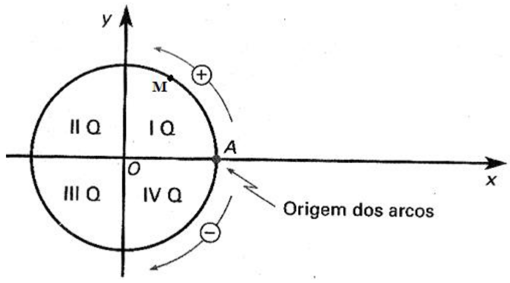
Essa estrutura, juntamente com as convenções a seguir, é a circunferência trigonométrica.

Convenções:

I. O ponto A(1, 0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.
II. Se um arco for medido no sentido horário, então a essa medida será atribuído o sinal negativo.
III. Se um arco for medido no sentido anti-horário, então a essa medida será atribuído o sinal positivo.
IV. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas de quadrantes; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir do ponto A.

Na Figura 8, está ilustrado essas convenções.

Figura 8: Circunferência Trigonométrica

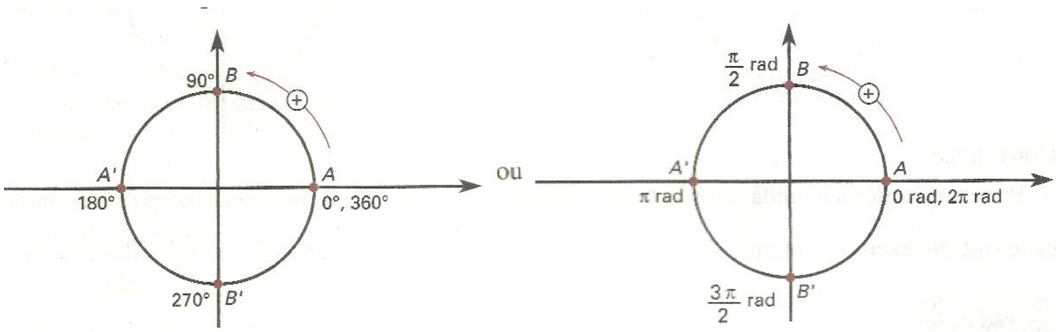


Fonte: (PAIVA, 1995, p. 382).

A cada ponto M da circunferência trigonométrica associamos medidas em graus ou radianos do arco $\widehat{AM}$.

Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido anti-horário (positivo), associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B'. (Figura 9).

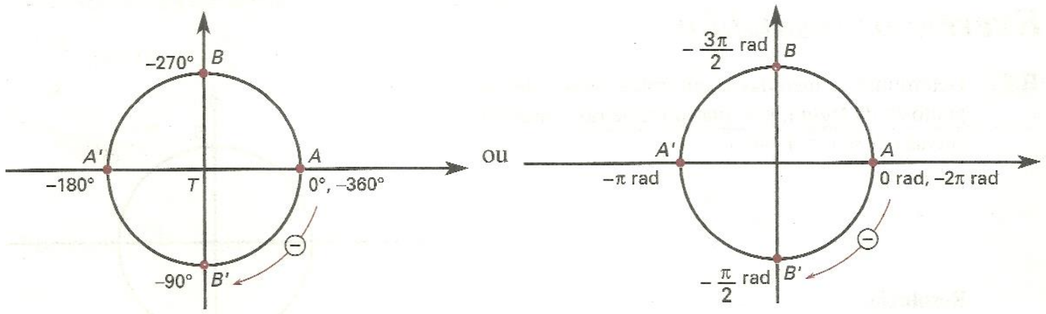
Figura 9: Circunferência trigonométrica com arcos no sentido positivo



Fonte: (PAIVA, 1995, p. 383).

Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido horário (negativo), associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B, apresentado na Figura 10.

Figura 10: Circunferência trigonométrica com arcos no sentido negativo



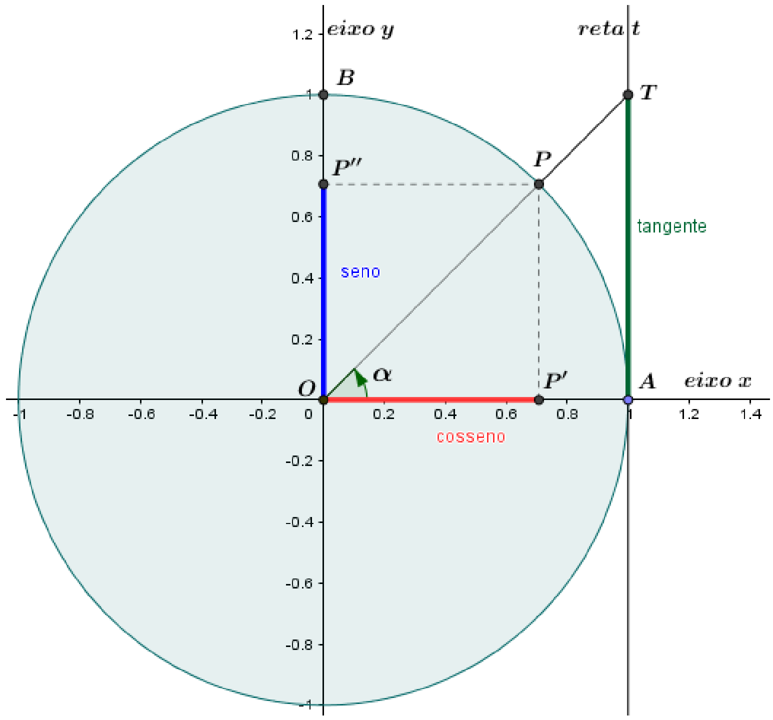
Fonte: (PAIVA, 1995, p. 383).

2.5.5 Razões Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico

Serão objeto desse estudo três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio unitário $\overline{OA}$ (Figura 11) e associemos ao ciclo três eixos:

- eixo dos cossenos (eixo *x*), com direção $\overline{OA}$ e sentido positivo de O para A ($\overrightarrow{OA}$).
- eixo dos senos (eixo *y*), com direção $\overline{OB}$ e sentido positivo de O para B ($\overrightarrow{OB}$), sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$.
- Eixo das tangentes, representado pela reta *t*, paralelo ao eixo dos senos por A, com sentido positivo igual ao eixo dos senos.

Figura 11: Seno, Cosseno e Tangente no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor

Na Figura 11, destacam-se os triângulos retângulos PP'O e TAO, semelhantes entre si. Para o arco $\widehat{AP}$ de medida α, temos:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto aposto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{P'P}{OP} = \frac{OP''}{1} = OP''$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

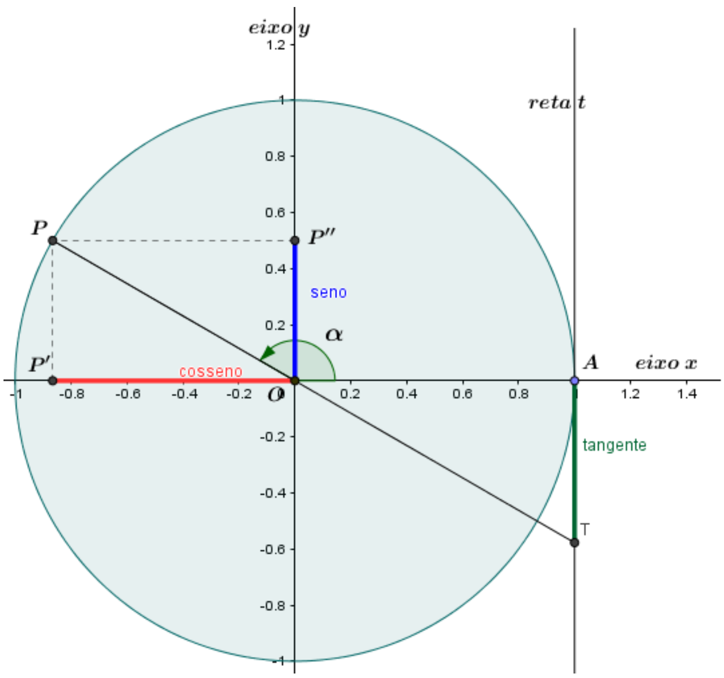
$$\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \boldsymbol{\alpha}}{\text{medida do cateto adjacente a } \boldsymbol{\alpha}} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT\,.$$

Nota-se que as medidas OP’ e PP’ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P. Amplia-se o conceito de seno e cosseno de um ângulo α para qualquer arco trigonométrico, chamando de cosseno e seno de α a abscissa e a ordenada do ponto P, respectivamente.

Na Figura 11 temos a situação de um ângulo α situado no 1º quadrante e, portanto, observamos:

- $\cos\alpha > 0$, pois a abscissa do ponto P é positiva.
- $\text{sen}\,\alpha > 0$, pois a ordenada do ponto P é positiva.
- $\text{tg}\,\alpha > 0$, pois a reta OP encontra o eixo das tangentes em T no semieixo positivo.
- $\cos\alpha$ é decrescente.
- $\text{sen}\,\alpha$ e $tg\ \alpha$ são crescentes.

Figura 12: Ângulo no 2º quadrante

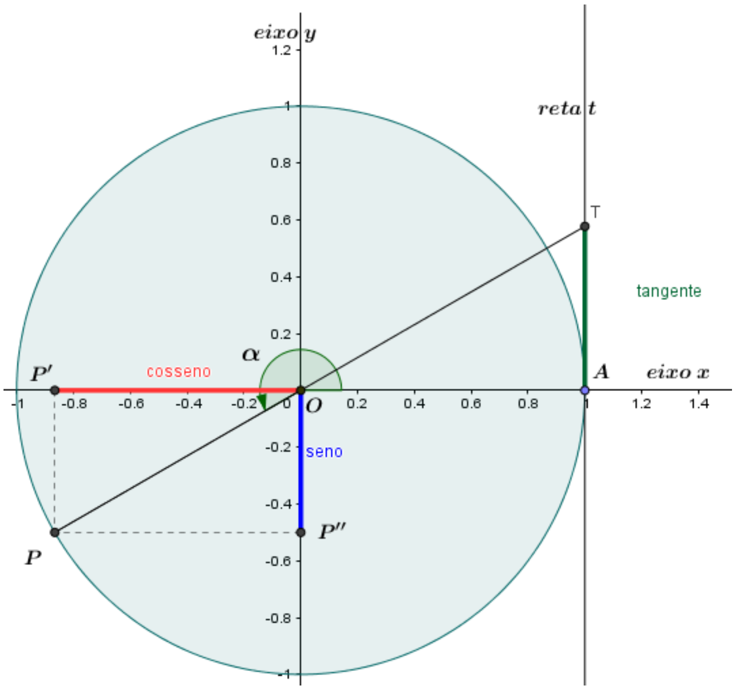


Fonte: Autor

Na Figura 12 temos a situação de um ângulo α situado no 2º quadrante e, portanto, observamos:

- $\cos\alpha < 0$, pois a abscissa do ponto P é negativa.
- $\text{sen}\,\alpha > 0$, pois a ordenada do ponto P é positiva.
- $\text{tg}\,\alpha < 0$, pois a reta OP encontra o eixo das tangentes em T no semieixo negativo.
- $sen\ \alpha$ e $\cos\alpha$ são decrescentes.
- $tg\ \alpha$ é crescente.

Figura 13: Ângulo no 3º quadrante

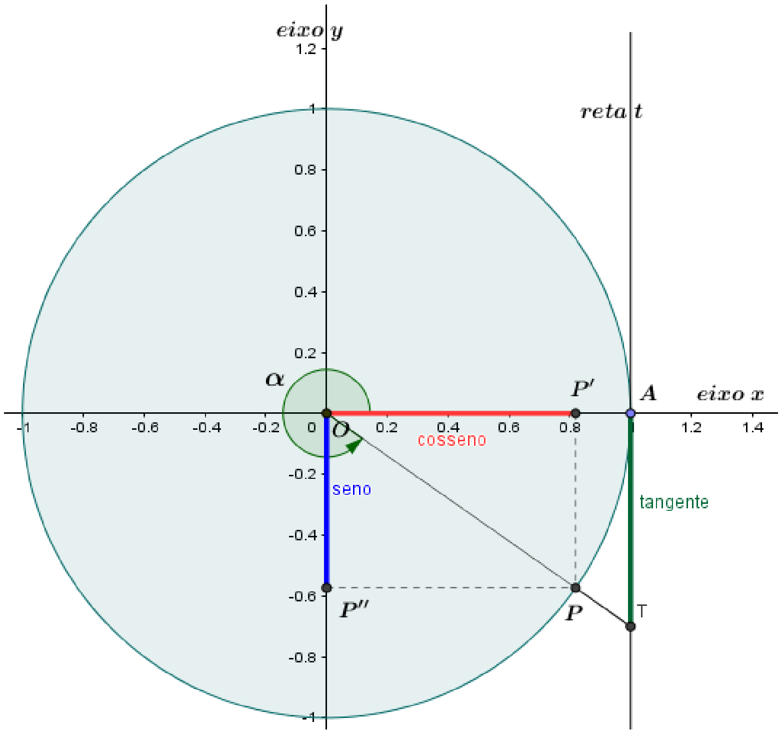


Fonte: Autor

Na figura 13 temos a situação de um ângulo α situado no 3º quadrante e, portanto, observamos:

- $\cos\alpha < 0$, pois a abscissa do ponto P é negativa.
- $\text{sen}\,\alpha < 0$, pois a ordenada do ponto P é negativa.
- $\text{tg}\,\alpha > 0$, pois a reta OP encontra o eixo das tangentes em T no semieixo positivo.
- $sen\ \alpha$ é decrescente.
- $\cos\alpha$ e $tg\ \alpha$ são crescentes.

Figura 14: Ângulo no 4º quadrante



Fonte: Autor

Finalmente, na Figura 14 temos a situação de um ângulo α situado no 4º quadrante e, portanto, observamos:

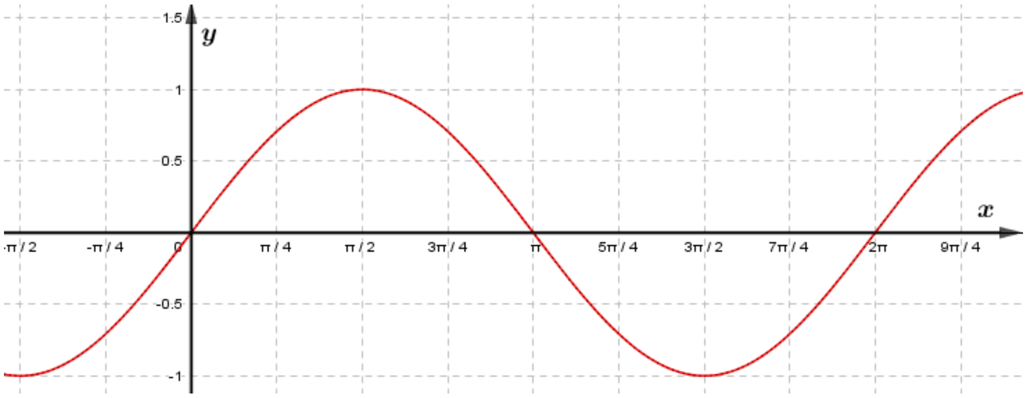
- $\cos\alpha > 0$, pois a abscissa do ponto P é positiva.
- $\operatorname{sen}\alpha < 0$, pois a ordenada do ponto P é negativa.
- $\operatorname{tg}\alpha < 0$, pois a reta OP encontra o eixo das tangentes em T no semieixo negativo.
- $sen\ \alpha$ e $\cos\alpha$ são crescentes.
- $tg\ \alpha$ é crescente.

2.5.6 Função Seno

Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{sen\ x}$, isto é, $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

O domínio e a imagem da função $f(x) = sen(x)$ são, respectivamente os conjuntos, $D = \mathbb{R}$ e $Im = \{ y \in \mathbb{R} - 1 \le y \le 1 \}$. Seu gráfico é apresentado na figura 15.

Figura 15: Gráfico da função *f(x)= sen(x)*



Fonte: Autor

Se uma função f, de domínio D, satisfaz a condição $f(p+x) = f(x)$, para qualquer $x \in D$, e se p é o menor valor positivo que satisfaz tal condição, então dizemos que a função f é periódica e que seu período é p.

Notamos que a função seno satisfaz as condições:

$sen(2\pi + x) = sen\, x$

$sen(4\pi + x) = sen\, x$

$sen(6\pi + x) = sen\, x$

$sen(2\pi + x) = sen\, x$

....

$sen(k \cdot 2\pi + x) = sen\, x$, com $k \in \mathbb{Z}$.

O menor número positivo p tal que $sen(p + x) = sen\, x$ é $p = 2\pi$.

Portanto a função seno é periódica e seu período é 2π.

