

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA A DISTÂNCIA

ÓTICA
4º semestre



PROGRAD

FNDE



Educação
Ministério da Educação

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministério do Estado da Educação Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior Maria Paula Dallari Bucci
Secretária da Educação a Distância Carlos Eduardo Bielschowsky
Secretária de Educação Especial Claudia Pereira Dutra

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor Clóvis Silva Lima
Vice-Reitor Felipe Martins Muller
Chefe de Gabinete do Reitor João Manoel Espina Rossés
Pró-Reitor de Administração André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação Jorge Luiz da Cunha
Pró-Reitor de Planejamento Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos João Pillar Pacheco de Campos
Diretor do CPD Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador NTE Fábio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB Ricardo Simão Diniz Dalmolin
Coordenador de Polos Roberto Cassol

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretoria do Centro de Ciências Naturais e Exatas Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância João Carlos Denardin

Professor pesquisador Ivan Paulo Marques Alves

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação

Coordenação Carlos Gustavo Matins Hoelzel
Cleuza Maria Maximino Carvalho Alonso
Rosiclei Aparecida Cavichioli Laudermann
Sílvia Helena Lovato do Nascimento
Volnei Antônio Matté
Ronaldo Glufke

André Krusser Dalmazzo
Edgardo Gustavo Fernández

**Produção de Recursos Educacionais e
Atividades de Estudo**

Professores Pesquisadores Anna Helena Silveira Sonego
Juliana Salles Jacques
Giane Pigatto

Técnicas em Assuntos Educacionais Karina Oliveira de Freitas
Sandra Lígia Agnolin

Suporte Moodle Adílson Heck
Ândrei Componogara
Bruno Augusti Mozzaquatro

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA A DISTÂNCIA
DISCIPLINA DE ÓTICA

UNIDADE A - NATUREZA E PROPAGAÇÃO DA LUZ

Em 1861, Maxwell mostrou que a luz é uma componente do espectro eletromagnético. Nesse mesmo trabalho, Maxwell também concluiu que todas as ondas de natureza eletromagnética têm a mesma velocidade c no vácuo. Assim como as ondas mecânicas, as ondas eletromagnéticas diferem entre si pelo comprimento de onda e, portanto, pela frequência. Desse modo, diferentes fontes costumam gerar diferentes ondas e estas por sua vez irão compor alguma parte do espectro eletromagnético. Conforme representamos na Figura A.1, o espectro eletromagnético não tem limite superior e inferior definidos.

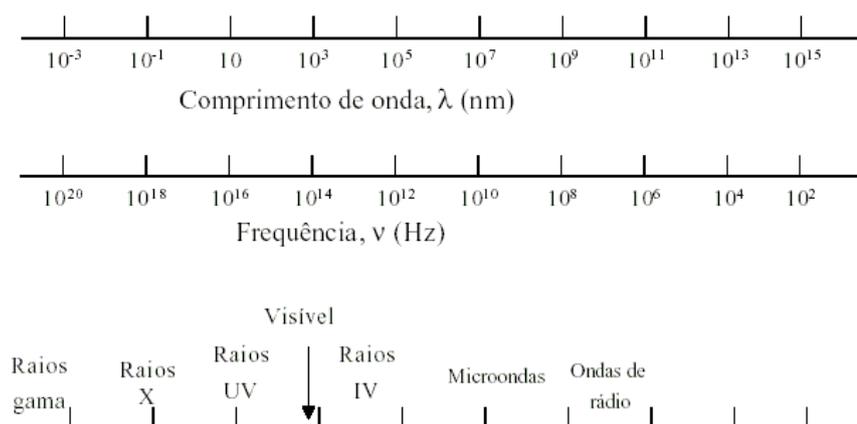


Figura A.1 – O espectro eletromagnético. Note que tanto frequência como comprimento de onda estão em escala logarítmica. Como unidades de comprimento de onda, geralmente são usados o micrón (micrometro, $1\mu = 10^{-6} m$), o nanômetro (milimicrón, $1m\mu = 10^{-9} m = 1nm$) e o Angstrom ($1\text{Å} = 10^{-10} m$). Na parte inferior da figura identificamos a posição no espectro de alguns tipos de radiações com nomenclatura especial. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

SAIBA MAIS:

Por definição, o que chamamos de “luz” é a faixa da radiação do espectro eletromagnético que pode ser percebida pelo olho humano. Cabe salientar, no entanto, que esta “percepção” não é uniforme, pois a sensibilidade dos nossos olhos varia com a região do espectro observado.

1 - Energia e quantidade de movimento

As ondas eletromagnéticas transportam energia e quantidade de movimento. No vácuo, o transporte de energia é descrito pelo vetor de Poynting \vec{S} , dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B},$$
 onde \vec{E} e \vec{B} são os valores instantâneos dos vetores campo

elétrico e campo magnético. Já a quantidade de movimento pode ser observada medindo a pressão (pressão de radiação) sobre um objeto ao se incidir luz sobre ele, embora estes valores de pressão sejam muito pequenos em comparação com aqueles a que estamos habituados. Vejamos como descrevê-los teoricamente.

Considere um feixe luminoso, paralelo, incidindo sobre um objeto durante um determinado tempo t . Se U é a energia inteiramente absorvida durante este tempo, então o módulo da quantidade de movimento \vec{p} cedida ao objeto é

$$p = \frac{U}{c} \quad (\text{absorção total}),$$

onde c é a velocidade da luz e o sentido de \vec{p} é idêntico ao do feixe incidente.

Se a energia luminosa U for inteiramente refletida, então a quantidade de movimento cedida é dada por

$$p = \frac{2U}{c} \quad (\text{reflexão total}).$$

SAIBA MAIS:

As duas expressões acima foram previstas na teoria de Maxwell.

Observe que o fator dois da segunda expressão pode ser facilmente obtido se tratarmos a luz como tratamos os objetos da mecânica clássica. Note que, a quantidade de movimento transmitida a um objeto quando uma bola de tênis perfeitamente elástica é rebatida é o dobro da quantidade de movimento correspondente ao caso do objeto ser atingido por uma bola perfeitamente inelástica de mesma massa e velocidade.

Exemplo - Um feixe paralelo de luz com um fluxo energético S de 45 watt/cm^2 incide durante 3 horas sobre um espelho plano - refletor perfeito - de $4,0 \text{ cm}^2$ de área. Determine a quantidade de movimento transferida para o espelho e a força que age sobre este espelho durante o tempo dado.

Solução:

A energia refletida é dada por:

$$U = (45 \text{ watt/cm}^2) \cdot (4,0 \text{ cm}^2) \cdot 3 \cdot 3600 \text{ s} = 1,944 \text{ MJ (Mega Joules)}.$$

Já a quantidade de movimento cedida após 3 horas de iluminação é:

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{2 \cdot (1,944 \times 10^6 \text{ joules})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0,01296 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Para calcular a força, lembramos que, de acordo com a segunda lei de Newton, a força média que age sobre o espelho é igual à taxa média em relação ao tempo com que a quantidade de movimento é transmitida ao espelho, ou seja,

$$F = \frac{p}{t} = \frac{0,01296 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{3 \cdot 3600 \text{ s}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Conforme havíamos mencionado, esta força é muito pequena.

ALERTA:

Agora vamos demonstrar a transmissão da quantidade de movimento num dado tempo t , usando as equações de Maxwell!

Considere uma onda eletromagnética que se propaga no sentido do eixo z e incide em uma lâmina grande e delgada, fabricada a partir de um material de alta resistividade, montada conforme representamos na Figura A.2.

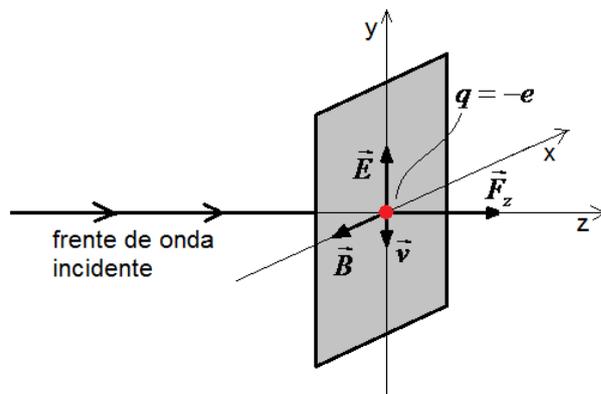


Figura A.2: Esquema utilizado para mostrar a transmissão da quantidade de movimento, deduzindo a partir das equações de Maxwell. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A onda incidente é descrita pelos vetores \vec{E} e \vec{B} , que variam segundo as expressões $\vec{E} = \vec{E}_m \text{sen } \omega t$ e $\vec{B} = \vec{B}_m \text{sen } \omega t$, onde \vec{E} é paralelo ao eixo y e \vec{B} é paralelo ao eixo x . Considere, então, uma força elétrica $\vec{f}_e = e \cdot \vec{E}$ atuando sobre um elétron de condução do metal, fazendo com que ele se mova com uma velocidade (constante) de deslocamento v_d . O elétron se comporta como se estivesse imerso em um fluido viscoso, de modo que a força elétrica que atua sobre ele é contrabalançada por uma força devida a essa viscosidade. Supondo que essa força é proporcional à velocidade do elétron e que o campo \vec{E} é constante, após o equilíbrio ser estabelecido, teremos $eE = bv_d$, onde b é um coeficiente de amortecimento. Assim, a velocidade de equilíbrio do elétron será

$$v = \frac{eE}{b}.$$

Se o campo elétrico aplicado variar com o tempo de modo suficientemente lento, a velocidade do elétron pode continuamente se reajustar a esse valor variável de \vec{E} , de modo que sua velocidade continue a ser dada pela expressão acima praticamente em todos os instantes. Note que, quanto mais viscoso for o meio, mais rapidamente a velocidade do elétron tende para o valor de equilíbrio v_d .

Ao vibrar paralelamente ao eixo y , o elétron sofre ao mesmo tempo a ação de uma segunda força na direção z , devido ao campo magnético, que é perpendicular ao plano formado pelos vetores \vec{v} e \vec{B} , isto é, perpendicular ao plano xy . A intensidade instantânea dessa força é dada por

$$F_z = evB = \frac{e^2EB}{b}.$$

É importante observar que F_z é sempre dirigida no sentido positivo do z , pois os vetores \vec{v} e \vec{B} invertem seus sentidos simultaneamente. De fato, F_z é o agente responsável a pressão de radiação atua sobre a lâmina da Figura A.2.

De acordo com a segunda lei de Newton, $\frac{dp_e}{dt} = \frac{e^2EB}{b}$ é a taxa de transmissão da quantidade de movimento a todos os elétrons da lâmina e, portanto, a toda lâmina. Relacionando a transferência da quantidade do movimento para a lâmina com a sua respectiva absorção de energia, verificamos que o campo elétrico realiza um trabalho sobre cada elétron oscilante a uma taxa em relação ao tempo dada por

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU_e}{dt} = F_E \cdot v = (eE) \left(\frac{eE}{b} \right) = \frac{e^2 E^2}{b}.$$

ALERTA:

Note que, como a força magnética \vec{F}_z é sempre ortogonal à velocidade \vec{v} , essa força não realiza trabalho.

Lembrando que $E = Bc$, substituímos este fato na expressão anterior e obtemos

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{e^2 E B c}{b},$$

que é a taxa em relação ao tempo, que a energia da onda

incidente é absorvida por um elétron. Unindo este resultado com o recém obtido diretamente da segunda lei de Newton, encontramos a expressão

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dU_e}{dt},$$

que pode ser integrada com relação ao tempo, a fim de obter

$$\int_0^t \frac{dp_e}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_0^t \frac{dU_e}{dt} dt, \quad p_e = \frac{U_e}{c},$$

onde p é a quantidade de movimento cedida a um único elétron durante um tempo t e U_e é a energia absorvida por este elétron no mesmo intervalo de tempo. Multiplicando os dois lados dessa expressão pelo número de elétrons livres da lâmina, obtemos a relação procurada

$$p = \frac{U}{c}.$$

2 - Velocidade da luz

A velocidade da luz é tão alta que nada em nossa experiência diária nos indica que sua velocidade não seja infinita. Galileu fez a si mesmo esta pergunta e tentou respondê-la experimentalmente. Sua principal obra, *Duas Novas Ciências*, publicada nos Países Baixos em 1638, foi escrita sob a forma de uma conversação entre três pessoas fictícias chamadas Salviati, Sagredo e Simplício. A seguir, citaremos parte de um dos diálogos sobre a velocidade da luz:

“Simplício: A experiência mostra que a propagação da luz é instantânea; pois, quando vemos o disparo de um canhão, a grande distância, a luz chega aos nossos olhos sem perda de tempo; enquanto o som só atinge o ouvido após um apreciável intervalo.

Sagredo: Ora, Simplício, a única coisa que posso deduzir desta experiência é que o som, para vir até os nossos ouvidos, leva mais tempo que a luz; não posso inferir daí se a chegada da luz é instantânea ou se, embora extremamente rápida, ainda consome algum tempo...”

(RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Evidentemente, “Sagredo” é o próprio Galileu. A conversa segue com o personagem descrevendo um possível método para a medida da velocidade da luz. À noite, Sagredo sai com um ajudante, colocam-se um em frente ao outro, a certa distância. Cada um conduz uma lanterna que pode ser facilmente coberta e descoberta. Galileu inicia a experiência descobrindo sua lanterna. Quando a luz é vista pelo assistente, este imediatamente descobre a sua lanterna, tornando-a visível por Galileu. Galileu tentou medir o intervalo de tempo decorrido entre o instante em que sinalizou com a lanterna e aquele em que percebeu a luz da lanterna de seu companheiro. Contudo, hoje sabemos que para uma distância de 1 km o tempo de percurso é de apenas 8×10^{-6} s e este é muito menor que o tempo de reação de uma pessoa. Logo, o método realmente não poderia servir!

A fim de avaliar a velocidade da luz, muitos experimentos diferentes foram testados ao longo dos séculos. Nessa insistente busca, em 1849 o físico francês Hippolyte Louis Fizeau avaliou a velocidade da luz pela primeira vez por um método não astronômico, obtendo $3,13 \times 10^8$ m/s. A Figura A.3 mostra o aparato utilizado por Fizeau. A luz da fonte S atravessa a lente convergente L_1 , em seguida é refletida pelo espelho M_1 , para então formar a imagem da fonte em F, foco da lente L_2 . O espelho M_1 é um “espelho semiprateado”, sua película refletora foi colocada para que a metade da luz incidente seja refletida e a outra metade transmitida.

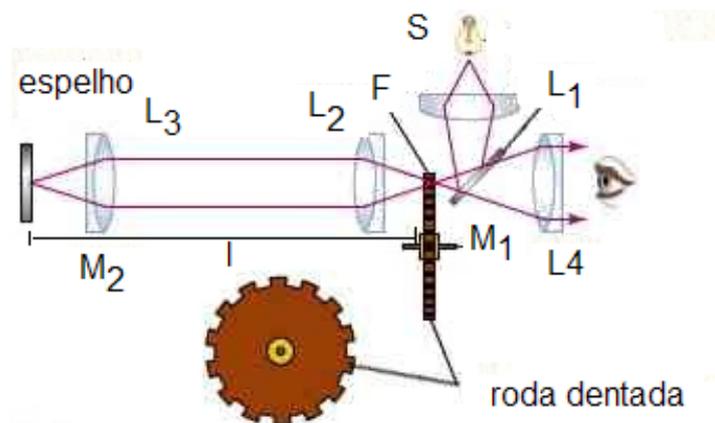


Figura A.3: Aparato experimental usado por Fizeau para medir da velocidade da luz.

A luz proveniente da imagem formada em F penetra na lente L_2 e surge do lado oposto como um feixe paralelo. Após passar pela lente L_3 , o feixe é novamente refletido, no sentido contrário, mas na sua direção original (distância l entre M_2 e F deve ser bastante grande, Fizeau utilizou $l = 8630$ m). Quando a luz atinge novamente o espelho M_1 , parte dela é transmitida, atingindo o olho do observador após atravessar a lente L_4 . O observador verá uma imagem da fonte formada pela luz que percorreu uma distância $2l$. Para cronometrar o feixe de luz, devemos marcá-lo de alguma forma. Isto pode ser feito seccionando-o com uma roda dentada que gire com velocidade angular ω suficientemente elevada.

Admita que $v_{ar} = c$, o tempo de ida e volta do percurso da luz no aparato é $\frac{2l}{c}$. Agora, suponha que neste intervalo de tempo a roda tenha se deslocado o suficiente para que a luz de um dado “pulso luminoso” retorne ao ponto F no momento este esteja encoberto por um dente: o dente mais próximo do vão de onde o raio partiu. A luz atingirá a face do dente voltada para M_2 , não conseguindo alcançar o olho do observador. Se a velocidade da roda for exatamente a desejada, o observador não verá nenhum dos raios, pois todos eles, um a um, serão bloqueados por um dente. Aumentando a velocidade angular da roda a partir de zero, o observador poderá detectar o instante em que a imagem da fonte S desaparece e anotar o correspondente valor de ω .

Em seguida, observe que, se θ é o ângulo compreendido entre o centro de um espaço vazio e o centro de um dente, o tempo necessário para que a roda se desloque deste ângulo é igual ao tempo de percurso total do raio luminoso, ou seja,

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{2l}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2\omega l}{\theta}$$

Exemplo:

A roda utilizada por Fizeau tinha 720 dentes. Determine a menor velocidade angular para qual a imagem da fonte desaparece.

Solução:

Como há 720 dentes, há também 720 espaços vazios. Assim, o ângulo θ é uma fração $1/1440$ de uma rotação. Com estes dados e lembrando-se do valor de c , podemos fazer a conta inversa e determinar ω da roda utilizada por Fizeau!

$$\omega = \frac{c\theta}{2l} = \frac{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(1/1440 \text{ rotação})}{(2)(8630 \text{ m})} = 12,1 \text{ rotações por segundo.}$$

SAIBA MAIS:

Com uma substituição da roda dentada por um espelho rotatório, Foucault (1819-1868) aumentou significativamente a precisão das medidas de Fizeau, assim como outros, como o físico americano Albert A. Michelson (1852-1931), que efetuou uma extensa série de medidas de c durante um período de 50 anos. Na difícil tarefa de chegarmos a um mais preciso valor de c , em 1957

R. T. Birge encontrou $c = 2,997924 \times 10^8 \text{ m/s}$, com incerteza menor que $0,000010 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Elevando-se o valor medido da velocidade da luz para um panorama mais amplo, o da velocidade da radiação eletromagnética em geral, tem-se uma confirmação experimental significativa da teoria do eletromagnetismo de Maxwell, onde se estabelece que a velocidade de todas as ondas eletromagnéticas tem o mesmo valor no vácuo.

3 - Efeito Doppler

3.1 - Um pouco da visão relativística da velocidade da luz

Reflita sobre a seguinte questão: quando dizemos que a velocidade do som no ar seco, a 0°C , é igual a $331,7 \text{ m/s}$, deixamos subentendido o fato de que deve existir um sistema de referência fixo e uma distribuição uniforme da massa de ar. Entretanto, ao afirmar que a velocidade da luz no vácuo é de $2,997924 \times 10^8 \text{ m/s}$, estaríamos deixando implícita a existência de um sistema de referência? Se a resposta for sim, este sistema não poderia ser o meio, já que, ao contrário do som, a luz não necessita de nenhum meio material para se propagar. Pense nisso!

A idéia de uma onda se deslocando no espaço sem a presença de um meio capaz de vibrar não era aceita pelos físicos do séc. XIX, uma vez que todos estavam presos à falsa analogia entre ondas luminosas e as ondas sonoras. Para resolver o problema, esses físicos “inquietos” postularam a existência de uma substância tênue chamada **éter**, que deveria ocupar todo o espaço e ser, portanto, o meio através do qual a luz se propagaria. Como não seria possível observar o éter por nenhum processo, concluiu-se que esta substância deveria ter densidade extremamente baixa.

Em 1905, Albert Einstein resolveu a dificuldade de explicar a propagação da luz, propondo um postulado bastante ousado: “se certo número de observadores estiver se movendo (com velocidade uniforme), uns em relação aos outros e a uma fonte de luz, e se cada observador determinar a velocidade da luz que recebe da fonte, todos obterão o mesmo valor”. Este postulado é a

hipótese fundamental da **teoria da relatividade** de Einstein. Ele elimina a necessidade da existência de um éter, afirmando que a velocidade da luz é a mesma, em todos os sistemas de referência. Assim, nenhum referencial pode ser considerado como fundamental.

SAIBA MAIS:

A teoria da relatividade, deduzida com base neste postulado, foi submetida a muitas verificações experimentais, que sempre confirmaram as suas previsões.

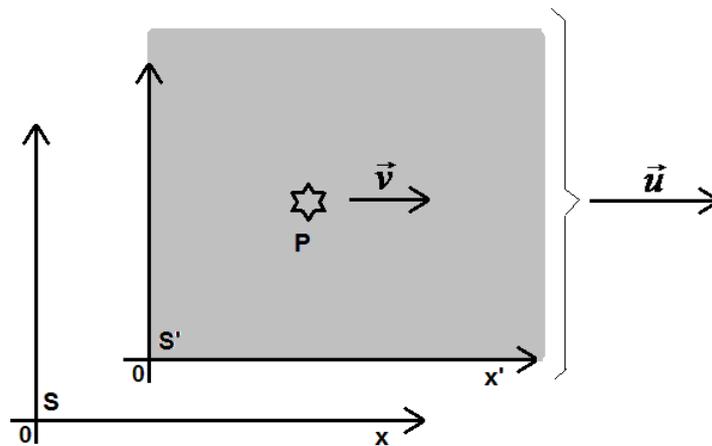


Figura A.4: Os observadores S e S', em movimento relativo entre si, observam um pulso luminoso P. O pulso é emitido por uma fonte (não mostrada na figura) em repouso relativamente ao sistema de referência S'. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura A.4 foi construída para nos ajudar a tratar o problema da propagação da luz. A fonte de luz está em repouso em relação ao sistema de referência S'. Esta fonte emite um pulso luminoso P, cuja velocidade é medida por um observador em repouso neste mesmo sistema. Por sua vez, um observador no sistema de referência S vê o sistema S' e seu observador associado se movendo no sentido positivo dos x com velocidade u . Nessas condições, perguntamos: **qual é a velocidade v do pulso luminoso P medida pelo observador localizado em S?** O postulado de Einstein destacado anteriormente afirma que os dois observadores devem obter a mesma velocidade, ou seja,

$$v = v' = c.$$

Esta hipótese contradiz a lei clássica de adição de velocidades, a qual afirma que

$$v = v' + u .$$

A lei clássica exibida acima é conhecida e, intuitivamente, parece ser sempre verdadeira, podendo ser facilmente verificada observando o movimento dos corpos macroscópicos em nossa experiência cotidiana. Porém, mesmo o mais rápido desses corpos, como por exemplo, um satélite artificial em órbita estacionária, desloca-se com velocidade insignificante em comparação com a velocidade da luz. Isso explica em parte esta visão equivocada.

A teoria da relatividade de Einstein afirma que a equação $v = v' + u$ é o caso limite de uma relação mais geral, que pode ser aplicada a pulsos luminosos e partículas materiais, quaisquer que sejam suas velocidades. Nas mesmas variáveis descritas acima, esta equação é dada por

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} .$$

Note que, aplicando a relação acima quando o objeto em movimento é um pulso luminoso, fazendo com isso $v' = c$, obtemos

$$v = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} = c .$$

No caso de baixas velocidades, isto é, quando $v' \ll c$ e $v \ll c$, usar a lei clássica ou usar a relação relativística é indiferente. Os resultados obtidos serão os mesmos! Vamos ver uns exemplos.

Exemplo 1: Vamos supor que $v' = u = 40.000$ km/h. Note que este valor é alto, mas ainda é muito menor que o valor da velocidade da luz $c \approx 11 \times 10^8$ km/h. Calcule o erro percentual que estaremos cometendo ao usar a soma clássica das velocidades.

Solução:

A soma clássica é direta e muito fácil:

$$v = v' + u = 40.000 + 40.000 = 80.000 \text{ km/h.}$$

Usamos, em seguida, a expressão relativística:

$$v = \frac{v'+u}{1+v'u/c^2} = \frac{40.000 + 40.000}{1 + \frac{(40.000)^2}{(11 \times 10^8)^2}} \text{ km/h,}$$

$$v = \frac{80.000}{1,0000000014} \text{ km/h.}$$

Assim, mesmo para 40.000km/h, o erro devido ao uso da expressão clássica é tão pequeno, que é muito difícil de ser estimado!

Exemplo 2: Dois elétrons são ejetados de um átomo pertencente a uma amostra de material radiativo. Suponha que os dois elétrons foram ejetados em sentidos opostos e que cada elétron tenha velocidade (medida por um observador no laboratório) igual a $0,6c$. Qual será a velocidade de um elétron em relação ao outro?

Solução:

Classicamente teríamos $v = v'+u = 0,6c + 0,6c = 1,2c$. No entanto, o valor correto

$$\text{é } v = \frac{v'+u}{1+v'u/c^2} = \frac{0,6c + 0,6c}{1 + \frac{(0,6c)^2}{(c)^2}} = 0,88c.$$

ALERTA:

Este exemplo mostra que, para velocidades da ordem de c , as duas expressões fornecem resultados bastante diferentes. Uma grande quantidade de experimentos indiretos indica que o segundo resultado é o correto.

Como vimos, sempre encontramos a mesma velocidade para a luz, independentemente de qual seja a velocidade relativa entre a fonte luminosa e o observador. No entanto, a frequência e conseqüentemente o comprimento de onda podem variar, mas sempre de forma que o produto dessas duas quantidades permaneça constante e igual à velocidade da luz:

$$c = \lambda \cdot f$$

3.2 – Análise generalizada do Efeito Doppler

Com base na teoria clássica a respeito das ondas mecânicas, sabemos que, quando uma fonte sonora se afasta do observador com determinada velocidade u , a frequência ouvida pelo observador é igual a

$$f' = f \frac{1}{1 + u/v},$$

onde v é a velocidade de propagação dessa onda (velocidade do som) no meio em questão, f é a frequência medida por um observador quando ele e a fonte estão fixos com relação ao meio e u é a velocidade com que a fonte se afasta do observador.

Se a fonte for mantida em repouso com relação ao meio transmissor e o observador estiver se afastando com velocidade u , o som por ele detectado terá frequência igual a

$$f' = f \left(1 - \frac{u}{v} \right),$$

diferente, portanto, da frequência predita pela equação anterior, mesmo que as velocidades de afastamento u sejam as mesmas nos dois casos. Note que, nesta equação, v e f são as mesmas variáveis já descritas. Esta diferença nos valores de frequências determinados **não** é de nenhuma forma surpreendente, pois uma fonte sonora se deslocando num meio em relação ao qual o observador está parado é fisicamente diferente do caso de um observador se movendo num meio com relação ao qual a fonte está em repouso.

ALERTA:

A seguir veremos que para ondas eletromagnéticas isto não é verdadeiro! Leia com atenção e descubra o porquê!

Como já alertamos, poderíamos facilmente ser levados a aplicar as equações apresentadas anteriormente às ondas eletromagnéticas, apenas substituindo v por c . Entretanto, para luz (ao contrário do som) não é possível identificar um meio de transmissão em relação ao qual a fonte e o observador

estão ambos em movimento. Isto significa que “a fonte se afastar do observador” e “o observador se afastar da fonte” são situações fisicamente idênticas, devendo apresentar exatamente a mesma frequência Doppler.

A frequência Doppler prevista pela teoria da relatividade é dada por

$$f' = f \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}},$$

onde u agora é a velocidade relativa entre a fonte e o observador, considerando como positiva no caso de afastamento. Destacamos ainda, que no caso de observador e fonte estarem se aproximando, as relações apropriadas são obtidas apenas substituindo u por $-u$ nas três equações anteriores.

Nessa etapa, o leitor pode estar se questionando: Como o deslocamento Doppler da luz era tratado antes da teoria da relatividade? A resposta é simples, deslocamento Doppler da luz era tratado com as expressões clássicas, pois, conforme mostraremos agora, as três equações acima não são tão diferentes quanto parecem à primeira vista, desde que o quociente $\frac{u}{c}$ seja suficientemente pequeno.

Observe as expressões abaixo. Elas são obtidas ao expandir as relações anteriores via binômio de Newton. A expansão se dá trocando-se v por c nas expressões clássicas e fazendo $x = \frac{u}{c}$ na fórmula de Newton:

$$f' = f \left[1 - \frac{u}{c} + \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \dots \right]$$

$$f' = f \left(1 - \frac{u}{c} \right)$$

$$f' = f \left[1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \dots \right]$$

Como a relação $\frac{u}{c}$ é pequena para todas as fontes de luz disponíveis em

nosso cotidiano, as sucessivas potências $\left(\frac{u}{c}\right)^n$ destas equações se tornam

rapidamente muito pequenas. Com isso, dependendo da precisão desejada,

conservar apenas o termo de potência $n = 1$ já é suficiente, fazendo com que as três expressões retornem o mesmo resultado.

