

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E ENSINO DE FÍSICA**

MATEUS BOTH

**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: UM ESTUDO DE
CASO BASEADO NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E ANÁLISE
DE ERROS**

Santa Maria, RS, Brasil.
2016

Mateus Both

**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMETRICAS:
UM ESTUDO DE CASO BASEADO NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E
ANÁLISE DE ERROS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Tecnologia da Informação e Comunicação da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias
Co-orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Cecília Pereira Santarosa

Santa Maria, RS, Brasil.
2016

Fichas catalográfica, gerar em:

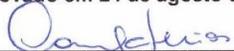
http://cascavel.ufsm.br/ficha_catalografica/

Mateus Both

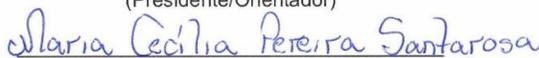
**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMETRICAS:
UM ESTUDO DE CASO BASEADO NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E
ANÁLISE DE ERROS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Tecnologia da Informação e Comunicação da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em 24 de agosto de 2016:



Carmen Viera Mathias, Dr^a. (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Maria Cecília Pereira Santarosa, Dr^a. (UFSM)
(Co-orientador)



Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)



Helena Noronha Cury, Dr^a. (UNIFRA)

Santa Maria, RS, Brasil.
2016

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação:

- Aos meus amados pais Sérgio e Lisonia
Que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me motivando
- A minha adorada irmã Vanessa
Que sempre prestou auxílio e me ajudou a ser quem sou
- Aos meus amigos
Que muito me apoiaram ao longo desses anos e sempre estiveram lá quando necessários
- Em especial a minha amada noiva Maiara
A qual sem o apoio e auxílio esta dissertação não seria possível, e que tornou tudo possível.

AGRADECIMENTOS

As professoras Carmen e Maria Cecilia pela orientação, paciência e apoio durante o trabalho desenvolvido e oportunidades oferecidas.

A Coordenação do Curso e professores a ela vinculados pelo auxílio e apoio fornecidos.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul pelo apoio no desenvolvimento do trabalho.

E a todos que contribuíram de alguma forma esta dissertação.

RESUMO

RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: UM ESTUDO DE CASO BASEADO NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E ANÁLISE DE ERROS

AUTOR: Mateus Both

ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

COORIENTADORA: Maria Cecília Pereira Santarosa

Esta pesquisa teve como objetivo averiguar os subsunçores sobre conceitos de variação existentes em alunos ingressantes no curso de Matemática, bem como propor alternativas que possibilitassem uma aprendizagem significativa sobre esses conceitos. Visou-se também avaliar a ocorrência de aprendizagem significativa por meio da análise e classificação dos erros cometidos por alunos ingressantes no ano de 2015, conforme o Modelo de Análise Didática de Erros (MADE), na resolução de questões de Matemática propostas aos alunos participantes e que necessitavam conhecimentos prévios sobre relações entre grandezas geométricas. A partir desta análise foi elaborada uma atividade potencialmente significativa baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), com o auxílio do Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA) Moodle e do *software* GeoGebra. A pesquisa realizada é de caráter quanti-qualitativa e nela empregaram-se como instrumentos questionário, teste diagnóstico, entrevista, atividade investigativa e avaliação. Além da análise dos erros, foram realizadas entrevistas para uma melhor compreensão e aprimoramento do perfil dos alunos e dos motivos para as respostas dadas no levantamento das dificuldades. Esta pesquisa foi dividida em quatro etapas. Na primeira etapa foi aplicado um questionário e um teste diagnóstico para realizar um levantamento das dificuldades, composto de 5 questões, com 24 alunos. Na segunda etapa desta pesquisa, se propôs o desenvolvimento e aplicação de um material instrucional potencialmente significativo com os alunos de Cálculo I no segundo semestre de 2015. Entretanto, para a análise da atividade potencialmente significativa e comparação do desempenho dos alunos, foram considerados apenas os alunos que realizaram o teste diagnóstico. De maneira concomitante foram realizadas entrevistas, com 9 alunos, que participaram de ambas etapas, sendo que um deles não realizou a atividade final. A escolha dos alunos ingressantes se deu pelo fato dos alunos serem egressos do Ensino Médio de maneira que fazem parte de um processo de transição Escola Básica/Ensino Superior em nível de conhecimentos. Na terceira etapa, visou-se aplicar uma questão avaliativa para verificar o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos. Por fim, na quarta etapa, após e durante a aplicação da atividade, foi realizada a avaliação da eficiência e aplicabilidade do material instrucional no que tange à possíveis evidências de aprendizagem significativa e/ou possível re/construção de conceitos subsunçores básicos para uma aprendizagem significativa do tema relacionado as relações geométricas funcionais.

Palavras-Chave: GeoGebra. Aprendizagem Significativa. Análise de Erros. Grandezas Geométricas. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN GEOMETRIC QUANTITIES: A CASE STUDY BASED ON MEANINGFUL LEARNING AND ERROR ANALYSIS

AUTHOR: Mateus Both
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias
CO-ADVISOR: Maria Cecília Pereira Santarosa

This work had as objective investigate the subsumer about the concept of variation that exist on the Mathematics freshmen's, as propose alternatives that could lead to a meaningful learning about it. It has also aiming evaluate the happening of meaningful learning based on the analysis and classification of the mistakes made by the freshman's in 2015 with the Model of Didactic Error Analysis (MADE). The mistakes were made during the resolution of the proposal questions to the participants, this questions required previous knowledge about geometrical quantities. From that analysis it was elaborated an activity supposed to be potential meaningful based on the Meaningful Learning Theory (TAS), which also evolved the Virtual Ambient of Learning and Teaching (AVEA) Moodle and the software GeoGebra. This research has a quanti-qualitativy feature and the instruments it used were questionnaire, diagnostic test, interview, investigative activity and evaluation. Beyond the error analysis, we realized interviews for a better comprehension and enhancement from the students profile and the reasons for the answers given in the diagnostic test. This research was divided in 4 parts. In the first one, it was realized the application of one questionnaire and the diagnostic test to accomplish the difficulty survey, made of 5 questions, with 24 students. On the second part, it was proposed the development and application of a potential meaningful instructional material with the Calculo I students during the second semester from 2015. However for the analysis of the potential meaningful activity and comparation from the students' results we consider only those how had attend the diagnostic test. At the same time we realized interviews with 9 students. The freshman's were chosen because they had just finished high school which implies they belong to a transition process between school/university in a knowledge level. On the third part, was applied an evaluated question, aiming to verified the development and learning from the students. In the end, on the fourth part, after and during the application of the activity, was realized an evaluation of the efficiency and applicability of the material, with the goal of seeking for evidence about meaningful learning and/or possibilities of re/construction from the basics subsumer concepts related to geometric quantities.

Keywords: GeoGebra. Meaningful Learning. Error Analysis. Geometric Quantities. Virtual Learning Enviroment.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Exemplos de aprendizagem significativa e mecânica	22
Figura 2 - Processo de assimilação	25
Figura 3 - Modelo de Análise Didática de Erros (MADE).....	28
Figura 4- Resolução da questão 1 item a do aluno A22.....	50
Figura 5 - Resolução da questão 1 item a do aluno A11.....	51
Figura 6 - Resolução da questão 1 item a do aluno A4.....	51
Figura 7 - Resolução da questão 1 item a do aluno A6.....	52
Figura 8 - Resolução da questão 1 item a do aluno A19.....	52
Figura 9 - Resolução da questão 1 item a do aluno A2.....	53
Figura 10 - Resolução da questão 1 item a do aluno A13.....	53
Figura 11 - Resolução da questão 1 item a do aluno A20.....	54
Figura 12 - Resolução da questão 1 item a do aluno A24.....	54
Figura 13 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A1 (esquerda) e A19 (direita)	56
Figura 14 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A3 (esquerda) e A22 (direita)	56
Figura 15 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A14(a esquerda) e A18 (a direita)	57
Figura 16 - Resolução da questão 1 item b do aluno A21.....	57
Figura 17 - Resolução da questão 1 item b dos aluno A10(a direita) e A13 (a esquerda)	58
Figura 18 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A11 (a direita) e A17(a esquerda)	58
Figura 19 - Resolução da questão 2 itens a e b do aluno A22.....	59
Figura 20 - Resolução da questão 2 item a do aluno A23.....	61
Figura 21 - Resolução da questão 2 item a do aluno A3.....	62
Figura 22 - Resolução da questão 2 do item a do aluno A11.....	62
Figura 23 - Resolução da questão 2 item a do aluno A2.....	63
Figura 24 - Resolução da questão 2 e item a do aluno A15.....	63
Figura 25 - Resolução da questão 2 e item a do aluno A16.....	64
Figura 26 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A5 (acima) e A14 (abaixo) ..	65
Figura 27 - Resolução da questão 2 item b de A13	66

Figura 28 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A2 (esquerda) e A15 (direita)	66
Figura 29 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A24 (A), A9 (B) e A20 (C)	67
Figura 30 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A3 (acima) e A23 (abaixo)	68
Figura 31 - Resolução da questão 3 do aluno A10	70
Figura 32 - Resolução da questão 3 dos alunos A11 (A), A19 (B) e A24 (C)	71
Figura 33 - Resolução da questão 3 do aluno A22	71
Figura 34 - Resolução da questão 3 dos alunos A5 (acima) e A21 (abaixo)	72
Figura 35 - Resolução da questão 4 do aluno A11	74
Figura 36 - Resolução da questão 4 do aluno A16	74
Figura 37 - Resolução da questão 4 do aluno A20	75
Figura 38 - Resolução da questão 4 do aluno A13	76
Figura 39 - Resolução da questão 4 do aluno A24	76
Figura 40 - Resolução da questão 4 do aluno A18	77
Figura 41 - Resolução da questão 4 dos alunos A22 (acima) e A6 (abaixo)	77
Figura 42 - Resolução da questão 4 pelo aluno A17	78
Figura 43 - Resolução da questão 5 do aluno A20	81
Figura 44 - Resolução da questão 5-a dos alunos A21 (esquerda) e A22 (direita)	81
Figura 45 - Resolução da questão 5-a dos alunos A18 (a), A19 (b) e A24 (c)	82
Figura 46 - Resolução da questão 5-b do aluno A22	83
Figura 47 - Resolução da questão 5-b dos alunos A24 (A), A7 (B) e A18 (C)	83
Figura 48 - Resolução da questão 5-b de A16	84
Figura 49 - Resolução da questão 5-c de A22	84
Figura 50 - Resolução da questão 5-c de A16 (esquerda) e A18 (direita)	85
Figura 51 - Tela do AVEA Moodle	93
Figura 52 - Exemplo da atividade com o GeoGebra	94
Figura 53 - Tela do fórum	96
Figura 54 - Resolução da situação proposta na questão 1, realizada pelo aluno A15 e representação da situação no GeoGebra pelo aluno A14	97
Figura 55 - Representações da situação proposta na questão 1, realizada pelo aluno A24	98
Figura 56 - Representação da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A18	100

Figura 57 - Resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A14	101
Figura 58 - Parte da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3	102
Figura 59 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A24	104
Figura 60 - Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A14	105
Figura 61 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A15	106
Figura 62 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A18	106
Figura 63 - Gráfico da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A18	107
Figura 64 - Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A17	108
Figura 65 - Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A16	109
Figura 66 – Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A24	110
Figura 67 – Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A3	111
Figura 68 - Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A14	113
Figura 69 – Gráficos da situação proposta na questão 5, realizados pelo aluno A24	114
Figura 70 – Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A17	115
Figura 71: Resolução da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A18	117
Figura 72 - Resolução da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A15	118
Figura 73 - Resolução da situação proposta na questão 1, realizada pelo aluno A11	122

Figura 74 – Parte da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3	123
Figura 75 – Final da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3	123
Figura 76- Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A22	125
Figura 77 – Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A14	126
Figura 78 – Representação da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A17	127
Figura 79 – Resolução inicial da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A24	128
Figura 80 – Representação da situação proposta na questão 11, realizada pelo aluno A16	130

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Idade dos alunos	44
Quadro 2 – Quantidade de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco	46
Quadro 3 - Frequência de erros	47
Quadro 4 - frequência de erros nas respostas ao item 1-a	50
Quadro 5 - frequência de erros nas respostas ao item 1-b	55
Quadro 6 - frequência questão 2-a.....	60
Quadro 7 - frequência questão 2 item b	64
Quadro 8 - Frequência questão 3.....	69
Quadro 9 - frequência questão 4.....	73
Quadro 10 - Frequência de erros questão 5 a.....	79
Quadro 11 - frequência questão 5 b.....	80
Quadro 12 - frequência questão 5 c.....	80
Quadro 13 – Respostas da atividade no Moodle.....	119
Quadro 14 – Relação entre alunos e questão sorteada.....	120
Quadro 15 - Relação de aproveitamento em Cálculo I e participação na Atividade	131
Quadro 15- Respostas dos alunos no levantamento das dificuldades	132
Quadro 16 - Respostas dos alunos na atividade.....	132

LISTA DE ABREVIATURAS

AVEA	Ambiente Virtual de Ensino-Aprendizagem
MADE	Modelo de Análise Didática de Erros
Moodle	Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	21
2.2	ANÁLISE DE ERROS.....	25
2.3	ANÁLISE DE ERROS E TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	30
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	32
3.1	SOBRE AS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO....	32
3.2	TRABALHOS RELACIONADOS	33
4	PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS.....	39
4.1	AS ETAPAS DA PESQUISA E O CONTEXTO	39
4.2	ABORDAGEM METODOLÓGICA.....	40
4.3	INSTRUMENTOS.....	42
5	LEVANTAMENTO DAS DIFICULDADES.....	44
5.1	OS ALUNOS.....	44
5.2	DA ANÁLISE	45
5.3	CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE	85
5.4	DAS ENTREVISTAS	86
6	DA ATIVIDADE POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA.....	93
6.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE A ATIVIDADE INVESTIGATIVA	118
7	DA ATIVIDADE AVALIATIVA (SORTEADA EM AULA)	120
7.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE A AVALIAÇÃO	130
8	VISÃO GERAL DO DESEMPENHO DOS ALUNOS E DA ATIVIDADE.	131
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
	REFERÊNCIAS.....	137

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais preocupações da Educação Matemática se refere ao processo de ensino-aprendizagem e como melhorar a aprendizagem dos alunos. Um dos quesitos para esta melhora segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) é o professor cumprir com suas responsabilidades, sendo que cabe ao professor:

a) diagnosticar o que o aluno já sabe sobre o tema; b) selecionar, organizar e elaborar o material educativo; c) verificar se os significados compartilhados correspondem aos aceitos no contexto da disciplina e d) rerepresentar os significados de uma nova maneira, caso o aluno não tenha ainda captado aqueles desejados. (LEMOS 2011, p. 29)

Além da TAS os educadores podem seguir diversas teorias de aprendizagem, com enfoques distintos, onde cada uma lhes delega funções diferentes. A cada teoria pode ser atribuída uma filosofia ou visão de mundo subjacente (MOREIRA, 1999) dentre as quais podem ser destacadas: as humanistas, as cognitivistas e as comportamentalistas. Cada uma dessas teorias tem seus expoentes, seus seguidores, e servem de referencial teórico para o desenvolvimento, elaboração de formas, métodos, ideias de ensino, de como o ser humano aprende. As teorias ligadas à filosofia comportamentalista baseiam-se na noção de estímulos, de forma que, para cada estímulo do ambiente, tem-se uma resposta. Não se preocupam com o que ocorre em termos cognitivos entre o estímulo e a resposta. Já as humanistas prezam pela auto realização do indivíduo, levando em conta seus sentimentos, emoções e crescimento pessoal e as teorias cognitivistas se voltam para os processos mentais superiores.

Destes enfoques, nesse trabalho será abordado o cognitivista, por tratar do pensamento, de como raciocinamos e atribuímos significados ao mundo. A teoria cognitivista que será abordada é a proposta por Ausubel (1963, 2000), denominada TAS, que visa explicar como ocorre a aquisição de conhecimento. Ao tratarmos da aquisição do conhecimento, lidamos com a aquisição de significados, que ocorre pelo processo de interação entre aquilo a ser aprendido e aquilo que se sabe. Para que ocorra uma aprendizagem significativa espera-se que o aluno, conforme dito por Lemos (2011) consiga captar e negociar os significados, e aprenda significativamente.

Observa-se que esse tipo de aprendizagem se dá no processo de interação entre os conhecimentos que o aluno já possui e aqueles a serem aprendidos. Uma

forma de dar-se maior atenção a estes processos é por uma reflexão sobre o erro conforme dito por Torre (2007 p.48): “a reflexão sobre o erro pode se tornar uma estratégia para dar primazia aos processos em educação”.

A Análise de Erros não é algo novo, tanto o é que Radatz (1979) apresenta alguns trabalhos publicados na década de 20 que abordam o tema, sendo que tais trabalhos tinham como objetivo estabelecer um padrão de erro para explicar os equívocos individuais.

A reflexão sobre o erro leva à Análise de Erros, que é uma observação sobre o que levou o aluno a cometer determinado equívoco e como se pode corrigi-lo de forma a evitá-lo futuramente. Conforme Ball, Thames e Phelps (2008, p.397): “a Análise de Erros é uma prática comum entre os matemáticos no decorrer de seu próprio trabalho; essa tarefa, no ensino, difere somente pelo fato de que enfoca os erros produzidos pelos alunos” (tradução nossa). Por outro lado, o “erro” pode ser interpretado como uma ausência ou má formação de conhecimentos prévios necessários para a resolução de novas situações-problema.

A experiência dos autores com o ensino de disciplinas introdutórias da Matemática no Ensino Superior tem mostrado que os alunos não apenas apresentam ausência de conhecimentos prévios, mas primam por uma postura baseada na reprodução mecânica e sem significado de conhecimentos adquiridos. Tal fato pode ser devido a diversos fatores, desde o empenho dos alunos, até a maneira como está estruturado o ensino nas escolas atualmente.

De forma a auxiliar os alunos a remediar seus erros, ajudá-los no processo de re/construção de conceitos matemáticos que carecem de interpretação com significado, é possível e pertinente utilizar-se de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) que segundo Fiorentini e Lorenzato (2009) permitem aos alunos verem conteúdos de novas maneiras e explorar temas novos, que até então não eram abordados. Este recurso tecnológico é favorecedor de aprendizagens significativas não apenas pelo seu fator motivacional, mas por fornecer diferentes possibilidades de representações matemáticas dos conceitos.

Um *software*, dentre muitos, que permite esta visão sobre novos temas e novas maneiras de ver os conteúdos é o GeoGebra que segundo Hohenwarter et al (2013), é:

[...] um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O

GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Desta forma, o GeoGebra permite trabalhar com grandezas geométricas, por meio de uma investigação sobre a dependência funcional entre elas como apresentado por Giraldo, Caetano e Mattos (2012) permitindo que se recupere a ideia intuitiva de variação.

O *software* GeoGebra pode ser usado dentro do Ambiente Virtual de Ensino-Aprendizagem (AVEA) Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment¹), permitindo a interação dos alunos, por meio de perguntas e da utilização de fóruns.

Assim, tendo como fim último a aprendizagem significativa do conceito de relação e função por meio de dependências geométricas, esse trabalho se dará por meio de quatro etapas: 1ª) Por meio da Metodologia da Análise de Erros, diagnosticar a existência ou não de conceitos subsunçores no aprendiz, necessários para a aprendizagem de conteúdos sobre grandezas geométricas e suas relações funcionais; 2ª) Desenvolver e aplicar um material instrucional potencialmente significativo, fundamentado na utilização do *software* GeoGebra, utilizando o AVEA Moodle para a troca e compartilhamento de significados do conteúdo abordado; 3ª) Aplicar uma questão avaliativa para verificar o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos; 4ª) Investigar e avaliar a metodologia de ensino adotada, no que se refere à busca por evidências de aprendizagem significativa do conteúdo abordado e possíveis adequações do material instrucional adotado.

A escolha do conteúdo a ser abordado nesta pesquisa deveu-se a um interesse em atividades que envolvem áreas e funções, como as utilizadas por Arcavi e Hadas (2000). Tal leitura acarretou em uma curiosidade em saber que conhecimentos prévios os alunos egressos do Ensino Médio que escolheram o curso de Matemática possuem sobre este tópico, e se estes conhecimentos prévios são suficientes para novas aprendizagens de forma significativa. Para sanar esta curiosidade optou-se por utilizar como referencial metodológico para a pesquisa, a metodologia de Análise de Erros em virtude de que:

O erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar.

¹ Ambiente de Aprendizagem Dinâmico Modular Orientado a Objeto

Dito mais peremptoriamente: *não há aprendizagem isenta de erros.* (TORRE, 2007, p.27)

Resolveu-se, desta forma, realizar um levantamento das dificuldades dos alunos sobre o conteúdo de grandezas geométricas e efetuar a Análise de Erros, de forma a verificar que conhecimentos prévios os alunos possuíam. Outro fator relevante para a escolha da Análise de Erros foi o fato de que conforme Ball, Thames e Phelps (2008) conhecer os erros comuns dos estudantes permite ao professor a antecipação, exploração e clarificação aos alunos das falsas verdades carregadas ao longo da vida acadêmica.

Assim, ao focar-se nos erros dos alunos, se verifica aquilo que eles sabem, sendo que, neste trabalho, tal conhecimento será verificado sob a ótica da TAS, pois como dito por Ausubel (1978 p.iv apud Moreira 2006 p.13) “[...] o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo”.

Desta maneira é possível propor novas estratégias para o ensino. Para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem decidiu-se utilizar de ambientes computacionais, tais como o GeoGebra e o Moodle, pois:

Ambientes computacionais possibilitam o estabelecimento de novas formas de aprender, oferecendo acesso a sutilezas dos conceitos matemáticos que permaneceriam ocultas de outra forma, renovando os próprios objetivos de aprendizagem. (GIRALDO; ROQUE, 2014, p.34.)

Sendo tais sutilezas, vista ao integrar-se geometria e funções com o auxílio do GeoGebra, visualizando detalhes e a dinamicidade das situações. Assim, escolheu-se trabalhar especificamente com o GeoGebra por ser um ambiente computacional de matemática com o qual os pesquisadores têm familiaridade e também por se tratar de um ambiente dinâmico os quais para Arcavi e Hadas (2000, p.25) (tradução nossa) “[...] não só permitem aos estudantes construir figuras com determinadas propriedades e visualizá-las, mas também permitem ao usuário transformá-las em tempo real”.

Acredita-se que esta pesquisa é relevante, pois ao trabalhar com grandezas geométricas, partindo dos conhecimentos prévios dos alunos (após o auxílio aos mesmos no processo de re/construção desta bagagem cognitiva), os alunos deverão pensar, por exemplo, em esboços dos gráficos e em diferentes outras formas de representação do conceito de “relações e funções”.

Justifica-se o valor desta pesquisa, levando em conta a grande dificuldade dos estudantes nas disciplinas de Cálculo, onde situações como as descritas são amplamente utilizadas, principalmente nas aplicações de derivadas (otimização). Esta dificuldade em Cálculo, em particular, na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) é comprovada por Molon (2013) ao apresentar os índices de não aprovação no período de 2009 a 2012 que foram da ordem de 58%, para as turmas que cursam regularmente a disciplina de Cálculo I. Entretanto, não menos importante do que o “alto índice de reprovação” é a forma “mecanizada”, caracterizada pelo ensino tradicional, com que os estudantes apreendem os conceitos do Cálculo, sem conceberem o verdadeiro significado desta aprendizagem para sua formação profissional.

Desta forma, resolveu-se averiguar na primeira etapa do trabalho: *Como os alunos do curso de Licenciatura em Matemática associam as relações existentes entre grandezas geométricas?*

Ou mais especificamente:

- Como se dá o processo de resolução de questões envolvendo a associação entre Geometria e funções?
- Quais os conhecimentos prévios dos alunos no que tange a associação entre Geometria e funções?
- Que tipos de erros os alunos cometem ao resolverem questões onde são cobrados conhecimentos relativos a variação?
- Quais as estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução de problemas que envolvem tal associação?

Em seguida aos resultados da primeira etapa, busca-se responder à questão: *De que forma elaborar um material instrucional potencialmente significativo para o ensino de relações geométricas, utilizando o GeoGebra e o método da resolução de problemas como metodologias no ensino?*

Na sequência, questionou-se de que forma seria possível avaliar a ocorrência de aprendizagem significativa e o desenvolvimento dos alunos por meio de situações-problemas.

Por fim, como resultado da investigação da segunda e terceira etapas, surge a questão que nos leva à quarta etapa do trabalho, a qual de certa forma é concomitante à segunda: *Há evidências de aprendizagem significativa com o material instrucional utilizado, e de que forma podemos avaliá-lo em termos do bom*

aproveitamento para os alunos? Isto é, o que pode ser melhorado para trabalhos futuros?

Assim, no intuito de responder as questões acima elencadas, esta pesquisa tem por objetivo geral investigar os subsunçores existentes em alunos ingressante no curso de Matemática sobre conceitos de variação e propor alternativas para que realizem uma aprendizagem significativa sobre esses conceitos, bem como avaliar se houve aprendizagem significativa.

Como objetivos específicos são propostos:

- Investigar a existência de conceitos subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos, necessários para a aprendizagem das relações geométricas, identificando e classificando os erros apresentados por eles, conforme o Modelo de Análise Didática de Erros (MADE).
- Utilizar os resultados desta análise para desenvolver uma estratégia de ensino-aprendizagem, com o uso do software GeoGebra, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) e por meio do ambiente Moodle com o intuito de que esta possibilite aos alunos, por meio do compartilhamento e troca de significados, alcançar uma melhor compreensão das questões.
- Avaliar a metodologia do emprego de situações-problemas adotada no que tange à busca de evidências de aprendizagem significativa, analisando possíveis modificações e/ou manutenções para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas a teoria na qual esse estudo se baseia e a metodologia que o suporta, ou seja, TAS e Análise de Erros. Também será apresentada uma breve descrição do que é o ambiente Moodle e do *software* GeoGebra. Além disso, serão referenciados alguns trabalhos relacionados, considerados relevantes a esse estudo.

2.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Uma teoria de aprendizagem é, de forma geral, uma teoria elaborada para explicar como os indivíduos aprendem. Dentre as diversas teorias existentes, neste trabalho será utilizada a TAS, elaborada por David Paul Ausubel em 1968 e que teve como principais propagadores de sua teoria Novak, Gowin e Moreira (MOREIRA, 2006). Tal escolha se deve ao fato de acreditarmos que a TAS é a que mais se aproxima da realidade e a que melhor se encaixa com a Análise de Erros. Para esta apresentação da TAS se tomará como base o livro e o artigo publicados por Moreira² (2006, 2012).

No que segue, será realizada uma pequena apresentação da TAS, iniciando pela definição de aprendizagem significativa, a qual Moreira (2006, p. 14-15) define como “um processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo”, ou seja, quando ocorre uma interação entre um subsunçor com aquilo a ser aprendido. Um subsunçor, *subsumer* no original em inglês, é aquilo que o aluno já sabe, um conceito, uma ideia, um conhecimento prévio. Conforme Moreira (2012, p. 6) “a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles”. Assim, dada a interação do subsunçor com o conhecimento a ser aprendido este, o subsunçor, se modifica e adquire novo significado ao mesmo tempo em que reforça os já existentes.

Os subsunçores determinam o nível da estabilidade cognitiva do sujeito, devido a sua dinamicidade e de sua variação ao longo das aprendizagens significativas que o sujeito passa, onde os subsunçores podem vir a evoluir ou

² Marco Antônio Moreira é o precursor da divulgação da TAS na América Central, América Latina e em países da Europa.

envolvido. Deriva-se deste fato a definição de estrutura cognitiva, utilizada no âmbito da TAS, que é o conjunto hierárquico de subsunçores dinamicamente inter-relacionados. Desta forma a aprendizagem significativa é caracterizada

Por uma interação (não uma simples associação), entre aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva e as novas informações, pelos quais estas adquirem significado e são integradas a estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e não literal, contribuindo para a diferenciação, elaboração e estabilidade dos subsunçores preexistentes e, conseqüentemente, da própria estrutura cognitiva. (MOREIRA, 2006, p.16)

Em oposição à aprendizagem significativa tem-se a aprendizagem mecânica, que é aquela em que não há interação entre a nova informação e as informações que o aluno já sabe, sendo armazenada de forma literal e arbitrária na estrutura cognitiva do sujeito. Conforme Moreira (2012) seria a popularmente chamada "*decoreba*". Entretanto, apesar desta oposição entre ambas, elas não são dicotômicas, podendo ocorrer os dois tipos de aprendizagem num mesmo conteúdo. A Figura 1 apresenta alguns exemplos de quando fazer uso de cada uma delas.

Figura 1- Exemplos de aprendizagem significativa e mecânica



Fonte: adaptado de (NOVAK,1977)

Para que a aprendizagem significativa ocorra, conforme Moreira (2006), é necessário que o material a ser utilizado no ensino consiga se relacionar e se

incorporar a estrutura cognitiva, aos subsunçores, de uma maneira não arbitrária e não literal. Um material que possibilite isto é dito potencialmente significativo, sendo que isto somente ocorrerá se o material tiver significado lógico, isto é:

ser suficientemente não arbitrário e não aleatório, de modo que possa ser relacionado, de forma substantiva e não arbitrária, a ideias, correspondentemente relevantes que se situem no domínio da capacidade humana de aprender (MOREIRA, 2006, p 19)

Assim, para que a aprendizagem efetivamente ocorra o aprendiz deve ter em sua estrutura cognitiva os subsunçores, com o qual o conhecimento a ser aprendido visa se relacionar.

Além disso, para que a aprendizagem seja significativa o aluno deve querer aprender de forma significativa e relacionar as informações, pois segundo Moreira (2012, p. 12) “é o aluno que atribui significados aos materiais de aprendizagem e os significados atribuídos podem não ser aqueles aceitos no contexto da matéria de ensino”, o que vem a apresentar o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa, pois aprendizagem sem a atribuição de significados pessoais seria mecânica.

Moreira (2006) ainda apresenta outras distinções nas formas de aprender, uma delas seria aprendizagem por **descoberta**, onde o conteúdo a ser aprendido é descoberto, e por **recepção**, no qual o conteúdo é apresentado em sua forma final. Em ambos os casos podem ocorrer tanto aprendizagem significativa como mecânica, como visto na figura 1.

Afim de exemplificar, considere o objeto de aprendizagem "quadrado", para o aluno aprender o conceito de "quadrado" por "descoberta", terá que vivenciar diferentes situações que o levem a isto, de tal maneira que consiga identificar o significado de um "quadrado" em qualquer situação com a qual venha a se deparar. Já na aprendizagem por "recepção", o professor expõe, por meio de uma aula expositiva ou com a utilização de recursos tecnológicos, o que é um "quadrado". Em ambos os casos a aprendizagem do conceito "quadrado" poderá não ser significativa. Sendo que só será significativa se o aprendiz conseguir atribuir significado psicológico ao material apresentado pelo professor: expositivo ou por descoberta, pois mesmo a aprendizagem por descoberta deve ser mediada pelo professor.

O Autor também apresenta as maneiras em que é possível ocorrer a aprendizagem que são a **representacional**, atribuição de significado a símbolos (em

geral palavras), como a associação da figura de um quadrado a palavra quadrado, de **conceito**, uma forma de aprendizagem representacional, porém mais genérica envolvendo atributos criteriais de um determinado conceito, identificando nas diversas situações um “quadrado”, seus “invariantes operatórios” e suas representações, e a **proposicional**, aprender o significado de ideias através de proposições, identificando as diversas propriedades que formam e derivam de um quadrado.

Há ainda a aprendizagem significativa **subordinada**, a qual ocorre quando um novo conceito é assimilado por conceitos superordenados na estrutura cognitiva através da interação com eles; a **superordenada**, que é quando um novo conceito resultado da interação com ideias pré-existente passa a superordená-las; e, por fim, a **combinatória** onde:

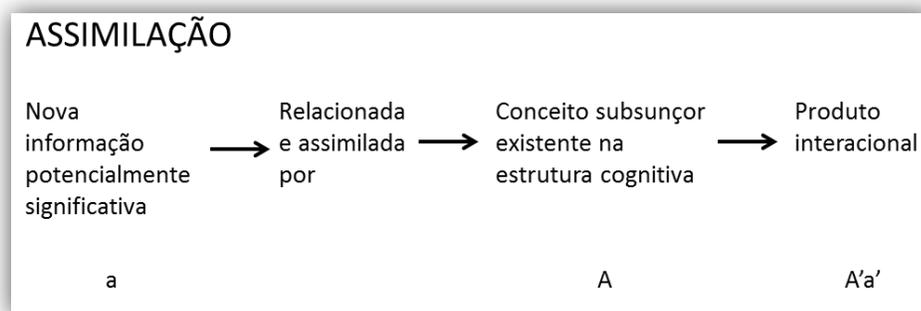
[...] a atribuição de significados a um novo conhecimento implica interação com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, mas não é nem mais inclusiva nem mais específica do que os conhecimentos originais. Tem alguns atributos criteriais, alguns significados comuns a eles, mas não os subordina nem superordena. (MOREIRA, 2012, p. 19).

A aprendizagem subordinada ainda é dividida em **derivativa**, quando a nova informação exemplifica o subsunçor, ou **correlativa** quando amplia, modifica o subsunçor.

Destaca-se ainda a ocorrência dos processos relacionados e que ocorrem ao longo da aprendizagem significativa, de **diferenciação progressiva** que Moreira (2012, p. 9) apresenta como sendo “(...) o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos” e o de **reconciliação integrativa**, que tem por resultado a clara delimitação das congruências e incongruências das ideias relacionadas, e conforme o autor (2012, p. 35) “a reconciliação integradora, ou integrativa, é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações.”

A fim de propiciar uma melhor compreensão de como ocorre o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva o autor apresenta o “princípio de assimilação”, melhor exemplificado pela Figura 2.

Figura 2 - Processo de assimilação



Fonte: (MOREIRA, 2006 p. 29)

De tal forma que o fruto do processo interacional de uma aprendizagem significativa é o novo significado de **a'** e a modificação do subsunçor **A**, que passa a ser **A'**. Apresenta-se assim, novamente, o caráter idiosincrático existente na aprendizagem significativa, pois **a'** tem um significado pessoal que é diferente de **a**. Aqui se ressalta a possibilidade de que o aprendiz poderá não ter o significado correto e formalmente aceito, afinal **a** é diferente de **a'**.

Apesar de não ser o foco metodológico principal proposto no trabalho, pretende-se, após o desenvolvimento e aplicação do material instrucional supostamente potencialmente significativo, investigar e avaliar seu desempenho de forma a ver onde é possível melhorá-lo.

2.2 ANÁLISE DE ERROS

Entende-se Análise de Erros como a análise das dificuldades evidenciadas nas produções escritas dos alunos. Trata-se, de analisar as respostas dos alunos, tentar compreender o porquê de terem errado e elaborar formas de sanar tal erro. Este fato se comprova na pesquisa de Cury (2012) que fez um levantamento e análise dos objetivos de dissertações e teses em Análise de Erros matemáticos, visando descobrir que tipo de pesquisas estão sendo realizadas na área. A autora concluiu que os pesquisadores pretendiam alcançar uma melhor compreensão das dificuldades que levam ao erro e propor atividades educacionais que acarretem numa melhoria da prática docente.

Em Cury (2013) são apresentadas algumas pesquisas consideradas como precursoras da Análise de Erros; também é feita uma revisão dos trabalhos que

analisam as respostas dos alunos em questões matemáticas, além da apresentação em forma de tabela dos trabalhos realizados por brasileiros com ano, local, série e conteúdo analisado. Também foi apresentado um exemplo de como fazer a Análise de Erros com o conteúdo de Pré-Cálculo e de um primeiro curso de Cálculo e na sequência faz a apresentação de forma detalhada da metodologia a ser empregada numa pesquisa de Análise de Erros.

