UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
NO ENSINO MÉDIO

Camila Ines Ribeiro Cabral

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

Santa Maria, RS
2015

Camila Ines Ribeiro Cabral

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio (EaD), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio**.

Orientadora: Profª Drª Sandra Eliza Vielmo

Santa Maria, RS
2015

Camila Ines Ribeiro Cabral

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Especialização em Ensino da Matemática no Ensino Médio (EaD), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Ensino da Matemática no Ensino Médio**.

Aprovado em 19 de dezembro de 2015:

____
Sandra Eliza Vielmo, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

____
Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

____
Fabiane Cristina Höpner Noguti,Dra. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2015

RESUMO

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

AUTORA: Camila Ines Ribeiro Cabral
ORIENTADORA: Sandra Eliza Vielmo

Muitos alunos do Ensino Médio apresentam dificuldade em compreender os conceitos relacionados às funções seno e cosseno, não entendendo como uma função de domínio real pode ter relação com valores até então calculados a partir de ângulos em graus. Neste sentido, o presente trabalho propôs-se a realizar um estudo a fim de verificar se a utilização de recursos tecnológicos, mais precisamente o software de geometria dinâmica GeoGebra, em sala de aula auxiliaria os alunos nessa compreensão. Para tanto, foi efetuada pesquisa bibliográfica sobre o assunto e elaborada uma sequência didática acerca deste tema, composta por atividades que buscavam facilitar a compreensão dos conceitos e a construção dos gráficos das funções seno e cosseno. A sequência didática foi desenvolvida em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado do Rio Grande do Sul. Após o desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática, por meio da aplicação de um questionário, foi possível constatar que a utilização do GeoGebra em sala de aula pode motivar os alunos ao estudo de Matemática e facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, facilmente visualizados através da utilização deste software.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas Seno e Cosseno. GeoGebra.Sequência Didática.

ABSTRACT

THE USE OF GEOGEBRA IN THE PROCESS OF LEARNING THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS SINE AND COSINE

AUTHOR: Camila Ines Ribeiro Cabral
ADVISER: Sandra Eliza Vielmo

Many high school students have difficulty understanding the concepts related to the sine and cosine functions, not understanding how a real domain function can be related to values previously calculated from angles in degrees. In this sense, this study aimed to conduct a study to determine whether the use of technological resources, more precisely the dynamic geometry software GeoGebra, in the classroom would help students understand this. Thus, it was performed literature on the subject and elaborate a didactic sequence on this subject, composed of activities that sought to facilitate understanding of the concepts and the construction of graphs of sine and cosine functions. The teaching sequence was developed in a class of second year of high school of a private school in the state of Rio Grande do Sul. After the development of the proposed activities in the didactic sequence, by applying a questionnaire, it was found that the use of GeoGebra in the classroom can motivate students to study mathematics and facilitate the understanding of mathematical concepts, easily viewed by using this software.

Keywords: Trigonometric Functions Sine and Cosine. GeoGebra. Didactic Sequence.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido a partir da aplicação de uma sequência didática sobre as funções trigonométricas seno e cosseno, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado do Rio Grande do Sul.

A escola conta com Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e EJA EaD. Atualmente possui cerca de 50 professores e 580 alunos, dos quais 120 estão no Ensino Médio, e, em sua maioria, são provenientes de famílias de classe média/alta.A turma do segundo ano do Ensino Médio, selecionada para esta pesquisa, é composta por 28 alunos, sendo que um aluno é mexicano e está no Brasil fazendo intercâmbio.

A turma já havia iniciado o conteúdo de trigonometria com o professor titular da disciplina, tendo estudado sua origem, as unidades de medida de ângulos em graus e radianos, a trigonometria em triângulos quaisquer e no triângulo retângulo, a circunferência trigonométrica, os elementos seno, cosseno e tangente, redução ao primeiro quadrante, simplificações trigonométricas e iniciado o estudo conceitual das funções trigonométricas seno e cosseno. A sequência didática apresentada nesta pesquisa foi planejada visando trabalhar a visualização gráfica das relações entre graus e radianos e, posteriormente, das funções seno e cosseno.

Em geral, o conteúdo de trigonometria é abordado em sala de aula de uma forma mecânica, caindo na rotina da mera exposição e, consequentemente, as dificuldades dos alunos não chegam a ser sanadas (MAIA, 2013). Um exemplo comum de dificuldade encontrada pelos alunos é o fato de que, em geral, os valores de seno e cosseno estão relacionados a argumentos dados em graus. Assim, quando se faz necessário pensar em seno e cosseno como funções cujo domínio é o conjunto dos números reais, os alunos não conseguem, por vezes, compreender qual é a relação entre os graus e suas respectivas correspondências em radianos, ou seja, em números reais.

Com objetivo de buscar uma forma de auxiliar na compreensão destas dificuldades, foi desenvolvida uma estratégia pedagógica na qual, por meio da utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra, foi trabalhada a relação entre as medidas de arcos em graus e radianos, para posteriormente a construção dos gráficos das funções seno e cosseno.

Nos capítulos a seguir, será apresentada uma breve fundamentação teórica sobre funções trigonométricas e utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino aprendizagem de conteúdos matemáticos, as análises a priori e a posteriori da sequência didática proposta e as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Muitas vezes, os conceitos de *seno e função seno* ou *cosseno e função cosseno* são tratados de formas diferentes em um mesmo livro didático. Quando casos assim acontecem, no estudo de seno e cosseno no círculo trigonométrico, estes são definidos como funções de uma variável real tais que a "volta completa" está associada ao valor 2π ($\approx 6{,}28\ rad$), ainda que, poucas páginas antes as palavras seno e cosseno estivessem relacionadas a grandezas angulares, medidas, até então, em graus (QUINTANEIRO, 2010).

Muitos autores tratam os elementos ângulos e arcos sem nenhuma distinção, onde a ideia de que a unidade radiano expressa também uma medida linear (a medida do arco subentendido pelo ângulo) não fica clara.

O termo *radiano* foi impresso, pela primeira vez em 05 de junho de 1873, em Queens, nos Estados Unidos, em exames da faculdade de James Thonson, tendo sido adotado na busca da simplificação de fórmulas matemáticas, como derivadas e integrais de funções trigonométricas e fórmulas físicas, como expressões para aceleração e velocidade em movimentos curvilíneos. Anteriormente, por volta de 1871, Thomas Muir já havia hesitado entre os termos *rad*, *radial* e *radian* (radiano), sendo que, em 1874, adotou definitivamente *radian,* após consultar trabalhos de Thonson. Acredita-se que estes termos utilizados sejam inspirados pela palavra *radius* (raio),(COSTA, 1997).

A definição de radiano em trigonometria usa o raio como unidade de medida para a meia corda e para o arco, cuja proposta

> está em articular a trigonometria de arcos e cordas com a trigonometria anterior aos Elementos de Euclides, que relacionavam razões de lados de triângulos semelhantes. Note que se o raio é a unidade de medida, o comprimento da meia corda (isto é, o seno) torna-se uma razão entre lados do triângulo retângulo. Assim, toda trigonometria feita em triângulos retângulos relacionando ângulos a razões de segmentos equivale a relações entre arcos e cordas feitas na circunferência (no primeiro quadrante). (QUINTANEIRO, 2010, p.10)

Assim, o radiano pode ser considerado como uma *unidade de medida linear*, identificada com o comprimento do raio da circunferência ou, como *unidade de medida angular*, sendo o ângulo cujo arco correspondente é igual ao raio da circunferência, onde para a conversão entre estes dois tipos de medida, são utilizados os sistemas sexagesimal (para medir o ângulo central) e decimal (para medir o raio). Segundo Costa (1997), o aluno que sempre trabalhou com ângulos medidos em graus, pode não compreender a necessidade de se trabalhar com outra unidade de medida e, nesta situação, o professor terá que estar alerta, apresentando abordagens de modo que esta dificuldade seja sanada.

Estudos de Nacarato (2003), Fonseca (2010) e Pereira (2011) apontam a amplitude da dificuldade dos alunos no que diz respeito aos conceitos básicos de trigonometria, como definições de seno, cosseno e tangente, ciclo trigonométrico, compreensão da relação de medidas efetuadas em graus e/ou radianos,construção de gráficos de funções trigonométricas, entre outros. Essa deficiência pode ser atribuída à falta de conhecimentos prévios ou à forma como o conteúdo é trabalhado, baseando-se apenas na transmissão de fórmulas e regras, sem apresentar nenhum significado para muitos alunos.

Com objetivo de reverter essas dificuldades e com a ascensão das tecnologias, muitos pesquisadores tem proposto a utilização de recursos tecnológicos como aliados no processo de ensino aprendizagem, visto que "acredita-se que a educação aliada à tecnologia proporciona ao aluno uma nova maneira de aprendizagem e ao professor uma nova metodologia de ensino" (Maia, 2013, p. 2).

Segundo Borba (2011), os softwares possibilitam diferentes estratégias que podem servir de complemento a utilização de antigas tecnologias como o lápis e o papel, afetando positivamente o aluno, principalmente ao que se refere ao *feedback*, devido ao aspecto visual que proporciona.

Em relação a visualização geométrica, muitos fatores são beneficiados pela proposta do uso de softwares de geometria dinâmica no processo de ensino-aprendizagem. À medida que se fornece aos alunos materiais de apoio didático, embasados em elementos representativos do objeto geométrico a ser estudado, vai-se desenvolvendo a habilidade de visualização destes, conforme Nascimento (2012).