3.3 – Aplicação

Na astronomia encontramos uma das principais aplicações envolvendo o efeito Doppler da luz. Os astrônomos usam as expressões da seção anterior para determinar a velocidade com que os astros se afastam ou se aproximam de nós, os observadores. No entanto, é bom lembrar que o efeito Doppler mede somente a componente radial da velocidade relativa, isto é, a componente contida pela linha de visada.

Uma das principais descobertas que esses trabalhos proporcionaram é a de que quase todos os objetos extragalácticos para os quais essas medidas foram realizadas parecem estar se distanciando de nós, sendo que a velocidade de afastamento é tanto maior quanto mais distante for o objeto. Essas observações formam a base do conceito de expansão do universo.

SAIBA MAIS:

Você já se perguntou como exatamente estas medidas são feitas? O procedimento é bastante rudimentar. Com a ajuda de um telescópio e outros equipamentos apropriados, basta extrair um espectro (calibrado em comprimento de onda ou frequência) do objeto, identificar linhas de emissão de elementos conhecidos e comparar “posição” dessas linhas no espectro com a posição que estas linhas ocupariam se o espectro fosse obtido por uma lâmpada no laboratório. A variável f é a frequência de laboratório e a variável f' é a frequência observada. Então, basta isolar a variável u !

Exemplo: O espectro da luz proveniente de uma galáxia da constelação de Virgem mostra linhas de determinados elementos conhecidos em comprimentos de onda cerca de 0,4% maiores que seus comprimentos de onda característicos. Determine a velocidade radial dessa galáxia em relação à Terra. Este objeto está se aproximando ou se afastando de nós?

Solução:

Se λ é o comprimento de onda de uma fonte terrestre qualquer e λ' é o comprimento de onda medido, então $\lambda' = 1,004\lambda$.

Expressando em termos de freqüências, temos $\lambda' \cdot f' = \lambda \cdot f = c$ e podemos escrever

$$f' = 0,996f.$$

Esta variação de freqüência é tão pequena que, para calcularmos a velocidade da fonte, praticamente não haverá diferença se usarmos a expressão clássica ou qualquer uma das expansões até a potência $n = 1$. Assim, obtemos:

$$f' = f \left(1 - \frac{u}{c} \right),$$

$$0,996f = f \left(1 - \frac{u}{c} \right).$$

Eliminando f e isolando u ,

$$\frac{u}{c} = 1 - 0,996 = 0,04,$$

$$u = 0,04c = 0,04 \times (3 \times 10^8),$$

$$u = 1,2 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Assim, como a velocidade u é positiva, concluímos que a galáxia está se afastando do sistema solar.

Exercícios: Unidade A

1 – Quais são a frequência e o período da luz para os quais o olho humano é mais sensível?

2 – A radiação solar atinge a terra com intensidade de 1400 watts/m^2 . Supondo que atinja um disco plano com raio de 10 km , e que toda a energia incidente seja absorvida, calcule a força sobre esse disco devida a pressão de radiação.

3 – Calcular a pressão de radiação a $2,0 \text{ m}$ de distância de uma fonte de luz 1500 watts , sobre uma superfície onde a energia é totalmente absorvida. Supor que a irradiação seja uniforme em todas as direções.

4 – Qual a frequência de uma microonda de $7,0 \text{ cm}$?

5 – Quanto tempo leva a luz para cobrir a distância do sol até a terra, que corresponde a aproximadamente $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$?

UNIDADE B - REFLEXÃO E REFRAÇÃO

1 - Reflexão e refração

Quando um feixe de luz incide sobre uma superfície líquida, parte deste feixe é refletida e outra parte “penetra” na superfície do líquido. Chamamos esta segunda parte de feixe refratado. A Figura B.1 foi construída com o objetivo de analisar as direções desses feixes. Um esquema dessa construção é apresentado na Figura B.1, onde os feixes são representados por raios e os ângulos estão indicados de forma adequada. Esta representação supõe que o feixe incidente seja uma onda plana, com as frentes de onda normais ao raio incidente.

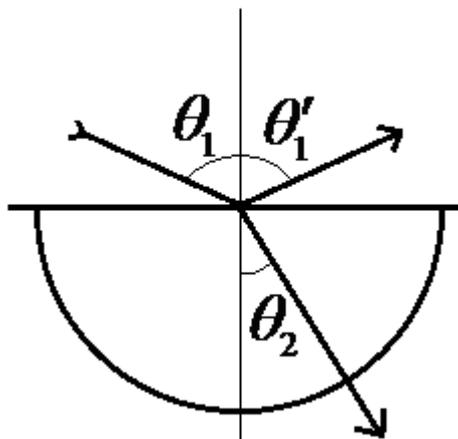


Figura B.1: Representação usando raios.

Os ângulos de incidência θ_1 , de reflexão θ'_1 e de refração θ_2 são medidos em relação à normal da superfície (reta vertical que passa pelo centro da figura) como mostra a figura e governados por leis de reflexão e refração que podem ser facilmente obtidas da experiência. São elas:

1. Os raios incidente, refletido e refratado e a normal à superfície no ponto de incidência estão no mesmo plano.
2. Na reflexão, temos $\theta'_1 = \theta_1$.

3. Na refração, temos $n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2$, onde n_1 e n_2 são constantes que dependem do meio onde a luz se propaga e são chamadas de índices de refração do meio. Este resultado é conhecido como Lei de Snell.

A Tabela B.1 lista os índices de refração de algumas substâncias comuns para um comprimento de onda de 5.890 Å, tomando como padrão o vácuo e fazendo $n_{vac} = 1$, ou seja, $n = \frac{c}{v}$, onde v é a velocidade da luz no meio.

Tabela B.1: Alguns índices de refração (para $\lambda = 5\ 890\ \text{Å}$) (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Meio	Índice de refração
Água	1,33
Álcool etílico	1,36
Bissulfeto de carbono	1,63
Ar (1 atm e 20°C)	1,003
Quartzo fundido	1,46
Vidro crown	1,53
Vidro flint denso	1,66
Cloreto de sódio	1,53
Polietileno	1,50-1,54
Fluorita	1,43

Os índices de refração de um meio em relação a outro variam com o comprimento de onda. Como consequência disto, se um feixe é formado raios de diferentes comprimentos de onda, cada raio será refratado sob um ângulo diferente, de modo que a refração espalha o feixe incidente. Este espalhamento é conhecido como **dispersão cromática**.

ALERTA:

A dispersão cromática não pode ser verificada na Figura B.1 porque a luz incidente é formada por raios de mesmo comprimento de onda. Dizemos, assim, que a luz incidente é **monocromática**.

De forma geral, o índice de refração de um meio é maior, quanto menor for o comprimento de onda da luz incidente. Observe a Figura B.2(a). Um feixe de luz branca (representado por um raio amarelo) incide numa interface ar-vidro. A componente da luz da região do azul do espectro eletromagnético é refratada sob um ângulo θ_2^a , menor que o ângulo de refração θ_2^v , da componente da região do vermelho.

ALERTA:

Lembre-se, estes ângulos tomam a normal como referência, por isso o raio que sofre maior refração apresenta menor ângulo θ_2 !

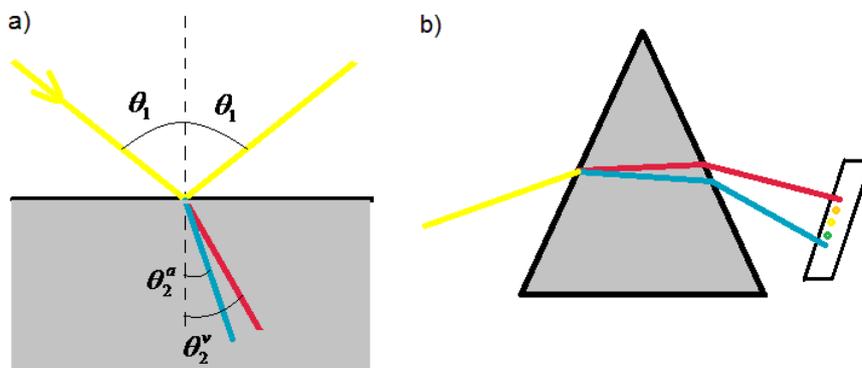


Figura B.2: Feixe de luz branca (representado por um raio amarelo) incidindo numa interface ar-vidro (a) ou em um prisma vidro (b).

Se nosso objetivo for aumentar a dispersão das cores, produzindo um espectro da luz incidente num anteparo de interesse, como por exemplo uma chapa fotográfica, podemos usar um prisma de vidro, conforme representamos na Figura B.2(b). Quando um feixe de luz branca penetra no prisma, os raios mais azuis sofrem maiores desvios e produzem um espectro da luz incidente no anteparo à direita.

O que ainda não mencionamos, é que as leis da reflexão e refração podem ser deduzidas das equações de Maxwell e, como as equações de Maxwell são válidas para todo tipo de onda eletromagnética, suas consequências também valem. Assim, as leis de reflexão e refração inicialmente deduzidas experimentalmente apenas no óptico, devem ser válidas para todas as zonas do espectro eletromagnético.

A figura B.3 traz o esboço de um experimento usado para verificar a reflexão de microondas. O alternador A gera microondas de determinada frequência numa antena dipolo. Um refletor parabólico direciona estas ondas para um espelho metálico que pode girar sob um ângulo ϕ em torno de um ponto O. O detector D registra a variação da intensidade da onda refletida em sua direção conforme apresentamos no gráfico à direita. Como a teoria prevê, um pico de detecção ocorre quando o ângulo de incidência da onda no espelho é igual ao ângulo cujo detector está posicionado ($\phi = 45^\circ$).

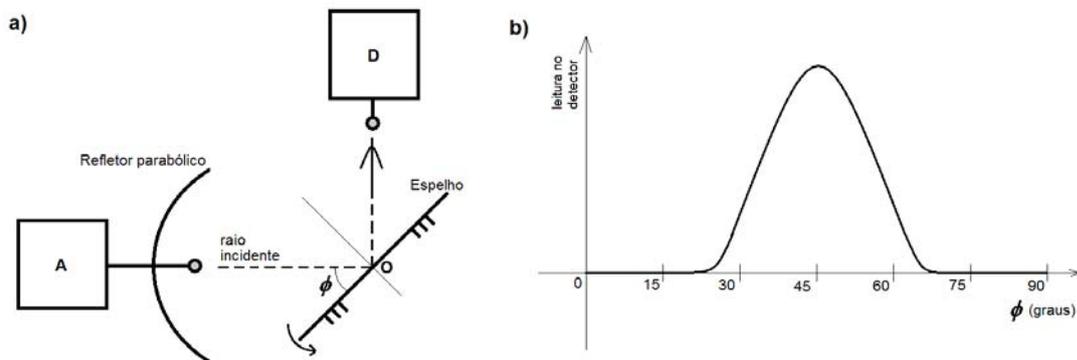


Figura B.3: Dispositivo experimental utilizado para estudar a reflexão de microondas por uma extensa lâmina de metal (a). Ao lado, um gráfico apresentando a variação da intensidade lida no detector D.

Há ampla comprovação experimental de que as equações $\theta_1 = \theta'_1$ e $n_1 \text{ sen}\theta_1 = n_2 \text{ sen}\theta_2$ descrevem corretamente o comportamento de feixes refletidos e refratados em todas as regiões do espectro eletromagnético. O que difere a reflexão especular e a reflexão difusa é a existência de imperfeições na superfície refletora. Se essas imperfeições forem muito menores que o comprimento de onda da onda incidente, observaremos um raio refletido. Do contrário, iremos detectar um feixe difuso.

SAIBA MAIS:

O fundo de uma panela de ferro é um bom refletor para microondas de $\lambda = 0,5 \text{ cm}$, mas não é um bom refletor para a luz visível. É por isso que não podemos usar este objeto como espelho para, por exemplo, pentear o cabelo ou nos barbear!

Uma segunda condição para a existência de um raio refletido é que as dimensões transversais do refletor devem ser muito maiores que o comprimento de onda do feixe incidente. As exigências de que as superfícies sejam “lisas” e “grandes” também se aplicam à formação de feixes refratados.

Exemplo: Na Figura B.4, o raio amarelo ilustra um feixe monocromático incidindo na interface entre os meios 1 e 2. Considerando que $\theta = 50^\circ$, $n_1 = 1,6$ e $n_2 = 1,4$, determine os valores dos ângulos a e b indicados.

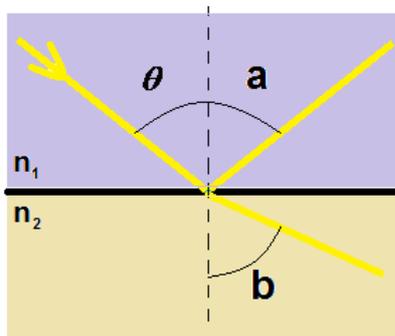


Figura B.4: Exemplo de reflexão e refração.

Solução:

Na reflexão, o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido. Assim, como $\theta = 50^\circ$, temos também $a = 50^\circ$.

Já o ângulo b de refração é dado pela lei de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen} \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen} \theta_2,$$

$$1,6 \cdot \text{sen} 50^\circ = 1,4 \cdot \text{sen} b. \text{ Assim:}$$

$$\text{sen} b = \frac{1,6 \cdot \text{sen} 50^\circ}{1,4}, \text{ ou seja, } b = \text{sen}^{-1} \left(\frac{1,6 \cdot \text{sen} 50^\circ}{1,4} \right) = 61,1^\circ.$$

2 - Experimentos de refração

Os fenômenos de refração estão a todo o momento presentes no nosso cotidiano, basta observarmos interseções de meios transparentes à nossa volta. Vamos discutir dois deles!

Como o índice de refração da água é diferente do índice de refração do ar, sempre podemos observar um fenômeno de refração numa interface água-ar. Observe a Figura B.5, onde representamos um bastão (que poderia ser um lápis, uma colher ou uma bomba de chimarrão!) mergulhado em um copo d'água. Olhando o copo da esquerda, não percebemos os desvios, já que eles estão em um plano vertical, paralelo a linha de visada. Por outro lado, no copo da direita o desvio da luz fica evidente e o lápis parece estar quebrado.

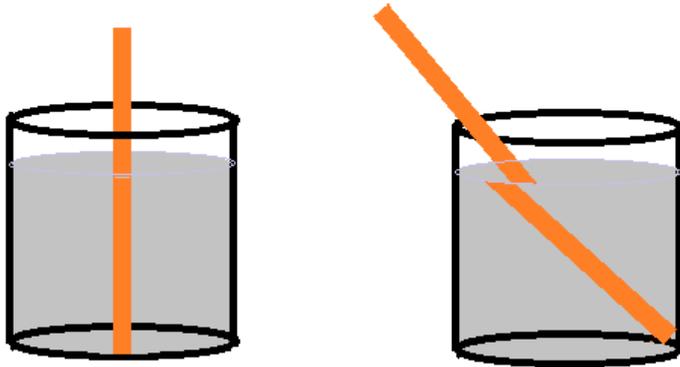


Figura B.5: Exemplo de fenômeno de refração presente em nosso cotidiano.

Agora, vamos usar o mesmo copo para realizar um experimento semelhante, ilustrado na Figura B.6. Verifique a situação à esquerda, onde colocamos um copo de paredes opacas, vazio, apenas com uma moeda próxima a parede do copo. O observador não consegue ver a moeda porque ela está oculta atrás da parede do copo. Quando colocamos água no copo da direita, os raios de luz refletidos pela moeda sofrem refração ao passar da água para o ar. Com o desvio provocado pela refração, os raios de luz conseguem atingir os olhos do observador, possibilitando que ele visualize uma imagem da moeda. No entanto, o observador tem a impressão que a moeda está em outro lugar do fundo do copo.

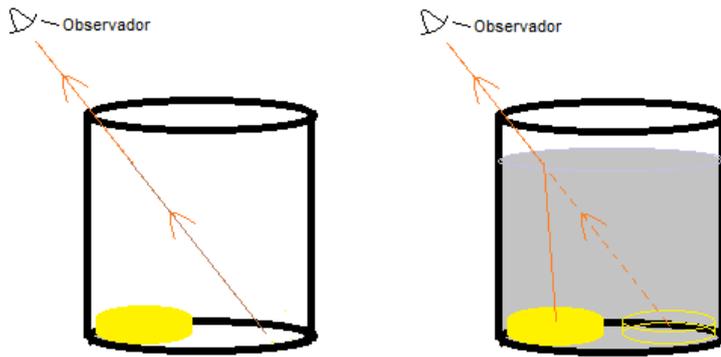


Figura B.6: Experimento usado para mostrar o desvio da luz proveniente de um objeto, causado pela refração da luz.

ALERTA:

A Figura B.6 mostra porque é tão difícil imitar um procedimento antigo de pesca que ainda hoje é usado por algumas comunidades indígenas, a pesca utilizando apenas lanças pontiagudas. Certamente os índios não sabem que o índice de refração da água é aproximadamente 1,3. No entanto, eles sabem que ao ver o peixe sob determinada profundidade, devem atirar sua lança “mirando” um alvo que nada a uma profundidade em torno de 30% maior!

3 - Construção de Huygens

Nenhuma teoria da luz seria aceitável se não fosse capaz de prever as leis da reflexão e da refração já estabelecidas. Por outro lado, podemos reproduzir estas leis e também muitas outras leis que descrevem a óptica através de uma teoria bastante simples, embora restrita, conforme a que o físico holandês Huygens propôs em 1678. Vamos descrevê-la de forma sucinta!

A teoria de Huygens se limita a tratar a luz como uma onda, sem fazer nenhuma observação sobre a natureza da luz. No entanto, isso não causará nenhum espanto se o leitor lembrar que a teoria de Maxwell do eletromagnetismo apareceu somente depois de decorrido mais de um século da publicação da teoria de Huygens. Sua teoria orientou de forma bastante eficiente as experiências realizadas durante muitos anos e até nos dias de hoje continua útil para certos propósitos práticos e pedagógicos.

O leitor não deve esperar que a teoria de Huygens forneça a mesma quantidade de informações minuciosas que se obtêm da teoria mais completa do eletromagnetismo de Maxwell. Esta teoria se baseia numa construção geométrica chamada princípio de Huygens que diz:

“Devemos considerar os pontos de uma frente de onda como fontes puntiformes que produzem ondas esféricas secundárias. Após um dado tempo t , a nova posição da frente de onda é a superfície que tangencia essas ondas secundárias.” (RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura B.7 representa a construção de Huygens. Após um intervalo de tempo Δt , a frente de onda se deslocou uma distância ΔS , igual ao raio das ondas esféricas secundárias.

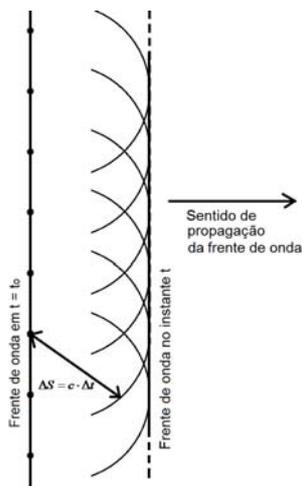


Figura B.7: Propagação de uma onda plana no vácuo, segundo a descrição proposta por Huygens. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

3.1 - O Princípio de Huygens e a Lei da reflexão

A Figura B.8 mostra três frentes de onda de uma onda plana que incide sobre um espelho plano. Para facilitar a análise, escolhemos frentes afastadas entre si de um comprimento de onda λ . O leitor deve perceber que o ângulo θ_1 entre o espelho e a frente de onda é igual ao ângulo entre o raio incidente e a normal ao espelho, ou seja, θ_1 é o ângulo de incidência. Agora vamos analisar um ponto de incidência p no espelho, indicado na parte (b) da Figura B.8. Com um compasso de abertura $p'q$, descrevemos um arco em torno de p e obtemos um

semicírculo ao qual a onda refletida deve ser tangente. Agora note que os triângulos $q p' p$ e $q' p' p$ são semelhantes, pois têm dois lados e um ângulo de mesma medida: o lado $p' p$ é comum e $q p' = q' p'$ e, ainda, ambos possuem um ângulo reto em q e q' . Assim, os outros ângulos têm necessariamente a mesma medida, de modo que podemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_1'$$

conforme exige a lei da reflexão.

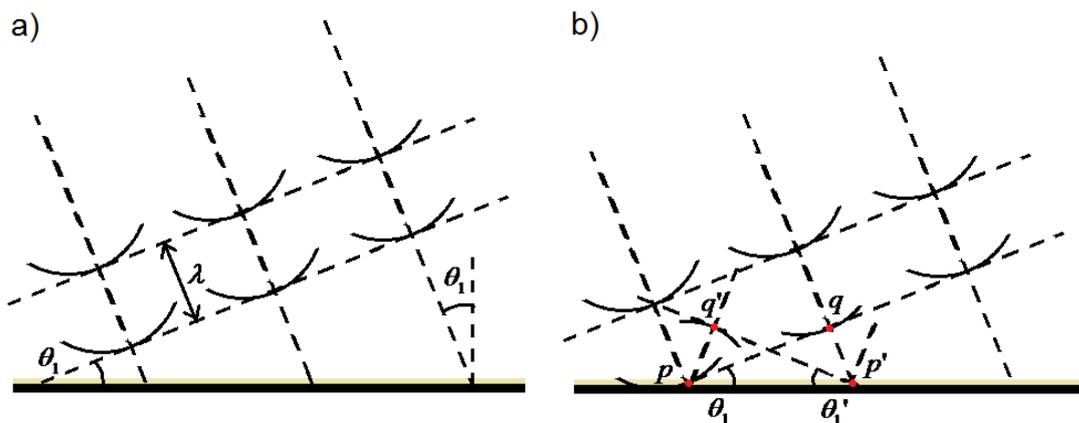


Figura B.8: Construção de Huygens para a reflexão de uma onda. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

3.2 - O Princípio de Huygens e a Lei da refração

A Figura B.9 mostra gradativamente os estágios da refração de duas frentes sucessivas de uma onda plana de comprimento de onda λ , as quais incidem numa interface ar-vidro. Com base nessa construção e no Princípio de Huygens, vamos encontrar a lei da refração!

Chamaremos de v_1 a velocidade da onda no ar (meio 1) e de v_2 a velocidade da onda no vidro (meio 2). Esta dedução não se aplica apenas para uma interface ar-vidro, a única hipótese necessária para a dedução que segue é que a velocidade da onda no meio 1 seja maior que a velocidade no meio 2.

$$v_2 < v_1 .$$

As frentes de onda estão relacionadas entre si pela construção de Huygens.

Sendo $t = \frac{\lambda_1}{v_1}$, o tempo durante o qual a onda de Huygens se move do ponto e

até atingir o ponto c . A luz que parte do ponto a se propagando no vidro com uma velocidade menor e percorrerá uma distância menor no mesmo tempo:

$t = \frac{\lambda_2}{v_2}$, o que implica em $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1}$. A frente de onda refratada deve ser tangente a um arco traçado com este raio e de centro em a . Para os triângulos retângulos acb e acd , podemos escrever

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{\lambda_1}{ac} \quad (\text{para } acb) \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta_2 = \frac{\lambda_2}{ac} \quad (\text{para } acd).$$

Dividindo uma expressão pela outra, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \equiv \text{const}$$

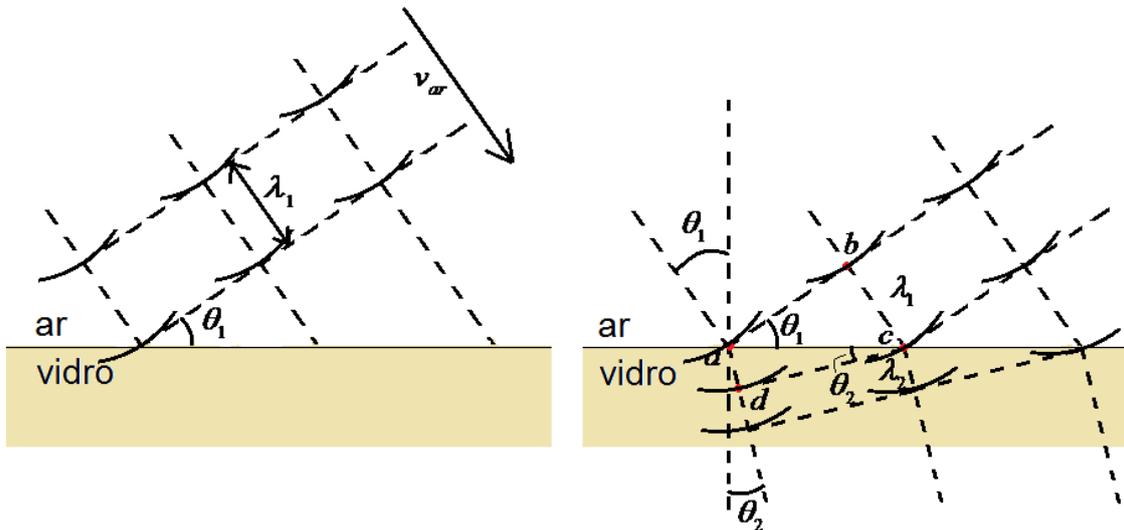


Figura B.9: Refração de uma onda plana baseada numa construção de Huygens. Para simplificar a figura, ocultamos a onda refletida. Fique atento para a variação do comprimento de onda na refração. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A lei da refração é $\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = n_{21}$. Da expressão que acabamos de deduzir,

concluimos que n_{21} é o quociente entre as velocidades da luz nos dois meios:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

Reescrevendo a expressão deduzida da construção de Huygens, teremos:

$$\left(\frac{c}{v_1}\right)\text{sen}\theta_1 = \left(\frac{c}{v_2}\right)\text{sen}\theta_2,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. As grandezas $\frac{c}{v_1}$ e $\frac{c}{v_2}$ são os índices de refração do meio 1 e do meio 2, respectivamente, em relação ao vácuo. Para simplificar a notação, normalmente escrevemos

$$n_1 \cdot \text{sen} \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen} \theta_2.$$

Seguindo a análise, vamos supor que a interface da Figura B.9 seja vácuo-vidro. Com isso, v_1 será a velocidade da luz e o comprimento de onda λ_1 terá um determinado valor λ , característico da onda no vácuo. Desse modo, teremos:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1} = \lambda \frac{v_2}{c}, \text{ fazendo com que } \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}.$$

Este resultado mostra claramente que o comprimento de onda de uma luz monocromática num meio material é sempre menor que o comprimento de onda da mesma luz no vácuo, já que o índice de refração de qualquer meio material é sempre $n_{\text{meio}} > 1$. Observe que este resultado está bastante claro na Figura B.9.

4 - Reflexão interna total

Na seção anterior, analisamos a refração da luz que passa de um meio 1 para um meio 2, menos refringente. Esta foi a hipótese usada durante a construção geométrica do problema, mas sabemos que a lei da refração obtida experimentalmente e agora deduzida com base no princípio de Huygens não se restringe a este fato. Cabe então a seguinte questão: Se $n_1 > n_2$, teremos $\theta_2 > \theta_1$, nesse caso, o que acontecerá quando o ângulo de incidência θ_1 se aproximar de 90° ? Vamos descobrir!

A figura B.10 mostra um raio de luz partindo de uma fonte S localizada no meio 1 (que poderia ser vidro ou acrílico, por exemplo!) e atingindo a interface com o meio 2 (ar, vácuo,...), menos refringente que o meio 1. Como $n_1 > n_2$, o ângulo θ_2 do raio refratado é maior que θ_1 . Aumentando θ_1 gradativamente, atingiremos um ângulo crítico θ_c , para o qual $\theta_2 = 90^\circ$.

Determinamos o ângulo crítico com a expressão usual:

$n_1 = \text{sen} \theta_c = n_2 \text{sen} 90^\circ$, o que implica em $\text{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$. Assim,

$$\theta_c = \text{arcsen} \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

Para ângulos de incidência maiores que este ângulo limite não existe raio refratado! Nesse caso, ocorre um fenômeno conhecido como reflexão total, que está representado na parte (c) da Figura B.10.