Nesta pesquisa, a metodologia proposta é derivada da análise de conteúdo proposta por Bardin (1977) que apresenta três etapas para análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na fase de pré-análise deve ser feita uma “leitura flutuante” e selecionado o tipo de respostas que serão consideradas, podendo ser descartadas aquelas que estiverem em branco ou não apresentarem resolução. Na segunda etapa deve-se fazer a unitarização e categorização do material obtido, que aqui será feito baseado nas categorias apresentadas por Torre (2007), descritas na sequência. Já no tratamento dos resultados, é feita, uma descrição das categorias com a apresentação dos resultados obtidos, e deve-se fazer uma inferência e interpretação, de forma a ampliar a compreensão e assim poder-se utilizar de tal compreensão para desenvolver estratégias de ensino para ajudar os alunos a superarem os erros.

Para o desenvolvimento de estratégias a serem aplicadas com os estudantes, Torre (2007) apresenta a utilização do erro como estratégia de mudança, para que se passe de um enfoque nos resultados, “pedagogia do êxito”, para focar nos processos, “pedagogia do erro”, para ser usado de forma a facilitar uma melhora pessoal, institucional e social dos envolvidos.

Uma pedagogia do êxito visa eliminar o erro, vendo-o de forma negativa, possui um enfoque nos resultados, já a “pedagogia do erro” é conforme Torre (2007 p. 77) aquela que “[...] avaliará o que o aluno já tem e analisará, por meio do erro, o que falta melhorar”, aceita-se o erro como natural e como componente da aprendizagem, vendo-o como algo construtivo e inovador.

Ao discutir sobre as bases teóricas do erro Torre (2007) apresenta três enfoques:

- O erro como falha punível e como efeito a ser evitado: aqui o erro possui um enfoque negativo, o qual foi muito utilizado por diversas sociedades³
- O erro como sinal de progresso: possui uma visão positiva do erro, é a ideia de que sem erro não há progresso, devendo ser considerado, a maturidade do sujeito, pois um erro aos 6 anos tem uma relevância, e o mesmo erro aos 8 anos tem outra.
- O erro como processo interativo: vê o erro pelo seu caráter interativo, como resultado da interação sócio cognitiva e avalia o erro pela sociedade, pois há variação do valor atribuído a cada erro, há professores que consideram somente o resultado final ignorando o processo, outros valorizam mais o processo.

O autor ainda apresenta o que o erro dos alunos pode informar aos professores:

1) O aluno necessita de ajuda, o que apesar de parecer simples não é, pois muitas vezes ao presenciar um erro o professor age não de forma a ajudar o aluno, mas de forma a repreendê-lo ou puni-lo por tal.

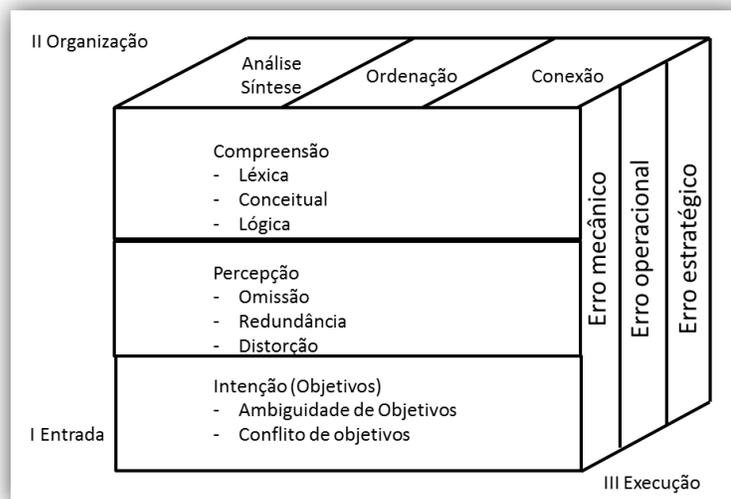
2) O erro proporciona pistas do que ocorre no processo de raciocínio.

3) Proporciona um guia estratégico da prática didática, ao permitir que o professor, conhecendo os erros mais frequentes, adapte sua prática de forma a minimizar tais erros no futuro.

O professor ao adaptar sua prática o faz, muitas vezes, de forma intuitiva o que nem sempre leva a uma efetiva melhoria do ensino, pois pode não resolver os erros. Uma maneira de permitir uma melhor adaptação da prática se dá pela categorização e classificação dos erros à qual o autor propõe um Modelo de Análise Didática do Erro (MADE), que é exemplificado pela Figura 3.

³ Em Escolas que adotam exclusivamente métodos de ensino behavioristas (comportamentalistas), prevalece este tipo de concepção, com relação ao erro.

Figura 3 - Modelo de Análise Didática de Erros (MADE).



Fonte: (TORRE 2007 p.108)

O MADE consiste em três momentos: entrada, organização e execução. Os quais, compõem, basicamente, as três etapas que ocorrem quando o ser humano processa informação, isto é, ele recebe a informação (entrada), analisa-a, organiza-a e escolhe o que fazer (organização) e efetua o que decidiu (execução). Sendo que cada um deles se subdivide, sendo assim:

Erros de entrada: São os erros de interpretação das informações dadas, sejam estas inadequadas ou insuficientes, tais erros podem ocorrer em três planos: intenção, percepção e compreensão.

a) Erros de intenção podem ocorrer por uma indefinição de metas, isto é, “o aluno não sabe o que realmente se pede em um trabalho ou uma tarefa, o que o professor quer, para que serve a atividade”. (TORRE, 2007 p. 110). Também podem ocorrer por uma incompreensão ou confusão do objetivo, neste caso os erros são devidos a falta de maturidade do aluno, por demandar objetivos além do patamar de capacitação em que a criança se encontra. Uma última forma de erros de intenção é o desvio da meta fixada ou conflito de objetivos, que são as situações em que os alunos “criam” objetivos além dos propostos pelo professor, desviando-se assim do foco da tarefa. Como no caso de viagens turísticas, onde ocorre dos alunos prestarem atenção as explicações históricas.

b) “Os erros de percepção resultam de uma má interação entre as características da informação e os processos cognitivos do sujeito” (TORRE, 2007, p. 111). Este tipo de erro pode se dar pela omissão de informação, que é quando o

professor assume que os alunos possuem o conhecimento e habilidades necessários para resolver determinada questão, sem que eles efetivamente o tenham. Também podem ocorrer devido a redundância da informação, pois a repetição pode atrapalhar alguns alunos. Uma última forma deste tipo de erro são os de distorção que ocorrem quando a informação é ambígua, imprecisa ou fora do domínio cognitivo do aluno, podendo provir também de uma tentativa de simplificar uma informação complexa.

c) Erros de compreensão, que são aqueles devido a limitações na compreensão léxica, conceitual ou lógica da tarefa, ao desconhecimento do significado de determinada palavra ou símbolo, da definição de determinado termo, de falhas no raciocínio.

Erros de Organização: São erros que se devem a maneira como o aluno organiza as informações recebidas. Podem ocorrer na análise e síntese das informações, ao se identificar as características relevantes e visualizar os passos a seguir, como ao incluir informações baseado na experiência e intuição. Também podem ocorrer devido a ordenação, que ocorre pelo uso de uma inadequada sequência de passos, ou pela alteração da ordem a ser seguida. Por fim tem-se erros de conexão e interferências; são erros que ocorrem quando há uma interferência entre o conceito teórico e o modelo empírico conhecido ou quando não se consegue projetar o conhecimento numa nova situação.

Erros de execução: São erros comumente tidos como equívocos, podendo ser erros mecânicos ou lapsos, como a omissão de letras ou alteração de um sinal matemático por outro. Ou erros operacionais e de distração, geralmente causados pelo nervosismo. Por fim, podem ser erros estratégicos que ocorrem quando o aluno utiliza uma estratégia não apropriada para a resolução do problema.

Desta maneira, têm-se descrito acima as dimensões e tipos de erros de uma maneira ampla. Na matemática, conforme Torre (2007), a Análise de Erros se concentra nas falhas de compreensão e no processo lógico.

Cury (2013) apresenta a Análise de Erros como uma metodologia, baseada na análise de conteúdo de Bardin (1977), como efetivamente se pode fazer a análise, e voltada para a Matemática; já Torre (2007) discute o erro de uma perspectiva mais teórica-filosófica e interdisciplinar apresentando o MADE como uma forma descritiva para classificar os erros.

2.3 ANÁLISE DE ERROS E TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Senão vejamos, o Modelo de Análise Didática do Erro proposto por Torre (2007) classifica o erro em três tipos: de entrada, de organização e de execução. Aqui é importante salientar que consideramos que os erros caracterizados como “erros de entrada”, onde o aluno fica suscetível a falhas na intenção, na percepção, ou na compreensão podem não ser responsabilidade única e exclusiva do aluno, mas de um ensino mal executado e direcionado. Neste caso, os erros de organização e de execução serão o reflexo desse ensino deficiente. Portanto, a fim de refletir sobre os pressupostos teóricos da TAS a partir de uma metodologia pautada na Análise de erros, devemos considerar que, no contexto deste trabalho, tal metodologia será útil por sua eficiência em detectar os conhecimentos prévios dos estudantes, externalizados em situações-problema propostas num momento anterior a apresentação do material de ensino.

Assim, a fim de relacionar a TAS com a metodologia da análise de erro, podemos interpretar o erro como sendo a ausência de conceitos subsunçores adequados ou necessários para novas aprendizagens, na estrutura cognitiva do aprendiz.

Na perspectiva da TAS, existe o interesse pelo processo cognitivo do aluno no contexto da “pedagogia do erro”, pois é neste tipo de concepção que o professor poderá analisar sob quais conhecimentos prévios podem repousar os novos conhecimentos adquiridos e, em que medida estas experiências anteriores servem de ponte para a aquisição dos novos conceitos. Ausubel (2000) afirma que “o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe” (apud Moreira, 2006, p. 13). Neste sentido, a metodologia adotada parece ser um instrumento eficiente para a análise destes conhecimentos e experiências prévias, por parte do aprendiz.

Ocorre que, na perspectiva da Psicologia Cognitiva, o processo de aprendizagem, que pode ou não ser significativa, os esquemas apresentados pelo aprendiz para dar conta de uma determinada situação podem não ser eficientes. Se por um lado, desestabilizar o aluno para que formule novos esquemas é favorecedor para o seu desenvolvimento cognitivo, a partir da análise dos erros por ele cometidos, por outro lado, o aluno poderá não externalizar esse “erro”, o que pedagogicamente é prejudicial para o seu desenvolvimento cognitivo. Se não

mostrar o seu “engano”, o professor não terá informações suficientes para recriar novas estratégias de ensino, e o aluno poderá aprender forçadamente, de forma mecânica.

A aprendizagem poderá ser significativa por meio da re/construção dos conceitos subsunçores malformados, identificados via a análise de erros cometidos, ao interagirem com as estratégias de mudança empregadas, num processo idiossincrático por parte do aprendiz, permitindo a relação entre informações relevantes, novas e já existentes na sua estrutura cognitiva. Cabe ao professor, a partir da identificação destes conhecimentos prévios ou ausência deles, pautar o ensino de forma a colaborar com os processos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora, responsáveis por uma aprendizagem significativa.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 SOBRE AS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Neste trabalho, optou-se por utilizar-se o AVEA Moodle que conforme Ribeiro, Mendonça e Mendonça (2007) foi desenvolvido pelo australiano Martin Dougiamas em 1999, sendo um software de domínio público. Segundo Moodle (2016) esse AVEA "é uma plataforma de aprendizagem projetado para fornecer educadores, administradores e alunos com um único sistema robusto, seguro e integrado para criar ambientes de aprendizagem personalizados". Observa-se que está disponível em mais de 100 línguas e presente em 222 países.

Conforme Barcelos e Medeiros (2014) esse ambiente é modular e possui diversas ferramentas, recursos e atividades educacionais que podem ser adicionadas de acordo com os objetivos pedagógicos do professor. Tais recursos "tem a função de auxiliar na organização, apresentação e compartilhamento dos conteúdos de uma disciplina/curso em desenvolvimento." (BARCELOS; MEDEIROS, 2014)

Ainda conforme os autores as atividades disponíveis no Moodle visam estimular o estudante a interagir com seus colegas, professores e tutores, mas principalmente, fazer com que este reflita sobre o material didático e suas aplicações teóricas e práticas.

A utilização desse AVEA na UFSM ocorre para cursos de Educação a Distância (EaD), de capacitação e como apoio aos cursos presenciais de graduação e pós-graduação, sendo mantido pelo Núcleo de Tecnologia Educacional (NTE) presente na Instituição.

Juntamente com as ferramentas disponibilizadas no Moodle, será feito uso do software GeoGebra, que como já mencionado, trabalha com matemática dinâmica em diversos níveis e conteúdos possuindo um acervo digital com diversos arquivos e aplicativos, disponíveis ao público. Também disponibiliza um manual, em inglês, em sua própria página.

Conforme Dantas et al (2015), o GeoGebra "foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas" e "tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números" permitindo que se trabalhem as relações existentes entre as variáveis.

Ainda, Dantas et al (2015) realizam uma apresentação da interface do GeoGebra e de algumas de suas funcionalidades. Essa exposição é colocada de forma muito didática e organizada, a permitir uma melhor compreensão por parte do leitor; sendo relevante a este trabalho para situar melhor o que é o GeoGebra e suas funcionalidades.

Na perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa, para que ocorra esta forma de aprendizagem é necessário que o material instrucional seja potencialmente significativo, isto é, tenha significado lógico para o aprendiz, a partir da análise de sua estrutura cognitiva prévia. Como vimos, não basta que o material seja potencialmente significativo se o aluno não tiver predisposição para a aprendizagem. Neste sentido, conjecturamos que a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem bem como de softwares computacionais, como é o caso do GeoGebra, serão fatores motivadores de aprendizagens significativas, além de proporcionarem uma constante socialização dos significados individuais.

3.2 TRABALHOS RELACIONADOS

No que segue, apresentaremos alguns trabalhos relacionados ao tema da pesquisa, sendo distribuídos em três grupos: Quanto ao objeto matemático relações geométricas funcionais, quanto a metodologia e quanto a teoria de aprendizagem adotadas na pesquisa.

3.2.1 Quanto ao conteúdo Relações Geométricas

Dentre os trabalhos relevantes para esta pesquisa, destacamos Arcavi e Hadas (2000), que descrevem atividades envolvendo relações entre Geometria e funções de forma a trabalhar com suas diferentes representações com o uso do *software* Inventor Geometry. A pesquisa foi realizada com alunos entre 15 e 16 anos e num workshop para professores. Os autores descrevem o fluxo da atividade e a maneira como as diferentes ideias são interligadas em diferentes representações, apresentam algumas instruções intermediárias ou perguntas principais que utilizaram para guiar o trabalho e algumas respostas interessantes, mesmo que não necessariamente corretas.

Outro trabalho que merece destaque é o de Salin (2014), que fez uma investigação do papel desempenhado pelos registros de representação semiótica para a construção do conceito de função afim e quadrática, e de que maneira o GeoGebra auxiliou nesse processo. Ela se utilizou da metodologia de engenharia didática para o desenvolvimento das atividades numa turma do 1º do Ensino Médio. A atividade visou levar os alunos a construir o conceito de função através de situações geométricas dinâmicas, a qual teve seu objetivo atingido. A autora também fez a análise de livros didáticos de onde conclui que há uma primazia do enfoque algébrico.

Também menciona-se o trabalho de Silva (2013) que realizou um estudo de 5 problemas clássicos da Geometria Plana sobre área e perímetro máximos, apresentado suas demonstrações e subsídios necessários para a resolução, tais como: “Entre todos os polígonos de n lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?” e O Problema de Dido, “dentre todas as curvas planas fechadas e retificáveis, de um dado comprimento L fixado, qual é aquela que engloba maior área?”

No que se refere ao uso do GeoGebra para o ensino, Amaral e Frango (2014) realizaram um “estado da arte” por meio de um levantamento sobre as dissertações, envolvendo o tema “ensino e aprendizado de funções matemáticas, com o uso do software GeoGebra”, defendidas no Brasil. Ao decorrer da pesquisa não encontraram teses que tratassem sobre o ensino de funções com o auxílio do GeoGebra, sendo analisadas 20 dissertações conforme a análise de conteúdo de Bardin. Os autores concluíram que a maior parte dos trabalhos se utilizou de estudos de casos com intervenções, de forma a gerar sequências pedagógicas.

Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014) fazem uma pesquisa bibliográfica e documental que tem por intuito apresentar os diferentes conceitos empregados ao longo da história para dar significado a definição de função, apresentando que o seu desenvolvimento se deu pela necessidade de respostas a problemas do cotidiano. Os autores ainda relatam que a importância desse fato se deve, conforme apresentado por Alvarenga e Viana (2008, apud Alvarenga, Barbosa e Ferreira 2014) a que, numa Análise de Erros em um processo seletivo para Universidade, os erros mais frequentes se relacionavam a interpretação de situações-problemas e a elaboração do modelo da situação.

Os autores dividem a apresentação em uma linha do tempo contínua: gênese do conceito de função nas relações entre variáveis; a noção de função no estudo de dependência entre variáveis físicas; época da formalização do conceito de função e a modernidade, em que fazem a descrição cronológica do emprego de uma função de acordo com o momento histórico, com o uso de modelos. Terminam afirmando que o conceito de função deve ser empregado de forma contextualizada, com seu significado original: modelar fenômenos.

3.2.2 Quanto a Metodologia

Além dos trabalhos já mencionados e da explanação feita sobre a Análise de Erros, cita-se ainda o trabalho de Cury, Ribeiro e Müller (2011) que apresentam a Análise dos Erros cometidos por alunos do curso de Licenciatura em Matemática numa questão sobre Equações. No trabalho, os autores descreveram a Porcentagem de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. Também discutiram o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo e defenderam a necessidade de discutir com os futuros professores as causas dos erros. Por fim, concluíram que os futuros professores apresentaram grande dificuldade em resolver a questão, já que somente 13% responderam corretamente. Desta forma, afirmam que se deve trabalhar estes erros nos cursos de licenciatura para evitar que venham a ser repassados em sala de aula.

O trabalho de Brum (2013) apresentou como objetivo geral analisar os erros cometidos por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões algébricas. Para efetuar a análise de erros a autora empregou a metodologia proposta por Cury em 2007 e a classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) com algumas adaptações, além da utilização do software *Hot Potatoes*, o qual permite a realização de testes online e interativos para desenvolver uma atividade com os alunos. A pesquisa de caráter qualitativa foi dividida em 3 etapas, sendo a primeira a aplicação do teste, composto de 5 questões numa escola pública, seguida pela reaplicação do teste, em uma escola particular, com posterior testagem da estratégia de ensino desenvolvida baseada no software *Hot Potatoes*. Na análise dos testes os erros que tiveram maior incidência nesta pesquisa foram os classificados como de linguagem mal interpretada e definição ou teorema distorcido, tanto na primeira como na segunda etapa da

pesquisa. Na testagem da atividade participaram os alunos da segunda etapa (10 alunos), a atividade desenvolvida consistia de 8 questões. O autor mencionou que alguns alunos não utilizaram papel para desenvolver suas respostas, e que em alguns casos nas atividades no papel, alguns estudantes ficam sem saber o que fazer e por onde começar; no entanto, na atividade no software, eles agiram de forma diferente, apresentando respostas e saídas para os desafios, constatando-se que o uso do computador fez a aula ficar mais interessante e motivadora.

Já Lima (2010) realizou um levantamento, identificação, categorização e análise dos procedimentos e erros que os alunos de um curso pós-médio (Técnicos em Edificações, Mecânica ou Produção Industrial) de uma instituição federal de ensino, cometeram sobre equações do primeiro grau e teve como objetivo principal a investigação e a identificação dos erros produzidos pelos alunos. Foram analisadas as respostas de 87 alunos os quais responderam as 7 questões e a um questionário para levantar o perfil dos alunos participantes. O autor criou 7 categorias para os erros cometidos nas resoluções dos alunos participantes da pesquisa. O autor também pesquisou cinco livros didáticos utilizado pelos participantes na época em que estes cursaram a 6ª série do Ensino Fundamental visando averiguar a abordagem metodológica no processo de ensino das equações de 1º grau, do qual resultou na classificação em 7 níveis de dificuldade para as equações, e ainda constatou que em tais livros prevalece a algoritimização no processo de resolução das equações com atividades repetitivas, o que leva o aluno a trabalhar de forma mecanizada. Ainda apresentou como produto final um Caderno de Atividades (CA), composto por quinze Fichas Temáticas com atividades elaboradas a partir das categorias de erros analisados no trabalho, o qual visa fazer com que os alunos tomem consciência de seus erros e analisem-os sob a perspectiva de construção de conhecimentos matemáticos específicos das equações do 1º grau. Por fim o autor afirma que o resultado principal deste trabalho foi favorecer reflexões sobre a prática frente aos erros cometidos pelos alunos diante da resolução de equações do 1º Grau e que teve a intenção de ressignificar o tratamento dado ao erro, tornando-o em objeto de análise.

Já com o uso do MADE, Ramos e Curi (2014), analisaram e apresentaram 2 questões aplicadas a alunos do 1º ano do Ensino Médio referentes ao conteúdo de funções polinomiais do 2º grau, a qual participaram 37 alunos. Os autores apresentam alguns erros cometidos pelos alunos classificando-os. Concluíram que

muitos alunos possuem dificuldades oriundas do Ensino Fundamental, para identificar e trabalhar com variáveis dependentes e independentes. Foi concluído também, que se deve ter cuidado ao efetuar a correção dos erros, especialmente nos que se refere a erros de compreensão conceitual.

Ainda com o uso do MADE, Holanda e Rocha (2014) buscaram identificar os principais tipos de erros, tendo o mesmo como base, realizados por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental em questões envolvendo o conceito de área. Para isso, analisaram 6 questões e no decorrer do trabalho apresentaram 4 que foram respondidas por 19 alunos de uma escola pública, os quais tiveram contato com o conteúdo desde o 5º ano. As questões aplicadas visavam averiguar as capacidades de investigação, comparação, o uso das ideias geométricas, o desenvolvimento da capacidade de buscar soluções e construir argumentos para essas soluções, foi permitido o uso de réguas para resolver as questões. Os autores concluíram que para alguns alunos o conceito de área se dava de maneira equivocada e que a maioria dos erros ocorreu nas questões que envolviam comparação, composição e decomposição de figuras. Além disso, concluíram que os alunos possuíam grande dificuldade em diferenciar os conceitos de área e perímetro e por fim indicaram que a maioria dos erros foi classificado como erros conceituais, o que os levou a crer que o professor deve direcionar suas ações para facilitar a compreensão de conceitos.

3.2.3 Sobre a Teoria de Aprendizagem Significativa

Apresentando uma visão geral sobre os trabalhos que se utilizam da TAS, temos Ferrão, Santos e Curi (2015) que analisaram a produção na área de Educação Matemática apresentados no I, II, III, IV e V Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa (ENAS), que ocorreram no período de 2005 a 2014. Sua pesquisa representa um estado da arte, em que apontam que os trabalhos relacionados à matemática representam 15% de todos apresentados. Os autores ressaltam que 27% dos trabalhos, na área de matemática, tratam do Ensino Superior. Entretanto ressaltam:

Embora os estudos destinados ou aplicados no Ensino Superior sobressaíam nos resultados da análise, percebermos a necessidade de estudos teóricos ou focados na aprendizagem de conceitos matemáticos específicos neste nível de ensino. (Ferrão, Santos e Curi, 2015, p. 8)

E concluíram que há uma carência de trabalhos relacionados à aplicabilidade da TAS nas series iniciais e no EJA.

A pesquisa de Muller (2015) faz um levantamento quanti-qualitativo baseado na Pesquisa Baseada em Design (PBD) e trabalha com as teorias de Ausubel (TAS) e de Tall e Vinner (imagem do conceito e definição do conceito) permeados pela Análise de Erros, buscando entender como as dificuldades em Cálculo Diferencial podem limitar os alunos ingressantes na área de Ciências Exatas. Também aplicou um questionário para determinar os estilos de aprendizagem dos alunos e na sequência utilizou-se do ambiente Moodle para detectar as dificuldades dos alunos em Matemática Básica. Após, os alunos foram convidados a envolverem-se com Objetos de Aprendizagem e por fim foi realizado um novo questionário para verificar a evolução dos alunos, em que se constatou que houve melhora significativa por parte dos alunos participantes.

Por fim, Rossato (2014) realizou um trabalho baseado na TAS onde analisou e categorizou os erros acerca da divisão de números decimais em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. O autor fez uma análise de livros didáticos sobre o tema, desenvolveu e aplicou uma oficina potencialmente significativa com os alunos se utilizando do Material Dourado e Quadro Valor de Lugar, a qual levou a uma aprendizagem significativa e redução do número de erros dos alunos.

4 PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Nesta seção, serão apresentados os procedimentos que foram realizados no desenvolvimento da pesquisa, procedimentos estes que envolvem: as etapas da pesquisa e o contexto; abordagem metodológica e instrumentos.

4.1 AS ETAPAS DA PESQUISA E O CONTEXTO

Este trabalho foi desenvolvido com os alunos ingressantes no ano de 2015 do curso de Matemática Diurno da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Campus Santa Maria. A escolha desta instituição ocorreu pela facilidade de acesso por parte dos pesquisadores, que é onde o curso de mestrado está vinculado.

Na primeira etapa da pesquisa foi aplicado um questionário elaborado com base em trabalhos similares, como Lima (2010), e um levantamento das dificuldades com os alunos, de forma a conhecer o perfil dos alunos e suas principais dificuldades em questões que necessitem de subsunçores referente a relações entre grandezas geométricas, sendo que as questões podem servir como ferramentas para verificar a existência dos subsunçores desejados na estrutura cognitiva dos alunos, tais como: Porcentagem, Área, Perímetro, Semelhança, Funções, Gráficos, Propriedades de Figuras Planas, Dependência de Variáveis; além das habilidades: interpretar matematicamente uma situação-problema, relacionar variáveis e suas dependências, esboçar gráficos.

Esta etapa foi realizada com os alunos que estavam presentes na sala de aula da disciplina de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I do curso de Licenciatura em Matemática no 1º semestre de 2015. Como critério de inclusão inicial estabeleceu-se que os alunos estivessem cursando esta disciplina e estivessem em sala de aula na data em que o questionário e o levantamento das dificuldades foram aplicados. A escolha de tal disciplina foi uma forma de selecionar alunos que já possuíssem uma base do uso do GeoGebra para o desenvolvimento da atividade na etapa seguinte.

Na segunda etapa, se propôs o desenvolvimento e aplicação de um material instrucional potencialmente significativo com os alunos de Cálculo I no segundo semestre de 2015. O desenvolvimento deste material ocorreu por meio da escolha de 6 questões que consideramos terem a capacidade de se relacionar com a

estrutura cognitiva do aluno tendo por base o levantamento das dificuldades e os trabalhos apresentados no referencial teórico. Para a análise da atividade potencialmente significativa e comparação do desempenho dos alunos, foram considerados apenas os alunos que realizaram o teste diagnóstico, totalizando 15 alunos, dos quais 11 iniciaram a atividade e 9 concluíram-na. De maneira concomitante foram realizadas entrevistas, com 9 alunos, que participaram de ambas etapas, sendo que um deles não chegou a realizar a atividade final; tais entrevista referiram-se ainda ao levantamento das dificuldades observadas. A escolha dos alunos ingressantes se deu pelo fato dos alunos serem egressos do Ensino Médio de maneira que fazem parte de um processo de transição Escola/Academia em nível de conhecimentos.

Já na terceira etapa, foi aplicada uma questão avaliativa para a disciplina de Cálculo I, de um conjunto de 11 questões, a partir das quais foi realizado um sorteio em sala de aula para que todos os alunos da disciplina respondessem a uma questão e que fosse posteriormente avaliada pelo professor.

Por fim, na quarta etapa, após e durante a aplicação da atividade, foi realizada a avaliação da eficiência e aplicabilidade do material instrucional no que tange a possíveis evidências de aprendizagem significativa e/ou possível re/construção de conceitos subsunçores básicos para uma aprendizagem significativa do tema relacionado às relações geométricas funcionais.

4.2 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esta pesquisa pode ser classificada como um estudo de caso, na qual se empregou uma abordagem quanti-qualitativa, utilizando a análise de erros de forma a fundamentar os estudos teóricos e servir como técnica de coleta e análise de dados, em conjunto com a análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). Na análise qualitativa, foram identificados e analisados os tipos de erro, enquanto que na quantitativa apresentamos a quantidade de erros em cada uma das questões e suas categorias segundo o MADE. A classificação dessa pesquisa como quanti-qualitativa se deve a:

Um trabalho sobre as respostas dos alunos a um determinado teste pode – e, mesmo, deve- englobar aspectos quantitativos, com a determinação do número de ocorrências de cada tipo de resposta e aplicação de testes estáticos para verificar a consistência interna do teste, etc. Em seguida, é conveniente fazer a análise qualitativa das respostas e, depois, é sempre

interessante conversar com os alunos, para entender como eles pensaram ao resolver a questão (CURY, 2006, p.2).

Para a realização dessa pesquisa, foram empregados os seguintes instrumentos: questionário, teste diagnóstico, entrevistas, atividades investigativas, questão avaliativa.

No teste diagnóstico e na avaliação, os alunos foram representados por A_i , onde i representa um número atribuído de forma aleatória ao aluno; esta representação visa preservar suas identidades. Sobre estes instrumentos foi empregado o método da Análise de Erros, sendo categorizados conforme o MADE. Conforme apresentado no referencial teórico a Análise de Erros consiste na pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na fase de pré-análise foi feita uma leitura preliminar e os tipos de respostas consideradas foram selecionados, descartando-se aqueles que não apresentavam resolução ou que não foi possível compreender o que foi feito. Na fase de exploração, foi feita a unitarização e categorização do material obtido, de acordo com as categorias apresentadas por Torre (2007).

Ao realizarmos o tratamento dos dados quantitativamente, as categorias foram descritas por meio de tabelas que mostram a distribuição dos erros por categorias. Essa análise foi seguida pela análise qualitativa, em que uma análise descritiva sobre cada classe de erro foi produzida.

Já para a análise dos questionários e das entrevistas foi feito uso da Análise de Conteúdo que é de onde provem a Análise de Erros, além de ser:

[..] Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos as condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1977 p. 42).

Após, foi desenvolvido e aplicado um material instrucional potencialmente significativo para o desenvolvimento do conteúdo relacionado à pesquisa, a fim de dar um retorno aos alunos que responderam ao teste diagnóstico e auxiliá-los a elucidar possíveis dificuldades existentes nas relações entre grandezas geométricas, num processo de re/construção dos conceitos prévios necessários para a aprendizagem deste novo conteúdo.

Por fim, foi realizada a aplicação da questão avaliativa, bem como o estudo e análise da facilidade operacional do material instrucional no que se refere a evidências de aprendizagem significativa por parte dos alunos investigados.

4.3 INSTRUMENTOS

Nesse trabalho foram utilizados os seguintes instrumentos:

Questionário composto de questões abertas, nas quais os alunos podem expressar suas opiniões de forma escrita, e fechadas, de múltipla escolha, para obtenção dos dados sócio educacionais dos participantes e elaboração do perfil dos alunos (conforme apêndice A). O questionário foi aplicado a alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática para obter-se uma ideia do perfil desses alunos.

O **teste diagnóstico**, composto por questões abertas, sobre o qual foi feita a Análise de Erros de forma a averiguar a existência ou não de subsunçores e efetuar-se assim um levantamento das dificuldades dos alunos (conforme apêndice B). Este instrumento foi elaborado a partir de diversas fontes com questões prévias ao ensino do conteúdo sobre relações entre grandezas, além de permitir verificar quais os erros mais comuns quando se associam diferentes grandezas geométricas.

O uso de tais instrumentos permitiu a transformação dos dados em textos e tabelas por meio da análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). Essa análise foi feita a partir dos documentos obtidos pelos instrumentos citados anteriormente, utilizando a metodologia apresentada por Cury (2013) para realizar a Análise dos Erros, sendo categorizadas conforme o MADE, proposto por Torre (2007).

Entrevistas: Semiestruturadas, de forma a aprofundar o perfil do aluno e o que levou às suas respostas no teste diagnóstico.

Atividades Investigativas: Foram propostas atividades de ensino, potencialmente significativas, de forma que se ampliem as chances de que ocorra uma aprendizagem significativa. As atividades foram desenvolvidas com alunos do segundo semestre, que estavam cursando a disciplina de Cálculo I, do curso de Matemática, por meio do ambiente Moodle e do aplicativo GeoGebra. A escolha de usar o ambiente se justifica, visto que não seria possível usar o tempo de aula para realizá-las. Os alunos realizaram voluntariamente essas atividades como reforço ao estudo da disciplina.

Avaliação: Foi utilizado um trabalho individual cuja avaliação foi somativa, através da atribuição de uma nota em que cada aluno matriculado na disciplina de Cálculo I solucionou um problema envolvendo os conceitos trabalhados por meio das atividades propostas. A escolha do problema que cada aluno iria resolver

ocorreu por meio de sorteio realizado em sala de aula, e a lista dos problemas pode ser vista no Apêndice I. Essa atividade foi realizada no intuito de averiguar se os erros apresentados foram solucionados, e se eles ainda cometeram algum tipo de erro. A partir disso foi possível verificar a validade, sob o enfoque da TAS, da proposta de abordagem.

5 LEVANTAMENTO DAS DIFICULDADES

Nesta seção será apresentado o perfil geral dos alunos participantes, bem como a análise das questões aplicadas a eles, expondo o que se esperava obter com cada uma delas, além de, uma visão geral e uma visão específica de cada questão. Também haverá menções às entrevistas que foram realizadas posteriormente.

5.1 OS ALUNOS

As questões propostas (vide apêndice A) foram respondidas por 24 alunos dos quais, 22 estavam matriculados no 1º semestre do Curso de Matemática, sendo que, 19 eram estudantes da licenciatura e três eram alunos do curso de bacharelado. Também foram analisadas as respostas de dois alunos que cursavam o 6º semestre do curso de licenciatura, pois estes cursavam a disciplina de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I. No Quadro 1 é possível observar o número de alunos em relação a idade. Percebe-se a predominância de alunos com 17 anos; para esses alunos houve a preocupação de solicitar o termo de autorização de participação assinado pelos pais.

Quadro 1- Idade dos alunos

Idade	17	18	19	20	22	24	40
Nº de alunos	10	2	6	2	2	1	1

Fonte: autores

Pôde-se observar nos questionários que a grande maioria dos respondentes (21 alunos) cursou toda a vida escolar em escola pública. Dos demais, três cursaram o Ensino Médio em escola particular e três cursam o Ensino Fundamental em escola particular, apenas um dos alunos cursou o Ensino Básico em escola privada. Questionados sobre reprovações, apenas um dos participantes já havia reprovado em Matemática, sendo que isto ocorreu no primeiro ano do Ensino Médio. Sendo que 10 alunos relataram ter dificuldades em matemática, principalmente nos conteúdos de Matemática Elementar e Trigonometria.

Seguindo o perfil dos alunos, constatou-se que 20 dos respondentes somente estudam, um aluno trabalha como instrutor de matemática, outros dois são bolsistas do PIBID e um é bolsista na secretaria de um curso.

Um aluno entrou no curso por meio de transferência, outro pelas vagas remanescentes e um último por reingresso, os demais entraram por meio do Vestibular. Os principais motivos para a escolha do curso foram por afinidade, facilidade, gosto pela matemática vista na escola. Cabendo ainda um aluno que já trabalha como professor de matemática, e três que desejam ser professores.

Ainda 13 alunos não tentaram vestibular para outros cursos, dos 11 alunos que prestaram vestibular para outros cursos anteriormente há uma diversidade de cursos, variando de artes visuais, a ciências biológicas, terminando em engenharia civil e arquitetura.

Um fato que chamou atenção é o fato de que apenas dois alunos relataram terem tido contato com TIC na escola, os demais indicaram que não possuíam contato com o uso de tecnologias no ensino de matemática.

Cita-se ainda que cerca de 6 meses após a aplicação do levantamento das dificuldades foi realizada a entrevista de caráter individual com alguns alunos. A entrevista é apresentada no final deste capítulo, e por meio dela foi possível aprofundar o perfil dos alunos e coletar maiores informações a respeito de suas respostas, assim em determinados trechos da análise dos erros será feita menção a comentários realizados pelos alunos nas entrevistas.