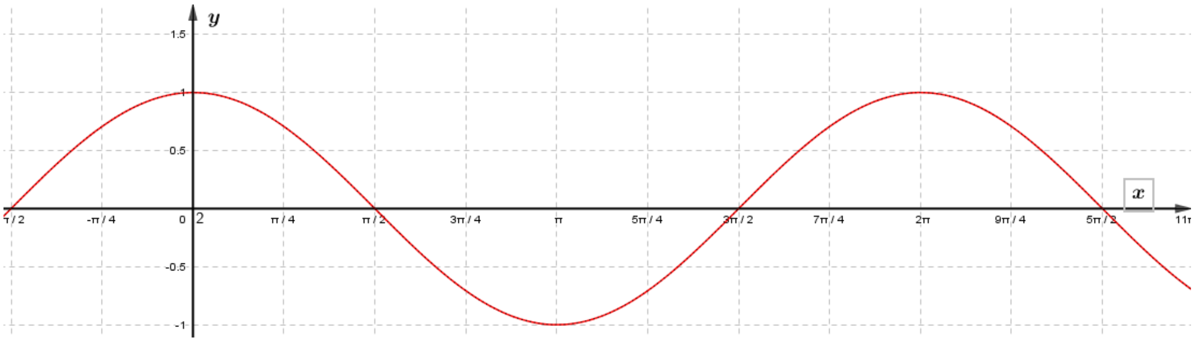
2.5.7 Função Cosseno

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{cos\, x}$, isto é, $\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$.

Sabe-se que $\cos x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pois os arcos x e $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ são suplementares, então o gráfico de $f(x) = cos(x)$ é o gráfico de $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

O domínio e a imagem da função $f(x) = cos(x)$ são, respectivamente os conjuntos: $D = \mathbb{R}$ e $Im = \{ y \in \mathbb{R} - 1 \leq y \leq 1 \}$. A função cosseno é periódica e seu período é 2π. Seu gráfico é apresentado na Figura 16.

Figura 16: Gráfico da função *f(x)= cos(x)*



Fonte: Autor

2.5.8 Funções do tipo $f(x) = a\,\boldsymbol{sen}(bx + c) + d$ e $f(x) = a\,\boldsymbol{cos}(bx + c) + d$.

Consideremos as transformações gráficas causadas pelos parâmetros ***a***, ***b***, ***c*** e ***d*** nas funções seno e cosseno em sua forma geral. Os parâmetros são números reais, sendo ***a*** e ***b*** não nulos.

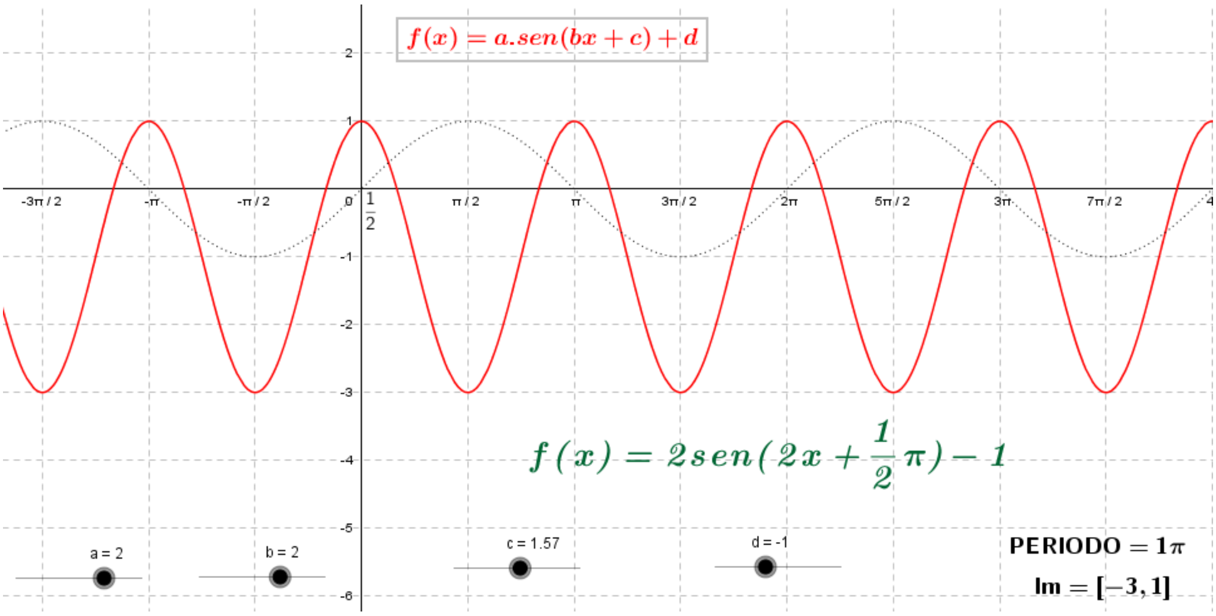
- Alterações gráficas da função $f(x) = a\,sen(x)$ em relação a $f(x) = sen\ x$.
  - ✓ o período é 2π.
  - ✓ o conjunto Imagem é $[-a, a]$.
  - ✓ quando $0 < a < 1$, o gráfico da função sofre uma contração vertical.
  - ✓ quando $a > 1$, o gráfico da função sofre uma dilatação vertical.
  - ✓ quando $-1 < a < 0$, o gráfico da função sofre uma contração vertical e uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.
  - ✓ quando $a < -1$, o gráfico da função sofre uma dilatação vertical e uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.
- Alterações gráficas da função $f(x) = sen\ (bx)$ em relação a $f(x) = sen\ x$.
  - ✓ o período é $\dfrac{2\pi}{|b|}$.
  - ✓ o conjunto imagem é $[-1, 1]$.
  - ✓ quando $0 < b < 1$, o gráfico da função sofre uma dilatação horizontal.
  - ✓ quando $b > 1$, o gráfico da função sofre uma contração horizontal.
  - ✓ quando $-1 < b < 0$, o gráfico da função sofre uma dilatação horizontal e uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.
  - ✓ quando $b < -1$, o gráfico da função sofre uma contração horizontal e uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.

- Alterações gráficas da função $f(x) = sen\ (x + c)$ em relação a $f(x) = sen\ x$.
    - ✓ o período é 2π.
    - ✓ o conjunto imagem é $[-1,\ 1]$.
    - ✓ quando $c > 0$, o gráfico da função sofre uma translação horizontal de c unidades para a esquerda.
    - ✓ quando $c < 0$, o gráfico da função sofre uma translação horizontal de $|c|$ unidades para a direita.
- Alterações gráficas da função $f(x) = sen(\ x) + d$ em relação a $f(x) = sen\ x$.
    - ✓ o período é 2π.
    - ✓ o conjunto imagem é $[-1 + d,\ 1 + d]$.
    - ✓ quando $d > 0$, o gráfico da função sofre uma translação vertical de d unidades para cima.
    - ✓ quando $d < 0$, o gráfico da função sofre uma translação vertical de $|d|$ unidades para baixo.

As considerações feitas anteriormente sobre as alterações gráficas na função seno, valem integralmente para a função cosseno.

Na Figura 17 está apresentada a função $f(x) = a\ sen(bx + c) + d$, que é parte de uma atividade em GeoGebra, onde é possível fazer simulações com os valores dos parâmetros através de seletores.

Figura 17: Gráfico da função *f(x)=a.sen(b.x+c)+d*



Fonte: Autor

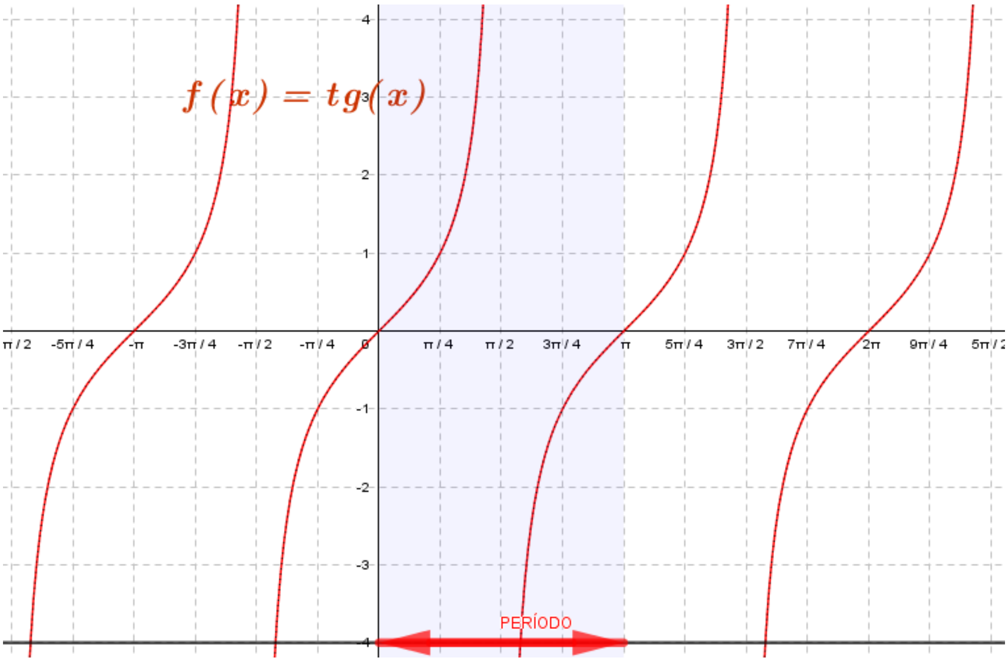
2.5.9 Função Tangente

Consideremos o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chama-se função tangente a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa cada número real $\boldsymbol{x \in D}$ ao número real $\boldsymbol{tg\ x}$, isto é, $\boldsymbol{f(x) = tg(x)}$.

O domínio e a imagem da função $f(x) = tg(x)$ são, respectivamente os conjuntos, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im = \mathbb{R}$. Seu gráfico é apresentado na figura 18.

Figura 18: Gráfico da função *f(x)=tg(x)*



Fonte: Autor

A função tangente é periódica e seu período é π.

As retas verticais que passam pelos pontos de abscissas $\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ \frac{(2k+1)\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais do gráfico, ou seja, essas retas não têm ponto comum com o gráfico.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A maioria das pesquisas em Educação tem sido sobre os problemas do ensino. Quando o professor se confrontou com as dificuldades na aprendizagem dos conceitos básicos da Trigonometria e com a preocupação por parte dos alunos em decorar valores, nasceu o desejo de ajudá-los de uma maneira que pudesse ser interessante e eficaz.

Conforme o dicionário Houaiss e Villar (2008), pesquisar é procurar com aplicação, com cuidado; investigar; tomar informações sobre; averiguar. Diante de muitas inquietações e movido pelo desejo de diversificar as metodologias até então empregadas, no ensino de Matemática, deu-se a presente pesquisa. Procurou-se assim, com aplicação e cuidado do professor-pesquisador, investigar o uso do GeoGebra no estudo da Trigonometria.

A investigação aqui descrita tem como objeto de estudo uma experiência de ensino realizada em sala de aula e em laboratório de informática, como também na plataforma Moodle, sendo essa pesquisa destinada ao ensino de Matemática.

Nesta pesquisa, o problema-objetivo requisitou a opção por determinada investigação e, simultaneamente, a exposição dos procedimentos metodológicos para a estratégia de ação da experiência de ensino desencadeada. Portanto, será descrita a abordagem metodológica, o problema, o objetivo, os instrumentos de coleta de dados que foram empregados na estratégia de ação.

3.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

A pesquisa foi desenvolvida com abordagens quantitativas e qualitativas, com o objetivo de conhecer os conhecimentos prévios dos alunos, em relação à Trigonometria, como também de avaliar a aprendizagem dos alunos após o desenvolvimento do conteúdo, por meio das atividades realizadas no GeoGebra.

Na parte quantitativa desta investigação optou-se pela metodologia abordada por Hake (2002), que estabelece a porcentagem de ganho em aprendizagem por meio da aplicação de instrumentos de coleta de dados, em que pré-teste e pós-teste são aplicados, respectivamente, no início e final da pesquisa.

Hake (2002) destaca que os educandos compreendem melhor um conceito quando eles próprios participam da sua construção, do que em relação a situações nas quais recebem o conteúdo como mera informação.

Halloun e Hestenes (1985) salientam que, ao avaliar de maneira eficaz determinado assunto, é necessário um instrumento que avalie o grau do conhecimento do aluno antes e depois da instrução, sendo que essa será ministrada, nesta pesquisa, por meio das atividades propostas pelo professor.

A eficiência da aprendizagem, e o quanto progrediu na compreensão de um determinado assunto, é determinado por meio do cálculo do ganho normalizado de Hake (2002). Esse parâmetro, denominado por <*g*>, é calculado utilizando a fórmula:

$$< g >= \frac{\%(ganho)}{\%(ganho)_{max}} = \frac{(\ \%(pós - teste) - \%(pré - teste)\ )}{100 - \%(pré - teste)}$$

em que: %(ganho) é a percentagem de aumento de acertos entre pré-teste e o pós-teste, %(pré-teste) é a percentagem de acertos do aluno individual ou da turma toda no pré-teste, %(pós-teste) é a percentagem de acertos do aluno individual ou da turma toda no pós-teste e $\%(\text{ganho})_{\text{max}}$ é o máximo que pode ser atingido partindo do resultado do pré-teste.

Müller et al., (2017) comentam que o numerador corresponde à melhora efetiva que o aluno obteve; e o denominador, à máxima melhora possível de ser alcançada. O valor do parâmetro <*g*> pode variar entre 0 e 1 (ou entre 0% e 100%), sendo que resultados mais próximos de 1 correspondem a uma melhora mais acentuada. Os resultados negativos, obtidos quando o estudante apresenta um escore superior na primeira aplicação do teste, são desconsiderados da análise. Com esse dado o pesquisador obtém um valor percentual que representa o quanto o aluno aprendeu daquilo que ainda precisava aprender sobre o conteúdo.

Essa metodologia é justificada por Hake (2002) ao fazer uso do teste diagnóstico de Halloun-Hestenes, em que calcula o fator de correlação entre <*g*> (ganho) e % (pré-teste) (conhecimentos prévios dos alunos). Nessa ocasião 6542 alunos participaram da pesquisa. O autor comenta que essa metodologia pode contribuir para a melhora da aprendizagem dos alunos, quando comparada a métodos tradicionais.

Nesse trabalho, para acontecer a produção de novos conhecimentos e aprofundamento dos já existentes, foi aplicada uma sequência de atividades com conteúdos relevantes para o ensino de Trigonometria básica.

Quanto à pesquisa qualitativa, Moreira (2011) enfatiza que o interesse principal deste tipo de pesquisa se dá pela interpretação dos significados conferidos pelos sujeitos às suas ações. Sendo assim, o pesquisador pode mergulhar no fenômeno de seu interesse. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador como o seu imprescindível instrumento. Nesta investigação, o pesquisador teve facilidade em movimentar-se entre os pesquisados, tanto em sala de aula como no laboratório de informática. Esses espaços asseguraram um ambiente natural, onde suas interferências externas e internas puderam ser observadas, bem como as vivências e conhecimentos prévios dos pesquisados. Assim sendo, a presente investigação tornou-se um processo dinâmico e cooperativo. Oliveira (2002, p. 117) faz a seguinte ponderação sobre as vantagens e facilidades da abordagem qualitativa:

> As pesquisas que se utilizam da abordagem qualitativa possuem a facilidade de poder descrever a complexidade de uma determinada hipótese ou problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir, em maior grau de profundidade a interpretação das particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos.

Segundo D'Ambrósio (2004) a pesquisa qualitativa é o caminho para fugir da mesmice. Para o autor, esse tipo de pesquisa atenta para as pessoas e as suas ideias, trazendo à tona falas e narrativas que estariam silenciosas. Assim sendo, essa pesquisa observou acontecimentos como esses, e que serão aqui descritos.

3.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Diante da dificuldade dos alunos em compreender conceitos e resultados básicos de Trigonometria, fez-se a seguinte pergunta:

O uso do GeoGebra facilita a compreensão pelos alunos sobre conceitos básicos das Razões Trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como das Funções Seno, Cosseno e Tangente?

Pode-se dizer que esta pergunta orientou a presente pesquisa.

3.3 OBJETIVO GERAL

A fim de responder à pergunta direcionadora desta pesquisa, delineou-se o intuito de empreender uma experiência com alunos do segundo ano do Ensino Médio, desenvolvendo-se atividades propostas com o uso do GeoGebra no estudo da Trigonometria.

3.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Elaborar atividades com o software GeoGebra que contemplem os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo, bem como no ciclo trigonométrico.
2. Analisar a eficácia dos aplicativos elaborados com o software GeoGebra no ensino e aprendizagem da Trigonometria através dos instrumentos de coleta de dados que foram aplicados (pré-teste e pós-teste).
3. Avaliar se houve uma melhora na aprendizagem dos alunos após a realização das atividades propostas, sob o ponto de vista quantitativo e qualitativo.

3.5 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os participantes desta pesquisa foram 19 alunos voluntários do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria. Esses estudantes já tiveram aulas de Trigonometria e Funções Trigonométricas, no nono ano do Ensino Fundamental e no primeiro ano do Ensino Médio. O interesse dos alunos voluntários está na revisão de conteúdos importantes de Matemática para as provas dos diversos concursos que estarão prestando, sejam eles voltados às carreiras militares das Forças Armadas ou ainda às instituições civis de Ensino Superior.

3.6 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Conforme está fundamentada a pesquisa, utiliza-se a metodologia abordada por Hake (2002), que estabelece a porcentagem de ganho em aprendizagem por meio da aplicação de instrumentos de coleta de dados. Para isso, foram utilizados:

- Pré-teste (Apêndice B), aplicado no início da experiência;
- Pós-teste, instrumento igual ao pré-teste, aplicado no final da experiência, a fim de que pudesse ser feita a comparação entre os dois.

