

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Stephanie Abé

SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE
COM BORDO PLANO EM \mathbb{R}^3

Santa Maria, RS
2019

Stephanie Abé

**SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE COM BORDO
PLANO EM \mathbb{R}^3**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser

**Santa Maria, RS
2019**

Abé, Stephanie

Superfícies de Curvatura Média Constante com Bordo
Plano em R^3 / Stephanie Abé.- 2019.
95 p.; 30 cm

Orientadora: Patrícia Kruse Klaser
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Superfícies de curvatura média constante 2.
Problema de Dirichlet 3. EDPs elípticas I. Kruse Klaser,
Patrícia II. Título.

Stephanie Abé

**SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE COM
BORDO PLANO EM R^3**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 20 de maio de 2019:

Patrícia Kruse Klaser
Patrícia Kruse Klaser
(Presidenta/ Orientadora)

Miriam Telichevesky
Miriam Telichevesky (UFRGS)

Ari J. Aiolfi
Ari João Aiolfi (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

Aos meus pais Juarez Abé e Cleusa Soder Abé

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível pois tive ao meu lado pessoas que me apoiaram e incentivaram muito. Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram nessa caminhada. Em especial, agradeço:

- aos meus pais, Cleusa Soder Abé e Juarez Abé, por todo o incentivo e apoio nessa caminhada, por sempre acreditarem em mim;
- as minhas amigas Juliana Pedrotti e Poliana Selau por todo o incentivo, todas as risadas, as conversas, os conselhos, pelas palavras de consolo e apoio quando eu achava que nada daria certo, por comemorar junto comigo por cada pequeno passo que foi dado, enfim, por sempre estarem comigo. Muita grata meninas!
- ao meu amigo Matheus Gomes por todas as discussões envolvendo Geometria, pelas contribuições que fizeste e todo o incentivo que me deste. Muito grata!
- aos demais amigos e familiares que compartilharam comigo cada passo dessa caminhada. Vocês são muito importantes para mim e fico muito grata por ter vocês em minha vida!
- a professora Patrícia Kruse Klaser, orientadora deste trabalho, por todos os ensinamentos, conselhos, sugestões e por contribuir muito na minha vida;
- aos professores Ari João Aiolfi e Miriam Telichevesky, pelas contribuições e revisão do trabalho;
- ao professor Fidélis por suas notas que me auxiliarem muito na conclusão deste trabalho;
- ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e a seus professores por contribuírem na minha formação acadêmica;
- à CAPES pelo apoio financeiro, muito obrigada.

*Toda conquista já foi uma tentativa.
(Autor desconhecido)*

Resumo

SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE COM BORDO PLANO EM \mathbb{R}^3

AUTORA: Stephanie Abé

ORIENTADORA: Patrícia Kruse Klaser

Neste trabalho, mostraremos que para cada H tal que $AH^2 < \rho^2\pi$, onde A representa a área de Ω e $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o problema de Dirichlet

$$(PD)_H \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

é solúvel, sendo Ω um domínio planar limitado e convexo. Para tal, usaremos o Método da Continuidade e faremos um estudo de EDPs elípticas.

Palavras-Chave: Superfícies cmc, problema de Dirichlet, Método da Continuidade, estimativa a priori.

Abstract

CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACES WITH PLANAR BOUNDARY IN \mathbb{R}^3

AUTHOR: Stephanie Abé

ADVISOR: Patrícia Kruse Klaser

In this work, we will show that for each H such that $AH^2 < \rho^2\pi$, where A represents the area of Ω and $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, the Dirichlet problem

$$(PD)_H \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

is solvable, for $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a bounded convex domain. For this, we use the Continuity Method and study elliptic PDEs.