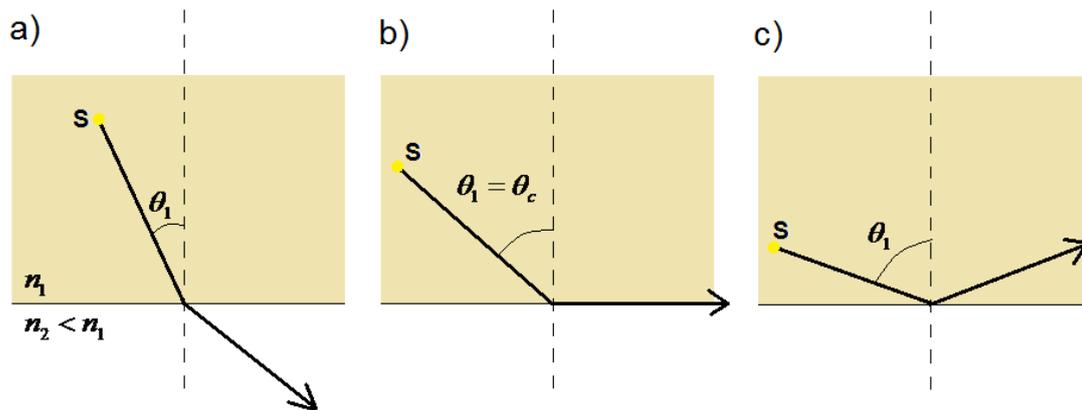


Figura B.10: Fenômeno conhecido por reflexão total. O ângulo crítico, a partir do qual o fenômeno ocorre é $\theta_1 = \theta_c$.

SAIBA MAIS:

Para uma interface vidro-ar, temos $\theta_c = \text{arcsen} \left(\frac{1,0}{1,5} \right) = 41,8^\circ$. Observe também que, a reflexão total não ocorre quando a luz provém do meio de menor índice de refração!

A Figura B.11 analisa a reflexão total num prisma triangular de vidro. Na esquerda, um raio incide perpendicularmente a uma face do prisma, de modo que não sofre refração. Ao atingir a outra interface o raio sofre reflexão total. Contudo, mergulhando-se o prisma na água, o mesmo raio é em parte refletido e parte refratado. Isto ocorre por que $n_{\text{água}} > n_{\text{ar}}$, o que exige um ângulo θ_c maior para que ocorra a reflexão total.

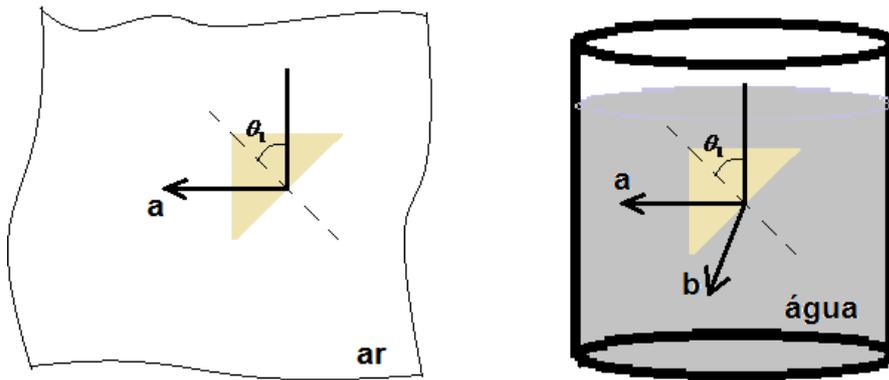


Figura B.11: Reflexão total (à esquerda) em um prisma de vidro. Ao mergulharmos o prisma na água (à direita), a reflexão é apenas parcial.

Exemplo 1:

Se o ângulo crítico numa interface vácuo-ar for $\theta_1 = 45^\circ$, como podemos encontrar o índice de refração do vidro?

Solução:

O ângulo θ_1 não pode ser inferior ao ângulo crítico θ_c . Assim, como $n_{vac} = 1$, temos:

$$\text{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{vidro}}.$$

A expressão acima nos fornece uma relação entre o ângulo em que ocorre a reflexão total e o índice de refração do vidro. Supondo que o índice de refração do vidro seja tal que a reflexão total comece a aparecer quando $\theta_1 = 45^\circ$, encontramos:

$$n = \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} = 1,41.$$

Exemplo 2:

Vamos supor os índices de refração da água e do acrílico sejam exatamente $n_{agua} = 1,3$ e $n_{acrílico} = 1,5$. Qual o ângulo crítico para a segunda situação da Figura B.11, em que um prisma se encontra mergulhado na água.

Solução:

O novo ângulo crítico é obtido diretamente da das equações dessa seção:

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsen\left(\frac{1,3}{1,5}\right)$$

$$\theta_c \approx 60^\circ$$

Como o ângulo de incidência da situação é 45° , portanto menor que θ_c , não vemos reflexão total. Além do raio a refletido, temos um raio refratado fazendo um ângulo θ_2 com a normal tracejada dado por:

$$n_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = n_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$1,5 \cdot \text{sen}45^\circ = 1,3 \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$\theta_2 = 54,7^\circ$$

SAIBA MAIS:

As equações de Maxwell permitem estimar os percentuais da divisão da energia entre o feixe refletido e o refratado.

5 - Princípio de Fermat

Em 1657, Pierre Fermat propôs um novo método para descrever os percursos dos raios luminosos, baseando-se na idéia de que “a natureza sempre atua pelo caminho mais curto”. O princípio de Fermat pode ser enunciado da seguinte forma: **entre todos os caminhos possíveis para que a luz vá de um ponto a outro, o caminho seguido é aquele em que o tempo necessário é um mínimo.**

ALERTA:

Como, em cada meio, a velocidade é constante, encontrar o tempo mínimo em geral corresponde a encontrar a distância mínima percorrida.

Podemos deduzir as leis da reflexão e de refração a partir do princípio de Fermat. A Figura B.12 mostra um raio de luz partindo de uma fonte S , passando por P e chegando a um dado ponto Q . Na parte (a), vamos analisar a reflexão de um raio de luz e na parte (b) analisaremos a refração. Os pontos S e Q são fixos, enquanto que a posição de P varia horizontalmente até que se obedeça ao princípio de Fermat.

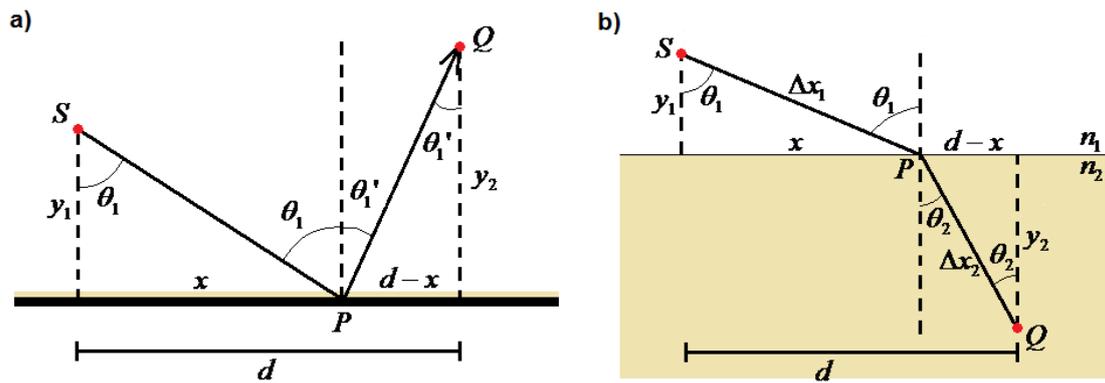


Figura B.12: Dedução das leis de reflexão (a) e refração (b) através do princípio de Fermat. As figuras ilustram um raio de luz partindo de uma fonte S , passando por P e chegando a um dado ponto Q . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Vamos iniciar obtendo a lei da reflexão! Em (a), o caminho $\Delta x = SPQ$ percorrido pelo raio de luz é dado por:

$$\Delta x = SPQ = \sqrt{y_1^2 + x^2} + \sqrt{y_2^2 + (d-x)^2},$$

onde x determina a posição do ponto P em que o raio toca o espelho. De acordo com o princípio de Fermat, a posição de P é aquela que minimiza o tempo de percurso, o que neste caso corresponde a encontrarmos uma distância mínima, ou seja, vamos procurar x tal que $\frac{d\Delta x}{dx} = 0$:

$$\frac{d\Delta x}{dx} = \frac{1}{2}(y_1^2 + x^2)^{-1/2}(2x) + \frac{1}{2}[y_2^2 + (d-x)^2]^{-1/2}(2)(d-x)(-1) = 0,$$

então:

$$\frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}.$$

Agora analise novamente a Figura B.12(a). Não é difícil perceber que

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} \text{ e } \text{sen } \theta_1' = \frac{d-x}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}. \text{ Portanto,}$$

$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_1'$, ou seja, como θ_1 e θ_1' são menores que 90° , temos que a lei da reflexão é, novamente, dada por

$$\theta_1 = \theta_1'.$$

Agora vamos obter a lei da refração. Considere a construção Figura B.12(b). O caminho SPQ é igual a $\Delta x_1 + \Delta x_2$ e o tempo de percurso é dado por

$$t = \frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2}. \text{ Lembrando que } v = \frac{c}{n}, \text{ obtemos:}$$

$$t = \frac{n_1 \Delta x_1 + n_2 \Delta x_2}{c} = \frac{l}{c}, \text{ onde a grandeza } l = n_1 \Delta x_1 + n_2 \Delta x_2 \text{ é chamada caminho}$$

óptico do raio. O princípio de Fermat exige que este caminho seja um mínimo,

para que t também o seja. Nestas bases, vamos encontrar x tal que $\frac{dl}{dx} = 0$:

$$\frac{dl}{dx} = n_1 \frac{1}{2} (y_1^2 + x^2)^{-1/2} (2x) + n_2 \frac{1}{2} [y_2^2 + (d-x)^2]^{-1/2} (2)(d-x)(-1) = 0$$

implicando:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}.$$

Conforme a Figura B.12(b), teremos novamente $\text{sen } \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}}$ e

$\text{sen } \theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}$, resultando em:

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2,$$

que é a lei da refração.

Exercícios: Unidade B

1 – Qual é a velocidade da luz com comprimento de onda de 7000Å no quartzo cujo índice de refração é 1,45?

2 – Sabendo o comprimento de onda da luz amarela de sódio, no vácuo, é aproximadamente 5900Å . (a) Calcular sua frequência? (b) Qual o seu comprimento de onda e sua velocidade num meio transparente cujo índice de refração é igual a 1,40?

3 – Mediu-se a velocidade da luz amarela de sódio em um líquido e obteve-se o valor de $1,92 \times 10^8$ m/s. Encontre o índice de refração deste líquido em relação ao ar. (Para a luz amarela do Na)

4 – Sabendo que o índice de refração da água é 1,33. Qual é o ângulo de refração de um feixe de luz no ar que atinge a superfície de água sob um ângulo de incidência igual a: (a) 10° , (b) 30° , (c) 45° e (d) 70° . Represente graficamente cada ocorrência.

5 – O ângulo crítico da reflexão interna total num meio transparente é 44° . Qual o índice de refração e qual a velocidade da luz neste meio.

UNIDADE C – ÓTICA GEOMÉTRICA

1 – Raio

Como vimos na Unidade B, um raio de luz é uma construção bastante conveniente, embora seja fisicamente impossível isolar um raio a partir de um dado feixe de luz. Nesta unidade vamos considerar o caso mais geral de ondas esféricas incidindo sobre superfícies refletoras e refratoras com determinado raio de curvatura. As situações da Unidade B aparecerão como casos particulares, já que um plano pode ser considerado como uma superfície esférica de raio de curvatura infinito.

A Figura C.1 inicialmente ilustra uma onda plana de comprimento de onda λ incidindo numa fenda de largura $a = 5\lambda$, em seguida $a = 3\lambda$ e por fim $a = \lambda$. Observando atentamente, constatamos que a luz penetra na sombra geométrica da fenda, o que corresponde ao fenômeno chamado difração. A figura mostra ainda que a difração torna-se mais pronunciada quando $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$, ou seja, quando a largura a se torna muito menor que o comprimento de onda λ , evidenciando que é inútil qualquer tentativa de isolar um único raio da onda incidente.

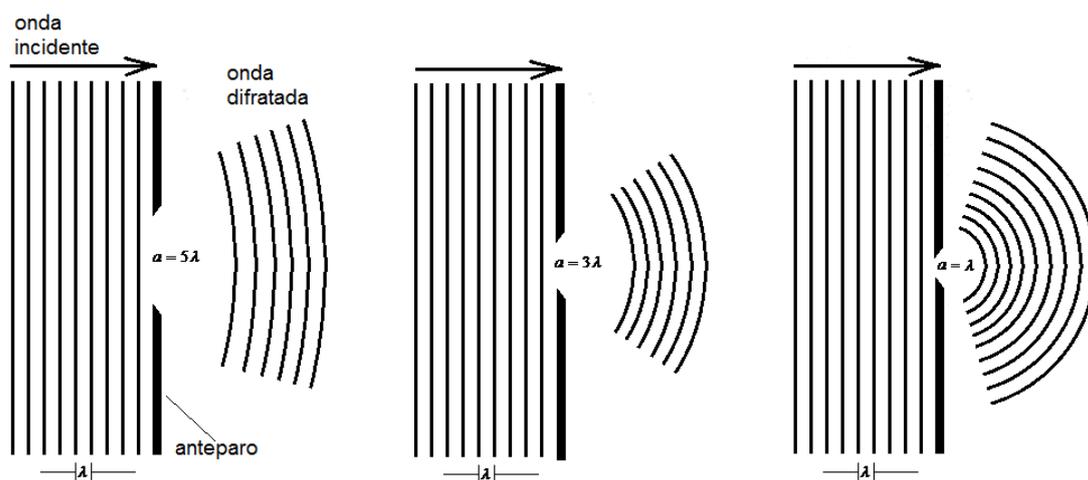


Figura C.1: A tentativa para isolar um raio diminuindo a largura da fenda falha por causa da difração, que se torna mais pronunciada quando $\frac{a}{\lambda}$ tende a zero. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A difração de uma onda pode ser ignorada se o quociente $\frac{a}{\lambda}$ for suficientemente grande. Assim, se $a \gg \lambda$, a luz parece percorrer linhas retas que podem ser representadas por raios, os quais obedecem às leis da reflexão e da refração. Teremos então a chamada **óptica geométrica**. Se as exigências impostas pela óptica geométrica não forem inteiramente satisfeitas, não será possível descrever o comportamento da luz através de raios e teremos que levar em conta sua natureza ondulatória, objeto da óptica física. Assim, a **óptica física** inclui a ótica geométrica como um caso-limite.

2 - Espelhos planos e esféricos

2.1 - Espelhos planos

A Figura C.3(a) traz uma fonte puntiforme O , denominada objeto, colocada em frente a um espelho plano, a uma distância o . A luz representada por raios provenientes de O incide sobre o espelho. Ao seguir os raios refletidos, no sentido contrário ao de sua propagação, vemos que eles se interceptam num ponto I que denominamos imagem, localizado a uma distância i da parte de trás do espelho. As imagens podem ser reais ou virtuais. Numa imagem real, a energia luminosa realmente passa pelo ponto i . Por outro lado, numa imagem virtual, a luz se comporta como se divergisse do ponto i .

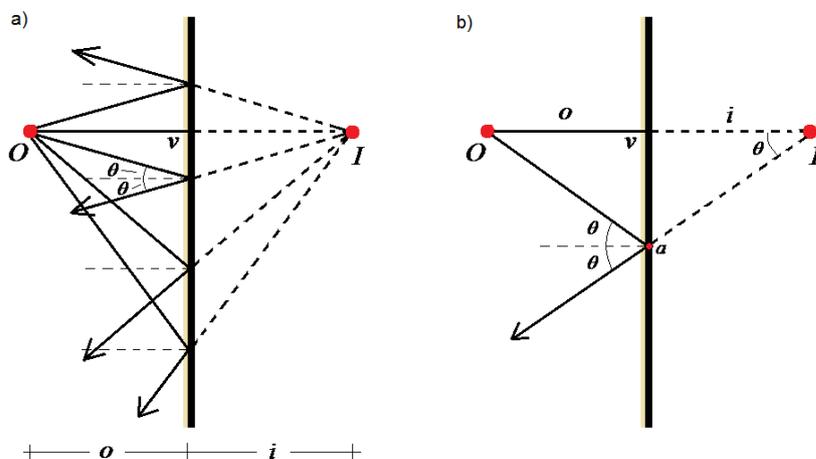


Figura C.3: (a) Um objeto pontual O forma uma imagem virtual I num espelho plano. Embora os raios pareçam se originar em I , na realidade a energia

luminosa não passa por este ponto. (b) Esquema simplificado construído para determinar a posição da imagem virtual I . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

ALERTA:

As imagens em espelhos planos são sempre virtuais.

Feita uma breve análise quantitativa, vamos determinar a posição de I com relação ao espelho. A parte (b) da Figura C.3 mostra dois raios provenientes do objeto O , sendo que um deles atinge perpendicularmente o espelho em v e o outro atinge o espelho em um ponto arbitrário a , fazendo um ângulo de incidência θ com a normal do espelho naquele ponto. Por construção, sabemos que os triângulos Ova e Iva são semelhantes, logo:

$$o = -i.$$

ALERTA:

O Sinal negativo indica que a imagem é virtual.

2.2 Espelhos esféricos

A Figura C.4 mostra um espelho esférico côncavo com raio de curvatura $r = \overline{Cv}$. A reta que passa pelo objeto O e pelo centro de curvatura C é denominada eixo de referência. A seguir listaremos as situações descritas na figura:

- i) Um raio que parte do ponto O faz um ângulo α arbitrário com a normal, depois reflete no ponto a do espelho (note que o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo de reflexão) e na volta corta o eixo em I .
- ii) Outro raio sai de O , mas segue o eixo de referência e reflete em v , retornando sobre si mesmo e passando novamente pelo ponto I .

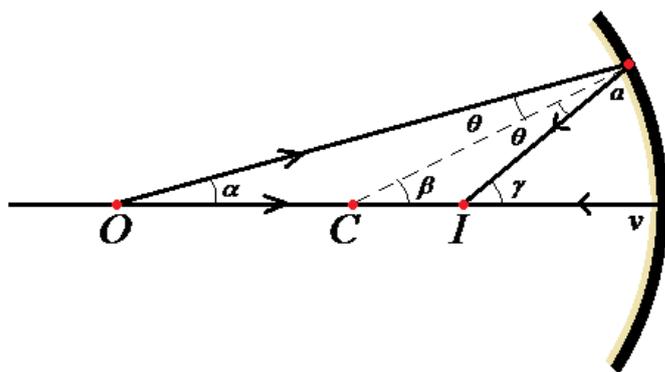


Figura C.4: Dois raios partem do ponto O e, após a reflexão no espelho côncavo esférico, convergem num I , formando ali uma imagem real (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

ALERTA:

Note que, para os dois raios, I é a imagem de O e é uma imagem real porque a energia luminosa passa efetivamente por I .

Se você observar que um ângulo externo de um triângulo qualquer é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele, podemos obter as seguintes relações da Figura C.4:

- i) Do triângulo OaC temos $\beta = \alpha + \theta$;
- ii) Do triângulo OaI temos $\gamma = \alpha + 2\theta$.

Eliminando θ entre as equações, teremos $\alpha + \gamma = 2\beta$ e, para ângulos tomados em radianos, podemos escrever:

$$\alpha \cong \frac{av}{vO} = \frac{av}{o}, \quad \beta = \frac{av}{vC} = \frac{av}{r} \quad \text{e} \quad \gamma \cong \frac{av}{vI} = \frac{av}{i}.$$

O leitor deve notar que apenas a segunda equação é exata. Entretanto, as equações para α e γ são boas aproximações se estes ângulos são suficientemente pequenos. Estes raios que fazem pequenos ângulos com o eixo de referência são chamados raios paraxiais ou centrais. Unindo as quatro equações, teremos:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

onde o é a distância do objeto e i é a distância da imagem, ambas com relação ao ponto v , chamado vértice do espelho.

Assim como nós já observamos nos espelhos planos, uma imagem formada num espelho esférico só pode ser vista se a posição do olho do observador pode ser atingida pelos raios de luz. Observe a Figura C.5, usada para apresentarmos a convenção de sinais e a nomenclatura utilizada. Você pode verificar claramente que o observador localizado em P_1 é capaz de ver a imagem I , enquanto que o observador localizado em P_2 não é. O primeiro detecta os raios que refletem próximo ao ponto a e passaram pela imagem I . Já o observador em P_2 , só veria a imagem I se estes refletissem na vizinhança de a' , mas isto não ocorre, pois este ponto não pertence ao espelho.

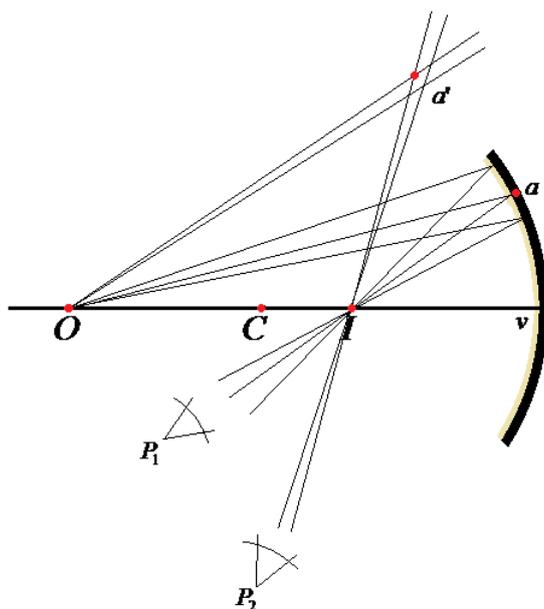


Figura C.5: Esquema mostrando que o olho do observador deve estar convenientemente colocado para poder detectar a imagem (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Agora fique atento à nomenclatura! O lado esquerdo do espelho é chamado lado real (R), pois é deste lado que vem a luz do objeto. Parte de trás do espelho, o lado direito é conhecido como lado virtual (V). Assim como nos espelhos planos, dizemos que uma imagem formada no lado V é uma imagem virtual, já que não há energia luminosa neste lado. Com estas considerações, destacamos a seguinte convenção:

- i) A distância da imagem i é positiva se a imagem se formar no lado R do espelho e negativa se a imagem se formar no lado V;
- ii) O raio de curvatura r é positivo se o centro de curvatura do espelho está no lado R e negativo se o centro de curvatura está no lado V.

ALERTA:

Fique atento! Neste texto, só trataremos casos em que a distância do objeto é positiva.

Nos sistemas de dois ou mais espelhos (ou combinações de espelhos e superfícies refringentes) é possível conseguir uma luz que converge sobre o espelho. Nesses casos, a distância o do objeto será negativa e o chamaremos de objeto virtual.

Exemplo:

Um objeto (que pode ser tratado como uma fonte puntiforme de luz) é colocado a 20 cm de um espelho convexo conforme o esquema apresentado na Figura C.6. Supondo que o raio de curvatura do espelho seja de 5 metros, determine a posição da imagem.

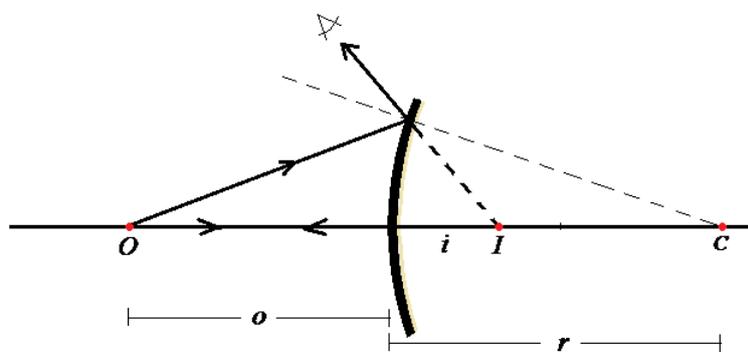


Figura C.6: Raios partindo de O refletem no espelho convexo e atingem o olho do observador, formando uma imagem em I . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Solução:

Aproveitando-se do esquema da Figura C.6, podemos resolver o exercício qualitativamente, apenas aplicando a lei da reflexão. Como a linha tracejada que parte de C é normal ao espelho e sabemos que o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo de reflexão, podemos concluir diretamente que a

imagem se formará no lado virtual, já que para o observador, é dali que parecem surgir os raios. Agora vamos determinar com **maior precisão** a posição da imagem.

Sabemos que $\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$. Dos dados do problema, temos:

$o = 20 \text{ cm}$ e $r = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$. Aplicando na expressão, obtemos:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{i} = \frac{2}{500}, \text{ ou seja, } i = -21,74 \text{ cm}.$$

Note que o sinal negativo de i apenas indica que a imagem está no lado V do espelho, sendo assim uma imagem virtual.

ALERTA:

Não esqueça! A expressão usada no exercício acima nos fornece bons resultados, mas é uma aproximação!

Você já se questionou sobre o que aconteceria se um feixe de raios paralelos (e não provindos de uma fonte puntiforme) incidisse sobre o espelho da Figura C.5? Neste caso, a imagem pontual (real ou virtual) é chamada ponto focal ou foco F do espelho. A distância focal f é a distância entre F e o vértice. Para que os raios emitidos por uma determinada fonte possam ser tratados como paralelos ao chegar ao espelho, devemos ter $o \rightarrow \infty$, ou seja, a distância do objeto deve ser muito maior que as dimensões e o raio de curvatura do espelho. Daí, como $o \rightarrow \infty$, temos $\frac{1}{o} \rightarrow 0$ e, com isso,

$$i = \frac{1}{2}r = f.$$

Substituindo na expressão que obtemos para uma fonte pontual, obtemos uma nova fórmula para os mesmos cálculos, agora não mais baseada no raio de curvatura:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}.$$

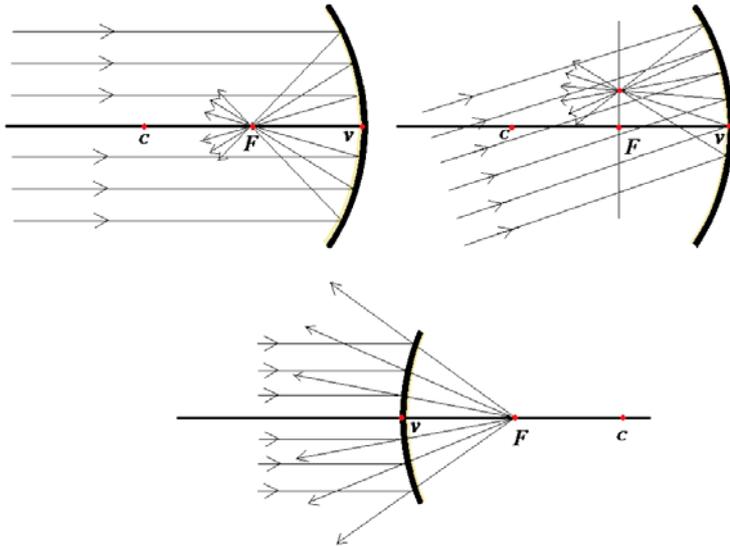


Figura C.7: Um feixe de raios paralelos incidindo sobre espelhos esféricos. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Observe a Figura C.7, onde inicialmente mostramos espelho esférico côncavo, no qual incide um feixe de raios paralelos entre si e também paralelos ao eixo de referência do espelho. Se este feixe não for paralelo ao eixo do espelho, a imagem irá se formar em algum ponto sobre um plano perpendicular ao eixo do espelho que contem o ponto focal. Se, no entanto o espelho for convexo, as situações se repetem, porém a imagem se forma no lado virtual V, de modo que as distâncias i e f serão negativas.

Podemos determinar a imagem de qualquer ponto fora do eixo de referência do espelho, como por exemplo, a ponta de uma vela, traçando três raios conforme as seguintes instruções baseadas na lei da reflexão:

- i) Um raio que atinge o espelho passando pelo centro de curvatura (diretamente ou após ser prolongado) volta sobre si mesmo, pois este raio incide normalmente no espelho;
- ii) Um raio que atinge o espelho paralelamente a seu eixo passa (ou passará, se for prolongado) pelo ponto focal;
- iii) Um raio que atinge o espelho passando (diretamente ou após ser prolongado) pelo ponto focal, reflete paralelo ao eixo.

A figura C.8 ilustra a aplicação dessas leis em espelhos côncavos (a) e em espelhos convexos (b). Note que em (a) a imagem é **real invertida**,

enquanto que em (b) a imagem é virtual, mas não muda sua orientação. Dizemos que esta imagem é **virtual direita**.

