UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Priscila Sonza Frigo

POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

Santa Maria, RS
2019

Priscila Sonza Frigo

POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio (EaD), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS), como requisito parcial para a obtenção de título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Orientadora: Profª. Drª. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS
2019

Priscila Sonza Frigo

POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

Trabalho apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS), modalidade EAD, como requisito parcial para a obtenção de título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Aprovada em 06 de julho de 2019:

Carmen Vieira Mathias, Drª (UFSM)
Presidente/orientadora

Ivanilda Basso Aseka, Drª (UFSM)

Janice Rachelli, Drª (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, irmã, meu filho André e a toda minha família que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus que nos deu o dom da vida e abençoou nosso saber: Ao mestre dos mestres, que nos deu forças para chegarmos ao fim do caminho que escolhemos e ao início de uma nova etapa...

À família, em especial a minha mãe, meu pai e minha irmã que estavam sempre ao meu lado, me apoiando, me incentivando a vencer essa caminhada. Esse momento só existe porque vocês se doaram em silêncio e aceitaram viver comigo o meu sonho. Muito obrigada.

Ao meu filho André que entendeu a minha ausência, compreendendo que foi necessária para a realização do meu sonho. Em você encontrei a força necessária para continuar caminhando.

Agradecimento especial à minha orientadora, professora Drª. Carmen Vieira Mathias pela disponibilidade, dedicação e por compartilhar seus conhecimentos, tornando possível a realização deste trabalho.

Ao professor e amigo Patric da Silva, da Escola Estadual de Educação Básica Professora Lelia Ribeiro, que disponibilizou a turma e motivou os alunos a participarem das aulas.

A todos meus amigos que entenderam minha ausência, e direta ou indiretamente fizeram parte deste momento da minha vida. Obrigada a todos!

EPÍGRAFE

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.”

Paulo Freire.

RESUMO

POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

AUTORA: Priscila Sonza Frigo

ORIENTADORA: Profª. Drª. Carmen Vieira Mathias

O presente trabalho de conclusão de curso apresenta resultados de uma investigação realizada em sala de aula, com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, sobre o tópico poliedros. O principal objetivo da pesquisa foi investigar quais pré-requisitos os alunos possuíam sobre o tema citado, bem como a postura dos mesmos em relação a aprendizagem desse conteúdo. Durante o desenvolvimento do trabalho foram realizadas atividades envolvendo poliedros com particular atenção ao Teorema de Euler. Em um segundo momento foram construídos alguns poliedros regulares utilizando material concreto que foram utilizados para que os alunos visualizassem de forma mais real, as faces, arestas e vértices. A partir da pesquisa realizada, foi possível perceber que é importante retomar os conceitos já estudados, trabalhar os conteúdos de forma diferenciada, principalmente com materiais manipuláveis, pois dessa maneira é possível despertar o interesse dos estudantes e consequentemente, obtém-se um melhor entendimento e aprendizado dos conteúdos envolvidos.

Palavras-chave: Poliedros. Teorema de Euler. Material concreto. Aprendizagem

ABSTRACT

POLYMERS AND EULER THEOREM

AUTHOR: Priscila SonzaFrigo
ADVISOR:Prof[a]. Dr[a]. Carmen Vieira Mathias

The present work of conclusion of course presents results of an investigation realized in classroom, with students of the third year of High School, on the topic polyhedra. The main objective of the research was to investigate what prerequisites the students possessed on the subject mentioned, as well as their posture in relation to the learning of this content. During the development of the work were carried out activities involving polyhedrons with particular attention to Euler's Theorem. In a second moment some regular polyhedra were constructed using concrete material and they were used for the students to visualize in a more real way the faces, edges and vertices. From the realized research, it was possible to perceive that it is important to retake the concepts already studied, to work the contents in a differentiated way, mainly with manipulable materials because in this way it is possible to arouse the interest of the students and consequently, one obtains a better understanding and learning of the contents involved.

Keywords: *Polyhedra. Euler'sTheorem. Concrete material. Learning.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO[1]

Durante meu processo de escolarização na formação básica sempre gostei dos números, me identificando com as disciplinas que envolviam as ciências, em especial, a Matemática. Sempre estudei em escola pública (municipal e estadual). Na época os recursos didáticos dos professores eram quadro e giz e no Ensino Médio alguns professores utilizavam retroprojetor. Ingressei no ensino superior no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI) Campus Santiago, no ano de 2004. Por motivos de saúde na família foi necessário trancar o curso no ano 2008. Porém, no ano de 2010 retornei para universidade concluindo o curso no ano de 2011. Após concluir a graduação, sempre quis fazer algum curso de pós-graduação na área de Matemática. No ano 2017, fui informada da oferta do curso Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio, realizado pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Com incentivo dos meus pais fiz minha inscrição e fui selecionada. Desde as primeiras aulas do curso fui percebendo maneiras e estratégias que antes eu não percebia, pois como não atuo na área, possuo algumas dificuldades, como por exemplo, na elaboração de um plano de aula. Porém no decorrer do curso, tomei conhecimento de diferentes formas de abordar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula, de forma a aprimorar as técnicas utilizadas no o ensino aprendizagem de Matemática.

Sendo assim, para realizar o trabalho de conclusão de curso escolhi um conteúdo ligado a Geometria Espacial, pois durante meus estágios no curso de Licenciatura, observei a dificuldade que os alunos possuem na aprendizagem desse conteúdo. Quando se fala em ensino de Matemática, logo vem em nossa mente as dificuldades que os alunos possuem em entender definições e resultados, principalmente ao tentar resolver atividades, aliando a teoria com a prática.

A aula inédita foi aplicada em uma a turma de terceiro ano do Ensino Médio, na Escola Estadual de Educação Básica Professora Lelia Ribeiro, uma escola pública, a única que oferece Ensino Médio na cidade de São Martinho da Serra, no interior do Rio Grande do Sul. A escolha dessa turma ocorreu, pois o professor da mesma a disponibilizou para a realização das atividades propostas. A turma é constituída de vinte e dois alunos, formada por todas as classes sociais, sendo a maioria da zona rural. Observo que a escola não conta com

[1]Faço uso da primeira pessoa do singular, durante parte da introdução, por se tratar de experiências pessoais anteriores e durante a especialização.

laboratório de informática, sendo que atualmente, este é um recurso didático importante na elaboração de uma aula diferenciada.

Com esse trabalho abordo uma alternativa didática que permita uma maior compreensão do conteúdo de Poliedros, em especial sobre o tópico Teorema de Euler. A Geometria não é um tema difícil, mas envolve vários conceitos e resultados, por isso as estratégias pedagógicas usadas para abordagem do tema foram a resolução de atividades envolvendo os conteúdos e material concreto.

Assim, o objetivo desse trabalho é investigar quais são os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução das atividades propostas. Além disso, pretende-se verificar de que forma os alunos resolvem as atividades utilizando os conhecimentos já adquiridos até então, quando desafiados a relacionar a matemática com determinadas aplicações.

No que segue, é apresentado no capítulo 1, os momentos em que se são estudados os conceitos sobre poliedros com vistas a verificação do Teorema de Euler. Além disso, apresentam-se algumas definições e construções contidas em livros didáticos.

No capítulo 2 é apresentado o planejamento da aula que foi elaborado a partir de consultas em materiais didáticos, buscando estruturar de uma forma de fácil entendimento para os alunos envolvidos, e também as atividades propostas e as possíveis soluções.

A participação dos alunos, dúvidas e dificuldades ao realizarem as atividades propostas dão forma ao capítulo 3, numa análise a posteriori das atividades desenvolvidas. Finalizando o trabalho, apresentam-se as considerações finais.

1–REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria está sempre presente em nosso dia a dia, mesmo quando não trabalhamos diretamente com Matemática. Ao fazermos algo, como observar as formas dos objetos, com suas regularidades ou irregularidades, estamos entrando sem perceber, no mundo da Geometria. Observa-se então, que ela está por toda parte: nas colmeias das abelhas, na simetria da beleza de uma borboleta, nos tecidos e máscaras africanas, nas mandalas, nos belíssimos ladrilhamentos, dentre várias outras situações. Enfim, podemos facilmente nos fascinar com a geometria que nos cerca.

Os poliedros também são objetos facilmente encontrados no cotidiano, em forma de embalagens, na arquitetura, nas artes, etc. Além disso, são elementos utilizados em pesquisas e tem aplicações práticas. Por exemplo, o estudo de planificação de poliedros tem aplicações em design industrial (na confecção de moldes de vinil e decomposição de chapas metálicas). Os poliedros regulares (cubo, hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) se manifestam na natureza, na forma de cristais e moléculas, por exemplo.

Acreditamos que para ensinar geometria cabe a nós, professores, analisarmos os objetos que fazem parte do cotidiano dos alunos, de forma a ensinar, com instrumentos tão simples quanto possível, as diversas possibilidades de aplicações desta área da matemática. Lorenzato (2006) chama a atenção para educadores do mundo inteiro, que ressaltam a importância do apoio visual ou visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. O autor sugere que as escolas necessitam possuir laboratórios didáticos, para investigar os materiais concretos ou tecnológicos que permitam favorecer a aprendizagem. Mas, é comum encontrarmos dificuldades quando tentamos ensinar de maneira inovadora este e outros conteúdos, principalmente pela falta de estrutura, encontradas em algumas escolas públicas.

A postura do professor, ao realizar atividades envolvendo o conteúdo estudado é de intervir como incentivador e moderador das ideias geradas pelos alunos. Nesse caso os alunos participam ativamente fazendo matemática, e não ficam passivamente observando a matemática ser feita, em geral no quadro, pelo professor. Essa é uma mudança muito importante no ensino da matemática, pois é onde o professor encoraja o aluno a pensar por si mesmo, a levantar suas hipóteses a fim de testá-las. Enfim, o papel do professor é manter o aluno pensando e gerando ideias produtivas, instigando a desenvolver seu raciocínio lógico e fazer uso dos recursos disponíveis, levando os mesmos a resolver as questões que surgem no seu dia a dia, na escola e fora dela.

Segundo as orientações educacionais complementares que constam nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 2008), o aluno precisa saber utilizar as formas geométricas para representar o mundo real ou parte dele. Esta é uma capacidade importante a ser desenvolvida no ensino médio, isso se deve ao fato de que tal capacidade irá auxiliar na resolução de problemas não só nas aulas de Matemática, mas também de outras disciplinas. Aliado a isso o aluno terá capacidade de interpretar desenhos e planificações, argumentando com fundamentação buscando soluções para problemas diversos.

O tópico de poliedros no ensino médio é apresentado como conteúdo de Geometria Espacial, é estudado no segundo ou terceiro ano. Embora o conteúdo de sólidos geométricos seja trabalhado de forma propedêutica durante o Ensino Fundamental, é no Ensino Médio que são estudadas as especificidades, as relações entre vértices, arestas e faces, a classificação dos poliedros regulares, onde existe um aprofundamento do conteúdo.