Ao final das atividades de Trigonometria (Apêndice C) propostas pelo professor, os alunos responderam a duas perguntas abertas. A transcrição e a análise dessas respostas tornaram-se de extrema relevância para a pesquisa, sendo as duas perguntas consideradas, também, como instrumentos na coleta de dados.

No próximo capítulo será feita a tabulação e comparação entre o pré e o pós-teste (análise quantitativa), bem como a transcrição e análise das perguntas abertas (análise qualitativa).

4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Nesse capítulo será feita a descrição das atividades desenvolvidas pelos alunos, salientando em cada uma seus objetivos. Também serão feitas as análises quantitativa e qualitativa da intervenção pedagógica.

4.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA

Para o pré-teste (pós-teste) foram elaboradas 6 atividades diagnósticas (Apêndice B) totalizando 44 questões, com objetivos descritos no Quadro 2.

Quadro 2 – Relação de atividades diagnósticas

Atividade diagnóstica	Número de questões	Objetivo
1	6	Verificar o conhecimento sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
2	6	Verificar o conhecimento sobre seno e cosseno no ciclo trigonométrico.
3	17	Verificar o conhecimento sobre sinais, variação, máximos e mínimos do seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.
4	6	Verificar o conhecimento sobre o comportamento gráfico da função seno.
5	6	Verificar o conhecimento sobre o comportamento gráfico da função cosseno.
6	3	Verificar o conhecimento sobre o comportamento gráfico da função tangente.

Para as atividades a serem realizadas no computador, foram elaboradas 12 atividades, em que os alunos deveriam utilizar os aplicativos desenvolvidos com o GeoGebra para resolver as questões solicitadas em cada uma das atividades propostas.

Todos os aplicativos necessários para a resolução das atividades foram elaborados pelo professor-pesquisador, estando as atividades apresentadas no Apêndice C. No quadro 3, destaca-se a relação de atividades desenvolvidas pelos alunos no laboratório de informática, e na sequência desenvolve-se uma breve descrição de cada uma das atividades propostas aos alunos voluntários da pesquisa.

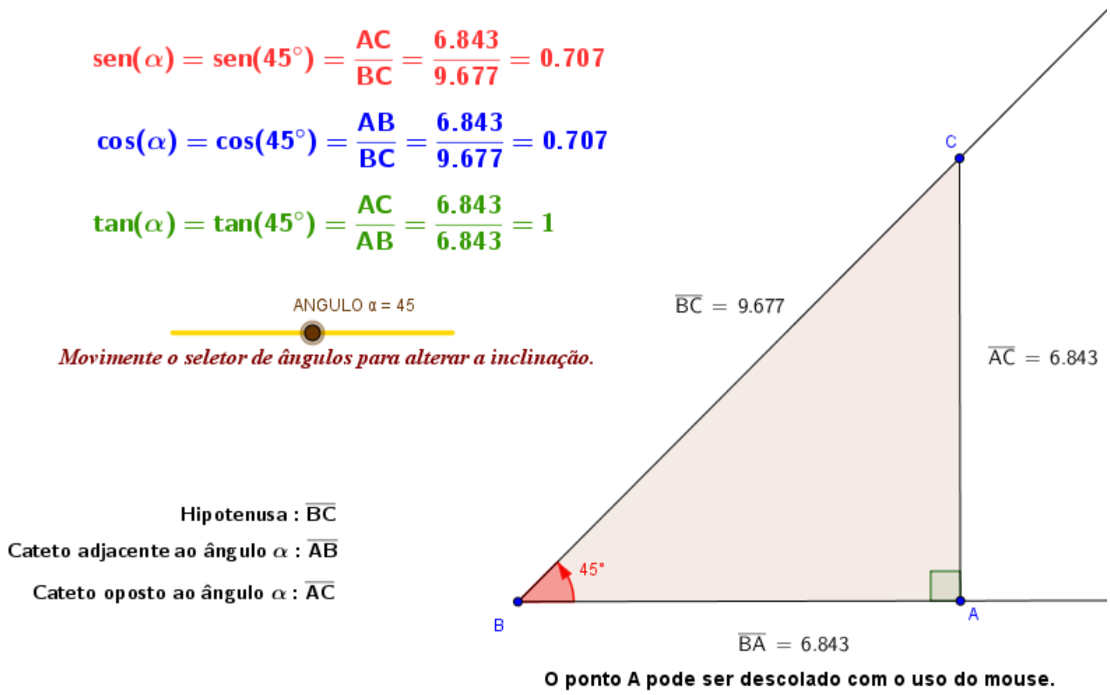
Quadro 3 – Relação de atividades desenvolvidas no laboratório

Atividade	Assunto
1	Triângulo retângulo.
2 e 3	Ciclo trigonométrico.
4	Ângulos complementares.
5	Ângulos suplementares.
6	Funções da forma $f(x) = a \cdot sen(x)$.
7	Funções da forma $f(x) = sen(b.x)$.
8	Funções da forma $f(x) = sen(x + c)$.
9	Funções da forma $f(x) = sen(x) + d$.
10	Funções da forma $f(x) = a \cdot sen(b.x + c) + d$.
11	Funções da forma $f(x) = a \cdot cos(b.x + c) + d$.
12	Funções da forma $f(x) = a \cdot tg(b.x + c) + d$.

Fonte: Autor

Na Atividade 1, o objetivo é que o aluno revise os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, assunto esse, do ensino fundamental (Figura 19). Ao alterar de forma dinâmica o seletor de ângulos (0° < α < 90°) ou então deslocar o vértice A do triângulo, deveria o aluno descrever o que acontecia com os valores das razões seno, cosseno e tangente do ângulo por ele considerado.

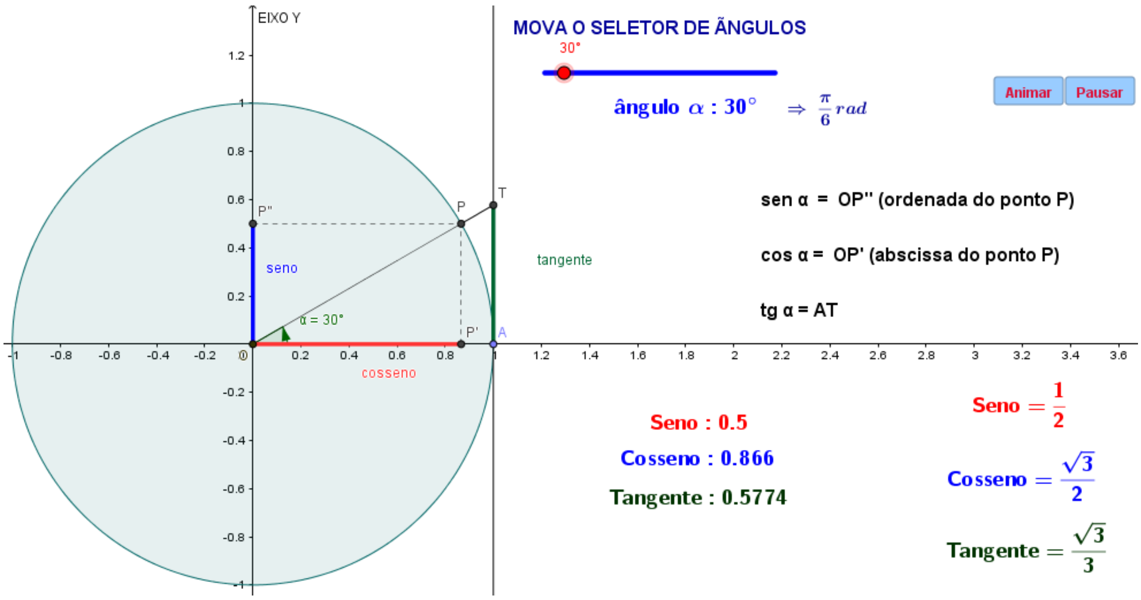
Figura 19 – Tela da Atividade 1 com α = 45°



Fonte: Autor

Na Atividade 2, o objetivo é que o aluno revise os conceitos básicos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico (Figura 20). Movendo o seletor de ângulos (0° ≤ α ≤ 360°), deveria o aluno observar em cada quadrante o comportamento do seno, cosseno e tangente quanto aos sinais, valores máximos e mínimos, e regiões de crescimento ou decrescimento.

Figura 20 – Tela das Atividades 2 e 3 com α = 30°

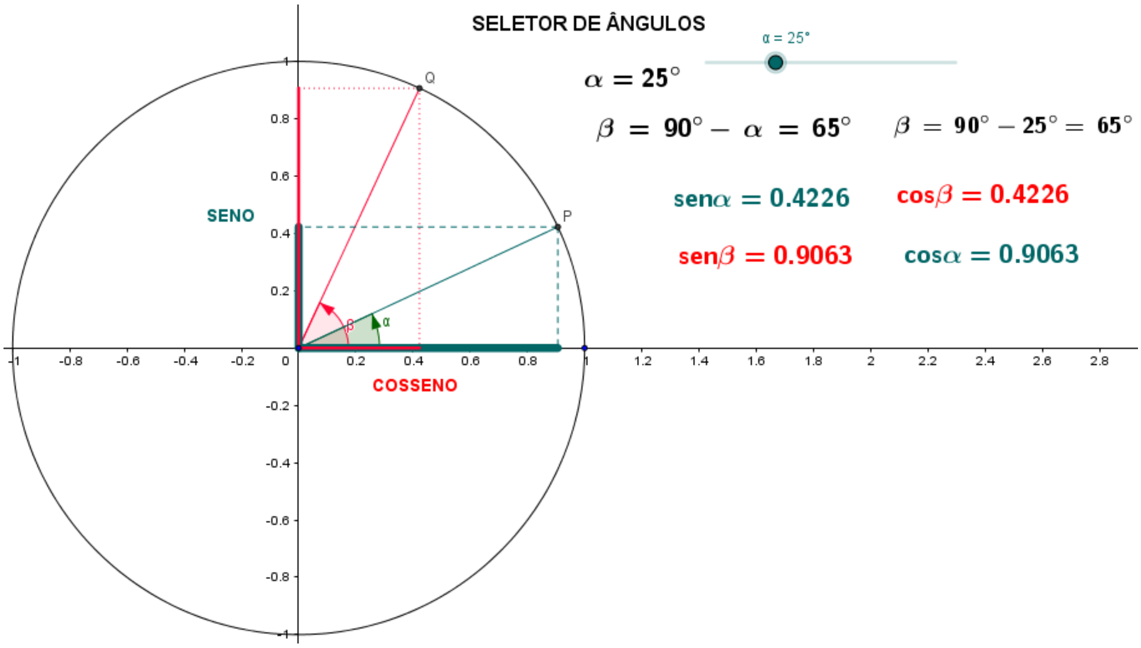


Fonte: Autor

Na Atividade 3, o objetivo é que o aluno complete um quadro com os principais valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos mais importantes e solicitados nos exercícios envolvendo cálculos trigonométricos. Para isso foi utilizado a mesma tela da Atividade 2.

Na Atividade 4, o objetivo é que o aluno revise o conceito de ângulos complementares e observe os valores de seno e cosseno para esses ângulos (Figura 21). Ao alterar o seletor de ângulos (ângulo α), obtém-se de imediato o seu complementar β, bem como os valores correspondentes para que seja feita a comparação.

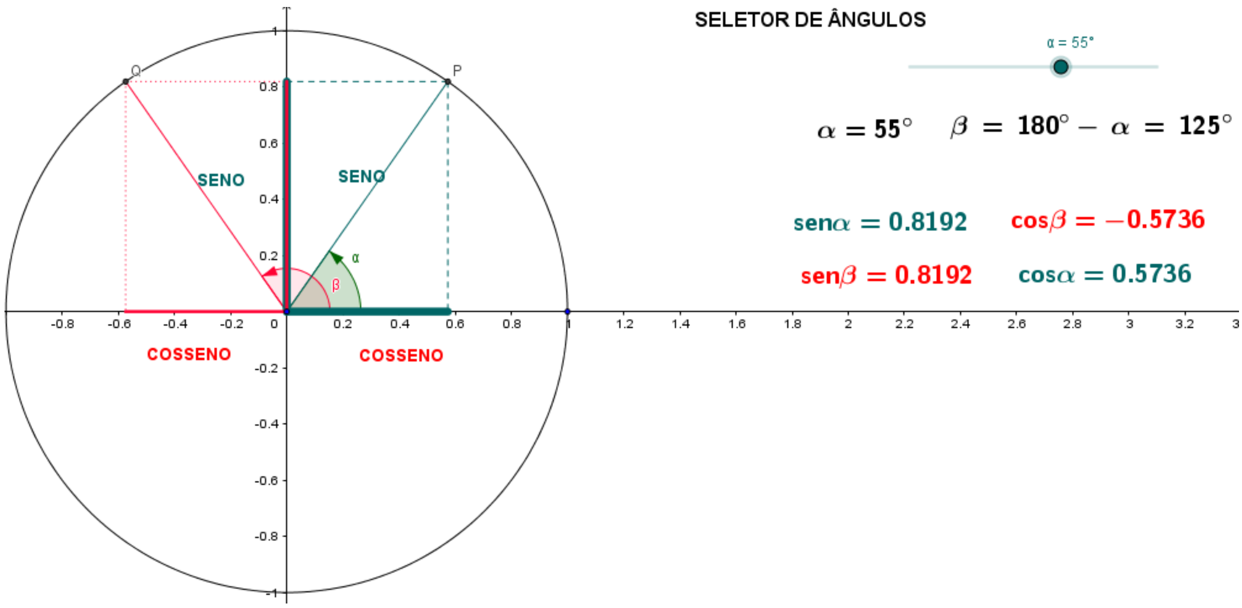
Figura 21 – Tela da Atividade 4 com $\alpha = 25^o$



Fonte: Autor

Na Atividade 5, o objetivo é que o aluno revise o conceito de ângulos suplementares e observe os valores de seno e cosseno para esses ângulos (Figura 22). Ao alterar o seletor de ângulos (ângulo α), obtém-se de imediato o seu suplementar β, bem como os valores correspondentes para que seja feita a comparação.

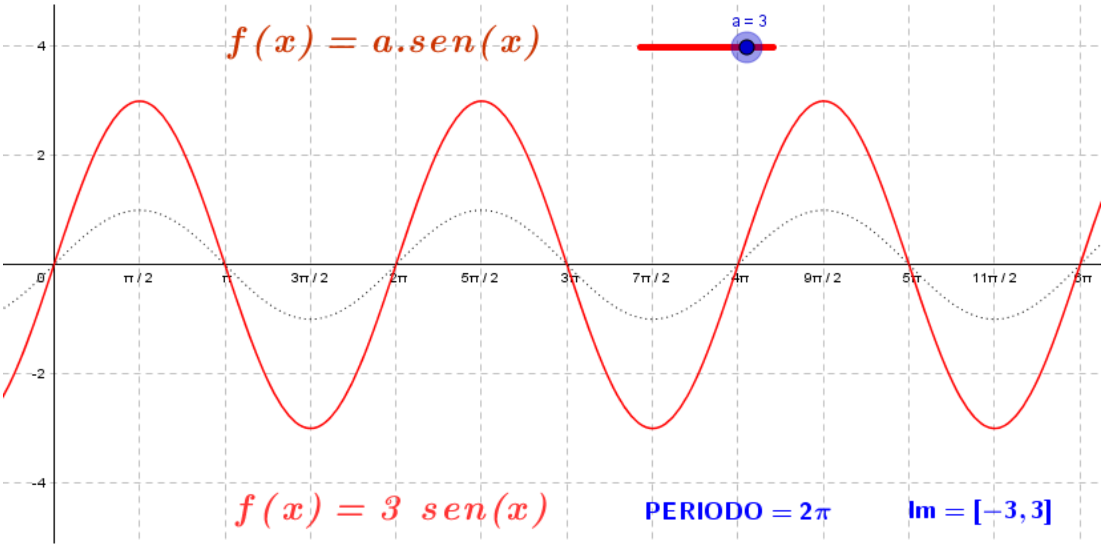
Figura 22 – Tela da Atividade 5 com $\alpha = 55°$



Fonte: Autor

Na Atividade 6, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelo parâmetro ***a*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = a \cdot sen(x)$. Ao alterar o seletor contendo o parâmetro ***a***, o aluno pode comparar o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = sen(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas. Na Figura 23 está ilustrada a resolução da atividade quando é selecionado o parâmetro $a = 3$. Os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = 3 \cdot sen(x)$ são gerados e é fornecido o período e a imagem da função $f(x) = 3 \cdot sen(x)$.