5.2 DA ANÁLISE

O Quadro 2 expõe, de forma quantitativa, as respostas dos 24 alunos para as questões propostas, conforme apêndice B, de acordo com o número de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco em cada uma das questões. A descrição qualitativa das respostas será feita no tópico seguinte juntamente com as análises de cada questão.

Quadro 2 – Quantidade de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco

Questões	Corretas	Parcialmente Corretas	Incorretas	Em Branco
1-a	2	7	14	1
1-b	0	6	14	4
2-a	2	7	8	7
2-b	2	11	5	6
3	3	15	0	6
4	2	11	2	9
5-a	1	1	11	11
5-b	2	0	8	14
5-c	1	0	5	18
Total	15	58	67	76
%	6,94%	26,85%	31,02%	35,19%

Fonte: autores

Ainda, de maneira geral, foram consideradas corretas as respostas que obtiveram o resultado final esperado e apresentaram uma justificativa matemática plausível para ela. Foram consideradas parcialmente corretas, as questões em que a estratégia utilizada foi adequada, mas que houve um equívoco na obtenção da resposta final. Também se enquadram aqui as respostas em que o resultado final está correto, mas a justificativa matemática não é plenamente aceitável. Já as respostas em branco são aquelas que estavam em branco e as que não foram possíveis compreender o que o aluno fez, nem ao entrevistá-lo. Já as incorretas são aquelas que não se enquadram nas categorias acima descritas.

Ao fazermos uma análise do Quadro 2 é possível notar que a maioria das questões foi deixada em branco, e apenas uma pequena parte das respostas foi considerada correta. O alto índice de respostas em branco é preocupante, com destaque para a questão **5** fato que, acredita-se, deve-se a falta de motivação dos alunos, por se tratar da última questão e não valer “nota”, além de apresentar maior complexidade. Pode-se destacar, também, o item **b** da questão **1** não ter sido

respondido de forma integralmente correta por nenhum dos participantes, levando a um alto índice de respostas incorretas.

Outra observação que pode ser feita a partir do Quadro 2 é que há um aumento gradativo no número de respostas em branco no decorrer do questionário, possivelmente relacionado a motivação e empenho dos alunos na resolução das questões.

No Quadro 3 é exposta a quantidade de erros em cada categoria, conforme a classificação apresentada na metodologia. O detalhamento de cada uma delas é apresentado a seguir.

Quadro 3 - Frequência de erros

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito de objetivos	14
		Incompreensão de objetivos	11
	Percepção da informação	Distorção	1
	Compreensão	Conceitual	34
Lógica		8	
Organização	Análise e síntese		22
	Conexão e inferência		20
	Ordenação		1
Execução	Erro Operacional		6
	Erro estratégico		36

Fonte: autores

Por meio da análise do Quadro 3 percebe-se que a maior concentração de erros foi aquele que classificamos como erro de estratégia, seguido por erros classificados como de compreensão conceitual. A partir da observação dessa concentração, reforça-se a necessidade de se desenvolver atividades com os alunos, focando nas escolhas das estratégias a serem utilizadas, visto que ocorreu prioritariamente o uso de tentativa e erro e o uso de subsunçores aplicáveis a situações lineares, onde estes não eram aplicáveis, como será apresentado mais adiante. Reforça-se também, a necessidade do desenvolvimento dos conceitos necessários para a resolução das situações problemas.

Seguindo com a análise do Quadro 3, têm-se os erros classificados como de intenção e de conexão e inferência. Os erros de intenção por incompreensão do objetivo são devidos a questão 5. Já os de conflito de objetivo é devido a desvio por parte dos alunos do solicitado na questão. Os erros de conexão e inferência foram derivados da influência das figuras e de erros cometidos em itens anteriores. Esses tópicos serão trabalhados com os alunos em atividades futuras que serão desenvolvidas.

Já os de análise e síntese, demonstram a dificuldade dos alunos em dar continuidade aos exercícios, interrompendo-os no meio. Pretende-se desenvolver atividades que contemplem essas abordagens. Menciona-se que tais erros também podem ser devidos a falta de empenho dos estudantes em virtude da atividade “não valer nota”.

Em especial ainda menciona-se que a maioria dos erros ocorreu na dimensão da entrada, os quais podem ser causados por um ensino não direcionado ou mal formulado, e neste caso os demais erros seriam todos consequência deste fato.

A seguir serão apresentadas as questões propostas no questionário aplicado aos alunos participantes, juntamente com explicações e esclarecimentos a respeito dos critérios utilizados nesta classificação.

Questão 1:

(Adaptada ENEM 2013) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

a) Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento esses lados foram reduzidos em 20%. A área da base dessa peça, após o cozimento foi reduzida em quantos cm^2 ?

b) Supondo que a redução das dimensões lineares da peça ocorreu de forma gradual, em relação aos lados originais (30 cm e 15 cm), esboce o gráfico que representa a área em relação à Porcentagem em que os lados diminuíram.

Objetivos e expectativas

Nesta questão esperava-se verificar se os alunos possuíam a habilidade de retirar os dados de uma situação-problema e reescrevê-la em linguagem matemática. Também visava-se averiguar a existência de subsunçores referentes aos conteúdos de geometria, em particular ao léxico de áreas e de porcentagem, além de verificar se os alunos conseguiriam relacionar a área da figura com a variação das medidas e representar graficamente esta relação.

Visão Geral item a

Ao realizar o levantamento foi constatado que dos 24 alunos, apenas 1 deixou o item **a** em branco e dois responderam corretamente. A maior incidência de erros ocorreu pelo não reconhecimento de que a área não é uma relação linear e que, portanto não é possível aplicar as "regras" de proporção. Tais erros foram classificados como de compreensão conceitual e de estratégia. Observamos que será necessário auxiliar os alunos na formação dos subsunçores referente a identificação de situações não-lineares, em virtude de seus subsunçores estarem esquematizados para aplicar o processo linear em situações cujo grau de complexidade exige a modelagem pela função quadrática.

Também foram detectados erros operacionais, em que os alunos não acertaram alguns cálculos. Além disso, observaram-se erros de conflito de objetivo, que foram ocasionados pela obtenção da área reduzida e não o quanto ela foi reduzida, acredita-se, sobre estes casos que os próprios alunos devem ser capazes de perceber se refizerem o exercício.

Outro tipo de erro observado foi o de compreensão lógica, ocasionados por dificuldades em relacionar as informações no processo cognitivo. No Quadro 4 apresenta-se a frequência de cada tipo de erro.

Quadro 4 - frequência de erros nas respostas ao item 1-a

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito de objetivos	5
	Compreensão	Conceitual	10
		Lógica	3
Organização	Análise e síntese		1
Execução	Erro Operacional		5
	Erro estratégico		9

Fonte: autores

Com base no apresentado pode-se notar que apesar dos alunos saberem a fórmula que determina a área de um retângulo, a maioria não possui tal subsunção suficientemente estável e inter-relacionado, pois não conseguiram relacionar de forma efetiva a área como função da diminuição dos lados. No que se refere ao conteúdo de Porcentagem aqueles que se utilizaram deste conceito não demonstraram maiores dificuldade.

Análise do item a

Apenas o aluno A9 deixou esta questão em branco e os estudantes A22 e A23 acertaram; os demais cometeram algum tipo de erro. A Figura 4 apresenta a resposta do aluno A22, que foi considerada integralmente correta.

Figura 4- Resolução da questão 1 item a do aluno A22

a)

$$A_1 = 30 \times 15$$

$$A_1 = 450 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 24 \times 12$$

$$A_2 = 288 \text{ cm}^2$$

$$30 - \frac{20 \cdot 30}{100} = 30 - 6 = 24 \text{ cm}$$

$$15 - \frac{20 \cdot 15}{100} = 15 - 3 = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Redução: } 450 - 288 = 162 \text{ cm}^2$$

Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A3, A6, A11 e A21 cometeram erro de intenção por conflito de objetivos ao obter o valor da área da peça apenas a redução dos lados, 288 cm^2 , ao invés do valor de em quantos cm^2 a área foi reduzida, tendo então, a questão considerada como parcialmente correta. Como exemplo, na Figura 5 encontra-se a resolução de A11 na qual ele obteve o valor da área após a redução dos lados (288 cm^2).

Figura 5 - Resolução da questão 1 item a do aluno A11

Handwritten student work for A11 showing calculations for a 30% reduction in length and a 20% reduction in width, resulting in a final area of 288 m^2 .

$$\begin{array}{l} \text{a) } 100\% \rightarrow 30 \\ 80\% \rightarrow x \\ x = \frac{240}{16} \\ \boxed{x = 24 \text{ cm}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 100\% \rightarrow 15 \\ 80\% \rightarrow x \\ x = \frac{120}{16} \\ \boxed{x = 12 \text{ cm}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \quad \begin{array}{|c|} \hline 24 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{288 \text{ m}^2} \end{array}$$

Fonte: participantes da pesquisa

Relata-se que, nesta mesma categoria de erros esta a resposta do aluno A4 por ter apresentado como resposta quanto cada lado reduziu, quando deveria apresentar a redução da área, conforme apresenta a Figura 6.

Figura 6 - Resolução da questão 1 item a do aluno A4

Handwritten student work for A4 showing calculations for a 30% reduction in length and a 20% reduction in width, resulting in a final area of 6 cm^2 .

$$\begin{array}{l} 100x = 15 \cdot 20 \\ x = \frac{30}{100} \\ \boxed{x = 3 \text{ cm}^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 30 \rightarrow x \\ 100 \rightarrow 20\% \\ 100x = 30 \cdot 20 \\ x = \frac{600}{100} \Rightarrow \boxed{x = 6 \text{ cm}} \end{array}$$

30cm foi reduzido 6 cm^2 ,
15cm foi reduzido 3 cm^2

Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A6, ainda apresentou erro operacional ao cometer erros nos cálculos, assim como os alunos A1, A8, A18. As respostas apresentadas por eles foram consideradas como parcialmente corretas, devido ao fato de que os objetivos

propostos para a questão foram atingidos, apesar dos erros de cálculo. Na Figura 7, é apresentada a resolução do aluno A6.

Figura 7 - Resolução da questão 1 item a do aluno A6

a) $\begin{array}{l} \text{[]} \\ \text{30} \quad \text{15} \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{[]} \\ \text{24} \quad \text{12} \end{array}$

$A = b \cdot h$ $A = b \cdot h$
 $A = 30 \cdot 15$ $A = 24 \cdot 12$
 $A = 450$ $A = 208$

Foi reduzido em 208 cm^2

Fonte: participantes da pesquisa

Nove alunos participantes, A5, A7, A10, A14, A15, A16, A17 e A19, apresentaram um erro que foi classificado como de compreensão conceitual e de estratégia. Esses estudantes fizeram a redução da Porcentagem na área e não nos lados, como podemos visualizar na Figura 8. A resolução desenvolvida por eles foi considerada incorreta, pois os alunos desconsideraram o fato de que a variação da área do retângulo, da forma em que foi apresentada, não é linear.

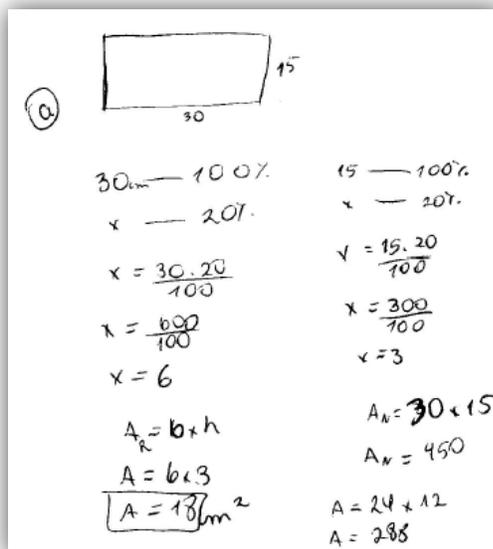
Figura 8 - Resolução da questão 1 item a do aluno A19

a) $\begin{array}{l} \text{[]} \\ \text{150cm} \\ \text{300cm} \end{array}$ $A = b \cdot h$ $450 = 100\%$
 $A = 30 \cdot 15$ $\times \quad \geq 20\%$
 $A = 450$ $\% = \frac{450 \cdot 20}{100} = \frac{9000}{100} = 90 \text{ cm}^2$

Fonte: participantes da pesquisa

Os estudantes A2, A12 e A13 apresentaram erro de compreensão lógica, pois demonstraram dificuldades em relacionar as informações ao processo cognitivo, como exemplificado na Figura 9.

Figura 9 - Resolução da questão 1 item a do aluno A2



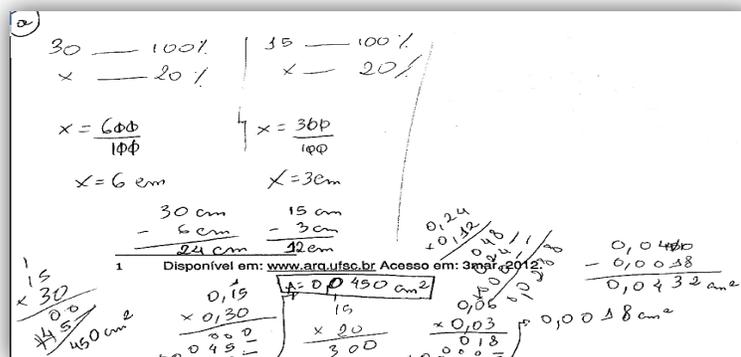
$30 \text{ cm} \text{ --- } 100\%$ $15 \text{ --- } 100\%$
 $x \text{ --- } 20\%$ $x \text{ --- } 20\%$
 $x = \frac{30 \cdot 20}{100}$ $x = \frac{15 \cdot 20}{100}$
 $x = \frac{600}{100}$ $x = \frac{300}{100}$
 $x = 6$ $x = 3$
 $A_R = b \times h$ $A_N = 30 \times 15$
 $A = 6 \times 3$ $A_N = 450$
 $A = 18 \text{ cm}^2$ $A = 24 \times 12$
 $A = 288$

Fonte: participantes da pesquisa

Observa-se, na Figura 9, que A2 deveria obter o resultado de quantos centímetros havia sido reduzida a área do retângulo, porém obteve a área reduzida, mas não efetuou a subtração da área original e ainda indicou que a resposta correta seria 18 cm^2 , valor obtido pela multiplicação das medidas que cada lado reduziu e, por isso, a questão foi considerada incorreta.

A Figura 10 apresenta a resolução do participante A13; além do mesmo erro cometido pelo aluno A2, também apresentou erro operacional ao trabalhar com os valores das medidas dos lados como $0,15$ e $0,30 \text{ cm}$, sendo que, elas deveriam ser 15 e 30 cm , dessa forma, obtendo como resultado o valor $0,0018 \text{ cm}^2$, estando assim a resposta incorreta.

Figura 10 - Resolução da questão 1 item a do aluno A13



$30 \text{ --- } 100\%$ $15 \text{ --- } 100\%$
 $x \text{ --- } 20\%$ $x \text{ --- } 20\%$
 $x = \frac{30 \cdot 20}{100}$ $x = \frac{15 \cdot 20}{100}$
 $x = 6 \text{ cm}$ $x = 3 \text{ cm}$
 $30 \text{ cm} \quad 15 \text{ cm}$
 $- 6 \text{ cm} \quad - 3 \text{ cm}$
 $\hline 24 \text{ cm} \quad 12 \text{ cm}$
 $A = 24 \times 12 = 288 \text{ cm}^2$
 $A = 30 \times 15 = 450 \text{ cm}^2$
 $A = 0,0018 \text{ cm}^2$

Fonte: participantes da pesquisa

A Figura 11 apresenta a resolução do aluno A20 que apresentou erro de análise e síntese, pois obteve o valor da medida em que os lados reduziram, mas não terminou a resolução da questão, demonstrando dificuldade em identificar os passos seguintes.

Figura 11 - Resolução da questão 1 item a do aluno A20

Handwritten work showing calculations and a diagram:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 20 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$100 - 20\% = 80$$

$$80 \cdot x = 300 \quad x = 3.75$$

$$100 - 20\% = 80$$

$$80 \cdot x = 600 \quad x = 7.5$$

Diagram: A right-angled triangle with legs of 30 and 15, and a hypotenuse of 33.

Fonte: participantes da pesquisa

Já o aluno A24 aparentemente apresentou erro de compreensão conceitual ao não fazer uso correto das regras de proporcionalidade, conforme apresenta a Figura 12. As resoluções desses alunos foram classificadas como incorretas.

Figura 12 - Resolução da questão 1 item a do aluno A24

Handwritten work showing calculations:

$$\frac{20\%}{450} = \frac{x}{20}$$

$$\frac{450}{20} = \frac{22.5\%}{22.5}$$

Diagram: A right-angled triangle with legs of 20 and 15, and a hypotenuse of 25.

$$Ab. n = 20 \cdot 15 = 450$$

$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 22.5 \\ \hline 9000 \\ 9000 \\ \hline 10125 \end{array}$$

Fonte: participantes da pesquisa

Visão geral do item b

A análise do item **b** revela que 4 alunos não o responderam, incluindo o mesmo que não respondeu o item **a**. Chama atenção o fato de que nenhum dos alunos acertou o item, em virtude de uma grande dificuldade dos alunos na confecção do gráfico, pois 4 deles apresentaram gráficos diversos ao esperado, o que foi classificado como sendo erro de estratégia.

Seguindo a análise do item **b**, verificou-se que 10 alunos apresentaram respostas que foram classificadas como erro de análise e síntese por terem apresentado os eixos cartesianos e marcado alguns pontos, mas sem esboçar um gráfico contínuo que era a resposta esperada. Repetem-se aqui os erros cometidos devido ao conflito de objetivos, já que, em alguns casos os eixos foram feitos com medidas diferentes das solicitadas. O Quadro 5 apresenta a frequência de erros deste item.

Quadro 5 - frequência de erros nas respostas ao item 1-b

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito de Objetivos	7
	Compreensão	Lógica	1
Organização	Análise e síntese		10
	Conexão e inferência	Devido a erro na item a	3
Execução	Erro estratégico		4

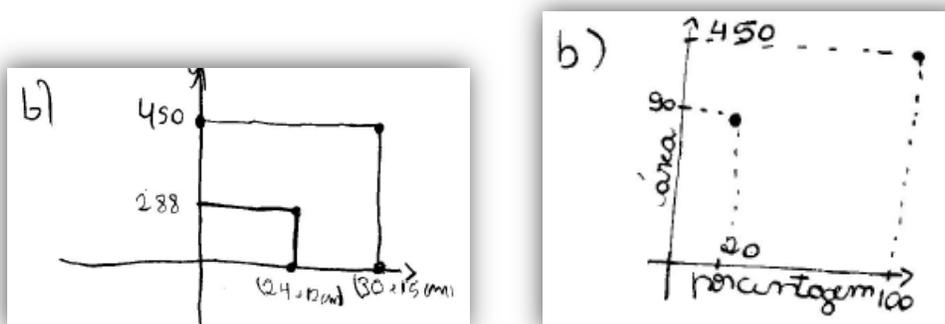
Fonte: autores

Assim, percebe-se uma grande dificuldade por parte dos alunos em relacionar medidas e expressá-las em forma de gráfico; porém, imaginamos que os alunos possuem os subsunçores de gráfico e medidas, mas que não vêem a relação existente entre eles. Dessa forma, conclui-se que é necessário auxiliar os alunos a relacionar tais subsunçores assim, pensamos em atividades que abordem tais tópicos.

Análise do item b

Quanto a este item os alunos A4, A5, A6 e A9 deixaram em branco. Os alunos A1, A2, A7, A8, A12, A15, A19, A20, A23 e A24 cometeram erro de análise e síntese, pois, ao apresentarem os eixos cartesianos, eles marcaram alguns pontos, mas sem qualquer esboço do gráfico, sendo a resolução considerada incorreta. Além disso, os alunos A1, A2, A8, A12 e A15 ainda apresentaram erro de intenção por conflito de objetivos ao apresentarem um dos eixos em centímetros ao invés de Porcentagem, como havia sido solicitado. A Figura 13, apresenta exemplos desses gráficos.

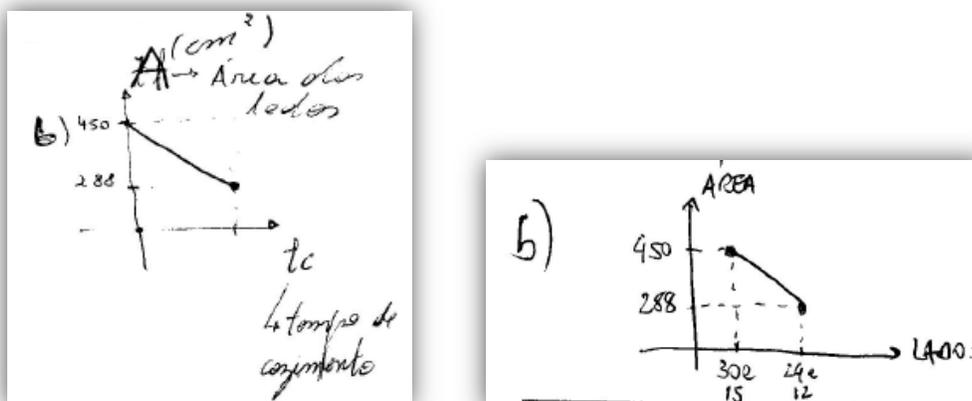
Figura 13 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A1 (esquerda) e A19 (direita)



Fonte: participantes da pesquisa

Os estudantes A3 e A22, também cometeram erro classificado como de intenção por conflito de objetivos, visto que utilizaram tempo de cozimento e centímetros, respectivamente, e suas resoluções foram consideradas parcialmente corretas. A Figura 14, apresenta a resolução dos referidos participantes.

Figura 14 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A3 (esquerda) e A22 (direita)



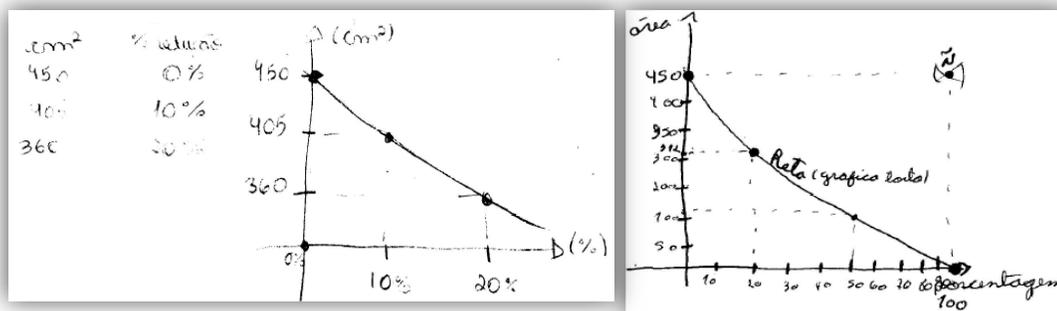
Fonte: participantes da pesquisa

Vê-se aqui que eles não possuíram clareza sobre quais são as variáveis dependentes e independentes solicitadas na situação-problema, o que demonstra a necessidade de se trabalhar com os subsunçores de funções e dependência entre variáveis. Na entrevista o aluno A22 atribuiu a distração ao erro, o aluno A3 não foi entrevistado.

Os alunos A14, A16 e A18 apresentaram erro classificado como de conexão e inferência, pois o erro cometido no item a, levou-os ao erro também no item b, conforme apresenta a Figura 15, sendo suas respostas consideradas parcialmente

corretas. A observação de que um erro levou a outro reforça a necessidade de se trabalhar com a relação entre medidas e funções.

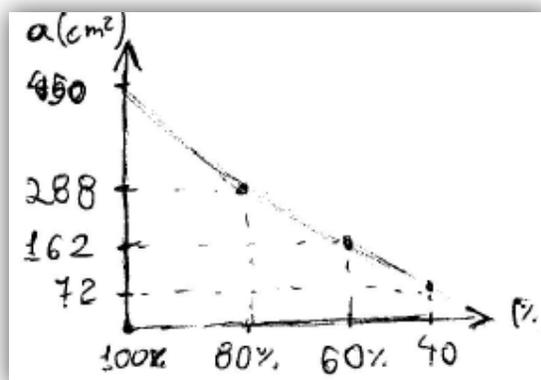
Figura 15 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A14(a esquerda) e A18 (a direita)



Fonte: participantes da pesquisa

A resolução do aluno A21 foi considerada parcialmente correta, pois apresentou erro classificado como de compreensão lógica, por não ter respeitado a ordem crescente dos números, conforme apresenta a Figura 16.

Figura 16 - Resolução da questão 1 item b do aluno A21

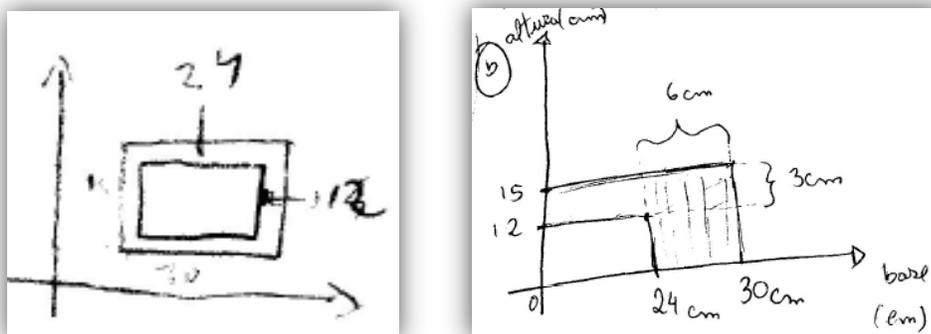


Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A10, A11, A13 e A17 cometeram erro que se classifica como de estratégia, ao representar a área de forma diversa a solicitada, sendo essas respostas consideradas incorretas. Como visível na Figura 17, o aluno A10 fez uma representação geométrica que apresenta um tipo de variação, porém percebe-se que o aluno não conseguiu realizar a ligação com os conceitos de gráfico de função.

Na mesma figura também vemos a resolução de A13 que percebeu o “gráfico” como uma variação da área.

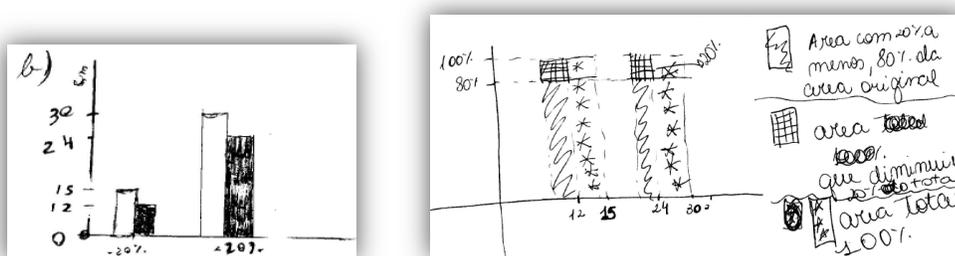
Figura 17 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A10(a direita) e A13 (a esquerda)



Fonte: participantes da pesquisa

A Figura 18 apresenta o gráfico dos alunos A11 e A17. É interessante perceber que os alunos representaram a variação da área, no formato de um gráfico de barras.

Figura 18 - Resolução da questão 1 item b dos alunos A11 (a direita) e A17(a esquerda)



Fonte: participantes da pesquisa

No que segue realizaremos a análise das respostas dos alunos a questão 2.

Questão 2:

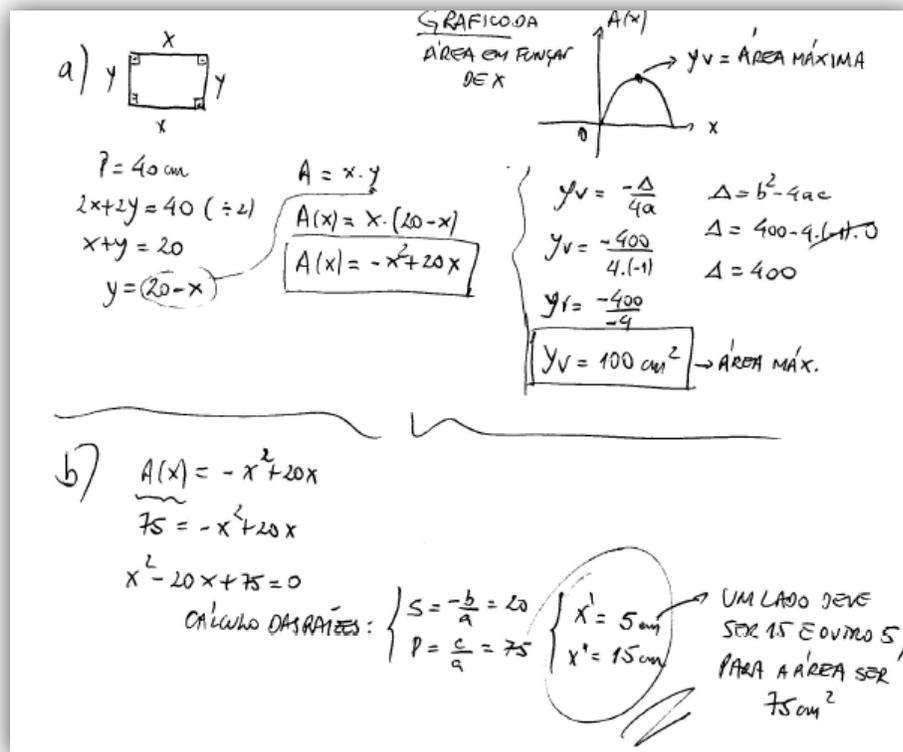
Dado um retângulo cujo perímetro sempre mede 40cm.

- Calcule a área máxima (maior área possível).
- Quanto deve medir cada lado do retângulo para que a área seja 75cm^2 .

Objetivos e expectativas

Nessa questão, o objetivo era verificar o domínio dos conceitos de relação entre variáveis, ou seja entre os conceitos de área e perímetro, função quadrática (máximo/mínimo). Considerou-se correta a forma de resolução apresentada pelo aluno A22, conforme Figura 19.

Figura 19 - Resolução da questão 2 itens a e b do aluno A22



Fonte: participantes da pesquisa

Destaca-se que existe mais do que uma maneira de determinar a resposta que pode ser considerada correta.

Visão Geral do item a

A partir da análise do item a, observamos que 7 alunos a deixaram em branco, 2 acertaram, e 15 apresentaram algum tipo de erro. O

Quadro 6 apresenta a classificação dos erros, considerando que um aluno pode ter cometido mais de um erro simultaneamente.

Quadro 6 - frequência questão 2-a

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Compreensão	Conceitual $P=x+y$	2
		Conceitual (Quadrado não é retângulo)	4
Organização	Análise e síntese		1
	Ordenação		1
Execução	Erro estratégico	Tentativa e erro	5
		Sem justificativa	7

Fonte: autores

Como pode ser observado no Quadro 6, a maioria dos erros ocorreu na dimensão da execução, pela escolha da estratégia, ao não justificar a resposta ou fazer por tentativa e erro. Tal fato pode ser resultado de um ensino que avalia somente as respostas, sem considerar o desenvolvimento, como ocorre no ENEM/Vestibular.

Um fator que chama atenção ao se realizar a análise é que 4 alunos não consideraram o quadrado como sendo um retângulo, fato considerado preocupante. Esta questão permitiu a visualização de um erro que não era esperado e que pode ser atribuído à fragilidade nos conceitos de Geometria Plana. Outro equívoco observado em relação a conceitos foi que 2 alunos consideraram o perímetro como sendo a soma de dois lados.

Outro ponto preocupante é que quase 1/3 dos alunos deixaram em branco a questão. Desses os alunos A10 e A15 foram entrevistados e afirmaram ter deixado em branco em virtude de não terem visto Geometria Plana na escola.

De tais fatos, pode-se inferir que os alunos chegam a universidade sem ter os subsunçores relativos aos conceitos de Geometria Plana da maneira esperada, apresentando-os sem as devidas conexões. Um exemplo disso é que os alunos não reconheceram que o quadrado é um retângulo, conhecimento este que deveriam ter, e entendem o perímetro como sendo a soma de dois lados, o que está incorreto. Ademais, não foi possível verificar os subsunçores dos alunos sobre funções quadráticas, pois a maioria não se utilizou de tais conhecimentos, no máximo

podemos especular que aqueles que o possuem, o tem de forma estanque e separada dos demais conteúdos.

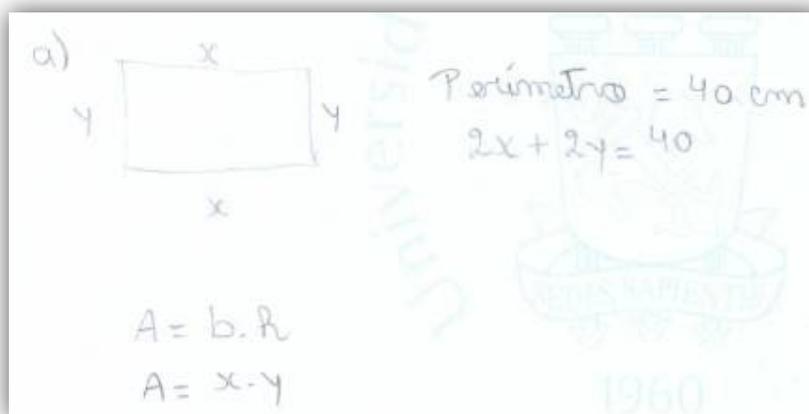
Análise do item a

Dos 24 alunos que responderam a pergunta 4, (A12, A6, A10, A4) deixaram em branco ambos os itens, não sendo portanto considerados para a análise.

Os alunos A5, A14 e A19 deixaram somente o item **a)** em branco. Já os alunos A22 e A21 responderam corretamente, como exemplo a resolução de A22 pode ser vista na Figura 19.

O aluno A23, formulou a resolução corretamente, da forma esperada, mas não a desenvolveu, como é visível na Figura 20. Assim, classificou-se esse erro como de análise e síntese, pois ele não conseguiu identificar os passos seguintes, tendo então a questão considerada como incorreta.

Figura 20 - Resolução da questão 2 item a do aluno A23



Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A17 e A3 apresentaram erro que foi classificado como de compreensão conceitual, pois consideraram o perímetro como sendo a soma de dois lados, e não de todos os lados como é o correto. Além disso, eles obtiveram a área máxima por tentativa e erro como sendo 400 cm^2 , apresentando também, um erro classificado como de estratégia; a Figura 21 apresenta um exemplo dessas resoluções que foram consideradas como incorretas.

Figura 21 - Resolução da questão 2 item a do aluno A3

Handwritten work showing calculations for a perimeter problem. The perimeter is given as 40 cm. The student has written 20 and $4000m^2$. The calculations shown are:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 19 \\ \hline 177 \\ 460 \\ \hline 437 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 18 \\ \hline 164 \\ 396 \\ \hline 396 \end{array}$$

The final result is $396cm^2$.

Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A11 cometeu um erro classificado como de ordenação, ao misturar o que foi solicitado no item a com as informações do item b, e sua resolução foi considerada incorreta.

Figura 22 - Resolução da questão 2 do item a do aluno A11

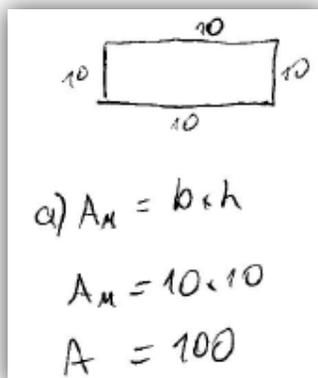
a) Calcule a área máxima (maior área possível). $75cm^2$

b) Quanto deve medir cada lado do retângulo para que a área seja $75cm^2$

Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A2, A7, A9, A20 e A24, resolveram a questão de forma correta, contudo cometeram erro de estratégia ao não justificarem a resposta, simplesmente colocando $10 \times 10 = 100$, como pode ser observado na Figura 23. Nesse caso, considera-se suas respostas como parcialmente corretas. Ressalta-se que aqui os alunos não externalizaram os conhecimentos prévios, o que não significa que eles não os possuam, em entrevista com o aluno A24 este deu a entender que adivinhou os valores corretos.