No estudo de poliedros, podemos utilizar várias ferramentas, com objetivo de contribuir para processo de ensinar e aprender. Considerando o contexto sócio cultural que estamos vivendo, as demandas que têm sido feitas à escola pela sociedade e atendendo aos interesses e às expectativas dos alunos, acreditamos que o professor pode ir em busca de estratégias diferenciadas com o objetivo de tornar os alunos capazes de promover a realização pessoal, a qualificação para o trabalho.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medidas. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de Teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p. 70)

Assim, acreditamos que é necessário trabalhar os conteúdos matemáticos em situações cotidianas, que façam sentido aos alunos, de modo que eles tenham a oportunidade se interagir na prática educacional, não de uma maneira isolada e não apenas ouvindo o professor, mas trabalhando em grupo, para com isso começar a desenvolver a cidadania, seu lugar no mundo. Considerando que os alunos não são iguais, possuem motivações, interesses e capacidades diferentes, acreditamos que o ensino de Matemática deve atender a todas essas diferenças.

1.2 POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

Nessa secção vamos abordar os conceitos que serão utilizados na sequência de atividades.

A Geometria faz parte do nosso dia a dia, e os poliedros estão presentes nas atividades do homem: nas construções arquitetônicas, nas embalagens de produtos, nas artes e objetos artísticos. Destacaremos na sequência, como algumas atividades humanas contemplam os conceitos geométricos para alcançar seus objetivos.

Um dos exemplos que nos chamou a atenção foi a necessidade de aproveitar ao máximo a área de um terreno em Tóquio. Esse problema levou o arquiteto *Yasuhiro Yamashita* a utilizar a percepção visual e seus conhecimentos geométricos sobre poliedros, em um terreno de 45m². Ele projetou uma casa em formato de poliedro cuja área total construída é de 86m², como ilustrado na Figura1 (THELMA, 2011).

Figura 1 - Casa em formato de poliedro.

Fonte: (THELMA, 2011).

Conforme Neto ([201-]) considerando Ƥ a união de um número finito de polígonos planos, então Ƥ é um poliedro se valem as seguintes condições:

(1) $\mathcal{P}$ é conexo, ou seja, dois polígonos quaisquer contidos em $\mathcal{P}$ são conectados.

(2) Cada lado de um polígono contido em $\mathcal{P}$ é lado de exatamente mais um polígono contido em $\mathcal{P}$.

(3) Se V é vértice de um polígono contido em $\mathcal{P}$, todos os polígonos que têm V como vértice formam um único circuito.

(4) Dois polígonos adjacentes contidos em $\mathcal{P}$ são sempre não coplanares.

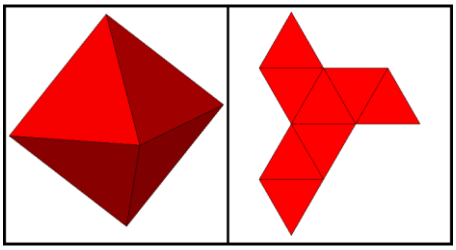
Os polígonos contidos em $\mathcal{P}$ são denominados de faces de $\mathcal{P}$, ao passo que os lados desses polígonos são as arestas de $\mathcal{P}$ e os vértices desses polígonos são os vértices de $\mathcal{P}$.

Dante (2012) apresenta a seguinte definição para poliedros

> Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces, é chamado aresta do poliedro. E cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

Ao se considerar poliedro como um sólido geométrico, não faz sentido falar em planificação do poliedro, já que não é possível planificar um sólido. Neste caso, o que é planificado é apenas a superfície deste sólido, que é denominada superfície poliédrica, ou seja, não é considerado seu interior na planificação. Na Figura 2 está ilustrado um exemplo de um poliedro e sua planificação.

Figura 2 - Exemplo de poliedro e planificação.



Fonte: A autora.

Observa-se que um poliedro é formado por faces, que, por sua vez, são polígonos, figuras geométricas planas. Como todo plano divide o espaço em dois semiespaços, podemos definir o que são poliedros convexos.

Poliedros convexos: Um poliedro é dito convexo quando cumpre as três condições seguintes:

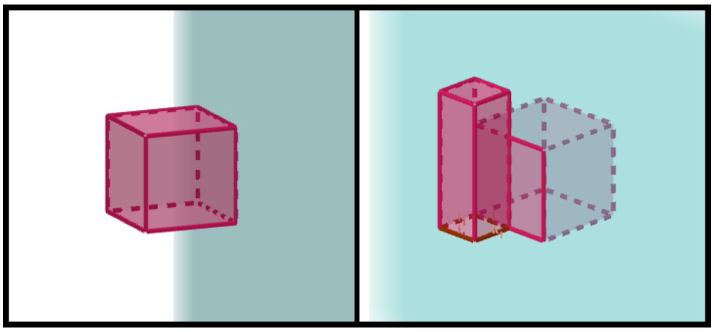
i) Todas as faces desse poliedro são polígonos convexos em planos distintos;

ii) Todo o poliedro pertence a apenas um semiespaço, determinado por qualquer uma de suas faces;

iii) Cada aresta pertence a apenas duas faces.

Na Figura 3 está ilustrado um exemplo de um polígono convexo e polígono não convexo.

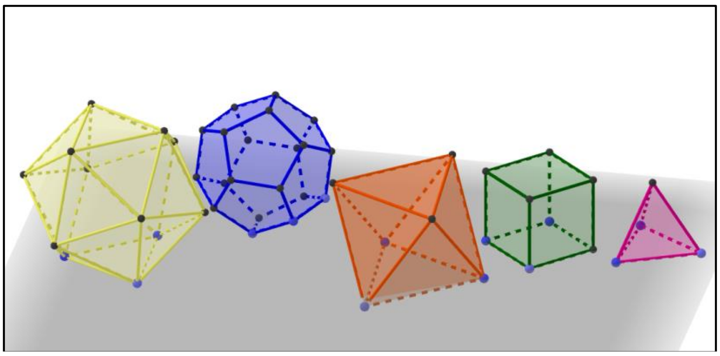
Figura 3 - Polígono convexo à direita e polígono não convexo à esquerda.



Fonte:A autora.

Poliedro regular: Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas. Na Figura 4 está ilustrado um exemplo de poliedros regulares.

Figura 4 - Poliedros regulares.



Fonte: A autora.

Sobre os poliedros, Platão e seus seguidores foram os responsáveis por concluir que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Por esses sólidos terem sido intensamente estudados por Platão e pelos demais membros da Academia, eles ficaram conhecidos como poliedros de Platão. Timeu é um tratado teórico escrito por Platão em meados de 360 a. C. na forma de um diálogo e apresenta especulações sobre a natureza do mundo físico. Nesta obra Platão misticamente associou quatro dos cinco sólidos regulares a elementos da natureza: fogo, ar, água e terra e o quinto sólido ele associou ao universo (BRIANEZ, 2013).

1.2.1 Relação de Euler

Um importante resultado sobre poliedros convexos é o denominado Teorema de Euler.

Teorema 1:

Se V, A e F, indicam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro então vale a seguinte relação:

$V – A + F = 2$

Verificação da Relação de Euler:

Neste tópico apresentamos uma verificação da Relação de Euler. Observamos que essa não é uma demonstração, optamos por fazer dessa maneira, pois acreditamos que o que segue, pode ser compreendido por estudantes do Ensino Médio. Salientamos que essa verificação foi baseada em Brianez (2013 apud BARROS, 2011).

No desenvolvimento, utilizaremos um recurso que nos auxiliará a transferir o cálculo da relação de Euler do poliedro para a sua planificação, após a retirada de uma de suas faces. Ao analisar os dados obtidos no experimento, realizado com um cubo, veremos que será possível estender a relação para outros poliedros.

Acreditamos que esta verificação pode ser muito útil, devido ao seu fácil entendimento e por isso, o objetivo de sua apresentação é, fazer com que os estudantes visualizem faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer, projetado sobre uma superfície plana, após uma deformação do poliedro.

Para realizar a verificação, via experimento, devemos realizar alguns procedimentos:

1) Encape um poliedro qualquer, no caso um cubo, com um balão de borracha de modo que o sólido não fure o balão e que o balão fique bem ajustado ao sólido, sem bolhas de ar.

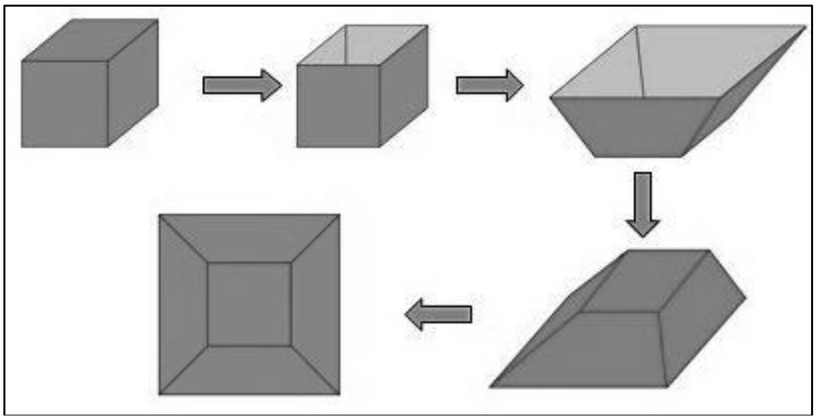
2) Marque no balão todas as arestas e vértices do poliedro que está encapado.

3) Retire o poliedro de dentro do balão. Quando encapamos o poliedro, o orifício do balão cobria uma das faces. Retiremos então a parte do balão que cobria esta face do poliedro cortando esta superfície do balão com uma tesoura bem rente às arestas e vértices desta face, de modo que as marcas dos vértices e arestas não sejam retiradas.

4) Após este recorte, devemos esticar a superfície restante do balão sobre uma folha grossa que deve estar apoiada sobre uma superfície plana. Prenda o balão na folha grossa com alfinetes, um em cada vértice da face que foi removida.

Através das etapas de 1 a 4, é possível obter uma região plana, que é limitada pela linha poligonal formada pelas arestas e vértices da face retirada. A região que obtemos é formada em seu interior por polígonos resultantes da deformação das outras faces do poliedro original. No nosso caso, obtivemos a deformação do cubo, após a retirada de uma de suas faces seguido da planificação do restante do poliedro. Tais procedimentos estão ilustrados na Figura 5.

Figura 5 - Processo de planificação do cubo após a retirada de uma de suas faces.

