UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ENSINO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

Daniele Della Méa da Silva

Santa Maria, RS, Brasil

2010

ENSINO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

por

Daniele Della Méa da Silva

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Especialista em Educação Matemática**.

Orientadora: Profª Dra. Karine Faverzani Magnago

Santa Maria, RS, Brasil

2010

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Pós-Graduação Especialização em Educação Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Monografia de Especialização

ENSINO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

elaborada por
Daniele Della Méa da Silva

como requisito parcial para obtenção do grau de
Especialista em Educação Matemática

COMISÃO EXAMINADORA:

Profª Dra. Karine Faverzani Magnago,
(Presidente/Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Fajardo (UFSM)

Profª Dra. Rosane Rossato Binotto (UFSM)

Santa Maria, 30 de agosto de 2010.

AGRADECIMENTOS

A Professora. Karine Faverzani Magnago pelo incentivo e orientação para que eu conseguisse concluir a monografia e aprimorar meus conhecimentos.

Aos professores Ricardo Fajardo, Rosane Rossato Binotto e João Batista Peneireiro pelo incentivo e inspiração.

Ao Sandro, meu amor, pelo carinho e grande força dada para que eu não desistisse até os últimos instantes da conclusão da monografia; sempre me incentivou, e ajudou à seguir em frente. Te Amo!

Aos meus pais Edmir e Sandra, pela formação humana e carinhosa que recebi.

À minha irmã Diana, sempre disposta a ajudar e me escutar.

À minha avó Maria, por suas orações e carinho.

Ao meu avô amado "Birí": Cheguei aqui Vozinho! (in memorian)

Em especial a minha madrinha Célia Della Méa que, além de mostrar-me o edital de abertura da primeira turma de Especialização em Educação Matemática da UFSM, dizendo que era para me inscrever, salientando minha capacidade de chegar lá, ajudou-me a vencer inúmeros obstáculos. Valeu pela força tia!!

Amo a Todos Vocês!

RESUMO

Monografia de Especialização
Curso de Especialização em Educação Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

ENSINO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AUTORA: DANIELE DELLA MÉA DA SILVA
ORIENTADOR: Profº. Drª Karine Faverzani Magnago
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 30 de Agosto de 2010.

Este trabalho foi escrito para averiguarmos como os estudantes de ensino fundamental e de ensino médio estão relacionando as interpretações de problemas matemáticos (neste caso envolvendo o conteúdo de sistemas lineares) com a linguagem dos números, a linguagem simbólica e as suas dificuldades em resolvê-los. Será que suas dificuldades estão somente na questão de interpretar os problemas e por este motivo não conseguem transpor da linguagem usual para a linguagem dos números? , será que suas dificuldades estão somente na questão de resolvê-los? Depois de analisar as pesquisas desenvolvidas, chegou-se a conclusão de que grande parte dos estudantes possuem dificuldade no desenvolvimento dos problemas por terem lacunas em interpretar as solicitações e transpor os conhecimentos adquiridos da linguagem usual para a simbólica, fazendo com que alguns conteúdos matemáticos fiquem complexos e que a disciplina seja entendida como um dos entraves na educação dos estudantes. As experiências das aplicações nas duas escolas não constituiu o ponto final deste trabalho, visto que estas aplicações tiveram um tempo reduzido disponibilizado pelas escolas (apenas dois períodos) em ambas pesquisas. A fim de obter uma avaliação mais acurada, este trabalho será continuado em um futuro mestrado.

Palavras - chave: ensino; sistemas lineares; resolução de problemas

ABSTRACT

Monograph of Specialization
Specialization Course in Mathematics Education
Federal University of Santa Maria

TEACHING LINEAR SYSTEMS USING PROBLEM-SOLVING METHOD

AUTHOR: DANIELE DELLA MÉA DA SILVA
SUPERVISOR: Prof[a] Dr[a] Karine Faverzani Magnago
Date and Place of Defense: Santa Maria, Agosto 30th, 2010.

This work has been written for inquire how students of elementary and middle school are relating interpretations of mathematical problems (in this case involving linear systems topics) with the language of numbers, the symbolic language and its difficulties in solving them. Does their difficulties are only matter of interpreting the problems and for this reason they can not transpose the common language to the language of numbers? Could it be that your difficulties are only in the matter of resolving them? After analyzing the results of investigations carried out, it was found that most students have difficulty in the development of the problems due to gaps in the interpretation of requests and translation of their knowledge of common language for the symbolic, causing some math concepts become complex and the math discipline to be understood as a major problem in the education of students. The experiences of applications in both schools did not constitute the end point of this work, since these applications have a reduced time available for schools (only two periods) in both surveys. In order to obtain a more accurate assessment, this work will be continued in a future master course.

Keywords: teaching; linear systems; problem-solving

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..... 9
2 REVISÃO DA LITERATURA..... 11
2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS..... 11
2.2 SISTEMAS LINEARES..... 13
2.2.1 Classificação de um sistema linear..... 15
2.2.2 Sistema Linear Equivalente..... 15
2.3. MATRIZES ASSOCIADAS A UM SISTEMA LINEAR..... 16
2.4 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES..... 18
2.4.1 Método da adição..... 18
2.4.2 Método da substituição..... 19
2.5 RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES: MÉTODO DE REDUÇÃO DE GAUSS-JORDAN..... 20
2.5.1 Métodos de Resolução: Ax = b..... 22
2.6 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS..... 26
3 METODOLOGIA..... 29
4 PRIMEIRA PRÁTICA DIDÁTICA: BALANCEAMENTO DE REAÇÕES QUÍMICAS..... 31
4.1 PROBLEMAS SELECIONADOS..... 31
4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PRÁTICA PEDAGÓGICA 1..... 38
5 SEGUNDA PRÁTICA PEDAGÓGICA: PROBLEMAS DO COTIDIANO..... 40
5.1 PROBLEMAS SELECIONADOS..... 40
5.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PRÁTICA PEDAGÓGICA 2 43
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 45
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 47
8 ANEXOS..... 49
8.1 ANEXO A – Questão 01 49
8.2 ANEXO B – Questão 02..... 50
8.3 ANEXO C – Questão 03..... 51
8.4 ANEXO D AVALIAÇÃO DA PRÁTICA I..... 52
8.5 ANEXO E – Questão 01..... 53

8.6 ANEXO F – Questão 02..... 54
8.7 ANEXO G – Questão 03..... 55
8.8 ANEXO H – Avaliação da Prática II..... 56
8.9 ANEXO I – Fotos relativas as resoluções da segunda pesquisa..... 57

1 INTRODUÇÃO

No mundo contemporâneo e globalizado, a necessidade do entendimento da Matemática e a capacidade de usá-la em nosso cotidiano aumentaram consideravelmente, tanto que muitos educadores matemáticos, por exemplo, Guy Brousseau, Ubiratan D'Ambrósio, não estão medem esforços para que o ensino e a consequente aprendizagem da matemática se tornem mais eficientes, de maneira que a instauração da Educação Matemática se faz realidade, ao mesmo tempo em que é condição para o desenvolvimento da sociedade tal como se faz constituída.

No início do século XX, a arte de resolver problemas foi um meio de tentar melhorar o aprendizado em Matemática tanto que, entre os anos de 1960 e 1970, no Brasil, o ensino sofreu influências do movimento de renovação, estabelecido como a matemática moderna, que tinha sua base na Estrutura Algébrica, Lógica, Topológica e dava ênfase em Teoria dos Conjuntos. Essa reforma realçava o ensino de símbolos e uma nomenclatura complicada, havendo, então, um excesso de formalização dos conteúdos, o que, muitas vezes, distanciava o ensino das atividades práticas.

Por todos esses motivos, as reformas no aprendizado não tiveram o êxito esperado e, na década de 70, muitos educadores matemáticos começaram a dar uma importância significativa na arte de ensinar a matemática através da resolução de problemas.

Passa-se, então, a valorizar que o aluno tenha confiança no seu modo de pensar, que tenha a iniciativa de buscar informações, argumentar, escrever suas idéias para ter um bom resultado em suas atividades escolares e cotidianas. Por meio de vários problemas matemáticos e em diversas situações, o aluno que entende e sabe trabalhar com linguagens simbólicas constrói um modelo para a sua investigação e interpretação, o que o incentiva a achar a solução para os problemas que surjam e assim, em todas as áreas de conhecimento. É preciso, então, que o professor propicie meios para que o desenvolvimento da aprendizagem seja satisfatório e o menos traumático possível. Com relação aos problemas matemáticos, crê-se que é preciso saber mais sobre as dificuldades no aprendizado do aluno. Daí surgiu essa investigação.

A resolução de problemas é um dos mais importantes meios para se ensinar matemática, pois, através dos diversos tipos de problemas, os alunos aprenderão a experimentar, a planejar, organizar os dados e fazer uso de seus próprios erros. Com isso, aprenderão a buscar novas alternativas para resoluções, adquirindo autoconfiança, aumentando sua autonomia e capacidade de argumentação. Justifica-se, portanto, essa

pesquisa por promover um estudo que busca identificar dificuldades de aprendizado no que diz respeito à compreensão de enunciados em matemática e a resolução dos correspondentes problemas.

A organização desta monografia apresenta-se da seguinte forma: primeiramente, registram-se os principais teóricos que discutem a resolução de problemas matemáticos e, em seguida, expõe-se a problemática sobre questões de sistemas lineares. No terceiro capítulo, apresentam-se os aspectos metodológicos que permitiram a execução desta proposta. O quarto e quinto capítulos são compostos pelos resultados decorrentes das aplicações práticas e discussões dos achados nessas pesquisas. No sexto capítulo, registram-se as considerações finais. Por fim, no sétimo capítulo encontram-se as referências bibliográficas citadas pelos anexos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Tem-se por objetivo, neste capítulo, revisar os principais autores que abordam o tema geral sobre resoluções de problemas. Além disso, fundamentos que norteiam a questão dos sistemas lineares são registrados na sequência.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Polya (1995) compara a capacidade de resolver problemas com a natação, onde se aprende praticando e imitando os outros. Consta, também, na obra deste autor, uma proposta para o professor de matemática que, por meio desta metodologia, pode trabalhar com problemas de forma a incitar a aprendizagem via imitação. Isso permitirá ao aluno praticar e melhorar a sua capacidade de aprendizado.

Na visão do autor, os passos abaixo são extremamente necessários para que se consiga a obtenção do resultado esperado:

1. Compreensão do problema;
2. Estabelecimento de um plano;
3. Execução do plano e,
4. Retrospecto.

No primeiro passo, o estudante terá de ler quantas vezes achar necessário o problema e, assim, anotar os dados pertinentes e o que o problema está perguntando.

Em seguida, como segundo passo, ele deve ligar os dados do problema com a pergunta em questão. Caso já tenha resolvido um problema parecido, deve utilizar as idéias deste, no novo problema e, assim, montar o plano de resolução.

No terceiro passo, os dados coletados nas resoluções de problemas devem ser utilizados. Caso não seja possível, sugere-se tentar resolver um problema parecido e retornar a questão.

Por fim, no último passo, recomenda-se que o aluno examine e interprete a solução obtida; tente ver se há outros meios de se chegar à solução.

Para Dante (2004, p. 23), a resolução de problemas tem por objetivos “fazer o aluno pensar; desenvolver o raciocínio lógico do aluno; ensinar o aluno a enfrentar situações novas;

levar o aluno a conhecer as primeiras aplicações da Matemática; tornar as aulas mais interessantes e motivadoras".

Ainda, segundo o autor Dante (2009, p. 24), a resolução de problemas passa por cinco etapas:

1. *Compreensão do problema:* primeiramente o aluno deverá realizar uma leitura e uma interpretação minuciosa, vendo suas condições e os dados do problema;

2. *Elaboração de um plano:* nesta etapa deverá buscar estratégias para tentar desenvolver o problema; o aluno deverá anotar os dados de maneira organizada por meio de tabelas e diagramas, resolvendo o problema por partes;

3. *Execução do plano:* elaborado o plano, o aluno irá desenvolver o problema, executando os cálculos por meio das estratégias pensadas, adquirindo diversas maneiras de resolvê-lo;

4. *Verificação ou retrospectiva:* compreende a análise todas as etapas anteriores, verificando se existe alguma maneira de tirar a prova de seus cálculos para saber se seu problema está correto se há outra maneira de resolvê-lo. Ainda nesta etapa, é preciso verificar se poderá empregar a estratégia utilizada no problema em outras situações-problemas. Requer que a aprendizagem do aluno seja expressa com clareza e de maneira interessante, que consiga relacionar com experiências que já tiveram;

5. *Emissão da resposta:* terá de verificar se o que escreveste está combinando com a questão. Se a resposta à questão foi dada por extenso respondendo assim completamente ao problema.