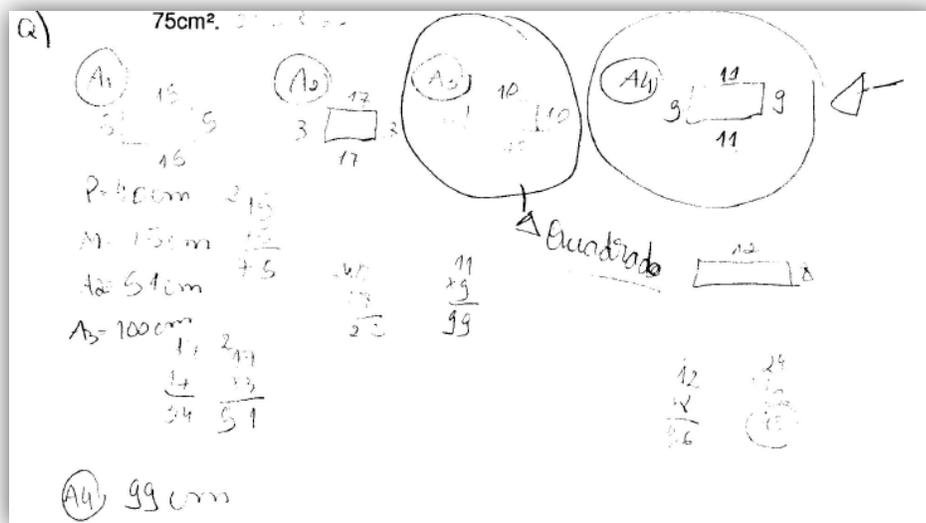
Figura 23 - Resolução da questão 2 item a do aluno A2



Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A1, A8, A13, A15, A16 e A18 apresentaram erro de estratégia ao fazerem a resolução da questão por tentativa e erro, sendo consideradas parcialmente corretas. A Figura 24 apresenta um exemplo desse fato.

Figura 24 - Resolução da questão 2 e item a do aluno A15



Fonte: participantes da pesquisa

Já os alunos A13, A15, A16 e A18 tiveram suas respostas consideradas incorretas por apresentarem erro classificado como conceitual, pois os mesmos não consideraram o quadrado como sendo um retângulo. A Figura 25 apresenta um exemplo do que foi mencionado.

Figura 25 - Resolução da questão 2 e item a do aluno A16

a)

$5 \times 15 = 75$
 $9 \times 11 = 99$
 $10 \times 10 = 100$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 14 \\ \times 6 \\ \hline 84 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 13 \\ \times 7 \\ \hline 91 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 11 \\ \times 9 \\ \hline 99 \end{array}$

$A = b \cdot h$
 $11 = b$
 $9 = h$
 $99 = A$

$18,99$
 $\times 8,99$
 $\hline 91$

e) A área será máxima quando a base (maior) estiver acima 10, por exemplo 11 e a altura (aresta menor) for o menor parte de 10 por exemplo 9 com isso $11 + 9 + 11 + 9 = 40$ cm de perímetro e área Total igual 99 cm^2 .

Fonte: participantes da pesquisa

Com base no que o aluno A16 escreveu e na entrevista vê-se que o aluno tinha noção de que área máxima deveria ser 10×10 . Porém, errou ao não considerar o quadrado como sendo um retângulo, provavelmente devido a não conexão entre os subsunçores referentes às figuras planas.

Visão geral do item b.

Dos 24 alunos que participaram da pesquisa, 6 deixaram em branco e dois acertaram esse item.

Quadro 7 - frequência questão 2 item b

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito do objetivo	1
	Compreensão	Lógica	2
		Conceitual	1
Organização	Análise e Síntese	Omissão de $P = 40 \text{ cm}$	5
Execução	Erro estratégico	Tentativa e erro ou sem justificativa	11

Fonte: autores

Pode-se notar a repetição do erro estratégico, que já havia sido observado no item anterior, devido à falta de uma justificativa matemática dos alunos à suas resoluções, algo que se considera preocupante, já que os alunos apresentaram uma resposta, mas não justificaram como a determinaram. Um fato que chama atenção é que 5 alunos falharam em perceber a ligação do enunciado do problema com o item b, ou seja, cometendo assim, erro de análise e síntese por não consideraram o perímetro como sendo 40cm.

Análise do Item b

Os alunos A21 e A22 acertaram a questão e a resolveram da forma esperada, como apresentado anteriormente na Figura 19, enquanto que, outros 11 alunos apresentaram o resultado correto, mas o fizeram por tentativa e erro ou não apresentaram justificativa, cometendo o erro classificado como de estratégia e suas resoluções foram consideradas parcialmente corretas. Como exemplo, podemos visualizar a resolução do aluno A5 e A14 apresentadas na Figura 26, respectivamente.

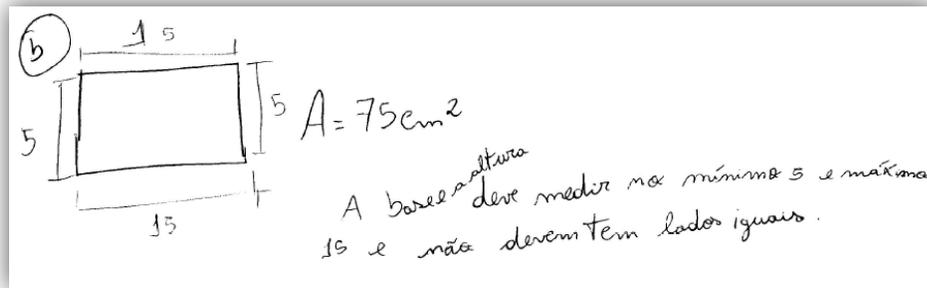
Figura 26 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A5 (acima) e A14 (abaixo)

Handwritten solution for student A5. On the left, a square is drawn with side lengths labeled as 15. To the right, the calculations are: $A_2 = 15 \cdot 5$, $A_2 = 75 \text{ cm}^2$, and a vertical multiplication $\begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$.

Handwritten solution for student A14. On the left, a vertical list of numbers: 45, 25, 2, 4. To the right, two squares are drawn. The first square has side length 25 and perimeter calculation $P = 25 + 25 + 25 + 25 = 100$. The second square has side length 15 and perimeter calculation $P = 15 + 15 + 15 + 15 = 60$. Below these, it says $P = 56 \neq 40$ with a large 'X' and $P = 40$ with a checkmark. At the bottom, it says "concluiu que as lados são 15 cm e 15 cm."

Na Figura 27 podemos observar a resolução desenvolvida pelo aluno A13, na qual ele apresentou um erro classificado como de compreensão lógica, ao utilizar as palavras no mínimo 5 e no máximo 15 sendo que os valores deveriam ser exatamente 5 e 15. Contudo não está muito claro, a intenção do aluno, entretanto não foi possível entrevista-lo.

Figura 27 - Resolução da questão 2 item b de A13



Fonte: participantes da pesquisa

Outros 5 alunos cometeram erro de análise e síntese, ao desconsiderar que o perímetro deveria medir 40cm, como exemplo apresenta a Figura 28 apresenta a resolução dos alunos A2 e A15, sendo consideradas incorretas as respostas.

Figura 28 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A2 (esquerda) e A15 (direita)

Handwritten solution for question 2 item b by student A2. It shows a rectangle with a top side of 37.5 and a bottom side of 37.5. The area is calculated as $A = ba \cdot hc$, resulting in 75.

Handwritten solution for question 2 item b by student A15. It shows the area calculated as $A = 75$, then $A = 9 \cdot 37.5 \cdot 8$, and finally $A = 75$.

Fonte: participantes da pesquisa

Os outros três alunos que cometeram erro de análise e síntese, A24, A9 e A20 cometeram outros erros simultaneamente, visíveis na Figura 29.

Figura 29 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A24 (A), A9 (B) e A20 (C)

b) $75 \overline{) 4}$ CADA LADO 18,75

$$\begin{array}{r} 18,75 \\ 4 \overline{) 75} \\ \underline{35} \\ 40 \\ \underline{38} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

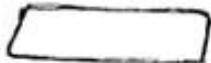
A

b) $75 \overline{) 4}$

$$\begin{array}{r} 18,75 \\ 4 \overline{) 75} \\ \underline{32} \\ 430 \\ \underline{38} \\ 500 \\ \underline{48} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

Um lado valeu mediu 18,75cm

B



$$\begin{array}{l} a = l^2 \\ 75 = l^2 \\ l = \sqrt{75} \end{array}$$

C

Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A24, apresentou conflito de objetivo na questão ao dividir 75 cm^2 por 4 afirmando ter obtido seus lados. O aluno A9, fez algo parecido, mas apresentou erro de compreensão lógica ao misturar e confundir os conceitos de área, lado, perímetro. Já o estudante A20, apresentou também erro de compreensão conceitual quando obteve que o lado valeria a raiz quadrada de 75, confundindo a área do quadrado com a do retângulo.

As respostas dos alunos A3 e A23 foram desconsideradas, pois, apesar de apresentarem algumas informações, não foi possível identificar uma resposta, conforme Figura 30.

Figura 30 - Resolução da questão 2 item b dos alunos A3 (acima) e A23 (abaixo)

b) ?

*Resposta
de
um
aluno
com
fórmula*

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 2} \\ - 6 \\ \hline 15 \\ - 14 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 15 \\ - 14 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 5} \\ - 6 \\ \hline 15 \\ - 14 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

3

3

b) $A = 75 \text{ cm}^2$

$$A = b \cdot h$$

$$75 = x \cdot y$$

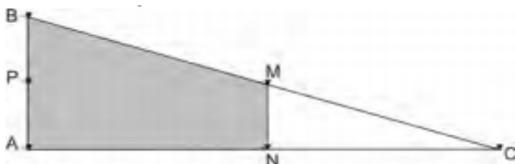
$$y = \frac{75}{x}$$

$$x = \frac{75}{y}$$

Fonte: participantes da pesquisa

Questão 3:

(ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde?

- a) À mesma área do triângulo AMC
- b) A mesma área do triângulo BNC

- c) A metade da área formada pelo triângulo ABC
- d) Ao dobro da área do triângulo MNC
- e) Ao triplo da área do triângulo MNC

Objetivos e expectativas:

Esta questão tinha por objetivo avaliar se os alunos possuíam os subsunções necessários para resolução de uma situação problema que envolvesse o cálculo de áreas ou semelhança de triângulos, permitindo também que os alunos escolhessem a estratégia que lhes conviesse.

Visão Geral

Entre as respostas analisadas três foram consideradas corretas, 15 apresentaram erros e seis foram descartadas. Sendo que das seis respostas descartadas, um aluno deixou em branco, quatro assinalaram a alternativa incorreta e um assinalou a alternativa correta, mas sem qualquer justificativa. Este descarte se justifica conforme dito por Cury (2013, p.66): “[..] aquelas em que o estudante deixou em branco a resolução ou apenas indicou a resposta final, sem o desenvolvimento, são descartadas.”

Das 12 respostas restantes, todas foram classificadas como erros de conexão e inferência onde seis apresentaram somente o esboço sobre a figura apresentada na questão e os outros seis apresentaram justificativas baseadas nesta figura, entretanto todos marcaram a alternativa corretas (e) sendo classificados como parcialmente corretas.

Quadro 8 - Frequência questão 3

Dimensões do erro	Tipo de erro	Frequência
Organização	Conexão e inferência	12

Fonte: autores

Aqui, destaca-se o fato de que apesar da questão possuir uma imagem esclarecedora, quatro alunos marcaram a alternativa incorreta. Observa-se também que maioria se baseou na figura para responder, o que se acredita ser o resultado de uma fraca base no ensino médio, fato que foi comprovado para maioria dos

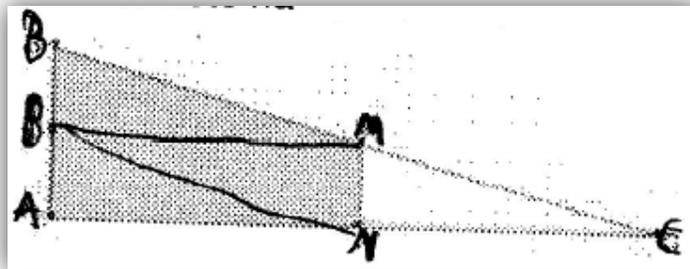
alunos entrevistados, ou por terem passado num ensino que avalia somente a resposta final, não avaliando o processo. Sendo assim, é possível deduzir uma fraqueza nos subsunçores de semelhanças e áreas, bem como no conhecimento do que é uma resposta matematicamente correta.

Análise:

Dos 24 alunos, A1, A2 e A4 marcaram a alternativa letra D, A6 marcou a alternativa B, A3 e A9 marcaram a alternativa correta, letra E, mas não apresentam a qualquer justificativa visível e não possível entrevista-los sendo descartadas suas respostas.

Das 18 respostas restantes todos marcaram a alternativa correta, entretanto em sua maioria não há uma justificativa matemática aceitável. Como no caso dos alunos A8, A10, A15, A17, A20 e A23 em que a única justificativa visível é similar a desenvolvida pelo aluno A10 apresentada na Figura 31.

Figura 31 - Resolução da questão 3 do aluno A10



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A15 além de um desenho similar a esse ainda apresentou a seguinte justificativa: “Porque pelo desenho podemos ver que é mais que o dobro da área do triângulo MNC”. Dessa forma essas respostas foram classificadas como erro de conexão e inferência, por se basearem no desenho/modelo empírico para justificar a resposta. Nota-se que esses alunos não se utilizaram de nenhum conhecimento matemático prévio, baseando se na imagem exibida e na intuição.

Os outros seis alunos A11, A12, A16, A18 A19 e A24 apresentaram o mesmo tipo de erro, mas com justificativas diversas, que apresentaram uma ideia intuitiva de semelhança mas fundamentam-se na figura apresentada, tais como os exemplos visíveis na Figura 32.

Figura 32 - Resolução da questão 3 dos alunos A11 (A), A19 (B) e A24 (C)

<p>Percebi que a área coberta pode ser dividida em 3 parts iguais de cada lado calçada, assim encontramos o letra "E"</p>	A
<p>Porque se pegarmos o triângulo MNC e colocarmos por cima do outro ele se divide no MNC</p>	B
<p>Por o triângulo MNC cabe 3 vezes na área de ABMN</p>	C

Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A7, A13 e A22 apresentaram como justificava semelhança de triângulos e proporcionalidade, conforme apresenta a Figura 33, sendo consideradas parcialmente corretas.

Já os alunos A5, A14 e A21 responderam corretamente utilizando o cálculo de áreas ou afirmando que os lados dos triângulos são iguais, conforme apresenta a Figura 34.

Figura 33 - Resolução da questão 3 do aluno A22



Fonte: participantes da pesquisa

Figura 34 - Resolução da questão 3 dos alunos A5 (acima) e A21 (abaixo)

- Ao pegar o ponto médio P_c tracamos ligando
 os pontos M e N, veremos que na "calçada"
 forma-se três triângulos;
 - logo ao termos os dados que os pontos
 M e N são os pontos médios do triângulo
 ABC, deixamos estes que dentro de área
 e se conectamos temos três meios dos
 do triângulo MNC.
 O que conclui um terço o triplo
 da área MNC.

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde?

a) ~~A mesma área do triângulo AMC~~
 b) ~~A mesma área do triângulo BNC~~
 c) ~~A metade da área formada pelo triângulo ABC~~
 d) ~~Ao dobro da área do triângulo MNC~~
 ~~Ao triplo da área do triângulo MNC~~

$\frac{zy}{2} = \text{ABC}$
 $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \cdot \frac{z}{2}$
 $\text{AMC} = \frac{zy}{2}$

$\frac{xy}{2}$
 $\frac{xy}{8}$
 $\frac{xy}{8}$

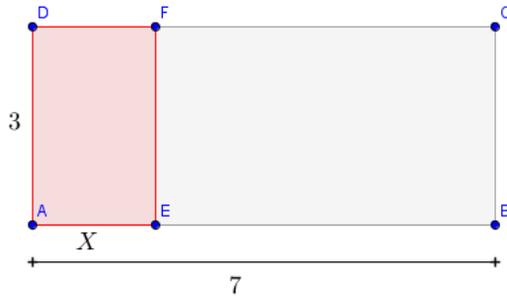
$\frac{MN}{2} = \frac{1}{4} \text{ABC}$
 $\therefore \text{ABMN} = \frac{3}{4} \text{ABC}$
 $\text{BNC} = \frac{xz}{4}$

a) $\frac{3b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot 2h \cdot \frac{1}{2}}{2}$
 b) $\frac{x \cdot \frac{z}{2}}{2} = \frac{\frac{x}{2} \cdot z \cdot \frac{y}{2}}{2}$
 $2 \cdot \left(\frac{z}{2} \cdot \frac{y}{2}\right) = \frac{yz}{4} \cdot x$
 c) $\frac{\left(\frac{yz}{2}\right)}{2} = \frac{yz}{4}$
 $\frac{zy}{4} = \frac{yz}{4} \cdot x$

Fonte: participantes da pesquisa

Questão 4:

(Giraldo, Caetano e Mattos, 2012, Adaptado) Dado um retângulo ABCD, onde $\overline{AB} = \overline{DC} = 7$ cm e $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ cm. Tem-se que \overline{EF} é perpendicular a \overline{AB} com $F \in \overline{DC}$ e $E \in \overline{AB}$, conforme a figura.



Faça o gráfico da área do retângulo EFDA em função da posição de E.

Objetivos e expectativas:

Esta questão visava verificar se os alunos possuíam os subsunções necessários para associarem a medida do lado e a medida da área do retângulo, bem como representar essa relação na forma de gráfico.

Visão Geral

Nesta questão foram desconsideradas 9 respostas por estarem em branco; das 16 restantes, 2 foram consideradas corretas. O Quadro 9 apresenta a frequência de cada tipo de erro sendo que a maioria, sete erros, foram classificados como de compreensão conceitual. Classificou-se dessa forma, pois os alunos não utilizaram os conceitos do domínio de uma função ou de Geometria necessários à resolução. Quatro alunos obtiveram a expressão correta, entretanto não fizeram o gráfico o que vem a ressaltar a dificuldade em transformar uma representação algébrica em representação gráfica.

Quadro 9 - frequência questão 4

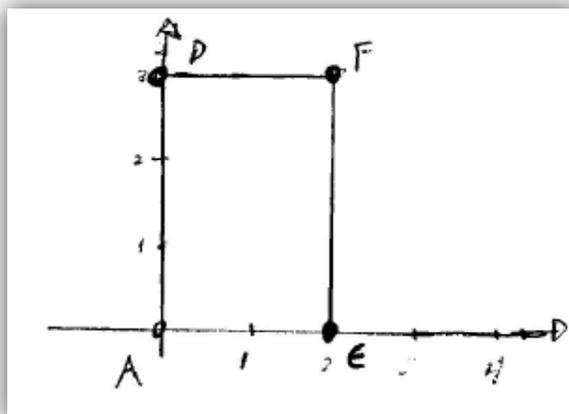
Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito de objetivo	1
	Percepção	Distorção	1
	Compreensão	Conceitual	7
Organização	Análise e síntese	Obtenção da expressão	4
	Conexão e inferência		1

Fonte: autores

Análise:

Dentre as respostas, oito foram descartadas por estarem em branco ou não ser possível inferir a intenção dos alunos, foi o caso dos alunos: A1, A4, A5, A9, A10, A11, A12 e A15. A Figura 35 apresenta um exemplo de resolução em que não foi possível inferir a intenção do aluno. Nota-se que A11 apenas esboçou os pontos AEFD no plano cartesiano, sem dar sequência a uma ideia.

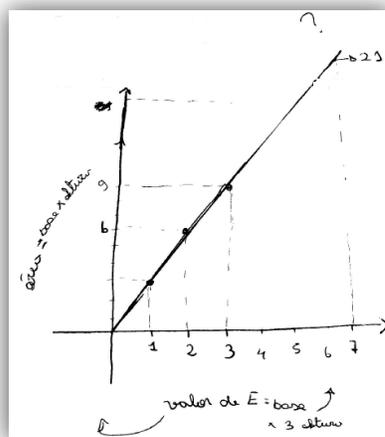
Figura 35 - Resolução da questão 4 do aluno A11



Fonte: participantes da pesquisa

Já a resolução dos alunos A16 e A21, foi considerada correta e pode ser observada conforme mostra a Figura 36.

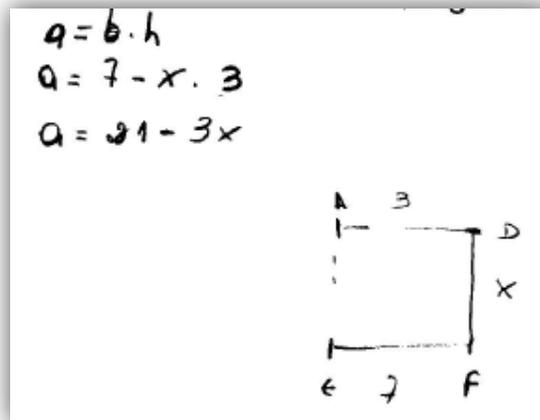
Figura 36 - Resolução da questão 4 do aluno A16



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A20, cuja resolução pode ser visualizada na Figura 37, apresentou um erro que foi classificado como de intenção por conflito de objetivo ao obter a expressão da área do retângulo EFBC quando deveria obter a de EFDA, além de erro de percepção de informação ao distorcer a representação do retângulo EFDA. Observa-se que essa resposta foi considerada incorreta.

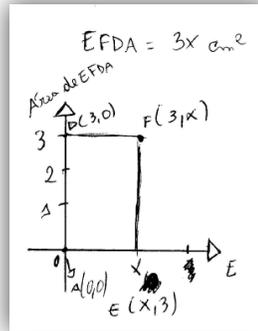
Figura 37- Resolução da questão 4 do aluno A20



Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A2, A3, A13 e A23 obtiveram a expressão para o cálculo da área de EFDA, mas não esboçaram o gráfico. Classificou-se o erro cometido como de análise e síntese e as questões foram consideradas como parcialmente corretas. Como exemplo, o aluno A13 fez o retângulo EFDA no plano cartesiano, conforme apresenta a Figura 38. As respostas apresentadas pelos outros alunos foram semelhantes, assim, pode-se inferir que estes não possuem os subsunçores necessários para relacionar as diferentes representações da figura.

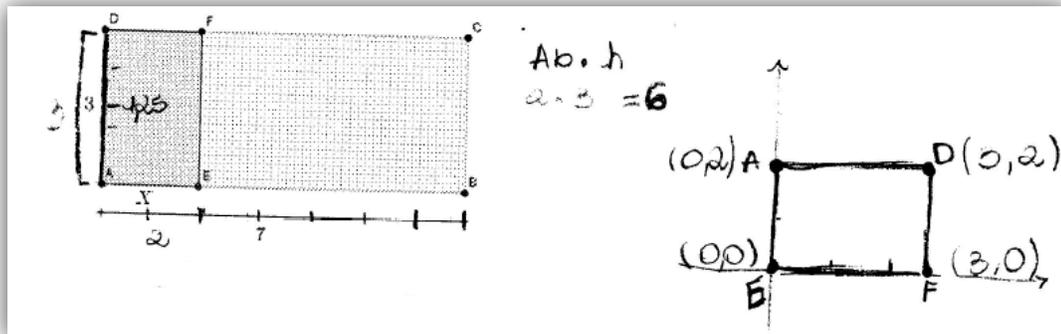
Figura 38 - Resolução da questão 4 do aluno A13



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A24 apresentou erro de conexão e inferência ao basear-se na figura fornecida pelo problema para calcular a área do retângulo, mas desconsiderou o fato de que o ponto E varia sua posição no segmento AB, conforme se pode visualizar na Figura 39; sendo assim, a questão foi considerada como incorreta. Esse aluno também representou o retângulo nos eixos cartesianos, apresentando uma tentativa de esboço do gráfico, porém o fez de forma incorreta.

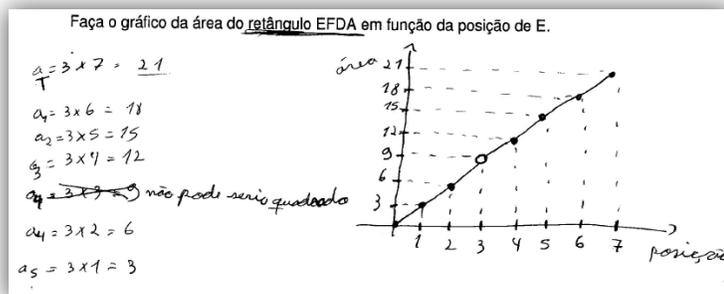
Figura 39 - Resolução da questão 4 do aluno A24



Fonte: participantes da pesquisa

Sete alunos, ao responderem esta questão, apresentaram erro classificado como de compreensão conceitual, sendo suas respostas consideradas como parcialmente corretas. Desses, o aluno A18, desconsiderou o quadrado como sendo um retângulo, apresentando fraqueza dos subsunçores referentes a figuras planas. A Figura 40 apresenta o raciocínio realizado pelo referido aluno.

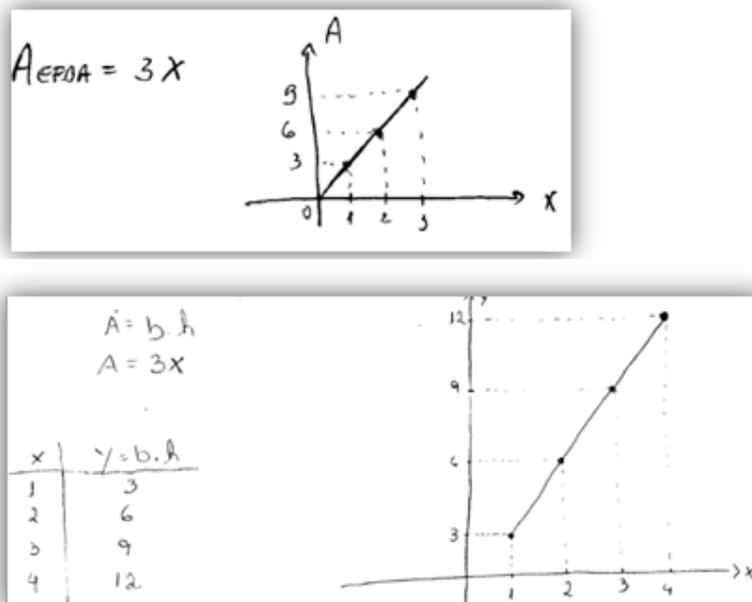
Figura 40 - Resolução da questão 4 do aluno A18



Fonte: participantes da pesquisa

Dentre os alunos com erro de compreensão conceitual, os alunos A14 e A22 não souberam determinar o domínio da função. E os alunos A6, A7, A8 e A19 não consideraram os casos em que o ponto E estava entre 0 e 1. A Figura 41, apresenta exemplos de cada um desses casos.

Figura 41 - Resolução da questão 4 dos alunos A22 (acima) e A6 (abaixo)

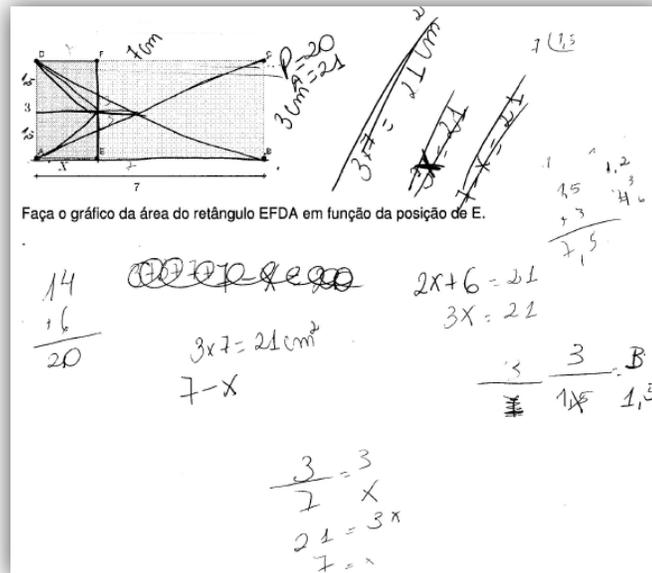


Fonte: participantes da pesquisa

Não foi possível interpretar a tentativa de resolução apresentada pelo aluno A17 (Figura 42), por esse motivo ela foi desconsiderada, em entrevista o aluno

relatou que não conseguiu fazer a questão por não visto Geometria Plana na escola, sendo que o mesmo não forneceu maiores detalhes sobre o que tentou fazer.

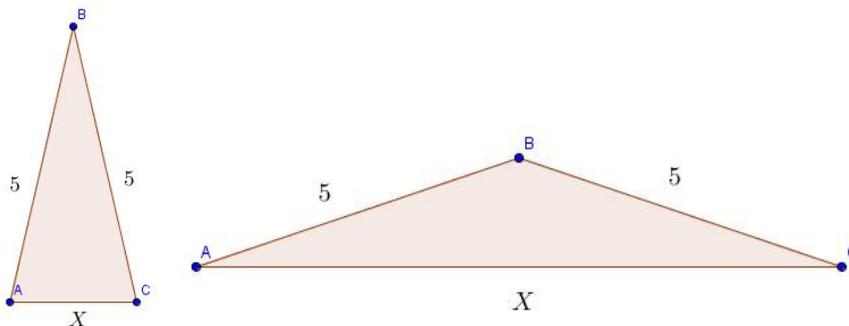
Figura 42 - Resolução da questão 4 pelo aluno A17



Fonte: participantes da pesquisa

Questão 5:

(Arcavi e Hadas, 2000, adaptado) Dado um triângulo isósceles ABC, onde $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm. Conforme a figura.



- Determine quais são os valores que X pode assumir.
- Determine a expressão que representa a área do triângulo em função da base \overline{AC} .
- Esboce o gráfico da função determinada no item b).

Objetivos e expectativas:

Esta questão teve por objetivo averiguar se os alunos possuíam os subsunçores necessários para resolver um problema que envolvesse a relação funcional existente entre a medida da base e a área de um triângulo isósceles.

Visão Geral

Dos 24 alunos participantes, 10 deixaram esta questão totalmente em branco ou não foi possível compreender o que fora feito sendo, portanto descartadas. Diferentemente do que foi realizado nas questões anteriores, optou-se por se apresentar uma visão geral de todos os itens em conjunto, visto, a grande dificuldade apresentada pelos alunos.

Ao analisarmos o item **a**, verificou-se que 13 alunos o responderam, porém apenas um aluno o respondeu de forma correta, enquanto que 11 deixaram o mesmo em branco. Dos que responderam a esse item, 9 alunos apresentaram erros que foram classificados como de incompreensão do objetivo. Outros 3 alunos apresentaram erro de compreensão conceitual ao desconsiderar o triângulo equilátero e um deles, também, apresentou erro operacional por incluir $x=10$, sendo que 10 não pertence ao domínio, conforme visível no Quadro 10.

Quadro 10 - Frequência de erros questão 5 a

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Incompreensão de objetivos	9
	Compreensão	Conceitual	3
Execução	Erro Operacional		1

Fonte: autores

Analisando o item **b**, verifica-se que dois alunos acertaram a questão e outros quatro a deixaram em branco, totalizando 14 respostas em branco para esse item. Oito das respostas analisadas apresentaram erros, e sua classificação pode ser vista no Quadro 11. Das respostas que apresentaram erro, duas foram classificadas como de incompreensão do objetivo, pois os alunos calcularam a área do triângulo expresso na figura. Três alunos apresentaram erro de compreensão conceitual ao se utilizar de expressões diversas para obter a área, um aluno apresentou erro de compreensão lógica e outro de análise e síntese, ao não desenvolver o problema.

Quadro 11 - frequência questão 5 b

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Incompreensão de objetivos	2
	Compreensão	Conceitual	3
		Lógica	1
Organização	Análise e síntese		1

Fonte: autores

Na análise do item **c**, verificou-se que apenas uma resposta foi considerada correta e que somente seis alunos responderam, ou seja, 18 alunos deixaram em branco esse item. Dos cinco alunos que apresentaram algum tipo de erro, quatro alunos tiveram o erro classificado como de conexão e inferência devido a erro ocorrido no item **b**, ao mesmo tempo que apresentaram erro classificado como de compreensão conceitual por desconsiderar valores na elaboração do gráfico. Um dos alunos apresentou erro de compreensão lógica devido a falha na interação entre as informações. O Quadro 12, apresenta a classificação dos erros do item **c** da questão 5.

Quadro 12 - frequência questão 5 c

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Compreensão	Conceitual	4
		Lógica	1
Organização	Conexão e inferência	Devido a erro na item b	4

Fonte: autores

Análise

Os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A9, A13, A14 e A15 deixaram a **questão 5** em branco ou apresentaram somente alguns esboços onde não é possível se efetuar qualquer identificação de uma tentativa de resolução. O aluno A6 respondeu somente ao item **a** apresentando como resposta $x=5$, sendo descartada e o aluno A20 apresentou algumas contas, como visível na

Figura 43, entretanto não é possível identificar uma resolução para o problema proposto em nenhuma resposta, sendo essa descartada.

Figura 43- Resolução da questão 5 do aluno A20

$$\frac{5x}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$5x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$Q = \frac{25}{5}$$

Fonte: participantes da pesquisa

Item a

Na Figura 44 vê-se a resoluções do aluno A22, que acertou a questão e do aluno A21 que apresentou erro classificado como operacional ao errar o domínio (incluindo $x=10$), considerada parcialmente correta, ainda o aluno A17 deixou a questão em branco.

Figura 44 - Resolução da questão 5-a dos alunos A21(esquerda) e A22(direita)

$$a) \begin{cases} x \leq 10 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x = [0; 10]$$

$$0 < x < 10$$

Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A16, A19 e A7 apresentaram erro classificado como incompreensão do objetivo da atividade em virtude de não limitarem em $x < 10$. Nesta categoria de erro ainda foram incluídas as respostas com valores diversos e fixos, como as dos alunos A8, A10, A11, A12, A23 e A24. Os alunos A16, A19 apresentaram erro classificado como de compreensão conceitual ao desconsiderar o triângulo equilátero. O aluno A18 apresentou este mesmo erro. Na Figura 45 vemos a resolução dos alunos A18, A19 e A24. Estas respostas foram consideradas incorretas.

Figura 45 - Resolução da questão 5-a dos alunos A18 (a), A19 (b) e A24(c)

re $x=10$ irio ficar uma reta e re $x=5$ fica um triângulo equilátero

A

a) c pode assumir valores $c \neq 5$

B

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 5^2 + x^2 \\ \frac{x^2}{4} &= 25 + x^2 \\ x^2 &= 100 + 4x^2 \\ x^2 &= 100 + 4x^2 \\ x &= \sqrt{100 + 4x^2} \\ x &= 10 + 2x \\ -10 &= 2x - x \\ -10 &= x \\ x &= \frac{-10}{1} = -5 - 5 = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad x^2 &= 5^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ x^2 &= 25 + \frac{x^2}{4} \\ x &= \sqrt{25 + \frac{x^2}{4}} \\ x &= 5 + \frac{x}{2} \\ 2x &= 5 + x \\ 2x - x &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

NÃO PODE DA INT. PODE
 NÃO PODE DA INT. PODE
 NÃO PODE DA INT. PODE

C

Fonte: participantes da pesquisa

Item b

Os alunos A21 e A22 acertaram esse item e os alunos A8, A10, A11 e A19 deixaram em branco. A Figura 46 apresenta a resolução do estudante A22, que foi considerada correta.

Figura 46 - Resolução da questão 5-b do aluno A22

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 h \\
 \triangle \\
 \frac{x}{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 A = \frac{B \cdot h}{2} \\
 A = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{100-x^2}{4}}}{2}
 \end{array} \\
 25 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
 \frac{25}{1} - \frac{x^2}{4} = h^2 \\
 \frac{100-x^2}{4} = h^2 \\
 \sqrt{\frac{100-x^2}{4}} = h
 \end{array}$$

Fonte: participantes da pesquisa

As respostas dos alunos A12 e A24 foram classificadas como de incompreensão do objetivo e as A7, A17 e A18 foram classificadas como erro de compreensão conceitual, e foram consideradas incorretas. Nas Figura 47 se vê a resolução dos alunos A24, A7 e A18.