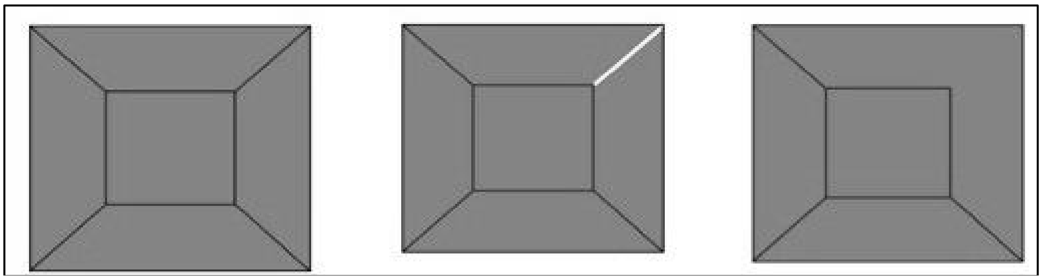


Fonte: (BARROS, 2011).

Se quisermos deduzir a relação de Euler para qualquer outro poliedro, basta agirmos de maneira semelhante à descrita acima, ou seja, basta retirarmos uma das faces do poliedro escolhido e deformarmos o que restou formando uma região poligonal plana.

O próximo passo é mostrar que se a região plana obtida tem *V* vértices, *A* arestas e *F* faces ela estará satisfazendo a relação de Euler, e a característica dessa região deverá ser 1, pois o poliedro, que tem característica de Euler igual a 2, tem uma face a mais do que a região que foi gerada por ele. Podemos perceber agora que nosso estudo sobre a característica do poliedro foi transferido para o plano, conforme ilustra a Figura 6:

Figura 6 - Processo de retirada de uma aresta da região poliédrica projetada no plano.



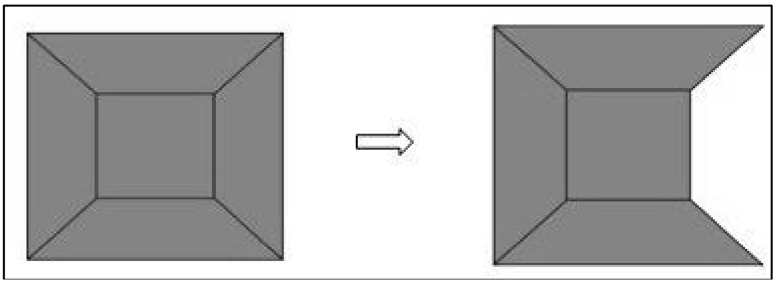
Fonte: (BARROS, 2011).

Primeiramente observamos que, removendo uma das arestas da região projetada no plano, podemos ter a fusão de duas faces vizinhas em uma só região. Essa nova configuração terá uma aresta a menos e também uma face a menos com o mesmo número de vértices da configuração original. Assim, para essa nova configuração o número de Euler fica:

$V - (A\text{-}1) + (F\text{-}1) = V - A + F$

Assim, mantém-se, portanto, o número de Euler da região original (Figura7). Pode ocorrer que, na remoção de uma aresta, ocorra simplesmente a eliminação de uma das faces adjacentes à fronteira da região.

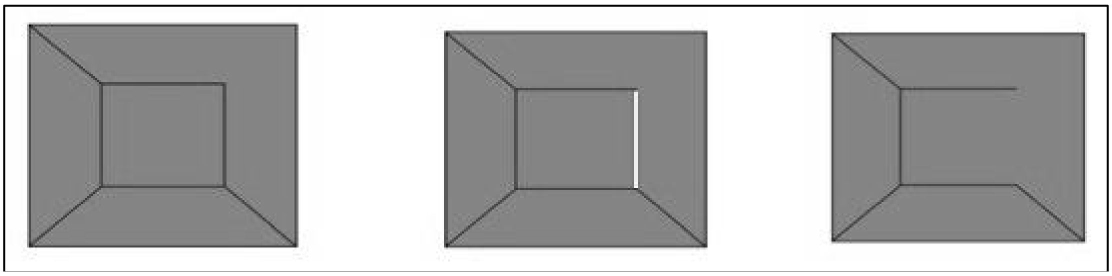
Figura 7 - Desaparecimento de uma face devido a remoção de uma aresta.



Fonte: (BARROS, 2011).

Avançando em nossa verificação da relação de Euler, seguimos a procura de arestas que sejam comuns a mais de uma região poligonal (Figura 8). Ao eliminarmos esta aresta procurada, pode ocorrer o surgimento de uma aresta "solta", isto é, uma aresta que já não determina um limite entre regiões adjacentes e que tenha um vértice que não é comum a mais nenhuma outra aresta, tal é ilustrado na terceira imagem da Figura 9.

Figura 8 - Processo de eliminação de uma aresta comum a mais de uma região poligonal onde a última imagem da direita mostra a presença de uma aresta "solta".

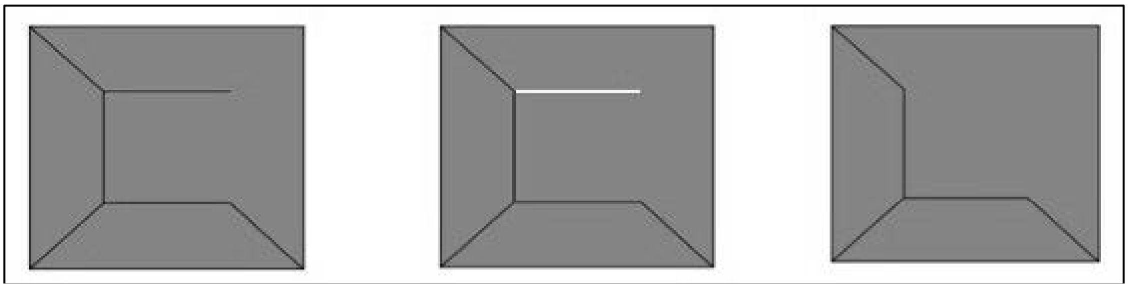


Fonte: (BARROS, 2011).

Notamos que a retirada de uma aresta que provocou o surgimento de uma aresta "solta", tal como mostra a sequência da Figura 8, não alterou o número de vértices, mas diminuiu em uma unidade a quantidade de arestas e faces. Com isto a Relação de Euler para esta nova configuração ainda é $V-(A-1)+(F-1) = V-A+F$

Toda vez que houver o aparecimento de uma ou mais arestas "soltas", o passo seguinte será eliminar arestas deste tipo. Na Figura 9 está ilustrado este procedimento.

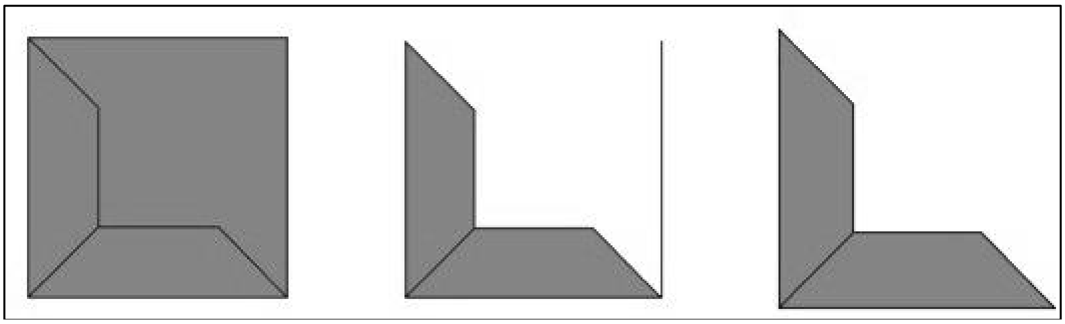
Figura 9 - Processo de eliminação de uma aresta solta.



Fonte: (BARROS,2011).

Mais uma vez, a retirada de uma aresta "solta" não altera o número de faces, mas desta vez diminui em uma unidade o número de arestas e de vértices. O vértice retirado é aquele que não é comum a duas arestas adjacentes, sendo extremidade apenas da aresta retirada (Figura 10). A relação de Euler para esta nova configuração resultante é $(V-1)-(A-1)+F = V - A+F$.

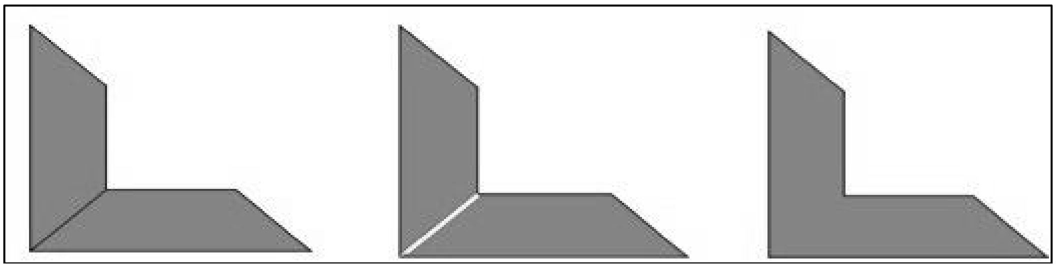
Figura 10 - Processo de desaparecimento de uma face devido a retirada das arestas.



Fonte: (BARROS,2011).

Em alguns casos, após a remoção de uma aresta uma face pode desaparecer completamente e ainda pode permanecer uma aresta "solta" (imagem central da Figura10). Mesmo assim, recalculando a característica de Euler, observaremos que não se altera, pois não houve a retirada de nenhum vértice da figura $V-(A-1)+(F-1)=V-A+F$. Por fim, após a retirada de uma determinada aresta, obteremos uma configuração formada por apenas uma região delimitada por uma linha poligonal fechada, sem subdivisões e sem arestas "soltas". Esta região tem apenas uma face e o número de arestas é igual ao número de vértices. Assim, para esta configuração final (última imagem da Figura 11) a característica de Euler será dada por $V-A+F=V-V+1=1$.

Figura 11 - Processo de surgimento de uma região poligonal fechada sem subdivisões.



Fonte: (BARROS, 2011).

Como esse número também é o número de Euler da configuração original, então a nossa verificação da relação de Euler está concluída.

Observamos que as etapas realizadas podem ser feitas e serão válidas para qualquer poliedro convexo, se executarmos uma sequência de retirada de arestas. Essa retirada deve obedecer a retirada das arestas "soltas", sempre que elas ocorrerem e, caso contrário, devem ser retiradas as arestas comuns a mais de uma região poligonal até obtermos uma única região poligonal sem subdivisões internas e sem arestas “soltas”. Em cada etapa o número de Euler não se altera e ao final podemos concluir que este número é sempre igual a 1.

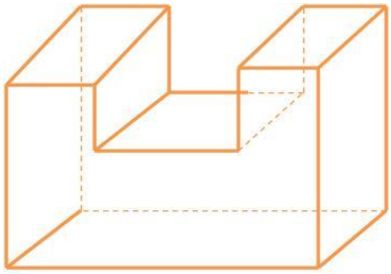
A relação de Euler é assim denominada em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Ele apresentou tal relação em uma carta que escreveu para seu amigo (também matemático) Christian Goldbach em 1750(RICHESON, 2008).