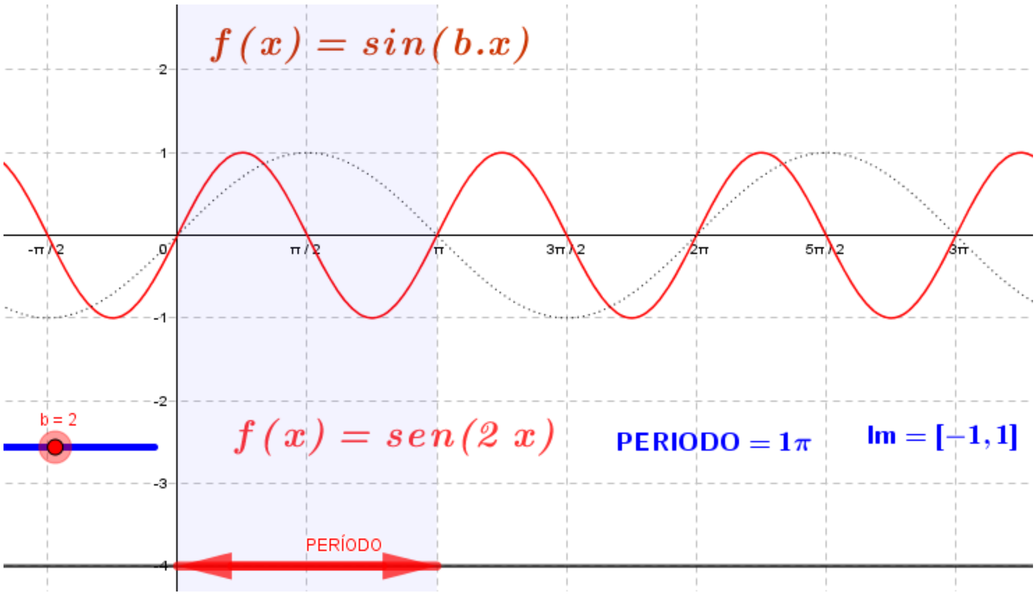
Figura 23: Tela da Atividade 6 com $a = 3$



Fonte: Autor

Na Atividade 7, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelo parâmetro ***b*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = sen(b.x)$. Ao alterar o seletor contendo o parâmetro ***b***, o aluno pode comparar o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = sen(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas. Na Figura 24, pode-se observar esses dados como parâmetro $b = 2$.

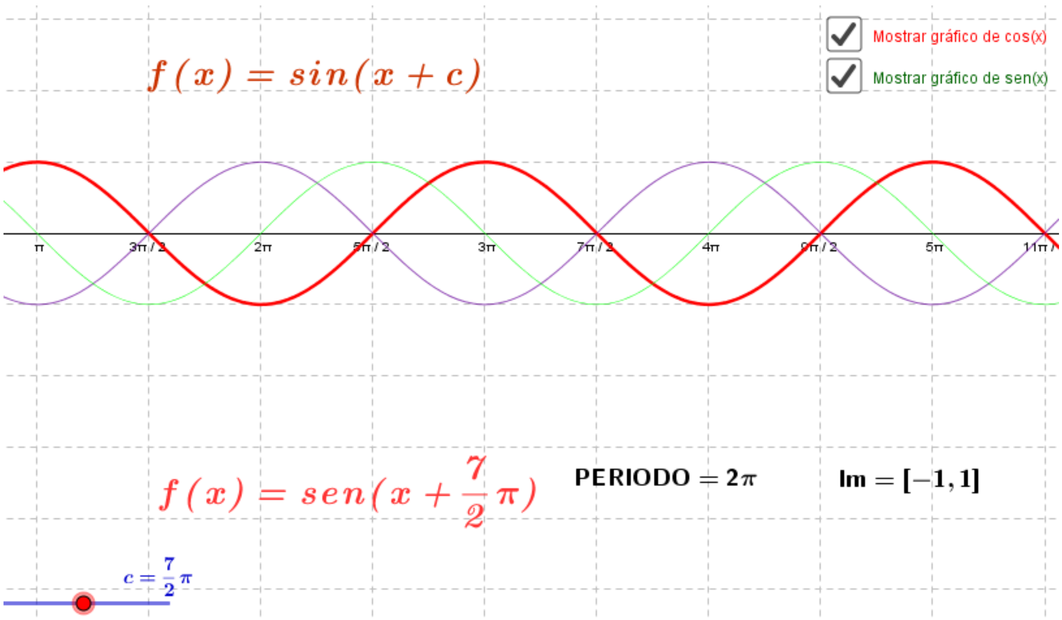
Figura 24: Tela da Atividade 7 com b = 2



Fonte: Autor

Na Atividade 8, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelo parâmetro $\boldsymbol{c}$ nos gráficos das funções da forma $f(x) = sen(x + c)$. Ao alterar o seletor contendo o parâmetro $\boldsymbol{c}$, o aluno compara o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = sen(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas, como ilustrado na Figura 25, considerando $c = \frac{7}{2}\pi$.

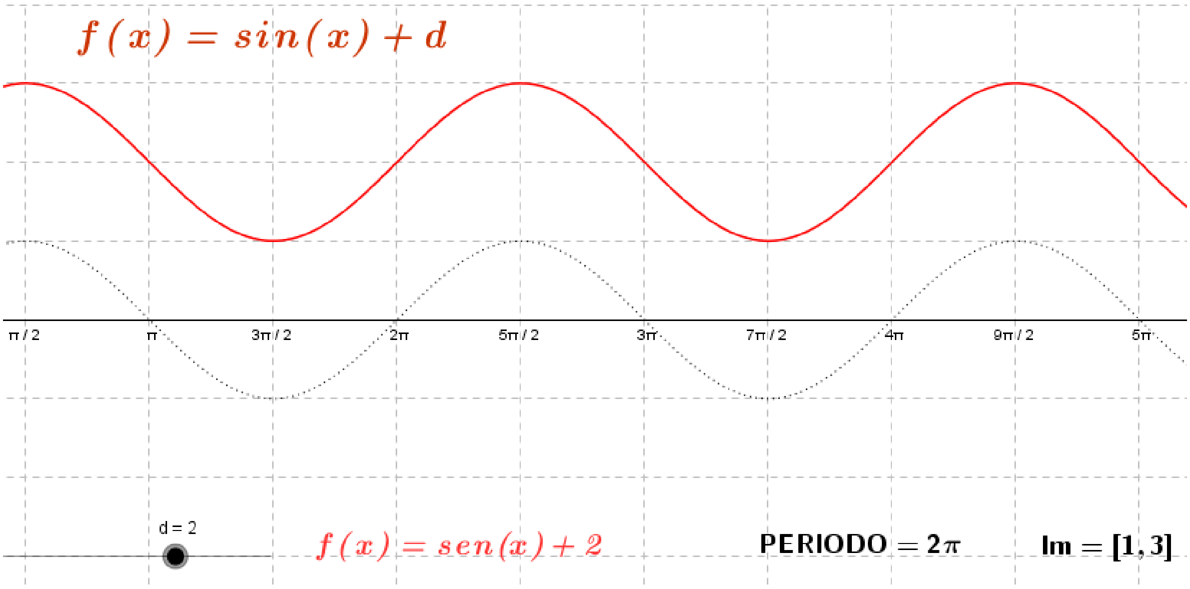
Figura 25: Tela da Atividade 8 com c = 7/2



Fonte: Autor

Na Atividade 9, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelo parâmetro ***d*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = sen(x) + d$. Ao alterar o seletor contendo o parâmetro ***d***, o aluno compara o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = sen(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas. Na Figura 26 é mostrada a atividade para d = 2.

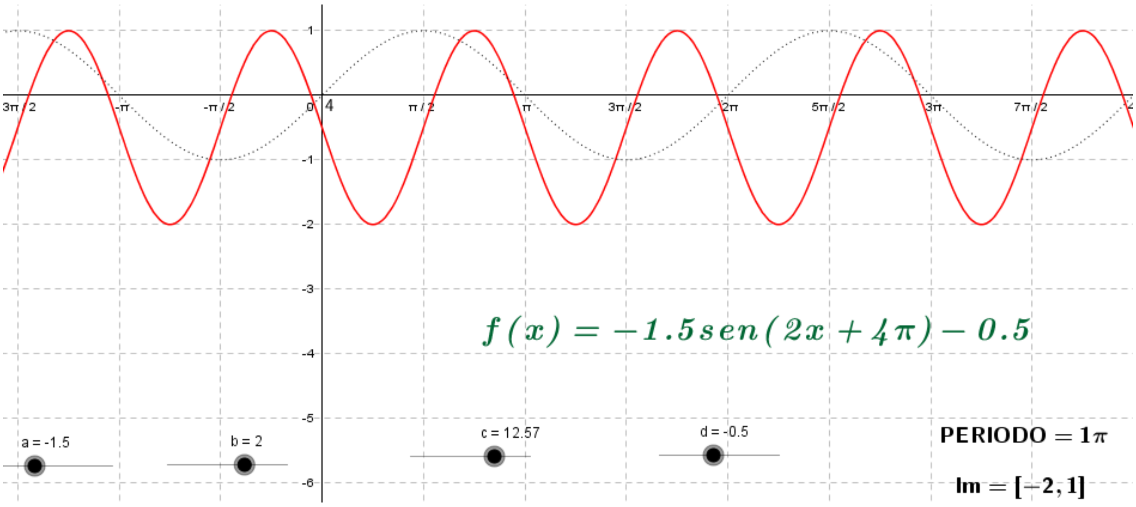
Figura 26: Tela da Atividade 9 com *d* = 2



Fonte: Autor

Na Atividade 10, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelos parâmetros ***a, b, c*** e ***d*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = a \cdot sen(b.x + c) + d$. Ao alterar, simultaneamente, os quatro seletores contendo os parâmetros, o aluno compara o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = sen(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas, (Figura 27).

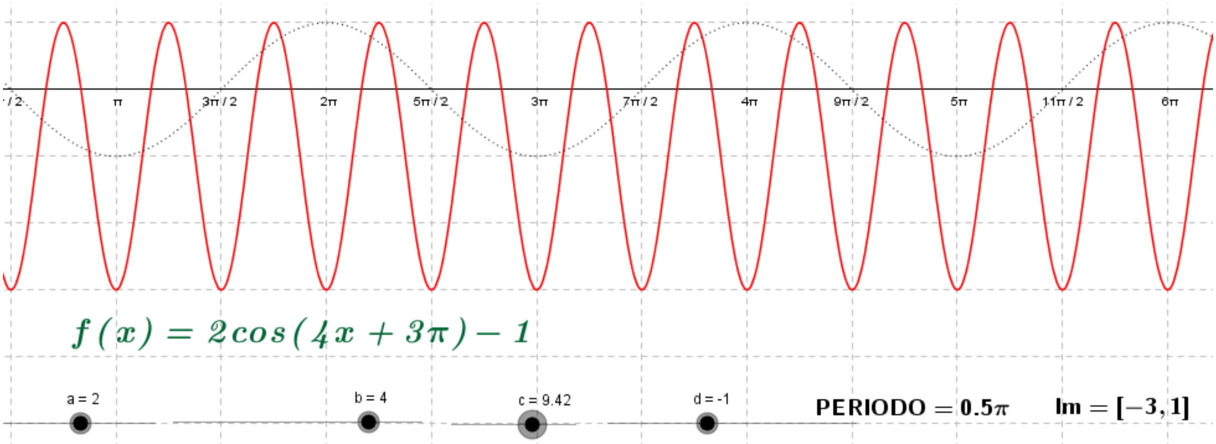
Figura 27: Tela da Atividade 10 com *a* = –1,5; *b* = 2; *c* = 4π e *d* = 0,5



Fonte: Autor

Na Atividade 11, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelos parâmetros ***a*, *b*, *c*** e ***d*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = a \cdot cos(b.x + c) + d$. Ao alterar, simultaneamente, os quatro seletores contendo os parâmetros, o aluno compara o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = cos(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas (figura 28).

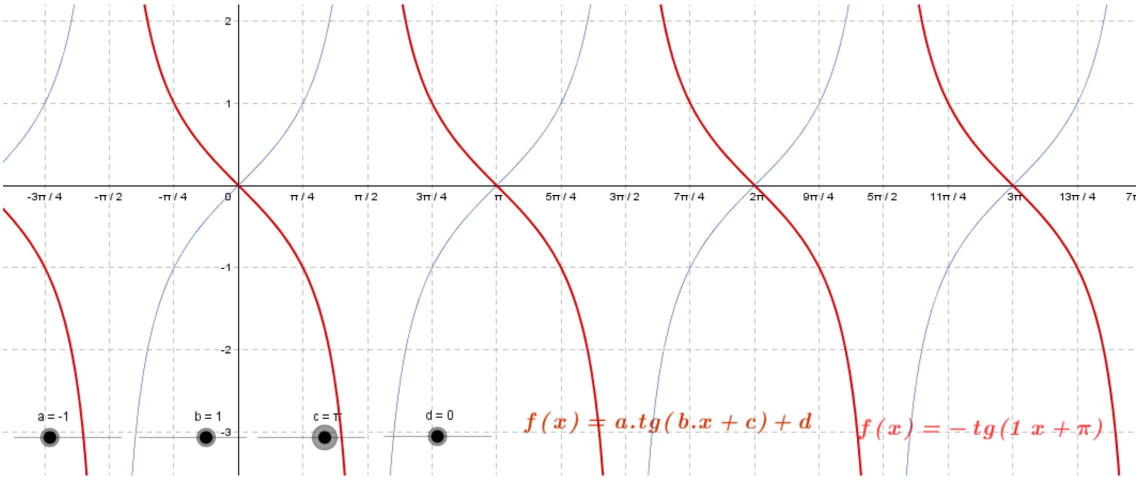
Figura 28: Tela da Atividade 11 com *a* = 2; *b* = 4; *c* = 3π e *d* = –1



Fonte: Autor

Na Atividade 12, o objetivo é que o aluno observe as transformações causadas pelos parâmetros ***a*, *b*, *c*** e ***d*** nos gráficos das funções da forma $f(x) = a \cdot tg(b.x + c) + d$. Ao alterar, simultaneamente, os quatro seletores contendo os parâmetros, o aluno compara o gráfico gerado com o gráfico da função padrão $f(x) = tg(x)$, no que diz respeito a domínio, conjunto imagem e período das funções envolvidas (Figura 29).

Figura 29: Tela da Atividade 12 com $a = -1$; $b = 1$; $c = \pi$ e $d = 0$



Fonte: Autor

As atividades com o grupo de alunos voluntários aconteceram em quatro encontros durante o terceiro trimestre letivo do ano de 2018. No primeiro encontro foi aplicada uma avaliação diagnóstica (pré-teste) com questões referentes a tópicos básicos de Trigonometria.

Após a aplicação do pré-teste, o professor deu prosseguimento ao trabalho de pesquisa, apresentando aos alunos atividades referentes aos assuntos propostos de Trigonometria. As atividades foram disponibilizadas no Laboratório de Informática em todos os computadores, em que os mesmos já estavam com o GeoGebra instalado. Atendendo a solicitação dos alunos, foram disponibilizadas as atividades no ambiente MOODLE do Colégio Militar de Santa Maria, em que todos os alunos da série que tiverem interesse podem acessar em qualquer dispositivo conectado a Internet, usando sua senha de acesso particular.

Os alunos receberam em material impresso uma sequência de doze atividades, (Apêndice C), com orientações sobre como deveriam proceder na execução de cada uma delas. No laboratório foi possível acomodar um aluno em cada computador, podendo entre eles discutirem sobre a resolução das atividades.

No último encontro, após a realização de todas as atividades, foi aplicada a avaliação diagnóstica (pós-teste) com as mesmas questões do pré-teste, salientando que os dois testes foram aplicados individualmente e sem consulta a qualquer material.

As atividades foram adaptadas e colocadas a disposição de alunos, professores e interessados na página oficial do GeoGebra. Para quem tiver interesse em acessá-las basta acessar o endereço https://www.geogebra.org/search/JAIRO%20R%20A%20CHAVES.

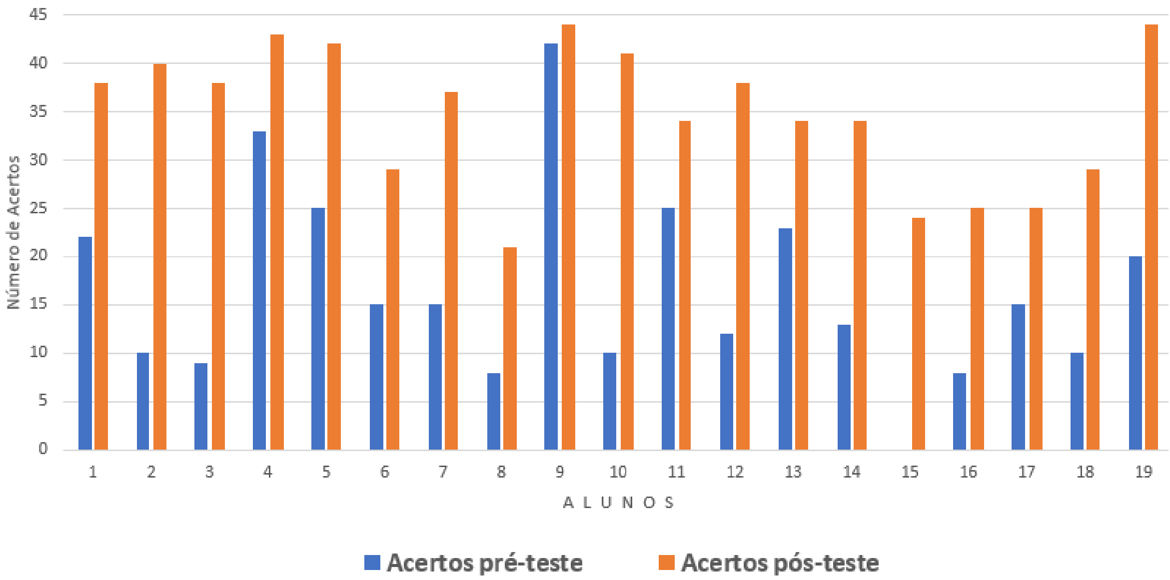
4.2 ANÁLISE QUANTITATIVA

Segundo foi mencionado anteriormente no Capítulo 3, foi aplicado um pré-teste (Apêndice B), no primeiro dia da intervenção junto aos alunos, a fim de investigar seus conhecimentos prévios em relação aos valores do seno, cosseno e tangente, tanto no triângulo retângulo, como no ciclo trigonométrico, e ainda foram apurados os conhecimentos básicos das funções Seno, Cosseno e Tangente.