Seja qual for o nível de ensino ou domínio de conhecimento, é desejável que os alunos possam desenvolver ações como criar estratégias, argumentar e deduzir propriedades matemáticas. Assim, muitos são os argumentos favoráveis para o uso de softwares matemáticos. Em particular, o GeoGebra é uma destas ferramentas, que possui uma interface dinâmica entre os sistemas geométrico e algébrico, apresentando-se como "poderosa ferramenta para o estudo do comportamento variacional das funções reais" (REZENDE et al., 2012, p. 78).

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica livre[1], desenvolvido por Marcus Hohenwarter, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino, reunindo geometria, álgebra, planilha de cálculos, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos.Sua interface possui linguagem simples e vários recursos de fácil manipulação já que, a cada ferramenta escolhida, é apresentada uma orientação de como utilizá-la. Ademais, quando se executa uma tarefa na área de construção, ela também aparece na janela algébrica (OLIVEIRA et al., 2012). Ainda, segundo Lopes (2013, p. 14)

> O objetivo do Dr. Hohenwarter ao desenvolver o software foi encontrar uma ferramenta que auxiliasse no ensino da matemática, por meio de uma combinação entre entes geométricos e algébricos. Nesse sentido, o GeoGebra tem uma janela gráfica que permite visualizar e fazer uma conexão entre a fórmula algébrica e sua respectiva representação geométrica, simultaneamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Além disso, de acordo com Petla (2008, p.18-19)

> Por ser um software livre, os colaboradores podem fazer alterações em seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando, aprimorando e atualizando ferramentas nele disponível ou acrescentando novas ferramentas,com o compromisso de disponibilizarem tais melhoramentos de maneira livre também.

Pode-se enumerar as vantagens do uso do GeoGebra como recurso didático nas aulas de Matemática: permite trabalhar conceitos com maior dificuldade de compreensão por meio de variados registros de representação através da visualização e manipulação obtida por programação de comandos ou até por sua interface básica; possibilita a variação de parâmetros através do uso de seletores, realizando translações e rotações de funções, fazendo com que os alunos explorem e investiguem seu comportamento; oferece aos alunos a oportunidade de transformar em imagens visíveis o que até então tinham como imagens mentais, ou mais ainda, criar novas imagens à medida que formulam hipóteses ou realizam descobertas matemáticas, dentre outras. (OLIVEIRA et al., 2012)

Pensando nas vantagens que o GeoGebra pode oferecer e buscando solucionar as dificuldades que normalmente surgem no ensino das funções trigonométricas seno e cosseno

---
[1]Disponível em: https://app.geogebra.org/

no Ensino Médio, neste trabalho é proposta uma sequência didática desenvolvida por meio do uso deste software, com o intuito de possibilitar a compreensão dos vários elementos presentes neste conteúdo, como a correspondência das medidas de ângulos em graus e radianos, o comportamento das funções seno e cosseno e a construção do gráfico destas funções.

3. O PLANO DE AULA: ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo são apresentadas as atividades planejadas na sequência didática proposta, constando uma descrição de seus objetivos. As aulas ministradas a partir destas atividades objetivaram dar seguimento ao que a turma já vinha trabalhando com o professor titular da disciplina de Matemática. Assim, a mesma seria aplicada após o professor ter trabalhado a parte conceitual de funções seno e cosseno, de modo que a construção desenvolvida a partir desta sequência fosse baseada em conhecimentos já obtidos pelos alunos, concluindo com a construção, análise e comparação dos gráficos das funções seno e cosseno. A sequência didática em sua íntegra encontra-se nos apêndices.

As atividades foram planejadas para sete horas-aula de 50 minutos cada, conforme o planejamento descrito no Quadro 1.

Quadro 1 - Distribuição das atividades durante as aulas.

Atividades	Duração
1ª atividade e início da 2ª atividade	1 hora-aula
Encerramento da 2ª atividade e 3ª atividade	2 horas-aula
4ª atividade	1 hora-aula
Início da 5ª atividade	2 horas-aula
Encerramento da 5ª atividade e 6ª atividade	1 hora-aula

Fonte: Elaborado pela Autora.

1ª ATIVIDADE:

Objetivo: Identificar o perfil da turma.

Visto que o contato da pesquisadora com a turma ocorreria quando iniciasse a aplicação da sequência didática, a primeira atividade proposta seria o preenchimento do Questionário Inicial (Apêndice A), visando identificar o perfil dos alunos, sua idade, seu interesse em realizar o ENEM e/ou prestar vestibular e sua posição quanto a gostar ou não de Matemática. Além disso, o questionário também pretendia identificar se a turma tinha algum conhecimento sobre o software GeoGebra e se a sua utilização já havia sido proposta em sala de aula.

2ª ATIVIDADE:

Objetivo: Conhecer o software GeoGebra.

Como a sequência didática foi planejada visando maior entendimento dos alunos sobre as características e construção gráfica das funções trigonométricas seno e cosseno, era importante que os alunos conhecessem o GeoGebra. Assim, seria apresentado o software aos alunos, explicando o seu funcionamento, como se apresentam e se utilizam as janelas de álgebra e geometria e os comandos do aplicativo. Esta atividade daria o mínimo de conhecimento necessário sobre o software para o desenvolvimento das demais atividades da sequência didática, sendo que os alunos poderiam utilizá-lo, explorando-o e fazendo suas próprias construções.

Inicialmente, seriam trabalhados os comandos Ponto, Reta, Segmento, Reta Perpendicular, Polígono, Círculo dado o centro e um de seus pontos, Círculo dado o centro e o raio, Ângulo e Ângulo com amplitude fixa, explicando aos alunos como os comandos são utilizados, para quê servem e construindo os objetos, sempre chamando atenção às duas formas de visualização de cada um dos objetos construídos (janelas de álgebra e de geometria).

Trabalhados os comandos da interface de geometria, seria então trabalhado o campo de entrada, explorando a construção de objetos como anteriormente, digitando neste campo os comandos. Então, seriam criados controles deslizantes, explicando seu funcionamento e sua utilidade. Para exemplificar a utilidade e o funcionamento dos controles deslizantes seria, então, construído, a partir do campo de entrada, o gráfico das funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = ax + b$, a fim de observar como se comportam graficamente essas funções conforme os parâmetros a, b e c variam.

3ª ATIVIDADE:

Objetivo: Relembrar conceitos básicos como função crescente e decrescente, concavidade, periodicidade e amplitude de funções.

As funções trigonométricas são funções oscilatórias e importantes na resolução de triângulos e na modelagem de fenômenos periódicos, apresentando características importantes para a construção de seus gráficos.Supondo que os alunos pudessem não se lembrar dos conceitos de crescimento e decrescimento, concavidade, amplitude e período de uma função, esta atividade retomaria estas definições e as que haviam sido trabalhadas sobre funções trigonométricas com o professor titular da turma.

Definição1: Uma função f é dita *crescente* num intervalo I quando, para quaisquer pontos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $\mathrm{f(x_1) < f(x_2)}$.

Definição2: Uma função f é dita *decrescente* num intervalo I quando, para quaisquer pontos $x_1 \; e \; x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $\mathrm{f(x_1) > f(x_2)}$.

Para a compreensão das propriedades gráficas destas definições, seriam consideradas as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax + b$ e $h(x) = e^{ax}$ e o comando de controle deslizante do GeoGebra,associados aos parâmetros a, b e c. A partir da variação destes parâmetros, seria analisado o comportamento do gráfico dessas funções, quanto aos intervalos de crescimento e decrescimento.

A fim de observar o nível de conhecimento dos alunos sobre a definição de concavidade, seriam considerados os gráficos das seguintes funções construídas no GeoGebra:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = -x^2$$
$$h(x) = x^3 - x$$
$$i(x) = x^4 - x^2$$
$$j(x) = x^5 - x$$

A partir de observações e conclusões quanto à concavidade dos gráficos destas funções, seriam apresentadas as definições destes conceitos.

Definição3: Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade para cima* no intervalo aberto I quando $f(x) > T(x)$ qualquer que seja $x \in I$, ondeT(x) é a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x.

Definição4: Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade para baixo* no intervalo aberto I quando $f(x) < T(x)$ qualquer que seja $x \in I$, onde T(x)é a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x.

Analogamente, seriam relembrados os conceitos de *amplitude* e *período* de uma função.

Definição5: Uma função $f: A \to B$ é *periódica* se existe um número $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio A. O menor número p que satisfaz a propriedade é chamado *período de f.*

Definição6: A *amplitude (A)* de uma função periódica é a metade da diferença entre os valores máximo e mínimo da função.

Estas características seriam utilizadas na quinta atividade, quando da construção dos gráficos das funções seno e cosseno.

4ª ATIVIDADE:

Objetivo: Compreender a relação entre as medidas de ângulos (ou arcos) em graus e radianos.

Nesta atividade,seriam retomados os conceitos relacionados à medida de arco linear (radianos) e angular (graus), bem como da relação entre comprimento da circunferência ($c = 2\pi r$) e comprimento do arco da circunferência ($s = \alpha\, r$), onde r é o raio da circunferência e α é o ângulo medido em radianos. Inicialmente, seria formulada a seguinte pergunta:

Pergunta: $sen\, 1 \; = sen 1°$?