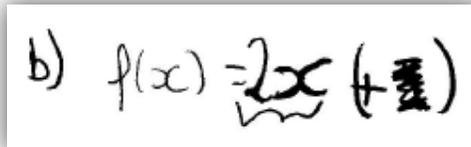
Figura 47 - Resolução da questão 5-b dos alunos A24 (A), A7 (B) e A18 (C)

$A) \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 + 12,5 = 25$	A
$ \begin{array}{l} b) A_T = \frac{Q \cdot b}{2} = \frac{S \cdot \overline{AC}}{2} \\ = 2A_T = S \cdot \overline{AC} \\ = \frac{2A_T}{S} \cdot \overline{AC} \end{array} $	B
$ \begin{array}{l} b) a = b \cdot h \\ a = x \cdot h \end{array} $	C

Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A16, Figura 48, apresentou erro que foi classificado como de compreensão lógica, contudo não há justificativa para a resposta, na entrevista o aluno relatou não saber resolver a questão e não se recordar do que havia feito, o aluno A23 teve o erro classificado como de análise e síntese ao não desenvolver a resposta.

Figura 48 - Resolução da questão 5-b de A16



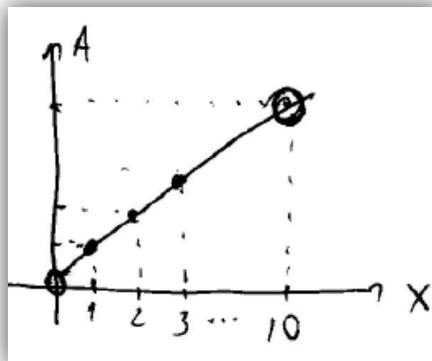
b) $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$

Fonte: participantes da pesquisa

Item c

O aluno A21 apresentou o gráfico de uma parábola, que apesar de não ser o esboço exato foi aceito como correto, em virtude de ser o mais próximo a esperado que apresenta uma complexidade considerável para ser feito sem o auxílio de softwares, já o aluno A22 apresentou erro de compreensão lógica, pois apesar de ter obtido a fórmula correta para a área no gráfico traçou somente uma reta desconsiderando o x^2 , conforme Figura 49.

Figura 49 - Resolução da questão 5-c de A22

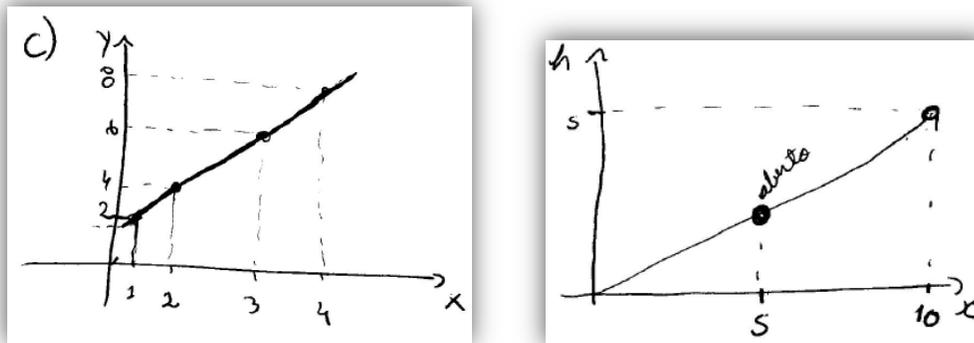


Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A7, A16, A17 e A18 apresentaram erro classificado como de conexão devido a erro ocorrido no item b, desses os alunos A7, A16 e A17 também

tiveram erro classificado como de compreensão conceitual ao desconsiderar valores de $x < 1$. O aluno A18 teve erro classificado como de compreensão conceitual ao desconsiderar $x = 5$, triângulo equilátero. Na Figura 50 é possível visualizar a resolução dos alunos A16 e A18. Os demais alunos deixaram em branco e todas as respostas foram consideradas incorretas.

Figura 50 - Resolução da questão 5-c de A16 (esquerda) e A18 (direita)



Fonte: participantes da pesquisa

5.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE

Ao realizarmos a Análise dos Erros, descrita anteriormente, a partir do teste diagnóstico respondido pelos alunos, foi possível verificar as estratégias utilizadas por eles e notar que eles não possuem alguns subsunçores ou apresentam dificuldades em relacioná-los em algumas situações. Na questão 1, foi possível perceber a dificuldade dos alunos em compreender e representar uma situação-problema em virtude da tendência a tratá-la como uma situação linear, o que demonstra que o conceito de linearidade está fortemente enraizado nos seus esquemas. Essa desestabilização causada na mente do aluno frente à situação-problema apresentada é satisfatória para a nova aprendizagem, pois o aluno terá que desenvolver novos esquemas para dar conta da situação. Aliado a isto, observou-se também, a dificuldade dos alunos em relacionar as medidas citadas no problema, e criar a relação entre estas e uma função, de forma a gerar o gráfico da área. Assim, desta questão tira-se a necessidade de focar em situações problemas não-lineares e em como relacionar medidas, funções e gráficos.

Já nas questões 2 e 3, foi possível verificar que os alunos demonstram dificuldade em apresentar deduções matematicamente corretas, e, muitas vezes, baseiam-se em tentativa e erro para tentar chegar a uma resposta (o que acaba por não considerar todos os casos) ou tendo como base a figura apresentada (que pode ser distorcida ou não englobar todos os casos). Além disso, a análise das respostas dadas a estas questões permitiu concluir que os alunos apresentam falhas nos subsunçores do conteúdo de Geometria Plana, confundindo área e perímetro e a definição de algumas figuras planas. Dessa forma, acredita-se que é necessário tratar com os alunos o formalismo matemático para uma dada resposta, bem como os conteúdos de Geometria Plana, em especial figuras planas, áreas e perímetros.

Na questão 4, evidencia-se novamente a necessidade de se trabalhar os conteúdos de Geometria Plana e relações funcionais, pois percebeu-se, mediante a análise das respostas, que alguns alunos desenvolveram e obtiveram a expressão mas não construíram o gráfico ou o fizeram desconsiderando determinadas partes, demonstrando assim a necessidade de se estudar tais conteúdos. Na questão 5, apresenta-se a necessidade de estudá-la em conjunto com os alunos em virtude do grande número de respostas em branco. Ao fazê-lo nas entrevistas os alunos relataram não saber como resolvê-la em sua maioria demonstrando grande dificuldade.

Assim, até aqui foram identificados e classificados os erros dos alunos segundo o MADE, averiguando assim os subsunçores existentes, bem como os não existentes e aqueles que carecem serem fortalecidos. Para tanto, o próximo passo da pesquisa objetiva o desenvolvimento e aplicação de atividades potencialmente significativas, tendo como ponto de partida a revisitação dos conteúdos de funções e geometria.

5.4 DAS ENTREVISTAS

As entrevistas, semiestruturadas, foram realizadas aproximadamente 6 meses após a realização do levantamento das dificuldades, de maneira concomitante as atividades pós-diagnósticas, e foi respondida por 9 alunos, sendo que estes responderam o levantamento das dificuldades, estavam matriculados em Cálculo I, iniciaram a participação na atividade investigativa e se dispuseram a ser entrevistados. A entrevista realizada teve como base o roteiro contido no Apêndice

J. As entrevistas foram realizadas de maneira individual, visando ter uma melhor noção do perfil do aluno e do porquê das respostas no levantamento das dificuldades, motivos pelos quais se fara a apresentação de cada uma das entrevistas realizadas.

Aluno A10:

O aluno diz recordar-se de ter visto na escola os conteúdos de Equações, Trigonometria e Porcentagem, menciona-se que tais conteúdos são vistos no Ensino Fundamental, ele ainda disse não se recordar de ter visto Geometria Plana. Já no que se refere ao conteúdo de Funções o aluno se recorda de ter visto Funções Trigonométricas, e demonstrou dificuldade para lembrar outros tipos de Funções estudadas.

Em relação ao uso de TIC, o aluno afirmou que se limita ao uso recreativo do celular e computador, e que não houve emprego de TIC durante a educação básica, vindo a conhecer o GeoGebra na universidade.

Ao ser questionado sobre as respostas no levantamento das dificuldades o aluno afirmou não se recordar das suas respostas às questões, em virtude disto, foi pedido a ele que analisasse as suas respostas e verificasse o que estava correto e se encontrava algum erro.

Para a questão 1 o aluno apresentou dificuldade em compreender o problema e a resolução que ele havia apresentado, após um momento ele compreendeu o que havia feito, no caso, ele havia reduzido a área da figura quando o correto seria reduzir os lados, ao que se solicitou que ele lêsse o enunciado do problema e comparasse com o que fez, ao que A10 foi capaz de identificar que havia errado a questão. Na questão 2, ele relatou que a deixou em branco pois não se recordava o conceito de perímetro. Enquanto que para a questão 3 afirmou ter se baseado na figura apresentada pelo problema e não foi capaz de pensar numa solução para o mesmo, cabe mencionar que ele não cursou Geometria Plana na faculdade até a data da entrevista e não se recorda de tê-la visto na escola. Já na questão 4 o aluno não foi capaz de explicar a resolução que havia apresentado e ao ser solicitado para resolve-la novamente conseguiu obter a função, mas apresentou dificuldade para tal e errou ao expor o domínio dela pois desconsiderou os valores menores que um. E a questão 5 foi deixada em branco, como ele demonstrou dificuldade grande no questionário optou-se por questiona-lo sobre a dificuldade que sentiu como um todo,

sendo que o aluno afirmou que as questões pareciam fáceis, mas que ele não se lembrava de como fazê-las, creditando esta debilidade ao seu Ensino Médio.

Aluno A14:

O aluno afirmou ter visto na Educação Básica os conteúdos de Progressão Aritmética, Progressão Geometria, Logaritmos, Exponenciais, Conjuntos, Polinômios, Matrizes, Geometria, Trigonometria, Funções do Primeiro e Segundo grau Cone, Prisma, Área e Fórmulas, destaca-se que o aluno citou partes do conteúdo de Geometria Espacial dando ideia de que tratariam de assuntos diferentes. Relatou ainda que não teve contato com TIC durante a escola.

Com relação as resoluções das questões o aluno foi capaz de identificar o que havia errado na primeira questão (redução da área ao invés dos lados). Na segunda questão, o aluno afirmou não ter noção de como resolvê-la na época do levantamento das dificuldade, vindo a aprender posteriormente nas disciplinas cursadas. Para a terceira questão ele expressou que se pode resolvê-la pela área das figuras, enquanto que, para a quarta afirmou que seu gráfico estava incompleto por não apresentar o domínio da função de maneira clara. Na questão cinco ele afirmou não saber como resolve-la.

Aluno A15:

O aluno afirmou não se recordar de ter visto Geometria Plana na escola, afirmando ter visto o conteúdo de Funções, porém não foi capaz de dizer os conteúdos ou ideias vistos no que refere ao conteúdo de funções, nem citar exemplos. Ele também se recorda de ter aprendido Matemática Financeira, Geometria Espacial, Progressões Aritméticas e Geométricas e Matrizes.

No que se refere ao uso de TIC, o aluno relata que não houve contato com elas na escola, tendo contato pelo uso recreativo de celulares e computadores. Em especial, menciona-se que ele questionou o tempo gasto na faculdade para aprender a usar o GeoGebra, em detrimento do ensino de outros conteúdos, pois conforme o aluno ele passou um semestre mexendo com o GeoGebra e ainda há muita coisa que ele não sabe fazer. Cabe mencionar que a disciplina de Recursos Tecnológicos No Ensino De Matemática passou a ser obrigatória na UFSM há poucos anos com a reformulação da grade curricular, apesar disso o aluno considerou que o uso de GeoGebra teria valor para o professor, haja vista que o

objetivo do curso é formar professores há certa incongruência de ideias por parte do aluno.

O aluno achou as questões do levantamento das dificuldades complexas, afirmando que a sua dificuldade se devia a base matemática que possuía, mencionando ainda que talvez tenha visto os conteúdos necessários a resolução, mas que não soube aplicá-los.

Na primeira questão, ao verificar sua resposta, o aluno a julgou correta, em virtude disto foi chamada sua atenção ao enunciado do problema. Nesse momento, o aluno notou que cometeu um equívoco, pois deveria ter reduzido os lados. Ele também afirmou que sua resposta não é um gráfico (similar a Figura 13), entretanto justificou dizendo que não havia compreendido que a situação era contínua. Para a questão 2 o aluno afirmou que apesar de já ter visto várias vezes a resolução do problema, não saberia resolvê-lo, por esse motivo, deduz-se que ocorre a aprendizagem mecânica por parte do aluno. Atualmente, ele já viu a propriedade de que todo quadrado é um retângulo. No que se refere ao item b o aluno julgou-a como inicialmente correta. Após uma análise percebeu que falhou em não observar corretamente o enunciado do item. Na terceira questão o aluno percebeu que sua resposta não poderia ser considerada correta, mas disse que não saberia como resolve-la. Já as questões 4 e 5, ficaram em branco e o aluno afirmou que são complexas e que não conseguiria resolvê-las. Destaca-se que no momento da entrevista o aluno estava no 2º semestre do curso já tendo realizado algumas disciplinas básicas do curso, sendo que passou em metade das disciplinas do 1º semestre.

.

Aluno A16:

O aluno afirmou ter visto Exponencial, Trigonometria e que se lembra de ter visto Geometria Plana e Funções, mas não soube citar exemplos do que foi visto nesses conteúdos, percebeu que os conteúdos de Trigonometria e Exponencial não foram relacionados com o de Funções. No que se refere as TIC no colégio, o aluno relata que era utilizado o Datashow, power point, sendo que ele não conhecia o GeoGebra antes da faculdade.

Com relação as questões ele afirmou que sabia resolvê-las, mas não se lembrava exatamente como. Ao analisar a questão 1 o aluno foi capaz, de identificar onde havia errado, isto é, que ela havia reduzido a área da figura e explicou como

resolve-la de maneira correta ao reduzir os lados da figura. Na questão 2 ele identificou a relação entre quadrado e retângulo e também foi capaz de explicar como resolver a questão de forma correta. Na questão 3 o aluno percebeu que a sua resposta não estava correta e que a questão poderia ser resolvida por semelhança de triângulos. A questão 4 ele resolveu corretamente. A questão 5 o aluno afirmou que não seria capaz de resolver.

Aluno A17:

O aluno relatou ter visto os conteúdos de Função, Logaritmo, Trigonometria e Estatística, afirmando ainda que no terceiro ano do ensino médio praticamente não teve conteúdo de matemática e que não viu Geometria Plana na escola. No que se refere as TIC A17 já conhecia o GeoGebra e seus professores na escola básica utilizaram jogos de lógica e Tangran online.

No que se refere às respostas ao questionário, o aluno mencionou que havia resolvido a Questão 1 de maneira correta, mas acabou alterando-a. Ainda mencionou que não sabia fazer o gráfico e que teve uma boa base de Estatística na escola. Na questão 2 ele notou que estava errado e comentou que faltou atenção ao responder o que o levou a "embolar as respostas". Na questão 3, A17 se baseou no desenho percebendo que os triângulos deveriam ter a mesma medida, mas admitiu a falta de uma justificativa formal. Ele deixou a questão 4 em branco em virtude de não ter tido os conteúdos de Geometria Plana. Na questão 5 ele afirmou ter utilizado a fórmula da área com $h=5$, compreendendo que estava errada mas não foi capaz de elaborar uma maneira de resolver a questão.

Aluno A18:

Este aluno lembrava-se de ter visto Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Equações de 2º grau e Trigonometria, entretanto, afirmou não ter visto Geometria Plana e que teve apenas uma breve base sobre o conteúdo de funções, mencionando ainda que não eram utilizadas TIC na escola.

Ele considerou as questões como de nível médio, mas não foi capaz de identificar seu erro na questão 1 e afirmou que o gráfico deveria ser uma reta. Para a segunda questão, o aluno relatou ter visto a relação entre quadrado e retângulo apenas na faculdade e admitiu que faltou uma justificativa matemática para a questão. Na questão 3 ele afirmou ter se baseado na figura e por eliminação das

alternativas acabou marcando a alternativa correta mas sem a justificativa. Enquanto que na questão 4 o erro foi devido ao desconhecimento da propriedade de que todo quadrado é um retângulo, que conforme relatado ele viu ao longo da faculdade. Na questão 5, o aluno havia desconsiderado o caso em que o triângulo seria equilátero, sendo que afirmou ter visto na faculdade que todo triângulo equilátero é isósceles. Ele ainda disse que utilizou de proporção para efetuar o gráfico que relaciona base e altura, o qual não é solicitado pelo problema e que está errado.

Aluno A21:

Este aluno relatou que estudou em colégio militar, e por esse motivo considera que o seu ensino médio foi bem completo. O aluno não conhecia o GeoGebra, mas outras formas de TIC eram utilizadas em sala de aula como, por exemplo, lousa interativa. Ele achou as questões fáceis, o que pode ser percebido em virtude de não haver erros significativos nas questões.

Aluno A22:

Este aluno recorda-se de ter visto os conteúdos de Funções, Logaritmo, Exponencial, Trigonometria, Matriz, Combinatória, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Geometria Plana e Espacial e alguns tópicos de Geometria Analítica. Ele afirma que não existiam tecnologias modernas quando cursou o ensino médio, (atualmente o aluno tem 40 anos). Com relação a Questão 1, ele percebeu que havia utilizado da medida errada para a resolução da questão, e julgou o enunciado do item b confuso. Já as questões 2, 3 e 4 ele acertou, enquanto que na questão 5 apresentou dificuldade em compreender o gráfico

Aluno A24:

Este aluno relatou ter visto no ensino básico os conteúdos de Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Funções, Geometria Analítica e Espacial, relatando e ter visto apenas alguns tópicos de Geometria Plana por meio de exercícios. O mesmo ainda se recorda de ter visto funções afins, quadráticas, cúbicas e exponenciais, e diz não ter presenciado o uso de TIC na escola, e também não possui acesso a internet em casa.

Em relação a questão 1 o aluno foi solicitado que verificasse se a resposta está correta ao que foi capaz de perceber que havia empregado de maneira incorreta o

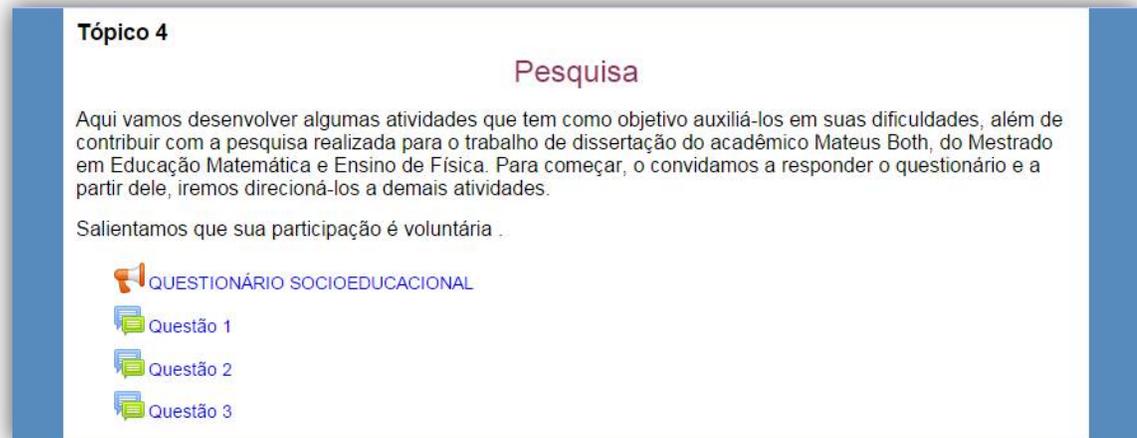
uso das regras de proporção. Na questão 2 o aluno relatou ter adivinhado os valores para a obter a área máxima, e além disso, percebeu seu erro no item b, ao desconsiderar que o perímetro deveria ser 40cm. Na questão 3, ele afirmou ter marcado os pontos e notado por “lógica” e pela figura que seria três vezes a área, ele notou ainda que existe a necessidade de uma justificativa, mas em um primeiro momento não conseguiu fazê-la. Ao analisar a questão por mais um momento sugeriu que o uso de semelhança, poderia ser uma justificativa. Na questão 4, o mesmo, não conseguiu explicar muito bem como a resolveu e admite não ter feito um gráfico. Ele acredita que a solução seria tentar usar máximo e mínimo de forma similar ao que seria utilizado na questão 1. Na questão 5 o aluno iniciou uma tentativa de explicar o que havia feito mas não foi capaz de concluí-la e também não exibiu uma nova maneira de resolvê-la.

6 DA ATIVIDADE POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA

A atividade foi desenvolvida com os alunos da turma de Cálculo I ofertada pelo curso de Licenciatura em Matemática, por conter o maior número de alunos que participaram do levantamento das dificuldades realizado anteriormente. No desenvolvimento da atividade foram utilizados turnos após a aula para o uso do laboratório de informática por parte de alguns alunos. Esse procedimento foi realizado, visto que estes não possuíam acesso a computador com internet em suas residências.

Para o desenvolvimento da atividade foi postado no ambiente Moodle o questionário aplicado anteriormente de forma que toda turma tivesse acesso, conforme apresenta a Figura 51. Destacamos que na parte do final do questionário foi solicitado seu interesse em participar da atividade e autorização para utilização dos dados.

Figura 51- Tela do AVEA Moodle



Fonte: AVEA Moodle - Autores

A seguir a atividade foi dividida em dois momentos, no primeiro momento foram propostas três questões para que os alunos pensassem a respeito e respondessem. As mesmas foram disponibilizadas por meio do recurso Fórum de Perguntas e Respostas dentro do ambiente Moodle (apêndice H).

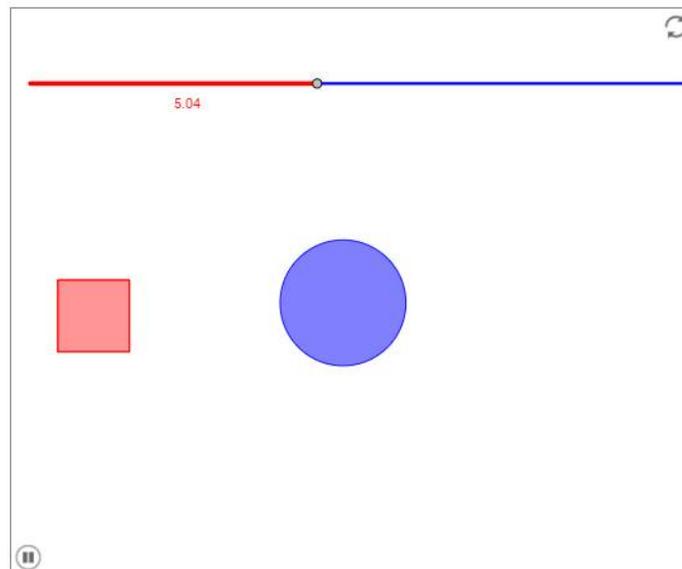
Na sequência foram disponibilizadas outras três questões, contendo a representação da situação no software GeoGebra, como visível na Figura 52, sendo

que sua exibição no fórum ocorria de forma dinâmica variando o tamanho das figuras de maneira a permitir uma melhor visualização da situação por parte dos alunos. (Apêndice H)

Figura 52 - Exemplo da atividade com o GeoGebra

Questão 6:

Um fio com 12 cm pode ser curvado formando um círculo, dobrado formando um quadrado ou cortado em duas partes formando um círculo e um quadrado.



- É possível determinar a área do quadrado em relação a quantia de fio utilizada? Como?
- É possível determinar a área do círculo em relação a quantia de fio utilizada? Como?
- É possível determinar a soma da área do triângulo com o círculo em relação a quantia de fio utilizada em cada um deles? Como?
- A expressão que representa a soma das áreas (se existir) é funções? Em caso afirmativo, como é o gráfico dela?

Fonte: participantes da pesquisa

Assim, nesta atividade potencialmente significativa foi definido o tópico de grandezas geométricas, tendo por base os conhecimentos prévios dos alunos externalizados no levantamento das dificuldades, o qual também serviu para apresentar situações-problemas do conteúdo. No desenvolvimento da atividade tentou-se adotar os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora no ensino (MOREIRA, 2006). Para tanto, iniciou-se com questões mais gerais que foram gradativamente tornando-se mais específicas. Como por exemplo, na passagem da questão 1 para a questão 2, onde inicialmente tinha-se o

“perímetro” como sendo a soma dos 4 lados passasse a tê-lo como a soma de 3 lados.

Ao longo do processo de ensino foram registrados todos os eventos ocorridos para realização da análise de possíveis evidências de aprendizagem significativa. Esta verificação de ocorrência ou não de aprendizagem significativa se deu por meio da participação dos alunos nas atividades propostas e de sua interação com as tarefas solicitadas, bem como seu desempenho na atividade final proposta, apresentada no próximo capítulo.

Na sequência serão apresentadas as seis questões propostas no Moodle e a participação dos alunos que responderam ao levantamento das dificuldades. Sendo que 11 alunos (A3, A10, A11, A14, A15, A16, A17, A18, A21, A22 e A24) participaram do levantamento das dificuldades e da atividade.

A ideia inicial da atividade era de que os alunos discutissem a resolução das questões entre eles por meio dos fóruns do Moodle. Entretanto o que ocorreu foi a postagem individual das respostas, sem interação entre os alunos, havendo apenas interação pesquisador-aluno. Ainda que se tenha conhecimento de que os alunos trabalham em grupos para resolver os problemas, tais situações não foram acompanhadas. Menciona-se ainda que de maneira geral houve ao menos 4 alunos (não necessariamente os mesmos) que não deram retorno a algo solicitando, demonstrando certa falta de empenho e interesse em aprender, fato que é uma das bases da aprendizagem significativa. Na Figura 53 é exibido uma imagem do ambiente em que se trabalhou.

Figura 53 - Tela do fórum

c) É possível determinar o perímetro do triângulo? Como?
d) As expressões que representam a área e o perímetro (se existirem) são funções? Em caso afirmativo, como é o gráfico delas?

Grupos separados: Todos os participantes

[Acrescentar uma nova questão](#)

Tópico	Autor	Grupo	Comentários	Última mensagem
5		T. 10 - Matemática - Licenciatura Plena	3	CARMEN VIEIRA MATHIAS Qui, 10 Dez 2015, 08:04
Questão5		T. 10 - Matemática - Licenciatura Plena	3	CARMEN VIEIRA MATHIAS Qui, 10 Dez 2015, 08:01
Questão 5		T. 10 - Matemática - Licenciatura Plena	7	CARMEN VIEIRA MATHIAS Sex, 4 Dez 2015, 09:25
Questão 5		T. 10 - Matemática - Licenciatura Plena	3	CARMEN VIEIRA MATHIAS Sex, 4 Dez 2015, 09:24

Fonte: AVEA Moodle – Recurso Forum – Autores

Assim, no que segue serão apresentadas as respostas das atividades desenvolvidas no ambiente Moodle daqueles que responderam ao levantamento das dificuldades. Menciona-se que todas as figuras apresentadas na sequência são recortes das respostas fornecidas pelos alunos via AVEA, ou seja a fonte das figuras é o Moodle.

Questão 1:

Um campo deverá ser limitado por 1000 metros de cerca, de tal modo que a cerca forme um retângulo.

- Como você representaria essa situação? Sugestão: Use o aplicativo GeoGebra.
- Como podemos determinar as dimensões do campo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões?
- Quais as dimensões que o campo deve possuir para que sua área seja máxima?

Visão Geral:

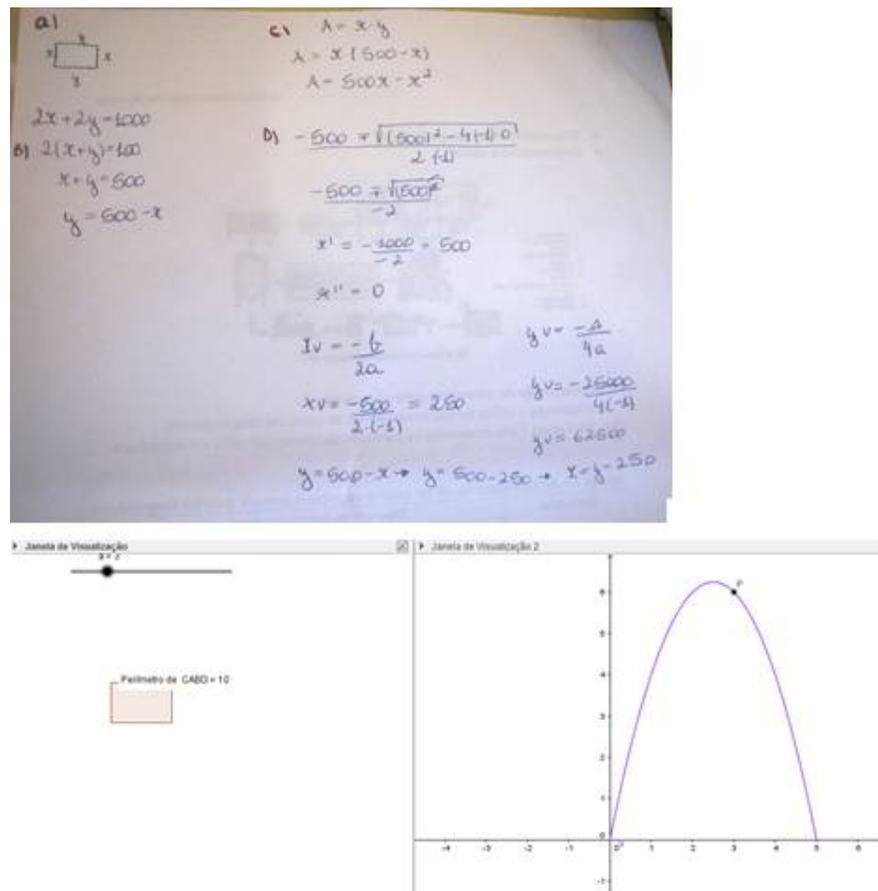
Destaca-se que nesta questão todos os alunos (11) que participaram do levantamento das dificuldades e responderam-na a acertaram, ainda 5 alunos representaram a situação no GeoGebra.

Esta questão visava introduzir a atividade, haja vista que se trata de uma questão clássica. Ao mesmo tempo esta questão permitiu trabalhar com os subsunçores de Funções e Geometria Plana. De tal maneira se vê que houve uma melhora e que nesta situação os alunos conseguiram relacionar os subsunçores para resolvê-la. Em suma vê-se que, os alunos não apresentaram dificuldades nesta questão, sendo que cumpriu sua função de introduzir as ideais a serem trabalhadas.

Respostas:

Os alunos que responderam o levantamento das dificuldades e participaram da atividade acertaram a resolução da questão. Observa-se que os alunos que A11, A14, A16 e A18 representaram a situação utilizando o aplicativo, como exemplo apresenta-se a resolução de A15 e a representação de A14 na Figura 54.

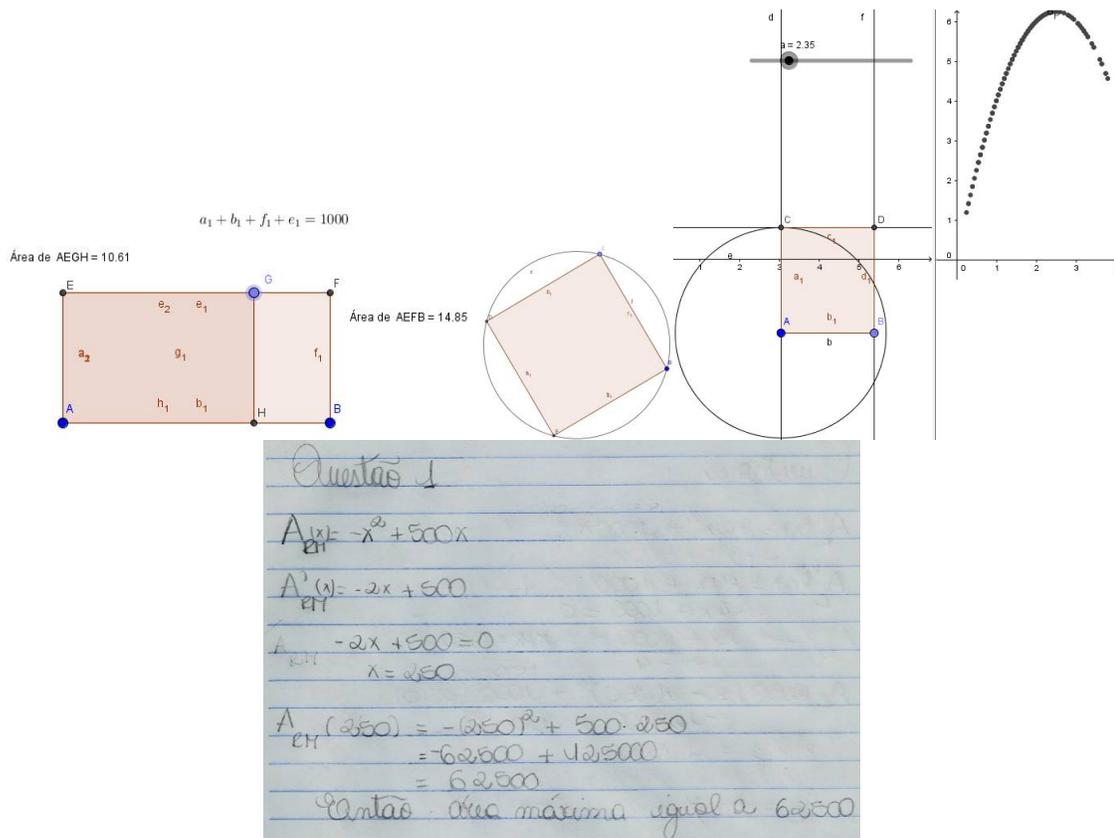
Figura 54- Resolução da situação proposta na questão 1, realizada pelo aluno A15 e representação da situação no GeoGebra pelo aluno A14



Fonte: participantes da pesquisa

Aos alunos foi solicitado a exibição da área máxima e que represente a situação no GeoGebra. O aluno A24 obteve a área máxima por meio do uso de derivadas e apresentou dificuldades para efetuar a representação, fazendo três construções para atingir uma satisfatória. Na Figura 55 apresenta-se as representações da situação e maneira utilizada para obter a área máxima.

Figura 55 – Representações da situação proposta na questão1, realizada pelo aluno A24



Fonte: participantes da pesquisa

Questão 2:

Um campo retangular está limitado por um córrego e nos outros três lados por uma cerca de 1000 metros.

- Como você representaria essa situação? Sugestão: Use o aplicativo GeoGebra.
- Como podemos determinar as dimensões do campo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões?

d) Quais as dimensões que o campo deve possuir para que sua área seja máxima?

Visão Geral:

Das 11 respostas dadas 8 estavam corretas. Observa-se que 3 alunos apresentaram dificuldade em resolver o problema, os quais inicialmente haviam errado a questão, e posteriormente 2 obtiveram a resposta correta. Dos que erraram, 2 transpuseram a solução da primeira questão para essa assumindo que seriam iguais e portanto erraram. Menciona-se ainda que 4 alunos deixaram de retornar as intervenções do pesquisador.