Keywords: cmc surfaces, Dirichlet problem, Continuity Method, a priori estimate.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	14
2.1	Preliminares	14
2.2	Campos de Vetores	20
2.3	Geodésicas; Aplicação Exponencial	28
3	SOLUBILIDADE DO PROBLEMA DE DIRICHLET PARA GRÁFI- COS CMC	34
3.1	Abertura de V	34
3.2	Fechamento de V	41
3.3	Princípios do Máximo	44
3.4	Resultados Complementares	50
4	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PD EM SUPERFÍCIES CMC COM BORDO PLANO	54
	REFERÊNCIAS	64
5	APÊNDICE A: EDPS LINEARES ELÍPTICAS	66
5.1	O caso particular do operador Laplaciano	66
5.2	O Método da Continuidade e o PD para Operadores Lineares Elípticos	92

1 Introdução

O estudo das superfícies mínimas e de curvatura média constante (cmc) no espaço euclidiano já é um assunto clássico na geometria diferencial. Um dos primeiros problemas discutido foi o Problema de Plateau, que consiste em encontrar a superfície de menor área que tem como bordo uma curva fechada simples Γ no espaço.

Se Γ é o gráfico de uma função ϕ contínua em $\partial\Omega$, com Ω um domínio limitado, o Problema de Plateau é equivalente ao seguinte Problema de Dirichlet (PD): encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que

$$(PD)_0 \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em 1930, Radó [18] mostrou que $(PD)_0$ tem solução para qualquer ϕ contínua em $\partial\Omega$ desde que Ω seja convexo. Logo em 1932, Radó [19] encontrou um exemplo de um domínio Ω não convexo e $\phi \in C^0(\partial\Omega)$ de modo que $(PD)_0$ não tem solução.

Há generalizações desse problema de Dirichlet. Uma delas é o Problema de Superfícies cmc que consiste em determinar a superfície de curvatura média constante H , quando orientada com vetor normal apontando para baixo, que tem como bordo uma curva fechada simples no espaço Γ . Esse problema pode ser descrito através do seguinte PD:

$$(PD)_H \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesse sentido, em 1969, Serrin [21] mostrou que o $(PD)_H$ tem solução única em \mathbb{R}^2 para qualquer dado contínuo no bordo se, e só se, a curvatura do bordo do domínio Ω , $K_{\partial\Omega}$, é maior do que ou igual a $2H$.

Neste trabalho, buscamos resolver o Problema de Dirichlet $(PD)_H$ para Ω um domínio de classe C^2 e ϕ a função identicamente nula. Baseado no artigo *A height estimate for H-surfaces and existence of H-graphs* [17], vamos demonstrar o seguinte resultado que relaciona a existência de solução para o PD com a área do domínio Ω . Na demonstração do teorema que será enunciado a seguir surge, de forma técnica, a constante ρ , que vale $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Note que ρ é o número de ouro, mas não encontramos relação entre o aparecimento da constante ρ na prova e outro significado geométrico conhecido dessa constante.

Teorema 1. *Seja Ω um domínio planar, limitado e convexo. Para cada número real H tal que $AH^2 < \rho^2\pi$, onde A representa a área do domínio Ω , existe uma solução suave do*

seguinte Problema de Dirichlet:

$$(\spadesuit) \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto é, existe um gráfico suave sobre Ω , o qual é uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante H e cujo bordo é $\partial\Omega$.

Existem resultados relacionados a este. Por exemplo, em 2001, Ripoll [20] mostrou que se $\phi = 0$ no bordo de Ω e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é convexo e de classe $C^{2,\alpha}$, então o PD tem solução se $K_{\partial\Omega} \geq H$. Além desse resultado, López e Montiel [15] provaram que o $(PD)_H$, com $\phi = 0$, tem solução se Ω é convexo e o comprimento de $\partial\Omega$ é menor do que ou igual a $\frac{\sqrt{3}\pi}{H}$.

Ainda nesse sentido, há duas conjecturas feitas. A primeira nos diz que o problema $(PD)_H$ tem solução se Ω for um domínio convexo e o comprimento do bordo L é menor do que ou igual a $\frac{2\pi}{H}$, ou seja, o resultado mostrado por López-Montiel vale para um comprimento do bordo maior; e a segunda conjectura feita é de que o teorema 1 vale para $\rho = 1$.

Para demonstrar o teorema 1, vamos estudar a solubilidade do Problema de Dirichlet $(PD)_H$ para $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, através do Método da Continuidade. Esse método consiste em considerar o conjunto $V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\phi\}$, mostrar que V é aberto e fechado no intervalo $[0, 1]$. A prova de que V é aberto em $[0, 1]$ decorre do teorema da Função Implícita para espaços de Banach, o que está detalhado no capítulo 3. Ainda neste capítulo, mostramos que o conjunto V é fechado se for possível obter uma estimativa *a priori* para a norma de $C^1(\Omega)$ de cada $u = u_t$, com $t \in V$.