Para Onuchic e Allevato (Escola de Inverno em Educação Matemática – UFSM, 2008) a metodologia de ensinar matemática através da resolução de problemas, possui os seguintes passos:

1. *Formar grupos de alunos e distribuir o problema:* neste passo, o professor irá pedir para os alunos ler e tentar fazer uma interpretação do mesmo após formarem grupos de pequenas quantidades;
2. *Observar e incentivar:* aqui o professor irá cuidar o comportamento dos alunos e incentivar para o trabalho, havendo participação entre os colegas;
3. *Auxiliar nos problemas secundários:* o professor deverá incentivar os alunos para a utilizarem as técnicas que eles já conhecem para tentarem obter o resultado. Nesta etapa o professor necessita sanar as dificuldades que os alunos apresentarem quanto a interpretação, no contexto da leitura;

4. *Registrar as resoluções no quadro:* nesta etapa, o professor irá chamar um aluno de cada grupo para ele registrar o resultado que o grupo obteve;
5. *Realizar uma plenária:* aqui deverá haver uma discussão dos resultados obtidos por cada grupo. O professor servirá de incentivador da participação de todos na discussão de qual o melhor método, sendo assim este momento muito importante na aprendizagem dos alunos;
6. *Buscar um consenso:* este é o momento, onde após ter sanada as dúvidas dos alunos, o professor juntamente com a turma terá de entrar em um consenso de qual o resultado é o correto;
7. *Formalizar o conteúdo:* aqui o professor colocará no quadro a apresentação formal do conteúdo, como as definições, exemplos e as propriedades.

Foram destacados os passos propostos por esses autores por serem extremamente reconhecidos entre estudantes e professores de Matemática, sendo seus passos, muito utilizados e bem elaborados, importantes no ensino de resolução de problemas, entre outros conteúdos dentro da matemática.

2.2 SISTEMAS LINEARES

É preciso, inicialmente, conceituar a equação linear que, de acordo com Giovanni e Bonjorno (2005, p. 121) "é toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ em que a_1, a_2, a_3, ..., a_n são números reais; x_1, x_2, x_3, ..., x_n são as incógnitas; b é o termo independente. Quando o termo independente b for igual a zero, a equação linear é homogênea".

Abaixo, encontram-se alguns exemplos.

Exemplo 1: Na equação $8x + 4y - 3z = 2$, os números 8, 4, -3 são os coeficientes; x, y, z são as incógnitas; e o número 2 é o termo independente.

A sequência de n números reais que, colocados respectivamente no lugar das incógnitas na equação tornam verdadeira a igualdade dada chama-se solução de uma equação linear com n incógnitas.

Exemplo 2: Uma solução da equação $8x + 4y - 3z = 2$ poderá ser a seguinte: Ao aplicar-se os valores 1 e 2 respectivamente para as variáveis x e y, tem-se:

$$8x + 4y - 3z = 2 \quad (2.2.1)$$

$$8(1) + 4(2) - 3z = 2 \quad (2.2.2)$$

$$8 + 8 - 3z = 2 \quad (2.2.3)$$

$$16 - 3z = 2 \quad (2.2.4)$$

$$- 3z = 2 - 16 \quad (2.2.5)$$

$$- 3z = - 14 \ _x(- 1) \quad (2.2.6)$$

$$3z = 14 \quad (2.2.7)$$

$$z = \frac{14}{3} \quad (2.2.8)$$

Portanto a solução da equação linear é a seguinte: $\{(1, 2, \frac{14}{3})\}$.

Ainda, de acordo com Giovanni e Bonjorno (2005, p. 122), "um sistema linear é um conjunto com *m* equações lineares representado pela forma geral":

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_nx_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \quad , \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.2.9)$$

em que a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}, b_1, b_2 ... $b_{m,}$ são números reais.

Abaixo, encontram-se alguns exemplos de sistemas lineares.

Exemplo 3: São exemplos de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \quad , \\ 2x - 7y = -5 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{cases} x + 8y = 5 \quad . \\ 2x - y = -7 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

As soluções dos sistemas (2.2.10) e (2.2.11) serão desenvolvidas na seção 5.2.

Exemplo 4: O exemplo abaixo é um sistema linear na qual o número de equações é igual ao número de incógnitas. Neste caso, escolheu-se um sistema que possui três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ -2x + y - 4z = 3 \\ x - 3y + z = 9 \end{cases} . \qquad (2.2.12)$$

2.2.1 CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Esquematizou-se na figura 1, através de um diagrama, as classificações de um sistema linear.

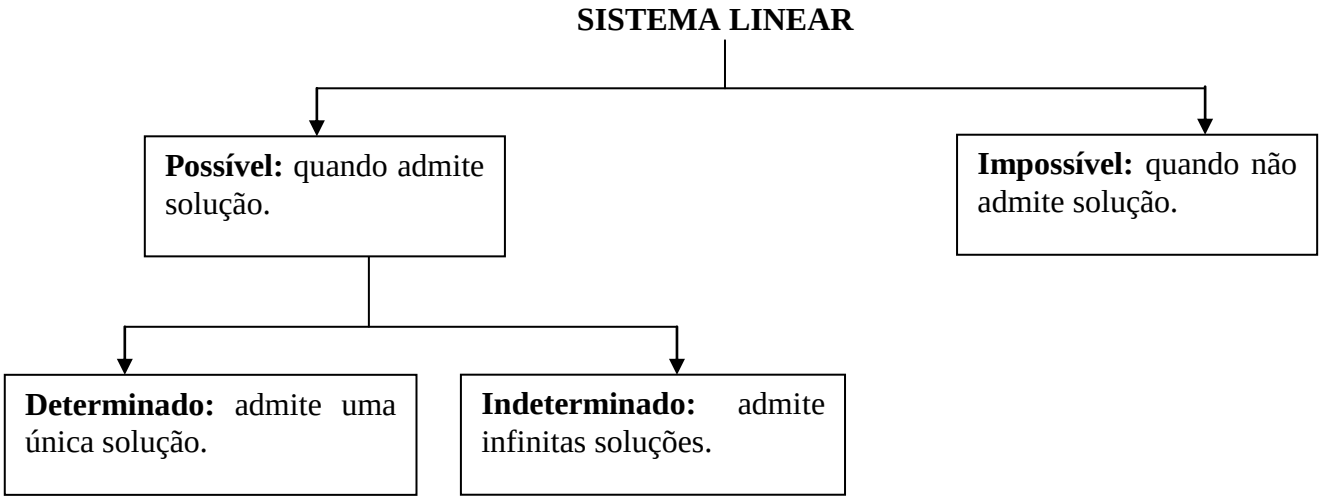


Figura 1- Classificação de um Sistema Linear (GIOVANNI, BONJORNO 2005, p. 124)

2.2.2 SISTEMA LINEAR EQUIVALENTE

Sistemas Lineares Equivalentes são sistemas que admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 5: Os sistemas abaixo são sistemas lineares equivalentes. (GIOVANNI, BONJORNO 2005, p. 123).

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} , \qquad (2.2.2.1)$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ x + 2y = 5 \end{cases} . \qquad (2.2.2.2)$$

Estes dois sistemas são equivalentes pois admitem o mesmo conjunto solução, $S = \{(1,2)\}$.

2.3 MATRIZES ASSOCIADAS A UM SISTEMA LINEAR

Seja o Sistema Linear (2.2.9). A matriz em que cada linha é formada ordenadamente pelos coeficientes e termos independentes de cada equação é denominada matriz aumentada do sistema, como a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_2 \end{pmatrix} . \qquad (2.3.1)$$

Quando a matriz é formada sem os termos independentes, diz-se que a matriz é incompleta, como a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (2.3.2)$$

Considera-se ainda as seguintes matrizes colunas associadas ao sistema:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ formada pelas incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ formada pelos termos independentes.

Multiplicando-se a matriz incompleta pela matriz das incógnitas, obtém-se a matriz dos termos independentes, como a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & . \\ & . \\ & . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} . \qquad (2.3.3)$$

Diz-se que a equação (2.3.3) é a forma matricial do sistema linear. Em notação compacta, temos: Ax = B.

Por exemplo; a forma matricial para o sistema linear (2.2.12) é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} . \qquad (2.3.4)$$

A matriz incompleta de um sistema linear que possui o mesmo número de equações e incógnitas é uma matriz quadrada onde seu determinante (D_A) é o determinante do sistema.

Se o determinante D_A for diferente de zero, então existe a inversa de A, que denotamos por A^{-1}. Ao multiplicarmos o sistema linear Ax = B por A^{-1}, obtemos:

$$Ax = B \qquad (2.3.5)$$

$$A^{-1}.Ax = A^{-1}.B \qquad (2.3.6)$$

$$I.x = A^{-1}.B \qquad (2.3.7)$$

$$x = A^{-1}.B \quad . \qquad (2.3.8)$$

Daí, se o determinante for diferente de zero, o sistema linear possui uma única solução e é um sistema linear possível e determinado.

2.4 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para resolver um sistema linear com duas variáveis é comum utilizar os métodos da adição e da substituição revisados a seguir nas subseções 2.4.1 e 2.4.2. Já para casos mais gerais, utilizam-se os métodos de Gauss, revisado na seção 2.5.

2.4.1 MÉTODO DA ADIÇÃO

Esse método consiste em eliminar uma das variáveis através da adição das duas equações do sistema. Para isso é necessário que os coeficientes da variável a ser eliminada sejam números simétricos.

Exemplo 6: Resolver o sistema linear (2.2.10) cujas equações são $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases}$ através do método da adição, em que utiliza-se os passos a seguir.

1- Escolher uma das variáveis para que seja eliminada, preferencialmente que possua os coeficientes contrários. Nesse exemplo escolheremos o x para ser eliminado;

2- Multiplicar a primeira equação pelo coeficiente da segunda e vice-versa, adequando o sinal de um dos coeficientes para que ocorra o cancelamento:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \ _{x}(2) \\ \underline{2x - 7y = -5} \ _{x}(-3) \end{cases} \qquad (2.4.1.1)$$

$$6x - 10y = 18 \qquad (2.4.1.2)$$

$$\underline{-6x + 21y = 15} \qquad (2.4.1.3)$$

$$11y = 33 \qquad (2.4.1.4)$$

$$y = \frac{33}{11} \qquad (2.4.1.5)$$

$$y = 3 \qquad (2.4.1.6)$$

3- Substituir o valor de y em qualquer uma das equações, assim determinando o valor de x, como segue:

$$3x - 5y = 9 \qquad (2.4.1.7)$$

$$3x - 5(3) = 9 \quad (2.4.1.8)$$

$$3x - 15 = 9 \quad (2.4.1.9)$$

$$3x = 9 + 15 \quad (2.4.1.10)$$

$$3x = 24 \quad (2.4.1.11)$$

$$x = \frac{24}{3} \quad (2.4.1.12)$$

$$x = 8 \quad (2.4.1.13)$$

Com os passos realizados acima, tem-se que a solução do sistema é S= {(8, 3)}.

Para verificar a solução basta substituirmos no sistema os valores encontrados em *x* e *y* na equação:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 2x - 7y = -5 \ , \end{cases} \quad (2.4.1.14)$$

$$\begin{cases} 3(8) - 5(3) = 9 \\ 2(8) - 7(3) = -5 \ , \end{cases} \quad (2.4.1.15)$$

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ -5 = -5 \ . \end{cases} \quad (2.4.1.16)$$

Portanto, a solução do sistema S= {(8, 3)} está correta.

2.4.2 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O método da substituição consiste em isolar uma das variáveis e substituí-la na outra equação.

Exemplo 7: Resolver o sistema (2.2.10) utilizando o método da substituição cujas equações são: $x + 8y = 5$ e $2x - y = -7$.