Segundo Lima (1991) é interessante observar que, segundo alguns historiadores, um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, contém resultados a partir dos quais se poderia obter a Relação de Euler.

Euler, durante sua vida, escreveu vários trabalhos, entre eles, dois sobre poliedros. Esses dois trabalhos foram escritos em 1750 e 1751, mas só foram publicados em 1758. No primeiro trabalho, Euler fez observações gerais a respeito de poliedros, iniciou sua discussão da relação entre os números de vértices, arestas e faces, provou vários teoremas que relacionam tais elementos e verificou que a relação que hoje tem o seu nome, ocorria em vários casos especiais. Porém, não conseguiu realizar uma demonstração o que ocorreu apenas no segundo trabalho. (RICHESON, 2008).

Existem vários exemplos de poliedros convexos e não convexos onde a relação é válida. Conforme já mencionamos, o Teorema de Euler não é válido em toda sua generalidade. Esta relação é sempre verdadeira para poliedros convexos. Na Figura 12 está ilustrado um exemplo de poliedros não convexo que satisfazem a relação.

Figura 12 - Poliedro não convexo, que satisfaz a relação de Euler.

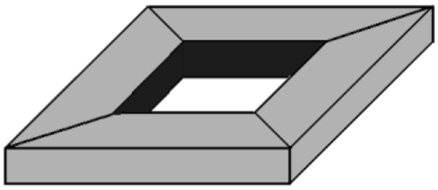


$$V - A + F = 16 - 24 + 10 = 2$$

Fonte: (COLÉGIO WEB, 2012).

A Figura 13ilustra um exemplo de um poliedro não convexo, onde a relação não é satisfeita.

Figura 13 - Poliedro não convexo, que satisfaz a relação de Euler.



$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$

Fonte: (MIALICH,2013,p14)

Observa-se, portanto, a partir desses dois exemplos que o Teorema de Euler não é necessariamente válido para poliedros não convexos.

2 O PLANO DE AULA: ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo apresentamos o planejamento das atividades que serão aplicadas aos alunos. O material a ser distribuído aos alunos encontra-se no Apêndice A.

Apresentaremos as atividades elaboradas, precedidas dos objetivos que se deseja alcançar, e as soluções das mesmas comentadas.

2.1 ESTRUTURA

Tema: Poliedros e Teorema de Euler.

Habilidades e competências: Almeja–se que ao final do estudo desse tema os alunos sejam capazes de identificar e caracterizar um poliedro, resolver situações-problemas que envolvam poliedros, análise e interpretação de resultados.

É necessário desenvolver a capacidade de investigar padrões geométricos aprofundando o estudo de sólidos geométricos, entre eles, poliedros, identificando e caracterizando, elaborando estratégias, interpretando e criando resultados a partir das atividades práticas.

Recursos didáticos: quadro, giz, material de estudo dirigido, projetor multimídia, canudo, linha, agulha, tesoura, régua.

Horas/aula: quatro aulas de cinquenta minutos.

2.2 DESENVOLVIMENTO DA AULA

2.2.1 Primeiro momento – Poliedros e Relação de Euler

Atividade 1:

A partir do Poliedro ilustrado na Figura 14, os alunos deverão descrever o número de arestas, faces e vértices, utilizando os conhecimentos de Geometria.

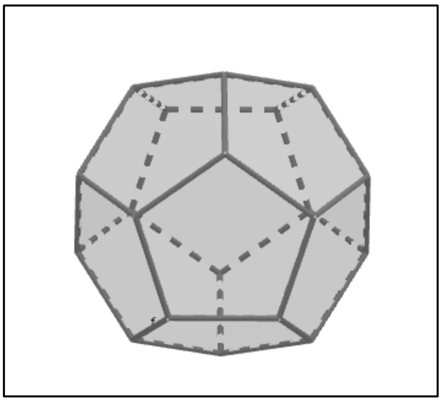
I) Determine: o número de faces, o número de arestas e o número de vértices do poliedro convexo ilustrado na figura:

____ faces

____ arestas

____ vértices

Figura 14 - Poliedro.



Fonte: A autora

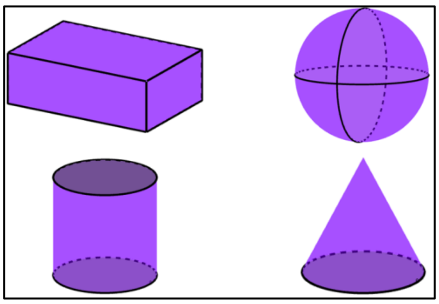
Análise a priori: Espera-se que ao final da análise da figura ilustrada que permite uma melhor percepção de figura tridimensional o aluno seja capaz de identificar suas arestas, faces e vértices utilizando os conhecimentos já adquiridos para interpretá-la.

Solução esperada: esperamos que os alunos respondam que o poliedro possui 12 faces, 30 arestas e 20 vértices.

Atividade 2:

As figuras geométricas espaciais também recebem o nome de sólidos geométricos, que são divididos em: poliedros e corpos redondos. Vamos abordar as definições e propriedades dos poliedros ilustrados na Figura 15.

Figura 15 - Alguns exemplos de sólidos geométricos.



Fonte: (AWILA, 2015, p 24)

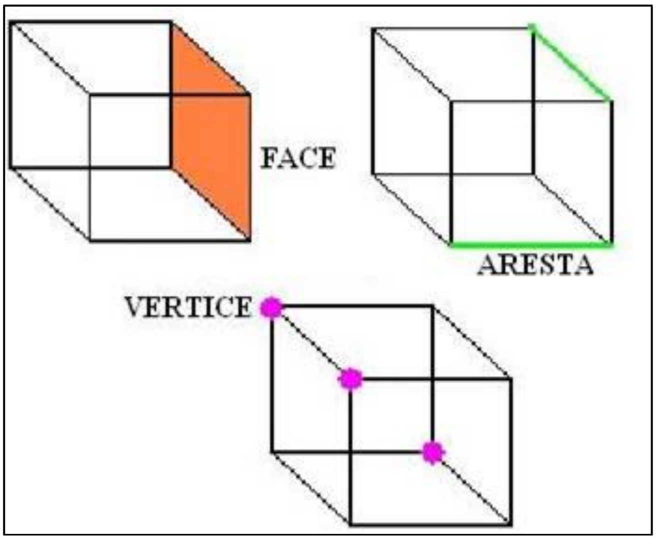
Observação: a esfera, o cilindro e o cone apresentados na figura 16 não farão parte de nosso estudo, constam propositalmente como exemplos de sólidos geométricos para não causar uma ideia incorreta de que apenas figuras limitadas por polígonos são assim classificadas.

2.2.2 Poliedros

Definição de Poliedros: A definição apresentada aos alunos é a definição 1.2 na seção anterior.

Além disso, vamos lembrar os alunos que quando as superfícies que limitam um sólido geométrico são determinadas pela união finita de polígonos (faces), eles recebem o nome de Poliedros (do grego *póly* que significa vários e *hedra* que significa faces). Nesses, a interseção das faces é um ponto (vértice) ou um segmento (aresta). A Figura 16 ilustra faces, vértices e arestas do cubo.

Figura 16 - Faces, vértices e arestas de um poliedro.



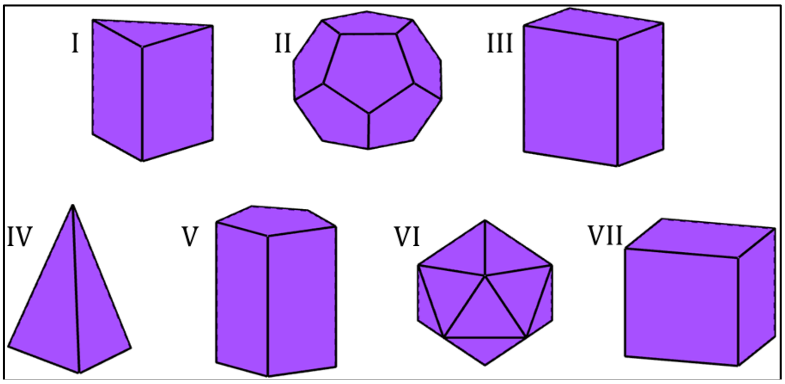
Fonte: (SILVA, [201-])

Além disso, vamos relembrar a definição de Poliedro Convexo apresentada aos alunos na definição 1.1 na página 15 na seção anterior.

Na sequência, vamos abordar as classificações existentes na (Figura 17):

I) Há Poliedros com características em comum? Quais?

Figura 17 - Diferentes formatos de Poliedros.



Fonte: (AWILA, 2015, p 25).

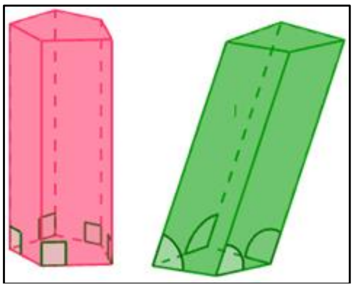
Resposta esperada: Os Poliedros I, III, V, VII.

Espera-se que os alunos utilizando dos conhecimentos adquiridos até o momento, sejam capazes de perceber quais poliedros possuem características semelhantes.

Os poliedros I, III, V e VII (Figura17) são chamados de prismas e têm dois polígonos congruentes e paralelos como bases e paralelogramos como faces laterais.

Um prisma pode ser reto ou oblíquo. Quando as arestas laterais formam um ângulo reto com o plano da base, ele é dito prisma reto, caso contrário, oblíquo (Figura 18).

Figura 18 - Prisma reto e prisma oblíquo.



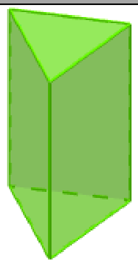
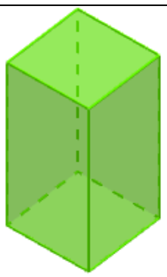
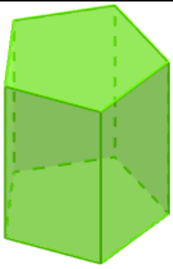
Fonte: (AWILA, 2015, p 26)

A nomenclatura dos prismas é determinada a partir da sua base, por exemplo, um prisma cuja base é um triângulo chama-se prisma triangular; com base quadrada, prisma quadrangular e assim por diante.

Atividade 3:

Objetivo: Espera-se que os alunos sejam capazes de completar o quadro 1 abaixo, utilizando os conhecimentos adquiridos até aqui.

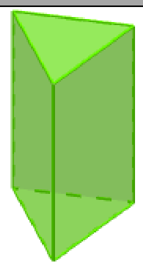
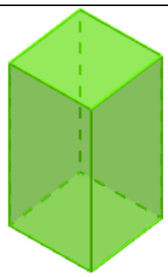
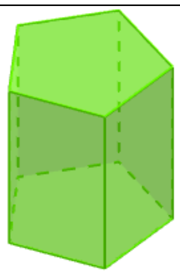
Quadro 1 – Nomenclatura dos prismas.