No capítulo 4, provamos que, nas hipóteses do teorema 1, existe uma estimativa *a priori* para a norma C^1 de soluções de (\spadesuit) . Essa demonstração é um caso particular do seguinte teorema, também de [17].

Teorema 2. *Seja S uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante $H > 0$, cujo bordo está contido no plano $P = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = 0\}$, onde $a \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário. Denote por S^+ a região de S que está acima do plano P e suponha que a aplicação de Gauss N da imersão satisfaz*

$$\int_{S^+} |\langle N, a \rangle| dS \leq \rho^2 \frac{\pi}{H^2}.$$

Então, se h^+ é o máximo da altura de S^+ com respeito ao plano P , temos:

$$h^+ \leq \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{H^2}{\pi} \int_{S^+} |\langle N, a \rangle| dS} \right)$$

e a igualdade vale se, e somente se, S é uma calota esférica.

Esse resultado será de extrema importância para a prova do teorema 1, porque ele nos garante a existência de uma constante que limite a norma $|\cdot|_1$. Dessa forma, garantimos o fechamento de V no intervalo $[0, 1]$ e, conseqüentemente, a existência de solução para o problema de Dirichlet $(PD)_H$.

Por fim, incluímos um apêndice onde são apresentados os resultados de EDPs lineares elípticas utilizados ao longo do texto, principalmente no capítulo 3.

2 Conceitos de Geometria Diferencial

2.1 Preliminares

Nesta seção serão apresentados os conceitos básicos de geometria diferencial para a abordagem do problema de Dirichlet para superfícies cmc com bordo plano. No que segue vamos apresentar as definições de superfície regular do \mathbb{R}^3 , área, curvatura média e superfícies mínimas, bem como deduzir a equação diferencial parcial (EDP) das superfícies de curvatura média constante. Nossa referência para este capítulo é o livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, cujo autor é Manfredo Perdigão do Carmo (2012), [2].

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada ponto $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\phi : U \rightarrow V \cap S$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- i) ϕ é diferenciável;
- ii) ϕ é um homeomorfismo;
- iii) Para todo $q \in U$, a diferencial $d\phi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem posto dois.

A aplicação ϕ que satisfaz os itens acima é dita uma parametrização de S em p .

Observação 1. Se $p = \phi(q)$, então a imagem da diferencial de ϕ , isto é, $d\phi_q(\mathbb{R}^2)$, é chamada de plano tangente a S em p e denotada por T_pS . Mostra-se que o T_pS está bem definido e independe da parametrização ϕ .

Exemplo 1. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Outra família de exemplos de superfícies regulares pode ser obtida através do seguinte resultado. Vale ressaltar que este exemplo será bastante utilizado neste trabalho.

Teorema 3. Se $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então o gráfico de u , $Gr(u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = u(x, y), \text{ com } (x, y) \in U\}$, é uma superfície regular.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], proposição 1, página 68.

Já vimos a definição de superfície. Mas, neste trabalho, estaremos interessados em superfícies com bordo. Esta definição tem como base [7].

Definição 2. *Uma superfície com bordo é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ que para cada ponto $q \in S$ há uma aplicação $\phi : U \rightarrow S$, onde U é um aberto de $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ e $q \in \phi(U)$. Pede-se ainda que ϕ seja uma parametrização e admita uma extensão contínua para uma vizinhança aberta de $\phi^{-1}(q)$ em \mathbb{R}^2 .*

Exemplo 2. *Uma calota esférica $S_e = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ é uma superfície com bordo.*

Definição 3. *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada $\phi(U)$, onde $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é parametrização. A área da região R é dada por:*

$$\int \int_{\phi^{-1}(R)} |\phi_u \times \phi_v| dudv = A(R).$$

Observação 2. *Note que na definição acima estamos supondo $R \subset \phi(U)$. Caso isso não ocorra, ou seja, $\phi(U)$ não cobre toda a região R , a definição pode ser adaptada.*

Agora, buscamos entender o conceito de curvatura de uma superfície. Para isso, precisamos da aplicação normal de Gauss.