1º) Escolher em qualquer uma das equações, uma das variáveis e isolar no primeiro membro. Nesse caso, optou-se por isolar a variável *x* na primeira equação do sistema. Assim:

$$\begin{cases} x = 5 - 8y \ , \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad (2.4.2.1)$$

2º) Substituir o valor de *x* na equação seguinte e encontrar o valor de *y*, então:

$$2(5 - 8y) - y = -7 \quad (2.4.2.2)$$

$$10 - 16y - y = -7 \quad (2.4.2.3)$$

$$-17y = -7 - 10 \quad (2.4.2.4)$$

$$-17y = -17 \quad (2.4.2.5)$$

$$y = \frac{-17}{-17} \quad (2.4.2.6)$$

$$y = 1 \ . \quad (2.4.2.7)$$

3º) Voltar na primeira equação e, ao substituir o valor de *y*, encontrar o valor de *x*:

$$x + 8y = 5 \quad (2.4.2.8)$$

$$x + 8(1) = 5 \quad (2.4.2.9)$$

$$x + 8 = 5 \quad (2.4.2.10)$$

$$x = 5 - 8 \quad (2.4.2.11)$$

$$x = -3 \ . \quad (2.4.2.12)$$

A solução do sistema linear encontrado é S = {(-3,1)}.

Para verificar a solução basta substituir os valores de *x* e *y* no sistema linear (2.2.11):

$$\begin{cases} -3 + 8(1) = 5 \\ 2(-3) - (1) = 7 \end{cases} \quad (2.4.2.13)$$

Portanto, a solução do sistema é S= {(-3,1)} está correta.

2.5 RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES: MÉTODO DE REDUÇÃO DE GAUSS-JORDAN

Os conceitos apresentados nessa seção foram retirados de livros tradicionais de Álgebra Linear (ANTON, BUSBY, 2006; BOLDRINI et al., 1980; POOLE, 2004).

Aqui usa-se o termo: "elemento líder" para indicar o primeiro elemento não nulo de uma linha, considerando no sentido da esquerda para a direita (linha não nula de uma matriz).

Definição 1:

Uma matriz está na forma escalonada se ela satisfaz as seguintes propriedades:

a) Se as linhas não nulas estão acima de qualquer linha composta de zeros;
b) Se o elemento líder de uma linha está em uma coluna à direita do elemento líder da linha de cima;
c) Se os elementos de uma coluna, abaixo do elemento líder, forem zeros.

Uma matriz está na forma escalonada reduzida se, além de estar na forma escalonada, ela satisfizer as propriedades:

d) O elemento líder de cada linha não-nula ser 1;

e) Cada elemento líder 1, é o único elemento não-nulo em sua coluna.

Exemplo 8: As matrizes a seguir estão na forma escalonada;

$$\begin{pmatrix} \boxed{\#} & \# & \# & \# \\ 0 & \boxed{\#} & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\#} & \# & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\#} & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \end{pmatrix} . \qquad (2.5.1)$$

onde $\boxed{\#}$ é o elemento líder e # qualquer número.

Já as matrizes a seguir estão na forma escalonada reduzida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \# & 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \# \end{pmatrix} . \qquad (2.5.2)$$

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz A_{mxn} são:

a) Permutação entre as linhas *r* e *s*, que denotaremos por $L_r \leftrightarrow L_s$;

b) Multiplicação ou divisão de uma linha *r* por uma constante $c \neq 0$, , que denotaremos por $L_r \leftarrow cL_r$. ou $L_r \leftarrow \frac{L_r}{c}$.

c) Substituição da linha *r* por ela mesma, menos *c* vezes outra linha, que denotaremos por $L_r \leftarrow L_r - cL_s$.

Uma matriz A_{mxn} é equivalente por linhas a outra matriz $B_{mxn,}$ se B pode ser obtida aplicando a ela uma sequência finita de operações elementares nas linhas da matriz A. Cada posição pivô em uma matriz A corresponde a posição de cada elemento líder em uma forma escalonada de A.

Teorema 1:

Sejam A*x* = b e C*x* = d dois sistemas lineares com *m* equações e *n* incógnitas. Se as matrizes aumentadas (A | b) e (C | d) desses sistemas são equivalentes por linhas, então os

sistemas possuem exatamente a(s) mesma(s) soluções. A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em Kolman e Hill (1998, p.45).

2.5.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO: Ax = b

Esquematiza-se, no quadro 1, os passos de execução dos métodos de Eliminação de Gauss e de Redução de Gauss-Jordan.

Eliminação de Gauss	**Redução de Gauss-Jordan**
Forme a matriz aumentada (A | b)	Forme a matriz aumentada (A | b)
Usando operações elementares, transforme (A | b) em uma matriz escalonada.	Usando operações elementares, transforme (A | b) em uma matriz escalonada reduzida.
Obtenha a solução por retro-substituição.	Obtenha a solução direta.

Quadro 1- Esquematização dos passos de execução dos métodos de Eliminação de Gauss e de Redução de Gauss-Jordan

O processo de Escalonamento consiste na transformação de (A | b) para sua forma escalonada ou escalonada reduzida.

Para agir sistematicamente, inicia-se com a transformação da primeira coluna da matriz dos coeficientes, passando para a segunda coluna e assim por diante, até a última coluna da matriz.

Em cada coluna que contém um pivô, inicia-se transformando-o em "1". Depois anula-se os elementos abaixo (e acima no caso do escalonamento reduzido) da posição do pivô.

Os procedimentos mais usados para desenvolver o escalonamento são:

1) Para transformar o pivô em 1:
   - Permuta-se a linha do pivô com outra linha que esteja abaixo dela que tenha 1 na coluna do pivô;
   - Dividi-se a linha r do pivô a_{rs} por a_{rs}, ou seja: $L_r \leftarrow \frac{L_r}{a_{rs}}$

2) Para anular os elementos abaixo (ou acima) do pivô:

- Primeiramente supõe-se que o pivô a_{rs} seja 1, após deve-se substituir a linha Li do elemento que deseja-se anular a_{is} por $L_i - a_{is}L_s$, ou seja:

$$L_i \leftarrow L_i - a_{is}L_s.$$

- Se o pivô $a_{rs} \neq 1$, então $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} L_s$.

Exemplo 9: Resolva o sistema linear abaixo pelos métodos de "eliminação de Gauss" e de "redução de Gauss-Jordan"

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x + y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases} . \qquad (2.5.1.1)$$

Pelo método da Eliminação de Gauss temos:	**Pelo método da redução de Gauss-Jordan temos:**
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Pivô $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Pivô $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2/-5$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2/-5$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 - (-6)L_2 = L_3 + 6L_2$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3/-4$ Pivô	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3/-4$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \end{array}\right)$ Pivô	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $x = 2$ $y = -1$ $z = 3$
Solução: (2, -1, 3)	Solução: (2, -1, 3)

Quadro 2 - Execução dos métodos de Eliminação de Gauss e de Redução de Gauss-Jordan

Exemplo 10: Resolva o sistema linear abaixo pelo método de eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases} . \qquad (2.5.1.2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad (2.5.1.3)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{pivô} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \qquad (2.5.1.4)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (2.5.1.5)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ y + 2z + 3w = 6 \\ 0 = 1 \text{ (É um absurdo)} \end{cases} \qquad (2.5.1.6)$$

Por tanto este sistema não admite solução.

Exemplo11: Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases} . \qquad (2.5.1.7)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \qquad (2.5.1.8)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right)$$ Trocar L_2 por L_4 e vice-versa. (2.5.1.9)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) L_4/-4 \quad (2.5.1.10)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{array} \quad (2.5.1.11)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3/-5 \\ L_4/-5 \end{array} \quad (2.5.1.12)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) L_4 - L_3 \quad (2.5.1.13)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (2.5.1.14)$$

Variáveis lideres

$$\begin{cases} x + 2w = -5 \\ y - 3w = 2 \\ z - 2w = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = -5 - 2w \\ y = 2 + 3w \\ z = 3 + 2w \end{array} \quad (2.5.1.15)$$

Variável livre (pode receber qualquer valor).

Por exemplo:

w = 0 → Solução: (-5, 2, 3, 0)

w = 1 → Solução: (-7, 5, 5, 1)

w = 0 → Solução: (-3, -1, 1, -1)

Solução Geral: $\{(- 5 - 2w, 2 + 3w, 3 + 2w, w), \forall w \in R\}$.

Nesse caso, uma equação linear pode ser escrita como combinação linear das outras três. Observe:

$$\begin{cases} \text{(- equação1)} & -x - y - 2z + 5w = -3 \\ + \text{(+ equação2)} & 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ \text{(+ equação4)} & x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases} \qquad (2.5.1.16)$$

$$2x + y - z + 3w = -11 \text{ (equação 3)} \qquad (2.5.1.17)$$

Ou seja; Equação3 = -1 equação 1 + 1 equação 2 + 1 equação 4

Coeficiente da combinação linear

E o sistema linear original poderia ser substituído por:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases} . \qquad (2.5.1.18)$$

2.6 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Um sistema linear da forma (2.2.9) é dito homogêneo quando $b = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Sua notação matricial é Ax = 0.

A solução $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ desse sistema é chamada solução trivial.

Se existir uma solução onde nem todos os x_i são nulos, ela é dita não-trivial.

O sistema linear homogêneo é sempre possível, visto que ele admite pelo menos a solução trivial.

Exemplo12: Resolva o sistema linear abaixo.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x \quad\quad + w = 0 \\ x + 2y + z \quad = 0 \end{cases} . \tag{2.6.2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \tag{2.6.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Trocar } L_3 \text{ por } L_2 \text{ e vice-versa.} \tag{2.6.4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \tag{2.6.5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_x (-1) \tag{2.6.6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_1 + L_3 \tag{2.6.7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.6.8}$$

$$\begin{cases} x \quad + w = 0 \\ y \quad - w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} . \tag{2.6.9}$$

Sua solução geral é: (-*w*, *w*, -*w*, *w*).

Por exemplo, se w = 1 então a solução é: (-1, 1, -1, 1).

Exemplo 13: Encontre uma matriz 3x1 não nula *x* tal que A*x*=-1*x* onde A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Ax = - x \tag{2.6.10}$$

$$Ax + x = 0 \tag{2.6.11}$$

$$Ax + I_3x = 0 \tag{2.6.12}$$

$$(A + I_3)\, x = 0 \tag{2.6.13}$$

$$\left\{ 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \end{pmatrix} \quad . \tag{2.6.14}$$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ . \\ x_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \\ x_2 \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ = \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \tag{2.6.15}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 - x_3 \end{matrix} \tag{2.6.16}$$

Variável líder — Variáveis livres

Solução geral: (-x_2-x_3, x_2, x_3); (-x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3); x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1,0,1). Ou seja, a solução geral é formada por todas as combinações lineares de (-1, 1, 0) e (-1,0,1).

Este problema Ax =-1*x* é conhecido como "problema de autovalores"; ele aparece no Ensino Superior e está associado a diversos problemas de aplicação (KOLMAN, HILL, 1998)Nesse exemplo, λ= -1 é o autovalor e *x* é um autovetor associado a esse autovalor.

3 METODOLOGIA

Para esta investigação, foram desenvolvidas duas práticas didáticas relativas ao estudo de Sistemas Lineares, aplicadas em duas escolas diferentes da cidade de Santa Maria – RS. As pesquisas foram desenvolvidas em conjunto com a Professora Karine Faverzani Magnago.

O embasamento teórico para essas práticas vem de pesquisas em Resolução de Problemas, em especial nos trabalhos desenvolvidos pelas pesquisadoras Lourdes De La Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008).

Optou-se por adotar os passos sugeridos por essas autoras (apresentados na seção 2.1 desta monografia) por apresentarem riqueza de detalhes, clareza na elaboração, o que proporcionou o planejamento e a execução apropriados para as aplicações práticas.

A primeira pesquisa aborda duas metodologias de resolução de problemas de balanceamento de equações químicas e relata uma experiência de aplicação desses problemas em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Cilon Rosa composta por 32 alunos.

O balanceamento de equações químicas faz parte da componente curricular de química chamado de *estequiometria*, que trata das relações quantitativas existentes nas reações químicas e que possui grande importância para o trabalho experimental e teórico. A correta resolução dos problemas de balanceamento é de grande importância para o experimentalista, pois é através das relações molares entre os diferentes reagentes que o profissional vai decidir quanto de substância será utilizada em uma dada reação, evitando assim o desperdício de reagentes, garantindo que haja a quantidade justa de reagente no sistema.