A fim de respondê-la,seria revisada a relação entre graus e radianos, associada a uma regra de três. Ou seja, se$180°$ corresponde a $\pi\, rad$ ($\pi \approx 3{,}14$), então$1\, rad$ equivale a quantos graus?

$$\pi\, rad \to 180°$$
$$1\, rad \to x$$

Assim,

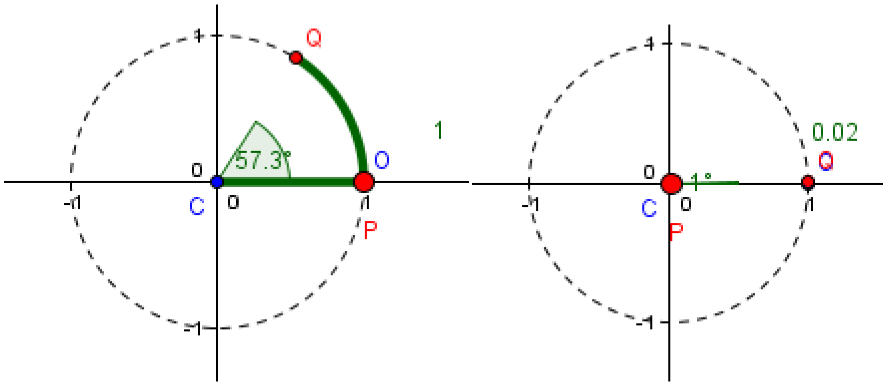
$$3{,}14\, rad. x = 1\, rad. 180°$$

Logo,

$$x = 180° \frac{1\, rad}{3{,}14\, rad} \approx 57{,}32°$$

Ou seja, 1 radiano equivale a aproximadamente $57{,}32°$. Esta diferença seria visualizada no GeoGebra, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Diferença entre 1 rad e 1°.



Fonte:Elaborada pela Autora.

Assim,respondendo a pergunta inicial, os alunos deveriam responder que$sen\ 1 \approx sen\ 57{,}32^0 \neq sen 1^0$.

Em relação ao comprimento de um arco$s$ e o ânguloα de abertura deste arco, a relação $s = \alpha\, r \left(\text{ou } \alpha\ = \frac{s}{r}\right)$, onde$r$é o raio da circunferência,seria trabalhada com o arquivo "Comprimento de arco_raio qualquer" no GeoGebra, disponível em http://www.geogebra.org/m/2356067.

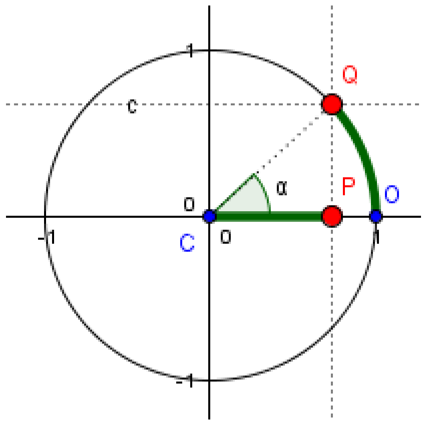
5ª ATIVIDADE:

Objetivo: Construir os gráficos das funções seno e cosseno.

A partir desta atividade buscava-se a compreensão do "desenrolar" do comprimento de arco relativo a uma medida angular como a correspondente medida linear no eixo x, para que, posteriormente, fosse possível calcular as funções $f(x) = sen\, x$ e $g(x) = \cos x$, para qualquer valor real de x.

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo seriam obtidas as coordenadas do ponto Q, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Coordenadas do ponto Q, obtidas no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela Autora.

Os alunos deveriam observar que o triângulo CPQ é retângulo em P, onde o segmento CQ é a hipotenusa, CP é o cateto adjacente ao ângulo α e QP é o cateto oposto ao ângulo α. E seria feito o seguinte questionamento: Qual a medida da hipotenusa CQ? Deveria ser observado que essa medida é igual ao raio (r) da circunferência e se o ponto Q "movimentar-se" sobre a circunferência, essa medida não iria se alterar.

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, concluiriam que:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \quad \Rightarrow \quad cateto\ oposto = rsen\alpha$$

Observando a Figura 2, deveriam notar que a medida do cateto oposto é igual à coordenada y do ponto Q. Ou seja, $coordenada\ y\ do\ ponto\ Q = rsen\alpha$.

Ainda, pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, observar que:

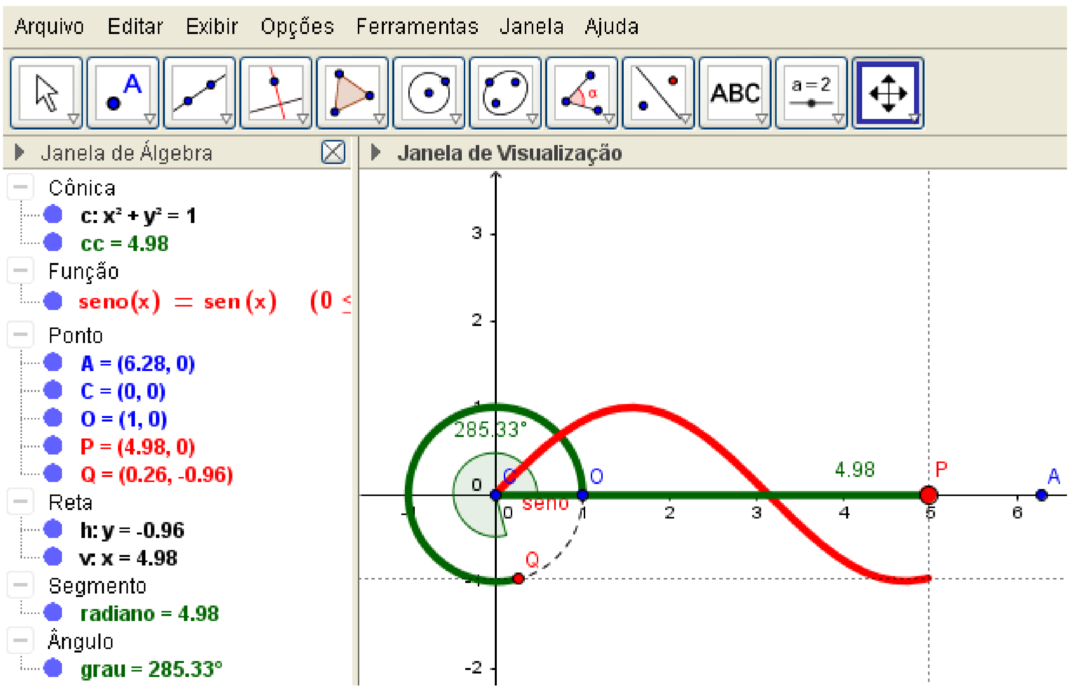
$$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \quad \Rightarrow \quad cateto\ adjacente = rcos\alpha$$

Observando a Figura 2, notar que a medida do cateto adjacente é igual à coordenada x do ponto Q. Ou seja, $coordenada\ x\ do\ ponto\ Q = rcos\alpha$.

Portanto, as coordenadas do ponto Q são $(rcos\alpha, rsen\alpha)$, sendo r o raio da circunferência e α o ângulo de abertura do arco considerado.

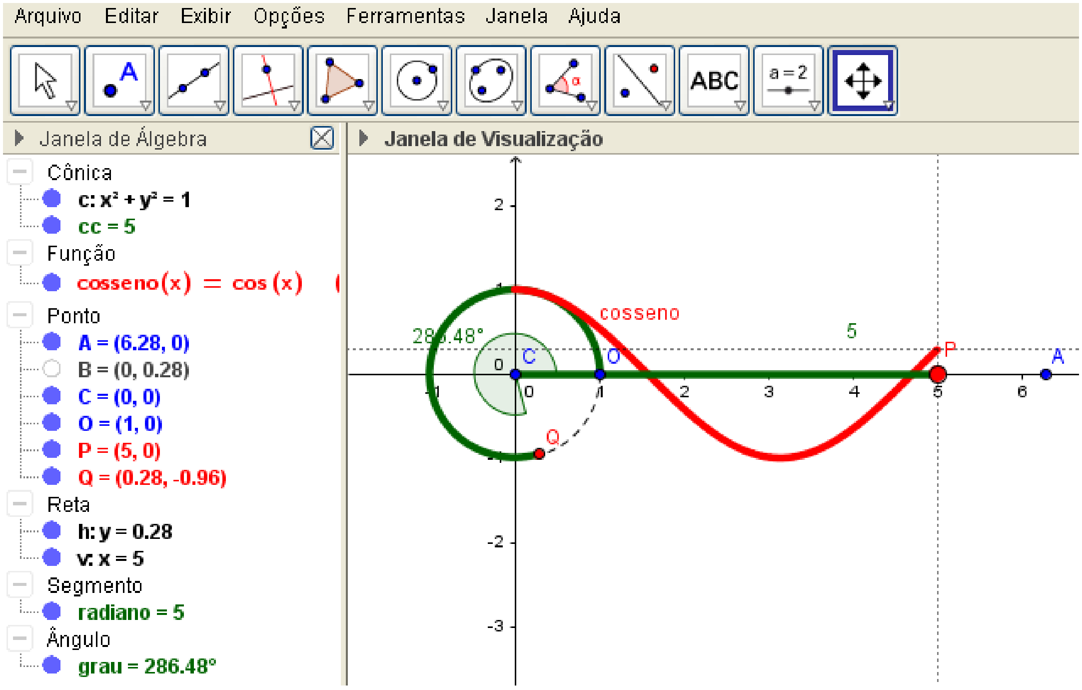
A fim de visualizar os gráficos das funções seno e cosseno, a pesquisadora construiu os arquivos “Desenrolando o Seno” e “Desenrolando o Cosseno” no GeoGebra, considerando as referências Giraldo et al. (2013) e Caetano e Paterlini (2013). A partir destes arquivos, ilustrados nas Figuras 3 e 4 seria observado o comportamento destas funções seno e cosseno à medida que o ponto Q “move-se” sobre a circunferência (ou equivalentemente, à medida que o ponto P “move-se” sobre o eixo x).