Definição 4. *Dada S uma superfície regular, dizemos que ela é orientável se existe $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicação normal de Gauss satisfazendo:*

- i) N é contínuo;*
- ii) $N(p) \in (T_p S)^\perp$, ou seja, $N(p)$ pertence ao complemento ortogonal do plano tangente, para todo $p \in S$.*

A partir de agora vamos assumir que a superfície S é sempre orientável e está orientada.

A diferencial de N é a aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$ que opera da seguinte maneira: para cada vetor $v \in T_p S$ associa-se a derivada de N na direção de v , ou ainda, para cada curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera \mathbb{S}^2 . Isso equivale a restringir o vetor normal N à curva α . O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ pode ser visto como um vetor do plano tangente $T_p S$, uma vez que $T_p S$ e $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ são os mesmos espaços vetoriais, e ele mede a taxa de variação do vetor normal, restrito à curva α em $t = 0$.

Teorema 4. *A diferencial de N é uma aplicação linear autoadjunta, isto é, para todo $x, y \in T_p S$ e para todo $p \in S$ tem-se, $\langle dN_p(x), y \rangle = \langle x, dN_p(y) \rangle$.*

Demonstração. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização para S em uma vizinhança de $p \in S$. Então, o plano tangente $T_p S$ é gerado pelos vetores $\{\phi_u, \phi_v\}$. Dessa forma, se $x, y \in T_p S$, então $x = \alpha\phi_u + \beta\phi_v$ e $y = \gamma\phi_u + \delta\phi_v$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle dN_p(x), y \rangle &= \langle \alpha N_u + \beta N_v, \gamma\phi_u + \delta\phi_v \rangle \\ &= \alpha\gamma\langle \phi_u, N_u \rangle + \alpha\delta\langle N_u, \phi_v \rangle + \beta\gamma\langle N_v, \phi_u \rangle + \beta\delta\langle N_v, \phi_v \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle x, dN_p(y) \rangle &= \langle \alpha\phi_u + \beta\phi_v, \gamma N_u + \delta N_v \rangle \\ &= \alpha\gamma\langle \phi_u, N_u \rangle + \alpha\delta\langle \phi_u, N_v \rangle + \beta\gamma\langle \phi_v, N_u \rangle + \beta\delta\langle \phi_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Nesse sentido, é suficiente mostrar que $\langle N_u, \phi_v \rangle = \langle N_v, \phi_u \rangle$. Para tal, note que $\langle N(q), \phi_u(q) \rangle = 0$, para todo $q \in \phi(U)$. Derivando essa igualdade na direção de ϕ_v , temos:

$$\langle N_v, \phi_u \rangle + \langle N, \phi_{uv} \rangle = 0. \quad (2.1)$$

Além disso, observe também que $\langle N(q), \phi_v(q) \rangle = 0$, para todo $q \in \phi(U)$ e, derivando na direção de ϕ_u , temos:

$$\langle N_u, \phi_v \rangle + \langle N, \phi_{vu} \rangle = 0. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) segue o resultado. \square

Definição 5. Dado um ponto $p \in S$, $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é uma transformação linear autoadjunta, chamada de Segunda Forma Fundamental de S em p . Os autovalores de $-dN_p$ são:

$$k_1(p) = \max\{\langle -dN_p(v), v \rangle; v \in T_p S, |v| = 1\}$$

e

$$k_2(p) = \min\{\langle -dN_p(v), v \rangle; v \in T_p S, |v| = 1\}.$$

Eles são chamados de curvaturas principais de S em p e satisfazem $k_1(p) \geq k_2(p)$. Além disso, as direções dos autovetores da aplicação $-dN_p$ são chamadas direções principais.

Definição 6. Dado $p \in S$, definimos a curvatura média de S em p como sendo

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Exemplo 3. O cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{(2H)^2}$ é uma superfície de curvatura média constante H .