Em química, é comum abordar o balanceamento de equações químicas pelo método da "tentativa e erro". Esse método é o mais popular entre estudantes de química que consiste em contabilizar os átomos de um determinado tipo presentes entre os reagentes e entre os produtos, e simultaneamente multiplicar o número de mols de moléculas que contenham aquele átomo específico (coeficiente estequiométrico) por um valor numérico tal que equilibre o número de átomos nos dois lados da equação química. Quando todos os tipos de átomos atingem o mesmo valor numérico nos dois lados da equação, costuma-se dizer que a equação está balanceada.

Esse método é o mais rápido e mais simples de utilizar quando as equações químicas envolvem poucas espécies químicas. Quando o número de espécies presentes à reação aumenta, ou quando as moléculas reagentes são formadas por íons poliatômicos, esse método de balanceamento começa a perder eficácia.

O uso da notação nas reações químicas, tal como proposto por Berzelius, permite dispensar um tratamento matemático às reações químicas. O método, doravante denominado "método algébrico", consiste em analisar a equação química "desbalanceada" e criar um sistema de equações lineares (uma para cada espécie química). A resolução deste sistema de equações segue as regras inerentes à área de álgebra linear, a qual é abordada no segundo ano do Ensino Médio.

Com esta pesquisa, quer-se apresentar as bases do método algébrico de balanceamento de equações químicas e relatar os resultados de uma aplicação do método em sala de aula e discutir brevemente sobre os resultados da aplicação.

Essa proposta metodológica é inspirada em livros-texto de Álgebra Linear para o Ensino Superior (ANTON; BUSBY, 2006; BOLDRINI, 1980; POOLE, 2004). Os conteúdos explorados (matemático e químico) fazem parte de disciplinas do Ensino Médio e, normalmente, são trabalhados isoladamente (GIOVANNI; BONJORNO, 2005; PAIVA, 1995; PERUZZO; CANTO, 2002; SANTOS; MÓL, 2005).

Já a segunda prática pedagógica consta da resolução de três problemas do cotidiano e foi aplicada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr. Walter Jobim em uma turma do nono ano.

A proposta metodológica usada neste trabalho é a mesma utilizada na primeira prática. Resumidamente, diversos grupos são formados em uma turma, o problema é distribuído entre os grupos e estimula-se a discussão e o trabalho nos grupos. O professor incentiva os estudantes a utilizar as técnicas já conhecidas por eles para a resolução dos problemas propostos. Após algum tempo, um representante de cada grupo registra no quadro as diferentes soluções encontradas. Discute-se, coletivamente, os resultados obtidos e as diferentes estratégias para a resolução do problema. Buscando-se um consenso, toda a turma elege o método mais eficiente para a obtenção do resultado correto. Na última etapa, o professor formaliza o conteúdo, dando todas as explicações teóricas necessárias.

4 PRIMEIRA PRÁTICA DIDÁTICA: BALANCEAMENTO DE REAÇÕES QUÍMICAS

Esta pesquisa foi realizada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Cilon Rosa composta por 32 alunos. Para melhor compreensão da prática desenvolvida, primeiramente, foi apresentados os problemas de balanceamento de equações químicas que foram propostos aos alunos de uma turma de terceiro ano, bem como a resolução dos mesmos pelo método algébrico (seção 4.1). Em seguida, na seção 4.2, são apresentados os resultados e as correspondentes discussões.

Cerca de14 duplas foram formados na turma, o restante ficou sozinho; os problemas foram distribuídos entre os grupos e estimulou-se a discussão e o trabalho nos grupos. O professor incentivou os estudantes a utilizarem as técnicas já conhecidas por eles para a resolução dos problemas propostos. Após algum tempo, um representante de cada grupo registrou no quadro as diferentes soluções encontradas. Discutiu-se, coletivamente, os resultados obtidos e as diferentes estratégias para a resolução do problema. Buscou-se um consenso, toda a turma elegeu o método mais eficiente para a obtenção do resultado correto. Na última etapa, o professor formalizou o conteúdo, dando todas as explicações teóricas necessárias.

Após os estudantes resolverem as duas questões, apresentou-se sucintamente o "método algébrico" de balanceamento de equações, usando as duas reações anteriores como exemplo.

A fim de testar a compreensão dos estudantes acerca do "método algébrico", uma terceira reação química desbalanceada foi sugerida aos estudantes, mas não foi exigido que os mesmos resolvessem essa terceira equação pelo método matemático.

4.1 PROBLEMAS SELECIONADOS

Na sequência, são apresentados os três problemas propostos à turma e a resolução por meio do método algébrico.

Questão 01 Determine as relações molares presentes na reação estequiométrica entre o decaóxido de tetrafósforo (P_4O_{10}) e a água (H_2O) que tem como produto o ácido fosfórico (H_3PO_4).

Do ponto de vista químico, para resolver esse problema, basta apresentar os números adequados que devem ser colocados nos espaços tracejados, tais que a reação esteja balanceada.

Do ponto de vista matemático, começamos explorando alguns conceitos químicos que embasarão o processo de resolução. Observe que nenhum átomo é produzido ou eliminado na reação apresentada. O que se tem, de fato, é uma "reorganização" dos átomos presentes nos reagentes, resultando nos produtos. Por consequência, a reação química pode ser compreendida como uma equação na qual as quantidades totais de cada átomo nos reagentes são preservadas nos produtos.

Inicia-se ajustando os coeficientes estequiométricos da seguinte reação química:

$$_____\ P_4O_{10} + _____\ H_2O \rightarrow _____\ H_3PO_4. \qquad (4.1.1)$$

Escolhe-se as variáveis que representarão cada uma das quantidades procuradas (representadas pelos espaços linhas na reação química). Optou-se por *x*, *y* e *z* para representarem as quantidades, em mols, de P_4O_{10}, H_2O e H_3PO_4, respectivamente. Ou seja:

$$__x__\ P_4O_{10} + __y__\ H_2O \rightarrow __z__\ H_3PO_4. \qquad (4.1.2)$$

Os três átomos presentes nessa reação são fósforo (P), oxigênio (O) e hidrogênio (H). Para cada um deles, teremos uma equação que representa a preservação da sua quantidade total.

O procedimento para dedução das equações para os átomos P, O e H, estão esquematizados nas figuras 3, 4 e 5, respectivamente.

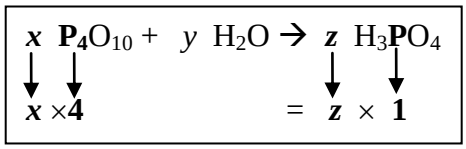


Figura 3- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de P na reação.

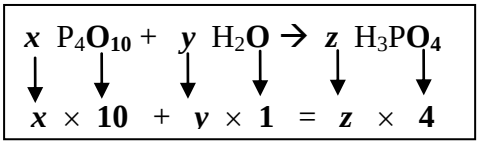


Figura 4- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de O na reação.

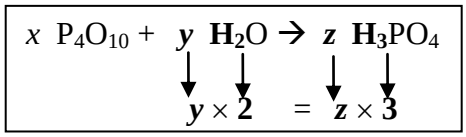


Figura 5- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de H na reação.

Observando as equações obtidas nas figuras 3, 4 e 5, montou-se o sistema linear Homogêneo:

$$\begin{cases} 4x \quad - z = 0 \\ 10x + y - 4z = 0 \\ \quad 2y - 3z = 0 \end{cases} . \tag{4.1.3}$$

Nesse caso, a matriz dos coeficientes é quadrada. Essa característica vem do fato que o número de reagentes e produtos é igual ao número de átomos presentes na reação química considerada.

Para investigar as soluções do sistema linear (4.1.3), trabalha-se com o sistema linear equivalente:

$$\begin{cases} 4x \quad - z = 0 \\ \quad 2y - 3z = 0 \end{cases} . \tag{4.1.4}$$

obtido via Eliminação de Gauss. Considerando x uma variável livre, e resolvendo o Sistema Linear (4.1.4) por substituição direta, obtém-se:

(4.1.5)

$$y = 6x,\ z = 4x \quad .$$

Como x pode assumir qualquer valor real, o sistema linear (4.1.4) admite infinitas soluções, o que era esperado.

Se $x = 0$ nas equações (4.1.5), temos novamente a solução trivial:

$$x = y = z = 0, \tag{4.1.6}$$

que é quimicamente desinteressante.

Se $x = 1$ nas equações (4.1.5), evitamos frações nos coeficientes da reação, resultando em:

$$x = 1,\ y = 6,\ z = 4; \tag{4.1.7}$$

e a reação química fica:

$$__1__\ P_4O_{10} + __6__\ H_2O \rightarrow __4__\ H_3PO_4. \qquad (4.1.8)$$

Questão 02 Determine as relações molares presentes na reação estequiométrica entre o ácido clorídrico (HCl) e o ácido perclórico ($HClO_3$) que tem como produtos o dióxido de monocloro (ClO_2) e a água (H_2O). Esse problema equivale a ajustar os coeficientes estequiométricos da seguinte reação química:

$$____\ HCl + ____\ HClO_3 \rightarrow ____\ ClO_2 + ____\ H_2O \qquad (4.1.9)$$

Essa reação é um típico exemplo de reação de oxirredução e que envolve, além do cálculo tradicional de balanceamento de átomos, o cálculo dos números de oxidação de cada átomo da reação. Cada um dos dois requisitos necessários para a resolução do problema representa um desafio por si só para o estudante, de forma que esse problema é considerado difícil. Caso opte-se por balancear apenas pelo método da tentativa e erro, tem-se que lidar com dois reagentes diferentes que compartilham o mesmo tipo de átomo (cloro) e, depois de ocorrida a reação, apenas um dos produtos contém todos os átomos de cloro inicialmente presentes no meio reacional. O oposto dá-se com os átomos de oxigênio, tornando o problema ainda mais complexo.

Inicialmente é necessário escolher as variáveis que representarão cada uma das quantidades procuradas. Usaremos *x*, *y*, *z* e *w* para representarem as quantidades, em mols, de HCl, $HClO_3$, ClO_2 e H_2O, respectivamente. Ou seja:

$$__x__\ HCl + __y__\ HClO_3 \rightarrow __z__\ ClO_2 + __w__\ H_2O. \qquad (4.1.10)$$

Os três átomos presentes nessa reação são hidrogênio (H), cloro (Cl) e oxigênio (O). Para cada um deles, tem-se uma equação que representa a preservação da sua quantidade total.

Para o átomo H, esquematizamos a obtenção da correspondente equação na figura 6.

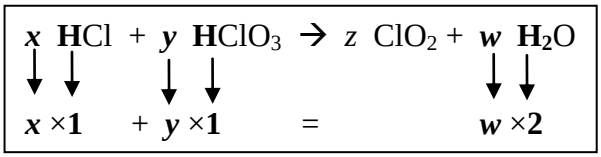


Figura 6- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de H na reação.

Daí, escrevendo a equação para o átomo H na forma padrão, com todas as variáveis do lado esquerdo, obtém-se:

$$x + y - 2w = 0. \qquad (4.1.11)$$

Analogamente, obtém-se as equações para os átomos Cl e O, esquematizadas nas figuras 7 e 8, respectivamente.

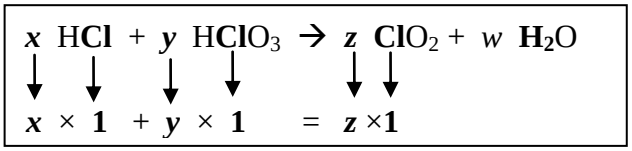


Figura 7- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de Cl na reação.

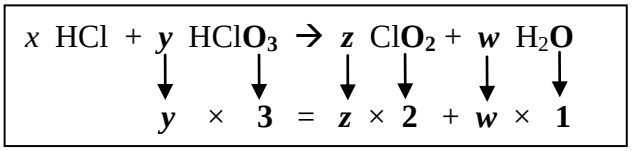


Figura 8- Esquema para obtenção da equação que representa a preservação da quantidade total de O na reação.

Daí, a equação para o átomo Cl é:

$$x + y - z = 0 \qquad (4.1.12)$$

e para o átomo O é:

$$3y - 2z - w = 0. \qquad (4.1.13)$$

Como as equações (4.1.11), (4.1.12) e (4.1.13) devem ser satisfeitas, o problema equivale a resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y - 2w = 0. \\ x + y - z = 0\ . \\ 3y - 2z - w = 0 \end{cases} \qquad (4.1.14)$$

Uma característica do sistema linear (4.1.14) é que ele é homogêneo, ou seja, possui todos os termos independentes iguais a zero. Alguns autores (GIOVANNI; BONJORNO, 2005; PAIVA, 1995; KOLMAN; HILL, 1998) dedicam uma seção de suas obras para esse tipo de sistema linear, mas destacam os aspectos puramente algébricos, sem fazer qualquer associação a um problema a ser modelado.