Prisma	Base	Nomenclatura
		
		
		

Fonte: Adaptado de (AWILA, 2015)

As respostas esperadas constam no quadro 2.

Quadro 2 - Quadro com as respostas.

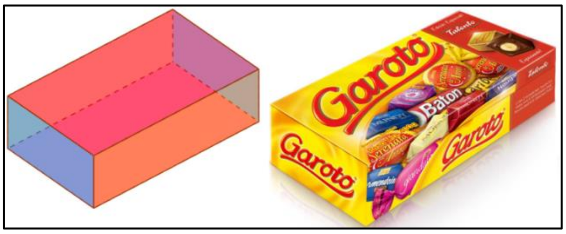
Prisma	Base	Nomenclatura
	Triângulo	Prisma Triangular
	Quadrado	Prisma Quadrangular
	Pentágono	Prisma Pentagonal

Fonte: Adaptado de (AWILA, 2015)

Espera-se que como os alunos já tiveram contato com esse conteúdo, eles serão capazes de completar a tabela com as respostas corretas.

Um exemplo, além dos que já foram citados é o prisma retangular comum, por representar a maioria das embalagens, onde tem como base o retângulo(Figura19).

Figura 19 - Caixa de bombom em seu formato tradicional de Prisma Retangular.



Fonte: (AWILA, 2015, p 28)

Atividade 4:

Objetivo: Relembrar os conceitos de poliedros convexos. Caso os alunos não lembrarem esse conceito, vamos retomá-lo, utilizando a definição 1.2 indicada na seção anterior.

2.2.3Relação de Euler

Atividade 5:

Objetivo: Espera-se que com a realização desta atividade os alunos sejam capazes de indicar o número de elementos de um poliedro, identificando número arestas, vértices e faces.

A relação foi criada pelo matemático suíço Leonhard Euler é muito importante na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar o número de elementos de um poliedro.

Teorema de Euler:

Em todo poliedro convexo cujo número de vértices é V, o número de arestas é A e o número de faces é F, vale a relação:

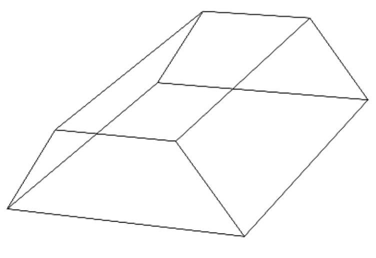
V – A + F = 2

Exemplo: No poliedro convexo ilustrado na Figura 20, temos V = 8, A = 12 e F = 6. Observe que:

V – A + F = 2

8 – 12 + 6 = 2

Figura 20 - Poliedro convexo.



Fonte: A autora.

Atividade 5.1:

Determine o número de faces de um sólido que apresenta 10 arestas e 6 vértices.

A resolução esperada é a que segue:

$$V - A + F = 2$$

$$6 - 10 + F = 2$$

$$-4 + F = 2$$

$$F = 4 + 2$$

$$F = 6$$

O sólido possui, portanto, 6 faces.

2.2.4 Segundo momento – Resolução de atividades

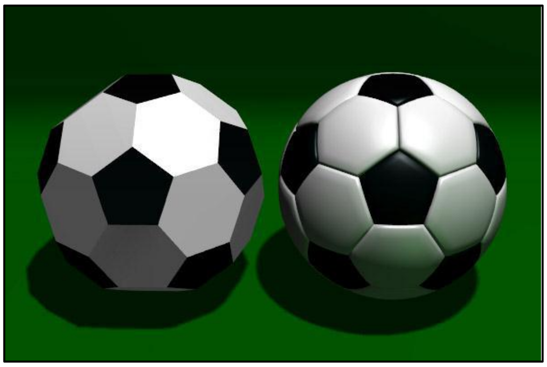
Logo após concluir a explicação questionar os alunos a respeito das dúvidas, a professora irá oportunizar aos estudantes que resolvam os seguintes exercícios.

Atividade 1:

Objetivo: Espera-se que os alunos sejam capazes realizar a atividade utilizando a relação de Euler e os conhecimentos já adquiridos até o momento.

1.1) A bola de futebol que apareceu pela primeira vez na copa de 70 foi inspirada em um conhecido poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. (Figura 21) quantos vértices possui tal poliedro?

Figura 21 - Bola futebol, exemplo de poliedro.



Fonte: (RODRIGUES, 2014).

Espera-se que o aluno resolva da seguinte forma:

Substituindo a quantidade de faces (30)na Fórmula de Euler, temos a seguinte equação:

V – A + 32 = 2, ou seja, V – A + 30 = 0

Para fazer a contagem das arestas, observamos que cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces. Então, contando as arestas de todas as faces e somando os resultados, temos que,

2A = 5 .(número de faces pentagonais) + 6 .(número de faces hexagonais), ou seja, 2A = 5 .(12)+ 6 .(20)= 180 . Logo, A = 90.

Assim, o número total de arestas desse sólido é igual a 90. Sabendo que V – A + 30 = 0, teremos V − 90 + 30 = 0, ou seja, V = 60.

1.2) Em um poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces têm esse poliedro?

Espera-se que a solução apresentada pelos alunos seja a seguinte:

Sendo, F = V, e

utilizando a relação de Euler, temos: 10 + 2 = 2V

Logo V = 6.

Logo o número de faces também é 6.

1.3) Um poliedro convexo tem 20 vértices e 30 arestas. Lembre-se: V + F = 2 + A.

Este poliedro é um:

A) icosaedro (20 faces).

B) cubo (6 faces).

C) dodecaedro (12 faces).

D) octaedro (8 faces).

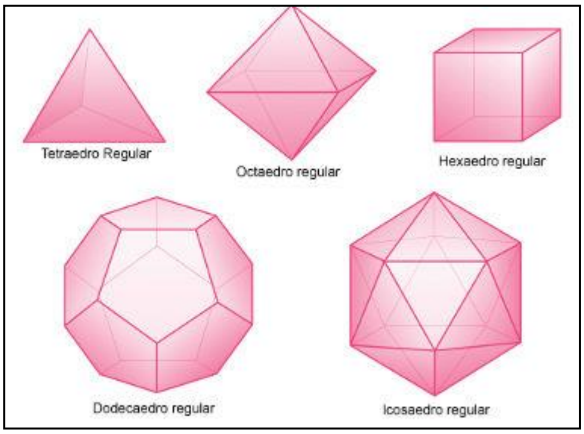
E) tetraedro (4 faces).

A resolução esperada é a seguinte: considerando que o poliedro convexo tem 20 vértices e 30 arestas, ao aplicar a Relação de Euler, dada no enunciado, obtém-se 20 + F = 2 + 30, ou seja F = 12. Ou seja, a alternativa correta é C.

O próximo item tem como objetivo determinar o número de faces, vértices e arestas.

1.4) Observe a Figura 22 e complete o quadro:

Figura 22 - Ilustra cinco poliedros regulares.



Fonte: (SILVA, [201-])

Complete o quadro abaixo:

Quadro 2 - Atividade 1.4

NOME	TIPO DE FACE	NÚMERO DE FACES	NÚMERO DE ARESTAS	NÚMERO DE VÉRTICES

Fonte: A autora

As respostas esperadas constam no quadro abaixo.

Quadro 3 - Atividade 1.4 com respostas esperadas.

NOME	TIPO DE FACE	NÚMERO DE FACES	NÚMERO DE ARESTAS	NÚMERO DE VÉRTICES
Tetraedro	Triângulo	4	6	4
Hexaedro(cubo)	Quadrilátero	6	12	8

Octaedro	Triângulo	8	12	6
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20
Icosaedro	Triângulo	20	30	12

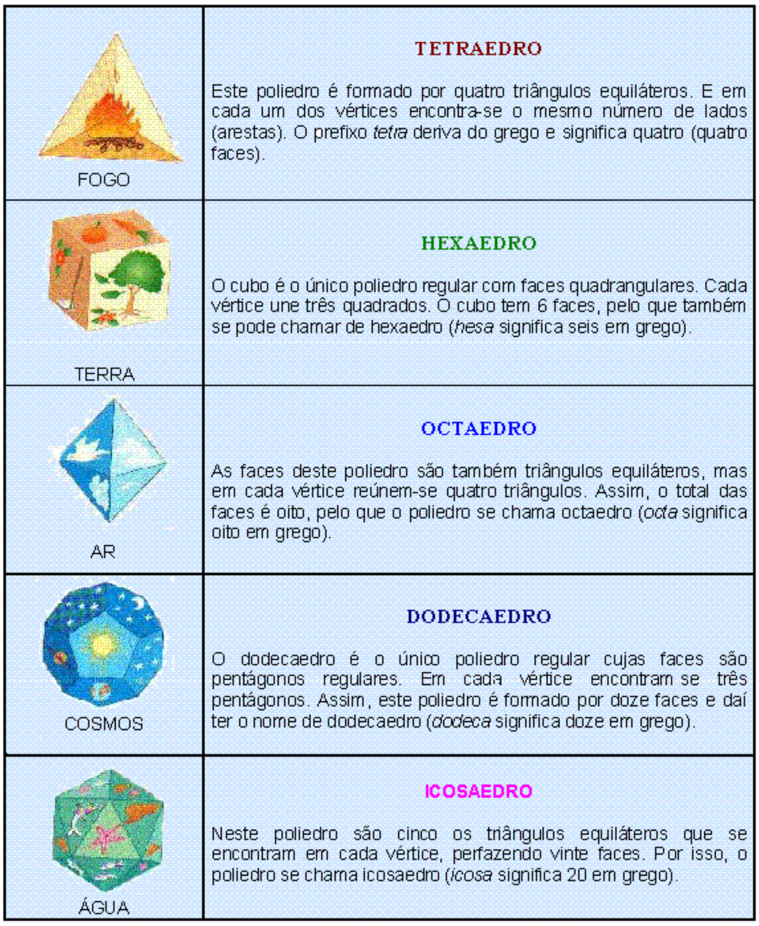
Fonte: A autora

2.2.5 Terceiro momento- Atividade Final

Objetivo: Espera-se que a partir dos Poliedros construídos, os alunos deverão manipular o número de lados, arestas e vértices, planificação e percepção de como serão a forma tridimensional.

Observe a (Figura 23) e em seguida confeccione alguns dos Poliedros regulares.

Figura 23 - Poliedros regulares e os elementos que representam.



Fonte: (GRAÇA, 2012).