O pós-teste, com as mesmas questões do pré-teste, foi aplicado no final da experiência, após a realização das atividades, a fim de se avaliar, quantitativamente, a evolução dos conhecimentos adquiridos.

Na figura 30 está apresentada uma comparação entre o número de acertos do pré-teste e pós-teste de cada um dos 19 alunos participantes dessa pesquisa, que tiveram que responder as 44 questões da avaliação diagnóstica (Apêndice B).

Figura 30: Gráfico de barras comparativo



Fonte: Autor

Observando o gráfico de barras da Figura 30, pode-se perceber que todos os alunos apresentaram um desempenho melhor na realização das questões após a aplicação das atividades de Trigonometria em laboratório.

Com a finalidade de melhor interpretar o crescimento nos resultados dos alunos, foi executado outro tipo de análise quantitativa, ou seja, o método do ganho de aprendizagem tal como descrito por Hake (2002).

O método consiste em utilizar uma equação que permite avaliar o quanto um estudante envolvido em atividades de aprendizagem com envolvimento interativo, progrediu na compreensão de determinados conteúdos em particular.

No quadro 4 foram determinados os índices de aproveitamento nos pré-teste e pós-teste bem como a diferença de desempenho entre esses mesmos dois testes.

Quadro 4 – Desempenho percentual dos alunos

ALUNO	ACERTOS PRÉ-TESTE	% ACERTOS PRÉ-TESTE	ACERTOS PÓS-TESTE	% ACERTOS PÓS-TESTE	DIFERENÇA ENTRE PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE (%)
1	22	50,00	38	86,36	36,36
2	10	22,73	40	90,91	68,18
3	9	20,45	38	86,36	65,91
4	33	75,00	43	97,73	22,73
5	25	56,82	42	95,45	38,64
6	15	34,09	29	65,91	31,82
7	15	34,09	37	84,09	50,00
8	8	18,18	21	47,73	29,55
9	42	95,45	44	100,00	4,55
10	10	22,73	41	93,18	70,45
11	25	56,82	34	77,27	20,45
12	12	27,27	38	86,36	59,09
13	23	52,27	34	77,27	25,00
14	13	29,55	34	77,27	47,73
15	0	0,00	24	54,55	54,55
16	8	18,18	25	56,82	38,64
17	15	34,09	25	56,82	22,73
18	10	22,73	29	65,91	43,18
19	20	45,45	44	100,00	54,55

Fonte: Autor

Constata-se que todos os alunos apresentaram melhora no desempenho, entre pré-teste a pós-teste, salientando-se que dos 19 alunos, 6 deles obtiveram melhora no desempenho acima de 50%. Um dos alunos declarou que veio transferido de uma escola onde Trigonometria não havia sido ainda estudado, justificando seu pré-teste nulo, e mesmo assim, obteve um rendimento satisfatório no pós-teste.

Esse comparativo mostra que a aplicação das atividades surtiu um efeito positivo sobre a aprendizagem dos estudantes, visto que todos os participantes da pesquisa tiveram algum incremento no desempenho entre o pré e o pós-teste.

A fim de aplicar o método de Hake (2002) para verificar o ganho na aprendizagem da turma, foi calculada a porcentagem de acertos pré (%<pré-teste>) e pós-teste (%<pós-teste>) e na sequência foi determindo o valor do parâmetro $<g>$ = 66,22 que corresponde ao cálculo do ganho normalizado de Hake (2002). Os dados obtidos estão apresentados no Quadro 5.

Quadro 5 – Valor do ganho normalizado de aprendizagem

% <pré-teste>	**% <pós-teste>**	**% <g>**
37,68	78,95	66,22

Fonte: Autor

O ganho normalizado $<g>$ diz respeito ao quanto os alunos evoluíram após o pré-teste. Em outras palavras, ele só depende do que os alunos já chegaram sabendo ao curso e compara com o que eles saíram sabendo a mais. Observa-se então que eles obtiveram um ganho pré = 37,68%. O ganho máximo será 100%-37,68% = 62,32%. O ganho pós = 78,95%.

O ganho normalizado $<g>$ é dado por:

$$< g > = \frac{78{,}95\% - 37{,}68\%}{100 - 37{,}68\%}$$

$$< g > = 66{,}22\%.$$

Esse resultado é considerado muito bom, pois mostra que as atividades promoveram um ganho normalizado superior a 66%. Isso é considerado por Hake como um curso caracterizado por atividades de ensino que promovem o envolvimento interativo. É um curso de ganho médio, pois o ganho normalizado está no intervalo entre 30% e 70%.

No Quadro 6 é apresentada a evolução do desempenho dos estudantes entre pré-teste e pós-teste na forma de médias, desvios-padrão e nível de significância *t*. O cálculo do valor de *t* é feito fazendo a razão entre o desvio padrão da média e o desvio padrão do desempenho (o quanto eles responderam a mais após a aplicação da intervenção pedagógica), servindo para comparação com o *t*-crítico do teste estatístico de Student.

Quadro 6 – Evolução do desempenho dos alunos entre pré-teste e pós-teste

Média geral (ganho médio)	18,16
Desvio padrão geral (do ganho médio)	8,02
Desvio padrão geral da média	1,84
Desvio padrão geral do pré-teste	16,58
Média geral do pré-teste	9,97
Desvio padrão geral do pré-teste da média	2,29
Média geral do pós-teste	34,74
Desvio padrão geral do pós-teste	7,29
Desvio padrão geral do pós-teste da média	1,67
Nível de significância estatística entre as médias do pré e pós teste	Menor que 0,01 (***t*=4,36**)

Fonte: Autor

O desvio padrão (DP) mede a dispersão de um conjunto de dados, ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Qunto mais próximo de 0 (zero) for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados. O desvio padrão é calculado usando a fórmula

$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_A)^2}{n}}$$

onde: M_A é a média aritmética do dados, n é a quantidade de dados do conjunto e x_i é o valor na posição i no conjunto de dados.

Com o valor de t, consulta-se a tabela dos valores de t-crítico de Student, (quadro 7) e procura-se pelo valor de t-crítico na linha horizontal de número indivíduos participantes da pesquisa menos 1. Na linha vertical, temos a significância estatística. Quanto menor o valor de relevância estatística, melhor. Se o nosso t calculado for menor que o t crítico para um determinado nível de significância estatística, significa que temos uma boa probabilidade de as alterações positivas no ganho na aprendizagem sejam devidas as nossas atividades pedagógicas.

Quadro 7 – Distribuição de t-Student

Nº de graus de liberdade	Probabilidade para um teste bicaudal													
	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0787	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,657	636,619
2	0,0708	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,0681	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,0667	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,0659	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,0654	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,0650	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,0647	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,0645	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,0643	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,0642	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,0640	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,0639	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,0638	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,0638	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,0637	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,0636	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,0636	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,0635	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,0635	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,0635	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193

Fonte: http://www.epi.uff.br/wp-content/uploads/2015/05/Tabela-T.pdf

No caso em questão, para t = 4,36, encontra-se na tabela o valor de t-crítico = 3,9216 para 18 indivíduos e significância estatística de 0,0001 (0,01%) e t-crítico = 2,8784 para uma significância estatística de 0,01 (1%). Como o t > t-crítico, temos menos de 0,01% (ou <1%) de chance de que o ganho na aprendizagem encontrado seja devido ao acaso.

Pode-se atribuir os bons resultados às atividades realizadas entre os testes (pré-teste e pós-teste).

Considera-se que é um fato de grande importância o nível de significância estatística entre as médias dos pré e pós-testes ser menot que 0,01. Este valor foi encontrado em uma tabela de valores de teste-t de Student. Este nível de significância indica que a probabilidade de que as alterações no ganho (desempenho dos estudantes ao responder as perguntas dos pré e pós-testes) tenham ocorrido por acaso é menor que 1%.

4.3 ANÁLISE QUALITATIVA

A descrição e análise dos dados propiciam um instante fundamental para o andamento e para a confiabilidade da pesquisa. Lüdke e André (1986, p.45) comentam:

> Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionado essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes.

Sendo assim, entende-se que a análise qualitativa dos dados representa um momento irrefutável para a investigação. Neste estudo a análise qualitativa foi feita como forma de avaliar a opinião dos alunos com relação a compreensão dos conceitos básicos da trigonometria.

Ao final do desenvolvimento das atividades, os alunos responderam a duas perguntas que fizeram parte da Atividade 12, em que puderam manifestar-se sobre suas concepções em relação ao uso do GeoGebra. Foram formuladas segundo preceitos que remontam ao foco da pesquisa. Na sequência, as perguntas serão apresentadas. Para serem transcritas, serão selecionadas algumas das respostas que foram justificadas. Também será feita a análise das mesmas e uma análise geral. Parte das respostas dos alunos a essas questões encontram-se no Anexo D.

A primeira pergunta reporta ao entendimento específico dos conceitos das três razões trigonométricas estudadas:

a) Em sua opinião, o uso do software GeoGebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Dentre as respostas a essa pergunta os alunos, em sua maioria, admitem que o uso do GeoGebra melhorou o entendimento dos conceitos estudados.

- “Na minha opinião o software GeoGebra é de fundamental importância para o estudo dos conceitos de seno, cosseno e tangente, pois auxilia e melhor, facilita o aprendizado”.
- “Sim, pois vimos na prática suas diferenças”.
- “Sim, melhorou muito”.

Os estudantes são de uma geração totalmente familiarizada com as mídias e recursos computacionais, passeiam tranquilamente entre as redes sociais e aplicativos, estando confortavelmente inseridos no mundo digital. É natural, para eles, a interatividade com esse tipo de recurso. O GeoGebra, por sua vez, por ser um software de Geometria Dinâmica, permite que os próprios usuários manipulem seus mecanismos de simulações. Ao fazer isso, o aluno interage com o objeto estudado. Isto pode ser observado nas respostas dos alunos à pergunta.

- “O uso do Geogebra melhorou pois pude ver como o ciclo funciona efetivamente”.
- “Sim, pois ao mesmo tempo que eu posso observar eu mesma posso ir testando no app”.

As atividades no GeoGebra foram elaboradas pelo professor, de tal maneira que tornaram-se simples de serem operadas. Ao interagirem com o software, os alunos tiveram essa mesma percepção:

- “Sim, o uso do GeoGebra melhora o entendimento do conteúdo pela facilidade de vizualização nos gráficos do que é estudado teoricamente”.
- “O software GeoGebra auxiliou muito na compreensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente, pois ele é um material didático muito simples de se usar e que possibilita tirar inúmeras dúvidas”.

Mediante as respostas obtidas, infere-se que houve uma evidente melhora na compreensão dos conceitos estudados.

A segunda pergunta remete à compreensão específica de domínio, imagem e período das três Funções Trigonométricas abordadas:

b) Em sua opinião, a visualização e a interatividade proporcionada pelo GeoGebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Era notável a dificuldade que os estudantes tinham em relação aos conceitos das três Funções Trigonométricas, mesmo tendo sido estudado no ano anterior. A própria análise quantitativa expressa claramente esse fato. Assim como é perceptível, e comparável, o quanto o GeoGebra ajudou na compreensão desses conceitos, segundo as próprias palavras dos alunos:

- “Sim, podíamos ver na prática seus conceitos”.
- “Sim, ajudou muito a compreender melhor”.
- “Sim, bastante”.

As atividades realizadas no GeoGebra possibilitaram visualizar no ciclo trigonométrico as translações horizontais e verticais nos gráficos das funções; suas compressões e dilatações; os valores mínimos e máximos, bem como o novo valor assumido pelo período.

- “Sim, é mais fácil entender as funções pela agilidade e clareza do GeoGebra”.
- “Facilitou pois pude relacioná-las visualmente”.
- “O entendimento sobre domínio, imagem e período ficou muito mais fácil e claro com o software GeoGebra”

Houve caso de o aluno manifestar a opinião de que o uso do GeoGebra é fundamental para a aprendizagem:

- “Sim, o GeoGebra facilitou os conceitos a respeito de domínio, imagem e período das funções trigonométricas, logo esse software é fundamental para a aprendizagem”.

Constata-se assim, que os alunos reconhecem as possibilidades de uma aprendizagem mais dinâmica e significativa com o uso do GeoGebra. A análise dos dados quantitativos feita anteriormente, vem corroborar e evidenciar esses significados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa muitas experiências, enquanto docente, foram vivenciadas. Diante do desafio de ser um mediador na melhora da aprendizagem dos conceitos básicos da Trigonometria, o autor desta investigação fez uso do GeoGebra, um excelente software de Geometria Dinâmica, como ferramenta para a consolidação de um ensino mais eficaz e interativo. Permitir ao educando, a participação plena e dinâmica na construção dos saberes fundamentais da Trigonometria, foi de extrema gratificação para o professor – pesquisador.

Até então, os alunos pesquisados haviam estudado em anos anteriores a Trigonometria de uma maneira tradicional. Há de se destacar que as atividades desenvolvidas e apresentadas neste trabalho, foram elaboradas pelo professor, e que houve a preocupação de oportunizar ao estudante, não apenas a visualização no Ciclo Trigonométrico dos Números e Funções Seno, Cosseno e Tangente, como também a interação dos mesmos, usando a possibilidade de variarem os parâmetros envolvidos e de fazerem simulações.

Outro aspecto importante que se deseja destacar é o fato de as atividades terem sido realizadas no laboratório de informática, como também se possibilitou que fossem concluídas em casa, por meio do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), nesse caso, o MOODLE. O fato de terem saído da rotina da sala de aula usual e de terem ido para o laboratório, usando os computadores, motivou os alunos de tal maneira, que esses se tornaram mais receptivos e dispostos ao estudo da Trigonometria. Quando não conseguiam terminar as atividades no tempo de aula padronizado, concluíam em suas casas, pois o MOODLE é uma ferramenta disponibilizada pela escola. Sendo assim, destaca-se como ponto relevante desta experiência, a pesquisa quantitativa e qualitativa, que comprovam a evolução no entendimento dos alunos em relação aos conteúdos desenvolvidos conforme os resultados relatados no Capítulo 4 desse trabalho.

Um diferencial nesta pesquisa deu-se em função da utilização do Método de Richard Hake, a fim de se interpretar os dados obtidos, dentro de um aceitável grau de confiança. Sendo assim, a leitura que se fez do pré e do pós-teste, saiu de dados simplesmente empíricos, para uma interpretação racional e devidamente fundamentada.

Há de se destacar o interesse demonstrado pelos discentes em interagir com o software, procurando por eles mesmos as respostas, e desejando obter o máximo entendimento proporcionado por cada atividade. À medida que estas promoveram um aprofundamento dos conhecimentos envolvidos, mais ainda os estudantes sentiam-se motivados e avançavam confiantes para as próximas questões.

Em resposta à pergunta norteadora desta pesquisa, percebemos que fazer uso do software GeoGebra facilitou a compreensão pelos alunos sobre conceitos básicos das Razões Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente, bem como das Funções Seno, Cosseno e Tangente. É visivelmente detectado esse crescimento no entendimento dos pesquisados, por meio da avaliação estatística dos instrumentos utilizados, o pré e o pós teste. Em consequência disso, a aprendizagem tornou-se muito mais efetiva e consolidada, como os resultados aqui expostos demonstram.

Esta experiência de ensino veio a corroborar o fato de que o professor precisa buscar novas alternativas para a sua prática didática. Vive-se no dia a dia uma realidade dinâmica, que está em constante transformação. Assim, as aulas de Matemática precisam instigar os discentes a serem participantes da formação do seu conhecimento, de uma forma interativa e desenvolta. Hoje, dispõe-se de uma diversidade de aplicativos e softwares em todas as áreas do conhecimento. O professor deve ser um mediador entusiasta entre o aluno e os conteúdos programáticos. Há a necessidade de se sair do marasmo de uma aula tradicional, pautada na mesmice do dia a dia escolar.

Perante essa nova realidade docente, em que os professores são incitados permanentemente ao confrontamento de diversas questões pedagógicas, acredita-se que a presente pesquisa, aqui relatada, colaborou para o incremento de uma alternativa metodológica de ensino. A partir de então, ficam disponíveis para o público em geral, todas as atividades desenvolvidas neste trabalho, na página oficial do GeoGebra no endereço eletrônico https://www.geogebra.org/search/JAIRO%20R%20A%20CHAVES.

Acredita-se que essas atividades propostas serão extremamente úteis para aqueles professores que querem trazer para a sala de aula exercícios trabalhados de maneira dinâmica e também para estudantes que desejam compreender, expandir e/ou aprofundar seus conhecimentos de Trigonometria.