Definição 7. Seja S uma superfície e considere $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S . Então, definimos $E, F, G, e, f,$ e g por: $E = |\phi_u|^2$, $F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$, $G = |\phi_v|^2$, $e = \langle N, \phi_{uu} \rangle$, $f = \langle N, \phi_{uv} \rangle$ e $g = \langle N, \phi_{vv} \rangle$.

Teorema 5. *A curvatura média de uma superfície regular S pode ser escrita em termos de E , F , G , e , f e g , ou seja,*

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

A prova deste teorema se encontra em [2], página 184.

Agora, estamos hábeis a introduzir a noção de superfície com curvatura média constante (cmc), para então deduzir a equação diferencial parcial para superfícies cmc.

Definição 8. *Uma superfície S é dita mínima se sua curvatura média H é identicamente nula e de curvatura média constante se H for constante.*

No que segue, queremos relacionar a área e a curvatura média em superfícies, supondo que S esteja contida em uma única vizinhança coordenada.

Definição 9. *Sejam S uma superfície regular parametrizada por $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset U$ um domínio limitado e $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A variação normal de $\phi(\bar{D})$, determinada pela função h , é a aplicação $\bar{\phi} : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\bar{\phi}(u, v, t) = \phi(u, v) + th(u, v)N(u, v)$.*

É possível mostrar que existe um número $\varepsilon > 0$ de modo que dados p e $q \in S$ quaisquer, os segmentos das retas normais de comprimento 2ε , centrados em p e q , são disjuntos. Assim, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\phi^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi^t(u, v) = \bar{\phi}(u, v, t)$ é uma superfície regular parametrizada com:

- $\frac{\partial}{\partial u}\phi^t = \phi_u + thN_u + th_uN$;
- $\frac{\partial}{\partial v}\phi^t = \phi_v + thN_v + th_vN$.

Além disso, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são dados por:

$$E^t = E + th(\langle \phi_u, N_u \rangle + \langle \phi_u, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_uh_u,$$

$$F^t = F + th(\langle \phi_u, N_v \rangle + \langle \phi_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v,$$

$$G^t = G + th(\langle \phi_v, N_v \rangle + \langle \phi_v, N_v \rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_vh_v.$$

Utilizando o fato de que $\langle \phi_u, N_u \rangle = -e$, $\langle \phi_u, N_v \rangle + \langle \phi_v, N_u \rangle = -2f$, $\langle \phi_v, \phi_v \rangle = -g$ e o teorema 5, obtemos:

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$. Dessa forma, para ε suficientemente pequeno, a área de $\phi^t(\bar{D})$ é dada por:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{\frac{\partial \phi^t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi^t}{\partial v}} dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} dudv, \end{aligned}$$

onde $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$. Assim, para ε suficientemente pequeno temos:

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Agora, podemos enunciar o seguinte teorema que caracteriza superfícies mínimas:

Teorema 6. *Seja S uma superfície parametrizada por $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então S é uma superfície mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$, para todo domínio $D \subset U$ limitado e toda variação normal de $\phi(\bar{D})$.*

Demonstração. Se S é superfície mínima, então $H \equiv 0$. Pela construção acima, temos que:

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Como $H \equiv 0$, obtemos $A'(0) = 0$. Reciprocamente, suponha que $A'(0) = 0$ e que $H(q) \neq 0$ para algum $q \in D$. Escolha $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $h(q) = H(q)$, $hH \geq 0$ e h seja identicamente nula fora de uma vizinhança de q . Então, $A'(0) < 0$ para a variação determinada por h , absurdo! \square

Neste momento, estamos interessados em enunciar um teorema semelhante ao anterior, mas que caracterize superfícies cmc. Porém, primeiro enunciaremos um lema que será necessário para a prova do teorema em questão.

Lema 1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int_{\Omega} fgdA = 0$ para toda função real $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} gdA = 0$, então f é constante.*

Teorema 7. *Seja S um superfície regular. Então S tem curvatura média constante se, e somente se, $A'(0) = 0$, para todo domínio $D \subset U$ limitado e toda variação normal de $\phi(D)$ associada a uma função $h \in C_0^\infty(D)$, com $\int_D h\sqrt{EG - F^2} dudv = 0$.*

Demonstração. Usando o lema anterior, a prova deste resultado segue os mesmo passos da do teorema 6. \square

No que segue, vamos mostrar que se a superfície S é o gráfico de uma função $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então $A(S) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dA$ e vamos obter a EDP para superfícies de curvatura média constante H que são gráficos.