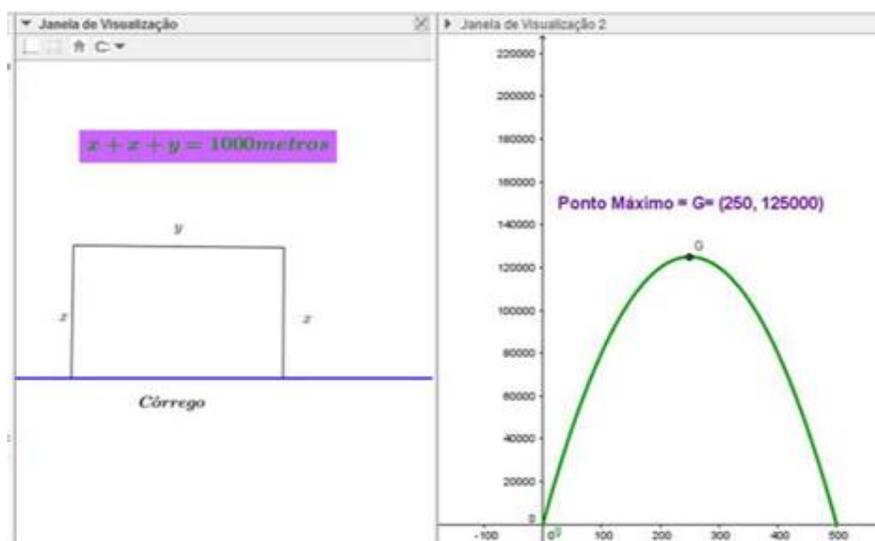
Aqui foi possível notar a dificuldade dos alunos em relacionar novas informações, haja vista que dois alunos generalizaram a primeira questão, muito provavelmente devido ao ensino mecânico de que a área máxima seria sempre um quadrado. Também é possível ver certa incompreensão a respeito do que se refere cada um dos valores empregados, isto é, os alunos apresentaram a tendência em identificar X e Y como largura/altura do retângulo e na sequência invertê-los.

De maneira similar a questão anterior os alunos tiveram de empregar os subsunçores de Geometria Plana e Funções, trabalhando-se aqui a diferenciação progressiva dos subsunçores dos alunos.

Respostas:

Nesta questão os alunos A22, A21, A24, A18, A16 e A11 acertaram a questão, sendo que o aluno A18 postou uma imagem representando a situação/gráfico (Figura 56).

Figura 56 – Representação da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A18



Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A15, A14 e A10 acertaram parcialmente a questão, pois confundiram-se nos valores de x e y . Esse erro foi ocasionado pela inversão dos valores de x e y no perímetro, conforme visível a resolução de A14 na Figura 57.

Figura 57 - Resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A14

Questão 2

Diagram of a rectangle with width x and height y .

Equations:

$$x + 2y = 1000$$

$$x = 1000 - 2y$$

Area function:

$$A = f(y)$$

$$A = y \cdot x$$

$$A = y(1000 - 2y)$$

$$A = 1000y - 2y^2$$

$$A = y(1000 - 2y) = 0$$

$$y = 0 \quad 1000 - 2y = 0$$

$$1000 = 2y$$

$$y = 500$$

Vertex formulas:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-1}{4a}$$

$$x_v = \frac{-1000}{2 \cdot (-2)}$$

$$y_v = \frac{-1000000}{4 \cdot (-2)}$$

$$x_v = 250$$

$$y_v = 125000$$

Area maximum: $y_v = 125000$

Verification:

$$250 + 2y = 1000$$

$$2y = 1000 - 250$$

$$y = \frac{750}{2}$$

$$y = 375$$

Final answer:

$$x = 250$$

$$y = 375$$

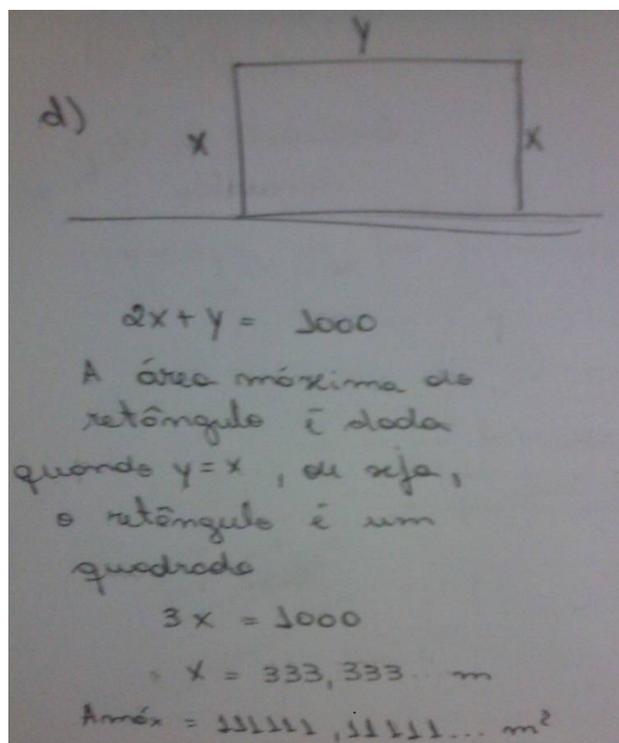
Fonte: participantes da pesquisa

Ao serem questionados (via fórum) sobre o fato, o aluno A15 não respondeu. Os alunos A10 e A14 fizeram a correção. Aqui fica visível a dificuldade dos alunos em compreenderem plenamente o que estão fazendo e a que se referem as variáveis.

O aluno A17 obteve a expressão da área de maneira correta, mas não efetuou as contas para obter a área máxima, assumindo que a situação seria igual a primeira tal que $x=y=333,3$. Ao ser sugerido que calculasse as coordenadas do vértice, não foi obtido retorno. Vê-se aqui um dos problemas no desenvolvimento da atividade que foi a ausência de respostas por parte de alguns alunos.

O aluno A3, respondeu de maneira similar ao aluno A17, apresentando a representação da situação corretamente e exibindo a expressão do perímetro em função dos lados. Porém, não efetuou os cálculos para obter a fórmula da área, partindo da expressão do perímetro ($2x+y=1000$) e afirmando imediatamente que a área máxima seria dada quando $x=y$. Conforme apresenta a Figura 58. É possível deduzir aqui que o alunos generalizaram a situação da questão 1, ignorando as novas informações apresentada pelo problema.

Figura 58 - Parte da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3



Fonte: participantes da pesquisa

Também pode-se inferir que alguns alunos aprenderam de maneira significativa, por meio de suas respostas e empenho, e que outros aprenderam erradamente que a área máxima de problemas envolvendo retângulos será sempre o quadrado., aqui pode-se especular que tal aprendizagem se deu de maneira mecânica em virtude da repetição da situação.

Questão 3:

Considere um campo circular com 10 metros de raio. Supondo que haja um retângulo inscrito nesse campo:

- a) Como você representaria essa situação? Sugestão; Use o aplicativo GeoGebra.
- b) Como podemos determinar as dimensões do retângulo?
- c) Como podemos determinar o perímetro do retângulo?
- d) Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões do retângulo?
- f) As expressões obtidas nos itens acima, são funções? Por quê?

Visão Geral:

Verifica-se que 8 alunos tiveram suas respostas consideradas corretas e 3 alunos não acertaram. Nesta questão acredita-se os alunos apresentaram dificuldade em compreender o solicitado, possivelmente devido a maneira como foi perguntado, se crê em tal fato em virtude de alguns alunos não terem exposto as expressões para área/perímetro da maneira adequada.

Alguns alunos demonstraram inicialmente a incompreensão do significado das variáveis x e y , chegando a utilizá-los de maneira simultânea. Para estes alunos acredita-se que não foi possível desenvolver a atividade de maneira satisfatória, pois os mesmos não deram retorno. Destaca-se que 5 alunos deixaram de dar retorno aos questionamentos realizados no fórum.

Esta questão visava trabalhar os conteúdos de dependência funcional por meio do emprego da relação entre as variáveis, e utilizando os conhecimentos prévios de Geometria Plana e Funções. Desta maneira acredita-se que àqueles alunos que se empenharam e responderam a questão integralmente, houve uma melhora na aprendizagem. Já para os quais não houve empenho e retorno aos questionamentos não houve melhora significativa.

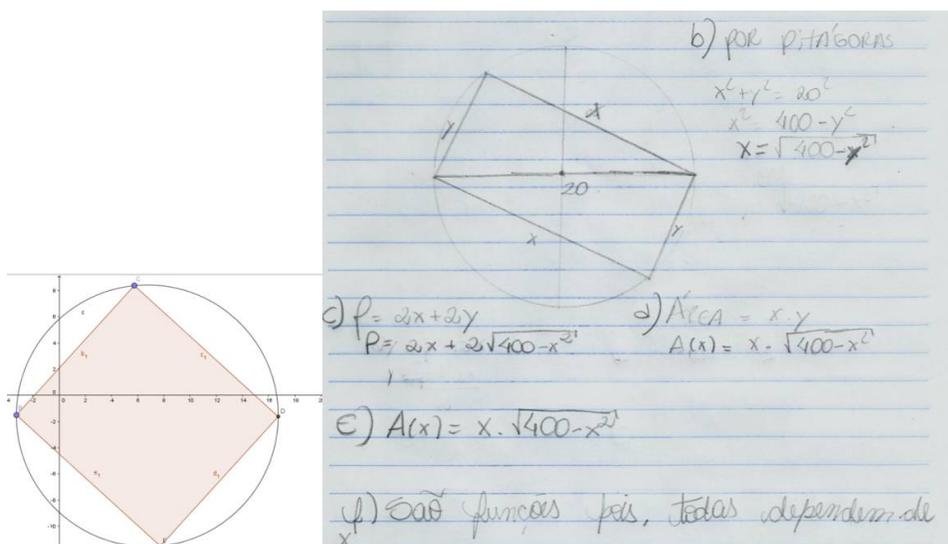
Respostas:

Os alunos A24, A22, A21, A16, e A11 resolveram corretamente, sendo que A21 utilizou o aplicativo GeoGebra para determinar o gráfico da área. Os alunos A16 e A14 fizeram toda a representação no GeoGebra. No fórum, ao aluno A22, foi solicitado que explicitasse a expressão do perímetro em função de um dos lados e o gráfico da expressão da área, sendo que o mesmo não deu nenhum retorno. Ao aluno A16 foi solicitado que ele identificasse os pontos de máximos e mínimos da

função área, porém o aluno afirmou saber que deveria usar derivada para tal, mas que não sabia exatamente como. Foi sugerido retomasse o conteúdo de derivada para tal, este aluno retornou a sugestão de forma positiva, errando um sinal.

A princípio não foi possível compreender a resposta do aluno A24. Sugeriu-se que ele representasse a situação utilizando o aplicativo GeoGebra. A seguir o aluno postou a resolução correta e efetuou a representação da situação no software, inicialmente de forma estática. Também foi solicitado que tentasse fazer de maneira dinâmica, o que foi atendido. A representação e a resposta dadas pelo aluno A24 são visíveis na Figura 59..

Figura 59 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A24



Fonte: participantes da pesquisa

Inicialmente o aluno A14 não exibiu a expressão do perímetro e da área, afirmando que área máxima seria dada quando $x=y$. Questionou-se o aluno sobre esse fato, ao que respondeu expondo as expressões e determinando a área máxima de maneira correta. A resposta final dada por esse aluno é apresentada na Figura 60.

Figura 60 - Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A14

Quadrado

Pontos Médios

$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 100 - \frac{y^2}{4}$

$x^2 = 4\left(100 - \frac{y^2}{4}\right) = x^2 = 400 - y^2 \quad x = \sqrt{400 - y^2}$

$A = x \cdot y \quad \left(\begin{array}{l} i. \quad x = \sqrt{400 - y^2} \\ ii. \quad x = \sqrt{200} \end{array} \right)$

$A(y) = \sqrt{400 - y^2} \cdot y$

$A'(y) = \sqrt{400 - y^2} + y \cdot \frac{1}{2}(400 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y)$

$= \sqrt{400 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{400 - y^2}}$

$A'(y) = 0 \rightarrow \frac{400 - y^2 - y^2}{\sqrt{400 - y^2}} = 0$

$400 - 2y^2 = 0$

$400 = 2y^2$

$y^2 = 200 \quad y = \sqrt{200}$

Para ter a área máxima $y = \sqrt{200}$. Se $y = \sqrt{200}$
 $x = \sqrt{200}$ por isso são iguais.

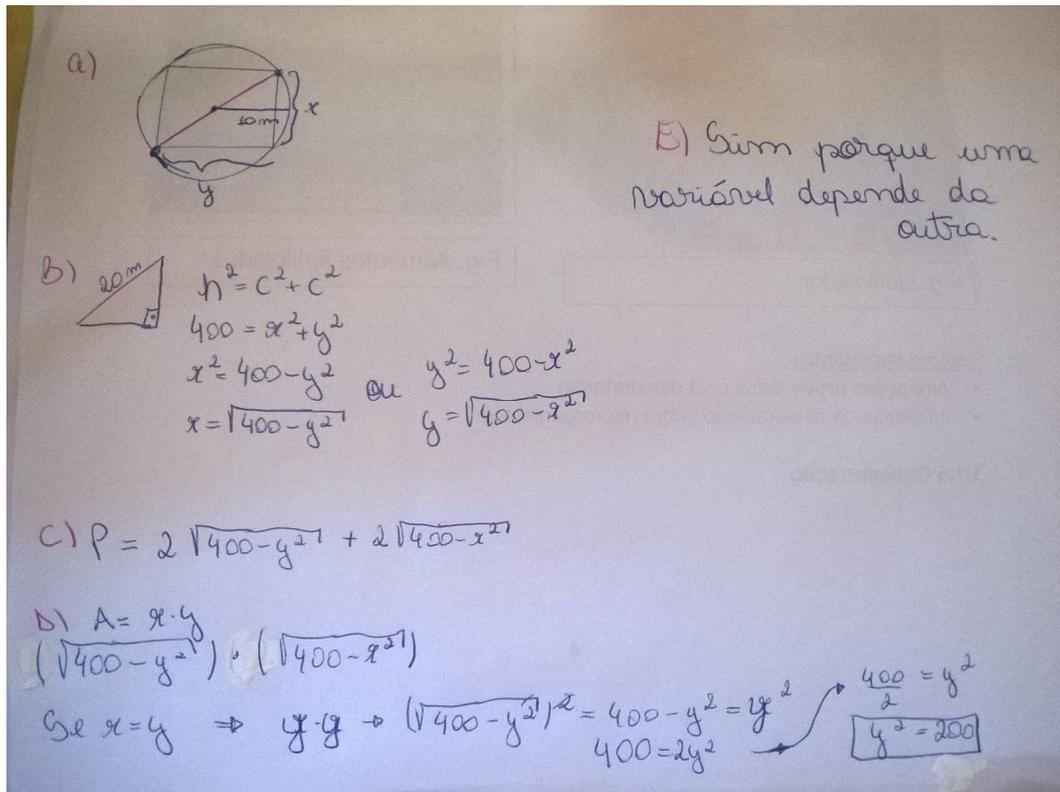
$P = 2x + 2y$

$P = 2(\sqrt{400 - y^2} + 2y) = 4\sqrt{200}$

Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A15 obteve a relação entre os lados do retângulo corretamente. Mas ao determinar o perímetro e a área o aluno substituiu tanto x como y , como visível na Figura 61.

Figura 61 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A15



Fonte: participantes da pesquisa

Observa-se também que o aluno A15 supôs que $x=y$ para determinar a área. Ao ser solicitado que obtivesse as expressões da área e do perímetro em função de uma variável e o porquê de colocar $x=y$, o aluno não retornou.

O aluno A18 postou respostas que denominamos genéricas, em virtude de não contemplar as especificidades do problema. As mesmas podem ser vistas na Figura 62.

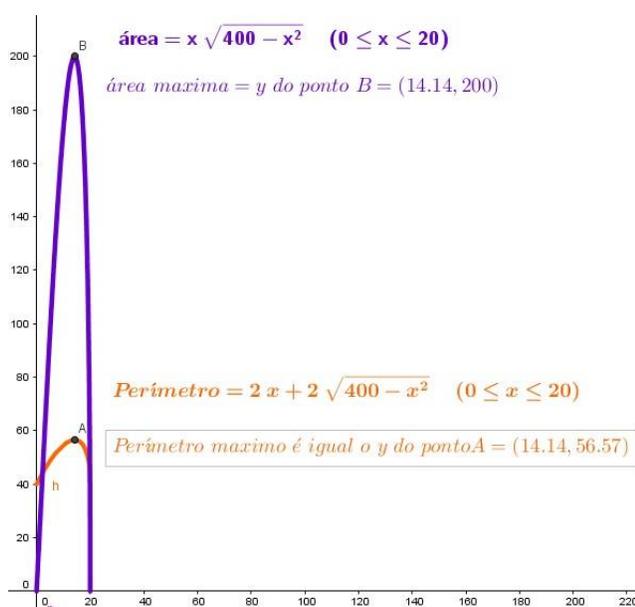
Figura 62 – Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A18

- B) podemos determinar o comprimento do retângulo por x e a altura por y
- C) o perímetro seria dado por $2x+2y$
- D) a área por $x \cdot y$
- e) por o retângulo estar inscrito no círculo terá sempre uma proporção na medida que x ou y diminuir ou aumentar pois não pode sair das dimensões do círculo mas não tenho ideia como relacionar

Fonte: participantes da pesquisa

Observa-se que o aluno percebe que existe uma relação entre os valores de x e y . Assim, uma forma encontrada para auxiliá-lo foi postada a representação da situação no GeoGebra e foi solicitado que tentasse resolver novamente. O aluno não respondeu corretamente a esse questionamento. Como o aluno mostrou-se participativo, a fim de corrigir sua resposta, foi questionado como seria o gráfico do perímetro e da área. O aluno respondeu postando a imagem, Figura 63, do GeoGebra com o gráfico e os pontos corretos.

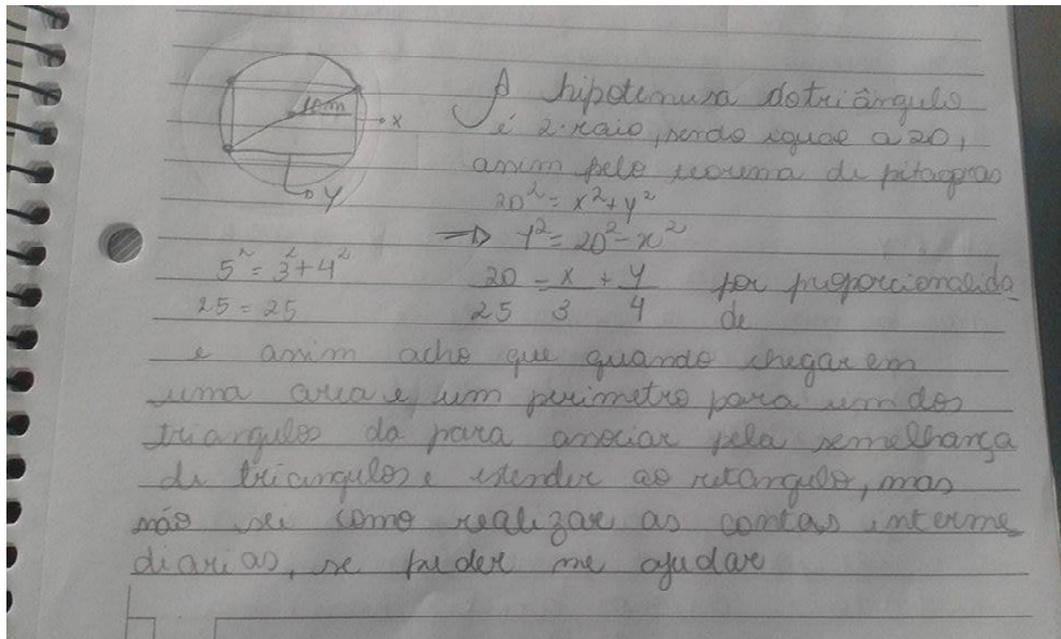
Figura 63 - Gráfico da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A18



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A17 construiu a situação utilizando o aplicativo, porém a construção não conservava as propriedades ao ser movimentada. Foi sugerido à A17 reconstruir, o que não foi realizado. Na resolução, o aluno expôs inicialmente que uma possibilidade seria utilizar o Teorema de Pitágoras, mas que não saberia continuar. Sugeriu-se então para que ele escrevesse um dos lados em função do outro. O aluno tentou utilizar de semelhança de triângulos e proporcionalidade para resolver (Figura 64). Como a tentativa realizada pelo aluno foi frustrada, sugeriu-se utilizar o Teorema de Pitágoras, isolando uma variável e substituindo na expressão da área. Não houve retorno à essa sugestão.

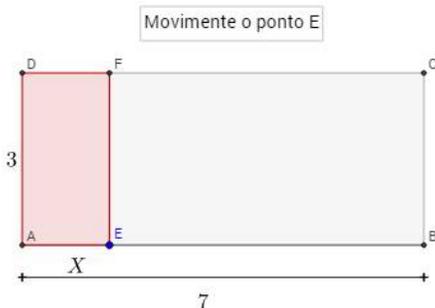
Figura 64 - Resolução da situação proposta na questão 3, realizada pelo aluno A17



Fonte: participantes da pesquisa

Questão 4:

Dado um retângulo ABCD, onde $\overline{AB} = \overline{DC} = 7$ cm e $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ cm. Tem-se que \overline{EF} é perpendicular a \overline{AB} com F pertencendo a \overline{DC} e E pertencendo a \overline{AB} .



Em relação ao retângulo AEFD:

- Como podemos determinar suas dimensões?
- Como podemos determinar o perímetro do retângulo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões do retângulo?

Visão Geral:

Nesta questão 10 alunos responderam-na corretamente. O único aluno que errou foi por ter visto a situação como algo estático. Tal fato demonstra que o aluno não prestou a devida atenção ao problema, haja vista que havia uma representação dinâmica realizada no GeoGebra e disponível no Moodle.

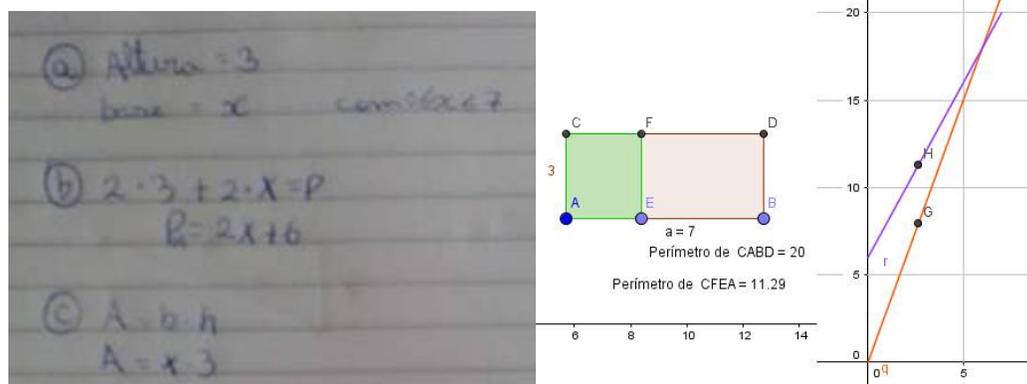
Dentre os alunos que acertaram 2 inicialmente empregaram o Teorema de Pitágoras para resolver o problema, o que era desnecessário, provavelmente devido ao seu uso na questão anterior, posteriormente resolveram da maneira esperada.

Esta questão ainda visou verificar a melhora da aprendizagem dos alunos, haja vista que eles responderam-na no levantamento das dificuldades. Em comparação nota-se uma significativa melhora, haja vista que no levantamento houve apenas 2 respostas corretas e 3 parcialmente corretas.

Respostas:

Os alunos A22, A21, A18, A17, A16, A15, A14 e A11 responderam corretamente a questão, sendo que os alunos A22 e A15 não exibiram o gráfico mesmo após serem solicitados. Os alunos A16 e A14 representaram a situação no GeoGebra e ao ser solicitados exibiram os gráficos, como visível na Figura 65.

Figura 65 - Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A16



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A18 confundiu o termo retângulo com triângulo. Os alunos A21 e A11 informaram, ao serem questionados que o gráfico seria uma reta.

Os alunos A10 e A24 responderam inicialmente com o uso de expressões mais elaboradas, isto é definiram x e y um em função do outro, com o uso do Teorema de Pitágoras, como visível na Figura 66.

Figura 66 – Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A24

a) POR PITÁGORAS.

$$x^2 + 3^2 = y^2$$

$$x^2 + 9 = y^2$$

$$y = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$y^2 = x^2 + 9$$

$$y^2 - 9 = x^2$$

$$x = \sqrt{y^2 - 9}$$

b) Perímetro = $2 \cdot 3 + 2x$
 $= 6 + 2 \cdot \sqrt{y^2 - 9}$

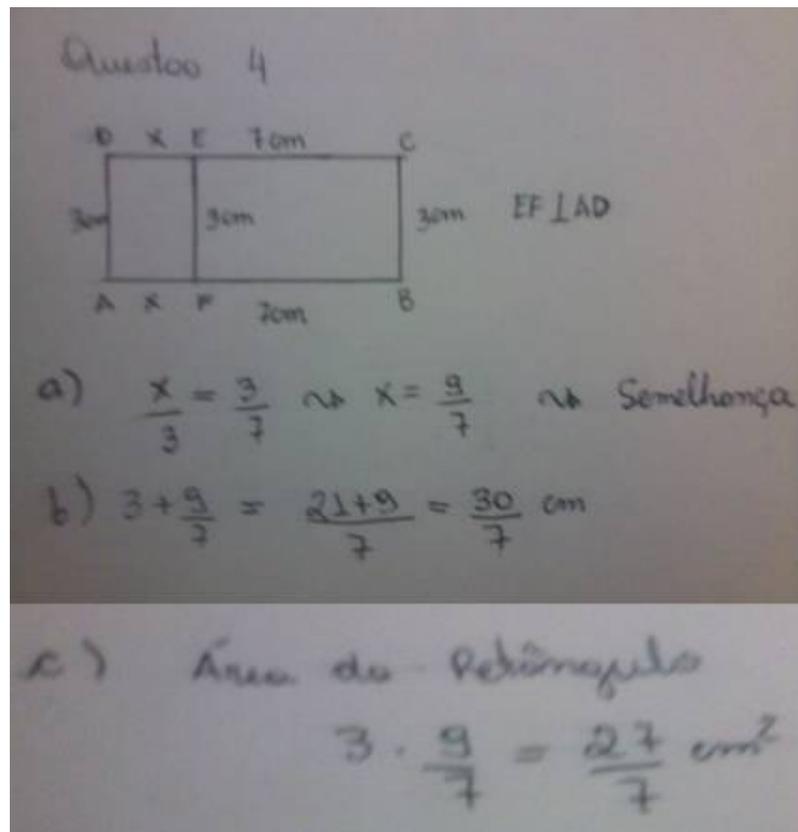
c) Área = $b \cdot x \cdot h$
 $\sqrt{y^2 - 9} \cdot 3$

Fonte: participantes da pesquisa

Foi sugerido a esses alunos que tentassem resolver o problema de maneira mais direta, sem a utilização do Teorema de Pitágoras, o que fizeram corretamente.

O aluno A3 utilizou um caso de semelhança/proporcionalidade. Ao ser questionado a respeito o aluno não retomou. Fica visível que o aluno interpretou a situação problema como algo estático, conforme apresenta a Figura 67, demonstrando a debilidade dos subsunçores e da compreensão do problema.

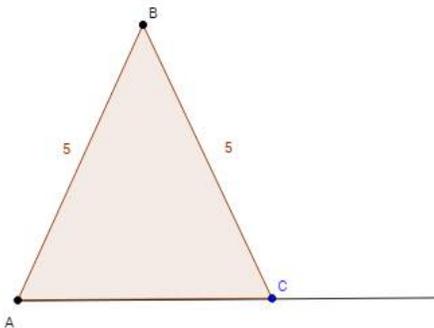
Figura 67 – Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A3



Fonte: participantes da pesquisa

Questão 5:

Dado um triângulo isósceles ABC, onde $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm.



- Que valores o segmento \overline{AC} pode assumir para que o triângulo ABC exista?
- É possível determinar a área do triângulo em função da medida do segmento \overline{AC} ? Como?
- É possível determinar o perímetro do triângulo? Como?

d) As expressões que representam a área e o perímetro (se existirem) são funções? Em caso afirmativo, como é o gráfico delas?

Visão Geral:

Nesta questão 9 alunos acertaram, Um aluno errou a desigualdade triangular, demonstrando que ainda não a internalizou. Apesar disso teve sua resposta considerada “correta” por ter acertado os demais itens. Um outro demonstrou grande dificuldade em determinar o gráfico necessitando de três tentativas. Outros dois alunos tentaram empregar o Teorema de Heron⁴ para resolver o problema, mas não obtiveram sucesso.

Tal como a questão anterior, pode se ver aqui uma melhora por parte dos alunos em relação ao levantamento das dificuldades, ao notar-se que a maioria foi capaz de resolvê-la de maneira satisfatória, haja vista que no levantamento apenas dois alunos responderam de maneira satisfatória. Acredita-se que a resolução desta questão serve para indicar uma melhora na aprendizagem dos alunos ao longo do ano e desta atividade.

Respostas:

Os alunos A14, A16 A18, A22, A21, A11 e A15 acertaram a questão. Sendo que o aluno A14 postou a representação no GeoGebra com seu gráfico, A21 e A18 exibiram em imagem os gráficos feitos no GeoGebra e A11 não exibiu o gráfico. A Figura 68 apresenta a resolução do aluno A14.

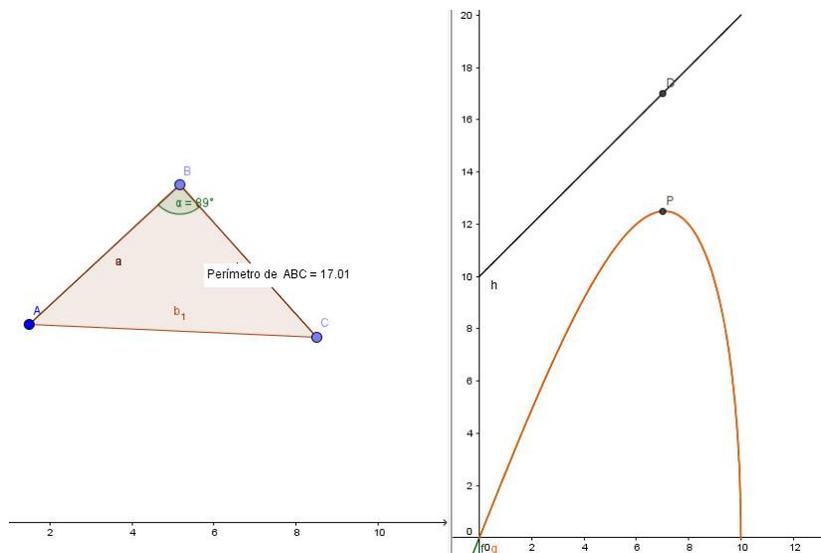
⁴ Teorema de Heron: Em um triângulo de lados a , b e c sua área é dada por: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$

Figura 68 - Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A14

a) A soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado. b) $5^2 = b^2 + (x/2)^2$
 $h^2 = 25 - x^2/4$
 $h = \sqrt{100 - x^2}/2$
 $A(x) = \sqrt{100 - x^2} + \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{2} (100 - x^2)^{1/2} \cdot (-2x)$
 $= \frac{\sqrt{100 - x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{100 - x^2}}$
 $A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{100 - x^2 - x^2}{4\sqrt{100 - x^2}} = 0$
 $100 - 2x^2 = 0$
 $2x^2 = 100$
 $x^2 = 50 \quad x = \pm\sqrt{50} \approx 7,07106$

c) Perímetro: $2x + x$
 $P(x) = 30 + x$

d) Sim, são funções, origens gôl.

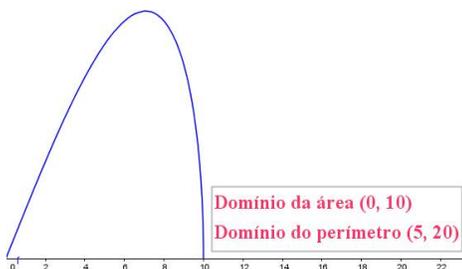
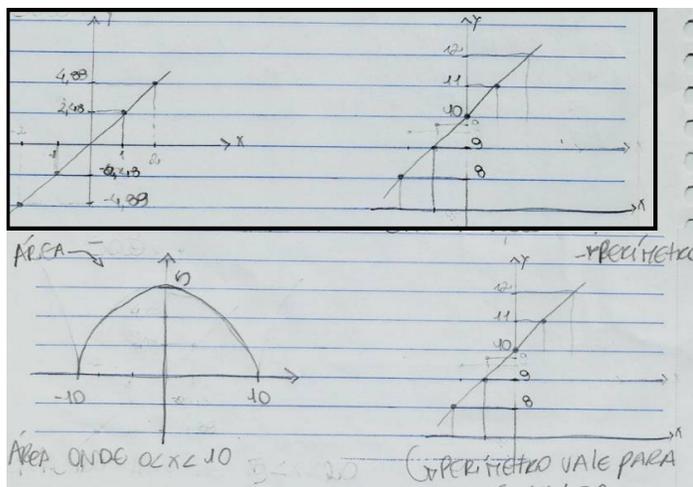


Fonte: participantes da pesquisa

Como o gráfico postado por A15 não estava claro, questionou-se se o gráfico seria uma parábola, ao qual não houve resposta. Em sua postagem, o aluno A22 afirmou que o gráfico era uma parábola, foi então solicitado que ele calculasse função área para que verificasse a incongruência, fato que não foi feito. O aluno A24

determinou corretamente as expressões para área e do perímetro. Foi então solicitado que avaliasse o domínio das funções cujos gráficos apresentados. Observa-se que o gráfico da função área foi inicialmente apresentado como uma reta e após questionamentos realizados o aluno apresentou uma parábola. Foi solicitado que o visualizasse no GeoGebra, para tanto foram necessárias duas tentativas para que o fizesse corretamente. Na primeira tentativa o aluno fez o gráfico variando o valor de x em função de y . A Figura 69 apresenta os gráficos feitos por A24.

Figura 69 – Gráficos da situação proposta na questão 5, realizados pelo aluno A24

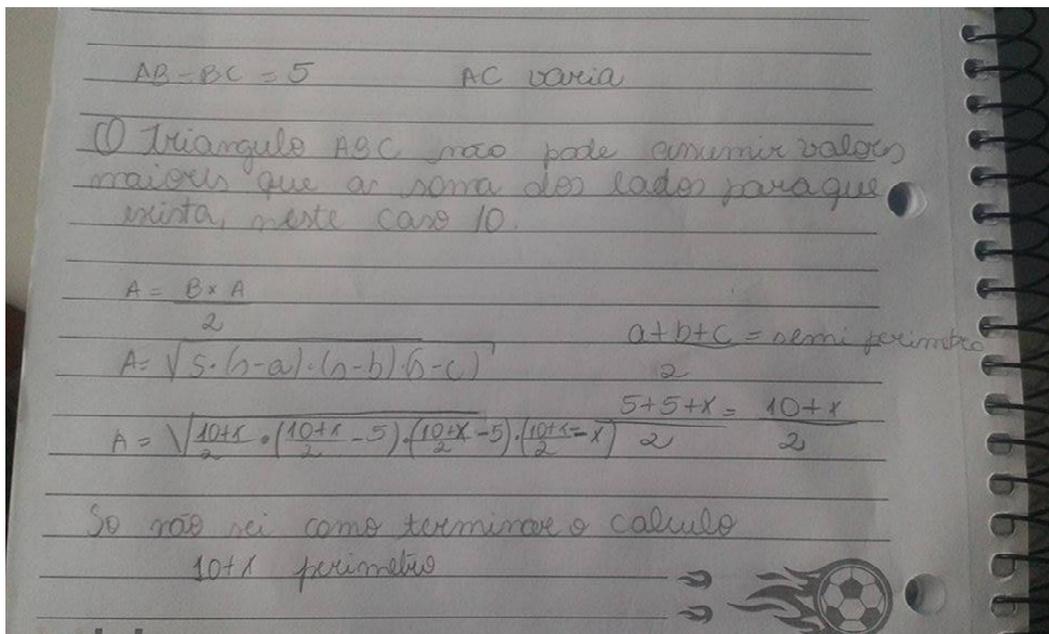


Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A3 inverteu a desigualdade triangular errando o item a e acertou os demais itens. Ele ainda afirmou não ser capaz de determinar o gráfico da função área, ao ser incentivado a fazê-lo, não houve resposta.