Outra característica do sistema linear (4.1.14) é que sua matriz dos coeficientes, na correspondente forma matricial, não é quadrada; nesse exemplo, isso corresponde ao fato que o número de incógnitas é maior que o número de equações. Já do ponto de vista químico, isso acontece quando o número de reagentes e produtos é superior ao de átomos presentes na reação.

Essa característica, destacada no parágrafo anterior, torna-se especialmente interessante porque alguns estudantes apresentam mais dificuldade em lidar com esse tipo de sistema linear do que com aqueles que têm matriz dos coeficientes quadrada. O fato de obter um sistema linear como o apresentado em (4.1.14), a partir de um problema concreto, ameniza qualquer impressão de que sistemas lineares "não-quadrados" possuem uma estrutura artificial, que corresponde somente a uma abstração matemática.

Para investigar-se a solução (ou soluções) do sistema linear (4.1.14), trabalha-se com o Sistema Linear equivalente:

$$\begin{cases} x + y \quad - 2w = 0 \\ \quad 3y - 2z - w = 0 \\ \quad\quad - z + 2w = 0 \end{cases} . \tag{4.1.15}$$

obtido aplicando o Método de Eliminação de Gauss. Considerando w uma variável livre, e resolvendo o Sistema Linear (4.1.15) por retro-substituição, obtém-se:

$$x = \frac{w}{3}, y = \frac{5w}{3}, z = 2w. \tag{4.1.16}$$

Como w pode assumir qualquer valor real, as equações apresentadas em (4.1.16) implicam que o sistema linear (4.1.14) possui infinitas soluções. Quimicamente, esse resultado era esperado porque, conhecida uma quantidade qualquer de um produto (ou reagente), os demais produtos e reagentes ficam ajustados nas proporções correspondentes. Ainda, soluções com valores negativos são desqualificadas para esse problema.

Em particular, se $w = 0$ nas equações (4.1.16), temos a solução trivial:

$$x = y = z = w = 0. \tag{4.1.17}$$

No problema químico, essa solução não é interessante porque ela significa que se não se tiver nenhum reagente, não se terá nenhum produto.

Por outro lado, se $w = 3$ nas equações (4.1.16) menor inteiro positivo que não introduz fração no ajuste dos coeficientes da reação –, então:

$$x = 1,\ y = 5,\ z = 6,\ w = 3; \tag{4.1.18}$$

e a reação química fica:

$$_1_\ HCl + _5_\ HClO_3 \rightarrow _6_\ ClO_2 + _3_\ H_2O. \tag{4.1.19}$$

Questão 03 Determine as relações molares presentes na reação estequiométrica entre o nitrato de chumbo $Pb(NO_3)_2$ e o fosfato de sódio Na_3PO_4 que resulta em fosfato de chumbo e o nitrato de sódio. Esse problema equivale a ajustar os coeficientes estequiométricos da seguinte reação química:

$$____\ Pb(NO_3)_2 + ____\ Na_3PO_4 \rightarrow ____\ Pb_3(PO_4)_2 + ____\ NaNO_3 \tag{4.1.20}$$

Optou-se por x, y, z e w para representarem as quantidades, em mols, de Pb, (NO_3), Na, (PO_4), respectivamente. Daí, a equação fica:

$$_x_\ Pb(NO_3)_2 + _y_\ Na_3PO_4 \rightarrow _z_\ Pb_3(PO_4)_2 + _w_\ NaNO_3 \tag{4.1.21}$$

Analogamente, obtêm-se as equações para as espécies químicas indicadas:

$$\text{(quantidade de chumbo) Pb : } x = 3z\ , \tag{4.1.22}$$

$$\text{(quantidade de nitrato) } (NO_3) : 2x = w\ , \tag{4.1.23}$$

$$\text{(quantidade de sódio) Na: } 3y = w\ , \tag{4.1.24}$$

$$\text{(quantidade de fósforo inorgânico) } (PO_4): y = 2z\ . \tag{4.1.25}$$

Organizando as equações, obtemos o Sistema Linear correspondente;

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x - w = 0 \\ 3y - w = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \tag{4.1.26}$$

Se z é considerada a variável livre, obtém-se:

$$x = 3z,\ y = 2z,\ w = 6z. \tag{4.1.27}$$

Se $z = 1$, então:

$$x = 3,\ y = 2,\ z = 1 \text{ e } w = 6 \tag{4.1.28}$$

Daí, a equação química ajustada é :

$$\underline{\ 3\ }\ Pb(NO_3)_2 + \underline{\ 2\ }\ Na_3PO_4 \rightarrow \underline{\ 1\ }\ Pb_3(PO_4)_2 + \underline{\ 6\ }\ NaNO_3 \quad (4.1.29)$$

4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PRÁTICA PEDAGÓGICA 1

Os resultados da aplicação estão resumidos a seguir, na tabela 4.

Tabela 4: Resultados da resolução de problemas de balanceamento de reações químicas

Questão	Em branco/%	Responderam Incorretamente/%	Responderam Corretamente/%
1	2/6,25%	2/6,25%	28/87,5%
2	-	12/37,5%	20/62,5%
3	-	19/59,4%	13/40,6%

É interessante observar que a primeira equação química teve um percentual de acertos elevado, o que era esperado para uma reação simples como essa. A segunda reação química, considerada mais difícil teve um percentual de acertos ligeiramente menor, o que também era esperado. O tempo de resolução fornecido para cada questão foi o mesmo e os estudantes esgotaram todo o tempo disponível para essa segunda reação, o que não ocorreu com a primeira equação química. A terceira questão, consideravelmente mais complexa devido ao número de átomos envolvidos e devido à natureza dos íons moleculares presentes à reação, exigiu um pouco mais de atenção por parte dos estudantes. Antes da resolução do problema 3, uma intervenção foi realizada pelo professor de Química participante da aplicação; Foi informado aos estudantes que, dada a natureza dessa reação de precipitação, os íons nitrato (NO_3^-) e fosfato (PO_4^{3-}) permanecem inalterados, e podem ser equacionados como se fossem uma "espécie".

Matematicamente isso significa que se pode gerar uma equação para os dois íons como se eles fossem apenas um átomo. Isso facilita em muito a tarefa de elaboração do sistema de equações lineares. Dos 32 participantes dessa aplicação, apenas 40,6% obtiveram uma resposta correta, uma taxa de acertos que pode ser considerada baixa. Mas é importante salientar que 19 deles utilizaram ou tentaram utilizar o método algébrico, isso corresponde a um percentual de 59,4%. Dessa forma, pode-se dizer que a experiência foi um sucesso, pois

mais de metade da turma optou por tentar resolver a questão usando esse método que, para a maioria deles, era inédito.

5 SEGUNDA PRÁTICA PEDAGÓGICA: PROBLEMAS DO COTIDIANO

Essa prática foi aplicada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr.Walter Jobim em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental composta por 12 alunos. Teve-se por objetivo averiguar as facilidades e/ou dificuldades que os discentes podem encontrar ao resolver, por meio de sistemas lineares, problemas matemáticos envolvendo questões do seu cotidiano. O tempo disponível para a aplicação foi de 2 horas-aula.

Foram propostos três problemas que, após interpretação, recaiam em Sistemas Lineares. Esses problemas e suas resoluções são apresentados na seção 5.1. Eles foram desenvolvidos e ordenados de forma que o primeiro seja possível e determinado, o segundo seja possível e indeterminado e o terceiro seja impossível.

A análise dos resultados e as discussões serão apresentadas na seção 5.2.

5.1 PROBLEMAS SELECIONADOS

Na sequência, serão apresentados os três problemas propostos à turma e suas respectivas resoluções por meio do método algébrico.

Questão 01 Os amigos Paulo e Vitória foram à lanchonete. Paulo gastou 11 reais e 50 centavos com 4 cachorros-quentes e 2 copos de refrigerante; já sua amiga Vitória, gastou 7 reais e 30 centavos com 2 cachorros-quente e 2 copos de refrigerante. Ao saírem da lanchonete Paulo e Vitória verificaram em suas notas ficais que a atendente não anotou o preço da unidade do cachorro-quente e de cada copo de refrigerante. Com isso resolveram fazer as contas juntos para descobrirem os valores de cada unidade. As notas fiscais, de Paulo e a de Vitória estão representadas pelas figuras 9 e 10 abaixo respectivamente.

Quant.	Discriminação das Mercadorias	P. Unit.	TOTAL
4	cachorros-quentes		
2	copos de refrigerante		

Valor Total da Nota R$ 11,50

Figura 9- Nota fiscal do Paulo

Quant.	Discriminação das Mercadorias	P. Unit.	TOTAL
2	cachorros-quentes		
2	copos de refrigerante		
	Valor Total da Nota R$		7,30

Figura 10- Nota fiscal da Vitória

Paulo e Vitória resolveram desenvolver a conta da seguinte Maneira: Substituíram cada quantidade de cachorro-quente pela variável *x* e de cada copo de refrigerante por *y* para pode-se resolver, obtendo-se:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 11{,}50 \text{ .} & (5.1.1) \\ 2x + 2y = 7{,}30 \text{ (-2)} & (5.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 11{,}50 & (5.1.3) \\ -4x - 4y = -14{,}60 & (5.1.4) \end{cases}$$

$$-2y = -3{,}10 \quad (5.1.5)$$

$$y = \frac{-3{,}10}{-2} \quad (5.1.6)$$

$$y = 1{,}55 \quad (5.1.7)$$

Substituíram o valor de *y* na equação na equação (5.1.1) e encontraram o valor de *x*:

$$4x + 2y = 11{,}50 \quad (5.1.8)$$

$$4x + 2(\ 1{,}55) = 11{,}50 \quad (5.1.9)$$

$$4x + 3{,}10 = 11{,}50 \quad (5.1.10)$$

$$4x = 11{,}50\text{-}3{,}10 \quad (5.1.11)$$

$$4x = 8{,}40 \quad (5.1.12)$$

$$x = \frac{840}{4} \quad (5.1.13)$$

$$x = 2{,}10 \quad (5.1.14)$$

Concluíram que o valor de cada cachorro quente é de R$ 2,10 e cada refrigerante é de R$ 1,55.

Portanto, tem-se um sistema possível e determinado.

Questão 02 Sandro foi ao supermercado comprar cachorros-quentes, refrigerantes e um bolo. Porém o mercado oferecia 2 *KITS* (representados abaixo pelas figuras 10 e 11), para aniversário, conforme ilustração abaixo. Com essas informações você saberia dizer o valor de cada refrigerante, de cada cachorro-quente e o valor do bolo?

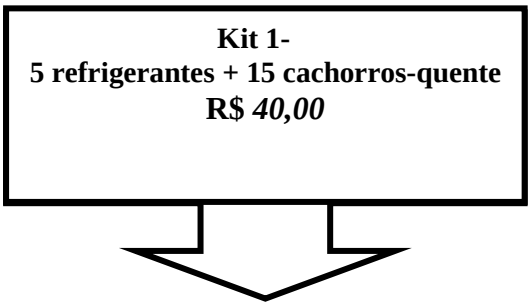


Figura 10 - Kit 1

Figura 11 - Kit 2

Substituindo a quantidade de cada refrigerante, cada cachorro–quente e de cada bolo pelas variáveis x, y e z respectivamente.

Uma solução para este problema é:

$$\begin{cases} 5x + 15y = 40{,}00 & (5.1.15) \\ 10x + 10y + z = 80{,}00 & (5.1.16) \end{cases}$$

Como o número de variáveis é maior do que o número de equações, ou seja, quando temos informações a mais do que o necessário, pode-se dizer que este é um sistema possível, porém indeterminado.

Questão 03 Na papelaria, Vitória e Stefani gastaram R$ 5,00 com dois lápis e um bloco de notas. Mais tarde, voltaram à papelaria e compraram seis lápis e três blocos de notas, gastando R$ 10,00. Qual o preço de cada lápis e cada bloco de notas?