Fica como sugestão para futuras pesquisas abordando o ensino da trigonometria, o acréscimo de novos aplicativos e atividades explorando outras razões e funções trigonométricas, bem como a aplicação de atividades contextualizadas explorando fenômenos repetitivos e que obedecem determinado período de repetição.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo C; PENTEADO, Miriam G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2001.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, MEC/SEMT, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino de quinta a oitava séries. Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena. Geometria Dinâmica: uma nova Geometria. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo-SP, n. 49, p. 22-26, 2002.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Prefácio. In: **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995. Trad. Hygino H. Domingues.

FREITAS, G. M. Q. d. **Trigonometria: um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do software GeoGebra**. 2016, 102 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul , Três Lagoas.

GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucila Maria, **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV CONGRESSO RIBIE, 1998, Brasília. Anais... Brasília, DF, 1998.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Minidicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

HAKE, R. R. **Assessment of student learning in introductory science courses**. KAL Roundtable on the Future. Duke University, p. 1-3, mar. 2002.

HALLOUN, I.; HESTENES, D. **The initial knowledge state of college physics students**. American Journal of Physics, p. 1043-1048, 1985.

HOHENWARTER, M. **GeoGebraQuickstart**: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra. Disponível em: https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_BR.pdf. Acesso em: 03 dez. 2018.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. v. 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro. Coleção PROFMAT. SBM, 2014.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EDU, 1986.

MERLO, Clinton André, ASSIS, Raquel Trindade de. **O uso da informática no ensino da Matemática**. Revista UNIJALES. 4. ed. n. 4, ano V, 2010. Disponível em: http://www.reuni.pro.br. Acesso em: 28 nov. 2018.

MÜLLER, M. G. ARAÚJO, I. S.; VEIT, E. A.; SCHELL, J. Uma revisão de literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino peer-instruction. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo-SP, v. 39, n. 3, p. 3403–3420, 2017.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. Porto Alegre: Livraria da Física, 2011.

OLIVEIRA, Luiz de. **Tratado de metodologia científica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

OLIVEIRA, C. A. C. d. **Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente**. 2014, 85 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação Escolar e as Tecnologias da Informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PASSOS, Maristela dos. **Desafios e perspectivas para a utilização da informática na educação matemática.** Disponível em: http://www.diaadiaeducao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/408-4.pdf > Acesso em: 01 dez. 2018.

PERES, R. C. d. A. B. **Uso da plataforma Moodle em uma disciplina de graduação em Letras**: Percepções de alunos e professora sobre a modalidade semipresencial. 2013, 162 p. Dissertação (Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Linguística Aplicada) - Faculdade de Letras, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

PERRENOUD, Philippe. **As dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. v. 1, 1. ed. São Paulo: Moderna, 1995.

RÊGO, S. A. d. S. **O uso do GeoGebra como ferramenta de ensino em trigonometria**. 2016, 42 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – 2016.

SANTIAGO, E. **O ensino da trigonometria usando o software GeoGebra como ferramenta de ensino - aprendizagem**. 2015, 95 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB – Vitória da Conquista, 2015.

TOKUYAMA, D. S. R. **Trigonometria no ensino fundamental: introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano**. 2018, 64 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura – Rio de Janeiro, 2018.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores pais ou responsáveis,

Eu, Jairo Renato Araujo Chaves, sou professor no colégio em que seu filho(a) estuda, na disciplina de Matemática.

Estou desenvolvendo uma pesquisa em âmbito do Curso de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Maria. Trabalho no projeto intitulado “A INTERATIVIDADE DO GEOGEBRA NO AUXÍLIO DA COMPREENSÃO DA TRIGONOMETRIA”, tendo como orientadora do trabalho de dissertação a Prof.ª Dr.ª Karine Faverzani Magnago.

O objetivo proposto no projeto desta pesquisa é investigar o uso do software GeoGebra como uma ferramenta auxiliar na compreensão dos conceitos básicos da Trigonometria e das principais propriedades das Funções Trigonométricas.

Durante as atividades serão respondidos questionamentos, que serão partes instrumentais da coleta de dados da minha investigação. Por meio das respostas fornecidas por seu filho(a) poderei analisar se esta proposta de trabalho corresponde aos objetivos da pesquisa.

Portanto, estou solicitando a sua permissão para analisar as respostas fornecidas por seu filho(a) nas atividades que serão propostas, bem como o uso de parte do conteúdo destas respostas na redação final da dissertação. Os dados coletados serão utilizados unicamente no trabalho citado, sendo garantido o sigilo da identidade dos participantes.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, ...concordo com o exposto acima e autorizo utilizar as respostas dos questionamentos das atividades fornecidos pelo(a) meu filho(a) .... para fins de análise dos resultados da aplicação da proposta de pesquisa da dissertação do professor Jairo Renato Araujo Chaves.

_____ de _____________ de 2018.   ________________________

Assinatura do Responsável

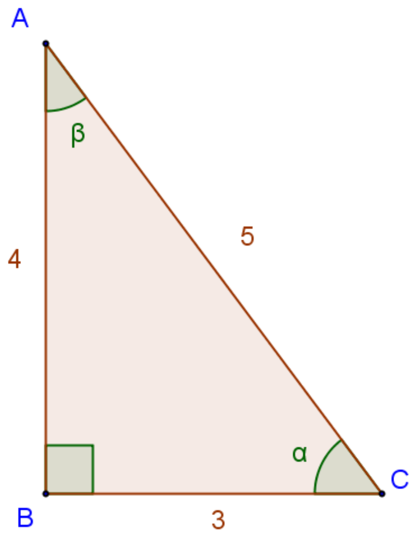
APÊNDICE B – QUESTÕES DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Número

A seguinte Avaliação tem como objetivo levantar informações referentes aos seus conhecimentos sobre Trigonometria.

Atividade Diagnóstica 1



No triângulo retângulo acima, com ângulos agudos **α** e **β**, anote o valor de:

01) ***sen α*** =

02) ***cos α*** =

03) ***tg α*** =

04) ***sen β*** =

05) ***cos β*** =

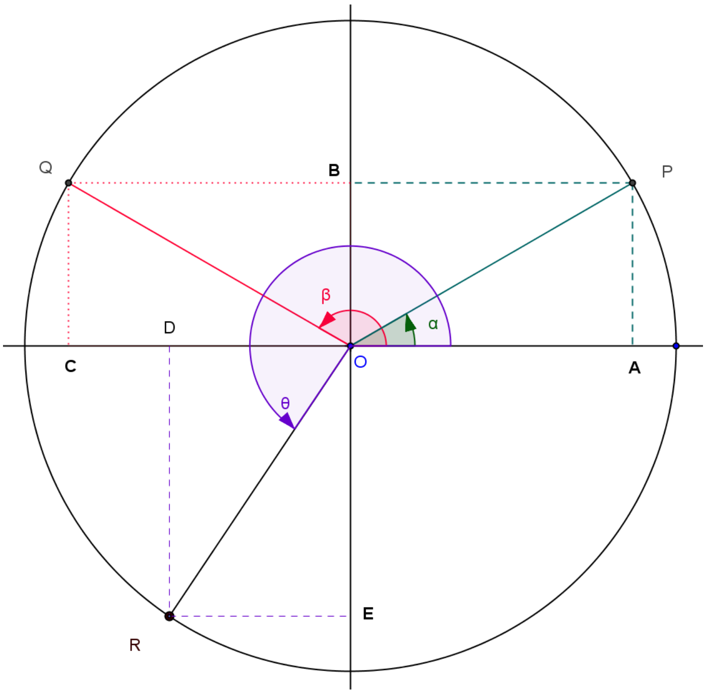
06) ***tg β*** =

Atividade Diagnóstica 2

Para cada ângulo destacado no ciclo trigonométrico (raio unitário) abaixo, determine qual o segmento que representa os valores pedidos:

Ângulos destacados: **α**, **β** e **θ**.

Segmentos que podem ser resposta: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ ou $\overline{OE}$.



07) ***sen α*** =

10) ***sen* θ** =

08) ***cos β*** =

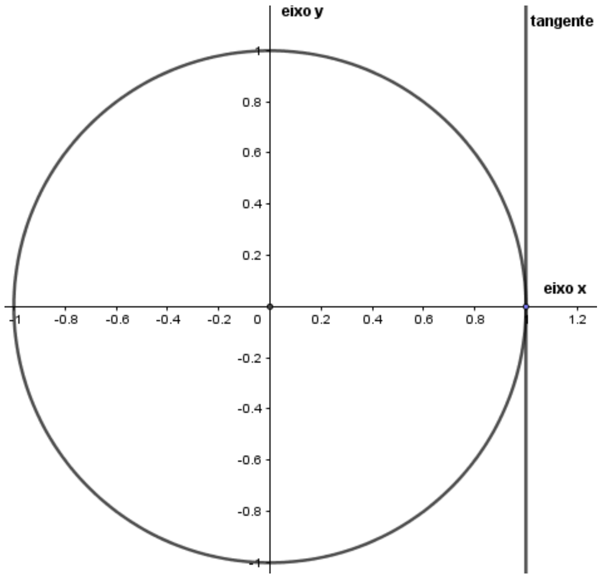
11) ***cos* θ** =

09) ***cos α*** =

12) ***sen β*** =

Atividade Diagnóstica 3

Observe o ciclo trigonométrico abaixo determinando o que se pede:



Quanto ao sinal ser positivo ou negativo.

13) O sinal do **seno** de um ângulo no terceiro quadrante: ____________

14) O sinal do **cosseno** de um ângulo no segundo quadrante: ___________

15) O sinal da **tangente** de um ângulo no primeiro quadrante: ___________

16) O sinal do **seno** de um ângulo no segundo quadrante: ___________

17) O sinal do **cosseno** de um ângulo no terceiro quadrante: ___________

18) O sinal da **tangente** de um ângulo no quarto quadrante: ___________

19) O sinal do **seno** de um ângulo no quarto quadrante: ____________

20) O sinal do **cosseno** de um ângulo no primeiro quadrante: ___________

Quanto ao valor máximo ou mínimo.

21) O valor mínimo atingido pelo **cosseno** de um ângulo: ___________

22) O valor máximo atingido pelo **seno** de um ângulo: ___________

23) O valor mínimo atingido pela **tangente** de um ângulo: ___________

Quanto a variação dos valores.

24) O(s) quadrante(s) em que o **cosseno** é crescente: _________________

25) O(s) quadrante(s) em que o **cosseno** é decrescente: _________________

26) O(s) quadrante(s) em que o **seno** é crescente: _________________

27) O(s) quadrante(s) em que o **seno** é decrescente: _________________

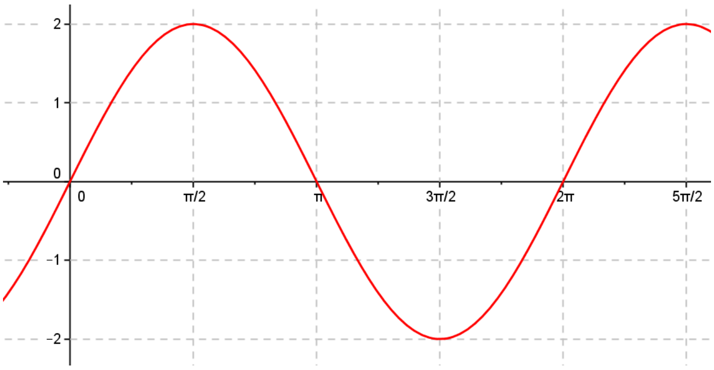
28) O(s) quadrante(s) em que a **tangente** é crescente: _________________

29) O(s) quadrante(s) em que a **tangente** é decrescente: _________________

Atividade Diagnóstica 4

Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função do tipo

$f(x) = a.sen(bx) + d$.



f(x)

Observando o gráfico, determine:

30) O valor do parâmetro a:

31) O valor do parâmetro b:

32) O valor do parâmetro d:

33) O domínio da função $f(x)$:

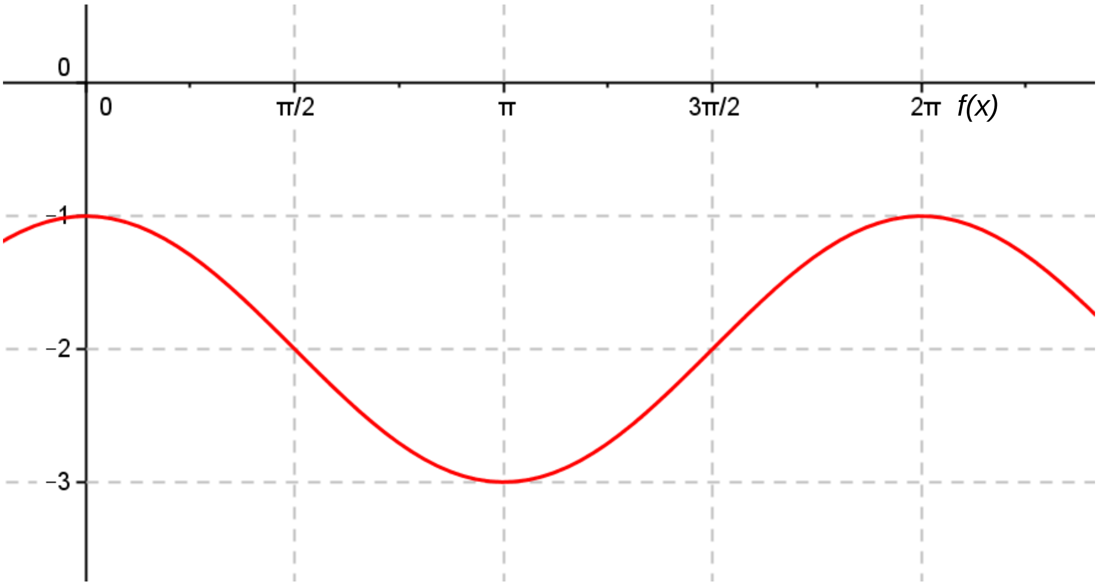
34) A imagem da função $f(x)$:

35) O período da função $f(x)$:

Atividade Diagnóstica 5

Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função do tipo

$f(x) = a.\cos(bx) + d$.



Observando o gráfico, determine:

36) O valor do parâmetro a:

37) O valor do parâmetro b:

38) O valor do parâmetro d:

39) O domínio da função $f(x)$:

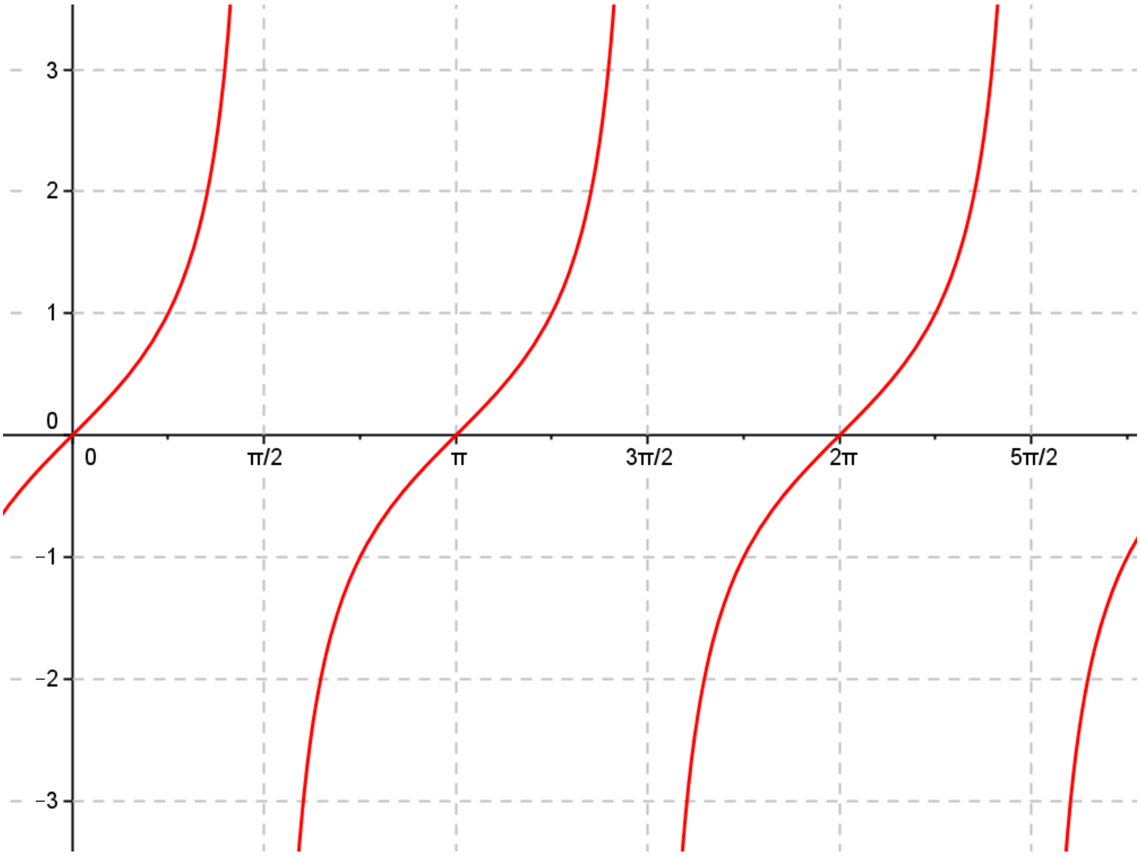
40) A imagem da função $f(x)$:

41) O período da função $f(x)$:

Atividade Diagnóstica 6

Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função do tipo

$f(x) = tg(x)$.