Proposição 1. *Seja $\phi(x, y) = (x, y, u(x, y))$ uma parametrização para a superfície S . Então, vale:*

- $\phi_x(x, y) = (1, 0, u_x)$ e $\phi_y(x, y) = (0, 1, u_y)$;
- $\phi_{xx}(x, y) = (0, 0, u_{xx})$, $\phi_{xy}(x, y) = (0, 0, u_{xy})$ e $\phi_{yy}(x, y) = (0, 0, u_{yy})$;
- $\phi_x \wedge \phi_y = (-u_x, -u_y, 1)$;
- $|\phi_x \wedge \phi_y| = \sqrt{(-u_x)^2 + (-u_y)^2 + 1} = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$;
- $N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(u_x, u_y, -1)$;
- $E = |\phi_x|^2 = \langle \phi_x, \phi_x \rangle = 1 + u_x^2$, $F = \langle \phi_x, \phi_y \rangle = u_x u_y$ e $G = |\phi_y|^2 = \langle \phi_y, \phi_y \rangle = 1 + u_y^2$ (*);
- $e = \langle N, \phi_{xx} \rangle = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$, $f = \langle N, \phi_{xy} \rangle = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$ e $g = \langle N, \phi_{yy} \rangle = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$.

A área da superfície S é dada por:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_U \int |\phi_x \wedge \phi_y| dx dy \\ &= \int_U \int \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy. \end{aligned}$$

Além disso, aplicando o teorema 5, obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{2\sqrt{1 + |\nabla u|^2}[(1 + u_x^2)(1 + u_y^2) - u_x^2 u_y^2]} \\ &= \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{2(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = -H.$$

Dessa forma, o gráfico da função $u \in C^2(\Omega)$ tem curvatura média constante em Ω , quando orientado com vetor normal N , se, e somente se:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = -2H. \quad (2.3)$$

Observação 3. *É possível obter a equação (2.3) via variação própria de gráficos.*

No capítulo 4 vamos tratar da existência de solução para o problema de Dirichlet:

$$(\spadesuit) = \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.2 Campos de Vetores

Começaremos essa seção tratando dos conceitos e resultados básicos envolvendo gradiente e divergente em superfícies. A bibliografia base utilizada aqui é o livro *Geometria Diferencial*, cujo autor é Paulo Ventura Araújo [1].

O primeiro resultado que será demonstrado é uma proposição que caracteriza o gradiente de uma função diferenciável definida em uma superfície S .

Definição 10. *Um campo de vetores em uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação $W : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz $W(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$. O campo W é diferenciável se para cada $p \in S$, existe uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em p de modo que $W(\phi(u, v)) = a(u, v)\phi_u + b(u, v)\phi_v$, com $(u, v) \in U$ sendo a e b diferenciáveis em U .*

Definição 11. *O gradiente de uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada ponto $p \in S$ associa um vetor $\nabla f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df_p(v)$, para todo $v \in T_p S$.*

Proposição 2. *i) Se, E, F e G são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental em uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, então $\nabla f(p)$ em $\phi(U)$ é dado por:*

$$\nabla f(p) = \frac{\bar{f}_u G - \bar{f}_v F}{EG - F^2} \phi_u + \frac{\bar{f}_v E - \bar{f}_u F}{EG - F^2} \phi_v,$$

onde $\bar{f} = f \circ \phi$. Em particular, se $S = \mathbb{R}^2$ com coordenadas x e y , então

$$\nabla f(p) = \bar{f}_x e_1 + \bar{f}_y e_2,$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

ii) Fixe $p \in S$ e varie v no círculo unitário ($|v| = 1$) em $T_p S$. Então, $d\bar{f}_p(v)$ é máxima se, e somente se, $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ (ou seja, $\nabla f(p)$ fornece a direção de variação máxima de f em p).