Substituindo a quantidade de lápis e de bloco de notas pelas variáveis x e y respectivamente.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \quad . & (5.1.17) \\ 6x + 3y = 10 & (5.1.18) \end{cases}$$

Isolando-se y na primeira equação obtêm-se:

$$2x + y = 5 \qquad (5.1.19)$$

$$y = (5 - 2x) \quad (5.1.20)$$

Substituindo-se *y* na equação anterior:

$$6x + 3y = 10 \quad (5.1.21)$$

$$6x + 3(5 - 2y) = 10 \quad (5.1.22)$$

$$6x + 15 - 6x = 10 \quad (5.1.23)$$

$$0x = 10 – 15 \quad (5.1.24)$$

$$0x = -5 \quad (5.1.28)$$

Vê-se que não existe o valor do lápis , nesse caso representado pela variável *x*, que satisfaça a equação (5.1.28), por tanto já pode-se concluir que é um sistema impossível.

5.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PRÁTICA PEDAGÓGICA 2

Durante a aplicação, distribuiu-se cada uma das questões e deixou-se que os alunos desenvolvessem segundo a metodologia de resolução de problemas revisada na seção 3; depois de um certo tempo averiguou-se sobre o andamento e observou-se que muito pouco havia sido feito. Alguns alunos nem conseguiram identificar que aqueles problemas teriam que ser resolvidos através de sistemas lineares; outros identificaram (com algum auxílio), porém não conseguiam transpor da linguagem usual para a simbólica. Como houve uma geral dificuldade de resolução, optou-se por uma intervenção enérgica por parte dos pesquisadores, ajudando os estudantes em praticamente todas as etapas da resolução.

Essa acentuada dificuldade dos alunos contraria as expectativas dos pesquisadores; foram necessárias várias adequações durante a aplicação como ampliação do tempo previsto para a resolução para cada questão, o modo de ajudar os alunos em suas dificuldades, e a maneira de como realizar esta pesquisa.

Embora realizada com base na proposta descrita por Lourdes De La Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato sobre resolução de problemas, o que, facilita a montagem e a execução da prática, a imensa dificuldade dos alunos em interpretar a questão, saber o que estava sendo pedido e passar da linguagem usual para a simbólica, e na sequência de desenvolvimento usar seus conhecimentos matemáticos para a obtenção do resultado, fez com que todos esses acontecimentos impedissem para montagem de um quadro demonstrativo das dificuldades sobre cada uma das questões apresentadas. Antes de cada uma das resoluções dos problemas, fez-se uma intervenção não prevista para esclarecer como resolve-lo.

Dos 12 participantes dessa aplicação, nenhum deles resolveu sozinho as questões; todas elas foram esclarecidas e juntamente desenvolvida com o professor. Cerca de 25% depois do professor ter montando juntamente com o aluno, conseguiram realizar os cálculos, o restante somente ficou entre os alunos que não fizeram nada e os que ficaram somente esperando o resultado.

Os resultados da aplicação quanto a avaliação da prática estão resumidos a seguir, no quadro 3 a seguir .

	Nenhum	**Pouco**	**Indiferente**	**Muito**	**Muitíssimo elevado**
Questão 1 Interesse despertado pela metodologia desenvolvida.		1	4	6	1
Questão 2 Utilidade do uso de sistemas lineares para resolver problemas cotidianos.		1	4	5	2
Questão 3 Clareza na linguagem escrita e falada utilizada no desenvolvimento da pesquisa.			2	7	3

Quadro 3 - Resultados da aplicação quanto a avaliação da pesquisa estão resumidos a seguir, na tabela .

Após análise do quadro, vê-se que para 41,6% dos estudantes a pesquisa foi indiferente, ou não tiveram o interesse despertado para utilizarem em resolver problemas de seu cotidiano; já para 58,4% o interesse foi muito ou muito grande.

Alguns relataram que, a partir do dia da pesquisa, acreditavam que iriam utilizar sistemas lineares em problemas de seus cotidianos. Para 83,3% a clareza na linguagem foi considerada muito e muito elevada, mas para 16,7% a clareza na linguagem não fez diferença.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta monografia foi desenvolvida com a intenção de averiguar o nível de dificuldade que estudantes de Ensino Fundamental e Médio estão tendo com a questão de relacionar as interpretações de problemas matemáticos (neste caso envolvendo o conteúdo de sistemas lineares) com a linguagem dos números, a linguagem simbólica e as suas dificuldades em resolvê-los.

Cabe destacar que houve dificuldades em conseguir espaço nas escolas para aplicação das práticas, especialmente na segunda pesquisa. Também, o número de horas-aula disponibilizadas para as práticas foi inferior as desejadas, o que restringiu as atividades planejadas.

No final do ano de 2008, começou-se a procurar escolas, depois de um certo tempo uma escola do ensino médio da cidade recebeu a proposta do projeto, onde o diretor comentou com os professores responsáveis que a pesquisa era para ser realizada na escola por o projeto ser de qualidade e pela autora já ter sido aluna, porém os professores não deram resposta definitivas, o que fez com que o trabalho começasse a atrasar já que ficou-se aguardando retorno, pois somente os professores teriam que escolher qual turma a ser aplicada a pesquisa.

Durante o desenvolvimento da primeira prática houve certa dificuldade ao conseguir uma escola para o desenvolvimento da mesma, mas quando encontrou-se, a recepção foi boa. Após algumas tentativas nas escolas, no início de 2010 conseguiu-se realizar a primeira pesquisa na Escola Estadual Cilon Rosa que disponibilizou dois períodos do conteúdo de química para a nossa pesquisa, que foi um tempo menor do que gostaríamos mas foi suficiente, pois os alunos foram extremamente participativos e colaboraram muito.

O caminho foi longo até conseguir-se desenvolver a segunda prática, já que a dificuldade foi bem maior de conseguir uma escola, o que causou um certo desânimo para finalizar a monografia.

No inicio de 2010 a segunda prática pode ser realizada, a escola onde realizou-se a prática foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr.Walter Jobim que disponibilizou o tempo de duas horas aulas. Devido as dificuldade que os alunos tiveram em interpretar a questão, saber o que o problema estava pedindo e passar da linguagem usual para a simbólica, e consequentemente usar seus conhecimentos matemáticos para a obtenção do resultado, fez com que todos esses acontecimentos causassem um bloqueio na conclusão da monografia. Fiquei alguns dias somente pensando como iria colocar em palavras e números

como havia sido a segunda prática. Após este acontecimento conseguiu-se chegar ao final do desenvolvimento deste trabalho.

Durante a realização, pode-se perceber uma grande diferença de nível na qualidade de ensino entre as escolas estaduais, e que existe também uma diversidade na atenção que os estudantes proporcionam ao conteúdo transmitido pelo professor.

Após desenvolvidas as pesquisas e analisado os resultados de ambas, chegou-se a conclusão de que grande parte dos estudantes possuem dificuldade no desenvolvimento dos problemas por terem lacunas em interpretar as solicitações e transpor os conhecimentos adquiridos da linguagem usual para a simbólica. Isso faz com que fiquem complexos alguns conteúdos matemáticos e que a disciplina seja entendida como um dos entraves na educação dos alunos.

Mesmo com muitos acontecimentos no decorrer da montagem, este trabalho foi gratificante e não menos prazeroso**,** contribuiu muito para a autora no enfrentamento dos grandes desafios presentes em nossas salas de aulas.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea**, Porto Alegre: Bookman, 2006.

BLANCO NIETO, L. J. **Consideraciones elementales sobre la solución de problemas.** Badajoz: Universitas Editorial, 1993.

BOLDRINI, J. L; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda., 1980.

BRASIL, MEC.SEF. **Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio**, 2000.

BROSSEAU. Guy. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Guy_Brousseau Acesso em: 31 de ago. 2010.

CARRAHER, T. N. (Org). **Aprender pensando**. 16 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. Ática. São Paulo, 2004.

DANTE, Luis Roberto**. Matemática**. 1 edição, ed. Ática. São Paulo, 2005.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ubiratan_D%27Ambr%C3%B3sio> Acesso em: 31 de ago. 2010.

FELISBERTO, K G.; LOPES, C. F. **Leitura e Escrita na Resolução de Problemas Matemáticos.** Disponível em: <http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss05_04.pdf>. Acesso em : 31 de ago. 2010.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** v. 2. 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. Introducção à Algebra Linear com aplicações. 6 ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1998.

KRULIK, S. & REYS. R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Trad. H. H. Domingues e O. Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

MARCONI, M.A.; LAKATOS, E.M. **Técnicas de pesquisa**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1990.

NEVES, L.S., FARIAS, R.F. **História da Química**: *um livro-texto para a graduação*. 2 ed. Campinas: Editora Átomo, 2008.

ONUCHIC, L.D.L.R.; N. B. Célia In: **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**. Disponivel em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/nunes_cb_dr_rcla.pdf> Acesso em : 31 de ago. 2010.

PAIVA, M. R. **Matemática.** v. 2. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1995.

PERUZZO, F. M.; CANTO, E. L. **Química: na abordagem do cotidiano.** Volume único. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2002.

POLYA, George**. A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POOLE, D. **Álgebra Linear.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SANTOS, W. L. P.; MÓL, G. S. **Química e Sociedade.** PEQUIS – Projeto de Ensino de Química e Sociedade. 1. ed. São Paulo: Editora Nova Geração, 2005.

8 ANEXOS

8.1 ANEXO A – Questão 01

REAÇÕES QUÍMICAS: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

PESQUISADORES:

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Márcio Marques Martins, Centro Universitário Franciscano

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 01 Ajuste os coeficientes estequiométricos da reação química:

$$_\ _\ _\ _\ P_4O_{10} + _\ _\ _\ _\ H_2O \rightarrow _\ _\ _\ _\ H_3PO_4.$$

8.2 **ANEXO B** – Questão 02

REAÇÕES QUÍMICAS: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

PESQUISADORES:

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Márcio Marques Martins, Centro Universitário Franciscano

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 02 Ajuste os coeficientes estequiométricos da seguinte reação química:

$$_\ _\ _\ _\ HCl + _\ _\ _\ _\ HClO_3 \rightarrow _\ _\ _\ _\ ClO_2 + _\ _\ _\ _\ H_2O.$$

8.3 **ANEXO C** – Questão 03

REAÇÕES QUÍMICAS: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

PESQUISADORES:

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Márcio Marques Martins, Centro Universitário Franciscano

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 03 Ajuste os coeficientes estequiométricos da seguinte reação química:

$$_\ _\ _\ _\ Pb(NO_3)_2 + _\ _\ _\ _\ Na_3PO_4 \rightarrow _\ _\ _\ _\ Pb_3(PO_4)_2 + _\ _\ _\ NaNO_3$$

8.4 ANEXO D – Avaliação da Prática

REAÇÕES QUÍMICAS: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

PESQUISADORES:

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Márcio Marques Martins, Centro Universitário Franciscano

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

AVALIAÇÃO DA PRÁTICA:

Na sua opinião, escolha a opção que melhor avalia as atividades desenvolvidas nessa pesquisa, nos seguintes itens.

1. Interesse despertado pela metodologia desenvolvida:

( ) Nenhum ( ) Pouco ( ) Indiferente ( ) Muito ( ) Muitíssimo elevado

2. Esclarecimento sobre a interdisciplinaridade do tema do projeto, que pode envolver conteúdos de Matemática e Química:

( ) Nenhum ( ) Pouco ( ) Indiferente ( ) Muito ( ) Muitíssimo elevado

3. Utilidade do uso de Sistemas Lineares para resolver problemas de balanceamento de equações químicas em situações futuras, como em vestibulares e no ENEM:

( ) Nenhuma ( ) Pouca ( ) Indiferente ( ) Muita ( ) Muitíssima elevada

4. Clareza na linguagem escrita e falada utilizada no desenvolvimento da pesquisa:

( ) Nenhuma ( ) Pouca ( ) Indiferente ( ) Muita ( ) Muitíssima elevada

Use esse espaço para fazer observações, críticas e sugestões que considere importantes. _____

_____

_____

_____

8.5 ANEXO E – Questão 01

SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PESQUISADORES:

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 01 Os amigos Paulo e Vitória foram na lanchonete. Paulo gastou 11 reais e 50 centavos com 4 cachorros-quente e 2 copos de refrigerante; já sua amiga Vitória, gastou 7 reais e 30 centavos com 2 cachorros-quente e 2 copos de refrigerante. Qual é o preço de cada cachorro-quente e cada copo de refrigerante?