Os alunos A17 e A10 utilizaram da fórmula de Heron para tentar resolver o problema, como visível na Figura 70.

Figura 70 – Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A17



Fonte: participantes da pesquisa

Observa-se que A10 e A17 não obtiveram sucesso em suas resoluções. Sugeriu-se que utilizassem o Teorema de Pitágoras para resolver o problema, porém não houve resposta.

Questão 6:

Um fio com 12 cm pode ser curvado formando um círculo, dobrado formando um quadrado ou cortado em duas partes formando um círculo e um quadrado.



a) É possível determinar a área do quadrado em relação a quantia de fio utilizada? Como?

- b) É possível determinar a área do círculo em relação a quantia de fio utilizada? Como?
- c) É possível determinar a soma da área do triângulo com o círculo em relação a quantia de fio utilizada em cada um deles? Como?
- d) A expressão que representa a soma das áreas (se existir) é função? Em caso afirmativo, como é o gráfico dela?

Visão Geral:

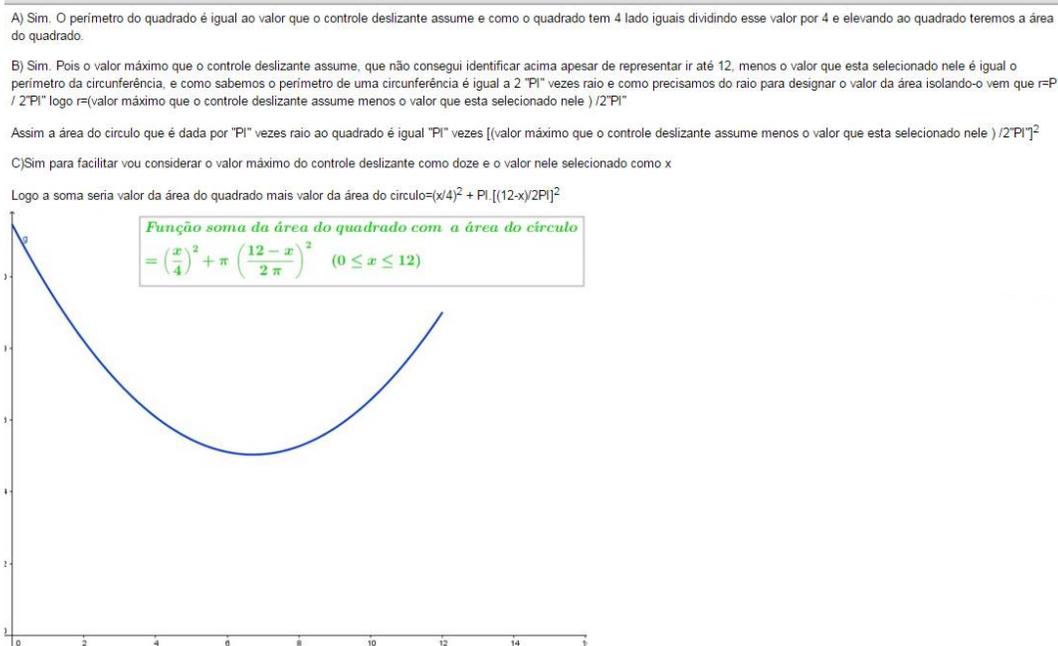
Nesta questão 6 alunos acertaram, dentre os quais 2 inicialmente erraram a fórmula da circunferência e um inicialmente considerou apenas o caso em que se utilizaria todo o fio. Dos demais, 2 alunos não perceberam que os itens b e c seriam complementares. Outros 2 alunos não responderam.

Esta questão visou empregar diferentes conceitos de Geometria Plana e verificar se os alunos seriam capazes de relacioná-los a funções, interpretando e verificando a existência de dependências funcionais. Foi possível notar uma debilidade por parte dos alunos neste sentido junto de uma falta de interesse em resolver a questão.

Respostas:

Os alunos A21, A16, A18, A11, A24, A14 acertaram a questão, sendo que o aluno A18 respondeu em texto, conforme a Figura 71.

Figura 71: Resolução da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A18



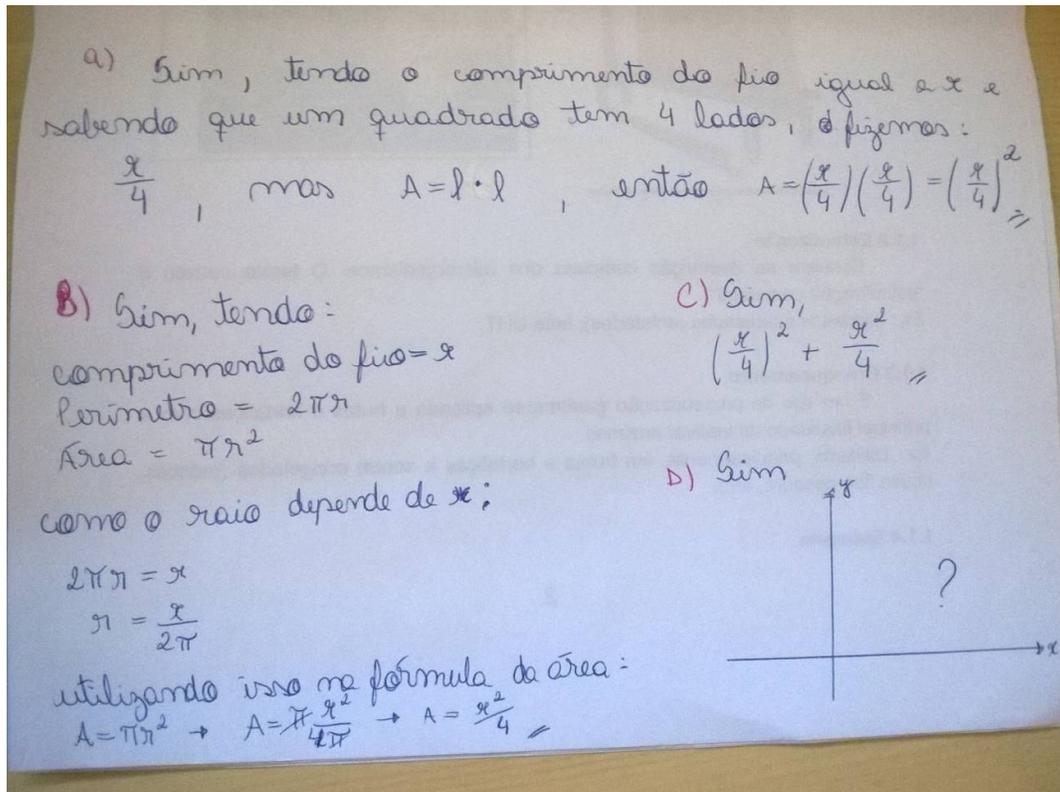
Fonte: participantes da pesquisa

Os alunos A24, A14 representaram a situação no GeoGebra sendo que A24 inicialmente respondeu o item a e b para o caso em que todo o fio era utilizado, deixando os itens c e d em branco, generalizando a situação após ser solicitada. Já os alunos A14 e A16 inicialmente haviam utilizado a área da circunferência de forma equivocada, corrigindo-a ao serem chamados atenção.

O aluno A10 acertou os itens a e b, ao ser questionado sobre como fazer o item c acertou a ideia, mas não considerou que os valores seriam complementares, isto é que a medida no item seria x e no item c 12-x, ao ser questionado sobre este fato não houve retorno.

O aluno A15 acertou o item a, porém errou item b, ao desenvolver os cálculos. No item c, A15 não percebeu a complementariedade entre as expressões e não foi capaz de fazer o gráfico da situação. Sua resposta pode ser vista na Figura 72. Ao ser solicitado que verificasse os cálculos e informado que os valores seriam complementares, não houve resposta.

Figura 72 - Resolução da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A15



Fonte: participantes da pesquisa

O aluno A3 acertou o item a e cometeu o mesmo erro do aluno A15 no item b, deixando os demais itens em branco. Foi sugerido a esse aluno uma possível resolução aos demais itens, porém não houve resposta.

6.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ATIVIDADE INVESTIGATIVA

No Quadro 13 é apresentada a relação das respostas erradas, “certas” e “sem retorno”. Sendo que neste caso respostas “certas” refere-se num sentido amplo, onde o aluno realizou a maior parte de questão e foi possível interpretar o que ele entendeu o que fora solicitado ainda que apresente algum erro, incluindo-se assim também as consideradas como parcialmente corretas. Já as respostas “sem retorno” referem-se a situações em que foi dada determinada orientação ao aluno e este não respondeu, englobando tanto as que ao final da atividade foram consideradas como

“certas” como as erradas. Destaca-se ainda que sobre estas questões não foi empregada a análise de erros.

Quadro 13 – Respostas da atividade no Moodle

Questão	Certas*	Erradas	Sem retorno
1	11	-	-
2	8	3	4
3	8	3	5
4	10	1	3
5	9	2	5
6**	6	4	4

Fonte: autores

Com base no apresentado percebe-se que na questão 1 os alunos não apresentaram dificuldades em resolvê-la. A questão relacionava os subsunçores de área com os de função quadrática, trabalhava a relação entre as grandezas geométricas (altura e largura), e introduziu as ideias de variações.

Na questão 2, é possível perceber que os alunos tiveram dificuldade em identificar os valores correspondentes a cada um dos lados, fato que poderia ser evitado se os alunos verificassem os valores obtidos. Permitiu aos alunos trabalhar as grandezas geométricas ao perceberem as variáveis correspondentes a cada um dos valores. Um fato que chama atenção foi a inferência feita pelos alunos de que área máxima seria sempre um quadrado.

Na questão 3, os alunos apresentaram dificuldades em trabalhar com variáveis mais complexas do que o usual, ou seja, precisaram utilizar do teorema de Pitágoras. Após sugestões de como lidar com a situação, conseguiram desenvolver a atividade de maneira satisfatória. Percebe-se que nesta questão os alunos fizeram uso do subsunçor que se refere ao Teorema de Pitágoras, da Geometria Plana ao que se refere a círculos e retângulos, sendo relevante para os alunos perceberem a variação e relação entre as grandezas Geometria e suas dependências.

A questão 4 é similar a utilizada no levantamento das dificuldades. Tal questão permitiu observar a melhora dos alunos, em virtude da maioria ter acertado a

questão. Observa-se que apenas 3 alunos apresentaram dificuldade em resolvê-la, e somente um aluno não chegou a resposta correta. Uma melhora considerável haja vista que no levantamento das dificuldades apenas dois alunos acertaram-na completamente. Também cita-se que aqui tem-se uma questão mais simples que a anterior, intercalando assim o nível de complexidade.

A questão 5 também é similar a apresentada no levantamento das dificuldades e tratou da relação funcional existente entre a medida da base e a área de um triângulo isósceles, fazendo uso dos subsunçores utilizados para a resolução das questões anteriores. Menciona-se que apesar da melhora considerável nas respostas a esta questão, ainda não houve um resultado satisfatório; em especial devido ao alto número de alunos que não deram retorno demonstrando a diminuição do seu interesse.

A questão 6, focou na relação entre o círculo, o quadrado e o fio, sendo necessário a compreensão e transformação da situação de maneira a relacionar a medida do quadrado e do círculo. Observa-se que essa foi a questão que apresentou o maior número de respostas erradas, e teve ainda um aluno (A22) que a deixou em branco.

7 DA ATIVIDADE AVALIATIVA (SORTEADA EM AULA)

A seguir serão apresentadas as questões sorteadas (Apêndice I) que foram respondidas pelos alunos que participaram da atividade potencialmente significativa, com exceção dos alunos A15 e A21 que não a responderam. Lembrando que a escolha da questão a ser respondida foi realizada por sorteio entre os alunos da disciplina de Cálculo I, e a resolução dessas questões foi avaliada pela professora da disciplina. No Quadro 14 são apresentadas quais questões cada aluno respondeu.

Quadro 14 – Relação entre alunos e questão sorteada

Aluno	A3	A10	A11	A14	A16	A17	A18	A22	A24
Questão	2	1	1	5	11	6	7	4	6

Menciona-se que nem todas as questões serão apresentadas, pois algumas foram respondidas por outros alunos, os quais estavam cursando a disciplina, porém não eram sujeitos da pesquisa. Relata-se também que, em alguns casos, mais de um aluno respondeu a mesma questão. O uso de tais questões foi uma maneira encontrada para se tentar verificar se houve aprendizagem significativa e se os alunos apresentavam evidências de uma (re)construção dos seus subsunçores. Em um primeiro momento, as questões foram respondidas de forma individual em sala, e em um segundo momento, os alunos foram ao laboratório, postar suas questões no AVEA com a devida “modelagem” da situação no aplicativo Geogebra. Após isso, houve em alguns casos, a intervenção do pesquisador, sugerindo melhorias e ou fazendo questionamentos a cerca das soluções apresentadas.

Questão 1: Uma esfera de raio 4 está inscrita num cone circular reto. Determine as dimensões do cone de volume mínimo.

Dicas:

Faça a representação 3D do problema (usando o Geogebra)

Expresse o volume do cone como função de sua altura h .

Essa questão foi resolvida corretamente pelos alunos A11 e A10 e fizeram a representação no GeoGebra, conforme apresenta a Figura 73.

Ao aluno A10 foi sugerida algumas alterações no arquivo, como a adição de controles deslizantes, o que não foi feito.

Tal questão abordava diversos conhecimentos envolvendo relações entre grandezas geométricas os quais os alunos aparentam ter compreendido, por meio da resolução e construção da representação no GeoGebra.

Acredita-se, que no caso de ambos os alunos, ao compararmos com o levantamento das dificuldades, no qual deixaram a maioria em branco, observa-se melhora e pode-se deduzir que houve aprendizagem significativa por meio da (re)construção dos subsunçores existentes em sua estrutura cognitiva.

Figura 73 - Resolução da situação proposta na questão 1, realizada pelo aluno A11

$(h-4)^2 = 4^2 + x^2$
 $x^2 = (h-4)^2 - 16$
 $x = \sqrt{h^2 - 8h}$

$x^2 = h^2 + r^2$
 $x = \sqrt{h^2 + r^2}$

Pela semelhança de triângulos:
 $\frac{h}{4} = \frac{r}{\sqrt{h^2 - 8h}} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{h^2 - 8h}} = \frac{r}{4}$

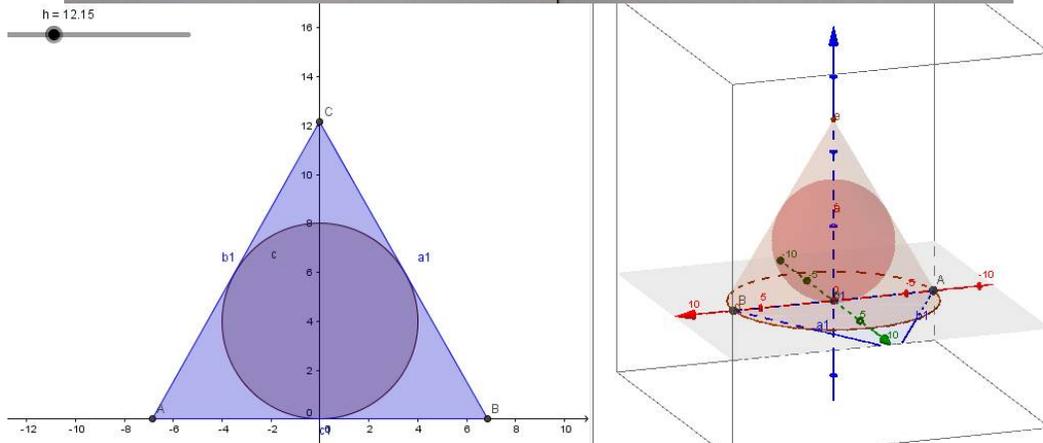
$\Rightarrow r = \frac{4h}{\sqrt{h^2 - 8h}}$

Pela fórmula $V_c = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$, temos que:
 $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{4h}{\sqrt{h^2 - 8h}}\right)^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16h^2}{h-8}$

Obs: o volume fica em função de h

Derivando e igualando a zero:
 $\frac{d}{dh} \frac{1}{3} \pi \frac{16h^2}{h-8} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
 $0 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{(h-8)32h - 16h^2}{(h-8)^2} \right)$
 $= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{32h^2 - 256h - 16h^2}{(h-8)^2}$
 $= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{16h^2 - 256h}{(h-8)^2} = 0$
 $h(16h - 256) = 0$
 $16h - 256 = 0$
 $h = \frac{256}{16}$
 $h = 16$



Fonte: participantes da pesquisa

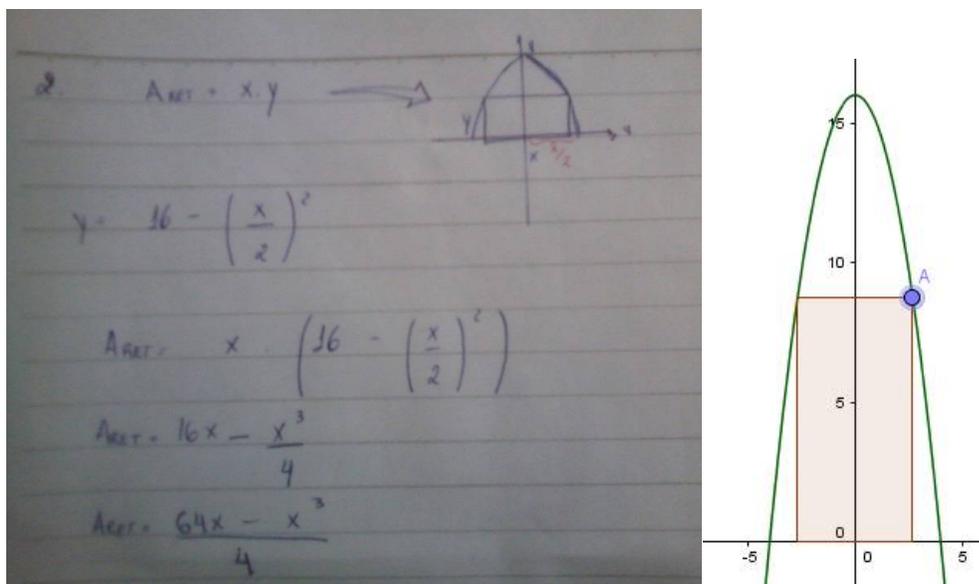
Questão 2:

Um retângulo tem os dois cantos inferiores no eixo x e os dois cantos superiores na curva $y=16-x^2$. Qual a expressão que relaciona a medida de um dos lados do retângulo com a área? Como é o gráfico dessa expressão? Para esses retângulos, quais as dimensões daquele que tem maior área?

A questão 2 foi respondida corretamente por A3. Esse aluno fez a representação no GeoGebra e a esta representação, sugeriu-se algumas

modificações, as quais o aluno não retornou. Na resolução apresentada, na Figura 74 o aluno inicialmente determinou a função área e questionou se deveria derivar e igualar a zero para dar continuidade.

Figura 74 – Parte da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3



Fonte: participantes da pesquisa

Respondeu-se o seu questionamento de forma positiva, resultando na resolução correta, como visível na Figura 75.

Figura 75 – Final da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3

The figure shows handwritten mathematical work on the left and right sides of a page. The work includes the following steps:

$$A(x) = \frac{64x - x^3}{4}$$

$$A'(x) = \frac{-3x^2 + 16}{4}$$

$$A'(x) = 0$$

$$0 = \frac{-3x^2 + 16}{4}$$

$$\frac{3x^2}{4} = 16$$

$$3x^2 = 64$$

$$x^2 = 21,333$$

$$x = \sqrt{21,333}$$

$$x = 4,62$$

$$A(x) = \frac{64x - x^3}{4}$$

$$A(4,62) = \frac{64(4,62) - (4,62)^3}{4}$$

$$A(4,62) = 49,267218$$

$$A(4,62) \approx 49,27$$

Área máxima

Logo

$$49,27 = a \cdot b$$

$$49,27 = 4,62 \cdot b$$

$$b \approx 10,66$$

Fonte: participantes da pesquisa

Para a resolução desta questão o aluno empregou de maneira adequada os subsunçores envolvendo Funções, Derivadas e Geometria Plana, dando indícios de que ocorreu aprendizagem significativa, ainda que seu desempenho ao longo da atividade investigativa não tenha sido ótimo, acertou quatro questões, foi superior ao exibido no levantamento das dificuldades no qual não acertou nenhuma questão.

Questão 4: De todos os triângulos, cujo um dos lados mede 4 cm e cujo perímetro é 14 cm, mostre que o triângulo isósceles tem área máxima. Dica: Utilize a fórmula de Heron.

Essa questão foi resolvida pelo aluno A22, que obteve o resultado esperado, como pode-se visualizar na Figura 76. Ao ser questionado se o gráfico seria uma parábola, não houve retorno.

Observa-se que esta questão demandava que o aluno empregasse o conhecimento sobre o Teorema de Heron, o que não é trivial para a fase em que esses alunos se encontram (início da graduação). Porém, notou-se que em particular, o aluno A22, apresentou um ótimo desempenho ao longo da atividade e foi um dos melhores desempenhos no levantamento das dificuldades. Percebe-se assim, que o aluno possui base e um forte interesse em aprender. Desta forma, acredita-se que A22 exibiu traços de que houve uma aprendizagem significativa.

Figura 76- Resolução da situação proposta na questão 4, realizada pelo aluno A22

QUESTÃO 4

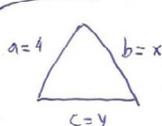
DE TODOS OS TRIÂNGULOS, USO UM DOS LADOS MEDE 4cm E USO PERÍMETRO MEDE 14cm, MOSTRE QUE O TRIÂNGULO ISÓSCELES TEM ÁREA MÁXIMA:

→ UTILIZANDO A FÓRMULA DE HERON (QUANDO TEMOS OS 3 LADOS E NÃO TEMOS A ALTURA DO TRIÂNGULO).

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

ONDE p É O SEMI-PERÍMETRO DO TRIÂNGULO.

RESOLUÇÃO:



$a=4$
 $b=x$
 $c=y$

$P=14\text{cm}$
 $4+x+y=14$
 $x+y=10$
 $y=10-x$

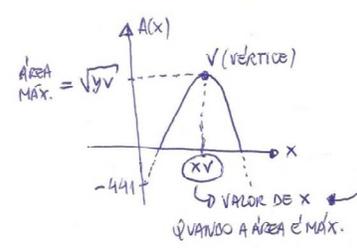
$p = \frac{14}{2}$
 $p = 7\text{cm}$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \sqrt{7(7-4)(7-x)(7-y)}$$

$$A(x) = \sqrt{7 \cdot (3) \cdot (7-x) \cdot (7-10+x)}$$

$$A(x) = \sqrt{-21x^2 + 210x - 441}$$



$$xv = -\frac{b}{2a}$$

$$xv = \frac{-210}{2(-21)}$$

$xv = 5\text{cm}$

$x+y=10$
 $5+y=10$
 $y=10-5$

$y=5\text{cm}$

SABEMOS QUE A ÁREA MÁXIMA OCORRE QUANDO $x=5$ E $y=5$. COMO $a=4$, ESTE TRIÂNGULO É ISÓSCELES.

Fonte: participantes da pesquisa

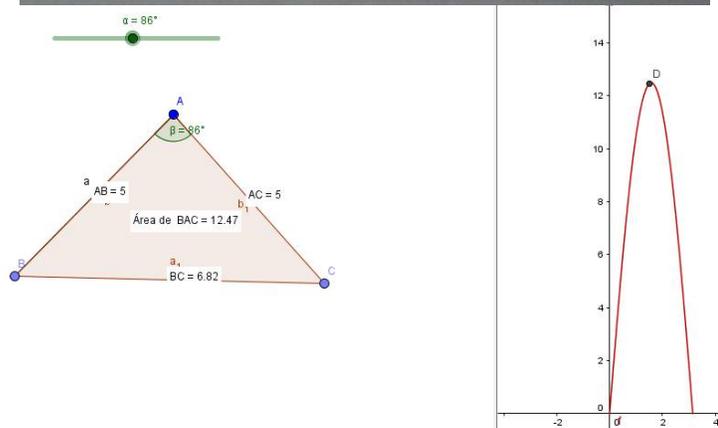
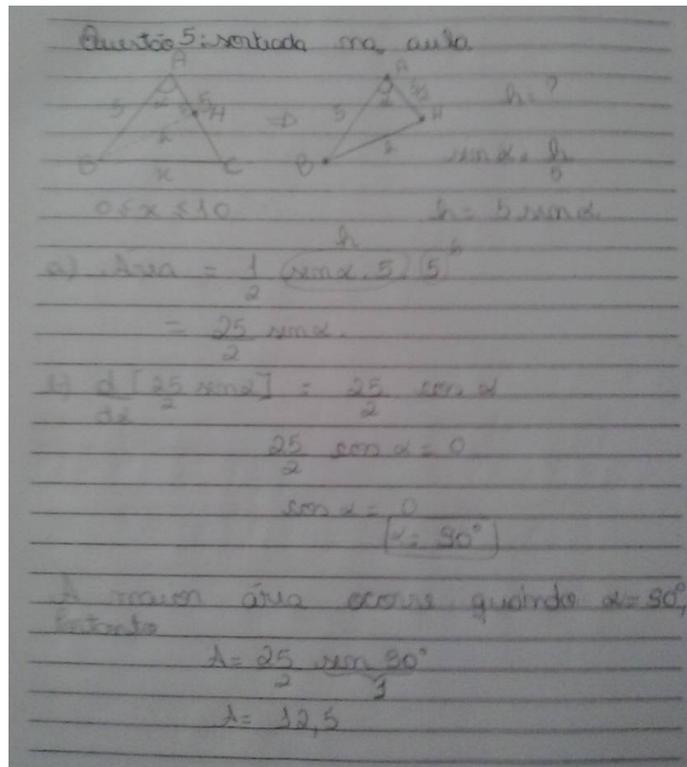
Questão 5: Dado um triângulo isósceles ABC, com $AB=AC=5\text{cm}$. Determine:

- A função que descreve o comportamento da área quando o ângulo $B\hat{A}C$ varia.
- Dentre todos os triângulos, determine aquele com maior área.

O aluno A14 acertou a questão 5 e fez a representação da situação no GeoGebra, ao ser solicitado para resolver a questão para os catetos medindo a e b , o fez de maneira correta. Para a resolução desta questão o aluno necessitou

interpretar a área por meio de uma dependência funcional do ângulo, e obter a área máxima. A resolução do aluno é visível na Figura 77.

Figura 77 – Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A14



Fonte: participantes da pesquisa

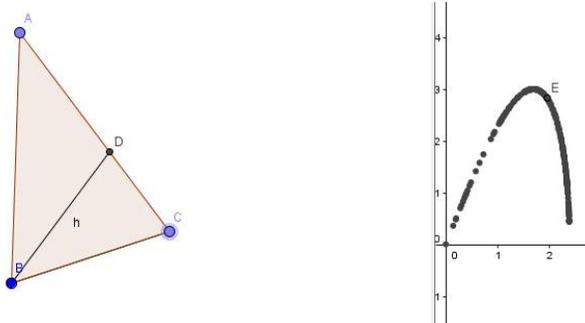
Acredita-se que o fato do aluno ter sido capaz de resolver o problema indica que houve uma aprendizagem significativa por meio dos subsunçores trabalhados.

Questão 6: Dado o triângulo ABC de lados AB=3cm e BC=2cm. Determine:

- a) A(s) função(s) que descrevem o comportamento da área quando a altura relativa ao lado AC varia.
- b) Determine as medidas dos lados do triângulo que possui maior área

O aluno A17, respondeu a questão 6, apresentando inicialmente apenas o arquivo do aplicativo GeoGebra, visível na Figura 78.

Figura 78 – Representação da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A17 .

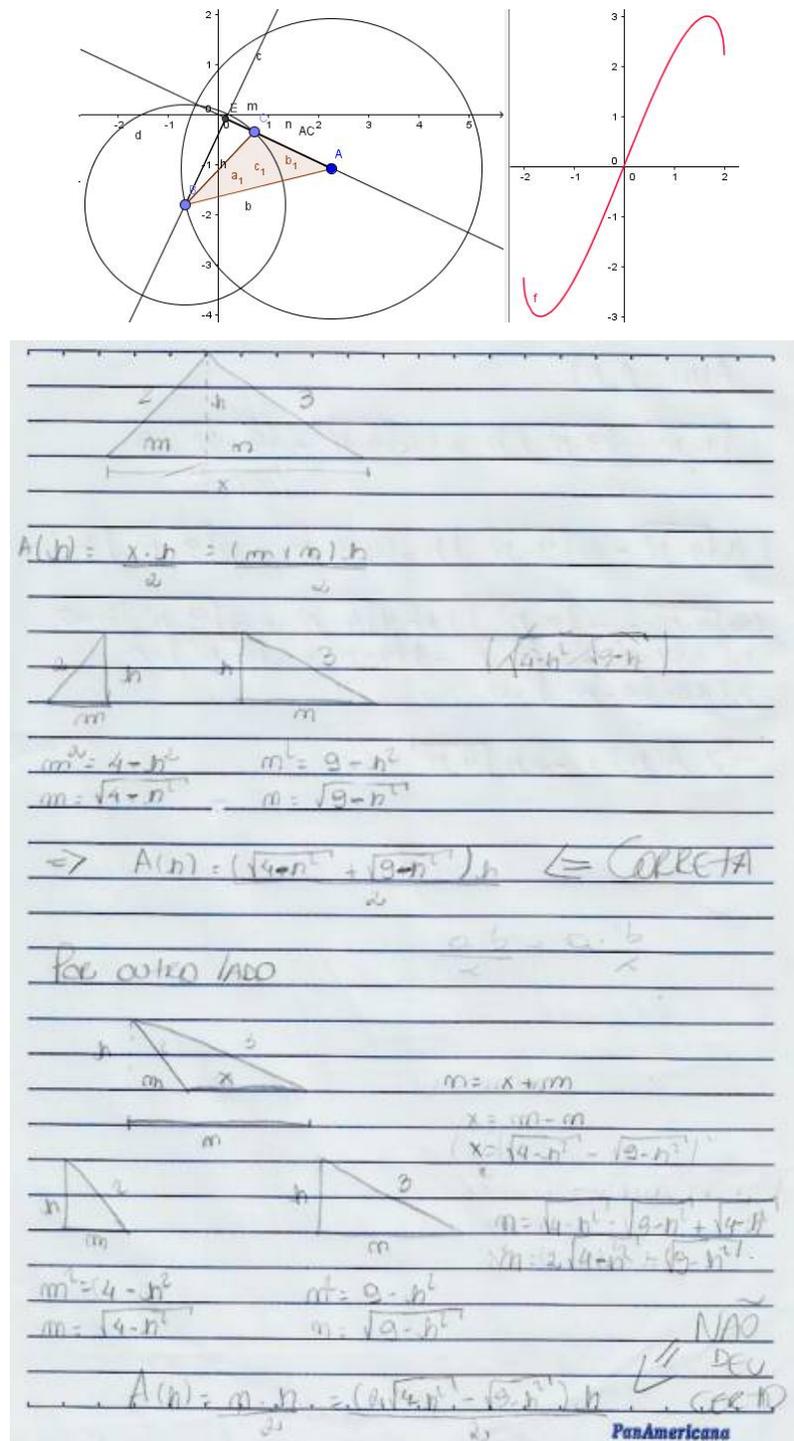


Fonte: participantes da pesquisa

Observa-se que a representação dada pelo aluno foi errada, pois o mesmo construiu a bissetriz do ângulo e não a altura. Ao ser chamado atenção para este fato o aluno questionou se "a bissetriz não pode ser vista como a altura?". Respondeu-se que não para esse caso e sugeriu-se que tentasse efetuar os cálculos, porém não houve retorno. No caso do aluno A17 não foi possível encontrar indícios de aprendizagem significativa, haja vista a falta de empenho do aluno em responder e aprender por meio de seus erros.

O aluno A24 também respondeu a questão 6, efetuando a representação no GeoGebra. Sugeriu-se que o mesmo ocultasse os objetos auxiliares, o que não foi feito. Na resolução A24 obteve uma das expressões, mas ao tentar obter a segunda errou ao isolar o x ($n=x+m$). Desta forma, ao ser sugerido que verificasse os cálculos, o aluno foi capaz de obter ambas as expressões e representar no GeoGebra a situação. Na Figura 79 é possível ver a primeira resolução do aluno.

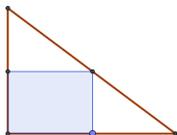
Figura 79 – Resolução inicial da situação proposta na questão 6, realizada pelo aluno A24



Fonte: participantes da pesquisa

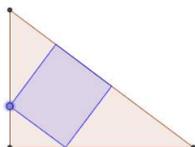
Acredita-se que o aluno A24 apresentou melhora significativa ao longo da atividade demonstrando indícios de empenho e da (re)construção de seus subsunçores.

Questão 7: Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 6 e 8 cm. Determine as dimensões do retângulo máximo, supondo que ele está posicionado como na figura abaixo.



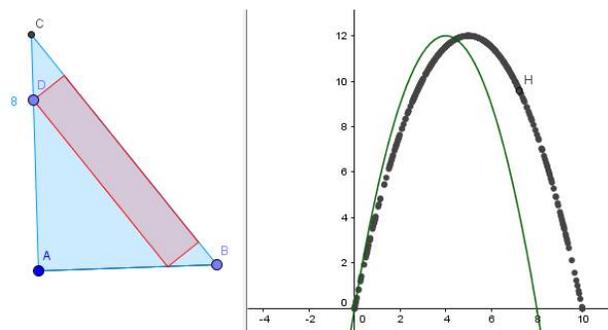
O aluno A18 acertou a questão 7. Foi solicitado que a resolvesse para valores catetos medindo a e b e representasse a situação no GeoGebra, o que o fez de maneira correta. O aluno demonstrou ter sido capaz de reconstruir e transformar o significado dos seus conhecimentos prévios ao ser capaz de interpretar a dependência existente entre os lados do retângulo.

Questão 11: Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 6 e 8 cm. Determine as dimensões do retângulo máximo, supondo que ele está posicionado como na figura abaixo.



O aluno A16 respondeu a questão 11 e acertou a resolução, sendo que a representação no GeoGebra gerou um gráfico diferente do esperado como visível na Figura 80.

Figura 80 – Representação da situação proposta na questão 11, realizada pelo aluno A16



Fonte: participantes da pesquisa

Foi solicitado que o aluno verificasse o porque do gráfico não estar correto. A 16 respondeu que foi devido a construção, onde o “gráfico” em preto está em função do segmento vermelho contido em \overline{CB} e o em verde esta em função do segmento \overline{AD} . Acredita-se portanto, que o aluno foi capaz de interpretar e identificar as diferentes dependências funcionais possíveis e o seus resultados, servindo como um forte indicio de que houve aprendizagem significativa.

7.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A AVALIAÇÃO

No que se refere às questões avaliativas acredita-se que elas permitiram que os alunos testassem seus conhecimentos, demonstrando que em sua maioria houve compreensão e internalização dos conteúdos trabalhados. Percebe-se que, com exceção do aluno A17, todos conseguiram obter a resposta correta. Menciona-se que as questões apresentavam diferentes níveis de dificuldade, e que para se obter uma noção mais clara da ocorrência da aprendizagem significativa caberia a escolha de uma questão adequada aos subsunçores e ao desenvolvimento demonstrado pelos alunos. Isso não foi realizado para evitar que houvesse aparente favorecimento ao designar uma questão mais fácil a determinado aluno.

Tal atividade também atingiu seu objetivo ao permitir que o professor da disciplina avaliasse os alunos, notou-se também um maior empenho dos alunos em resolver esta questão, em virtude de que as questões anteriores não valiam nota.

8 VISÃO GERAL DO DESEMPENHO DOS ALUNOS E DA ATIVIDADE

Dos 24 alunos que responderam ao levantamento das dificuldades, 15 se matricularam na disciplina de Cálculo I, dos quais 11 participaram da atividade e 9 concluíram-na. No Quadro 15 é apresentada a situação (aprovado, reprovado ou reprovado por frequência) dos alunos na disciplina de Cálculo I, se participou e se concluiu a atividade.