Figura 3 - Construção do gráfico da função seno no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela Autora.

Figura 4 – Construção do gráfico da função cosseno no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela Autora.

A partir desses gráficos seria solicitado que os alunos identificassem alguns elementos como domínio, imagem, amplitude, período, intervalos de crescimento e decrescimento e concavidade das funções trigonométricas seno e cosseno, preenchendo as informações no Quadro 2.

Quadro 2 – Características das funções seno e cosseno.

Análise dos gráficos das funções seno e cosseno	
1. Qual é o domínio?	
Seno:	Cosseno:
2. Qual é a imagem?	
Seno:	Cosseno:
3. Qual é o período (p)	
Seno:	Cosseno:
4. Qual é a amplitude (A)	
Seno:	Cosseno:
5. Em que intervalos a função é crescente?	
Seno:	Cosseno:
6. Em que intervalos a função é decrescente?	
Seno:	Cosseno:
7. Em que intervalos a função é côncava para cima?	
Seno:	Cosseno:
8. Em que intervalos a função é côncava para baixo?	
Seno:	Cosseno:

Fonte: Elaborado pela Autora.

Além disso, a fim de relembrar os valores de seno e cosseno para alguns ângulos notáveis, seria solicitado que preenchessem o Quadro 3.

Quadro 3 – Valores de seno e cosseno de alguns ângulos.

Observando os gráficos, anote os valores de seno e cosseno dos seguintes ângulos:									
	0°	45°	90°	135º	180º	225º	270º	315º	360º
Seno									
Cosseno									

Fonte: Elaborado pela Autora.

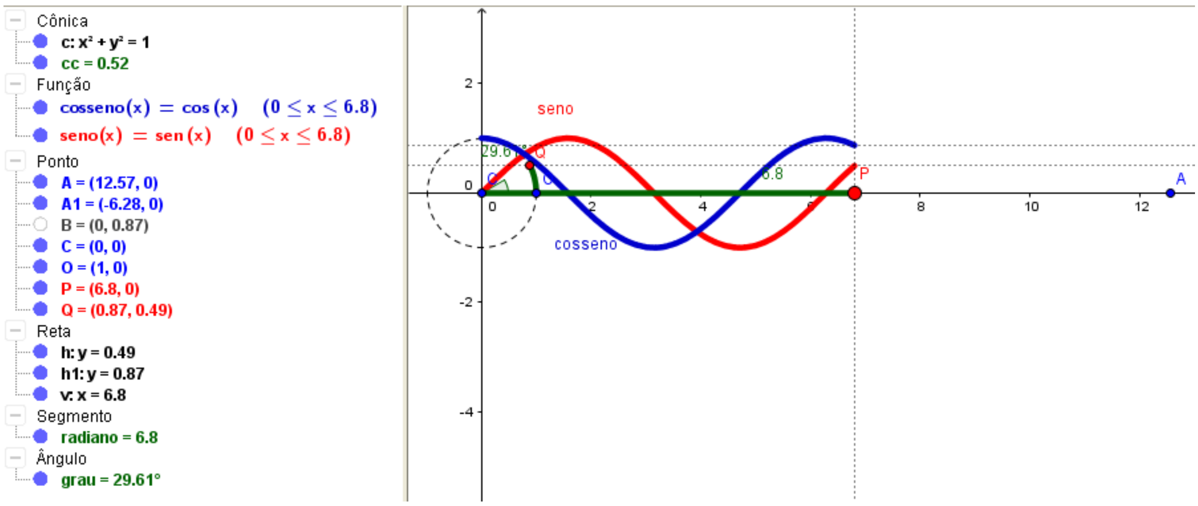
Ainda, com o objetivo de comparar os gráficos das duas funções, estes seriam plotados no GeoGebra no mesmo sistema de coordenadas, conforme Figura 5 e questionadas as semelhanças e diferenças que poderiam ser observadas entre os dois gráficos. Uma observação esperada seria a possibilidade de obter o gráfico da função cosseno, a partir de uma translação de $\frac{\pi}{2}$ do gráfico da função seno para a esquerda, ou analogamente, obter o gráfico da função seno, quando o gráfico de cosseno é transladado $\frac{\pi}{2}$ para a direita. Estas translações também poderiam ser vistas algebricamente através da transformação do seno da soma dos dois arcos *x* e $\frac{\pi}{2}$ ou do cosseno da diferença dos dois arcos *x* e $\frac{\pi}{2}$. De fato,

$$\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = senx.cos\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}.cosx = cosx$$

ou

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = cosx.cos\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}.senx = senx$$

Figura 5 – Gráficos das funções seno e cosseno no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela Autora.

6ª ATIVIDADE:

Objetivo: Conhecer a opinião dos alunos sobre as atividades desenvolvidas.

Após a aplicação das atividades da sequência didática, seria proposta uma avaliação da mesma, através do Questionário Final (Apêndice B).

No capítulo seguinte serão analisados os resultados obtidos com a aplicação desta sequência didática junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado do Rio Grande do Sul.

4. ANÁLISE A POSTERIORI

Para o desenvolvimento das atividades relativas à sequência didática apresentada no capítulo anterior, foram trabalhados sete períodos (horas-aula) com uma turma de 28 (vinte e oito) alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado do Rio Grande do Sul. Iniciou-se o desenvolvimento do plano de aula proposto com a apresentação da sequência didática e explicação do motivo pelo qual outra pessoa, que não fosse o professor titular da disciplina, ministraria algumas aulas para a turma.As atividades foram realizadas no laboratório de informática da escola, a fim de que todos os alunos pudessem ter acesso ao computador para o seu desenvolvimento.Feita esta apresentação, desenvolveu-se a primeira atividade, que consistia no preenchimento do Questionário Inicial (Apêndice A),o qual foi respondido pelos vinte e oito (28) alunos. A orientação dada aos alunos foi que não precisariam se identificar no questionário.

Segue a sintetização das respostas obtidas no questionário.

A primeira questão do questionário se referia à idade dos alunos da turma, que está na faixa de 15 a 17 anos.

A segunda questão perguntava se os alunos pretendem prestar vestibular e/ou ENEM e o porque. Apenas um aluno respondeu que não sabia o que é vestibular e ENEM, imagina-se que seja o intercambista, e os demais responderam que pretendem prestar. Já no que diz respeito ao porque, três alunos não responderam. Dentre os que responderam, a maioria (dezenove) disse que pretende prestar por ter interesse em ingressar no Ensino Superior e cinco disseram que pretendem prestar para conseguir um bom emprego futuramente.