Observando o gráfico, determine:

42) O domínio da função $f(x)$:

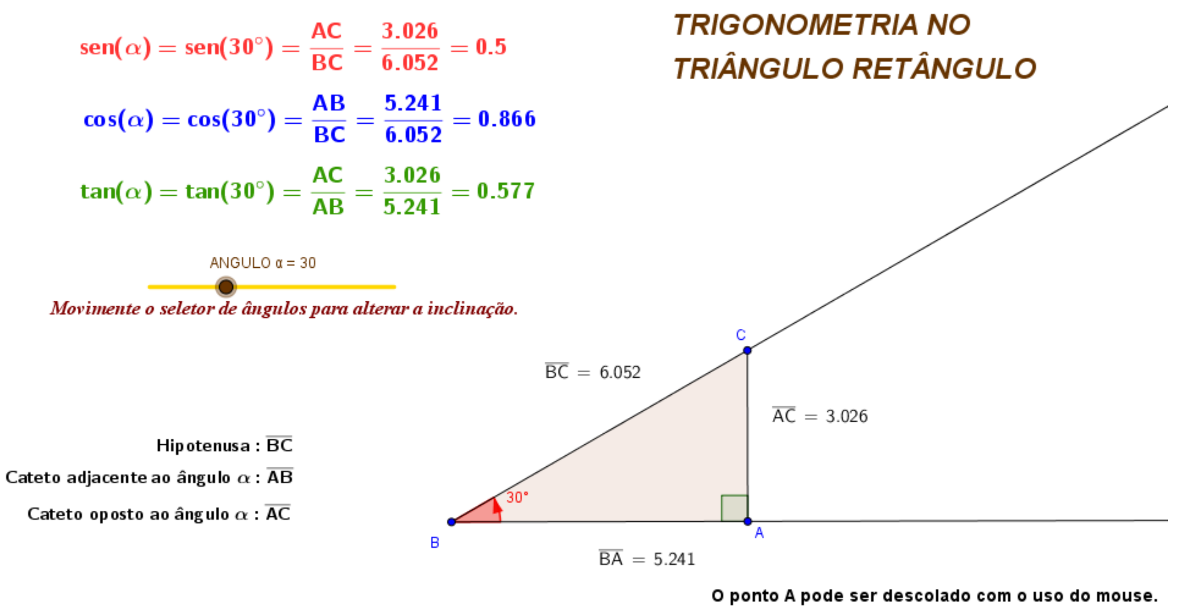
43) A imagem da função $f(x)$:

44) O período da função $f(x)$:

APÊNDICE C – ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO LABORÁTORIO

ATIVIDADE 1

Após selecionar a atividade “**trigo_triangulo.ggb**”, você pode alterar a medida do ângulo **α** movendo o seletor de ângulos e também deslocar o ponto **A** posicionando o mouse sobre o mesmo. Essa atividade visa observar as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

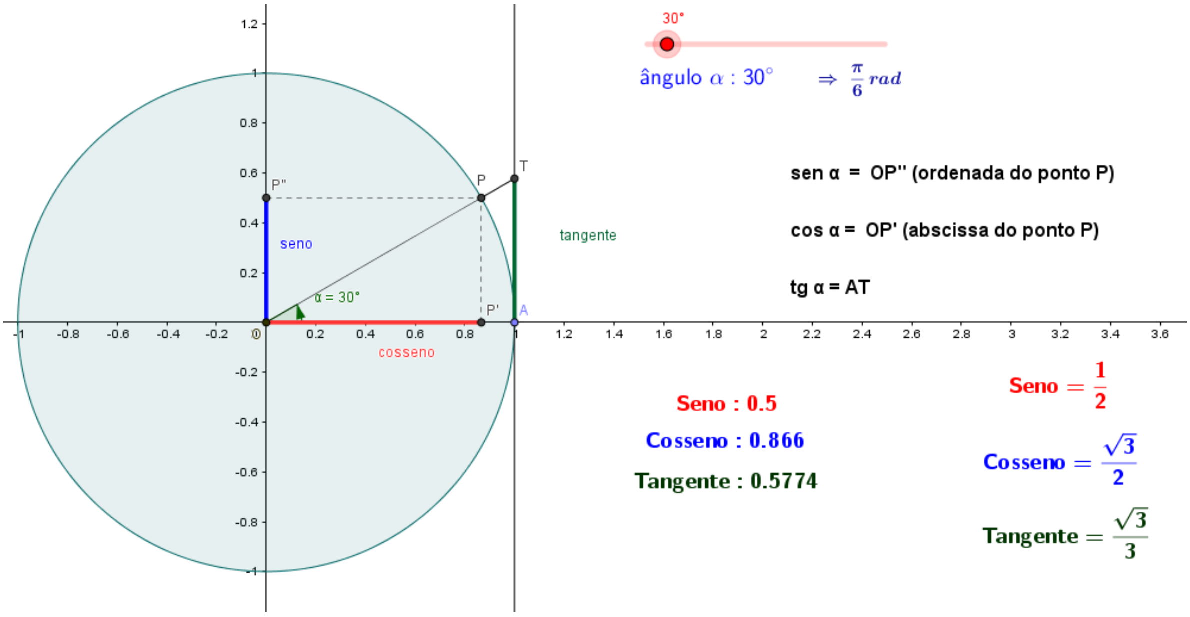


Desloque apenas o ponto **A** e observe os resultados das razões entre as medidas dos lados do triângulo. Descreva o que você constatou.

Movimente apenas o seletor correspondente ao ângulo **α** e observe os resultados das razões entre as medidas dos lados do triângulo. Descreva o que você constatou.

No triângulo retângulo em estudo, de que dependem os resultados das razões trigonométricas entre seus lados?

ATIVIDADE 2



Após selecionar a atividade "**trigo_ciclo.ggb**", você pode alterar a medida do ângulo **α** movendo o seletor de ângulos.

Descreva em que quadrantes o **seno** do **ângulo α** é positivo e em quais é negativo.

Descreva em que quadrantes o **cosseno** do **ângulo α** é positivo e em quais é negativo.

Descreva em que quadrantes a **tangente** do **ângulo α** é positiva e em quais é negativa.

Indique quais os valores máximo e mínimo assumidos por **cos α** e **sen α**.

Cite em que quadrantes o **seno** do **ângulo α** é crescente e em quais é decrescente.

____

____

____

Cite em que quadrantes o **cosseno** do **ângulo α** é crescente e em quais é decrescente.

____

____

____

Cite em que quadrantes a **tangente** do **ângulo α** é crescente e em quais é decrescente.

____

____

____

Descreva o que se observa em relação ao máximo e mínimo da **tangente**, bem como as restrições de existência da **tangente** para determinados ângulos.

____

____

____

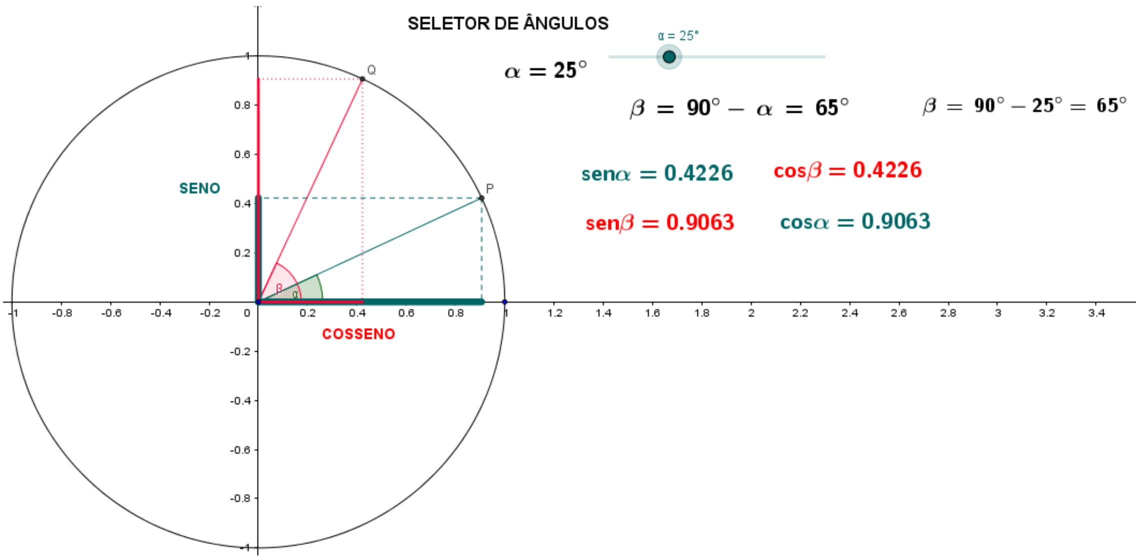
ATIVIDADE 3

COMPLETE A TABELA ABAIXO COM OS VALORES PEDIDOS:

ângulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	Rad
seno									
cosseno									
tangente									

ângulo	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad
seno								
cosseno								
tangente								

ATIVIDADE 4



Selecione a atividade "**complementares.ggb**".

Nessa atividade proposta, lembre-se que se dois ângulos **α** e **β** são classificados como complementares, então **α + β = 90º**.

Você pode alterar a medida do ângulo **α** movendo o seletor de ângulos. Repare que o ângulo **β** será apresentado como o complemento de **α**, isto é, **β = 90º – α**.

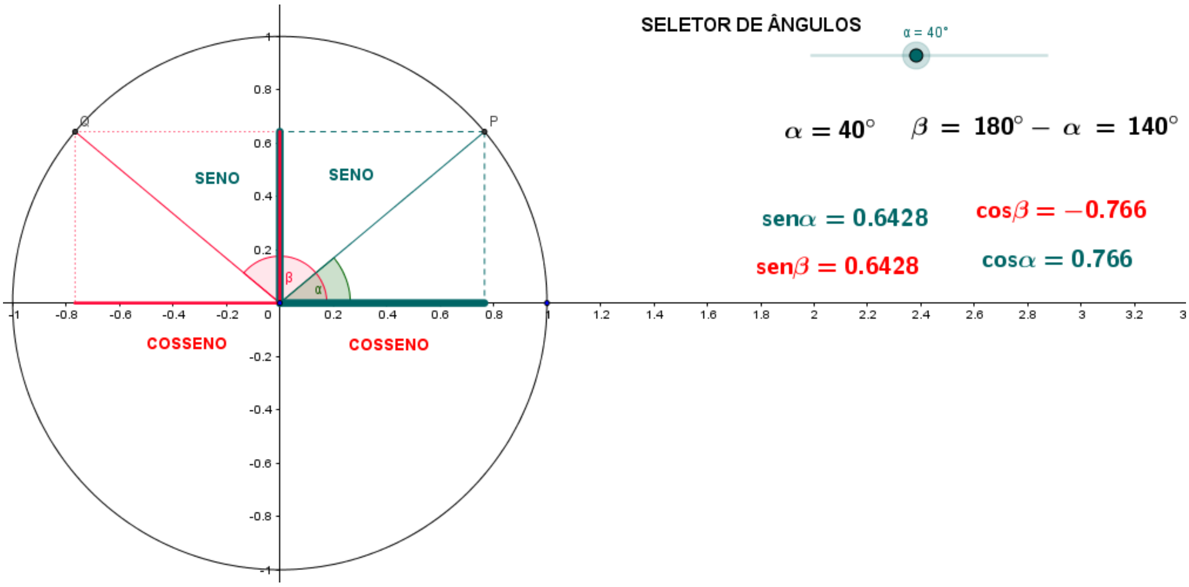
Descreva o que você observa em relação aos valores encontrados para ***sen α***, ***sen β cos α*** e ***cos β***.

____

____

____

ATIVIDADE 5



Selecione a atividade "**suplementares.ggb**".

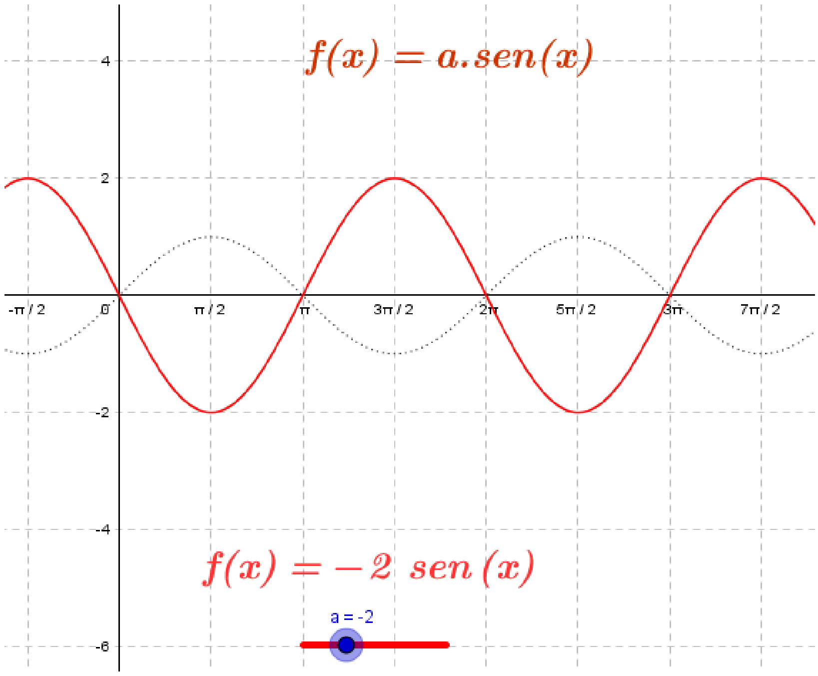
Nessa atividade proposta, lembre-se que se dois ângulos **α** e **β** são classificados como suplementares, então **α + β = 180º**.

Você pode alterar a medida do ângulo **α** movendo o seletor de ângulos. Repare que o ângulo **β** será apresentado como o suplemento de **α**, isto é, **β = 180º – α**.

Descreva o que você observa em relação aos valores encontrados para ***sen α***, ***sen* β *cos α*** e ***cos* β**.

____
____
____
____

ATIVIDADE 6



Selecione a atividade "**função_seno_1.ggb**".

O gráfico da função $f(x) = sen(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (*Im*) e o período (*p*) da função $f(x) = sen(x)$.

D = __________ Im = ______________________ p = _______

Altere o valor do parâmetro "***a***" movendo o seletor indicado na tela. A função $f(x) = a.sen(x)$ fica representada na tela. Mova o seletor **a** até obter o valor 2. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = 2.sen(x)$

D = __________ Im = ______________________ p = _______

Mova o seletor **a** até obter o valor –3. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = -3.sen(x)$.

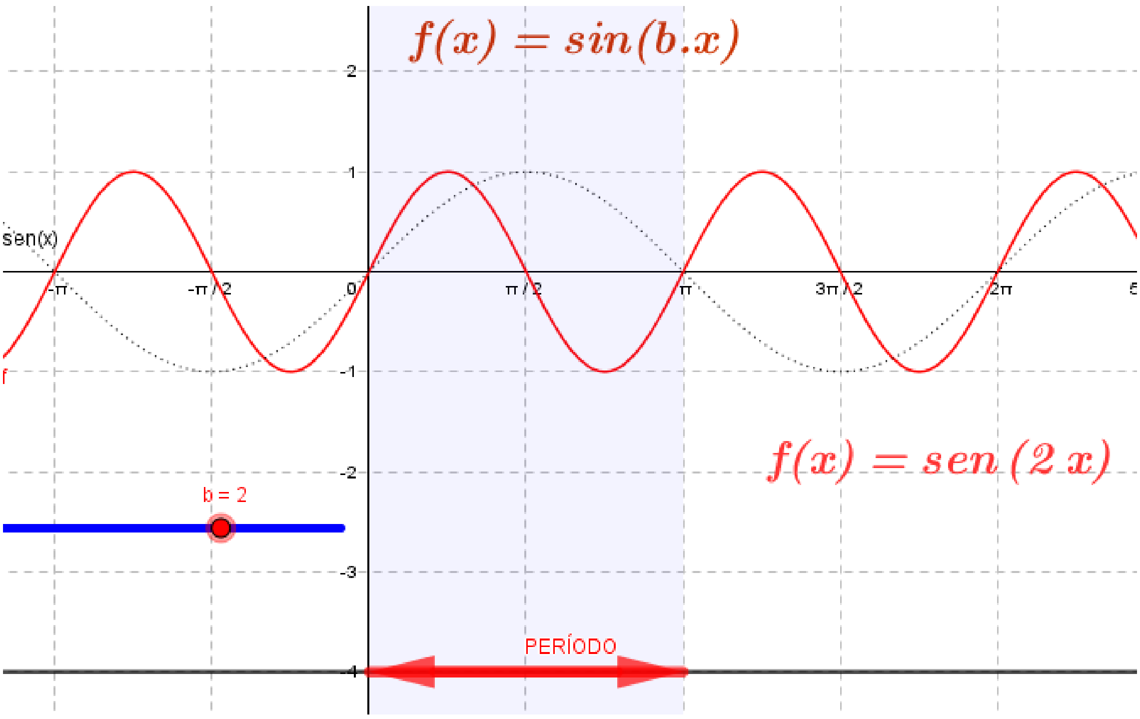
D = __________ Im = ______________________ p = _______

Observe as transformações que acontecem com o gráfico da função $f(x) = a.sen(x)$, quando é alterado o valor de ***a***. (Mova o seletor aleatoriamente e observe o *domínio*, a *imagem* e o *período*).