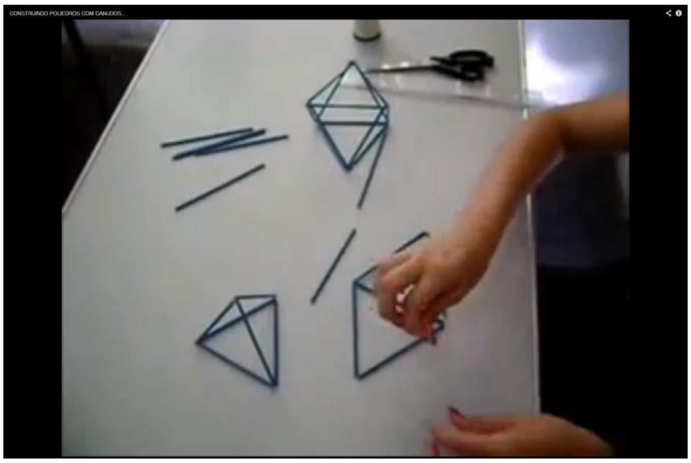
Inicialmente a turma será dividida em grupos. Em seguida, com o auxílio e orientações do professor, será proposta a construção de alguns dos poliedros regulares.

Espera-se que os alunos ilustrem os poliedros construídos com palitos, com motivos da origem do: ar, água, terra, cosmos e fogo.

Antes de iniciar a atividade será reproduzido no projetor multimídia o vídeo[2] afim de motivá-los para confecção dos poliedros.

Durante a atividade será utilizado o projetor multimídia e os seguintes materiais: canudos, régua, tesoura, linha e agulha. Na Figura 24 está ilustrado o processo de construção esperado.

Figura 24 - Imagem com ilustração de poliedros confeccionados.



Fonte: Recortes do vídeo apresentado.

Espera-se que os alunos sejam capazes de construir os poliedros utilizando material disponibilizado.

[2]Construindo poliedros com canudos, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=FXcrq3QSAZI

3 ANÁLISE A POSTERIORI

As atividades foram aplicadas em quatro aulas de cinquenta minutos cada, na sala de aula da Escola Estadual de Educação Básica Professora Lelia Ribeiro, em uma turma de 22 alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Nas 2 primeiras aulas foram trabalhados os conceitos e as atividades sobre tópicos dos poliedros envolvendo os conteúdos estudados. No terceiro e quarto períodos foram realizadas as construções dos poliedros regulares.

3.1 PRINCIPAIS MOMENTOS

No início da aula, após a professora, autora dessa monografia se apresentar aos alunos, foram explicados o objetivo e os motivos pelos quais a proposta didática seria realizada na Escola. Os estudantes foram muito receptivos, participando das atividades com dedicação.

A proposta sobre poliedros foi bem recebida; alguns alunos logo reconheceram, quando questionados sobre quais poliedros tinham semelhança em comum. Enquanto isso outros estudantes ficaram buscando similaridades, investigando padrões entre faces e vértices. Em pouco tempo começaram as perguntas: “tem a ver com as faces”? “tem que ter mesmo número de lados?” Alguns argumentaram que, “alguns têm faces triangulares, e outros “quadrados”, “alguns tem polígonos nas pontas”. Foi questionado “o que seria nas pontas”?, um deles respondeu “ possuem polígonos paralelos”, o restante da turma concordou. Assim, o objetivo da atividade investigada foi validado.

3.1.1 Segundo momento da aula

Questionados, a partir do material estudado sobre poliedros, a maioria dos alunos respondeu com rapidez o que seriam vértices, faces e arestas.

A partir dos exercícios propostos para determinar faces, arestas e vértices, os estudantes tiveram maior dificuldade na Atividade 1. Eles tiveram dúvidas de como encontrar o resultado, pois não havia todas as informações numéricas no problema. Alguns multiplicaram as doze faces por cinco, pois eram pentagonais, ou multiplicaram vinte faces por seis. E, após somavam os dois resultados obtidos. Foi observado que os alunos foram fazendo tentativas, até o momento que foram questionados sobre a Relação de Euler. Em seguida os estudantes começaram a fazer as substituições na “fórmula” que foi colocada no quadro. A resolução da atividade se deu de forma coletiva, uns ajudando os outros e respondendo às perguntas dos colegas. Dessa forma, foi chegado ao resultado esperado, validando assim a atividade proposta. Na Figura 25 está ilustrada a realização das atividades propostas.

Figura 25 - Realização da Atividade.

Fonte: A autora.

Na Atividade 2, alguns alunos tiveram dificuldade em perceber que o número de faces era igual número de vértices, então foi questionado o que eles deveriam fazer com esta informação, ou seja, $F = V$. Uma aluna respondeu bem rápido “substitui V no lugar de F”, os demais colegas concordaram e assim concluíram a atividade obtendo resultado positivo.

Na Atividade 3 os estudantes substituíram corretamente os dados fornecidos pelo problema e comprovaram que a Relação de Euler era satisfeita. Na atividade 4, onde os alunos deviam completar a tabela, alguns chegaram ao resultado contando as faces, arestas e vértices através das figuras, outros obtiveram o resultado fazendo uso da formula da Relação de Euler. Assim todos concluíram com êxito a atividade.

3.1.2 Terceiro momento da aula

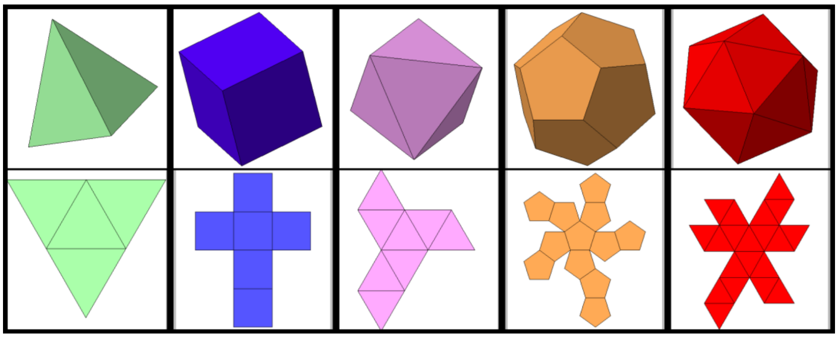
Durante o terceiro momento foi proposto a construção dos Poliedros, a qual foi bem aceita. Todos os alunos adoraram construí-los e observar como cada figura tomava forma.

Alguns alunos ao construíram o primeiro poliedro, o tetraedro e questionaram a dificuldade que teriam ao construir os próximos.

À medida que os alunos foram construindo, a professora/pesquisadora se aproximou dos grupos e aproveitou para retomar alguns conceitos da geometria plana.Também foram retomadas as definições de poliedro, vértices, faces e arestas e foi solicitado aos alunos para que contassem o número de faces, de vértices e arestas, observando se havia alguma regularidade numérica entre os poliedros construídos.

Foi um pouco difícil organizar a sala de forma que todos os alunos realizassem as mesmas atividades, tendo em vista que alguns alunos tiveram mais facilidade em construir seus poliedros que os outros. Uma das dificuldades encontradas pelos alunos foi deixar as faces iguais. Para suprir essa dificuldade os grupos foram auxiliados, retomando os conceitos da Geometria Plana de ângulo, perpendicularidade e paralelismo. Enquanto construíam o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, a professora/pesquisadora foi passando nos grupos, auxiliando-os e falando também sobre as características dos poliedros que estavam construindo. Os alunos foram instigados a perceber que, o octaedro era a união de duas pirâmides de bases quadradas. Alguns dos alunos que construíram mais rapidamente, tinham construído o octaedro unindo dois tetraedros. Com isso, notei que eles estavam empolgados em construir. Novamente, lembrei-os que deveriam contar as faces, os vértices e arestas, observar a fim de fazerem suas observações e anotações. A Figura 26ilustraalguns exemplos de poliedros e suas planificações.

Figura 26 - Poliedros e suas planificações.

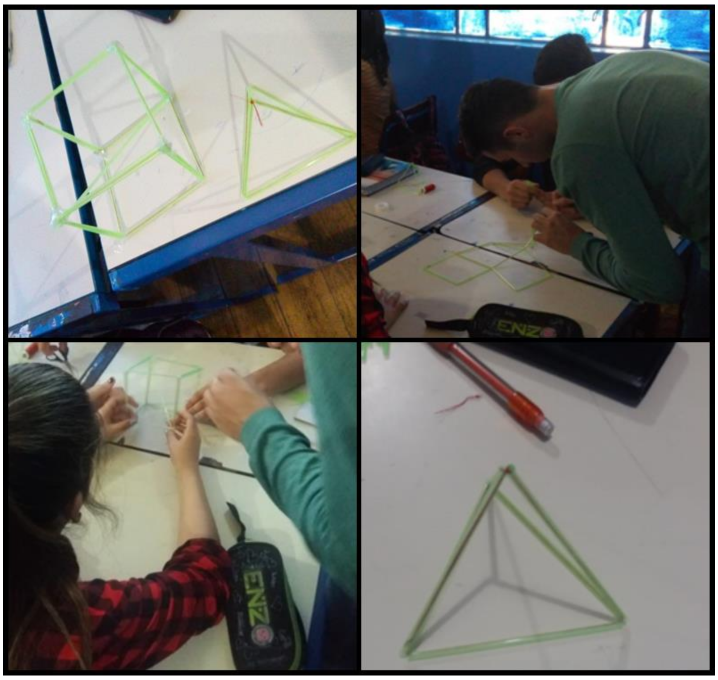


Fonte: A autora

Quanto aos poliedros construídos, alguns alunos levaram para casa, outros desmancharam, os que não foram construídos ficaram como tarefa para a aula seguinte com professor da turma.

Cabe destacar o quanto os alunos consideraram divertido realizar a construção dos poliedros regulares. Percebemos que essa atividade, foi muito importante para a compreensão dos alunos sobre o resultado final da aula, o que possibilitou o entendimento dos exercícios apresentados anteriormente, podendo assim sanar todas as dúvidas, através do manuseio do material concreto. Na figura 27 está ilustrado momentos da atividade prática com o material concreto.

Figura 27 – Construção dos Poliedros.



Fonte: A autora.

Observou-se também que o uso do material concreto além de tornar a aula mais interessante e produtiva, leva os alunos a interagir uns com os outros na hora de confeccionar seus materiais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observa-se que as aulas ministradas durante a realização deste trabalho, oportunizaram pesquisar uma nova experiência enquanto professora. Ao finalizar a aplicação do plano de aula proposto pode-se dizer que os objetivos foram alcançados. Esperava-se que as aulas fossem dinâmicas e produtivas, que os alunos tivessem interesse por aquilo que estavam fazendo e aprendessem com isso, e de fato isso aconteceu.

Acredita-se que a dinamização do plano de ensino foi muito boa. São várias as possibilidades do professor em sala de aula, quando se tem como auxílio, a visualização. No decorrer deste trabalho, observou-se a importância da utilização do material concreto para auxiliar na aprendizagem de Geometria. A técnica se mostrou aplicável, divertida e útil. Aplicável, pois os materiais são de baixo custo e fácil acesso; divertida, pois motivou os alunos. Também mostrou que devemos estimular a construção no pensamento matemático do aluno, que por sua vez tenha a oportunidade de ampliar seus conhecimentos levando o mesmo a uma aprendizagem significativa.