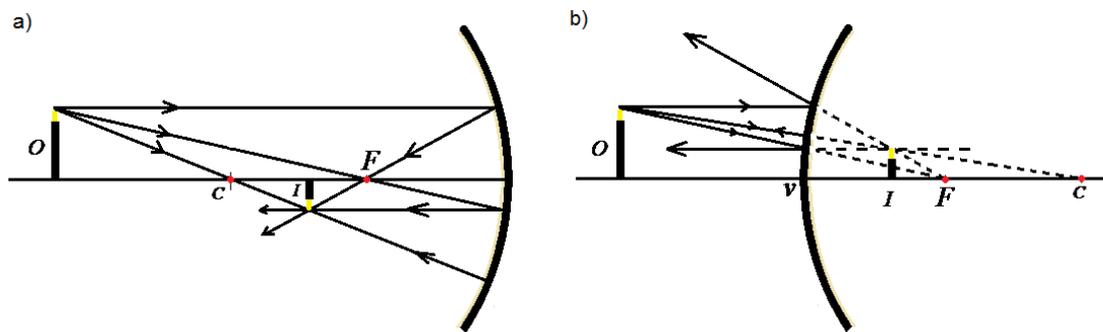


Figura C.8: Imagem de um objeto não puntiforme. Quaisquer dois dos três raios traçados são suficientes para determinar a localização da imagem. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

O leitor atento já deve ter notado que, não apenas a orientação, mas também o “tamanho” da imagem em geral não é igual ao tamanho do objeto. A Figura C.9 mostra um raio com origem na ponta de uma vela sendo refletido no vértice de um espelho côncavo e em seguida passando pela extremidade da imagem da vela. De acordo com a lei da reflexão, este raio faz ângulos θ iguais com o eixo do espelho, conforme deixamos indicado. Assim, por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{ce}{bd} = \frac{vc}{vb}$$

Se não considerarmos os sinais envolvidos, o lado esquerdo da igualdade é o que chamamos de aplicação transversal linear do espelho m . Se desejarmos representar uma imagem invertida por um aumento negativo, devemos definir:

$$m = -\frac{i}{o}$$

A equação acima fornece o aumento para espelhos planos e esféricos em todas as circunstâncias. Para um espelho plano $0 = -i$ e o aumento previsto é $m = +1$, o que indica uma imagem direita que tem o mesmo tamanho do objeto.

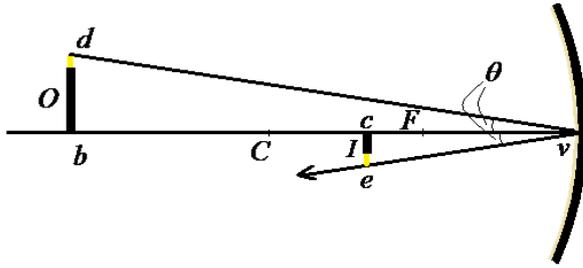


Figura C.9: Um raio qualquer partindo da extremidade da imagem e atingindo o vértice do espelho. Note que os triângulos cve e bvd são semelhantes. Usamos estes triângulos para determinar o tamanho da imagem. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

3 - Experimentos com espelhos

Os espelhos estão tão presentes em nosso cotidiano, que encontrar uma situação que ilustra os conhecimentos tratados nesta unidade é uma tarefa bastante fácil. Separamos aqui uma experiência simples e bastante corriqueira: Em que altura do piso deve-se colocar um espelho plano e qual o comprimento mínimo que este espelho deve ter para que uma pessoa de 1,70 m (mais ou menos a altura média do brasileiro) possa ver todo seu corpo refletido? A figura C.10 ilustra a questão proposta!

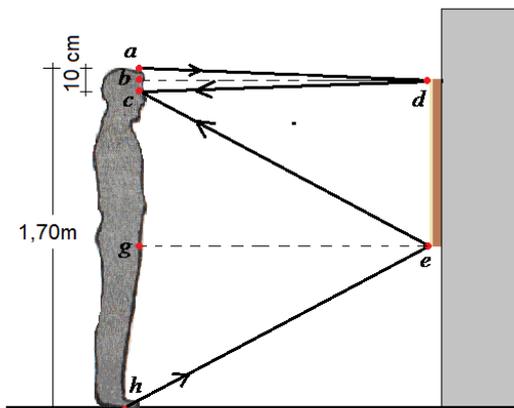


Figura C.10: Uma pessoa pode ver a imagem de todo seu corpo num espelho que tem apenas metade de sua altura. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Para examinarmos esta situação, devemos analisar as trajetórias dos raios de luz que partem dos extremos do corpo e atingem o olho do indivíduo. A Figura C.10 traz esta construção, supondo que os olhos da pessoa (ponto c) estejam 10 cm da parte superior de sua cabeça. Note que os triângulos abd e cbd são congruentes, assim como os triângulos age e cge . Note também que o

comprimento do espelho \overline{de} é igual a $\overline{bc} + \overline{cg}$. Com estas considerações, temos:

$$\overline{cg} + \overline{gh} = 170 - 10 = 160 \text{ cm}, \text{ mas } \overline{cg} = \overline{gh}, \text{ implicando } 2\overline{cg} = 160 \text{ cm ou}$$

$$\overline{cg} = 80 \text{ cm}.$$

Dos triângulos menores, temos:

$$\overline{ab} + \overline{bc} = 10 \text{ cm}. \text{ Como } \overline{ab} = \overline{bc}, 2\overline{bc} = 10 \text{ cm ou } \overline{bc} = 5 \text{ cm}$$

Logo, precisamos de um espelho com 85 cm de comprimento vertical, colocado a 80 cm do piso, o que equivale a dizer que o espelho foi colocado 5 cm mais abaixo que a altura da pessoa.

ALERTA:

Note que em nenhum momento usamos a distância da pessoa ao espelho. Assim, independente da distância e da altura h do indivíduo, se ele desejar ter um espelho em que “caiba” toda sua imagem, este espelho deve ter no mínimo

um comprimento $\frac{h}{2}$!

4 - Superfície Refringente Esférica

Na Figura C.11 mostramos uma fonte puntiforme O e uma superfície refringente (também conhecida por diótrico) esférica convexa com raio de curvatura r . Esta superfície separa os dois meios de índices de refração diferentes, n_1 e n_2 , com $n_1 < n_2$. Um raio que incide em a refrata e volta a interceptar o eixo de referência em I formando uma imagem juntamente com o raio que seguiu o eixo. Este último não é refratado porque atinge a superfície de forma perpendicular. Considerando que todos os raios que partem de O obedecem a um desses percursos, uma imagem completa de O será formada em I .

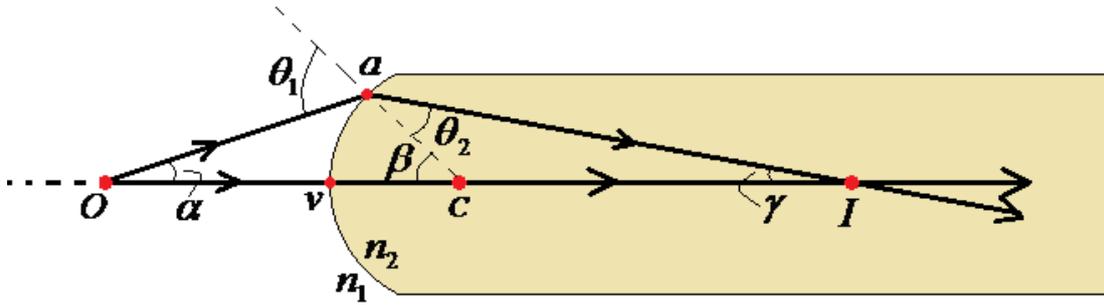


Figura C.11: Dois raios partem do objeto O e após a refração convergem numa superfície esférica, formando uma imagem real em I . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Assim como deduzimos as equações que regem a formação de imagem em espelhos, aqui também usaremos o teorema que afirma que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. Aplicando este resultado aos triângulos COa e ICa , obtemos:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad \beta = \theta_2 + \gamma.$$

Na medida em que α diminui, os ângulos β , γ , θ_1 e θ_2 definidos na Figura C.11 também diminuirão. Assim, admitindo que α e, portanto, todos os outros ângulos sejam arbitrariamente pequenos, podemos fazer a aproximação $\text{sen } x \cong x$ na lei de Snell (desde que x esteja em radianos!) e obter também

$$n_1 \theta_1 \cong n_2 \theta_2.$$

Eliminando θ_2 , encontramos $\beta = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma$. Em seguida, eliminando θ_1 , teremos

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta.$$

Trabalhando com ângulos em radianos, temos também:

$$\alpha \cong \frac{av}{v}, \quad \beta = \frac{av}{r} \quad \text{e} \quad \gamma \cong \frac{av}{i}.$$

Note que apenas a segunda equação é exata. As outras duas são apenas boas aproximações. Entretanto, para raios centrais (α suficientemente pequeno) os erros podem ser tornados tão pequenos quanto for necessário.

Unindo todos estes resultados, obtemos finalmente:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

A equação acima vale sempre que a luz de objetos puntiformes for refratada por superfícies esféricas, supondo que os raios sejam centrais.

Assim como nos espelhos, aqui também há uma convenção de sinais com a qual devemos tomar o cuidado necessário para usar esta equação de forma consistente com o , i e r . As convenções são estabelecidas baseadas no raciocínio realizado no caso particular abordado na Figura C.11. Nessa figura os raios de luz divergem de um objeto real, incidem numa superfície refratora convexa e após a refração convergem para formar uma imagem real I . Para uma situação como essa, as grandezas o , i e r tem valores numéricos positivos.

Vamos manter nossa atenção no lado do diótrico de onde vem a luz. Diferente do que acontece nos espelhos, a energia luminosa passa para o outro lado do diótrico e se uma imagem real for formada, ela deverá estar neste outro lado, que denominamos lado real R. Dessa forma, o objeto se encontra no lado que chamaremos de lado virtual V, já que apenas imagens virtuais podem se formar nele. Portanto, somos levados à seguinte convenção de sinais:

- i) A distância da imagem i é positiva se a imagem estiver no lado real do diótrico.
- ii) O raio de curvatura r será positivo se o centro de curvatura do diótrico estiver no lado real do diótrico.
- iii) Distância do objeto sempre positiva.

Assim, o diótrico da Figura C.11 é convexo. Se ele se tornar côncavo, os raios divergirão após a refração e formarão uma imagem virtual conforme veremos na Figura C.13 (exemplo resolvido), na qual também observaremos que r deve ser tratado como negativo, já que centro de curvatura está no lado virtual V. A Figura C.12 apresenta um resumo das convenções utilizadas para espelhos, diótricos e já adianta também para lentes, objeto de nossa próxima abordagem.

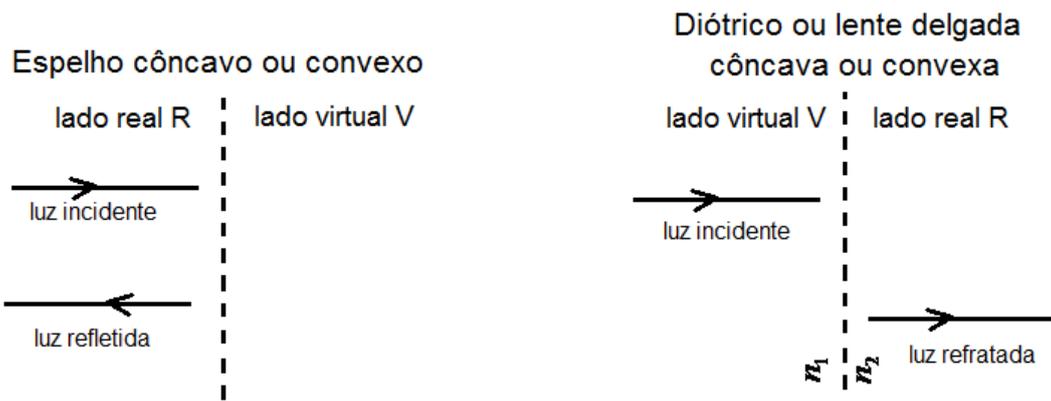


Figura C.12: As imagens reais se formam do mesmo lado da luz incidente nos espelhos e no lado oposto para os diótricos ou lentes delgadas. Isto porque a luz é refletida pelos espelhos, ao passo que é transmitida pelo diótricos e pelas lentes.

A seguir, veremos dois exemplos de aplicações dos diótricos e uma extrapolação dos resultados para uma superfície refringente plana.

Exemplo 1: Determine a localização da imagem para a construção da Figura C.11, para um objeto que se encontra a 20 cm do vértice v . Suponha que o raio de curvatura seja de 10 cm e os índices de refração sejam $n_1 = 1,0$ e $n_2 = 2,0$.

Solução:

Na teoria trabalhada acima, obtemos a expressão $\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$ e

convencionamos que os valores o , i e r são positivos para este caso. Daí,

$$\frac{1}{+20 \text{ cm}} + \frac{2}{i} = \frac{2-1}{+10 \text{ cm}}, \text{ o que resulta em } i = +40 \text{ cm}, \text{ de acordo, portanto, com}$$

a construção ilustrada. A imagem então é real, conforme já indicava a figura.

Exemplo 2: A Figura C.13 mostra um objeto imerso num meio de índice de refração igual a 1,6, sobre o eixo de referência e a 15 cm de uma superfície esférica cujo raio de curvatura é 12 cm. Determinar a posição da imagem, supondo que o índice de refração do meio externo é $n_2 = 1,0$.

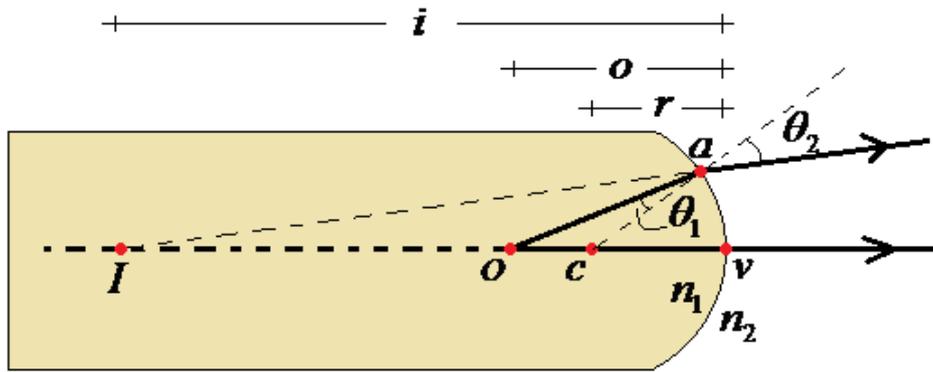


Figura C.13: Posição dos raios determinada aplicando a lei da refração no ponto a. A imagem I é determinada prolongando no mínimo dois raios no meio 1. Assim, trata-se de uma imagem virtual. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Solução:

Primeiro devemos ficar atentos à convenção! Como o objeto está dentro do diótrico, o lado real é o da direita. Assim, o centro da curvatura está no lado V, devendo pela convenção levar o sinal negativo! Também pela convenção, devemos esperar encontrar uma distância i negativa. Vamos aos cálculos!

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \text{ nos dá } \frac{1,6}{+15 \text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1 - 1,6}{-2 \text{ cm}}.$$

Isolando i encontramos $i = -17,65 \text{ cm}$, o que está de acordo com a Figura C.13 e com a convenção de sinais.

ALERTA:

Fique atento, n_1 é sempre o índice de refração do meio de onde partem os raios de luz.

Exemplo 3: Se a superfície refringente fosse plana, qual seria a relação entre as distâncias i e o ?

Solução:

Observe a Figura C.14, se o objeto está no meio menos refringente, o observador vê a imagem a uma distância maior do que o . Já quando o objeto está no meio mais refringente, o contrário acontece.

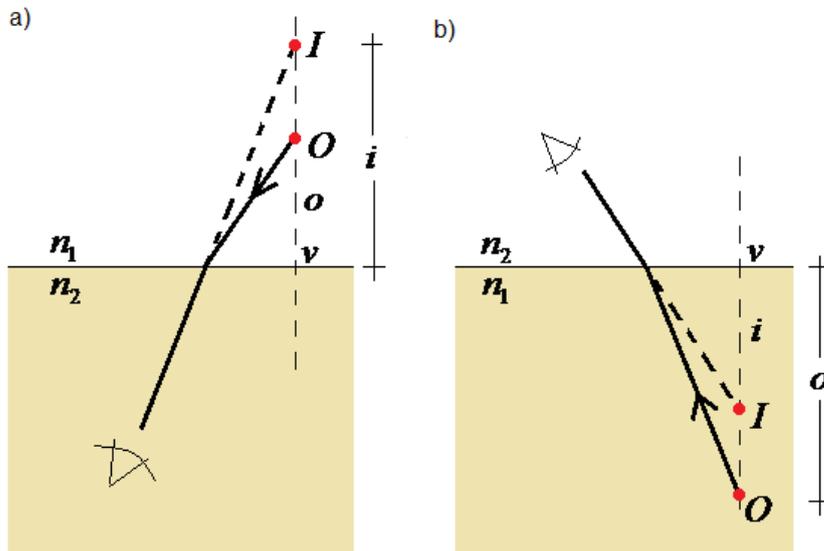


Figura C.14: Esquema ilustrativo usado para a avaliação da razão $\frac{i}{o}$ quando a superfície refringente é plana.

Uma superfície plana pode ser definida como aquela que possui raio de curvatura infinito. Fazendo $r \rightarrow \infty$, teremos $\frac{n_2 - n_1}{r} \rightarrow 0$ e assim encontraremos

$$i = -o \frac{n_2}{n_1}.$$

Note que, neste caso, a imagem I será sempre virtual!

5 - Lentes Delgadas

Em muitas situações envolvendo refração, precisamos trabalhar com mais de uma superfície sendo interceptada pela radiação. Essa é uma situação presente nos microscópios, nos telescópios e lunetas, nas máquinas fotográficas e em vários outros equipamentos que trabalham com imagens ampliadas, reduzidas ou até mesmo distorcidas.

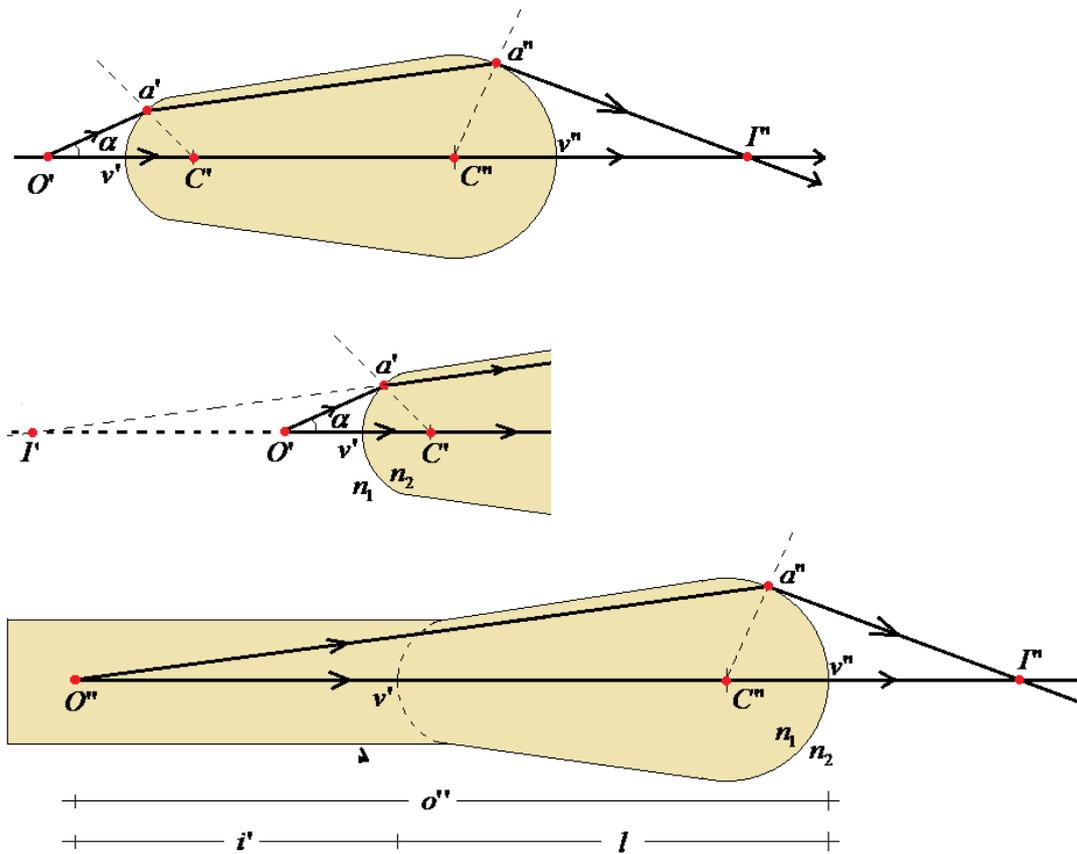


Figura C.15: Dois raios partem de um objeto pontual O' , atravessam a lente sofrendo dois eventos de refração, até convergirem novamente e formar a imagem I'' . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura C.15 traz uma lente de vidro bastante espessa, de comprimento l e com raios de curvatura $r' = \overline{C''v'}$ e $r'' = \overline{C''v''}$. Dois raios de luz partem de um objeto pontual O' , colocado ao lado da superfície esférica esquerda, conforme mostra a figura. O raio que parte de O' e segue o eixo de referência não é desviado ao entrar ou ao sair da lente, pois nos dois casos incide normalmente à superfície. Já o segundo raio que parte de O' sofre dois eventos de refração, pois atinge as superfícies fazendo ângulos α diferentes de 90° . A construção faz com que o raio refratado desvie duas vezes para a mesma direção, fazendo com que ele convirja para um ponto externo à lente e forme uma imagem real I'' .

As duas próximas construções da Figura C.15 irão nos possibilitar a determinação da posição desta imagem. A primeira superfície forma uma imagem virtual de O' em I' , cuja posição pode ser determinada usando um dos resultados da seção anterior:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Convencionando $n_1 = 1,0$, podemos tratar apenas com os valores de n_2 e reescrever

$$\frac{1}{o'} - \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r'},$$

onde fizemos $n_2 \equiv n$ e lembramos que i , neste caso, deve ser negativo. Dessa forma, o número i' terá um valor positivo, uma vez que seu sinal já foi adicionado na expressão.

A última ilustração irá abordar a segunda superfície, trabalhando como se os raios partissem da imagem virtual I' que agora funcionará como objeto O'' . A distância do objeto para a segunda superfície será, portanto, $o'' = i' + l$. Com as mesmas considerações anteriores, obtemos:

$$\frac{n}{i'+l} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}.$$

Agora suponha que a espessura l da lente da Figura C.15 seja tão pequena que possa ser desprezada ao compararmos com as demais grandezas lineares envolvidas. Podemos então fazer $l = 0$ na expressão anterior e obter

$\frac{n}{i'} + \frac{1}{i''} = -\frac{n-1}{r''}$. Unindo com o resultado encontrado para a primeira superfície,

encontramos $\frac{1}{o'} + \frac{1}{i''} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$. Finalmente, chamando de o a distância

do objeto e de i a distância da imagem final, teremos uma expressão para formação de imagens através de um objeto conhecido como **lente delgada**:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right).$$

A Figura C.16 traz as convenções de sinais para lentes delgadas. Observe que estas lentes podem fazer com que os raios converjam para um mesmo ponto formando uma imagem real ou, o contrário, fazer com que eles se afastem (divirjam) formando uma imagem virtual.

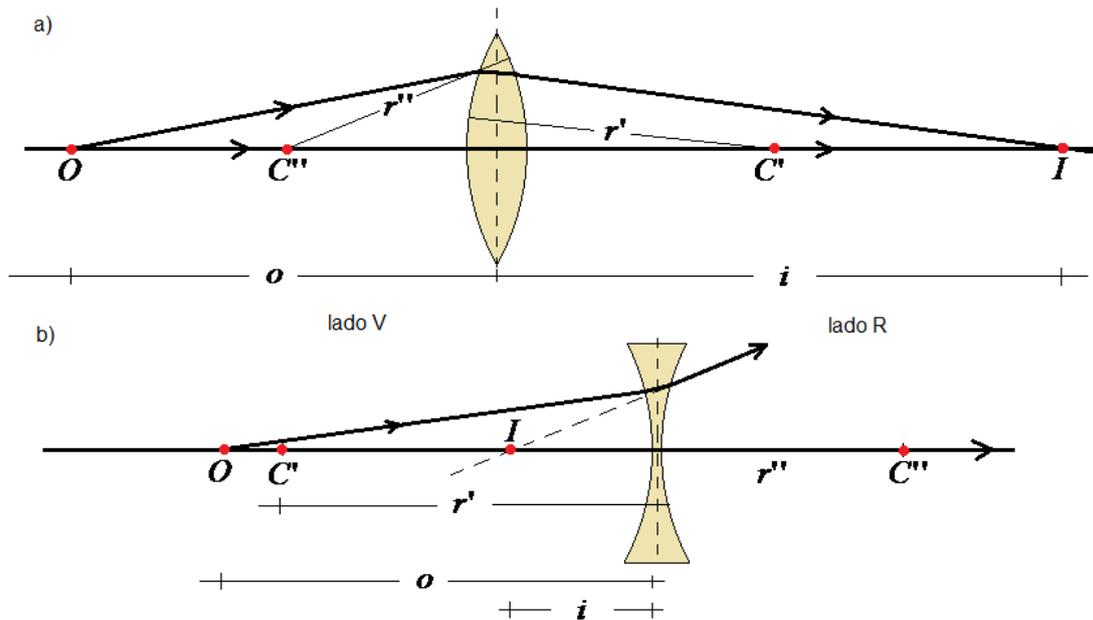


Figura C.16: Estabelecimento das convenções de sinais para lentes delgadas. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

As convenções de sinais são as mesmas dos espelhos e dos diótricos:

- i) A distância i da imagem será positiva se a imagem estiver no lado R da lente (imagem real);
- ii) Os raios de curvatura r' e r'' serão positivos se seus respectivos centros de curvatura estiverem no lado R da lente e serão negativos se seus centros estiverem no lado V.

Assim como fizemos nos espelhos, agora vamos analisar a formação de imagens usando lentes delgadas para o caso em que o objeto está muito distante, ou seja, quando os raios de luz atingem a lente paralelamente ao eixo de referência. A Figura C.17 mostra a luz paralela que vem de um objeto distante e incide numa lente delgada. A posição da imagem é o segundo ponto focal ou foco imagem F_2 da lente. O primeiro ponto focal ou foco objeto de uma lente delgada (F_1 na figura) é posição do objeto para a qual a imagem se forma no infinito. Com estas considerações, podemos reescrever a equação que deduzimos anteriormente, fazendo $o \rightarrow \infty$ e $i = f$:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right).$$

Esta equação é chamada **equação das lentes delgadas**. Combinando as duas equações, escrevemos assim a equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}.$$

No esquema central da Figura C.17, mostramos que raios paralelos que fazem um ângulo α com o eixo da lente são focalizados num ponto do plano focal definido por $F'F''$.

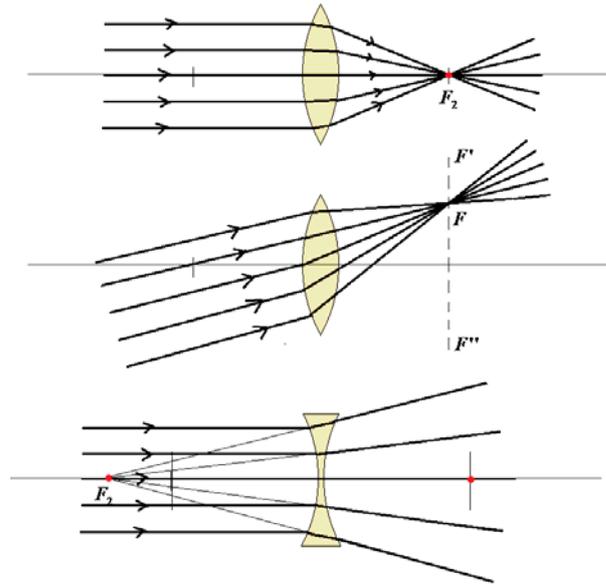


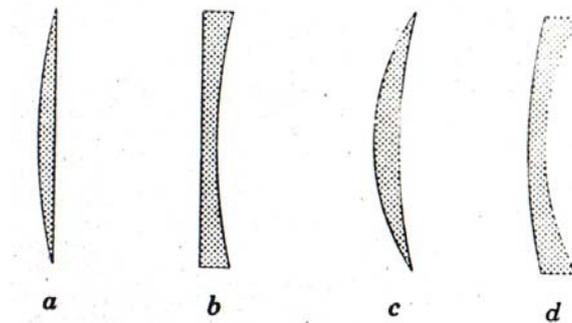
Figura C.17: Quando raios paralelos atingem uma lente convergente, uma imagem real é formada no foco F_2 ou sobre o plano focal $F'F''$. Se este feixe atinge uma lente divergente, uma imagem (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Exercícios: Unidade C

1 - Um objeto pontual está a 15 cm de um espelho plano. Se o observador está a 30cm do espelho, a que distância ele verá a imagem?

2 – Superpondo-se uma lâmina de água ($n = 1,33$) de 1,0 cm de espessura sobre uma camada com 50,0 cm de tetracloreto de carbono ($n = 1,46$).. A que distancia abaixo da superfície da água veremos o fundo. (observado com incidência normal)

3 - Usando a equação das lentes: Identifique se as lentes delgadas abaixo são convergentes ou divergentes.(Para raios incidentes paralelos).