Demonstração. i) Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrização de S em p . Uma vez que $\nabla(\bar{f})(p) \in T_p S$ e $\{\phi_u, \phi_v\}$ é uma base de $T_p S$, podemos escrever $\nabla \bar{f}(p) = A\phi_u(q) +$

$B\phi_v(q)$, com $A, B \in \mathbb{R}$ e $q = \phi^{-1}(p)$. Assim,

$$\begin{aligned}\bar{f}_u(q) &= d\bar{f}_p\phi_u(q) \\ &= \langle \nabla \bar{f}(p), \phi_u(q) \rangle \\ &= \langle A\phi_u(q) + B\phi_v(q), \phi_u(q) \rangle \\ &= A\langle \phi_u(q), \phi_u(q) \rangle + B\langle \phi_v(q), \phi_u(q) \rangle \\ &= AE + BF\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{f}_v(q) &= d\bar{f}_p\phi_v(q) \\ &= \langle \nabla \bar{f}(p), \phi_v(q) \rangle \\ &= \langle A\phi_u(q) + B\phi_v(q), \phi_v(q) \rangle \\ &= AF + BG.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \bar{f}_u \\ \bar{f}_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{f}_u \\ \bar{f}_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_u \\ \bar{f}_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} \bar{f}_u G - \bar{f}_v F \\ -\bar{f}_u F + \bar{f}_v E \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dessa forma, $A = \frac{\bar{f}_u G - \bar{f}_v F}{EG - F^2}$ e $B = \frac{-\bar{f}_u F + \bar{f}_v E}{EG - F^2}$.

Em particular, se $S = \mathbb{R}^2$, com coordenadas x e y , temos que uma parametrização para S é $\phi(x, y) = (x, y, 0)$. Daí, $\phi_x(x, y) = (1, 0, 0) = e_1$ e $\phi_y(x, y) = (0, 1, 0) = e_2$, obtendo assim $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$. Logo,

$$\nabla f = \bar{f}_x e_1 + \bar{f}_y e_2.$$

- ii) Observe que $df_p(v)$ é máximo se $\langle \nabla f(p), v \rangle = |\nabla f(p)||v|\cos\theta$ é máximo, onde θ é o ângulo entre $\nabla f(p)$ e v , o que ocorre se $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$. Daí, $\nabla f(p)$ e v possuem mesma direção, o que implica que v é unitário na direção de $\nabla f(p)$, isto é, $v = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$.

□

Exemplo 4. Consideremos que a superfície S seja o gráfico de uma função diferenciável $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Considere a função $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = u(x, y)$. Determinemos o gradiente da função h . Para tal, vamos utilizar a proposição anterior. Note que, uma parametrização para a superfície S é: $\phi(x, y) = (x, y, u(x, y))$. Daí, ϕ_x , ϕ_y , E , F e G assumem valores como na proposição 1. Além disso,

$$h_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = u_x$$

e

$$h_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = u_y.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{u_x(1 + u_y^2) - u_y(u_x u_y)}{(1 + u_x^2)(1 + u_y^2) - u_x^2 u_y^2} \phi_x + \frac{u_y(1 + u_x^2) - u_x(u_x u_y)}{(1 + u_x^2)(1 + u_y^2) - u_x^2 u_y^2} \phi_y \\ &= \frac{u_x + u_x u_y^2 - u_x u_y^2}{1 + |\nabla u|^2} \phi_x + \frac{u_y + u_y u_x^2 - u_y u_x^2}{1 + |\nabla u|^2} \phi_y \\ &= \frac{u_x}{1 + |\nabla u|^2} (1, 0, u_x) + \frac{u_y}{1 + |\nabla u|^2} (0, 1, u_y) \\ &= \left(\frac{u_x}{1 + |\nabla u|^2}, \frac{u_y}{1 + |\nabla u|^2}, \frac{|\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A ideia agora é definir o divergente de um campo de vetores. Mas, para isso, será necessário relembrar o conceito de derivada covariante.

Definição 12. Sejam W um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $z \in T_p S$. Considere uma curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = z$, e seja $W(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a restrição do campo de vetores W à curva α . A derivada covariante de W no ponto p em relação a z é o vetor obtido pela projeção de $\frac{dW}{dt}(0)$ sobre o plano $T_p S$, isto é,

$$\begin{aligned} D_z W &= \left(\frac{d}{dt} W(\alpha(t)) \Big|_{t=0} \right)^T \\ &= W'(0) - \langle W'(0), N(p) \rangle N(p). \end{aligned}$$

Proposição 3. A derivada covariante é intrínseca, isto é, não depende da escolha do vetor normal N , nem da escolha da curva α . Além disso, a derivada covariante é uma transformação linear de $T_p S$ em $T_p S$.