Foi possível verificar que essa metodologia favoreceu na concentração dos alunos, participação, envolvimento, levantamento de hipóteses, oportunidade de estarem mais preparados para resolver os problemas cotidianos.

Caso futuramente for oportunizada uma nova aplicação desta aula em outras turmas, seria feita sim, pois se acredita ter dado certo. O carinho recebido dos alunos nas aulas, foi bem gratificante, mas além do que foi trabalhado também desenvolveria uma atividade para trabalhar com o software GeoGebra, pois neste trabalho não foi possível, visto que a escola não contava com laboratório de informática. Os ambientes tradicionais e informatizados se complementam, gerando um novo ambiente de aprendizagem, próprio do momento moderno em que vivemos.

Os resultados desta pesquisa permitiram afirmar que os estudos dos conceitos específicos das diferentes áreas do conhecimento bem como as metodologias de ensino devem continuar. Por fim, estas reflexões mostram um vasto caminho para pesquisas, com muitas alternativas ainda a serem exploradas e aprofundadas em estudos futuros.

REFERÊNCIAS

AWILA, H. F. **Uma Alternativa Didática para o Estudo de Prismas no Ensino Médio com Applets Construídos no Geogebra**. 2015. 19 f. Monografia (Especialização em Educação a Distância) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BARROS, T. E. ; DIAS, C.C.; ROSA, M. B.; SAMPAIO, J.C. V. **Matemática na Prática**, Módulo II - Geometria Espacial. Brasília, 2011.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: Ministério do Meio Ambiente**. Secretaria de Educação Fundamental**, 1998.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: matemática. Brasília: **Ministério da Educação**, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação. Orientações curriculares para o ensino médio / Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, vol. 2, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> Acesso em: 15 nov. 2018.

BRIANEZ, F. **Conceito e propriedades elementares de poliedros e seu ensino.**2013. 12 p., 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Paulo, São Carlos, SP, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE,L.R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, v. 2, Ensino Médio, 2012.

GRAÇA, Nina. **Gênese dos volumes**. 8 set. 2012. Disponível em: <http://animixam.blogspot.com/2012/09/genese-dos-volumes-cosmicos-perspectiva.html>. Acesso em: 15 fev. 2019.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA. 1991.

LORENZATO, S. (org.). Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Editora Autores Associados LTDA**. Coleção Formação de Professores**. Campinas, SP, 2006.

MIALICH, F. R. Poliedros e Teorema de Euler. 2013. 14 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – **Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho**, São José do Rio Preto, SP, 2013.

NETO, A. P. Material Teórico - **Módulo de Geometria Espacial 1** - Fundamentos Poliedros - parte 1. Portal da Matemática – OBMEP.[201-] . Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5x00kfblmiw44.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Colégio web. **Superfície poliédrica**. 31 maio 2012. Disponível em: <https://www.colegioweb.com.br/dietros-triedros-poliedros-e-angulos-poliedricos/poliedros.html>. Acesso em: 15nov. de 2018.

RICHESON, D. S. Euler´c Gem: **The Polyhedron Formula and the Birth of Topology.** Princeton University Press, p. 315, 2008.

RODRIGUES, Márcia Frank de Rodrigues. **Icosaedro Truncado**. 22 fev. 2014. Disponível em: <http://frankderodrigues.blogspot.com/2014/02/icosaedro-truncado.html>. Acesso em: 15nov. 2018.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. G**eometria de posição e poliedros. Poliedros regulares. Poliedros convexos formados por polígonos regulares e congruentes são regulares.** [2014]. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poliedros-regulares.htm>. Acesso em: 10 abr. 2019.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Poliedros**; Brasil Escola. [201-]. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/poliedros.htm>. Acesso em:7 de mar. 2019.

THELMA**. Casa em forma de poliedro** – Tóquio; Arquitetando na net. 11 abril 2011. Disponível em: < http://arquitetandonanet.blogspot.com/2009/07/casa-em-forma-de-poliedro-toquio.html>. Acesso em: 7 fev. 2019.

Anexo A - Relação de frequências das aulas realizadas.

Relação de frequência das aulas realizadas

E. E. E. B. PROFa. LELIA RIBEIRO
Decr. Reorg. nº 26514
D. O. 26/12/77
São Martinho da Serra - RS

Escola Estadual de Educação Básica Professora Lelia Ribeiro

São Martinho da Serra

Relação de horários das aulas voluntárias de Poliedros e Teorema e Euler da Prof. Priscila S. Frigo

Data	Horário
30/10/18	7:50 - 8:40
30/10/18	8:40 - 9:30
30/10/18	10:30 - 11:20
30/10/18	11:20 - 12:10
-	-

Patric Kuneck da Silva
Professor Regente

Carla Ribeiro dos Santos
DIRETORA
ID. 2474530/0102

Apêndice A - Material dirigido disponibilizado aos alunos

POLIEDROS E TEOREMA DE EULER

Prof. Priscila S. Frigo

priscilafrigo@hotmail.com

Primeiro momento - Poliedros

Atividade 1:

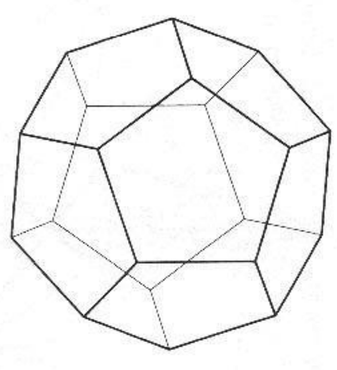
I) Determine: o número de faces, o número de arestas e o número de vértices do poliedro convexo ilustrado na figura 1:

____ faces

____ arestas

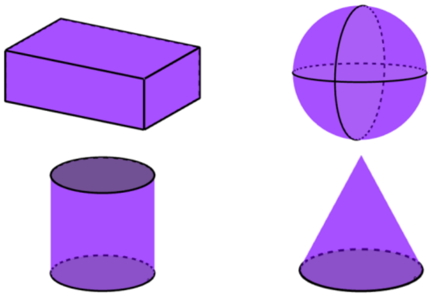
____ vértices

Figura 1**:** Poliedro



As figuras geométricas espaciais também recebem o nome de sólidos geométricos, que são divididos em: poliedros e corpos redondos. Vamos abordar as definições e propriedades dos poliedros.

Figura 2: Alguns exemplos de sólidos geométricos.



Observação: a esfera, o cilindro e o cone apresentados na figura 2 não farão parte de nosso estudo, constam propositalmente como exemplos de sólidos geométricos para não causar uma ideia incorreta de que apenas figuras limitadas por polígonos são assim classificadas.

Poliedros:

Segundo material retirado do site (http://matematica.obmep.org.br/), do autor Angelo Papa Neto [2016], dizemos que a união $\mathcal{P}$ é um poliedro se valem as seguintes condições:

(1) $\mathcal{P}$ é conexo, ou seja, dois polígonos quaisquer contidos em $\mathcal{P}$ são conectados.

(2) Cada lado de um polígono contido em$\mathcal{P}$ é lado de exatamente mais um polígono contido em $\mathcal{P}$.

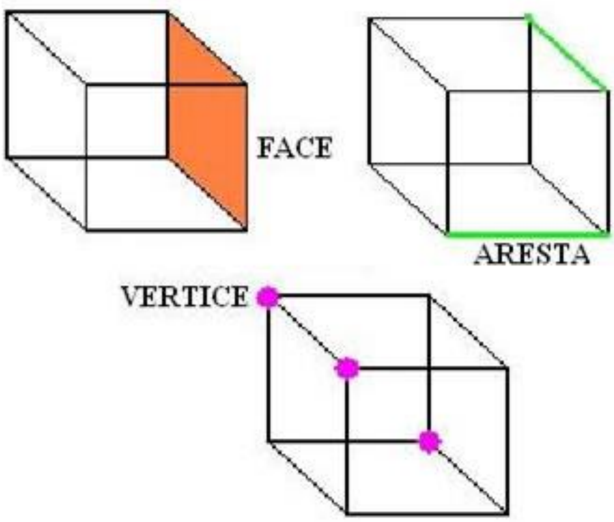
(3) Se Vé vértice de um polígono contido em $\mathcal{P}$, todos os polígonos que têmVcomo vértice formam um único circuito.

(4) Dois polígonos adjacentes contidos em$\mathcal{P}$ são sempre não coplanares.

Os polígonos contidos em $\mathcal{P}$ são denominados de faces de$\mathcal{P}$, ao passo que os lados desses polígonos são as arestas de $\mathcal{P}$e os vértices desses polígonos são os vértices de $\mathcal{P}$.

Além disso vamos lembrar os alunos quequando as superfícies que limitam um sólido geométrico são determinadas pela união finita de polígonos (faces), eles recebem o nome de Poliedros (do grego *póly* que significa vários e *hedra* que significa faces). Nesses, a interseção das faces é um ponto (vértice) ou um segmento (aresta). Veja exemplo na Figura 3.

Figura 3:



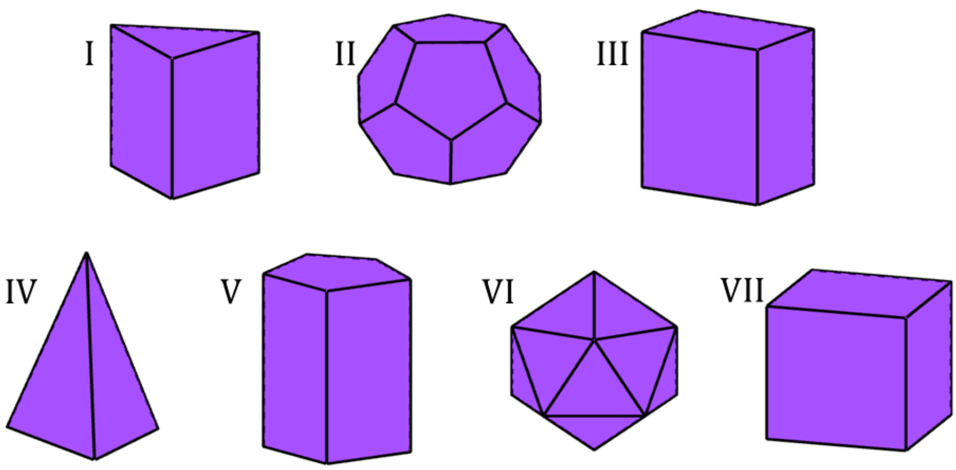
Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Atividade 2:

Observe a figura abaixo e responda:

II) Há Poliedros com semelhanças em comum? Quais?

Figura 4: Diferentes formatos de Poliedros

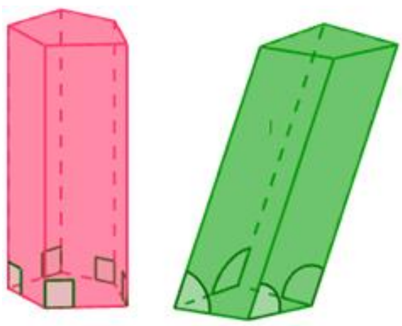


Há Poliedros com semelhanças em comum? Quais?