4 – Uma lente de vidro ($n=1,48$) bicôncava tem uma das superfícies com raio de curvatura medindo 1,5 vezes o raio da outra e distância focal de 8,0cm. Calcule os raios de curvatura?

UNIDADE D – INTERFERÊNCIA

1 – A experiência de Young

Quando duas ondas de mesma frequência se propagam aproximadamente na mesma direção, com diferença de fase constante com relação ao tempo, estas ondas podem se combinar, fazendo com que a energia resultante não se distribua uniformemente através o espaço, podendo ser máxima em certos pontos e mínima em outros. Em 1801, Thomas Young demonstrou a existência do fenômeno de interferência luminosa capaz de evidenciar a **teoria ondulatória da luz** com embasamento experimental.

FIQUE ATENTO:

Nesta seção trabalharemos com a ótica física em lugar da ótica geométrica!

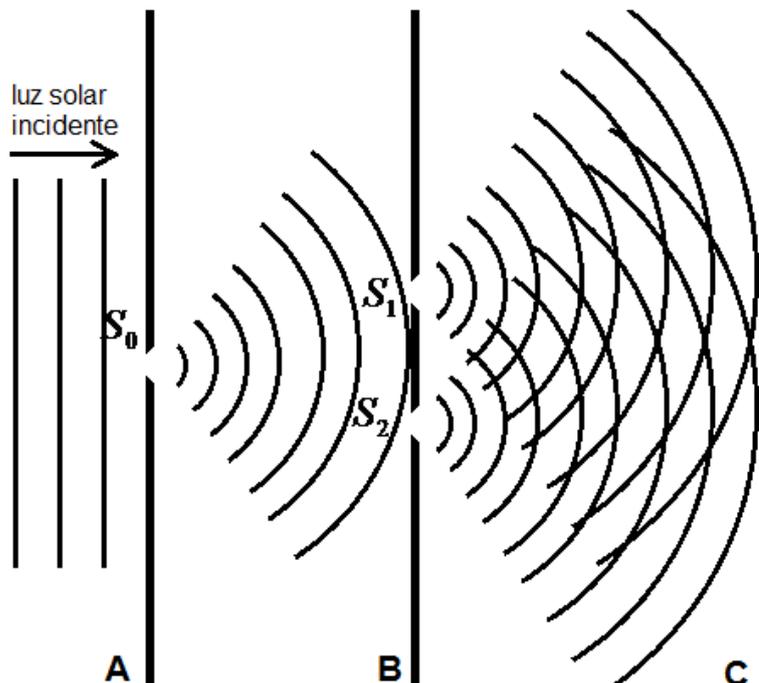


Figura D.1: Experiência de Young e espectro de interferência no anteparo C. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Na Figura D.1 apresentamos um esquema ilustrativo da experiência de Young. A luz solar incide em um pequeno orifício S_0 de um anteparo A. A luz emergente se dispersa por difração, atingindo S_1 e S_2 no anteparo B, onde um

novo fenômeno de difração ocorre. Em seguida, duas ondas esféricas se propagam superpostas a partir de B, até atingirem o anteparo C. Como já vimos anteriormente, a interferência não se limita a ondas de luz, sendo na verdade uma característica de todo fenômeno ondulatório. Na Figura D.2, trazemos uma análise da interferência construída conforme a experiência de Young. O leitor deve ficar atento que em nenhum momento restringimos o fenômeno a ondas luminosas. Vamos aos cálculos!

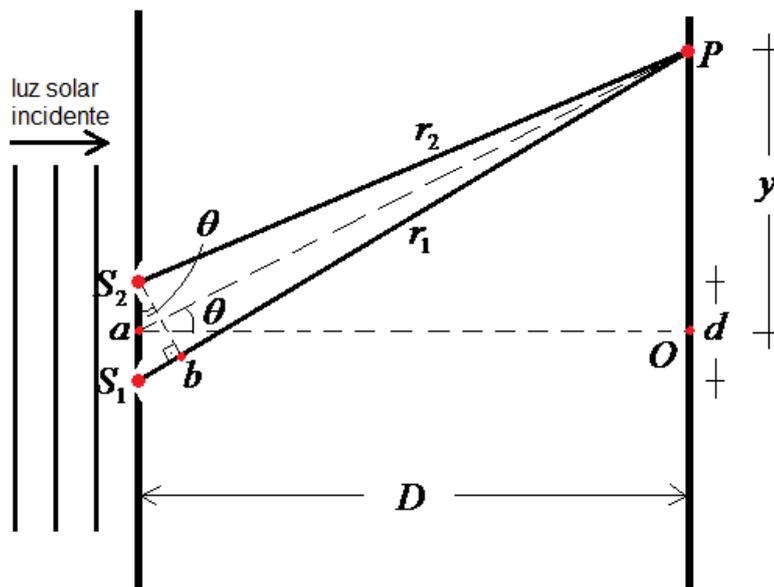


Figura D.2: Os raios de S_1 e S_2 se combinam no ponto P . Embora o desenho não mostre por estar fora de escala, esta construção é válida desde que $D \gg d$. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Supondo que a distância d da Figura D.2 seja muito menor que D , podemos considerar que o segmento $\overline{S_2b}$ seja ao mesmo tempo perpendicular a r_1 e a r_2 , ou seja, estamos considerando que os raios r_1 e r_2 seja aproximadamente paralelos. Devido à exigência $D \gg d$, muitas vezes o experimento utiliza uma lente delgada posta em frente às fendas de modo que o anteparo C fique em seu plano focal, conforme ilustramos na Figura D.3. Nestas condições, os raios r_1 e r_2 são realmente paralelos, mesmo sem satisfazer a condição $D \gg d$. Agora, observe que em ambos os casos, os dois raios incidentes em P estão em fase nas fendas S_1 e S_2 , pois ambos pertencem à mesma frente de onda plana incidente. Por outro lado, como os

raios têm percursos diferentes, eles chegam em P com uma determinada diferença de fase dada pelo número de comprimentos de onda contidos em $\overline{S_1b}$, que corresponde à diferença de percurso e determina a interferência em P . Dessa forma, observaremos um máximo P se o segmento $\overline{S_1b}$ contém um número inteiro de comprimentos de onda, ou seja,

$$\overline{S_1b} = m\lambda, \text{ com } m = 0,1,2,3, \dots.$$

Mas $\overline{S_1b} = d \cdot \text{sen } \theta$. Assim, podemos prever os máximos de interferência através da expressão

$$d \cdot \text{sen } \theta = m\lambda, \text{ com } m = 0,1,2,3, \dots.$$

ALERTA:

O leitor deve notar que para cada máximo acima do ponto P , haverá um máximo simétrico abaixo. Também convém observar que existe um máximo central definido por $m = 0$.

Agora vamos determinar os pontos que são minimamente iluminados.

Para que haja um mínimo em P , o segmento $\overline{S_1b}$ deverá conter um número “semi-inteiro” de comprimentos de onda. Em outras palavras, teremos

$$d \cdot \text{sen } \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ com } m = 0,1,2,3, \dots.$$

Quando colocamos uma lente como na Figura D.3, poderíamos supor a existência de uma diferença de fase entre os raios após passarem pelo plano que contém $\overline{S_2b}$, pois os percursos geométricos entre este plano e P são evidentemente diferentes. Entretanto, no caso de raios paralelos focalizados por uma lente, os percursos ópticos são idênticos e dois raios com o mesmo percurso óptico contêm sempre o mesmo número de comprimentos de onda, de forma que não resultará numa diferença de fase pelo fato da luz atravessar a lente. Assim, as equações que determinam os máximos e os mínimos não sofrem nenhuma alteração se o experimento for acrescido de uma lente delgada convergente.

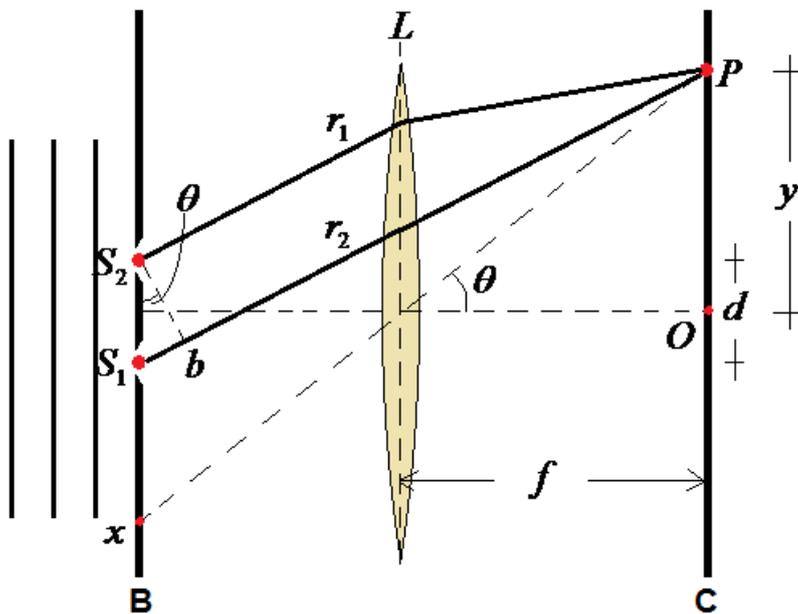


Figura D.3: Usando uma lente para produzir franjas de interferência, podemos diminuir a distância entre os anteparos. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

2 - Experimentos de interferência

Os aparatos experimentais acima devem ser construídos não apenas observando a condição $D \gg d$, mas também o fato de que a distância entre as fendas, assim como suas dimensões, devem ser da ordem do comprimento de onda da luz incidente. Nesta seção separamos um exemplo desse tipo de construção, onde realizamos a experiência de Young incidindo luz verde (luz monocromática).

Suponha que o dispositivo de fenda dupla da Figura D.2 seja iluminado por luz filtrada de forma que somente a luz verde ($\lambda = 5400 \text{ \AA}$) atinja a primeira raia. Suponha também que as fendas estão a 0,15 mm uma da outra e estão a 30 cm do anteparo onde se forma a figura de interferência. Como você determinaria a posição angular do primeiro mínimo e do décimo máximo?

Inicialmente você deve notar que o primeiro mínimo ocorrerá com o menor número semi-inteiro, ou seja, $\frac{1}{2}$. Logo, devemos fazer $m = 0$ na equação deduzida na seção anterior:

$$\text{sen } \theta = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{d} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(540 \times 10^{-9} \text{ m})}{0,15 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0,0018$$

O valor encontrado para $\text{sen } \theta$ é tão pequeno que podemos tomá-lo diretamente como o valor de θ expresso em radianos. Já em graus, teríamos $\theta = 0,103^\circ$. Quanto aos máximos, não contando o máximo central ($m = 0$), temos que o décimo máximo é dado quando fazemos $m = 10$. Agora, basta repetir o cálculo anterior e obter $\theta = 2,06^\circ$.

ALERTA:

Observe que, nestas condições, a dispersão nas franjas é muito pequena!

No caso que acabamos de descrever, qual o valor do afastamento linear existente entre dois máximos adjacentes produzidos no anteparo C? Como vimos, θ é um número muito pequeno, de modo que podemos usar a aproximação $\text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta \cong \theta$. Com isso, observando a Figura D.2, extraímos:

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{D}, \text{ o que nos dá } y = m \frac{\lambda D}{d}, \text{ com } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

As posições de dois máximos adjacentes quaisquer são dadas por

$$y = m \frac{\lambda D}{d} \text{ e } y_{m+1} = (m + 1) \frac{\lambda D}{d}. \text{ Daí,}$$

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} = \frac{(540 \times 10^{-9} \text{ m})(30 \times 10^{-2} \text{ m})}{(0,15 \times 10^{-3} \text{ m})} = 0,00108 \text{ m} = 1,08 \text{ mm}$$

Aqui concluímos que, se θ for pequeno, o afastamento entre as franjas de interferência não dependerá de m , o que indica que as franjas se dispõem uniformemente espaçadas.

ALERTA:

O leitor também deve perceber que a posição dos máximos e dos mínimos depende de λ . Isso que dizer que, se a luz incidente contiver mais que um

comprimento de onda, múltiplos espectros de interferência com espaçamentos diferentes serão superpostos.

3 - Composição de perturbações ondulatórias

Se um conjunto de ondas se propaga em certa região do espaço, sobrepondo-se num dado ponto, então a onda observada nessa região é resultado da soma algébrica de cada uma das ondas incidentes. Essa linearidade observada na composição de ondas traz resultados muito importantes. Vamos descobrir!

Dadas $E_1 = E_0 \text{sen } \omega t$ e $E_2 = E_0 \text{sen } (\omega t + \phi)$, duas as perturbações ondulatórias dependentes do tempo, com diferença de fase ϕ fixa no tempo e frequência angular $\omega = 2\pi f$. A perturbação ondulatória resultante no ponto P onde estas perturbações coexistem é dada por

$$E = E_1 + E_2.$$

Esta expressão costuma ser escrita como

$$E = E_0 \text{sen } (\omega t + \beta),$$

onde $\beta = \frac{1}{2}\phi$ e $E = 2E_0 \cos \beta = E_m \cos \beta$. A quantidade $E_m = 2E_0$ é o valor máximo possível da amplitude E .

Sabendo que a intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude ($I \propto E^2$) e lembrando que a densidade de energia em um campo elétrico é proporcional ao quadrado da intensidade desse campo, temos

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^2.$$

Combinando essas expressões, encontramos:

$$I = 4I_0 \cos^2 \beta = I_m \cos^2 \frac{\phi}{2}.$$

SAIBA MAIS:

Quando a diferença de fase entre duas não varia no tempo, dizemos que estas ondas são **coerentes** e será possível observar uma figura de interferência no anteparo C. Caso contrário, dizemos que as duas ondas são **incoerentes** e não observaremos algo como a Figura D.1(c).

Agora, volte às Figuras D.2 e D.3 da seção anterior. Relacionando a diferença de fase entre as ondas que chegam a P com a diferença de percurso $\overline{S_1b}$, podemos escrever:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\overline{S_1b}}{\lambda}, \text{ o que implica } \phi = \frac{2\pi}{\lambda} (d \cdot \text{sen } \theta), \text{ ou ainda } \beta = \frac{1}{2} \phi = \frac{\pi d}{\lambda} \text{sen } \theta.$$

Desta última expressão, podemos obter as posições dos máximos fazendo $\beta = m\pi$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, o que nos leva novamente a $d \cdot \text{sen } \theta = m\lambda$.

Do mesmo modo, fazemos $\beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ e obtemos os

mínimos de intensidade dados por $d \cdot \text{sen } \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

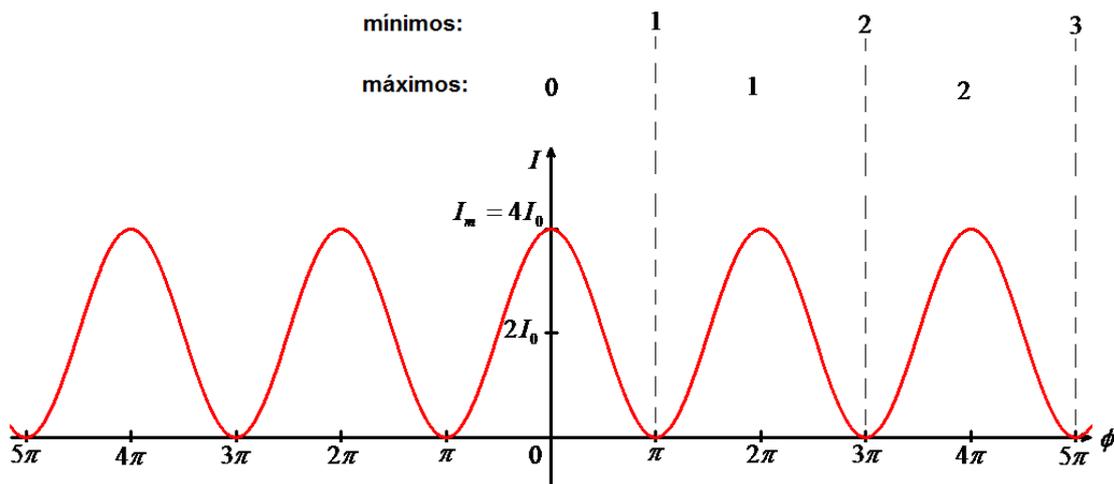


Figura D.4: Intensidades de um espectro de interferência de um experimento de fenda dupla. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura D.4 mostra o gráfico de intensidade de um espectro de interferência de fenda dupla como aqueles ilustrados nas Figuras D.2 e D.3. Em cada uma das fendas do anteparo B observamos uma fonte luminosa capaz de sozinha, manter o anteparo C com uma iluminação I_0 constante. A onda resultante terá $I_m = 4I_0$ e mínimos com $I = 0$. Se as ondas que partem do anteparo B não forem ondas coerentes, observaríamos uma iluminação constante de intensidade $I = 2I_0$ no anteparo C.

Somando mais de duas ondas:

Em algumas situações a figura de interferência será formada pela composição três ou mais ondas, bastando, por exemplo, acrescentarmos mais algumas fendas no anteparo B da Figura D.2. Do mesmo modo, em outras situações será necessário somar amplitudes individualmente infinitesimais. Nosso objetivo agora será descrever um processo gráfico bastante prático que usa vetores giratórios, denominados fasores, para obter a amplitude e a fase da onda resultante.

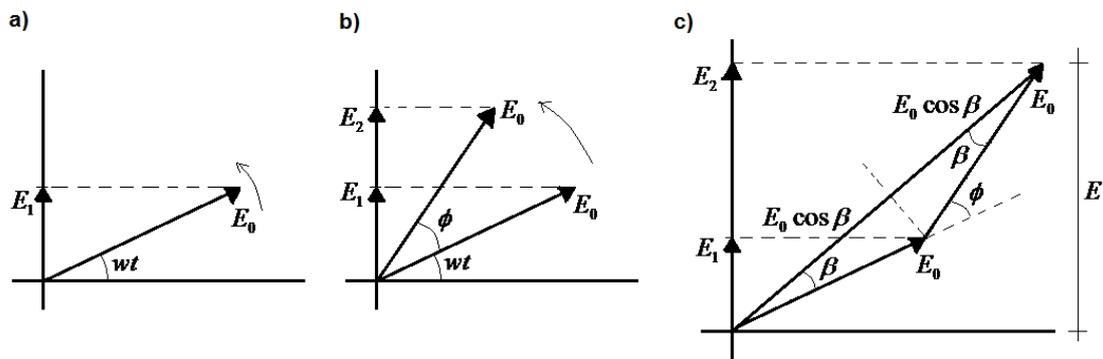


Figura D.5: Uma perturbação ondulatória E_1 é representada por um vetor giratório (fator). Em (b), representamos duas perturbações E_1 e E_2 no mesmo diagrama. Por fim, somando como fazemos com vetores, encontramos o valor da perturbação resultante E . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Usaremos a Figura D.5 para aprendermos a trabalhar com fasores. Na parte (a) representamos uma perturbação ondulatória de amplitude máxima E_0 localizada num dado ponto P . Num instante t , o fator que representa a onda terá girado um ângulo wt a partir do eixo x , que será a fase da onda e terá uma projeção $E_1 = E_0 \cos wt$ em y , correspondendo à atual amplitude da onda em P . Em (b) acrescentamos um fator representando uma segunda perturbação em P , defasada de um ângulo ϕ da primeira. Como vemos na figura abaixo, E_1 e E_2 são as projeções dos fasores sobre o eixo vertical. Estes dois fasores podem corresponder, por exemplo, as perturbações ondulatórias do problema de fenda dupla. Agora observe a parte (c)! A soma dos dois vetores giratórios gera um vetor resultante de módulo E_m , que será a amplitude máxima da onda

resultante. Usando o esquema da figura, podemos ver que essa amplitude é a soma de duas partes iguais, o que nos dá

$$E_m = E_0 \cos \beta + E_0 \cos \beta = 2E_0 \cos \beta .$$

Usando o teorema que diz que os ângulos externos de um triângulo qualquer são dados pela soma dos ângulos externos não adjacentes, vemos que $2\beta = \phi$ e assim podemos escrever

$$E_m = 2E_0 \cos \frac{1}{2}\phi .$$

Note que a fase da onda resultante é $wt + \beta = wt + \frac{1}{2}\phi$. Assim,

$$E = E_m \operatorname{sen}\left(wt + \frac{1}{2}\phi\right) .$$

SAIBA MAIS:

Agora vamos fazer o mesmo para três vetores. Para mais de três vetores, o processo é semelhante.

Vamos tomar o seguinte exemplo: vamos determinar graficamente e em seguida fazer os cálculos para encontrar a resultante da composição de três perturbações ondulatórias num dado ponto P . As perturbações são $E_1 = 20 \operatorname{sen} \omega t$, $E_2 = 20 \operatorname{sen}(\omega t + 30^\circ)$ e $E_3 = 20 \operatorname{sen}(\omega t + 45^\circ)$.

Para resolver este tipo de problema é conveniente tomar $t = 0$, calcular a soma das projeções horizontais e verticais e em seguida calcular a fase β .

Observe a Figura D.6:

$$E_h = 20 \cos 0^\circ + 20 \cos 30^\circ + 20 \cos 45^\circ ,$$

$$E_h = 20 + 20 \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 51,46 .$$

Da mesma forma:

$$E_v = 20 \operatorname{sen} 0^\circ + 20 \operatorname{sen} 30^\circ + 20 \operatorname{sen} 45^\circ ,$$

$$E_v = 20 + 20 \frac{1}{2} + 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 44,14 .$$

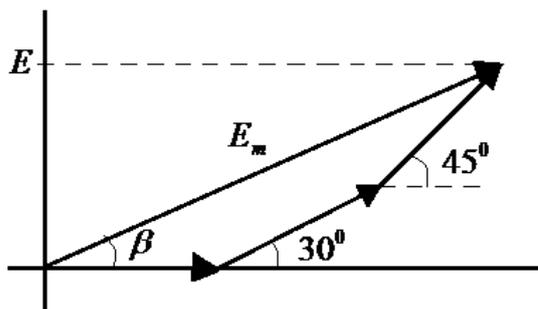


Figura D.6: Adicionando graficamente mais de duas perturbações ondulatórias. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Assim, $E_m = \sqrt{51,46^2 + 44,14^2} = 67,80$ e $\beta = \arctan\left(\frac{44,14}{51,46}\right) = 40,62^\circ$. Podemos

reescrever finalmente:

$$E = 67,80 \text{ sen}(wt + 40,62^\circ).$$

4 - Interferência em Películas Delgadas

Quando observamos a luz solar incidindo sobre uma bolha de sabão, uma mancha de óleo derramado na água ou mesmo sobre as asas de uma borboleta, as manchas coloridas que vemos são resultados da interferência dos raios refletidos pelas superfícies (anterior e posterior) do filme.

SAIBA MAIS:

Faça uma busca na web por “interferência em filmes finos” e descubra belos exemplos do fenômeno, juntamente com suas descrições teóricas!

A Figura D.7 foi construída com o objetivo de analisar a formação das imagens coloridas que você já deve ter observado em algum momento da vida ou, pelo menos, encontrado durante a busca no seu site de pesquisa favorito. Iniciaremos com o exemplo mais simples, para em seguida irmos acrescentando mais detalhes. A figura representa uma película de espessura uniforme d e índice de refração n , iluminada por raios de luz de comprimento de onda λ , emitidos por uma fonte distante o suficiente para que possamos considerá-los paralelos uns aos outros.

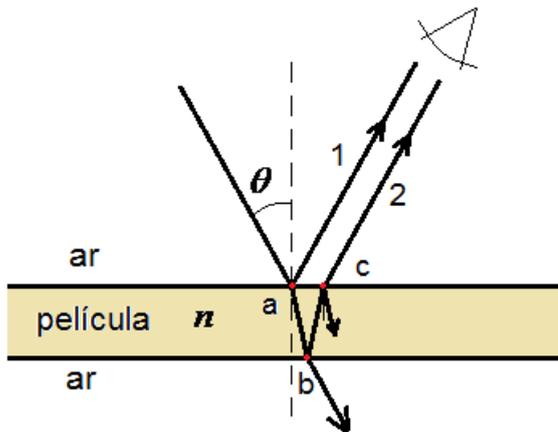


Figura D.7: Ilustração que representa a defasagem de raios de luz ao refletirem em um filme fino.

Quando o raio atinge o filme no ponto a , parte da luz é refletida e parte é refratada e terá novamente uma parte refletida e outra refratada ao atingir a superfície inferior em b , o mesmo ocorrendo em c . Em seguida, os raios 1 e 2 chegam ao olho do observador, tendo percorrido distâncias que diferem entre si por $\Delta S = 2d / (\cos \theta_{\text{refratado}})$. Como o filme é supostamente fino, para pequenos ângulos de incidência podemos admitir que esta distância é simplesmente $2d$. Se esses raios chegam em fase ao olho do observador, ele dirá que a região \overline{ac} é clara. Do contrário, chegando defasados, o observador dirá que esta região é escura. Veremos, contudo, que calcular o número de λ que cabem na diferença de percurso $2d$ não é suficiente para determinarmos se a interferência é construtiva, destrutiva, ou os dois casos apenas parcialmente. Lembre-se dos conteúdos discutidos na unidade B, se a onda incidente possui comprimento de onda λ , o meio 1 (ar) possui índice de refração $n_{ar} \approx 1$ e o meio 2 (película) possui índice de refração n , então λ da onda na película será $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$, justamente na parte diferente do percurso.

ALERTA:

Fique atento, ondas refletidas **podem** apresentar inversão de fase!

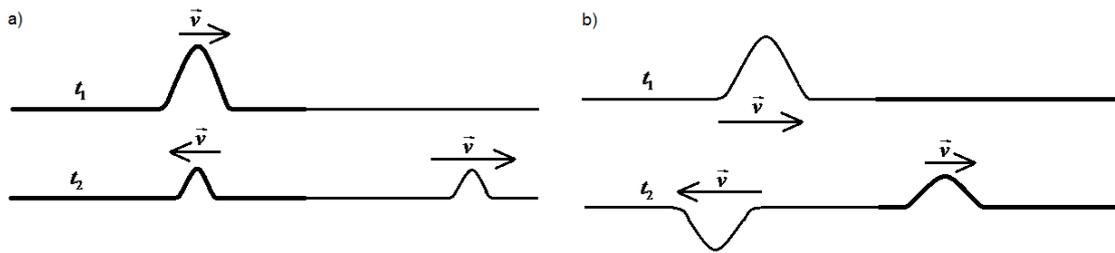


Figura D.8: Exemplo de inversão de fase em ondas refletidas. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Um segundo cuidado é ainda mais decisivo no tratamento de interferência em filmes finos. Note que o raio refletido na superfície superior sofre uma inversão de fase, enquanto que o raio refratado em a não sofre nenhuma mudança brusca de fase, nem na transmissão através da superfície superior, nem ao se refletir na superfície inferior. Para estender porque isso ocorre, observe a corda mista (corda com diferentes densidades), esticada entre dois pontos, que está ilustrada na Figura D.8. Um pulso que se move para a direita na parte (a) será parcialmente refletido e parcialmente transmitido ao atingir a união, sendo que ambos estarão em fase com a onda incidente. Por outro lado, o pulso representado na Figura D.8(b) sofrerá uma inversão de fase ao refletir, ficando defasado de 180° do pulso incidente. Isto ocorre porque a segunda metade da corda é mais densa que a primeira.

Agora voltamos aos raios luminosos da Figura D.7. Como a onda de luz se aproxima de uma superfície a partir da qual existe um meio ótico com índice de refração maior, o raio refletido terá sofrido uma inversão de fase. Contudo, na superfície inferior o raio está no meio mais refringente e não sofrerá inversão de fase. Assim, admitindo incidência “quase” normal à superfície, os raios irão se combinar formando um máximo de intensidade se

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_n, \text{ com } m = 0,1,2,3,\dots, \text{ onde a fração } +\frac{1}{2} \text{ foi colocada justamente}$$

devido à inversão de fase na reflexão. Lembrando que $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$, reescrevemos

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ com } m = 0,1,2,3,\dots \text{ para os máximos.}$$

Com o mesmo raciocínio, encontramos

$$2dn = m\lambda, \text{ com } m = 1,2,3,\dots \text{ para os mínimos.}$$

Observe que as equações que acabamos de deduzir também são válidas se o índice de refração da película for menor que o do meio, pois a inversão de fase ocorrerá na superfície inferior. Observe também que, se a espessura d da película não for uniforme e sim algo no formato de uma cunha, como ocorre em uma bolha de sabão, haverá interferência construtiva em algumas regiões e destrutiva em outras. Assim, uma mesma cor poderá ser vista em algumas regiões e em outras não e, também, cores diferentes terão interferências construtivas em regiões diferentes, o que explica o colorido das bolhas de sabão e das manchas de óleo. Vamos tratar três exemplos interessantes, sendo o último deles um problema muito famoso!