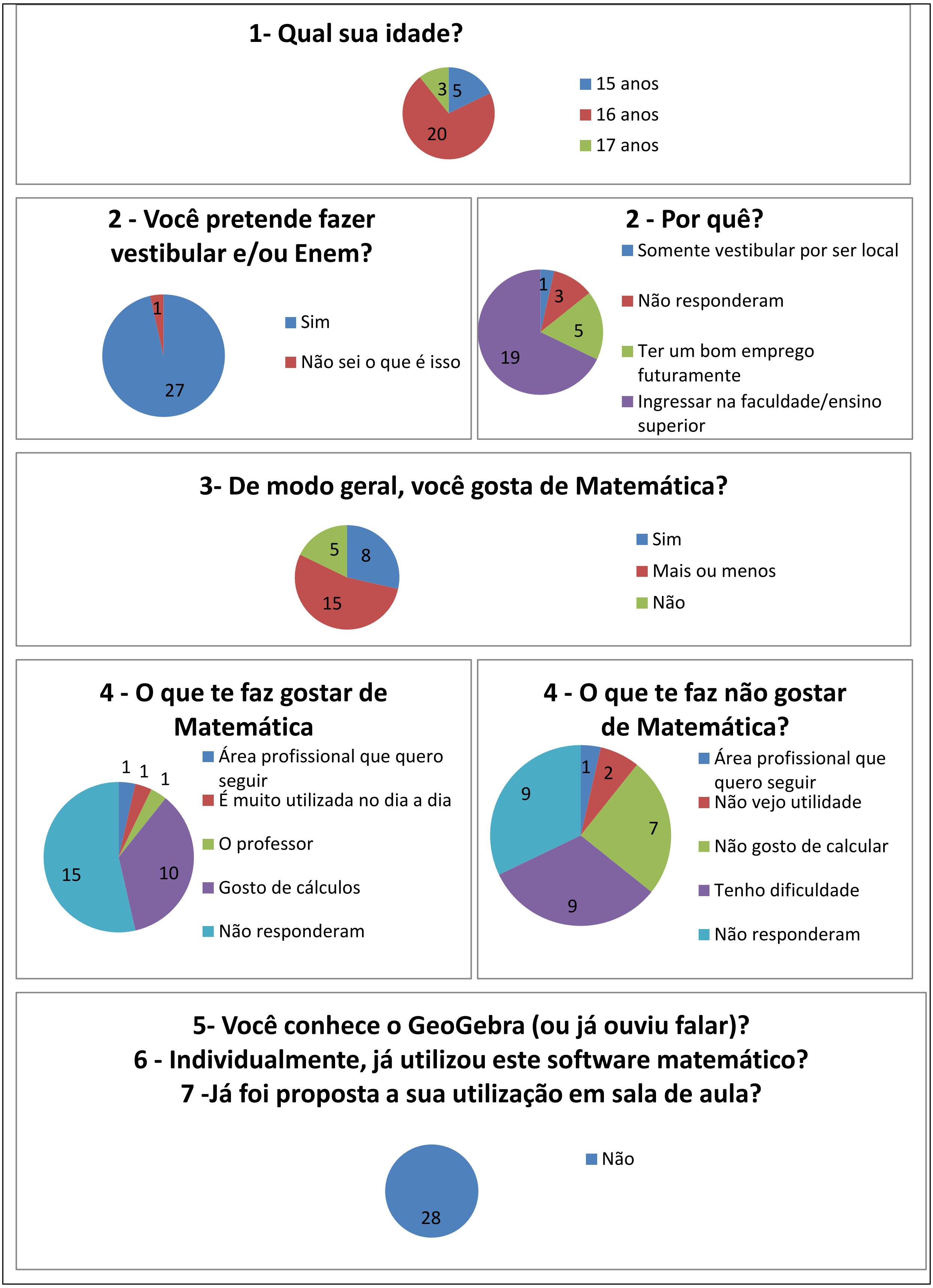
A terceira questão perguntava se os alunos gostam ou não de Matemática de um modo geral, que foi respondida por todos. Oito alunos responderam que gostam de Matemática, quinze alunos gostam "mais ou menos" e cinco alunos não gostam.

Já a quarta questão, que perguntava o motivo que os fazia gostar ou não de Matemática, não foi respondida por todos. Dentre os motivos que os faz gostarem, destaca-se o "gostar de cálculos", e dentre os que não gostam, destaca-se a dificuldade e o "não gostar" de cálculos.

As três últimas questões se referiam sobre o conhecimento que os alunos tinham sobre o software GeoGebra. Todos responderam que não conheciam e não utilizaram individualmente o GeoGebra e nunca havia sido proposta a sua utilização em sala de aula.

Na Figura 6 são apresentadas, de forma sintetizada,as respostas dos alunos ao Questionário Inicial.

Figura 6 – Síntese das respostas ao Questionário Inicial.



Fonte: Elaborada pela Autora.

Após o preenchimento do questionário inicial, passou-se a segunda atividade, com objetivo de apresentar o software de geometria dinâmica GeoGebra (Figura 7). Como nenhum aluno conhecia o GeoGebra, todos foram muito participativos e responderam bem ao objetivo da atividade, questionando e explorando o mesmo, utilizando as janelas de duas e três dimensões e construindo vários objetos, como gráficos de funções, polígonos e poliedros, encerrando-se assim a primeira aula.

Figura 7 – Alunos manuseando o software GeoGebra.

Fonte: Registro da Autora.

A seguir, foi desenvolvida a terceira atividade da sequência didática, visando relembrar conceitos anteriormente estudados pelos alunos. Como já imaginado, alguns alunos não lembravam o significado de uma função ser crescente ou decrescente ou cujo gráfico ter concavidade voltada para cima ou para baixo. Os conceitos de amplitude e período de funções haviam sido trabalhados mais recentemente em sala de aula e esses conceitos eram lembrados pelos alunos. À medida que estes conceitos estavam sendo repassados, foram construídos gráficos de diferentes funções no GeoGebra, de modo a observar e analisar o significado de cada um dos conceitos.

A seguir desenvolveu-se a quarta atividade proposta na sequência didática, com o objetivo de compreender a relação existente entre a medida de arcos em graus ou radianos. Quanto a pergunta sobre o valor do seno de 1º e seno de 1 radiano, algo semelhante já havia sido trabalhado em aula anteriormente. Assim, os alunos já haviam compreendido que 1 radiano corresponde a aproximadamente 57,32º e que, portanto, o valor de seno de 1º é diferente do valor de seno de 1 radiano.Já quanto à relação existente entre a medida do comprimento de um arco e seu ângulo de abertura, os alunos ainda não a entendiam. Então, foi explicado como se realiza o cálculo da medida do comprimento de arco e, utilizando-se o GeoGebra, visualizou-se o "desenrolar" desse comprimento de arco e sua correspondente medida sobre o eixo x. Os alunos exploraram essa atividade no software utilizando circunferências com diferentes raios e arcos com diferentes ângulos de abertura. Nessa atividade a atenção foi um pouco dispersa, pois os alunos queriam explorar mais o GeoGebra, construindo diferentes objetos, o que fez com que se fizesse necessário chamar a atenção e repetir algumas vezes as explicações.

Tendo ocorrido a compreensão de como uma medida até então feita em graus está relacionada a números reais, iniciou-se o desenvolvimento da quinta atividade proposta na sequência didática, a fim de construir os gráficos das funções seno e cosseno.

Antes de construir os gráficos, foram analisadas as coordenadas de um ponto Q qualquer sobre a circunferência trigonométrica nos diferentes quadrantes. Após a observação das coordenadas de alguns pontos nos quatro quadrantes, os alunos concluíram que, independente da localização de um ponto sobre a circunferência, suas coordenadas são dadas pelo par$(\mathrm{rcos}\alpha, \mathrm{rsen}\alpha)$, onde r é o raio da circunferência e α a medida do ângulo de abertura do arco. Nesta situação, o GeoGebra foi muito útil para mostrar a localização do ponto Q nos diferentes quadrantes, sendo possível por meio dele visualizar de fato as coordenadas do ponto.

A seguir, iniciou-se o processo de construção do gráfico da função seno. Para tanto, a partir de ângulos medidos em graus na circunferência trigonométrica, foram localizadas as respectivas medidas de seus comprimentos em radianos no eixo x e, então, calculado o valor de seno correspondente. Os ângulos utilizados correspondem aos extremos do intervalo que compreende o quadrante, além dos ângulos notáveis 30º, 45º e 60º e os ângulos 120º, 135º, 150º, 210º, 225º, 240º, 300º, 315º e 330º,que podem ser reduzidos aos ângulos notáveis no primeiro quadrante. Conforme essas informações iam sendo obtidas, os alunos preenchiam o

Quadro 4 com os valores e marcavam os pontos associados no plano cartesiano. Nesta tarefa, observa-se que os alunos não tiveram dificuldades e mostraram-se bastante participativos.

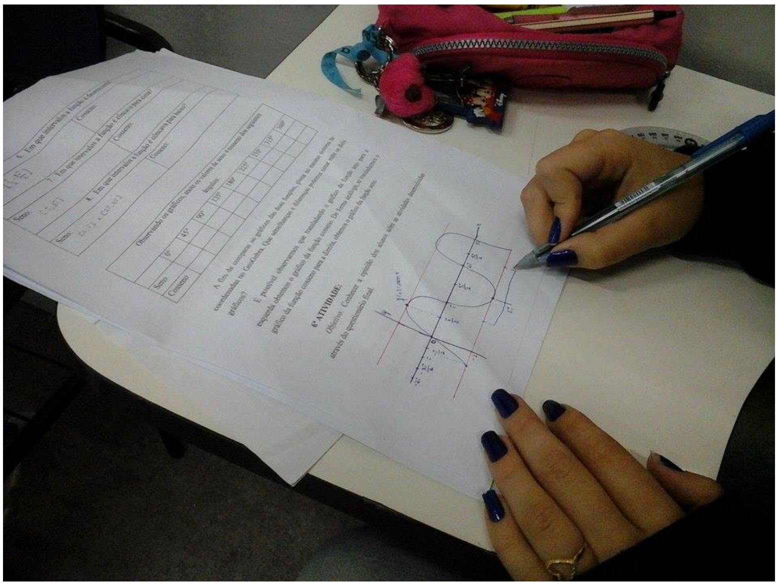
Quadro 4 - Anotação de valores para a construção do gráfico da função seno.

Ângulo (°)	Comprimento de arco (rad) (coordenada x)	Seno (coordenada y)

Fonte: Elaborado pela Autora.

A partir da projeção da tela do GeoGebra, inicialmente foi trabalhado o “desenrolar” do comprimento de arco sobre o eixo x e demarcados os pontos do Quadro 4. A seguir, no mesmo arquivo do GeoGebra foi exibido o gráfico da função seno, fazendo-o “desenrolar” à medida que a abertura do ângulo central ia aumentando na circunferência trigonométrica. Após, os alunos o desenharam rapidamente no material recebido (sequência didática) para terem à disposição quando necessitassem (Figura 8).

Figura 8 - Aluna desenhando o gráfico da função seno.



Fonte: Registro da Autora.

Conforme os alunos iam desenhando manualmente o gráfico, foi possível perceber que conseguiam compreender o desenrolar do comprimento de arco ao longo do eixo x e como calcular o valor de seno, obtendo o ponto *(x, senx).*

De maneira análoga, foi realizada a construção do gráfico da função cosseno.