Os Poliedros I, III, V e VII são chamados de PRISMAS – têm dois polígonos congruentes e paralelos como bases e paralelogramos como faces laterais.

Um Prisma pode ser reto ou oblíquo. Quando as arestas laterais formam um ângulo reto com o plano da base, ele é dito Prisma reto, caso contrário, oblíquo. Exemplo (figura 5):

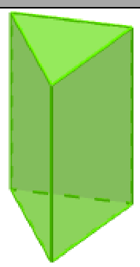
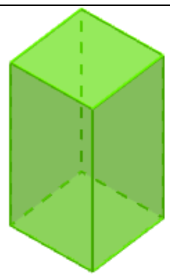
Figura5: Da esquerda para a direita, prisma reto e prisma oblíquo.

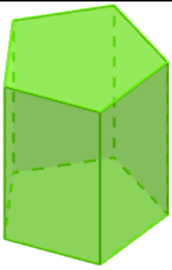


A nomenclatura dos Prismas é determinada pela sua base, isto é, Prisma cuja base é um triângulo se chama Prisma triangular, com base quadrada, Prisma quadrangular e assim por diante.

Atividade 3:

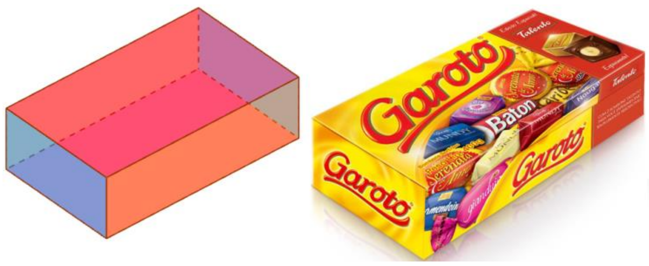
Utilizando os conhecimentos adquiridos até o momento complete a tabela abaixo:

Prisma	Base	Nomenclatura
		
		

Um exemplo, além dos que já foram citados é o prisma retangular comum, por representar a maioria das embalagens, onde tem como base o retângulo. A figura 6 ilustra um exemplo.

Figura 6 – Caixa de bombom em seu formato tradicional de Prisma Retangular.



O Prisma Retangular também é chamado de Paralelepípedo Retângulo ou Bloco Retangular.

Atividade 4:

Um poliedro é formado por faces, que, por sua vez, são polígonos, figuras geométricas planas. Essas figuras estão definidas dentro de um plano. Lembre-se de que todo plano divide o espaço em duas partes, os semiespaços.

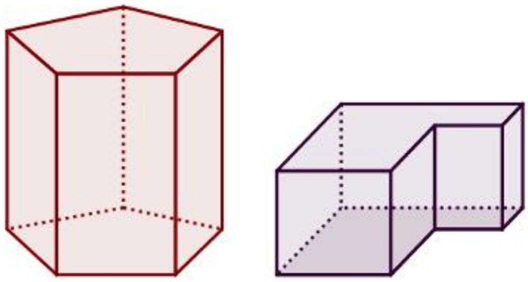
Um poliedro é dito convexo quando cumpre as três condições seguintes:

→ Todas as faces desse poliedro são polígonos convexos em planos distintos;

→ Todo o poliedro pertence a apenas um semiespaço, determinado por qualquer uma de suas faces;

→ Cada aresta pertence a apenas duas faces.

Figura 7: Polígono convexo à direita e polígono não convexo à esquerda.



Dentre os poliedros convexos existentes, existem alguns também considerados Poliedros de Platão, pois todas as faces possuem o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número de arestas. Veja o exemplo de cinco sólidos regulares perfeitos:

Figura 8 - Exemplo Poliedros regulares.

Relação de Euler

Atividade 5:

A relação de Euler é usada para relacionar o número de faces, vértices e arestas de poliedros convexos. Assim, ela pode facilitar a contagem desses elementos.

A relação criada pelo matemático suíço **Leonhard Euler** possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns não convexos. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar o número de elementos de um poliedro.

Em todo poliedro convexo cujo número de vértices é V, o número de arestas é A e o número de faces é F, vale a relação:

V – A + F = 2

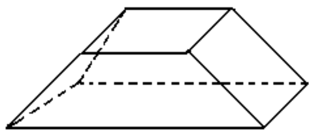
No poliedro convexo ao lado, temos V = 8, A = 12 e F = 6. Observe que:

V – A + F = 2

8 – 12 + 6 = 2

2 = 2

Figura 9: Poliedro convexo



1º Exemplo:

Determine o número de faces de um sólido que apresenta 10 arestas e 6 vértices.

Resolução:

$$V - A + F = 2$$

$$6 - 10 + F = 2$$

$$-4 + F = 2$$

$$F = 4 + 2$$

$$F = 6$$

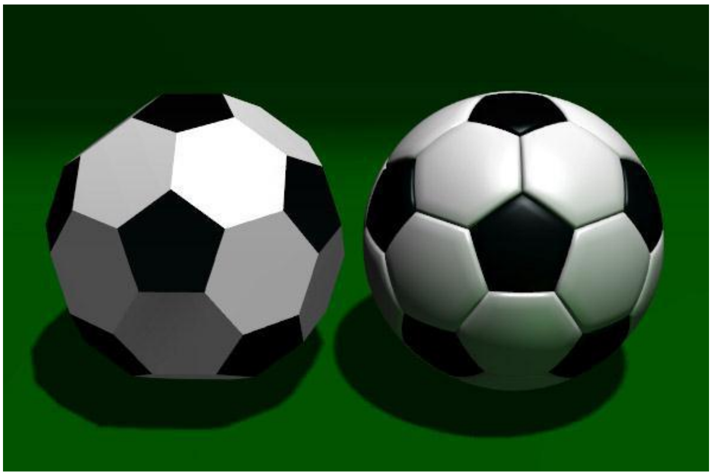
O sólido possui, portanto, 6 faces.

2.2.4 Segundo momento – Resolução de atividades utilizando o que foi estudado até o momento.

Atividades:

Atividade 1) A bola de futebol que apareceu pela primeira vez na copa de 70 foi inspirada em um conhecido poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Perguntam-se quantos vértices possui tal poliedro.

Figura10: Bola de futebol, exemplo de poliedro



Atividade 2) Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces têm esse poliedro?

Atividade 3) Um poliedro convexo tem 20 vértices e 30 arestas. Lembre-se: V + F = 2 + A. Este poliedro é um:

A) icosaedro (20 faces).

B) cubo (6 faces).

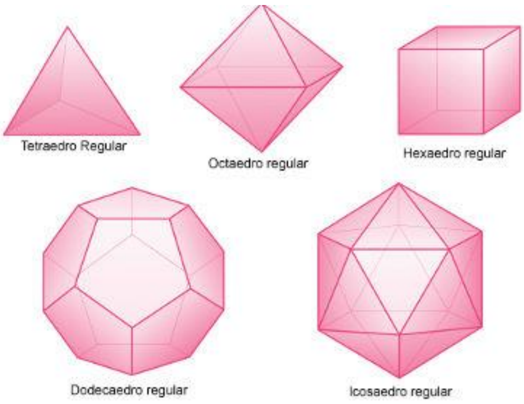
C) dodecaedro (12 faces).

D) octaedro (8 faces).

E) tetraedro (4 faces).

Atividade 4) Observe as figuras e complete a tabela:

Figura 11: Ilustra cinco poliedros regulares



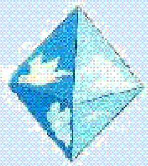
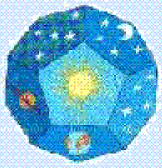
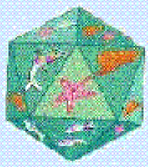
Complete a tabela abaixo.

NOME	TIPO DE FACE	NÚMERO DE FACES	NÚMERO DE ARESTAS	NÚMERO DE VÉRTICES
Tetraedro				
Hexaedro(cubo)				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

2.2.5 Terceiro momento- Atividade Prática

Atividade final)

Observe o quadro abaixo e em seguida confeccione alguns dos Poliedros regulares.

 FOGO	**TETRAEDRO** Este poliedro é formado por quatro triângulos equiláteros. E em cada um dos vértices encontra-se o mesmo número de lados (arestas). O prefixo *tetra* deriva do grego e significa quatro (quatro faces).
 TERRA	**HEXAEDRO** O cubo é o único poliedro regular com faces quadrangulares. Cada vértice une três quadrados. O cubo tem 6 faces, pelo que também se pode chamar de hexaedro (*hesa* significa seis em grego).
 AR	**OCTAEDRO** As faces deste poliedro são também triângulos equiláteros, mas em cada vértice reúnem-se quatro triângulos. Assim, o total das faces é oito, pelo que o poliedro se chama octaedro (*octa* significa oito em grego).
 COSMOS	**DODECAEDRO** O dodecaedro é o único poliedro regular cujas faces são pentágonos regulares. Em cada vértice encontram se três pentágonos. Assim, este poliedro é formado por doze faces e daí ter o nome de dodecaedro (*dodeca* significa doze em grego).
 ÁGUA	**ICOSAEDRO** Neste poliedro são cinco os triângulos equiláteros que se encontram em cada vértice, perfazendo vinte faces. Por isso, o poliedro se chama icosaedro (*icosa* significa 20 em grego).

Antes de iniciar a atividade o será reproduzido no projetor multimídia ovídeo (Construindo poliedros com canudos,Daniel de Freitas,2010) para confecção dos poliedros.

Durante a atividade será utilizado o projetor multimídia e os seguintes materiais: canudos, régua, tesoura, linha e agulha.

Figura 13: Imagem com ilustração poliedros confeccionados no vídeo.

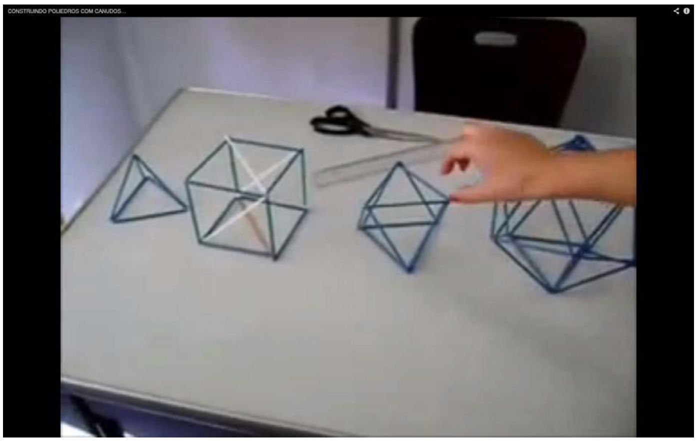


Figura 14: Imagem com ilustração poliedros confeccionados no vídeo.