Exemplo 1:

Uma película de álcool cujo $n = 1,36$ se encontra flutuando no ar. Suponha que esta película tenha 2620 \AA de espessura, se a iluminarmos com luz branca com incidência normal, a luz refletida parecerá ter qual cor?

Solução:

Como a espessura está em angstroms (\AA), vamos resolver o problema nessa unidade de medida. A equação que dará os máximos de interferência foi deduzida há pouco. Isolando λ , teremos:

$$\lambda = \frac{2dn}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2 \cdot 2620 \cdot 1,36}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{7126,4}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} \text{ angstroms.}$$

Já a expressão para os mínimos nos dá:

$$\lambda = \frac{7126,4}{m} \text{ angstroms.}$$

Assim, máximos e mínimos ocorrem para os seguintes comprimentos de onda:

m	0 (máx.)	1 (mín.)	1 (máx.)	2 (mín.)	2 (máx.)
$\lambda (\text{\AA})$	14252,8	7126,4	4750,9	3563,2	2850,5

Note que somente o máximo correspondente a $m = 1$ situa-se na região visível. Como o comprimento de onda $4750,9$ angstroms está na região do azul do espectro eletromagnético, se usar luz branca na iluminação da película, a componente azul parecerá dominante quando vista pela reflexão.

Exemplo 2:

As lentes dos nossos óculos são freqüentemente recobertas por películas finas de substâncias transparentes como MgF_2 ($n = 1,38$) para reduzir os efeitos da reflexão na superfície do vidro. Qual a espessura mínima necessária para que essa película produza um mínimo de reflexão na cor azul do espectro visível ($\lambda = 4.750 \text{ \AA}$)?

Solução:

Admita que a luz atinja a lente com incidência quase-normal a superfície. Note que não podemos usar as equações recém deduzidas, pois haverá inversão de fase nas duas interfaces, já que $n_1 < n_2 < n_3$. Por outro lado, observe a Figura D.9. Como ambos os raios sofrem a mesma inversão, basta calcularmos quantos comprimentos λ_n cabem na distância $2d$. Se este número for inteiro, teremos um máximo. Já se esse número for semi-inteiro, teremos um mínimo.

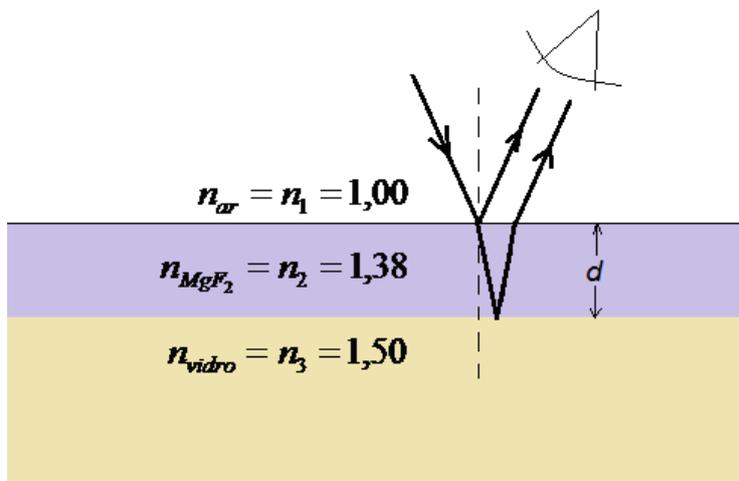


Figura D.9: Lentes anti-reflexo. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Assim, temos $2d = m\lambda_n$ ou $2dn = m\lambda$, com $m = 0,1,2,3,\dots$ para os máximos e

$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, com $m = 0,1,2,3,\dots$ para os mínimos. Como estamos

procurando um mínimo, usamos esta segunda expressão, tomando $m = 0$, já que o problema se refere a menor espessura possível:

$$d = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n} = \frac{\left(0 + \frac{1}{2}\right)4750}{2 \cdot 1,38} = 860,5 \text{ \AA}.$$

Exemplo 3:

Neste exemplo, trabalharemos com uma construção capaz de gerar uma figura conhecida como Anéis de Newton. A parte (a) da Figura D.10 ilustra uma lente de raio de curvatura R apoiada em uma lâmina de vidro plana, iluminada de cima por uma luz de comprimento de onda λ . A parte (b) ilustra o que seriam as franjas circulares de interferência (conhecidas com Anéis de Newton) associadas com a camada de ar existente entre a lente e a lâmina, cuja espessura é variável. Encontre os raios dos máximos circulares de interferência.

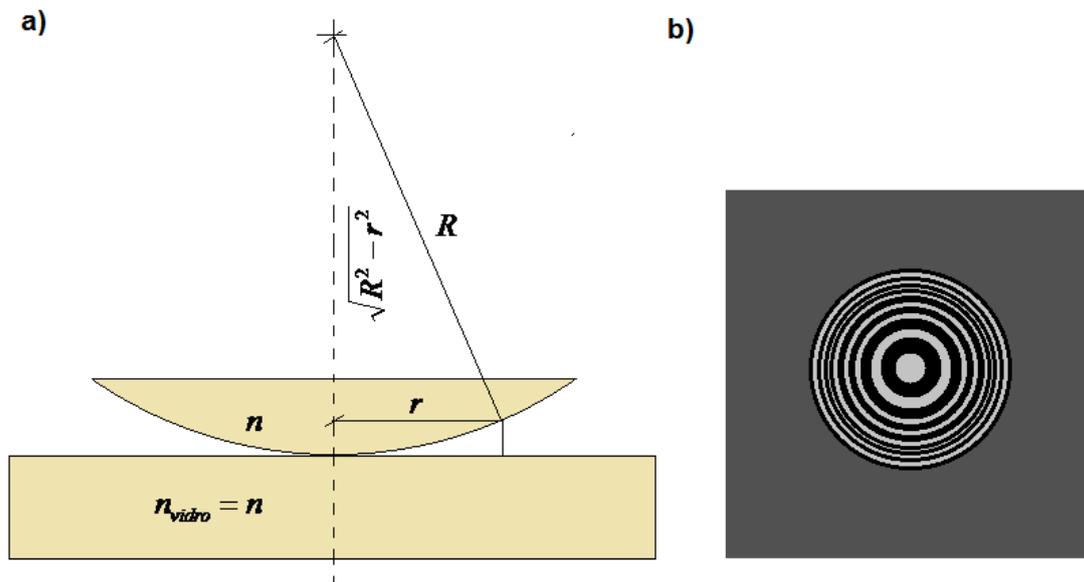


Figura D.10: Experimento que gera os chamados Anéis de Newton. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Solução:

Nessa construção, apenas o raio do fundo da película de ar sofre uma mudança de fase de 180° , pois é somente esse raio que sofre reflexão por um meio de índice de refração maior. Com isso, podemos usar diretamente as equações deduzidas nesta seção, desde que se consiga expressar a distância d em termos das dimensões da lente e do raio do anel de interferência correspondente.

$$\text{A distância } d \text{ é dada por } d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Supondo $\frac{r}{R} \ll 1$, a raiz quadrada pode ser aproximada via binômio de Newton, conservando-se apenas os dois primeiros termos. Com essa aproximação, teremos

$$d = R - R \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right] \cong \frac{r^2}{2R}.$$

Já a condição de máximo é dada por $2dn = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Finalmente, unindo estes dois resultados, encontramos:

$r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda R}$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, que fornecerá os valores dos raios dos anéis claros ilustrados na Figura D.10(b).

5 - Mudança de fase na reflexão

Nesta seção usaremos o caminho inverso da luz para estudar a reflexão produzida na interface entre dois meios. A idéia básica será de que um raio luminoso refletido ou refratado conserva sua trajetória original quando seu sentido for invertido.

A Figura D.11(a) mostra uma onda de amplitude E refletida e refratada em uma superfície que separa dois meios 1 e 2, para os quais se tem $n_1 < n_2$. A amplitude da onda refletida foi escrita como $r_{12}E$, onde r_{12} é o coeficiente de reflexão. Já a amplitude da onda refratada foi denotada por $t_{12}E$, em que t_{12} é o coeficiente de transmissão. Agora observe a Figura D.11(b) onde ilustramos a situação opticamente inversa, ou seja, os dois raios finais da parte (a) invertem seus sentidos, interagem com a interface entre os meios e deverão formar o raio de amplitude E . Para que tenhamos a situação inversa, os raios da parte inferior esquerda não podem existir, logo, suas amplitudes devem se anular. Esta condição nos informa que

$$r_{12} \cdot t_{12}E + t_{12}r_{21}E = 0 \quad \text{ou} \quad r_{12} = -r_{21}.$$

O sinal menos significa que, comparando a onda refletida pelo meio 1 com a refletida pelo meio 2, concluiremos que elas se comportam de modo diferente e

portanto uma delas sofre uma defasagem de 180° . O raio refletido pelo meio opticamente mais denso é que se defasa de 180° .

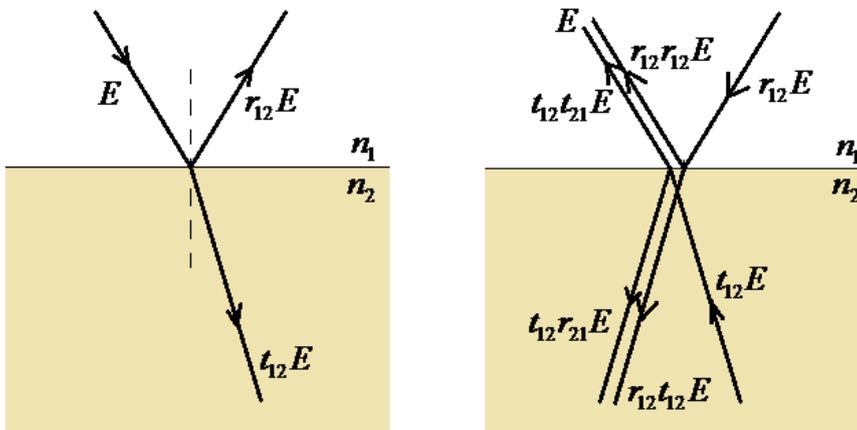


Figura D.11: Em (a) um raio é refletido e refratado em uma superfície entre o ar e o vidro. Em (b) montamos a situação opticamente inversa. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Exercícios: Unidade D

1 – No experimento de Young (fenda dupla) uma luz de uma lâmpada de vapor de mercúrio ($\lambda = 5460 \text{ \AA}$) incide no dispositivo. As fendas distam entre si $0,12\text{mm}$ e $0,35\text{m}$ do anteparo onde aparece a figura de interferência. Qual é a posição angular do quinto mínimo? E do nono máximo?

2 - Qual o valor do afastamento linear existente entre dois mínimos adjacentes produzidos no anteparo no exercício anterior?

3 - Determinar graficamente a resultante $E(t)$ das seguintes perturbações ondulatórias:

$$E_1 = 12\text{sen}\omega t$$

$$E_2 = 12\text{sen}(\omega t + 20^\circ)$$

$$E_3 = 12\text{sen}(\omega t + 40^\circ)$$

$$E_4 = 12\text{sen}(\omega t + 60^\circ)$$

Resolva também analiticamente.

4 - Uma película de água ($n = 1,33$) no ar com 3250\AA de espessura. Quando iluminada pela luz branca com incidência normal, de que cor ou cores teremos na luz refletida?

5 - Uma lente de vidro é recoberta por película fina de uma substância transparente, como MgF_2 ($n = 1,38$), para reduzir a reflexão. Qual a espessura necessária da película para produzir um mínimo de reflexão no centro do espectro visível?

UNIDADE E – DIFRAÇÃO

1 - Difração de Fresnel e difração de Fraunhofer

O desvio sofrido pela luz ao passar por um determinado obstáculo recebe o nome de difração. Embora Huygens (1629-1695) e Newton (1642-1727) conhecessem esse fenômeno, acredita-se que a difração tenha sido primeiramente descoberta pelo físico e matemático italiano Francesco Maria Grimaldi (1618-1663). Contudo, apenas no início do século XIX o físico francês Augustin Fresnel (1788-1827) partiu do princípio de Huygens e explicou a difração, supondo que a luz consistia em ondas mecânicas produzidas num meio bastante tênue, denominado éter. Logo em seguida, Maxwell (1831-1879) mostrou a natureza eletromagnética da luz e Einstein (1879-1955) eliminou a necessidade do éter.

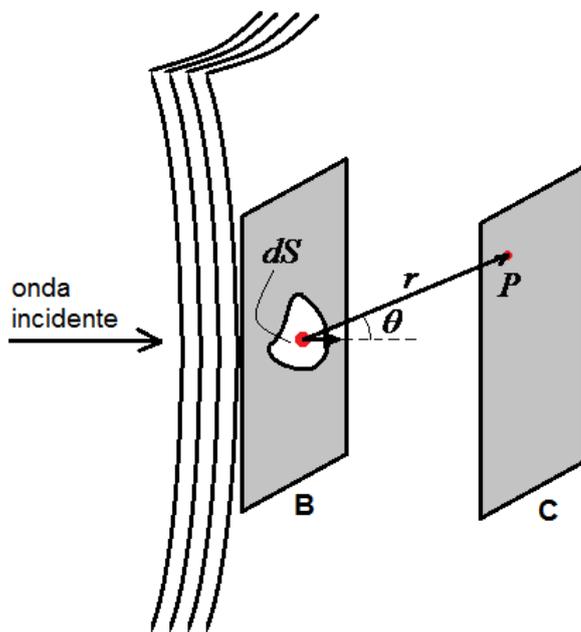


Figura E.1: A luz passa pela abertura do anteparo B, difrata, e ilumina a tela C. Se dividirmos a frente de onda que atinge B em irradiadores elementares dS , podemos combinar seus efeitos e obter a intensidade em um dado ponto P do anteparo C. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura E.1 ilustra o caso mais geral da difração. As perturbações ondulatórias que atingem o ponto P diferem em amplitude e fase porque percorrem distâncias diferentes até alcançá-lo. Chamamos de difração de

Fresnel quando a fonte de luz ou o anteparo estão a distâncias finitas, isto é, nem as frentes de onda que chegam até a fenda e nem as frentes que a abandonam a fim de iluminar um ponto P em qualquer da tela difusora serão ondas planas, de modo que os raios não podem ser considerados paralelos.

Ao se afastar a fonte S da fenda e também a fenda do anteparo C , conseguimos realizar uma grande simplificação nos cálculos. Este caso limite é chamado difração de Fraunhofer. Assim, as frentes de onda que atingem a abertura, provenientes de uma fonte S distante, são consideradas planas, e os raios associados a elas paralelos entre si. Essas condições podem ser obtidas em laboratório, desde que duas lentes convergentes estejam disponíveis.

ALERTA:

Na experiência de dupla fenda de Young admitimos que as condições de Fraunhofer fossem satisfeitas. Neste texto trataremos somente da difração de Fraunhofer.

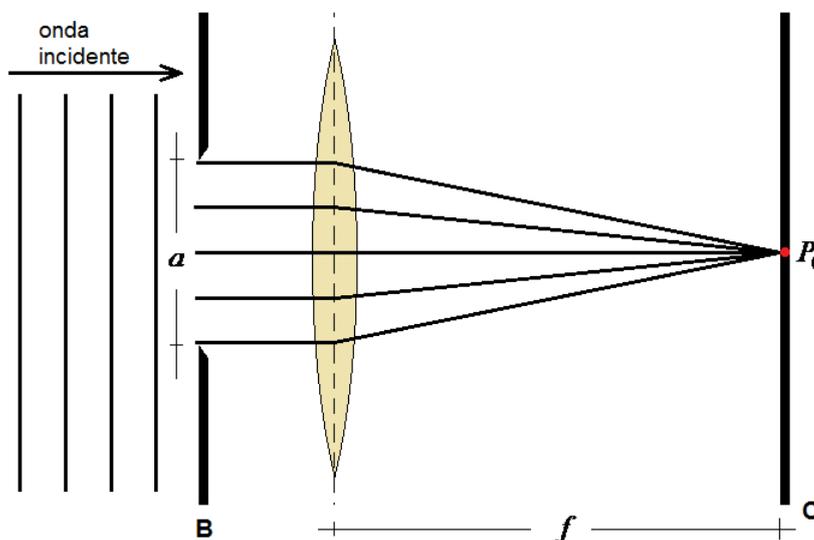


Figura E.2: Condição de máximo central do espectro de difração. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

2 - Fenda Única

Na Figura E.2, uma onda plana incide normalmente em uma fenda estreita de largura a . Em seguida, os raios (paralelos) que passam pela fenda atravessam uma lente convergente e unem-se novamente num ponto P_0 do anteparo C, colocado no plano focal da lente. Apesar de percorrerem distâncias diferentes, os raios que partem da fenda têm o mesmo percurso óptico, de modo que o ponto central do espectro de difração corresponde a um máximo de intensidade.

CONTEÚDO RELACIONADO:

Você está lembrado da definição de caminho (percurso) óptico? Em caso de dúvida, releia a seção 5 da unidade B.

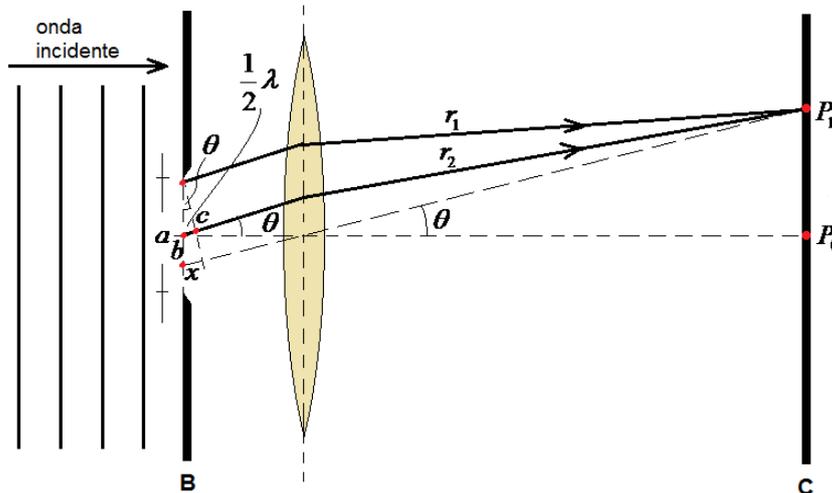


Figura E.3: Condição de primeiro mínimo do espectro de difração. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Agora observe a Figura E.3. Se o valor de θ for tal que a distância \overline{bc} seja igual a meio comprimento de onda, então os raios r_1 e r_2 estarão em oposição de fase em P_1 . Com isso, cada raio da metade superior da fenda será cancelado por outro da metade inferior dando origem ao primeiro mínimo de difração localizado em P_1 e em seu simétrico, abaixo e na mesma distância de

P_0 . Como, por construção, temos que $\hat{c} = 90^\circ$, da trigonometria do triângulo

retângulo construímos a relação $\text{sen } \theta = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{a}{2}}$, que pode ser escrita como

$$a \cdot \text{sen } \theta = \lambda \quad (\text{condição para o primeiro mínimo de difração}).$$

Vamos avançar ao longo do espectro de difração! A ilustração apresentada na Figura E.4 foi construída para nos ajudar a determinar a posição do segundo mínimo de difração. Neste caso, a fenda foi dividida em quatro zonas iguais, com um raio partindo da margem superior] de cada uma delas. Observe que a distância \overline{bc} novamente é igual a $\frac{1}{2}\lambda$. Com isso, os raios r_1 e r_2 novamente se anularão, assim como os raios r_3 e r_4 , pois estes últimos têm percursos ópticos que diferem em 1λ e $1,5\lambda$ do raio r_1 , logo também diferem entre si por $\frac{1}{2}\lambda$. Assim, podemos concluir finalmente que nenhuma luz partindo da fenda chega ao ponto P_2 , o que nos indica um segundo ponto de intensidade nula.

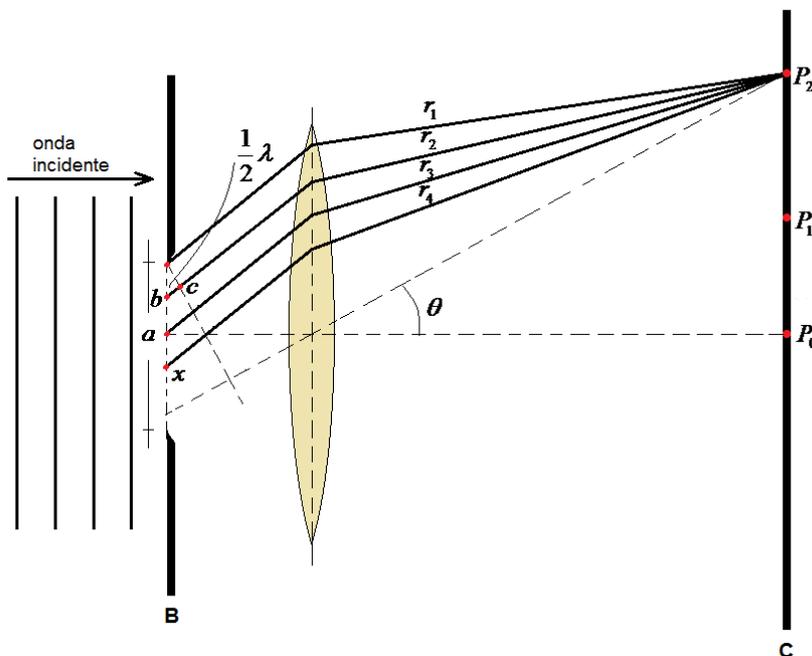


Figura E.4: Condições de existência do segundo mínimo do espectro de difração. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A condição esboçada na Figura E.4 implica $\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{\frac{a}{4}}$, que pode ser

escrita como $a \cdot \text{sen } \theta = 2\lambda$ (condição para o primeiro mínimo de difração). Com o mesmo raciocínio e construções semelhantes, conclui-se que fórmula geral dos mínimos do espectro de difração é simplesmente

$$a \cdot \text{sen } \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

ALERTA:

O leitor atento deve ter percebido que existe um máximo à meia distância entre cada par de mínimos adjacentes!

2.1 - Um estudo qualitativo da difração em fenda única

A Figura E.5 traz uma construção que utilizaremos para um tratamento qualitativo da difração em fenda única. Após estas análises, um tratamento quantitativo das intensidades dos pontos iluminados no espectro de difração será trabalhado na seção 2.2.

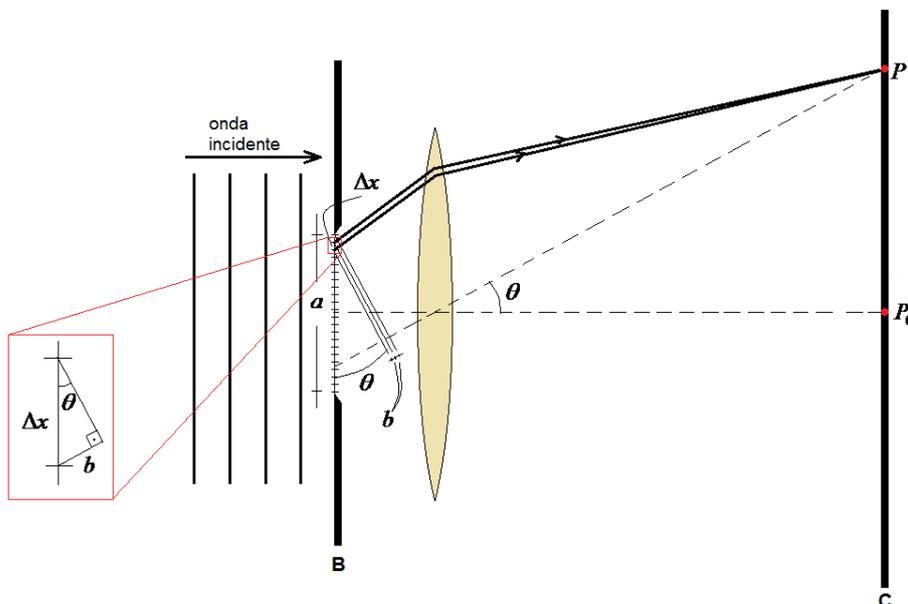


Figura E.5: Uma fenda de largura a é dividida em N trechos de largura Δx . (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Na Figura E.5 ilustramos uma fenda de largura a que foi adequadamente dividida em N trechos de largura Δx . No limite em que o número de partes é muito grande ($N \rightarrow \infty$), os intervalos Δx são suficientemente curtos, de modo que perturbações ondulatórias podem ser consideradas como iguais entre si em cada parte. Destacamos, ainda, que é possível mostrar que este processo é válido para uma fenda cujo comprimento é muito maior que sua largura a .

Agora, observe que as perturbações ondulatórias que provem de faixas adjacentes apresentam uma diferença de fase $\Delta\phi$ constante no ponto P ,

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{b}{\lambda},$$

onde, conforme a Figura E.5, $b = \Delta x \cdot \text{sen } \theta$. Dessa forma, reescrevemos a equação acima como

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Delta x \cdot \text{sen } \theta.$$

Logo, N vetores de um mesmo módulo ΔE_0 se combinam no ponto P , produzindo a perturbação resultante. Se relembrarmos do nosso estudo sobre fasores, discutido na unidade D, vemos que as perturbações ondulatórias individuais ΔE_0 podem ser representadas por esses vetores giratórios, que por sua vez podem ser diretamente somados a fim se obter o módulo do fasor resultante, aqui chamado de E_θ .

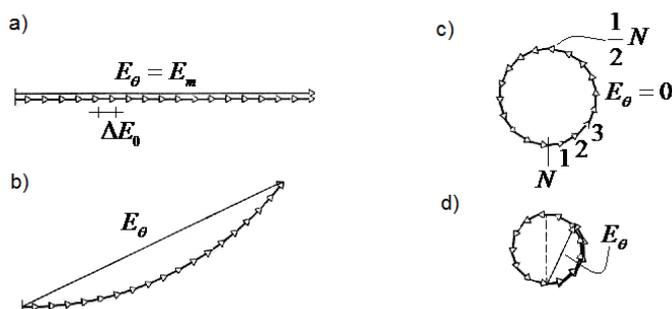


Figura E.6: Condições de difração de fenda única. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

A Figura E.6 ilustra a obtenção dos módulos de quatro vetores resultantes E_θ ligados com as intensidades das perturbações ondulatórias de

quatro pontos arbitrários do espectro de difração. No centro do espectro de difração, θ é igual a zero, de modo que a diferença de fase entre os trechos adjacentes é nula, correspondendo ao máximo central. Já para um ângulo θ diferente de zero, na medida em que θ cresce, chega-se a uma situação na qual o conjunto de setas produz um arco de 360° , correspondendo a um vetor resultante nulo ($E_\theta = 0$), ou seja, temos o primeiro mínimo de difração (parte (c) da Figura E.6). Continuando para valores com θ ainda maiores, teremos a poligonal fechada para ângulos maiores, como vemos em (d), e vetores resultantes cada vez menores.

2.2 - Um estudo quantitativo da difração em fenda única

Depois da análise qualitativa esboçada na seção 2.1, agora vamos usar os fasores para determinar quantitativamente as intensidades dos pontos do espectro de difração.

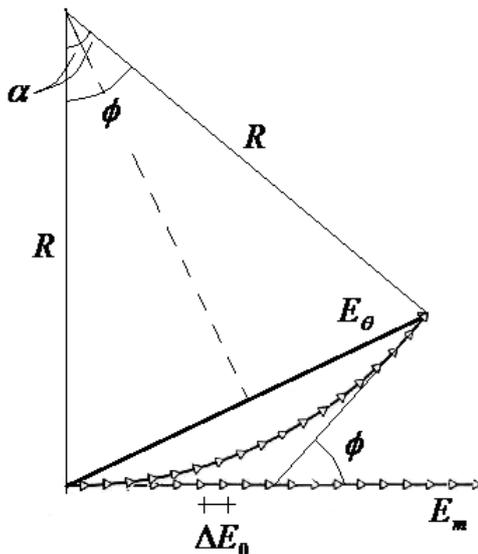


Figura E.7: Construção utilizada para o cálculo da intensidade do espectro de difração em fenda única. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

A Figura E.7 esboça fasores representativos, em módulo e fase, das perturbações ondulatórias que atingem um ponto arbitrário P . Observe que, à medida que o número N de partes da fenda cresce, o conjunto de fasores de módulos ΔE_0 tende para um arco circular de raio R , de modo que nesse limite

podemos escrever $E_m = \phi \cdot R$ (comprimento de arco do círculo). Observe também que a reta tracejada corta E_θ ao meio, bem como o ângulo ϕ . Daí,

$\text{sen} \frac{\phi}{2} = \frac{E_\theta / 2}{R}$, ou ainda, $E_\theta = 2R \cdot \text{sen} \frac{\phi}{2}$. Unindo esses dois resultados, temos:

$E_\theta = 2 \frac{E_m}{\phi} \cdot \text{sen} \frac{\phi}{2}$, que pode ser escrito como,

$$E_\theta = E_m \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha}, \quad \text{onde } \alpha = \frac{\phi}{2}.$$

Mas sabemos que a intensidade I do espectro é proporcional ao quadrado da amplitude, ou seja, $I \propto E^2$, o que nos dá

$$I_\theta = I_m \left(\frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

Agora volte à Figura E.5, de onde obtivemos $\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{b}{\lambda}$ e em seguida

$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Delta x \cdot \text{sen} \theta$. Fazendo-se uma equação para cada parte e somando

todas as larguras Δx obtidas, encontramos $\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) a \cdot \text{sen} \theta$. Logo,

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi \cdot a}{\lambda} \text{sen} \theta.$$

Em resumo, três equações regem a difração em fenda única:

$E_\theta = E_m \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha}$, $I_\theta = I_m \left(\frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2$ e $\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi \cdot a}{\lambda} \text{sen} \theta$, com mínimos ocorrendo

quando $\alpha = m\pi$, com $m = 1, 2, 3, \dots$, isto é, $a \cdot \text{sen} \theta = m\lambda$.