A partir destes gráficos, foram explorados os conceitos de período, amplitude e intervalos de crescente ou decrescente e concavidade. Neste sentido, foi possível notar que os alunos tiveram um pouco de dificuldade em analisar estas características, talvez devido a serem muitas propriedades e não estarem acostumados a observá-las de modo geral no gráfico de funções.

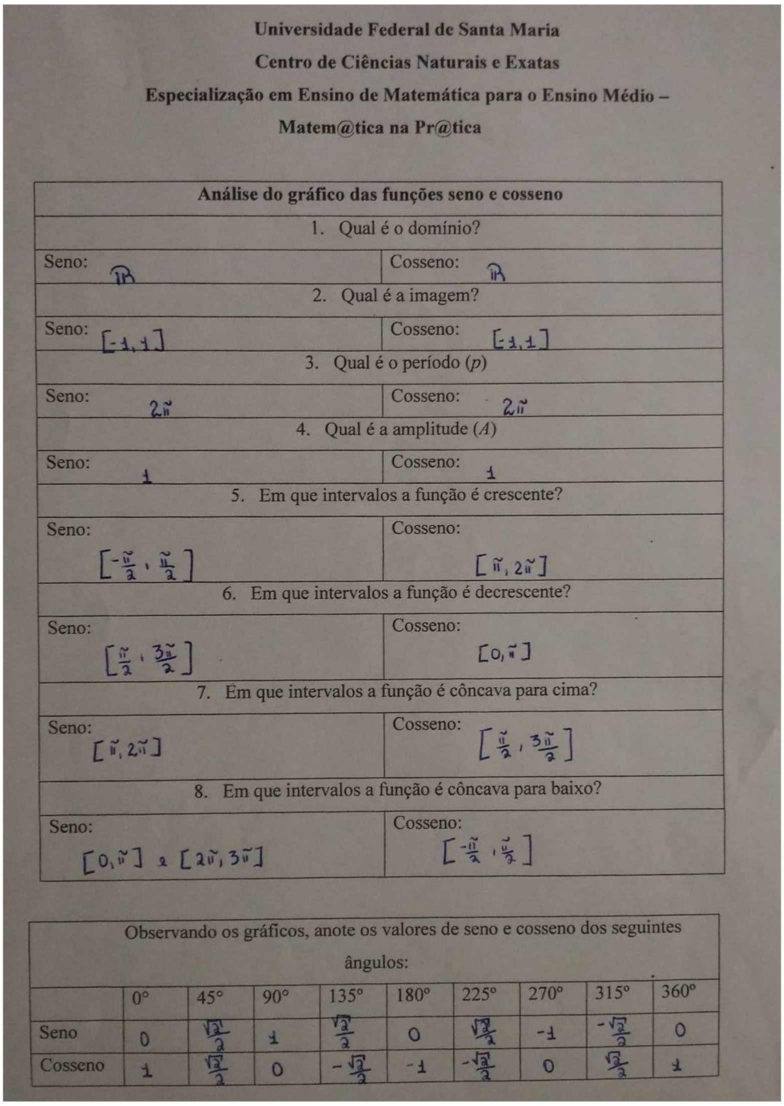
Concluída esta parte da construção dos gráficos, foi entregue aos alunos uma cópia do quadro de análise do gráfico das funções seno e cosseno (Quadro 2) e dos valores de seno e cosseno para diferentes ângulos (Quadro 3), para que entregassem à pesquisadora os dados que já haviam anotado no material que ficariam.

Analisando as respostas do Quadro 2 foi possível notar que todos os alunos conseguiram identificar e compreender o domínio das funções seno e cosseno como sendo o conjunto dos números reais e a imagem dessas funções como sendo o intervalo $[-1, 1]$. Todos também identificaram corretamente o período das funções seno e cosseno como sendo 2π e sua amplitude igual a 1.Em relação aos intervalos em que as funções são crescentes ou decrescentes, a maioria dos alunos destacou apenas um intervalo em que cada função é crescente/decrescente e os demais destacaram dois intervalos em cada caso, variando entre $-\frac{\pi}{2}$ e 2π. O mesmo ocorreu na análise dos intervalos em que cada uma das funções é côncava para cima ou para baixo, como pode ser observado no quadro preenchido da Figura 9.

Em relação ao Quadro 3, a maioria das respostas foi preenchida corretamente, sem grandes dificuldades. Os alunos fizeram corretamente a redução ao primeiro quadrante e, então, calcularam os valores solicitados na tabela.

Finalizando a sequência didática, foi distribuído o Questionário Final (Apêndice C), com objetivo de saber a opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido e a utilização do GeoGebra nas aulas da disciplina de Matemática. Nesta aula estavam presentes26 alunos e todos responderam ao questionário.

Figura 9 – Respostas de um aluno para o Quadro 2.



Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio – Matem@tica na Pr@tica

Análise do gráfico das funções seno e cosseno	
1. Qual é o domínio?	
Seno: $\mathbb{R}$	Cosseno: $\mathbb{R}$
2. Qual é a imagem?	
Seno: $[-1, 1]$	Cosseno: $[-1, 1]$
3. Qual é o período (p)	
Seno: 2π	Cosseno: 2π
4. Qual é a amplitude (A)	
Seno: 1	Cosseno: 1
5. Em que intervalos a função é crescente?	
Seno: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	Cosseno: $[\pi, 2\pi]$
6. Em que intervalos a função é decrescente?	
Seno: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	Cosseno: $[0, \pi]$
7. Em que intervalos a função é côncava para cima?	
Seno: $[\pi, 2\pi]$	Cosseno: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
8. Em que intervalos a função é côncava para baixo?	
Seno: $[0, \pi]$ e $[2\pi, 3\pi]$	Cosseno: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Observando os gráficos, anote os valores de seno e cosseno dos seguintes ângulos:

	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Seno	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Fonte: Registro da Autora.

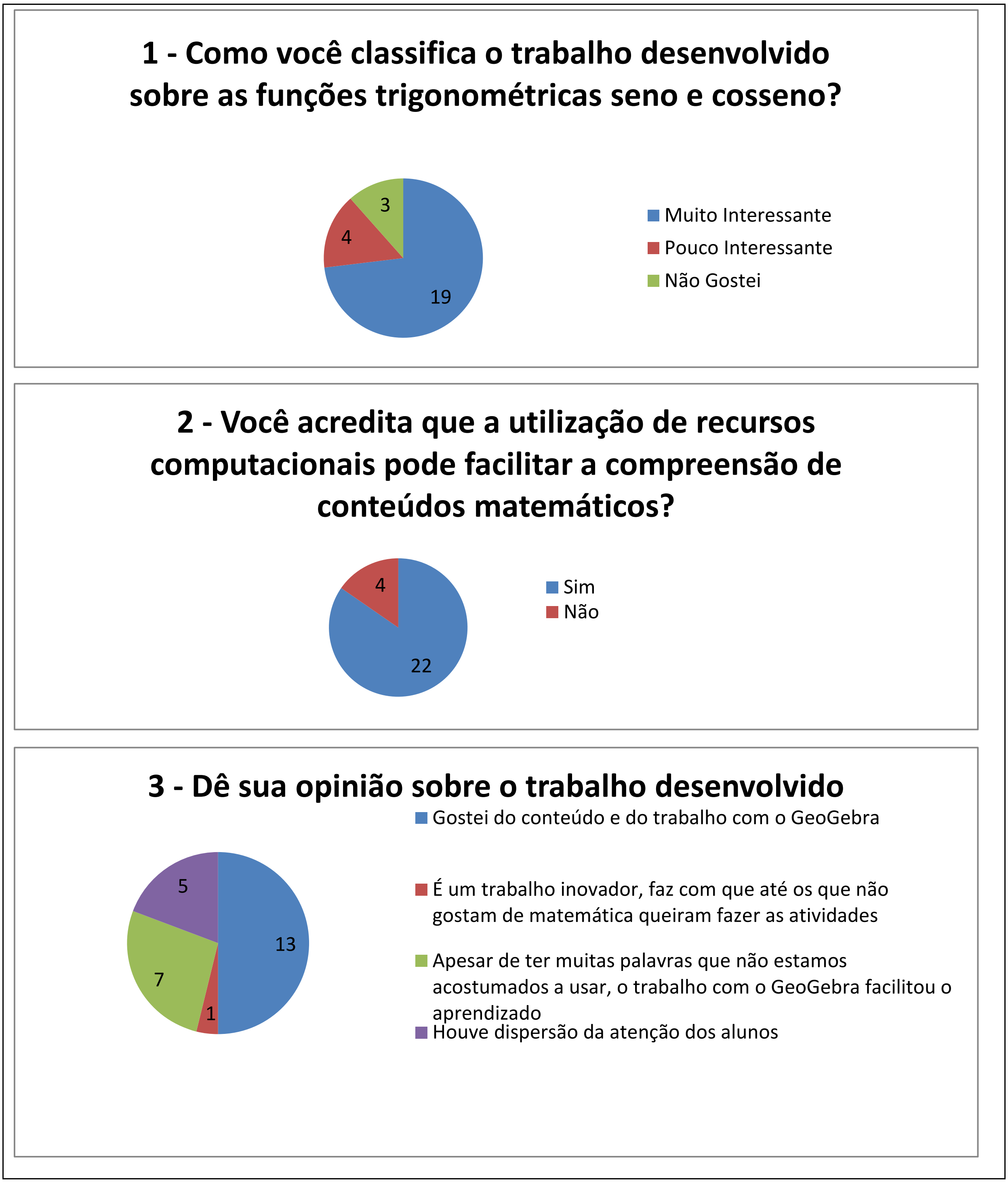
A primeira questão do Questionário Final era sobre a opinião dos alunos a respeito do trabalho desenvolvido sobre as funções trigonométricas seno e cosseno, classificando em muito interessante, pouco interessante ou não haviam gostado do trabalho. Dentre os 26 alunos presentes, 19 consideraram o trabalho muito interessante, 4 pouco interessante e 3 alunos não gostaram do trabalho.