Quadro 15 - Relação de aproveitamento em Cálculo I e participação na Atividade

Aluno	Aprovado	Reprovado	Reprovado por Frequência	Participou da atividade	Concluiu a atividade
A1		X			
A3	X			X	X
A5			X		
A10		X		X	X
A11	X			X	X
A12			X		
A13		X			
A14	X			X	X
A15		X		X	
A16	X			X	X
A17		X		X	X
A18	X			X	X
A21	X			X	
A22	X			X	X
A24	X			X	X
Total	8	5	2	11	9
%	55,3%	33,3%	13,3%	73,3%	60%

Fonte: autores

Com base no Quadro 15 podemos ver que dos 15 alunos, 2 reprovaram por frequência e 5 reprovaram por nota, sendo que destes, 3 iniciaram a atividade e 2

concluíram-na, os demais alunos foram aprovados. Assim acredita-se que a atividade teve uma boa aceitação entre os alunos, pois a maioria participou. Observa-se que, em particular nessa disciplina, nesse semestre, foram matriculados 51 alunos e 14 obtiveram êxito.

O Quadro 16 apresenta as respostas dos alunos classificadas em corretas (C), erradas (E), parcialmente corretas (PC) e em branco (B).

Quadro 16- Respostas dos alunos no levantamento das dificuldades

Aluno	1	2	3	4	5
A3	PC/PC	E/B	B	PC	B
A10	E/E	B	PC	B	B
A11	PC/E	E	PC	B	B
A14	E/PC	B/PC	C	PC	B
A15	E/E	PC/E	PC	B	B
A16	E/PC	PC/E	PC	C	E
A17	E/E	E/E	PC	B	E
A18	PC/PC	PC/E	PC	PC	E
A21	PC/PC	C	C	C	PC/C/C
A22	C/PC	C	PC	PC	C/C/E
A24	E	PC/E	PC	E	E

Fonte: autores

No Quadro 17 tem-se as respostas dos alunos na atividade, classificadas em corretas, erradas e em branco.

Quadro 17 - Respostas dos alunos na atividade

	1	2	3	4	5	6	sorteada
A3	C	E	C	E	C	E	C
A10	C	C	E	C	E	E	C
A11	C	C	C	C	C	C	C
A14	C	C	C	C	C	C	C
A15	C	E	E	C	C	E	B
A16	C	C	C	C	C	C	C

A17	C	E	E	C	E	E	E
A18	C	C	C	C	C	C	C
A21	C	C	C	C	C	C	B
A22	C	C	C	C	C	B	C
A24	C	C	C	C	C	C	C

Fonte: autores

Com base nos quadros percebe-se que os alunos A11, A14, A16, A18, A21, A22, A24 apresentaram melhora significativa em relação ao levantamento das dificuldades, em virtude de que acertaram todas as questões. Menciona-se ainda que a questão 1 todos os alunos acertaram, isso foi possível por se tratar de uma questão clássica comumente abordada durante a faculdade. Na questão 4 pode-se ver a melhora dos alunos haja vista que apenas um aluno errou, e na atividade 5 ocorre efeito similar.

Os alunos A3 e A10 apresentaram respostas que variaram entre certas e erradas, mas acredita-se que o resultado final tenha sido positivo para estes alunos, haja vista que acertaram a questão sorteada e participaram ativamente da atividade.

No caso dos alunos A15 e A17 é possível deduzir que a atividade não apresentou melhoras significativas, pois estes alunos mantiveram uma grande incidência de respostas erradas, tanto no levantamento das dificuldades quanto na atividade. Assim vê-se que a atividade não atingiu 100% de aproveitamento, mas nota-se que a participação e empenho dos alunos (A15 e A17), conforme apresentado acima, não foi grande sendo assim pode-se afirmar que eles não atenderam o requisito básico da aprendizagem significativa que é o querer aprender.

Acredita-se que a atividade como um todo permitiu que se trabalhasse com os alunos as escolhas das estratégias utilizadas auxiliando-os a definir qual a melhor a ser utilizada. Também trabalhou-se com os conceitos necessários para a resolução das situações problemas.

Desta maneira, considera-se que a atividade foi potencialmente significativa, por ter significado lógico, pois o mesmo se relacionou e aparenta ter sido incorporado a estrutura cognitiva dos alunos relacionando os subsunçores de Geometria e funções entre si e criando novos conhecimentos. Além de permitir aos alunos compartilhar sua compreensão do conteúdo abordado, entretanto a troca de informações entre os

alunos, via Moodle, foi praticamente inexistente de tal forma caberia melhorar a atividade de alguma maneira em que permitisse a interação entre eles. Certamente deve ter ocorrido algum tipo de interação aluno-aluno, principalmente na resolução da atividade investigativa de forma presencial; porém não foi observada, visto que a interação pesquisador-sujeitos, a menos da entrevista, deu-se por meio do AVEA.

Acredita-se que metodologia utilizada foi satisfatória atendendo a seus objetivos, ao trabalhar com grandezas geométricas, pois fez os alunos, que se empenharam, realizarem esboços dos gráficos, o que tem grande valia, para os conceitos que estavam sendo trabalhados.

A atividade também representa ser suficientemente não arbitrária e não aleatória, relacionando-se de forma substantiva, aos subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos alunos e permitindo sua interação entre aquilo que o aluno sabe e o ser aprendido. De tal maneira os alunos demonstraram que captaram e negociaram os significados apresentando assim, indícios de que houve aprendizagem significativa.

Ainda, a atividade teve seu enfoque em uma mistura de recepção e descoberta, sendo receptiva ao expor as questões aos alunos e por descoberta por fazê-los ir atrás e buscar maneiras para resolver as situações propostas. Sendo considerada como superordenada porque realizou a interação dos subsunçores de Geometria e funções, pré-existente e resultando em um novo conceito, o de variação geométrica

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista os dados obtidos durante a execução desse trabalho e expostos no decorrer dessa dissertação, acredita-se que o material instrucional utilizado evidencia a ocorrência de aprendizagem significativa, e a re/construção dos conceitos subsunçores básicos, dessa forma, podendo ser avaliado como positivo para os alunos, sendo ainda possível de melhoras no seu desenvolvimento por meio de sua aplicação em caráter presencial, contando com um número maior de questões a serem utilizadas na atividade potencialmente significativa.

Acredita-se também que este trabalho tenha sido relevante e satisfatório, ao alcançar os objetivos propostos ao estudar, avaliar e apresentar a forma como os alunos associam as relações existentes entre grandezas geométricas ao fazer uso da Análise de Erros, além de, possibilitar a visualização da maneira com que os alunos interpretam e resolvem questões relacionadas a tal conteúdo. O emprego da TAS em conjunto com a Análise de Erros possibilitou a identificação e exposição dos subsunçores que os alunos possuíam, bem como os principais erros e estratégias utilizadas por eles na resolução das questões propostas.

Pode-se destacar a dificuldade apresentada pelos alunos participantes em associar as relações existentes entre grandezas geométricas, na visualização de dependências funcionais, em alguns casos falhando em vê-las e em outros invertendo a dependência. Em relação à resolução das questões pelos alunos, inicialmente ocorreram de maneira deficitária e falha, mas apresentaram melhoras ao decorrer e após a aplicação da atividade potencialmente significativa, apesar dos mesmos ainda apresentarem debilidades nos subsunçores envolvendo a associação entre geometria e funções. A falta desses conhecimentos prévios tornou inviável, em alguns casos, a associação entre os conceitos e a interpretação correta das questões, o que acarretou a maioria de erros de estratégia e conceituais, expondo assim as dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas.

Tendo em vista que, por meio do trabalho realizado durante essa pesquisa foi possível avaliar os subsunçores de alunos ingressantes no curso de Matemática, e a proposição de uma atividade potencialmente significativa utilizando-se do GeoGebra e do Moodle, sendo essa avaliada sob a ótica da TAS, esse trabalho atingiu seus objetivos. Foi possível visualizar a evolução dos alunos no decorrer da pesquisa e acredita-se que o uso do GeoGebra ajudou na reconstrução de alguns conceitos e

da estrutura cognitiva ao permitir a representação dos conceitos de diferentes formas e trabalhar com a ideia de variação de forma mais intuitiva.

Por fim, menciona-se que a relevância desse trabalho está no impacto que ele pode causar na vida dos alunos participantes dessa pesquisa, devido a construção e reconstrução dos significados por eles carregados, auxiliando-os a terem maior compreensão e facilidade com os conteúdos do curso de matemática.

REFERÊNCIAS

- ALVARENGA, K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. M, O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **Revista Eletrônica Em Matemática – REVMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014. Disponível em:<<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p159/27629>>. Acesso em: 09 out. 2015.
- AMARAL, M. P.; FRANGO, I. Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software geogebra no ensino de funções matemáticas. **Revista Eletrônica Em Matemática - REVMAT**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 90-107, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n1p90>>. Acesso em: 09 mar. 2015
- ARCAVI, A.; HADAS, N. Computer Mediated Learning: An Example Of An Approach. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 5, p. 25-45, 2000.
- AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton. 1963. 685p.
- AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 212p.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching what makes it special? **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BARCELOS, B. O. MEDEIROS, L. M., **Fluência Tecnológica e Pedagógica para uso do AVEA Moodle**. Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). 2014. Curso de extensão.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa, Portugal. Edições 70, 1977
- BRUM, L. D. **Análise de Erros Cometidos por Alunos 8º Ano do Ensino Fundamental em Conteúdos de Álgebra**. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.
- CURY, H. N. **A Análise de erros na construção do saber matemático**. In: I JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA e XIV JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Universidade de Passo Fundo. 2006. Disponível em: <http://www.unifra.br/professores/13935/jornada_UPF.pdf> Acesso em: 13 de jan. 2016.
- CURY, H. N. **Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CURY, H. N. Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 237-256, 2012.

CURY, H. N.; RIBEIRO, A. J.; MÜLLER, T. J. Explorando erros na resolução de Equações: um caminho para a formação do professor de matemática. **Unión**, n. 28, p. 143-157, 2011

DANTAS, S. et al, **Curso de Geogebra –8ª edição**. Disponível em: <www.ogebra.com.br> acessado em: 07 de out. 2015.

ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio, 2013.

FIORENTINI, D., & LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. 3 ed. Campinas: SP, 2009.

FERRÃO, N. S.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. As Pesquisas Em Educação Matemática Apresentadas Nos Encontros Nacionais De Aprendizagem Significativa. **Aprendizagem Significativa em Revista**. V5(1). P 1-14. 2015.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In: GIRALDO, V.; ROQUE, T. **O Saber do Professor de Matemática - Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. Cap. 1, p. 9-37.

HOHENWARTER M., et al., **GeoGebra 4.4**, 2013; Disponível em:< www.geogebra.org> acessado em: 15 out. 2015.

HOLANDA, D. S., ROCHA, C. A. Análise de Erros em Problemas que Envolvem o Conceito de Área: Uma investigação com Alunos do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. In: V Encontro Nacional das Licenciaturas (V ENALIC). 2014. Natal. **Anais**. Natal: UFRN. 2014. Disponível em: <http://enalic2014.com.br/anais/anexos/5350.pdf> Acesso em: 20 maio 2016.

LEMOS, E. D. S. A Aprendizagem Significativa: Estratégias Facilitadoras E Avaliação. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 1, p. 25-35, 2011.

LIMA, D. T. **Erros no Processo de Resolução de Equações de 1º Grau**. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

MOLON, J. **Cálculo No Ensino Médio: Uma Abordagem Possível E Necessária Com Auxílio Do Software Geogebra**.2013. 195 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

Moodle (Sobre o). Disponível em: < https://docs.Moodle.org/26/en/About_Moodle>. Acesso em: 14 maio 2016.

MOREIRA, M. A. ¿Al Final que es Aprendizaje Significativo? **Revista Curriculum**, La Laguna, v. 25, p. 29-56, marzo 2012.

MOREIRA, M. A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. E.P.U. São Paulo, 1999.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987

MULLER, J. T; **Objetos De Aprendizagem Multimodais E Ensino De Cálculo: Uma Proposta Baseada Em Análise De Erros**. 199f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

NOVAK, J. D., **A Theory of Education**. Ithaca, NY: Cornell University Press, 1977.

RAMOS, M. L.; CURI, E. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2º grau. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVMAT**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 27-42, 2014.

RADATZ, H. Error Analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**. V. 10. N 3. p. 163-172. 1979

RIBEIRO, N. E, MENDONÇA, G. A. A, MENDONÇA, A. F., **A Importância Dos Ambientes Virtuais De Aprendizagem Na Busca De Novos Domínios Da Ead**. 13º Congresso Internacional de Educação a Distancia. Curitiba- PR, 2007.

ROSSATO, S. L. D. S. **Análise De Erros Na Divisão De Números Decimais Por Alunos Do 6º Ano Do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) Centro Universitário Franciscano – UNIFRA, Santa Maria, p. 110. 2014.

SALIN, E. B. **Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2014 Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/108425>>. Acesso em: 09 mar. 2015.

SILVA, D. A. D. **Sobre Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Estadual Paulista - UNESP. Rio Claro, p. 49. 2013.

TORRE, S. D. L. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário e Teste Diagnóstico

Questionário

Prezado(a) aluno(a):

Estou desenvolvendo uma pesquisa para conhecer as dificuldades dos alunos em conteúdos de Ensino Fundamental e Médio. Para isso, preciso da sua cooperação, para preencher este questionário e resolver os exercícios propostos. Por favor, solucione cada exercício, **mostrando o desenvolvimento** no espaço em branco abaixo da questão e depois assinale a alternativa que corresponde à sua resposta, caso haja. Você não vai ser identificado no relatório da pesquisa.

Obrigado!

QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL

Nome:

Idade:anos

Você está cursando Matemática: () Licenciatura () Bacharelado

Semestre do curso:

Dados sobre o Ensino Fundamental:

Escola em que cursou: () Pública () Particular

Apresentava dificuldades em matemática: () Sim () Não

Dados sobre o Ensino Médio:

Escola em que cursou: () Pública () Particular

Ano em que concluiu o Ensino Médio:

Você foi reprovado em Matemática no Ensino Médio? () Sim () Não.

Em caso afirmativo, em que série foi reprovado? _____

Quantas vezes? _____

Você teve contato com o uso de tecnologias no ensino de matemática:

() Sim () Não. Em caso afirmativo, com quais tecnologias:

.....

Dados sobre sua situação atual:

Você exerce alguma atividade remunerada? () Sim () Não

Em caso afirmativo, quantas horas semanais você trabalha?

Qual a atividade?

.....
.....

Você prestou exame de seleção para outro curso de nível superior antes deste que o classificou para a UFSM? () Sim () Não

Em caso afirmativo, indique o curso e a Universidade:

.....

Qual o motivo que o fez escolher o curso de matemática?

.....
.....
.....
.....

Qual foi a forma de ingresso neste curso?

.....

Assinatura do participante

Questão 1

(Adaptada ENEM 2013) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.⁵

a) Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento esses lados foram reduzidos em 20%. A área da base dessa peça, após o cozimento foi reduzida em quantos cm^2 ?

b) Supondo que a redução da medida dos lados ocorreu de forma gradual, em relação aos lados originais (30 cm e 15 cm). Esboce o gráfico que representa a variação da área em relação à Porcentagem que os lados diminuíram.

Questão 2

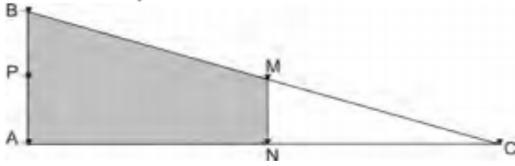
Dado um retângulo cujo o perímetro sempre mede 40cm.

- a) Calcule a área máxima (maior área possível).
- b) Quanto deve medir cada lado do retângulo para que a área seja 75cm^2 .

Questão 3

(ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

5 Disponível em: www.arg.ufsc.br Acesso em: 3mar. 2012.

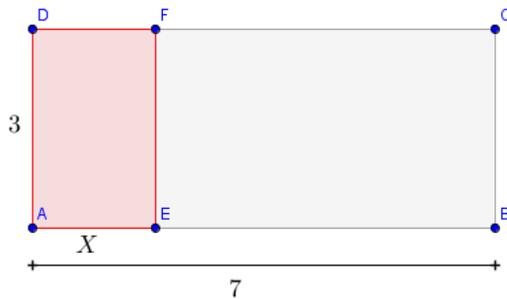


A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde?

- f) À mesma área do triângulo AMC
- g) A mesma área do triângulo BNC
- h) A metade da área formada pelo triângulo ABC
- i) Ao dobro da área do triângulo MNC
- j) Ao triplo da área do triângulo MNC

Questão 4

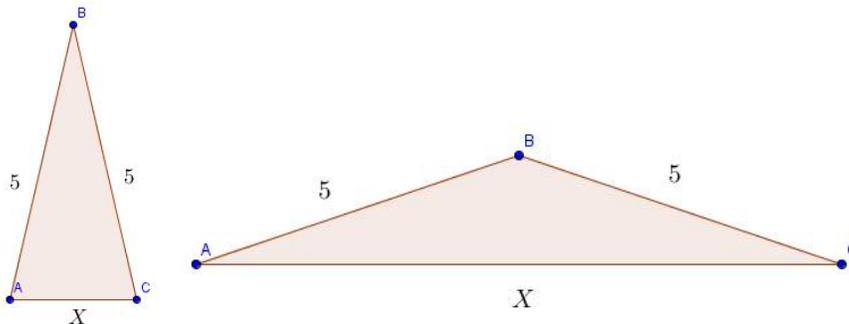
(Giraldo, Caetano e Mattos, 2012, Adaptado) Dado um retângulo ABCD, onde $\overline{AB} = \overline{DC} = 7$ cm e $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ cm. Tem-se que \overline{EF} é perpendicular a \overline{AB} com $F \in \overline{DC}$ e $E \in \overline{AB}$, conforme a figura.



Faça o gráfico da área do retângulo EFDA em função da posição de E.

Questão 5

(Arcavi e Hadas, 2000, adaptado) Dado um triângulo isósceles ABC, onde $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm. Conforme a figura.



- a) Determine quais são os valores que X pode assumir.
- b) Determine a expressão que representa a área do triângulo em função da base \overline{AC} .
- c) Esboce o gráfico da função determinada no item b).

APÊNDICE C - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Projeto de Pesquisa: “**Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros**”

Pesquisadora Responsável: Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias

Contato: (55) 3220-8136 ou (55) 99299552

E-mail: carmenmathias@gmail.com

Pesquisadora Colaboradora: Prof.^a Dr.^a Maria Cecília Pereira Santarosa

Contato: maria-cecilia.santarosa@ufsm.br

Mestrando: Mateus Both

Contato: mateusboth@outlook.com

Prezado(a) Senhor(a):

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa denominada ““Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros”, coordenada pela Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias, e desenvolvida por Mateus Both, a qual tem por objetivo Averiguar os subsunçores existentes em alunos dos primeiros semestres do curso de Licenciatura em Matemática no que se refere a associação entre grandezas geométricas.

Esta pesquisa destina-se à elaboração de Dissertação de Mestrado a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). O estudo está sendo realizado para que se verifique a existência de subsunçores nos alunos os quais serão usados para o desenvolvimento de uma estratégia de ensino-aprendizagem potencialmente significativa.

Para isso, vocês estão sendo convidados(as) inicialmente a responderem um questionário e a um teste diagnóstico, após também são convidados(as) a participarem de entrevista na qual as respostas serão gravadas, se vocês assim concordarem. Caso contrário, as respostas serão anotadas. E a tomarem parte no desenvolvimento de uma atividade relacionada as questões aplicadas.

Fica garantido que seus nomes, nem de outra pessoa que venham a mencionar, serão divulgados em qualquer instante, e que vocês poderão desistir de fazer parte da pesquisa em qualquer momento do estudo, sem nenhum tipo de prejuízo. Vocês não sofrerão qualquer espécie de risco emocional ou físico em virtude da participação, porém poderão sentir-se cansados e desconfortáveis com o tempo despendido. As entrevistas serão digitadas e depois guardadas de forma impressa por três anos, juntamente com os questionários e testes, ficando sob guarda da pesquisadora responsável, em armário localizado no Prédio 13, Centro de Ciências Naturais e Exatas/UFSM. Após esse período serão queimadas.

Não haverá benefício financeiro pela participação na pesquisa. A participação é voluntária e vocês podem e devem tirar todas as suas dúvidas em qualquer momento. Vocês também não terão nenhum benefício direto, salvo os que se disporem a participar da atividade, para os quais se espera haja como benefício uma ampliação dos conhecimentos.

Ressaltamos que os resultados das informações obtidas comporão a Dissertação de Mestrado e poderão ser publicados em revistas e divulgados em eventos científicos na área da educação matemática, ficando os pesquisadores comprometidos pela manutenção do anonimato e do respeito ao que for publicado.

Caso haja necessidade de maiores informações ou mesmo interesse pelos resultados obtidos, vocês poderão entrar em contato com o Mestrando Mateus Both, com a Professora Maria Cecília Pereira Santarosa, com a Professora Carmen Viera Mathias (pesquisadora responsável), bem como com a Comissão de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Santa Maria nos endereços constantes ao final deste Termo.

Este documento foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Santa Maria e será apresentado em duas vias, uma para o pesquisador e outra via para o participante da pesquisa, estando em conformidade com a Resolução 196/96 do Conselho Nacional de Saúde que regulamenta a pesquisa com seres humanos.

Nesses termos, eu _____, considerando-me livre e esclarecido (a), consinto em participar da pesquisa proposta, resguardando aos autores do projeto o direito sobre as informações para a divulgação dos resultados na forma de trabalho científico.

Mateus Both
Mestrando Pesquisador

Carmen Vieira Mathias
Pesquisadora Responsável

Maria Cecília Pereira Santarosa
Pesquisadora Colaboradora

Assinatura do Participante

Data: _____

Para contato com o comitê de ética da UFSM:

Avenida Roraima, 1000 – Prédio da Reitoria – 7º andar- Sala 702. Cidade
Universitária – Bairro Camobi CEP: 97105-900 – Santa Maria – RS.

Tel.: (55) 3220-9362; e-mail: comitedeeticaempesquisa@smail.ufsm.br

APÊNDICE D – Termo de Consentimento**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS (CCNE)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO
DE FÍSICA**

Projeto de Pesquisa: “Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros”

Coordenadora da Pesquisa: Prof^a Dr^a Carmen Vieira Mathias – SIAPE nº 1724567

Pesquisadores: Prof^a. Dr.^a Maria Cecília Pereira Santarosa – SIAPE nº 2087888

Mateus Both – Matrícula: 201470359

Telefones: (55) 99299552 / (55) 3220-8136

Instituição/Departamento: UFSM / Departamento de Matemática

Você está sendo informado sobre o projeto de pesquisa **RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: UM ESTUDO DE CASO BASEADO NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E ANÁLISE DE ERROS⁶** por ser o responsável legal do (a) aluno(a) do 1º semestre da Universidade Federal de Santa Maria, no município de Santa Maria/RS, contexto escolhido para a investigação. Consideramos seu consentimento essencial para a produção desse estudo que tem por objetivo contribuir para identificar os subsunçores, conhecimentos prévios, dos alunos sobre grandezas geométricas.

Esclarecemos de forma clara, detalhada e livre de qualquer constrangimento ou coerção que a pesquisa acima declarada tem como objeto de estudo investigar que subsunçores, conhecimentos prévios, os alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática possuem e desenvolver uma atividade para aprimorar estes através de uma atividade desenvolvida por meio do GeoGebra.

A coleta de informações será efetivada com questionários, testes diagnósticos gravações de áudio e a participação na atividade para serem analisados posteriormente pelos pesquisadores. Os dados coletados, depois de organizados e

⁶ Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM: Av. Roraima, 1000 - 97105-900 - Santa Maria - RS - 2º andar do prédio da Reitoria. Telefone: (55) 3220-9362 - E-mail: cep.ufsm@gmail.com.

analisados, poderão ser divulgados e publicados, contudo mantendo o anonimato da pessoa participante da pesquisa.

A presente pesquisa, não coloca em risco a vida dos seus participantes e não tem caráter de provocar danos morais, psicológicos ou físicos. No entanto, o envolvimento diante da realização das atividades apresentadas poderá suscitar diferentes emoções, de acordo com a significação de seu conteúdo para cada sujeito. Por outro lado, consideramos que os benefícios são relevantes, em nível pessoal, por oportunizar momentos de reflexão e, institucional, por envolver a busca de qualidade das práticas educativas cotidianas no nexos entre o desenvolvimento de conceitos geométricos e a utilização de tecnologias da informação e comunicação.

Você tem, desde agora, assegurado o direito de: receber respostas para todas as dúvidas e perguntas que desejar acerca dos assuntos referentes ao desenvolvimento desta pesquisa; retirar o seu consentimento, a qualquer momento, e não permitir que o (a) menor de idade, em que é responsável participe do estudo, e este não sofrerá nenhum constrangimento e represália; tendo sua identidade preservada em todos os momentos da pesquisa.

A coordenadora e pesquisadores deste projeto reconhecem e aceitam as Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – Res. CNS 466/2012.

Para qualquer esclarecimento estão à disposição os e-mails: mateusboth@outlook.com, bem como o telefone (55) 3220-sala 1217, do prédio 13 da UFSM, avenida Roraima, 1000, CEP: 97105-900, Santa Maria – RS.

Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, _____, abaixo

assinado, autorizo o(a) aluno(a) _____

_____ a participar como sujeito do estudo *Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros*. Afirmo que sou representante legal do(a) aluno(a) citado acima e fui suficientemente informado a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim sobre o referido estudo.

Eu discuti com a pesquisador/professora Carmen Vieira Mathias sobre a minha decisão em permitir a participação do(a) aluno(a) supra citado, o(a) qual sou responsável legal. Ficaram claros para mim quais são os propósitos da pesquisa, os

procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que, a participação na mesma é isenta de despesas e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou prejuízo.

Santa Maria, _____ de _____ de 2015.

Assinatura do responsável legal

Declaro que obtivemos de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste sujeito de pesquisa para a participação neste estudo.

Coordenadora da pesquisa
Profª Drª Carmen Vieira Mathias

Orientando da pesquisa
Mateus Both

Pesquisadora Colaboradora
Profª Drª Maria Cecília Pereira Santarosa

APÊNDICE E – Termo de Assentimento
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO
DE FÍSICA

Você está sendo convidado para participar da pesquisa: “Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros”. Seus pais permitiram que você participe, pois compreenderam que o principal objetivo da pesquisa é averiguar a existência de subsunçores, conhecimentos prévios, referentes ao conteúdo de grandezas geométricas.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu. E, não terá nenhum problema se desistir.

Em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas e se você concordar em participar do estudo, seu nome e identidade será mantido em sigilo.

Eu _____ aceito participar da pesquisa “Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros”.Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir que não terei nenhum prejuízo. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Santa Maria, ____ de _____ de _____.

 Assinatura do menor

 Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE F – Termo de Confidencialidade

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS (CCNE)
CENTRO DE EDUCAÇÃO (CE)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO
DE FÍSICA PPGEM&EF

Título do projeto: “Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros”

Pesquisadora responsável: Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias

Pesquisadora: Maria Cecília Pereira Santarosa

Mestrando: Mateus Both

Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria

Telefone para contato: (55) 3220-8136

Local da coleta de dados: Universidade Federal de Santa Maria

Os pesquisadores se comprometem a preservar a privacidade dos participantes da pesquisa cujos dados serão coletados por meio de entrevista semi-estruturada, aplicação de questionário e teste diagnóstico. Concordam, igualmente, que estas informações serão utilizadas para execução do presente projeto e após ficarão armazenadas por um período de três anos. As informações contidas nas entrevistas, questionários e teste somente poderão ser divulgadas de forma anônima e serão mantidas em arquivo impresso por um período de três anos sob a responsabilidade da Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias, em armário com chave, localizado no Prédio 13, sala 1217 do Centro de Ciências Naturais e Exatas/UFSM. Após este período, os dados serão destruídos. Este projeto de pesquisa foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM em/...../....., com o número do CAAE

Santa Maria,dede 2015.

 Prof.^a Dr.^a Carmen Vieira Mathias

 Mateus Both

 Prof.^a Dr.^a Maria Cecília Pereira Santa Rosa
APÊNDICE G - Autorização Institucional

MODELO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu _____, abaixo assinado, responsável pela _____, autorizo a realização do estudo **Relações Entre Grandezas Geométricas: Um Estudo de Caso Baseado na Aprendizagem Significativa e Análise de Erros**, a ser conduzido pelos pesquisadores Mateus Both, Maria Cecília, Carmen Vieira Mathias.

Fui informado, pelo responsável do estudo, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Data

Assinatura e carimbo do responsável institucional

APÊNDICE H– Questões no Moodle

Questão 1:

Um campo deverá ser limitado por 1000 metros de cerca, de tal modo que a cerca forme um retângulo.

- Como você representaria essa situação? Sugestão; Use o aplicativo GeoGebra.
- Como podemos determinar as dimensões do campo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões?
- Quais as dimensões que o campo deve possuir para que sua área seja máxima?

Questão 2:

Um campo retangular está limitado por um córrego e nos outros três lados por uma cerca de 1000 metros.

- Como você representaria essa situação? Sugestão: Use o aplicativo GeoGebra.
- Como podemos determinar as dimensões do campo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões?
- Quais as dimensões que o campo deve possuir para que sua área seja máxima?

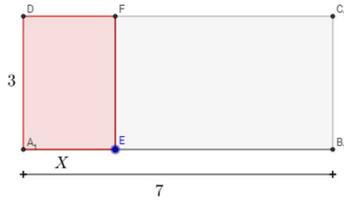
Questão 3:

Considere um campo circular com 10 metros de raio. Supondo que haja um retângulo inscrito nesse campo:

- Como você representaria essa situação? Sugestão; Use o aplicativo GeoGebra.
- Como podemos determinar as dimensões do retângulo?
- Como podemos determinar o perímetro do retângulo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões do retângulo?
- As expressões obtidas nos itens acima, são funções? Por que?

Questão 4:

Dado um retângulo ABCD, onde $\overline{AB} = \overline{DC} = 7$ cm e $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ cm. Tem-se que \overline{EF} é perpendicular a \overline{AB} com F pertencendo a \overline{DC} e E pertencendo a \overline{AB} .



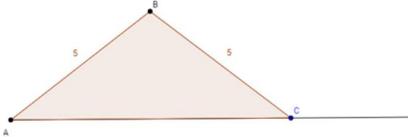
Applet: <http://www.geogebra.org/m/XMrHpMuh>

Em relação ao retângulo AEFD:

- Como podemos determinar suas dimensões?
- Como podemos determinar o perímetro do retângulo?
- Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões do retângulo?

Questão 5:

Dado um triângulo isósceles ABC, onde $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm.

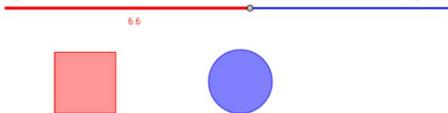


Applet: <http://www.geogebra.org/m/fSuNn54t>

- Que valores o segmento \overline{AC} pode assumir para que o triângulo ABC exista?
- É possível determinar a área do triângulo em função da medida do segmento \overline{AC} ? Como?
- É possível determinar o perímetro do triângulo? Como?
- As expressões que representam a área e o perímetro (se existirem) são funções? Em caso afirmativo, como é o gráfico delas?

Questão 6:

Um fio com 12 cm pode ser curvado formando um círculo, dobrado formando um quadrado ou cortado em duas partes formando um círculo e um quadrado.



Applet: <http://www.geogebra.org/m/vbtKPpR6>

- É possível determinar a área do quadrado em relação a quantia de fio utilizada? Como?
- É possível determinar a área do círculo em relação a quantia de fio utilizada? Como?
- É possível determinar a soma da área do triângulo com o círculo em relação a quantia de fio utilizada em cada um deles? Como?
- A expressão que representa a soma das áreas (se existir) é função? Em caso afirmativo, como é o gráfico dela?

APÊNDICE I– Questões do Moodle Sorteadas em Sala de Aula

Questão 1:

Uma esfera de raio 4 está inscrita num cone circular reto. Determine as dimensões do cone de volume mínimo.

Dicas: Faça a representação 3D do problema (usando o Geogebra). Expresse o volume do cone como função de sua altura h

Questão 2:

Um retângulo tem os dois cantos inferiores no eixo x e os dois cantos superiores na curva $y=16-x^2$. Qual a expressão que relaciona a medida de um dos lados do retângulo com a área? Como é o gráfico dessa expressão? Para esses retângulos, quais as dimensões daquele que tem maior área?

Questão 3:

Mostre que: De todos os triângulos com base 4 cm e altura 2 cm, o triângulo isósceles é o que possui perímetro mínimo.

Questão 4:

De todos os triângulos, cujo um dos lados mede 4 cm e cujo perímetro medindo é 14 cm, mostre que o triângulo isósceles tem área máxima.

Dica: Utilize a fórmula de Heron.

Questão 5:

Dado um triângulo isósceles ABC, com $AB=AC=5\text{cm}$. Determine:

- A função que descreve o comportamento da área quando o ângulo $B\hat{A}C$ varia.
- Dentre todos os triângulos, determine aquele com maior área.

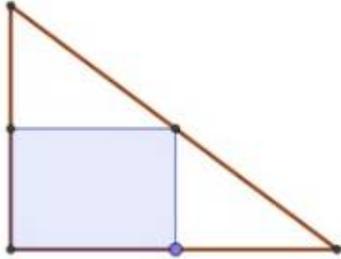
Questão 6:

Dado o triângulo ABC de lados $AB=3\text{cm}$ e $BC=2\text{cm}$. Determine:

- A(s) função(s) que descreve o comportamento da área quando a altura relativa ao lado AC varia.
- Determine as medidas dos lados do triângulo que possui maior área

Questão 7:

Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 6 e 8 cm. Determine as dimensões do retângulo máximo, supondo que ele está posicionado como na figura abaixo.



Questão 8:

Em um quadrado ABCD com 36 unidades de área, desenha-se um triângulo IMN. O triângulo deve ser desenhado tal que o vértice I coincida com o ponto médio do lado AB e que $AM=DN$. Determine a posição do ponto M para que o triângulo IMN tenha área mínima.

Questão 9:

A janela de uma igreja consiste em um retângulo com um semicírculo em cima e tem um perímetro igual a 20.

- Qual a expressão que apresenta a relação existente entre a medida do raio do semicírculo e a área?
- Determine o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima

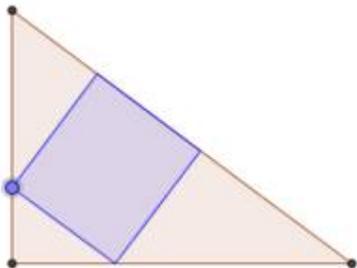
Questão 10:

Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de metal quadrada de 3 por 3 m, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados.

- Encontre a expressão que representa a área da caixa em função da medida do lado dos quadrados retirados.
- E encontre a expressão que representa o volume da caixa em função da medida do lado dos quadrados retirados.
- Qual é o tamanho dos quadrados que resulta na caixa com maior volume possível?

Questão 11:

Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 6 e 8 cm. Determine as dimensões do retângulo máximo, supondo que ele está posicionado como na figura abaixo.



APÊNDICE J– Roteiro das entrevistas**ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMI-ESTRUTURADA****DADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE**

Data: ____/____/____

Nome: _____

QUESTIONAMENTOS ORIENTADORES**Parte 1: Socioeducacional**

1. Quais conteúdos de matemática tu recordas de ter visto no ensino médio?
2. O que tu lembras de Geometria Plana? De funções?
3. Qual teu contato com computadores de maneira geral?
4. Tiveste contato com algum software de matemática durante o ensino básico?
5. Ouviste falar num programa de computador chamado GeoGebra durante o ensino médio? Em caso afirmativo, onde? Em que situação?

Parte 2: Teste Diagnóstico

1. Em relação ao teste diagnóstico, qual tua opinião sobre ele, de maneira geral? Fácil? Difícil?
2. Em certas questões tu cometeste alguns erros, poderias explicar o que te levou a utilizar tal estratégia?