3 - Difração em Orifício Circular

Em nosso estudo sobre lentes nos baseamos nas hipóteses da óptica geométrica, que trata os feixes luminosos como raios, descartando a existência de difração. No entanto, uma análise mais rigorosa deve se basear, desde o princípio, nos conceitos da óptica física, uma vez que a primeira é apenas uma boa aproximação para uma grande parte dos casos.

Os feixes de luz que vem da estrela podem ser considerados paralelos, já que se trata de uma fonte puntiforme muito distante. No entanto, a imagem impressa não é um ponto como previsto na óptica geométrica, mas sim um círculo, cercado por anéis menos luminosos. Uma análise quantitativa complicada, que foge do escopo deste curso, mostra que a posição do primeiro mínimo do espectro de difração de uma abertura circular de diâmetro d , observado as condições de Fraunhofer, é dada por

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}.$$

Agora compare esta expressão com aquela que dá a posição do primeiro mínimo de difração de uma fenda de largura a , $\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a}$. A única diferença entre as expressões é o fator 1,22, resultante da forma circular da abertura.

Como as imagens produzidas pelas lentes são espectros de difração, se fossemos obter imagens de dois objetos puntiformes distantes do observador, mas com afastamento angular pequeno, devíamos ficar atentos, pois deve haver um espaçamento angular mínimo para que estes objetos sejam resolvidos! Para definir este afastamento, costuma-se utilizar o critério de Rayleigh, que afirma que a separação angular mínima das duas fontes deve ser tal que o máximo do espectro de difração de uma delas coincide com o primeiro mínimo do outro. Assim, usando a expressão anteriormente deduzida e observando que $\text{sen } \theta \approx \theta$, já que estamos trabalhando com ângulos hipoteticamente muito pequenos, concluímos pelo critério de Rayleigh que dois objetos ficam resolvidos quando sua separação angular é

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \text{ ou maior.}$$

Exemplo:

Uma lente convergente de $4,0 \text{ cm}$ de diâmetro tem distância focal $f = 100,0 \text{ cm}$. Use o critério de Rayleigh para determinar o afastamento angular mínimo de dois objetos puntiformes distantes para que se possa resolvê-los para $\lambda = 6000$ angstroms.

Solução:

A solução do problema é bastante direta. O afastamento mínimo é dado por:

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,22 \frac{6,0 \times 10^{-7} m}{4,0 \times 10^{-2} m} = 1,83 \times 10^{-5} \text{ radianos.}$$

FIQUE ATENTO:

Quando usamos uma lente para resolver objetos de pequeno afastamento angular, devemos aumentar o diâmetro da lente ou usar um comprimento de onda menor.

Freqüentemente se usa luz ultravioleta para reduzir o efeito da difração nos microscópios, já que esta possui um comprimento de onda menor que o da luz visível. Já em microscópios eletrônicos, usam-se feixes de elétrons, aos quais podemos associar um comprimento de onda da ordem de 10 vezes mais curto que o comprimento de onda da luz visível, permitindo o exame minucioso de objetos muito pequenos, tal que teriam suas imagens distorcidas pela difração num microscópio óptico.

4 - Fenda Dupla

Na experiência de Young admitimos que $a \ll \lambda$, o que implica que o centro do anteparo é uniformemente iluminado pelas ondas difratadas. Contudo, em fendas reais esta condição não é cumprida, de modo que as ondas se combinam nos diversos pontos do anteparo e têm suas intensidades governadas pelo espectro de difração.

A intensidade do espectro de interferência é dada por

$$I_{\theta, \text{int}} = I_{m, \text{int}} \cos^2 \beta, \text{ onde } \beta = \frac{\pi \cdot d}{\lambda} \text{sen } \theta. \text{ Já a intensidade da onda difratada por}$$

cada uma das fendas do anteparo é descrita por

$$I_{\theta, \text{dif}} = I_{m, \text{dif}} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2, \text{ onde } \alpha = \frac{\pi \cdot a}{\lambda} \text{sen } \theta.$$

Para o caso de um experimento de difração com duas fendas no anteparo B, observaremos o efeito combinado apresentado na Figura E.9.

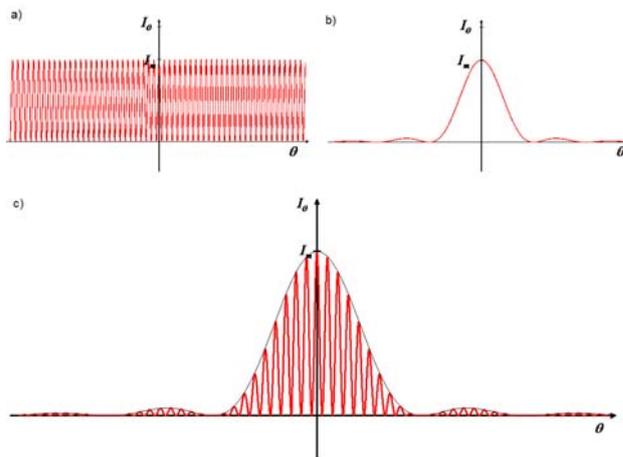


Figura E.9: Franjas de interferência produzidas por fenda dupla.

Como pode ser visto na Figura E.9, o experimento de fenda dupla (parte c) combina a interferência (a) com a difração (b). Ambos são efeitos de superposição e dependem da soma das perturbações ondulatórias em um dado ponto, levando-se em conta as diferenças de fase. Combinando as expressões que acabamos relembrar, obtemos

$$I_{\theta} = I_m (\cos \beta)^2 \left(\frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

Exemplo:

Considere a difração de Fraunhofer. Em um experimento de fenda dupla, têm-se fendas de largura $a = 0,01 \text{ mm}$, distanciadas por $d = 0,08 \text{ mm}$. Se as fendas forem iluminadas por iluminadas com luz ultravioleta de comprimento de onda $\lambda = 4000 \text{ angstroms}$, determine o espaçamento entre as franjas produzidas em um anteparo a 80 cm das fendas. Descubra também qual o afastamento linear entre o máximo central e o primeiro mínimo da envolvente das franjas.

Solução:

Volte no texto e observe a Figura D.3. A equação que deduzimos para encontrar os máximos de interferência em fenda dupla, $d \cdot \text{sen} \theta = m\lambda$, pode ser

escrita como $\Delta y = \frac{\lambda D}{d}$ para $m = 1$, pois $\text{sen} \theta \approx \text{tg} \theta = \frac{\Delta y}{D}$, se D é a distância

entre o anteparo e as fendas. Substituindo os valores numéricos do exercício, temos:

$$\Delta y = \frac{(400 \times 10^{-9} m)(80 \times 10^{-2} m)}{(0,08 \times 10^{-3} m)} = 4,0 \times 10^{-3} m = 4,0 \text{ mm}.$$

Já a distância ao primeiro mínimo da envolvente é determinada pelo coeficiente

de difração $\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}\right)^2$. Como o primeiro mínimo deste fator ocorre para a $\alpha = \pi$

$$\text{e } \alpha = \frac{\pi \cdot a}{\lambda} \text{ sen } \theta, \text{ encontramos } \text{sen } \theta = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\pi \cdot a} = \frac{\lambda}{a} = \frac{400 \times 10^{-9} m}{0,01 \times 10^{-3} m} = 0,04.$$

Este valor é tão pequeno que podemos considerar $\theta \cong \text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta$, ou seja,

$$y = D \cdot \text{tg } \theta \cong D \cdot \text{sen } \theta = (80 \text{ cm}) \cdot (0,04) = 3,2 \text{ cm}.$$

5 - Experimentos de difração

Nesta seção separamos um experimento simples envolvendo luz branca, ou seja, uma luz composta pela mistura de radiações de vários comprimentos diferentes da região do visível. Aqui vamos verificar que um máximo de difração da luz de um comprimento de onda pode coincidir como um mínimo de outra radiação.

Suponha que uma fenda difração seja iluminada por luz branca. É sabido que uma das componentes dessa luz branca é a luz amarela, cujo comprimento de onda é $\lambda = 6000$ angstroms. Se desejarmos obter um mínimo dessa luz (amarela) num ponto localizado na direção angular $\theta = 25^\circ$, como devemos proceder? Como a distância do anteparo não influencia na posição angular que fixamos, só resta ao experimentador variar a largura a .

Para obter o primeiro mínimo, devemos fazer $m=1$ na equação $a \cdot \text{sen } \theta = m\lambda$. Entrando com o valor de λ da luz amarela e isolando a , teremos:

$$a = \frac{m\lambda}{\text{sen } \theta} = \frac{1 \cdot 6000}{\text{sen } 25^\circ} = 14.197 \text{ angstroms}.$$

Agora que temos definida também largura da fenda, propomos uma segunda questão. Para qual comprimento de onda da luz incidente poderíamos, com esta configuração, obter um máximo na posição angular $\theta = 25^\circ$? Primeiramente devemos observar que este máximo estará localizado, aproximadamente, a meia distância entre o primeiro e o segundo mínimo. Com

esta hipótese podemos obter sua posição fazendo $m=1,5$ na equação $a \cdot \text{sen } \theta = m\lambda$, obtendo $a \cdot \text{sen } 25^\circ = 1,5\lambda_{\text{max}}$. Mas sabemos que

$a \cdot \text{sen } 25^\circ = 1\lambda_{\text{min}} = \lambda_{\text{amarelo}}$. Dividindo-se uma expressão pela outra, encontramos:

$1 = \frac{1,5\lambda_{\text{max}}}{\lambda_{\text{amarelo}}}$, isto é, $\lambda_{\text{max}} = \frac{\lambda_{\text{amarelo}}}{1,5} = \frac{6000}{1,5}$ angstroms. Assim, na mesma posição

angular em que obtemos um mínimo para a luz amarela, também observamos um máximo para a luz de $\lambda = 4000$ angstroms, que corresponde à luz ultravioleta.

Agora, vamos encontrar o primeiro máximo da luz amarela, desconsiderando o máximo central. Fixados novamente $m=1,5$ e $a = 14.197$ angstroms, temos que o primeiro máximo da luz amarela ocorrerá sob um ângulo θ dado por

$$14.197 \cdot \text{sen } \theta = 1,5 \cdot 6000,$$

ou seja,

$$\theta = \text{arcsen} \left(\frac{1,5 \cdot 6000}{14.197} \right) = 39,34^\circ.$$

SAIBA MAIS:

Note que a luz amarela será predominante numa direção próxima de 40° , enquanto que em 25° predominará o ultravioleta. Isso explica o colorido geralmente observado no espectro de difração.

Para finalizar, ainda podemos calcular aproximadamente as intensidades relativas dos máximos secundários do espectro de difração de Fraunhofer desse experimento de fenda única. Como já observamos, esses máximos secundários estão situados aproximadamente a meia distância entre os mínimos, podendo ser obtidos quando

$$\alpha \cong \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad \text{com } m = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo na equação que deduzimos para as intensidades:

$$I_{\theta} \approx I_m \left[\frac{\text{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} \right]^2, \quad \text{ou} \quad \frac{I_{\theta}}{I_m} \approx \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}. \quad \text{Assim, para } m=1,2 \text{ e } 3,$$

teremos

$$\frac{I_{\theta}}{I_m} = 0,045 \quad \text{e} \quad \frac{I_{\theta}}{I_m} = 0,016,$$

mostrando que a intensidade dos máximos sucessivos decrescem rapidamente, como já havíamos ilustrado na Figura E.9.

Exercícios: Unidade E

1 - Por uma fresta longa e estreita na parede de uma construção, penetra um conjunto de microondas coerentes de 4,0 cm. Supondo que essa fresta possui largura uniforme de 40,0 cm e que exista uma parede interna a 4,30 m de distância, determine a distância entre o primeiro mínimo de e o máximo central do espectro de difração projetado na parede.

2 - Qual a distância aproximada entre os primeiros máximos adjacentes para a situação do exercício anterior.

UNIDADE F – REDES DE DIFRAÇÃO E ESPECTROS

Em conexão com a experiência de Young, estudamos a interferência de duas ondas coerentes, formadas pela difração em dois radiadores elementares (orifícios ou fendas). Inicialmente trabalhamos com a hipótese de que a largura da fenda era muito menor que o comprimento de onda, de maneira que a luz difratada por cada fenda iluminava uniformemente o anteparo. Mais tarde consideramos a largura da fenda e mostramos que a distribuição de intensidade nas franjas de interferência era modulada por um fator de difração $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$. Nesta unidade estenderemos a nossa análise aos casos em que o número N de radiadores ou centros de difração seja maior que dois.

1 - Fendas Múltiplas

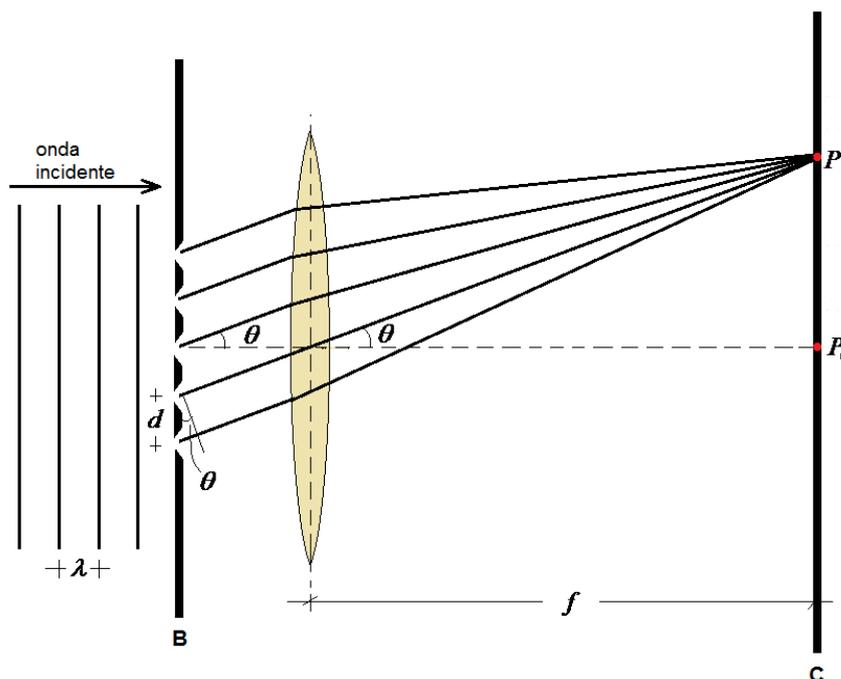


Figura F.1: Esquema representativo da ampliação da experiência de Young para múltiplas fendas. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Uma ampliação lógica do experimento de Young consiste em aumentar o número de fendas de dois para um número N muito maior. Um dispositivo como o da Figura F.1 é chamado de rede de difração. Como no caso da fenda

dupla, a distribuição de intensidades que aparece quando uma luz monocromática de comprimento de onda λ incide sobre a rede, consiste numa série de franjas de interferência. As intensidades relativas dessas franjas são determinadas pelo espectro de difração de uma fenda, o qual depende da razão $\frac{\lambda}{d}$. Esta relação também determina os afastamentos angulares entre as franjas.

A Figura F.2 permite comparar as distribuições de intensidade nos casos de $N = 2$ e $N = 5$, mostrando claramente que as **franjas de interferência** são moduladas em intensidade por um **envoltório de difração**. As curvas apresentadas são os resultados do cálculo teórico da distribuição de intensidades de algumas franjas próximas ao centro do espectro de difração. Nessa figura é possível verificar que aumentando N , a distância entre os máximos principais se mantém e estes se tornam melhor definidos, ao passo que pequenos máximos secundários são introduzidos entre eles.

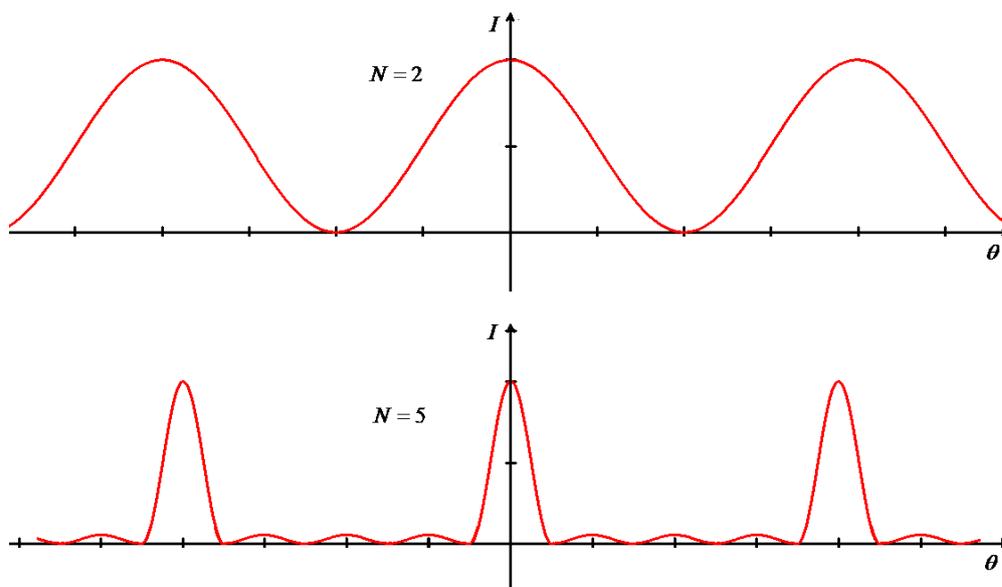


Figura F.2: Distribuições de intensidade nos casos de $N = 2$ e $N = 5$.

2 - Redes de Difração

As redes de difração são freqüentemente usadas para medir comprimentos de onda e para analisar a estrutura e a intensidade dos espectros de raios.

SAIBA MAIS:

Poucos dispositivos contribuíram mais do que as redes de difração para nosso conhecimento de física moderna. Faça uma pesquisa sobre redes de difração em seu site de busca favorito!

A Figura F.3 mostra a seção reta de um tipo comum de rede, gravada no vidro. Essa rede é totalmente transparente, de modo que há pouca variação periódica da amplitude quando a rede é atravessada por um feixe luminoso. Os sulcos mudam a espessura óptica da rede de modo alternado, fazendo com que os raios que atravessam a rede entre os sulcos contêm maior número de comprimentos de onda do que aqueles que a atravessam no centro do sulco. Isto produz uma variação periódica de fase enquanto a luz percorre a rede normalmente aos sulcos. Há um outro tipo de rede de difração, denominado rede de reflexão, que também baseia seu funcionamento na mudança periódica de fase das ondas refletidas, sendo desprezível, nessas condições, a variação da amplitude. Em ambos os casos, supondo que a luz incida normalmente à rede, os máximos principais das redes de fase são obtidos pela mesma fórmula deduzida anteriormente para redes ideais de amplitude ou de fendas

$$d \sin \theta = m\lambda .$$

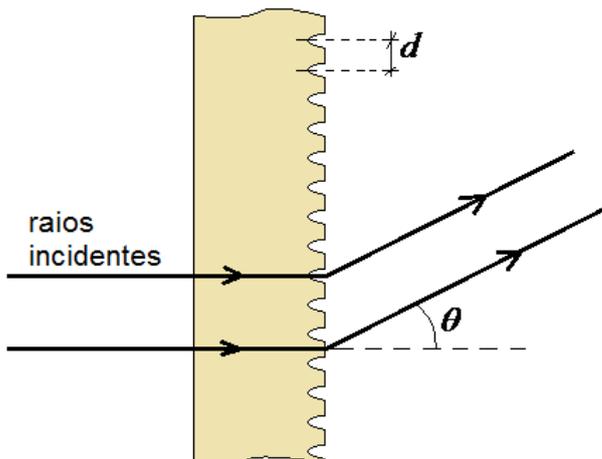


Figura F.3: Ampliação da seção reta de uma rede de difração gravada em vidro. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Os instrumentos que possuem redes de difração podem ser usados para obter medidas absolutas de comprimento de onda, já que o espaçamento d entre as fendas pode ser precisamente determinado por meio de um microscópio de deslocamento. Nos instrumentos citados costumam-se obter diversas ordens do espectro, correspondendo a $m = \pm 1, \pm 2, \dots$.

3 - Experimentos com redes de difração

A Figura F.4 mostra um exemplo rudimentar de espectroscópio de rede, usado para observar o espectro de uma fonte luminosa S que, por hipótese, emite um número discreto de comprimentos de onda, aos quais damos o nome de espectro de raios. A luz da fonte S é focalizada pela lente L_1 numa fenda a colocada no plano focal da lente L_2 . Os raios paralelos emergentes do colimador C incidem sobre a rede R . Estes raios, associados com o respectivo máximo de interferência relativo ao ângulo θ , incidem sobre a lente L_3 e são focalizados no plano $F - F'$. A imagem formada neste plano é examinada com uma lente de aumento denominada ocular.

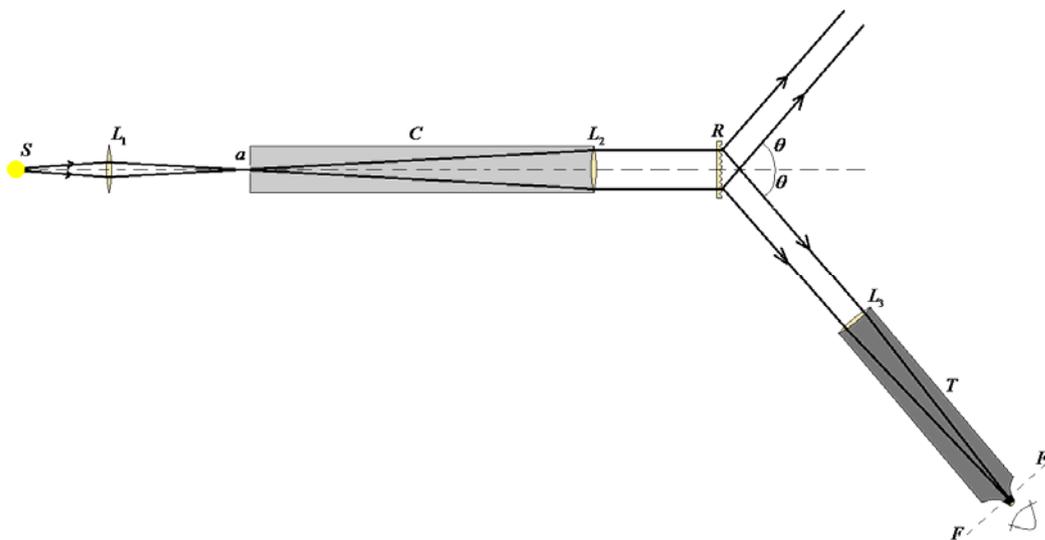


Figura F.4.: Exemplo de experimento com redes de difração. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Figura F.4 mostra ainda que, no lado oposto em relação ao eixo do colimador, forma-se um outro espectro de interferência, simétrico ao anterior, indicado pelas linhas tracejadas. Todo esse espectro pode ser observado girando-se a luneta L em torno da rede R .

Os instrumentos usados na pesquisa científica ou na indústria são mais complexos que o simples dispositivo representado acima. Invariavelmente, empregam registradores fotográficos ou fotoelétricos chamados espectrógrafos. Cabe observar também, que a luz também pode ser decomposta por um prisma, substituindo a rede de difração. Num espectrógrafo de prisma, cada comprimento de onda do feixe incidente é desviado segundo certo ângulo θ , determinado pelo índice de refração do material do prisma.

4 - Dispersão e poder de resolução de uma rede de difração

Para distinguirmos a luz com comprimentos de onda muito próximos, o máximo principal de cada um desses comprimentos de onda deve ser o mais delgado possível. O parâmetro que mede esta capacidade é denominado poder de resolução $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, onde $\Delta\lambda$ é a diferença entre os comprimentos de onda que desejamos distinguir e λ é o comprimento de onda médio das duas raias vizinhas.

O poder de resolução de uma rede é comumente avaliado pelas mesmas considerações (critério de Rayleigh) usadas para determinar o poder de resolução de uma lente. Quando dois máximos principais estão no limite de resolução, de acordo com este critério devem ter um afastamento angular M tal que o máximo de uma raia coincida com o primeiro mínimo da outra. Usando-se este critério, pode-se mostrar que $R = Nm$, onde N é o número total de linhas da rede e m é a ordem do espectro. Como era de esperar, o poder de resolução é nulo para o máximo central ($m=0$), pois os comprimentos de onda, nesta ordem, não são desviados.

O leitor não pode confundir o poder de resolução de uma rede com sua dispersão D . Uma expressão para a dispersão pode ser facilmente encontrada

derivando a relação $d \sin \theta = m\lambda$ e fazendo $d\theta \approx \Delta\theta$ e $d\lambda \approx \Delta\lambda$, obtendo-se

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \theta}, \text{ ou } D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}.$$

A Tabela F.1 traz um exemplo que mostra as características de três redes, iluminadas com uma luz de $\lambda = 5890 \text{ \AA}$, observando-se o espectro de primeira ordem ($m = 1$) da luz difratada. Note que as redes A e B têm a mesma dispersão e as redes A e C apresentam o mesmo poder de resolução. A Figura F.5 foi construída com base nos dados da tabela F.1, permitindo ao leitor entender melhor o que representam estas características.

Tabela F.1: Características de três redes distintas (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Rede	N	d (Å)	θ (graus)	R	D (10^{-3} graus/Å)
A	10000	25400	13,3	10000	2,32
B	20000	25400	13,3	20000	2,32
C	10000	13700	25,5	10000	4,64

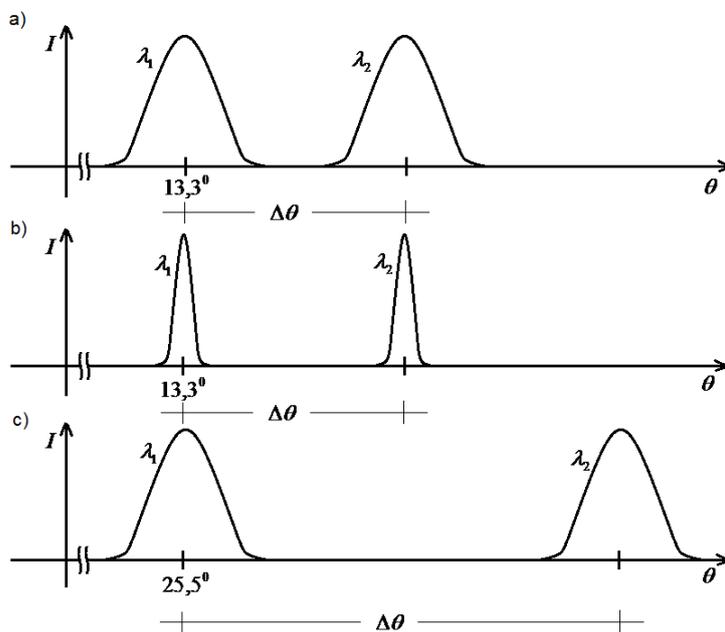


Figura F.5: Representação gráfica dos espectros obtidos com as redes de difração caracterizadas na tabela F.1. Os gráficos representam respectivamente as redes A, B, C da tabela. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

5 - Difração de raios X

Os raios X são radiações eletromagnéticas com λ da ordem de 1 Å, valor este muito menor que 5500 Å correspondentes ao centro da espectro visível. Para comprimentos de onda tão pequenos, não é possível usar uma rede de difração padrão, já que a distância entre os sulcos a serem construídos deveriam ser da ordem do espaçamento atômico dos cristais. Os raios X podem ser produzidos ao se acelerar elétrons (emitidos por um filamento aquecido) pela aplicação de uma diferença de potencial, fazendo com que estes elétrons se choquem contra um alvo metálico.

Em 1912, o físico alemão Max von Laue verificou que um cristal sólido, consistindo numa distribuição regular de átomos, poderia constituir uma “rede de difração” tridimensional (natural) para raios X. A Figura F.6 mostra que um feixe colimado de raios X, ao incidir sobre um cristal (no caso, o cloreto de sódio) produz intensos feixes, em direções bem definidas, correspondentes às interferências construtivas provenientes dos vários centros de difração que constituem o cristal.