8.6 ANEXO F – Questão 02

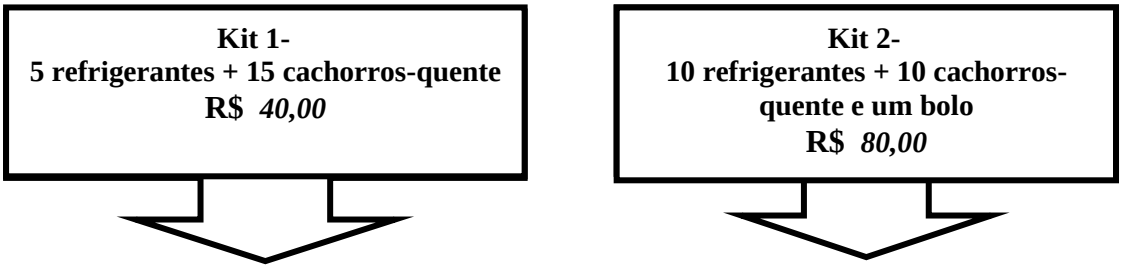
SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PESQUISADORES:

Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 03 Sandro foi ao supermercado para comprar cachorros-quente, refrigerantes e um bolo. Porém o mercado oferecia 2 *KITS* para aniversário, conforme ilustração abaixo. Com essas informações você saberia dizer o valor de cada refrigerante, de cada cachorro-quente e do bolo?



8.7 ANEXO G – Questão 03

SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PESQUISADORES:
Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria
Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria

Questão 02 Na papelaria, Vitória e Stefani gastaram R$ 5,00 com dois lápis e um bloco de notas. Mais tarde, voltaram à papelaria e compraram seis lápis e três blocos de notas, gastando R$ 10,00. Qual o preço de cada lápis e cada bloco de notas?

8.8 ANEXO H – Avaliação da prática

SISTEMAS LINEARES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PESQUISADORES:
Karine Faverzani Magnago, Universidade Federal de Santa Maria
Daniele Della Méa da Silva, Universidade Federal de Santa Maria

AVALIAÇÃO DA PRÁTICA:

Na sua opinião, escolha a opção que melhor avalia as atividades desenvolvidas nessa pesquisa, nos seguintes itens.

1. Interesse despertado pela metodologia desenvolvida:

( ) Nenhum ( ) Pouco ( ) Indiferente ( ) Muito ( ) Muitíssimo elevado

2. Utilidade do uso de Sistemas Lineares para resolver problemas cotidianos:

( ) Nenhuma ( ) Pouca ( ) Indiferente ( ) Muita ( ) Muitíssima elevada

3. Clareza na linguagem escrita e falada utilizada no desenvolvimento da pesquisa:

( ) Nenhuma ( ) Pouca ( ) Indiferente ( ) Muita ( ) Muitíssima elevada

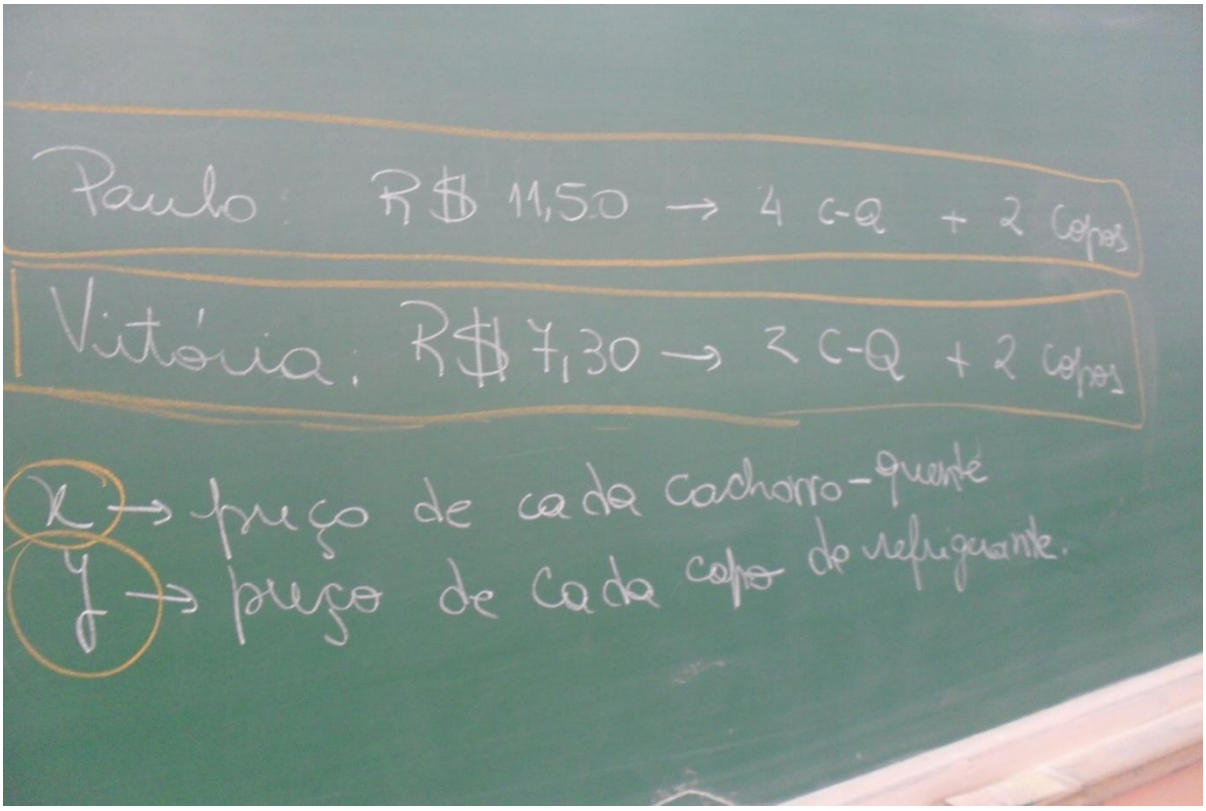
Use esse espaço para fazer observações, críticas e sugestões que considere importantes. _____