Descreva abaixo a transformação que o parâmetro ***a***, das funções da forma $f(x) = a.sen(x)$, causa sobre o gráfico da função $f(x) = sen(x)$.

____
____
____
____

ATIVIDADE 7



Selecione a atividade "**função_seno_2.ggb**".
O gráfico da função $f(x) = sen(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado.

Altere o valor do parâmetro "***b***" movendo o seletor indicado na tela. A função $f(x) = sen(b.x)$ fica representada na tela.

Mova o seletor **b** até obter o valor 2. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(2x)$

D = ___________ Im = ________________________ p = _______

Mova o seletor **b** até obter o valor 0,5 ou 1/2. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$

D = ___________ Im = ________________________ p = ________

Observe as transformações que acontecem com o gráfico da função $f(x) = sen(b.x)$, quando é alterado o valor de b. (Mova o seletor aleatoriamente e observe o domínio, a imagem e o período).

Descreva abaixo a transformação que o parâmetro ***b***, das funções da forma $f(x) = sen(b.x)$, causa sobre o gráfico da função $f(x) = sen(x)$.

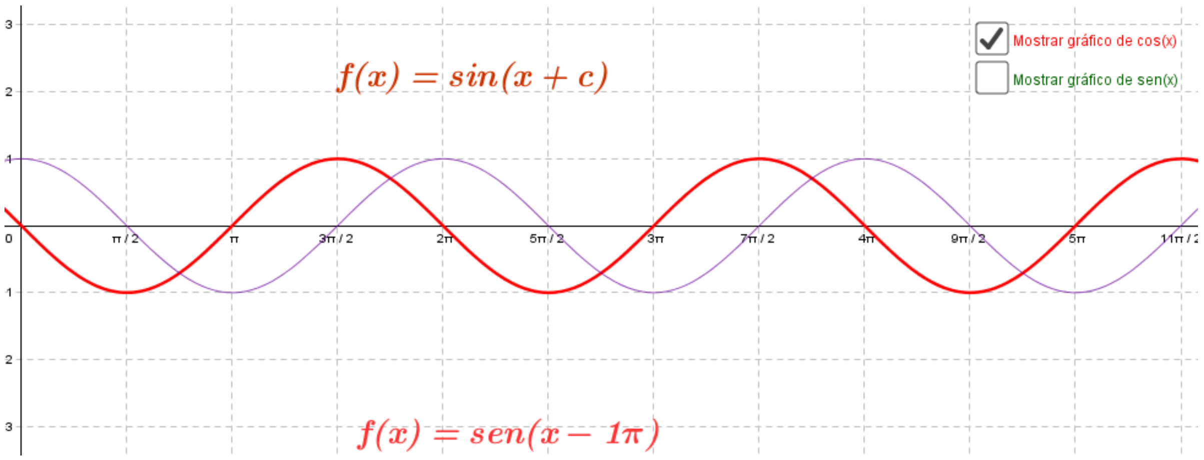
____

____

____

____

ATIVIDADE 8



Selecione a atividade "**função_seno_3.ggb**".

O gráfico da função $f(x) = sen(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado.

Altere o valor do parâmetro "***c***" movendo o seletor indicado na tela. A função $f(x) = sen(x + c)$ fica representada na tela.

Mova o seletor **c** até obter o valor **π/2** ou 1,57. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(x + \pi/2)$

D = ___________ Im = ________________________ p = ________

Descreva abaixo o que você observou quanto ao gráfico da função.

____

____

Mova o seletor **c** até obter o valor **2π** ou 6,28. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(x + 2\pi)$
D = ___________ Im = ________________________ p = ________

Descreva abaixo o que você observou quanto ao gráfico da função.

____

____

Alterando o valor do parâmetro "*c*", observa-se que o gráfico $f(x) = sen(x + c)$ coincide em alguns valores com o gráfico de **f(x) = cos (x)**. Anote alguns desses valores.

____

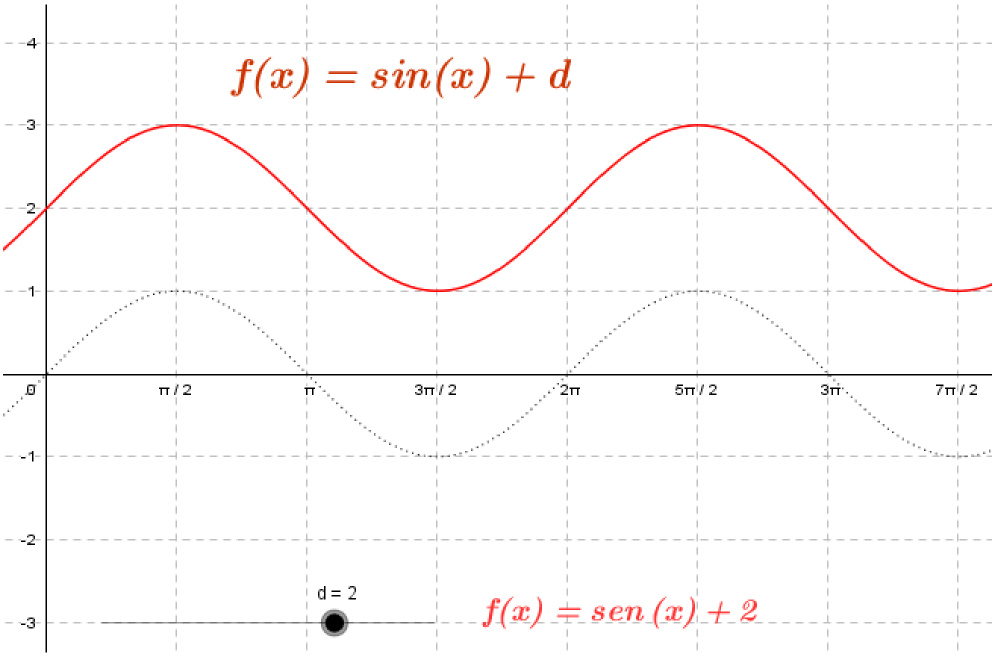
____

Alterando o valor do parâmetro "*c*", observa-se que o gráfico $f(x) = sen(x + c)$ coincide em alguns valores com o gráfico de **f(x) = sen (x)**. Anote alguns desses valores.

____

____

ATIVIDADE 9



Selecione a atividade "**função_seno_4.ggb**".

O gráfico da função $f(x) = sen(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado.

Altere o valor do parâmetro "***d***" movendo o seletor indicado na tela. A função $f(x) = sen(x) + d$ fica representada na tela.

Mova o seletor **d** até obter o valor 2. Observando-o, determine o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(x) + 2$.
D = __________ Im = ________________________ p = _______

Mova o seletor **d** até obter o valor –1. Observando-o, determine o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(x) - 1$.
D = __________ Im = ________________________ p = _______

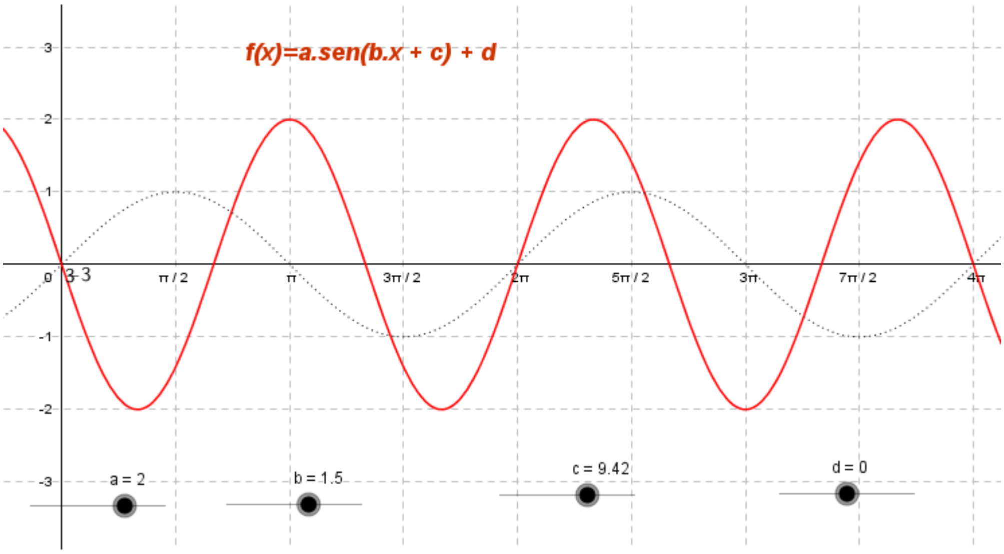
Mova o seletor **d** até obter o valor 4. Observando-o, determine o conjunto imagem (Im) e o período (p) da função $f(x) = sen(x) + 4$.
D = __________ Im = ________________________ p = _______

Observe as transformações que acontecem com o gráfico da função $f(x) = sen(x) + d$, quando é alterado o valor de c. (Mova o seletor aleatoriamente e observe o domínio, a imagem e o período).

Descreva abaixo a transformação que o parâmetro ***c***, das funções da forma $f(x) = sen(x) + d$ causa sobre o gráfico da função $f(x) = sen(x)$.

____
____
____
____

ATIVIDADE 10



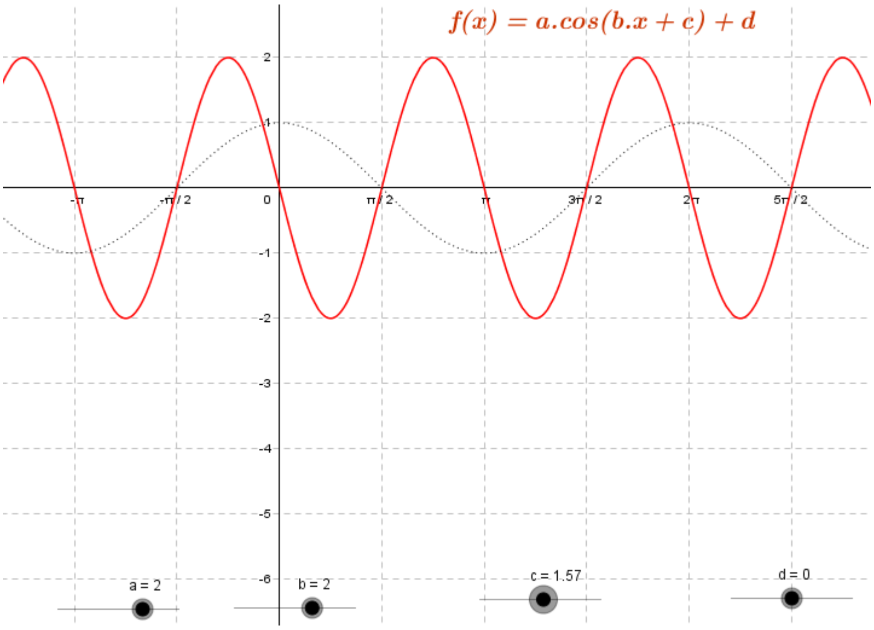
Selecione a atividade "**função_seno_5.ggb**".
Destaca-se na tela, em vermelho, a função na forma $f(x) = a.sen(bx + c) + d$, onde é possível alterar todos os parâmetros.

Selecione valores aleatórios para os parâmetros ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, movendo os seletores em destaque na tela. Anote alguns dos valores selecionados na tabela abaixo e escreva a função f(x), escrevendo seu período e sua imagem.

a	**b**	**c**	**d**	**Função: f(x)**	**imagem**	**período**

Descreva as transformações que os parâmetros ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, das funções da forma $f(x) = a.sen(bx + c) + d$, causa sobre o gráfico da função $f(x) = sen(x)$.

ATIVIDADE 11



Selecione a atividade “**função_coss_5.ggb**”.

Nessa atividade não se fará um estudo individual de cada parâmetro da função cosseno, visto que são análogos aos da função seno já estudados.

O gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado. Destaca-se na tela, em vermelho, a função na forma $f(x) = a.\cos(bx + c) + d$, onde é possível alterar todos os parâmetros.

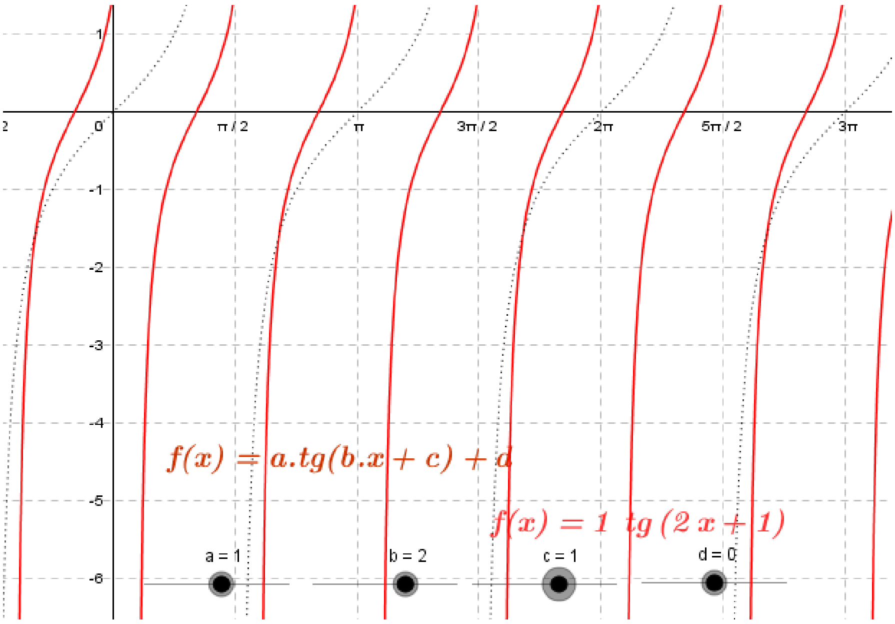
Selecione valores aleatórios para os parâmetros ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, movendo os seletores em destaque na tela. Anote alguns dos valores selecionados na tabela abaixo e escreva a função f(x), escrevendo seu período e sua imagem.

a	**b**	**c**	**d**	**Função: f(x)**	**imagem**	**período**

Descreva as transformações que os parâmetros ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, das funções da forma $f(x) = a.\cos(bx + c) + d$, causa sobre o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$.

____
____
____
____
____

ATIVIDADE 12



Selecione a atividade "**função_tang_5.ggb**".

O gráfico da função $f(x) = tg(x)$ está representado na tela em preto e pontilhado. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (*Im*) e o período (*p*) da função $f(x) = tg(x)$.

D = ______________________________ Im = ____________________ p = _______

Destaca-se na tela, em vermelho, a função na forma $f(x) = a.tg(bx + c) + d$, onde é possível alterar todos os parâmetros.

Mova os seletores ***a*** e ***d*** de forma que assumam o valor 1, e o seletor ***c*** assuma valor 0.

Mova o seletor **b** até obter o valor 2. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (*Im*) e o período (*p*) da função $f(x) = tg(2x)$.

D = ___________________________ Im = ______________ p = _______

Mova o seletor **b** até obter o valor 0,5. Observando-o, determine o domínio, o conjunto imagem (*Im*) e o período (*p*) da função $f(x) = tg\left(\frac{1}{2}x\right)$.

D = ________________________ Im = _________________ p = _______

Altere o valor do parâmetro "***c***" movendo o seletor indicado na tela.
Observe e descreva as transformações que acontecem com o gráfico da função, quando é alterado o valor de **c**.

____

____

____

____

Em sua opinião, o uso do software GeoGebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

____

____

____

____

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo GeoGebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

____

____

____

____

____

APÊNDICE D – RESPOSTAS DE ALGUNS ALUNOS

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Sim, o uso do GeoGebra melhora o entendimento do conteúdo pela facilidade de visualização nos gráficos do que é estudado teoricamente.

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Sim, é mais fácil entender as funções pela agilidade e clareza do Geogebra.

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Na minha opinião o software Geogebra é de fundamental importancia para o estudo do conceitos de seno, cosseno e tangente, pois auxilia e melhor, facilita o aprendizado.

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Sim, o Geogebra facilitou os conceitos a respeito de domínio, imagem e período das funções trigonométricas, logo esse software é fundamental para o apredinzagem.

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

O uso do Geogebra melhorou pois pude ver como o ciclo funciona efetivamente.

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Facilitou pois pude relacionalas visualmente.

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

O software Geogebra auxiliou muito na compreensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente, pois ele é um material didático muito simples de se usar e que possibilita tirar inúmeras dúvidas.

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

O entendimento sobre domínio, imagem e período ficou muito mais fácil e claro com o software Geogebra.

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Sim, pois vimos na prática suas dife-
renças

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Sim, podíamos ver na prática seus concei-
tos.

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Sim, melhorou muito

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Sim, ajudou muito a compreender
melhor

Em sua opinião, o uso do software Goegebra melhorou o entendimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico?

Sim, pois ao mesmo tempo que eu posso observar eu mesmo posso ir testando no app.

Em sua opinião a visualização e a interatividade proporcionada pelo Geogebra facilitou a compreensão sobre o domínio, imagem e período das funções trigonométricas?

Sim, bastante