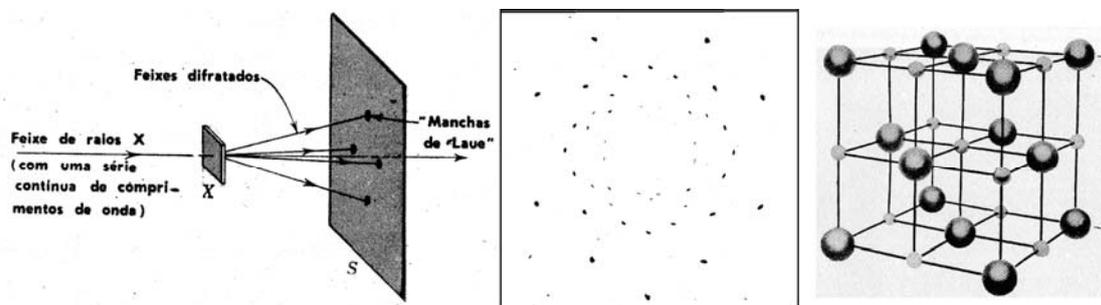


Figura F.6: Exemplo de experimento baseado na difração de raios X. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

Quando estes feixes atingem a chapa fotográfica, forma-se um conjunto de “manchas de Laue”. Da análise destas manchas, conseguimos deduzir as disposições dos átomos em um cristal e construir a figura da direita, onde mostramos como os íons de Na e Cl se distribuem em um cristal de cloreto de sódio. Com este exemplo, o leitor pode imaginar o poder dos métodos de raios X no estudo da estrutura dos sólidos.

6 - Lei de Bragg

A lei de Bragg prevê em que condições os raios X podem ser difratados por um cristal.

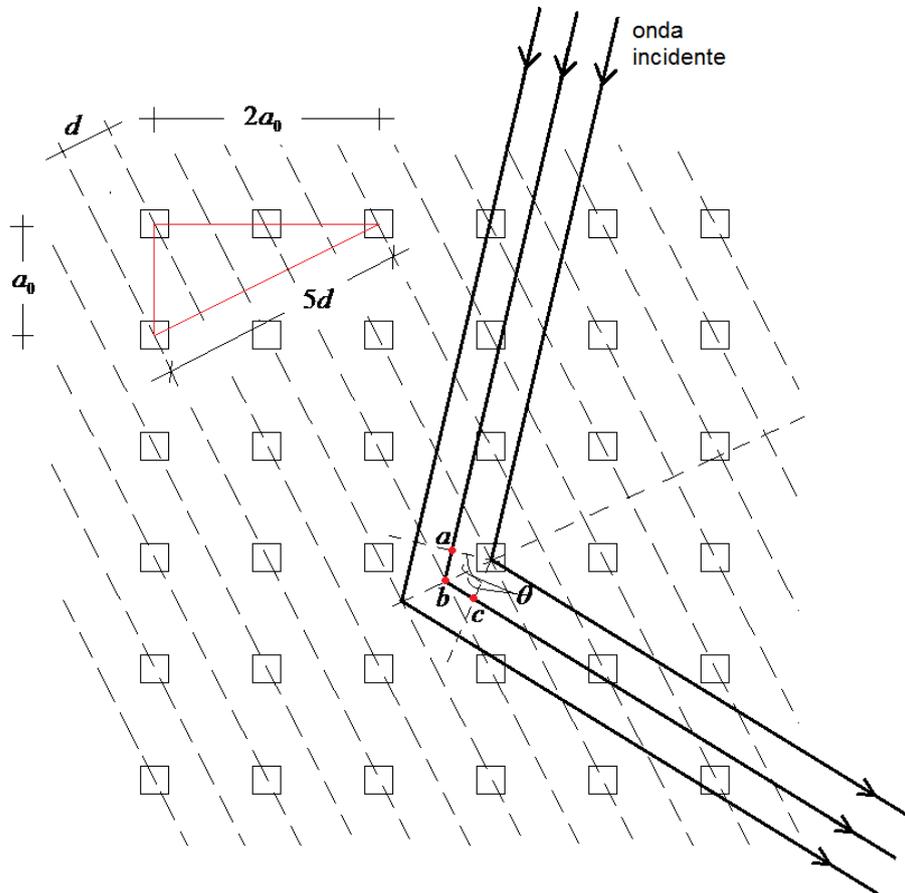


Figura F.7: Esquema ilustrativo da lei de Bragg.

Observe as linhas tracejadas da Figura F.7. Estas linhas representam as interseções de planos perpendiculares à página com o plano da figura, formando um conjunto arbitrário de planos que passam pelos centros difratadores. A distância entre os planos adjacentes é igual a d . Poderíamos considerar muitas outras famílias de planos semelhantes a esta, mas com espaçamentos interplanares diferentes. Agora observe a onda incidente na mesma família de planos esquematizada na figura. Em cada plano, ocorre uma “reflexão” especular para qualquer valor de θ . Para se ter uma interferência construtiva do feixe difratado por toda a família de planos na direção θ , os raios X de cada plano devem se reforçar uns aos outros. Isto significa que a

diferença de percurso a-b-c entre os raios vindos de planos adjacentes deve ser igual a um número inteiro de λ da onda incidente, ou seja, $2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, $m = 1, 2, 3, \dots$, causando uma interferência construtiva. Esta relação é chamada lei de Bragg, em homenagem a W.L. Bragg, quem primeiro a deduziu.

Analisando-se os planos da Figura F.7 constatamos que d está relacionado com a dimensão a_0 da célula unitária por $d = a_0 / \sqrt{5}$.

Exemplo. Encontre o ângulo com o qual um feixe de raios X com $\lambda = 1,10 \text{ \AA}$ deve incidir numa família de planos como a ilustrada na Figura F.7, para que seja observado um feixe difratado. Suponha que o material seja o cloreto de sódio, cujo valor de a_0 é igual a $5,63 \text{ \AA}$.

Solução:

Observe que $d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = 2,52 \text{ \AA}$. Em seguida, vamos encontrar θ :

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{m\lambda}{2d} = \frac{m(1,10)}{2 \cdot 2,52} = 0,218m. \text{ Ou seja, ocorrerão feixes difratados quando}$$

$\theta = 12,6^\circ$, $\theta = 25,9^\circ$, $\theta = 40,9^\circ$ e $\theta = 60,7^\circ$, $m = 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente.

Note que não podem existir ordens maiores que 4, pois isto acarretaria em $\operatorname{sen} \theta > 1$.

Exercícios: Unidade F

1 – Uma rede de difração com 1950 linhas por centímetro é iluminada por luz solar. Suponha que a incidência é normal a rede. Encontre o ângulo que determina a posição do primeiro máximo da luz vermelha. Use $\lambda_{\text{vermelho}} = 6400$ angstroms.

2 – Uma rede de difração é calibrada com a luz proveniente de um laser com λ de 6330 angstroms. Supondo que o primeiro máximo aparece sob um ângulo de 24 graus, determine a distância entre as ranhuras que formam a rede.

3 - No exercício anterior, use os dados e os valores calculados para determinar a posição angular do primeiro máximo da luz vermelha $\lambda_{\text{vermelho}} = 6400$.

UNIDADE G – POLARIZAÇÃO

1 - Polarização

A teoria eletromagnética considera a luz e todas as demais radiações eletromagnéticas como ondas transversais, tendo direções de vibração do campo elétrico e do campo magnético perpendiculares à direção de propagação, e não paralela a esta como acontece com as ondas longitudinais. As bases experimentais para demonstrar que as ondas luminosas são transversais foram fornecidas por Thomas Young em 1817.

As ondas transversais representadas na Figura G.1 possuem a característica adicional de serem plano-polarizadas, isto é, as vibrações do vetor \vec{E} são paralelas entre si em todas as posições ao longo da onda. Em cada um desses pontos, o vetor vibratório \vec{E} e a direção de propagação determinam um plano, chamado plano de vibração. Em uma onda plano-polarizada todos esses planos são paralelos.

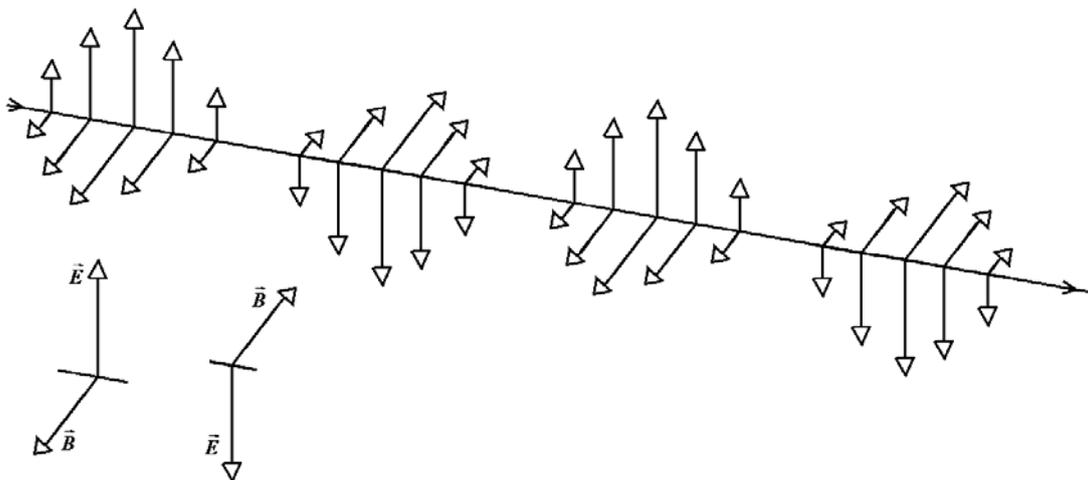


Figura G.1: Representação dos vetores \vec{E} e \vec{B} de uma onda plano-polarizada, propagando-se da esquerda para a direita. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY 1969).

Numa onda transversal plano-polarizada é necessário especificar duas direções, a direção da perturbação ondulatória e a direção de propagação. Numa onda longitudinal essas duas direções coincidem entre si. No caso das

ondas transversais plano-polarizadas podemos esperar, portanto, que haja uma **assimetria** em torno da direção de propagação, o que fica evidente ao analisar microondas e ondas de rádio e TV. Estas ondas são geradas pelo movimento de vaivém das cargas do dipolo que constituiu a antena transmissora, produzindo um vetor campo elétrico paralelo ao eixo do dipolo. Quando esta onda plano-polarizada atinge um segundo dipolo, ligado a um detector, a componente elétrica oscilante da onda colocará alguns elétrons da antena receptora em movimento de vaivém, produzindo uma leitura no detector. No entanto, girando-se a antena receptora em torno da direção de propagação, a leitura do detector cai a zero em alguma posição, onde o campo elétrico não conseguirá deslocar as cargas ao longo do eixo do dipolo por ser perpendicular a ele.

SAIBA MAIS:

É por este motivo que alinhamos a antena da TV ou do rádio de acordo com determinadas direções, com o objetivo de obter um sinal de melhor qualidade.

As fontes comuns de luz visível diferem das fontes de ondas de rádio e de microondas pelo fato de os radiadores elementares, isto é, os átomos e as moléculas, agirem independentemente entre si. A luz por eles emitida consiste de trens de ondas independentes, cujos planos de vibração se acham distribuídos ao acaso em torno da direção de propagação. Devemos, assim, conseguir um meio de separar os diversos planos de vibração para examinar esta propriedade.

2 - Lâminas Polarizadoras

A Figura G.2 mostra uma luz não-polarizada incidindo sobre uma lâmina de um material polarizador existente no comércio, chamado Polaróide. A lâmina possui certa direção característica de polarização, indicada pelas linhas paralelas. A lâmina transmite apenas as componentes dos trens de ondas cujos vetores elétricos vibrem paralelamente a esta direção e absorve aquelas cujos vetores elétricos vibrem normalmente aos primeiros. A luz emergente será, portanto, plano-polarizada.

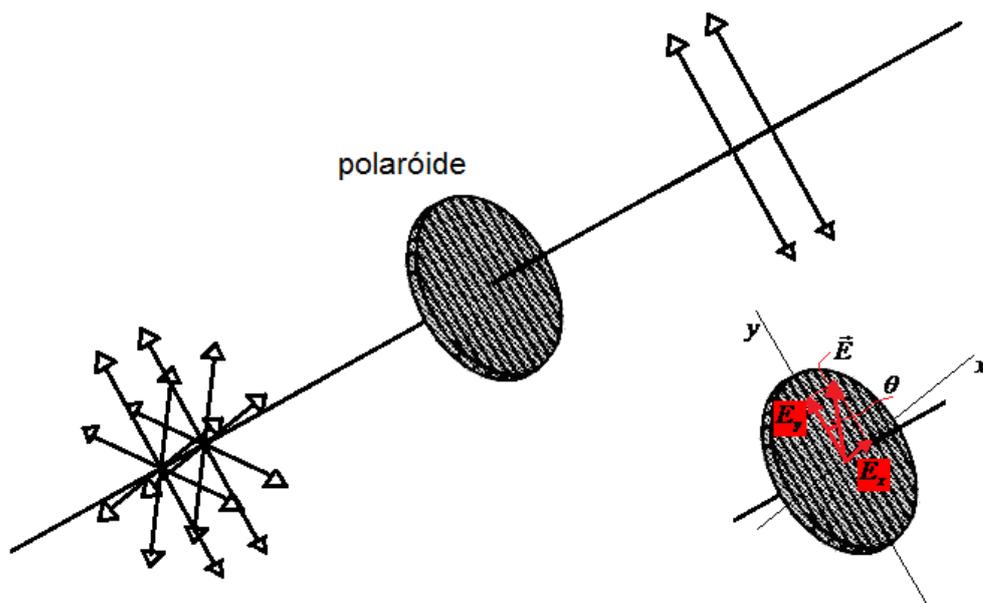


Figura G.2: Polarização de uma onda eletromagnética por meio de uma lâmina polarizadora. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Buscando compreender como a lâmina atua, dividiremos o vetor \vec{E} em duas componentes $E_x = E \sin \theta$ e $E_y = E \cos \theta$, conforme está representado na Figura G.2. A lâmina absorverá totalmente a componente E_x e transmitirá a componente E_y . Com o objetivo de verificar a direção de polarização de uma onda, coloca-se no trajeto luminoso uma segunda lâmina. Pode-se mostrar que a intensidade da onda transmitida é dada pela expressão

$$I = I_0 \cos^2 \theta ,$$

conhecida como lei de Malus. Nesse caso, I_0 é a intensidade da onda incidente na segunda lâmina e θ é o ângulo entre as direções de polarização da onda incidente e da lâmina polarizadora. Essa expressão exprime precisamente a ausência de simetria existente em torno da direção de propagação apresentada pelas ondas transversais plano-polarizadas, efeito que não se observa em ondas longitudinais.

3 - Polarização pela Reflexão

Em 1809 Malus mostrou que a luz poderia ser parcialmente ou completamente polarizada pela reflexão. Quem teve a oportunidade de olhar para os reflexos do sol na água usando óculos fabricados com lâminas polarizadoras, certamente já notou esse efeito. Basta, apenas, inclinar a cabeça para um dos lados girando, portanto, os polarizadores, para constatar que a intensidade da luz solar passa por um mínimo!

A Figura G.3 representa um feixe de luz não-polarizada incidindo sobre uma superfície de vidro. O vetor \vec{E} de cada trem de onda do feixe pode ser decomposto em duas componentes σ e π , a primeira perpendicular ao plano de incidência e a segunda contida neste plano. Determina-se experimentalmente para o vidro (e para outros materiais dielétricos) certo ângulo de incidência, chamado ângulo de polarização θ_p , para o qual se anula o coeficiente de reflexão da componente π . Isto significa que o feixe refletido, embora de baixa intensidade, se torna plano-polarizado, com o plano de vibração perpendicular ao plano de incidência.

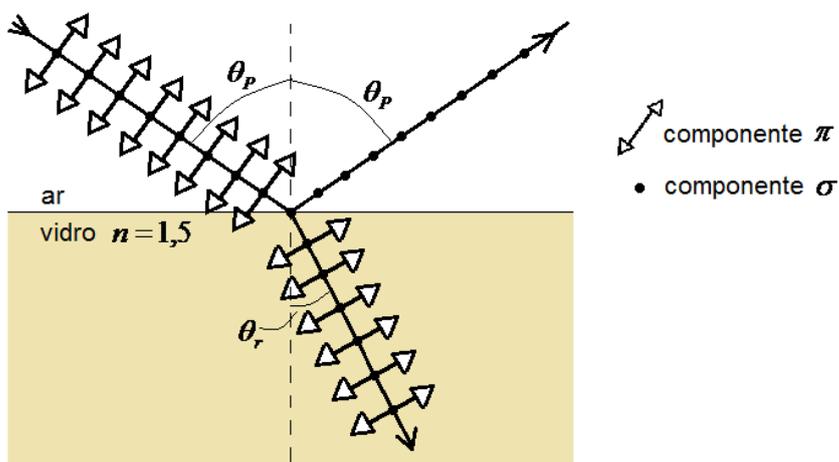


Figura G.3: Polarização por reflexão. Quando $\theta_p + \theta_r = 90^\circ$, o que implica via lei de Snell que $\theta_p = \arctan \frac{n_2}{n_1}$, a onda refletida é totalmente polarizada numa direção perpendicular ao plano de incidência. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY, 1969).

4 - Espalhamento da luz e dos Raios X

Um feixe luminoso, ao incidir sobre um sólido transparente, provoca neste sólido uma oscilação periódica dos elétrons em resposta ao vetor elétrico ondulatório, variável com o tempo. A onda que se propaga através do meio é uma resultante da luz incidente e das radiações provenientes da oscilação dos elétrons. A onda resultante tem uma intensidade máxima na direção do feixe incidente, diminuindo rapidamente para os lados. A falta de espalhamento lateral, que seria essencialmente completo num grande cristal “perfeito”, deve-se ao fato de que as cargas oscilantes no meio agem cooperativamente e coerentemente. Já quando um feixe luminoso atravessa um gás, produz-se muito maior espalhamento lateral, uma vez que os elétrons oscilantes encontram-se relativamente afastados entre si e não estão ligados a uma estrutura rígida, agindo de modo independente, sem nenhuma interação apreciável.

A luz espalhada lateralmente por um gás poderá estar total ou parcialmente polarizada, mesmo que o feixe incidente seja não-polarizado. É muito fácil verificarmos olhando através um polarizador (como, por exemplo, óculos escuros) que a luz de um céu sem nuvens está pelo menos parcialmente polarizada.

Também por meio de uma experiência de polarização, foi possível mostrar que os Raios X também eram ondas transversais e não partículas como se chegou a especular logo que foram descobertos.

5 – Experimentos de polarização

Quando os raios X foram descobertos em 1898, houve muita especulação a respeito da sua natureza, se consistiam em ondas ou partículas, até que Charles Barkla (1877-1944) mostrou que se tratava de ondas transversais. A Figura G.4 apresenta um esquema da experiência realizada por Barkla para demonstrar este fato.

Ao atingir o bloco de espalhamento S_1 da Figura G.4, o feixe de raios X não-polarizado que parte da fonte S faz com que os elétrons deste bloco

entrem em movimento oscilatório. De acordo com as considerações da seção anterior, os raios X espalhados em direção ao segundo bloco devem ser plano-polarizados. Fazendo com que esta onda seja espalhada por um segundo bloco, vamos examinar a radiação resultante utilizando um detector D, que descreve uma circunferência contida em um plano perpendicular à reta que une os centros dos dois blocos. Note que os elétrons oscilarão todos paralelamente entre si, de modo a produzirem intensidades, nula e máxima, nas posições indicadas na figura. Registrando-se em um gráfico as leituras do detector em função dos valores do ângulo, confirmaremos a hipótese de que os raios X são, de fato, ondas transversais.

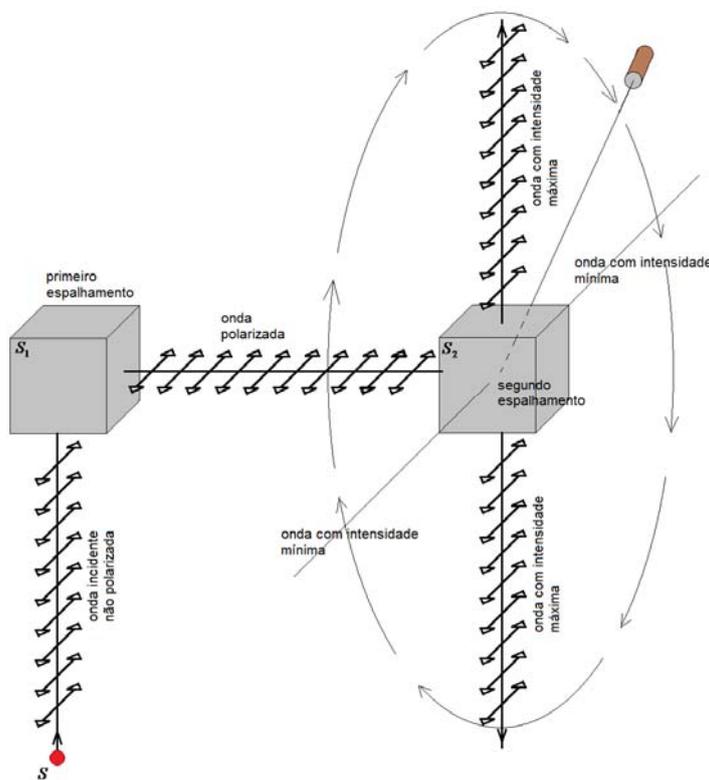


Figura G.4: Espalhamento e duplo espalhamento da luz. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

Caso os raios X consistissem em um feixe de partículas ou fossem uma onda longitudinal, os efeitos aqui descritos seriam totalmente incompreensíveis. Nessas bases, a importante experiência de Blarka revela que os raios X compõem uma parte do espectro eletromagnético.

6 - Dupla Refração

Nas últimas unidades supomos que a velocidade da luz, assim como o índice de refração, não dependia da direção de propagação através do meio e do estado de polarização da luz. No entanto, este comportamento só é observado nos líquidos, nos sólidos amorfos como o vidro e nos sólidos cristalinos de simetria cúbica, todos denominados opticamente isotrópicos. Muitos outros sólidos cristalinos, contudo, são opticamente anisotrópicos.

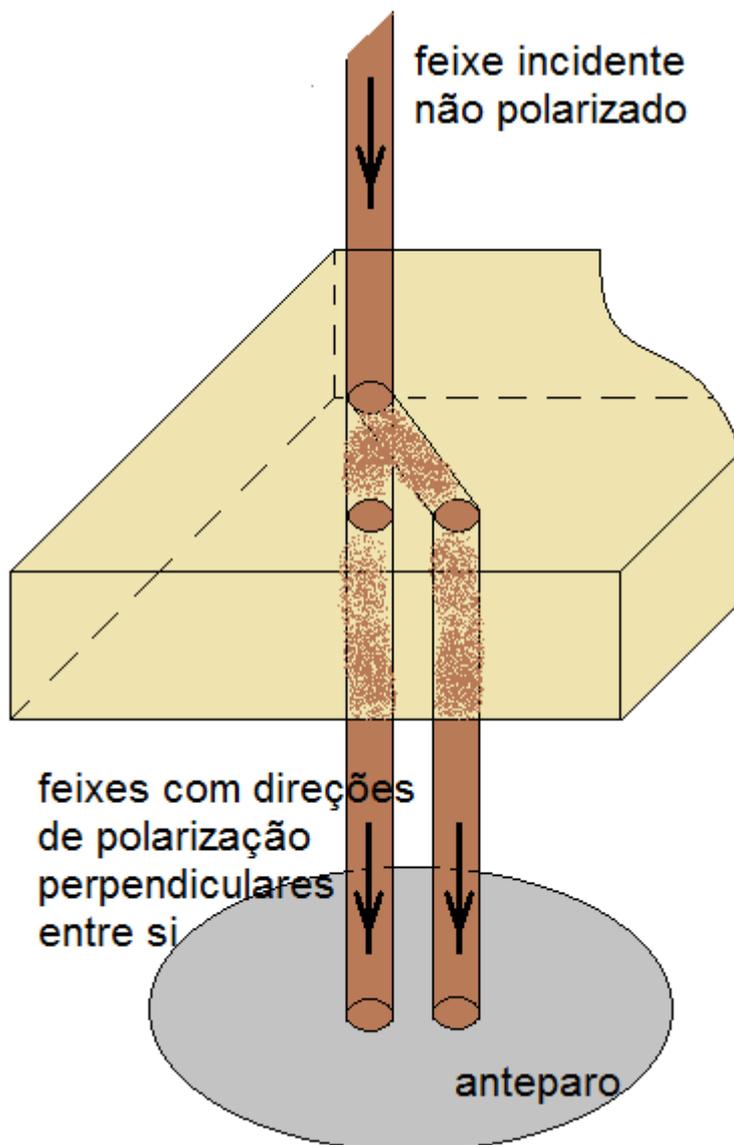


Figura G.5: Esquema explicativo. (Adaptada do RESNICK, HALLIDAY , 1969).

A Figura G.5 mostra o efeito de distorção na imagem causado um cristal polido de calcita (a) colocado sobre algumas letras impressas e um feixe de luz não-polarizada (b) incidindo num cristal de calcita perpendicularmente a uma de suas faces. O feixe único não-polarizado transforma-se em dois feixes polarizados na superfície do cristal, formando um fenômeno denominado dupla refração. Huygens, em 1678, verificou também que as direções de polarização são perpendiculares e explicou que a onda se propaga com velocidade diferente, dependendo da direção em que percorre o cristal e do plano de polarização.

7 - Polarização circular

Suponhamos que um feixe de luz plano-polarizada de frequência angular ω incida normalmente em uma lâmina de calcita, cortada de maneira que o eixo óptico fique paralelo à sua superfície. As duas ondas emergentes serão plano-polarizadas ortogonalmente entre si e terão amplitudes iguais, se o plano de vibração que contiver a onda incidente fizer um ângulo de 45 graus com o eixo óptico.

Visto que as ondas se propagam através do cristal com velocidades diferentes, ao emergirem deste cristal haverá entre elas uma diferença de fase φ . Escolhendo-se a espessura do cristal de modo que (para uma dada frequência) se tenha $\varphi = 90^\circ$, este constituirá o que se chama de lâmina de um quarto de onda. Dizemos que a luz emergente se encontra circularmente polarizada, uma vez que se pode mostrar que duas ondas plano-polarizadas, vibrando em planos ortogonais e defasadas entre si de 90° como as que acabamos de descrever, podem ser representadas pelas projeções (sobre dois eixos perpendiculares) de um vetor que gire com uma frequência angular ω em torno da direção de propagação.

8 - Momento angular da luz

O fato de a luz ceder quantidade de movimento a um anteparo absorvedor ou a um espelho está de acordo com o eletromagnetismo clássico,

com a física quântica e com a experiência. As propriedades da polarização circular sugerem que a luz, em tal estado, possua também um momento angular associado. Em 1936, Beth conseguiu uma comprovação experimental mostrando que, quando uma luz circulante polarizada atravessa uma lâmina birrefringente, esta lâmina fica submetida a um conjugado de reação.

O momento angular transportado pela luz desempenha um papel muito importante nos estudos da emissão luminosa pelos átomos e de raios pelos núcleos. Admitindo-se que a luz possua um momento angular ao deixar o átomo, o momento angular do átomo deverá variar exatamente do mesmo valor, pois de outra forma, não seria conservado o momento angular do sistema isolado átomo-luz.

As teorias clássica e quântica prevêem que quando um feixe de luz circularmente polarizada for completamente absorvido pelo objeto no qual esteja incidindo, será cedido a este um momento angular cujo módulo é dado por

$$L = \frac{U}{\omega},$$

onde U é a quantidade de energia absorvida e ω a frequência angular da luz.

Texto das unidades desenvolvido de acordo com a bibliografia.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da física**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 4.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- TIPLER, P. A. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 4.

- SEARS, F.; ZEMANSKY, M. W.; YOUNG, H.D. **Física**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1985. v. 4.

Exercícios: Unidade G

1 – Uma luz não-polarizada incide em uma lâmina polarizadora, a intensidade da onda transmitida cai pela metade. Ache uma explicação simples para este fato (releia as primeiras seções da unidade G).

2 – Um feixe de luz polarizada incide consecutivamente em dois polaróides, sendo que o primeiro possui direção de polarização inclinada em 45 graus com relação a direção de polarização do feixe e o segundo é colocado perpendicularmente a direção de polarização do feixe inicial. Determine:

- a) A intensidade da luz transmitida pela primeira lâmina.
- b) A intensidade da luz transmitida pela segunda lâmina.
- c) Se retirarmos a primeira lâmina, que acontece com a intensidade da luz transmitida pela lâmina que resta?