Na segunda questão, buscava-se saber se os alunos acreditavam que a utilização de recursos computacionais, em particular o GeoGebra, poderia facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos, ao que 22 alunos responderam sim e 4responderam não.

Por último, foi solicitado que os alunos opinassem sobre o trabalho desenvolvido. Dentre as respostas, vale destacar: "*Gostei do conteúdo e do trabalho com o GeoGebra*", *"Apesar de ter muitas palavras que não estamos acostumados a usar, o trabalho com o GeoGebra foi muito interessante e facilitou o aprendizado*", "*É um trabalho inovador, faz com que até os que não gostam de matemática queiram fazer as atividades*".

Na Figura 10 é apresentada uma síntese das respostas ao Questionário Final.

Figura 10 – Síntese das respostas do Questionário Final.



Fonte: Registro da Autora

Com os resultados obtidos a partir do desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática foi possível perceber que a utilização do software GeoGebra, facilitou o aprendizado e motivou os alunos a desenvolverem as atividades propostas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No geral, pode-se dizer que a parte prática da aula, onde foi utilizado o GeoGebra na construção de objetos,motivou bastante os alunos. Porém, a parte mais teórica, de revisão de conteúdos, foi bastante dispersa, sendo que a pesquisadora teve que retomar a atenção dos alunos e repetir várias vezes as explicações.

A visualização geométrica proporcionada pelo GeoGebra forneceu aos alunos elementos suficientes para que pudessem recriar conceitos que até então tinham apenas como imagens mentais, transformando-os em imagens visíveis e de mais fácil compreensão, o que vem ao encontro do que Nascimento (2012) e Oliveira et al. (2012) já haviam mencionado em seus trabalhos.

Como atualmente a pesquisadora não exerce a atividade docente profissionalmente, não tem previsão de repetir a atividade em outras turmas e dar continuidade ao trabalho iniciado. Porém, caso fosse aplicar novamente a atividade em sala de aula, pensaria em explorar mais atividades utilizando o GeoGebra a fim de trabalhar os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento da sequência didática, com controles deslizantes, como por exemplo os gráficos das funções $f(x) = a * sen(bx + c)$ e $g(x) = a * \cos(bx + c)$, utilizadas para visualizar as variações de amplitude e período das funções seno e cosseno.

Acredita-se que o desenvolvimento das atividades propostas foi de grande valia, pois os alunos aprenderam a utilizar um software que até então não conheciam e visualizaram sua aplicabilidade no desenvolvimento de atividades relativas a vários conceitos e conteúdos matemáticos, como construção de gráficos, análise de intervalos crescimento e decrescimento e concavidade,identificação de domínio e imagem de funções, dentre outros.

Foi possível notar ainda que os alunos compreenderam melhor a forma como se relacionam as medida de arcos em graus e radianos e como essa medida se “desenrola” sobre o eixo x a fim de construir o gráfico das funções seno e cosseno, contribuindo para o processo de ensino aprendizagem do conteúdo destas funções.

Analisando essas considerações, pode-se concluir que o desenvolvimento da sequência didática atendeu o objetivo proposto e mostrou-se como uma boa alternativa à forma como o conteúdo de funções trigonométricas vinha sendo trabalhado tradicionalmente, auxiliando os alunos na superação de dificuldades em compreender esse conteúdo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORBA, M. C.**Educação Matemática a distância online:** balançoeperspectivas**.** In: XIII CIAEM – Conferência Internacional de Educação Matemática, 2011, Recife. Disponível em<http://lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-borba.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2015.

CAETANO, P. A. S., PATERLINI, R. R. Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, **Funções Elementares:** polígrafo didático, Módulo II, Cuiabá: Central de Texto, 2013.

COSTA, N. M. L. **Funções Seno e Cosseno: Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do "Mundo Experimental" e do Computador**. 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

FONSECA, L. S. **Aprendizagem em Trigonometria: Obstáculos, Sentidos e Mobilizações**. 1. Ed. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe: 2010. v. 01. 217 p.

LOPES Júnior, G. **Geometria Dinâmica com o GeoGebra no Ensino de Algumas Funções**. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

GIRALDO, V. A., CAETANO. P. A. S., MATTOS, F. **Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática**, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MAIA, J. **O Ensino de Funções Trigonométricas através do Software GeoGebra**. 2013. 48 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

NACARATO, A. M. A Definição de Seno Apresentada nos Livros Didáticos de Matemática no Século XX. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5., 2003, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro: SBHMat, 2003. P.205-213.

NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do Uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. In: CONFERENCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 2012, Montevidéu. **Actas...** Montevidéu: Instituto de Profesores Artigas, 2012.p.125-132.

OLIVEIRA, I. L. L.; GUIMARÃES, S. U.; ANDRADE, J. A. A. As Potencialidades do GeoGebra em Processos de Investigação Matemática: Uma Análise do Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem da EAD no Ensino Presencial. In: 1ª CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Pontifícia Universidade Católica - SP, 2012. p. 265-279.

PEREIRA, C. S. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio – Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa**. 2011. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

PETLA, R. J. **GeoGebra - Possibilidades para o Ensino de Matemática**. 2008. 45 f. Unidade Didática (Programa de Desenvolvimento Educacional) - Universidade Federal do Paraná, União da Vitória, 2008.

QUINTANEIRO, W. **Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio**. 2010. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando Aspectos Dinâmicos no Ensino de Funções Reais com Recursos do GeoGebra. In: 1ª CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Pontifícia Universidade Católica - SP, 2012. p. 74-89.

APÊNDICE A - Questionário Inicial

Universidade Federal de Santa Maria

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio

Matem@tica na Pr@tica

Questionário Inicial
1. Qual sua idade?
2. Você pretende fazer vestibular e/ou ENEM? Por quê?
3. De modo geral, você gosta de Matemática? ( ) Sim ( ) Mais ou menos ( ) Não
4. Explique o que te faz gostar ou não de Matemática.
5. Você conhece o software GeoGebra(ou já ouviu falar)? () Sim ( ) Não
6. Individualmente, já utilizou este software matemático? ( ) Sim ( ) Não
7. Já foi proposta a sua utilização em sala de aula? ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE B - Sequência Didática

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio
Matem@tica na Pr@tica

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Caro estudante

Você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), nesta pesquisa, que tem por objetivo principal analisar as contribuições dos Recursos Tecnológicos, no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos relacionados às funções trigonométricas seno e cosseno, como parte da monografia do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

APRESENTAÇÃO:

- **Público alvo:** Alunos do 2° ano do Ensino Médio
- **Conteúdo:** Funções Trigonométricas Seno e Cosseno
- **Tempo estimado:** 06 horas-aula
- **Recursos utilizados:** Quadro, pincéis, computadores, projetor multimídia, software GeoGebra.
- **Avaliação:** A avaliação será contínua e baseada na participação dos alunos nas atividades propostas.

Desenvolvimento: Com o software GeoGebra previamente instalado nos computadores que os alunos utilizarão e os arquivos com as construções necessárias já salvas, desenvolver a seguinte sequência didática:

1ª ATIVIDADE:

Objetivo: Identificar o perfil da turma, aplicando o seguinte questionário, individualmente:

Questionário Inicial
1. Qual sua idade?
2. Você pretende fazer vestibular e/ou ENEM? Por quê?
3. De modo geral, você gosta de Matemática? ( ) Sim ( ) Mais ou menos ( ) Não
4. Explique o que te faz gostar ou não de Matemática.
5. Você conhece o software GeoGebra(ou já ouviu falar)? () Sim ( ) Não
6. Individualmente, já utilizou este software matemático? ( ) Sim ( ) Não
7. Já foi proposta a sua utilização em sala de aula? ( ) Sim ( ) Não

2ª ATIVIDADE:

Objetivo: Conhecer o software GeoGebra

A fim de que os alunos conheçam o GeoGebra, iniciar explicando como alguns objetos podem ser construídos, como por exemplo, pontos, funções, polígonos, controles deslizantes, etc. Construir gráficos de funções vinculadas a controles deslizantes, como, por exemplo, $f(x) = ax^2 + bx + c$, e observar seu comportamento conforme os controles deslizantes associados aos parâmetros a, b e c variam.

3ª ATIVIDADE:

*Objetivo:*Relembrar os conceitos das funções seno e cosseno já trabalhados anteriormente em aula.

Em matemática, as funções trigonométricas são funções oscilatórias, importantes na resolução de triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo, ou, de forma mais geral, como coordenadas de pontos no círculo unitário.

Nesta atividade trabalharemos com as funções trigonométricas seno e cosseno. Vejamos o que já sabemos sobre essas funções.