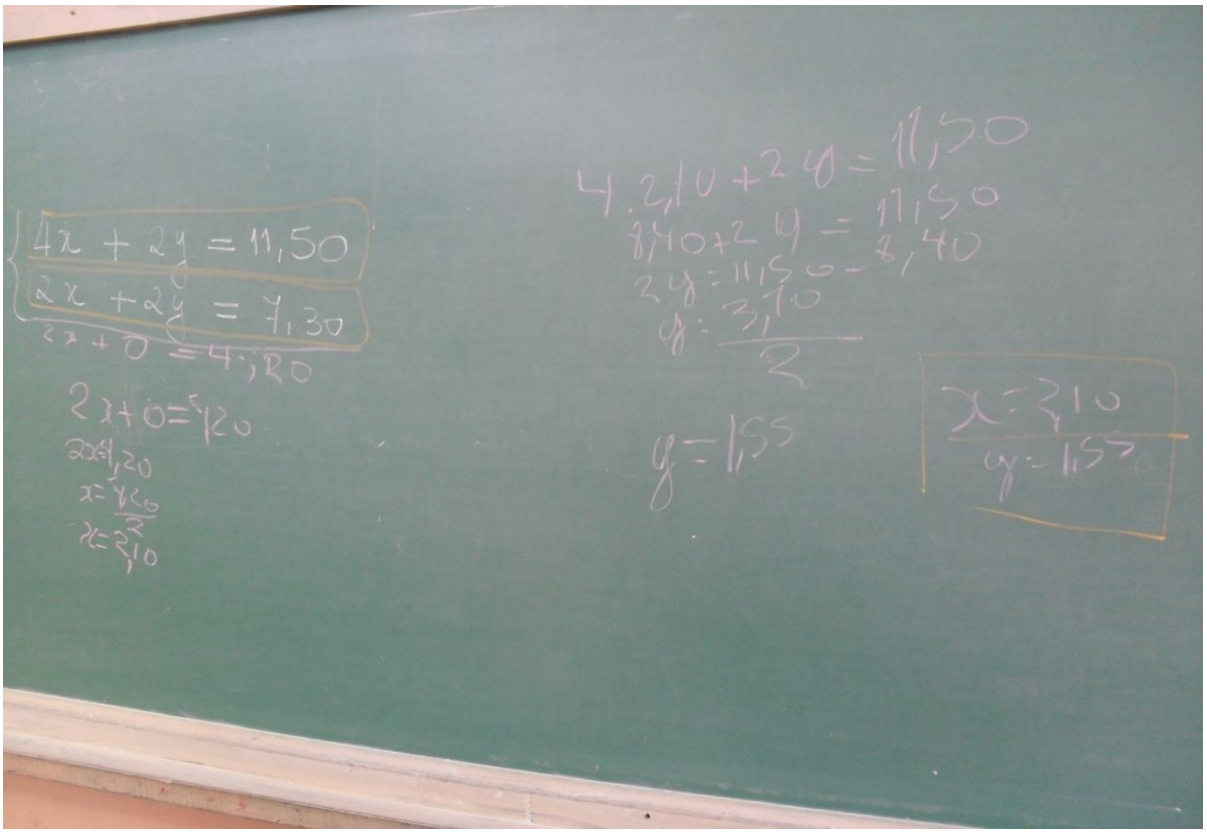
_____

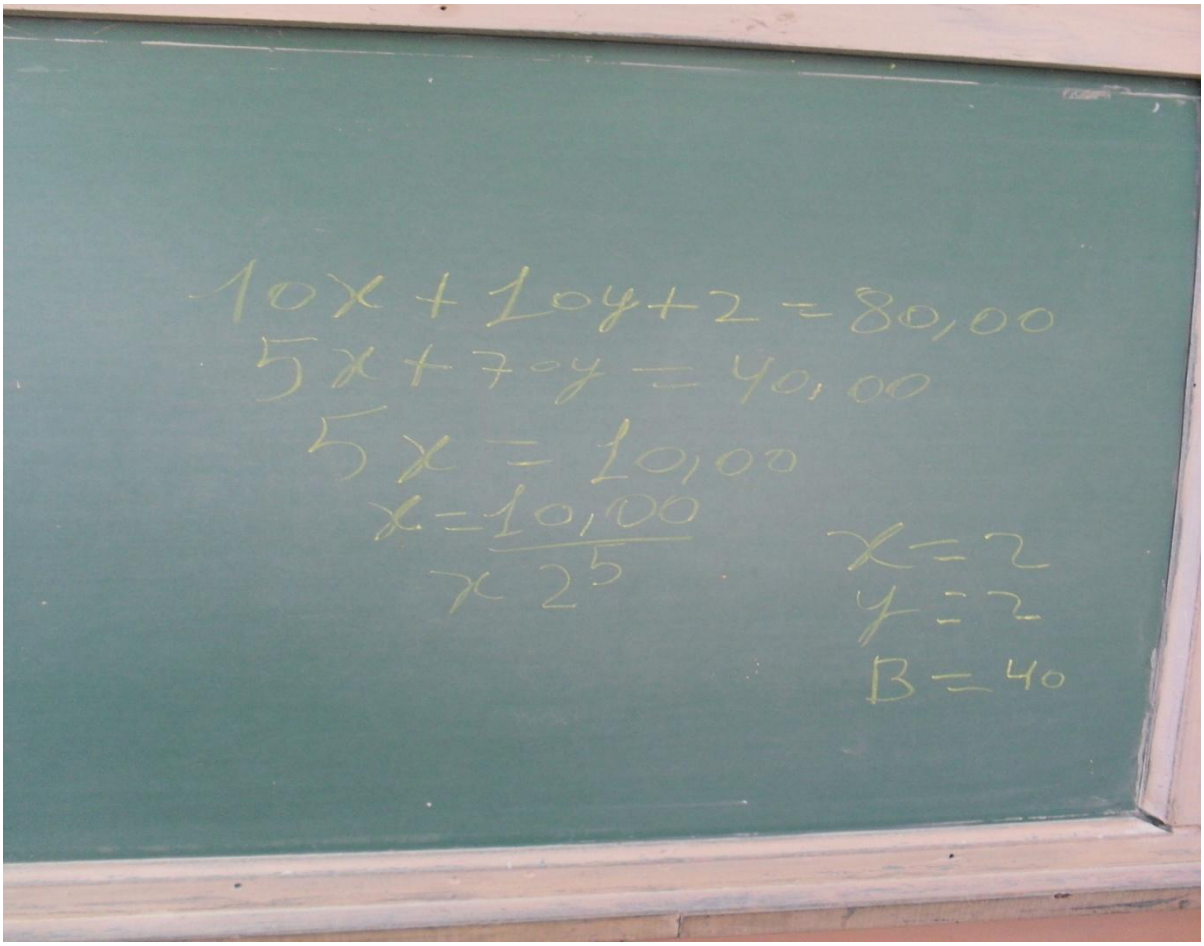
_____

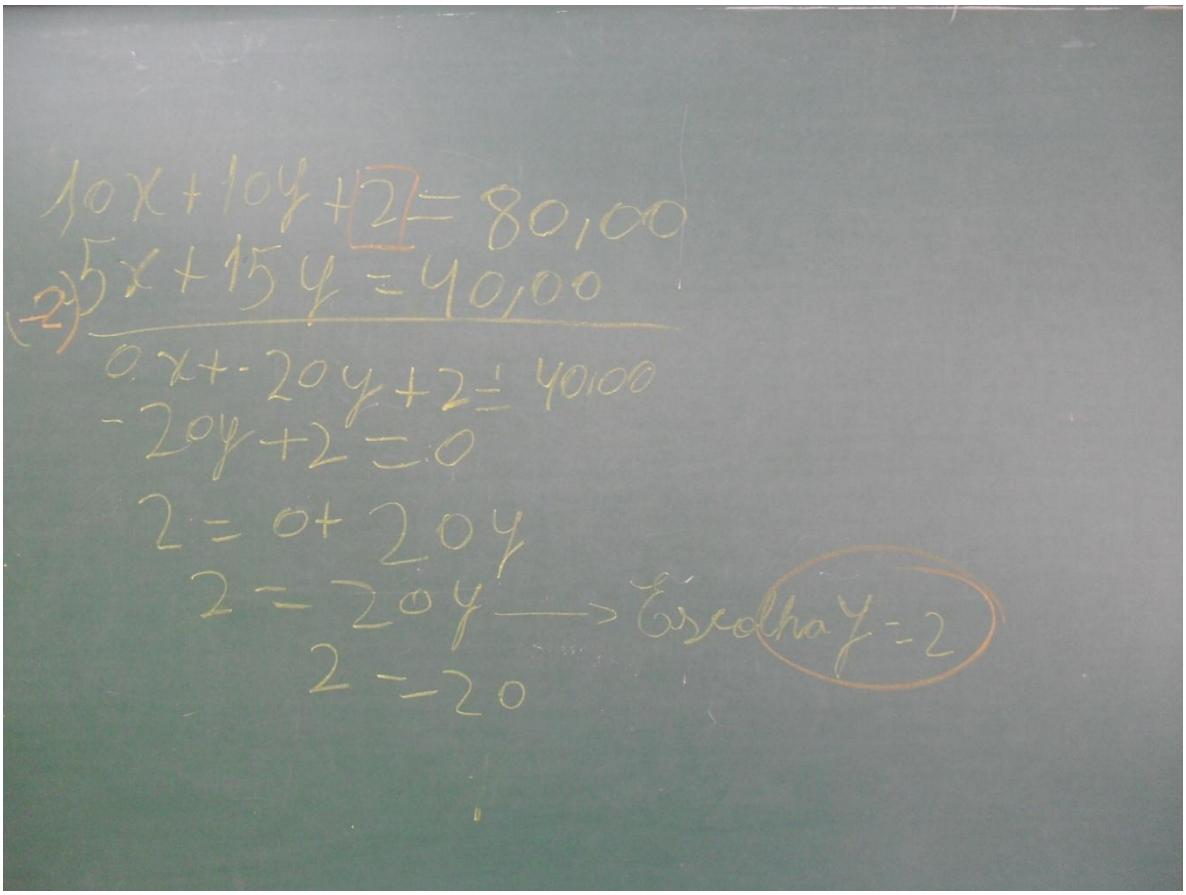
_____

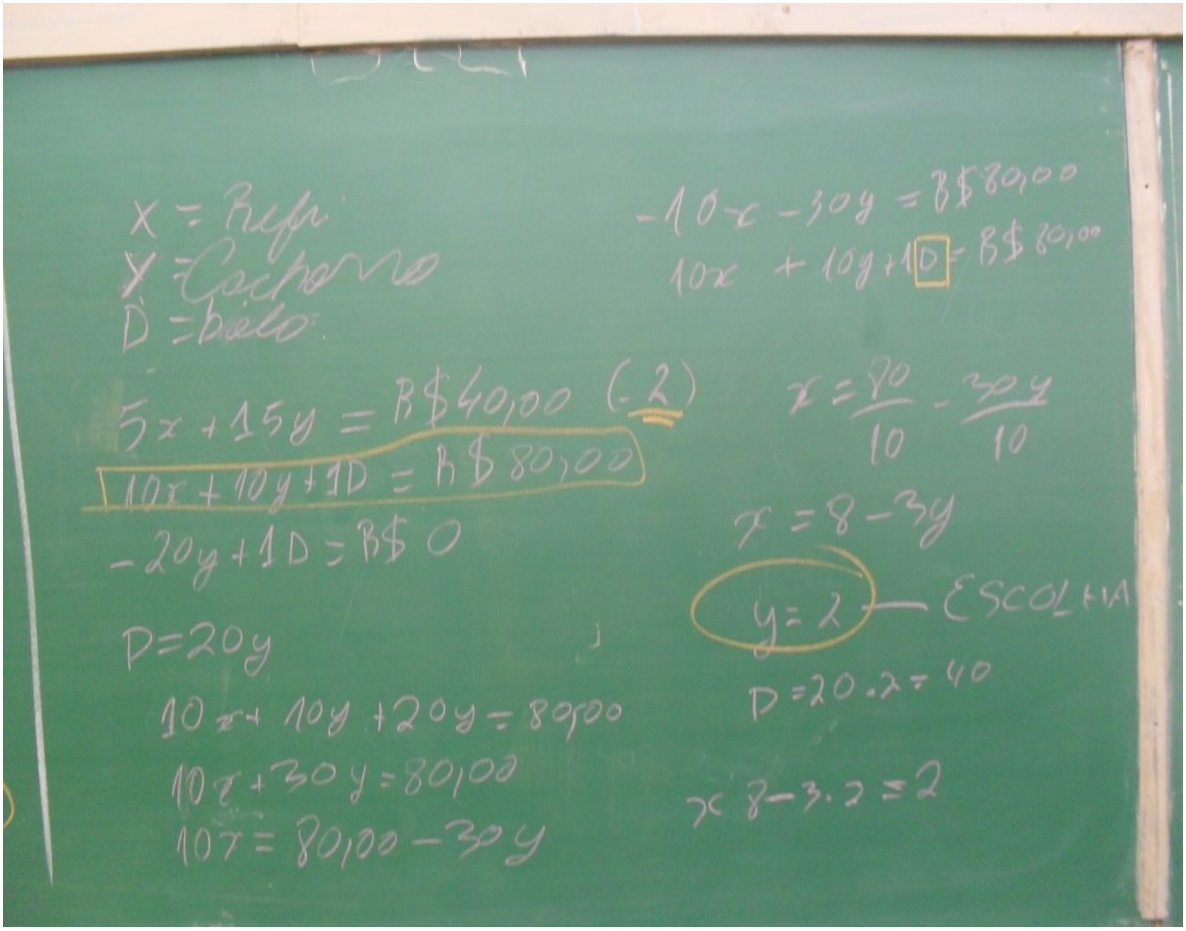
8.9 ANEXO I – Fotos relativas as resoluções d segunda pesquisa

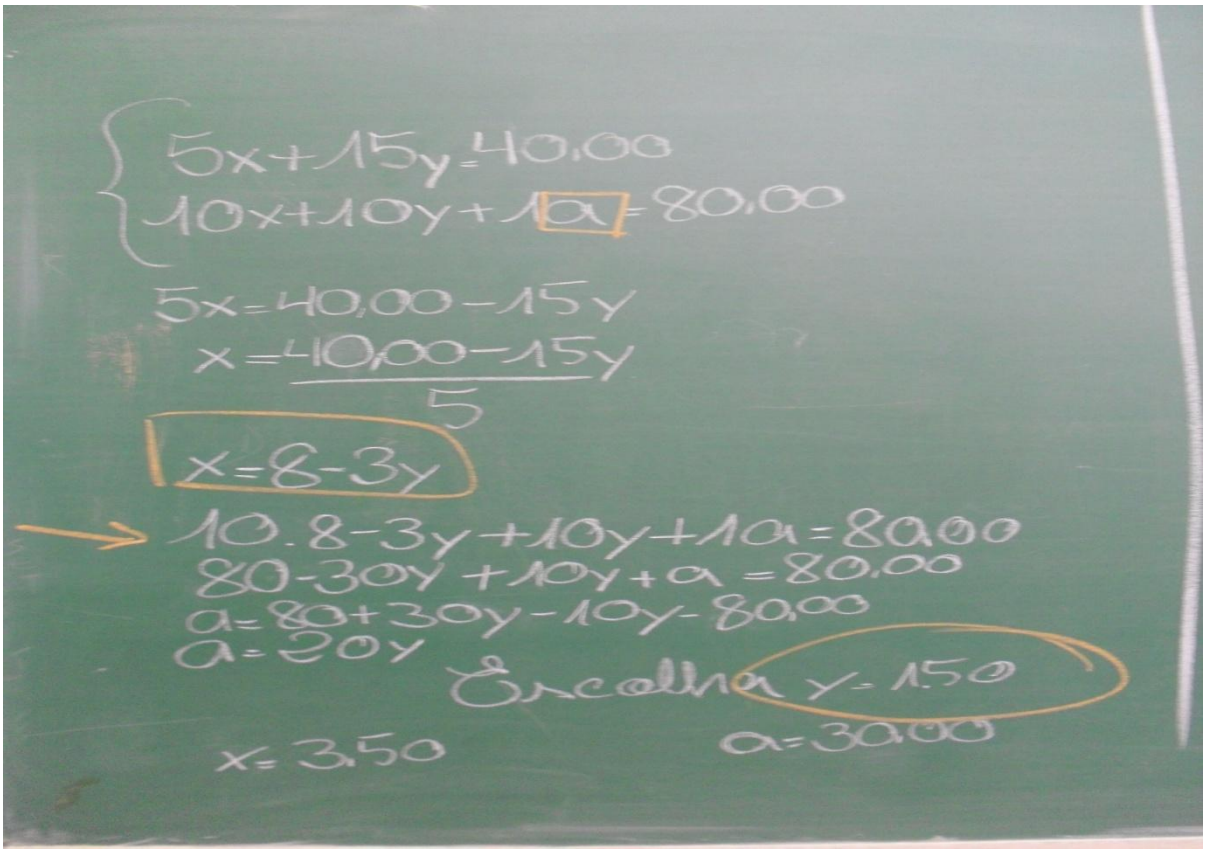



4x + 2y = 11,50
2x + 2y = 7,30
2x + 0 = 4,20
2x + 0 = 4,20
2x = 4,20
x = 4,20 / 2
x = 2,10
4 . 2,10 + 2y = 11,50
8,40 + 2y = 11,50
2y = 11,50 - 8,40
y = 3,10 / 2
y = 1,55
x = 2,10
y = 1,55


10x + 10y + 2 = 80,00
5x + 7 . y = 40,00
5x = 10,00
x = 10,00 / 5
x = 2
x = 2
y = 2
B = 40


10x + 10y + D = 80,00
(-2) 5x + 15y = 40,00
0x + -20y + D = 40100
-20y + D = 0
D = 0 + 20y
D = 20y
Escolha y = 2
D = 20
x = 8 - 3.2 = 2


X = Rafa
Y = Cachorro
D = balão
5x + 15y = R$40,00 (-2)
10x + 10y + 1D = R$80,00
-20y + 1D = R$0
D = 20y
10x + 10y + 20y = 80,00
10x + 30y = 80,00
10x = 80,00 - 30y
-10x - 30y = R$80,00
10x + 10y + 1D = R$80,00
x = 80/10 - 30y/10
x = 8 - 3y
y = 2 — ESCOLHA
D = 20.2 = 40
x = 8 - 3.2 = 2


5x+15y=40,00
10x+10y+1a=80,00
5x=40,00-15y
x=40,00-15y
5
x=8-3y
10.8-3y+10y+1a=80,00
80-30y+10y+a=80,00
a=80+30y-10y-80,00
a=20y
Excelha y=1,50
x=3,50
a=30,00