- Quais fenômenos podem ser estudados a partir das funções trigonométricas em nosso dia a dia?

- Quais são as características das funções trigonométricas seno e cosseno que já conhecemos?

Além disso, vamos agora relembrar a definição de função *crescente* e *decrescente*:

Definição: Uma função f é dita *crescente* num intervalo I quando para quaisquer pontosx_1 e$x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição: Uma função f é dita *decrescente* num intervalo I quando para quaisquer pontosx_1 e$x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $\mathrm{f(x_1) > f(x_2)}$.

Construir, utilizando o GeoGebra os gráficos das funções $f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = ax + b$ e $h(x) = e^{ax}$ e variar os controles deslizantes a, b e c a fim de observar o comportamento dessas funções quanto ao crescimento e decrescimento.

Vejamos agora o que sabemos sobre concavidade de funções. Para isso, vamos trabalhar com os gráficos das seguintes funções: $x^2, -x^2, x^3 - x, x^4 - x^2$ e $x^5 - x$.

Seja T(x)a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x.

Definição: Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade para cima* no intervalo aberto *I* quando $f(x) > T(x)$ qualquer que seja$x \in I$.

Analogamente,

Definição: Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade para baixo* no intervalo aberto *I* quando$f(x) < T(x)$ quaisquer que seja $x \in I$.

Relembrar conceitos de *amplitude* e *período* de uma função:

Definição: Uma função$f: A \to B$ é *periódica* se existe um número $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo$x$ pertencente ao domínio de A. O menor número p que satisfaz a propriedade é chamado *período de f*.

Definição: A *amplitude(A)*de uma função periódica é a metade da diferença entre os valores máximo e mínimo da função.

4ª ATIVIDADE:

*Objetivo:*Compreender a relação entre as medidas de ângulos (ou arcos) em graus e radianos.

Lembrar conceitos relacionados à medida de ângulos em graus e radianos ($\pi \approx 3{,}14$,comprimento da circunferência ($c = 2\pi r$) e comprimento do arco da circunferência ($s = \alpha r$), onde r é o raio da circunferência e α é o ângulo medido em radianos.

Pergunta:$sen\ 1° = sen\ 1$?

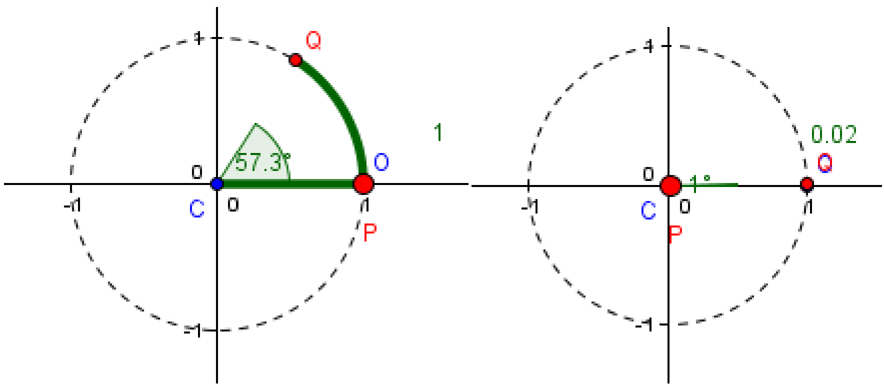
Sabemos que$180° \approx \pi rad$e que, por outro lado, $\pi \approx 3{,}14$. Então, $1rad$ equivale a quantos graus?

$$\begin{matrix} \pi rad \rightarrow 180° \\ 1rad \rightarrow x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3{,}14rad \rightarrow 180° \\ 1rad \rightarrow x \end{matrix} \Rightarrow 3{,}14rad * x = 1rad * 180° \Rightarrow x = 180° \frac{rad}{3{,}14rad}$$

$$\Rightarrow x \approx 57{,}32°$$

Ou seja, 1 radiano equivale a aproximadamente 57,32º.

Vejamos a diferença entre1 radiano e 1° no ciclo trigonométrico:



Logo, temos que $sen1 \approx sen57{,}32° \neq sen1°$.

Agora, vejamos qual é a relação existente entre o comprimento de um arco e o ângulo de abertura deste arco. Para tanto, vamos trabalhar com o arquivo “Comprimento de arco_raio qualquer”. Teremos a relação $s = r\theta\ \left(ou\ seja, \theta = \frac{s}{r}\right)$, onde s é o comprimento do arco, r o raio da circunferência e θ a abertura do arco em radianos. Esta relação é válida para arcos de qualquer raio e com qualquer abertura.

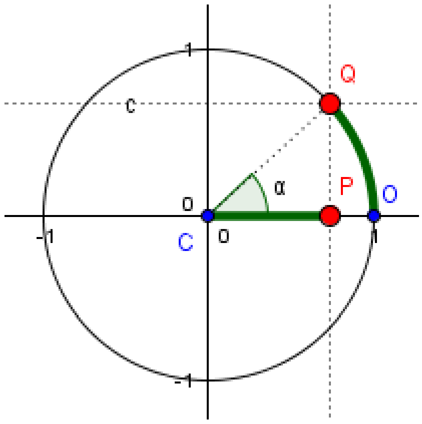
Para trabalharmos com as funções seno e cosseno em relação à variável x, consideraremos os valores adotados para x como sendo o comprimento do arco de raio 1. Podemos ver o desenrolar do arco ao longo do eixo x no arquivo "Comprimento de arco desenrolado no eixo x".

5ª ATIVIDADE:

Objetivo: Construir o gráfico das funções seno e cosseno.

Utilizando os arquivos Desenrolando o Seno e Desenrolando o Cosseno, separadamente, construir os gráficos das funções seno e cosseno, observando o seu comportamento à medida que o ponto Q "anda" sobre a circunferência (ou equivalentemente, à medida que o ponto P "anda" sobre o eixo X).

Analisar as coordenadas do ponto Q a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo.



Vejamos que o triângulo CPQ é retângulo em P, onde o segmento CQ é a hipotenusa, CP é o cateto adjacente ao ângulo α e QP é o cateto oposto ao ângulo α.

Qual a medida da hipotenusa CQ? Podemos notar que essa medida é igual ao raio (r) da circunferência. Se o ponto Q "andar"sobre a circunferência, essa medida não irá se alterar.

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \Rightarrow sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{r} \Rightarrow cateto\ oposto = r \cdot sen\alpha$$

Observando a figura podemos notar que a medida do cateto oposto é igual à coordenada y do ponto Q. Logo,

$$coordenada\ y\ do\ ponto\ Q = r \cdot sen\alpha$$

Também pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ \text{adjacente}}{hipotenusa} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{r} \Rightarrow cateto\ adjacente = r \cdot \cos\alpha$$

Observando a figura podemos notar que a medida do cateto adjacente é igual à coordenada x do ponto Q. Logo,

$coordenada\ \text{x}\ do\ ponto\ Q = r \cdot \cos\alpha$

Portanto, as coordenadas do ponto Q são $(r \cdot \cos\alpha, r \cdot sen\alpha)$, sendo r o raio da circunferência e α o ângulo de abertura do arco considerado.

Destacar as características dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, à medida que os alunos vão preenchendo a seguinte tabela com as informações observadas nos gráficos do GeoGebra.

Análise do gráfico das funções seno e cosseno	
9. Qual é o domínio?	
Seno:	Cosseno:
10. Qual é a imagem?	
Seno:	Cosseno:
11. Qual é o período (*p*)	
Seno:	Cosseno:
12. Qual é a amplitude (*A*)	
Seno:	Cosseno:
13. Em que intervalos a função é crescente?	
Seno:	Cosseno:
14. Em que intervalos a função é decrescente?	
Seno:	Cosseno:
15. Em que intervalos a função é côncava para cima?	
Seno:	Cosseno:
16. Em que intervalos a função é côncava para baixo?	
Seno:	Cosseno:

Observando os gráficos, anote os valores de seno e cosseno dos seguintes ângulos:									
	0°	45°	90°	135º	180º	225º	270º	315º	360º
Seno									
Cosseno									

A fim de comparar os gráficos das duas funções, plotar no mesmo sistema de coordenadas no GeoGebra. Que semelhanças e diferenças podemos observar entre os dois gráficos?

É possível observarmos que transladando o gráfico da função seno para a esquerda obtém-se o gráfico da função cosseno. De forma análoga, se transladarmos o gráfico da função cosseno para a direita, obtém-se o gráfico da função seno.

6ª ATIVIDADE:

Objetivo: Conhecer a opinião dos alunos sobre as atividades desenvolvidas.

Questionário final
1. Como você classifica o trabalho desenvolvido sobre as funções trigonométricas seno e cosseno? ( ) Muito interessante ( ) Pouco interessante ( ) Não gostei
2. Você acredita que a utilização de recursos computacionais pode facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos?
3. Dê sua opinião sobre o trabalho desenvolvido.

APÊNDICE C - Questionário Final

Universidade Federal de Santa Maria

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio

Matem@tica na Pr@tica

Questionário final
1. Como você classifica o trabalho desenvolvido sobre as funções trigonométricas seno e cosseno? ( ) Muito interessante ( ) Pouco interessante ( ) Não gostei
2. Você acredita que a utilização de recursos computacionais pode facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos?
3. Dê sua opinião sobre o trabalho desenvolvido.