A prova desta proposição encontra-se em [2], página 285.

Definição 13. Uma conexão afim ∇ em uma superfície S é uma aplicação $\nabla : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow \chi(S)$, onde $\chi(S)$ representa o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em S , que a cada par de campos de vetores (X, Y) associa o campo $\nabla_X Y$ que satisfaz:

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ;$
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ;$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$

onde $X, Y, Z \in \chi(S)$ e f, g são funções diferenciáveis em S .

É possível relacionar a conexão afim com a derivada covariante, como vemos na próxima proposição.

Proposição 4. *Seja S uma superfície com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores V ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow S$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo da curva α , denominado derivada covariante de V ao longo de α , tal que:*

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$ onde f é uma função diferenciável em I ;
- se $V(t) = Y(\alpha(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y.$

A prova desta proposição se encontra em [3], proposição 2.2.

Considere V um campo de vetores num aberto U de uma superfície orientada S . Considere coordenadas $\phi(u, v)$ em U . Usando a derivada covariante temos que os vetores $D_{\phi_u}V$ e $D_{\phi_v}V$ são as componentes tangenciais de $\frac{\partial V}{\partial u}$ e $\frac{\partial V}{\partial v}$, respectivamente. Isto é, escrevendo

$$\frac{\partial V}{\partial u} = b_{11}\phi_u + b_{21}\phi_v + \lambda_1 N \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial v} = b_{12}\phi_u + b_{22}\phi_v + \lambda_2 N, \quad (2.6)$$

a matriz de $D_{\phi(u,v)}V$ relativa à base $\{\phi_u, \phi_v\}$ de $T_{\phi(u,v)}S$ é

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Definição 14. *A divergência do campo de vetores V é o traço da matriz dada em (2.7), ou seja,*

$$\operatorname{div} V(\phi(u, v)) = \operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22}.$$

Vejam que a divergência está bem definida. Fixado V campo de vetores, definimos a transformação linear $T_V : T_p S \rightarrow T_p S$ por $T_V(v) = D_v V$. Assim, $\text{div } V = \text{tr}(T_V)$, que está bem definido pois o traço de transformação linear está bem definido.

No que segue, buscamos explicitar uma fórmula para o divergente de campos de vetores em superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$. Nos próximos cálculos, será conveniente admitir que o campo V possa não ser tangente a S . Usando (2.5) e (2.6), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v &= (b_{11}\phi_u + b_{21}\phi_v + \lambda_1 N) \times \phi_v \\ &= b_{11}(\phi_u \times \phi_v) + b_{21}(\phi_v \times \phi_v) + \lambda_1(N \times \phi_v) \\ &= b_{11}(\phi_u \times \phi_v) + \lambda_1(N \times \phi_v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v} &= \phi_u \times (b_{12}\phi_u + b_{22}\phi_v + \lambda_2 N) \\ &= b_{12}(\phi_u \times \phi_u) + b_{22}(\phi_u \times \phi_v) + \lambda_2(\phi_u \times N) \\ &= b_{22}(\phi_u \times \phi_v) + \lambda_2(\phi_u \times N), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v + \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v} = (b_{11} + b_{22})(\phi_u \times \phi_v) + \lambda_1(N \times \phi_v) + \lambda_2(\phi_u \times N).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v + \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v}, N \right\rangle &= \langle (b_{11} + b_{22})(\phi_u \times \phi_v) + \lambda_1(N \times \phi_v) + \lambda_2(\phi_u \times N), N \rangle \\ &= (b_{11} + b_{22})\langle \phi_u \times \phi_v, N \rangle + \lambda_1\langle N \times \phi_v, N \rangle + \lambda_2\langle \phi_u \times N, N \rangle \\ &= (b_{11} + b_{22})\langle \phi_u \times \phi_v, N \rangle \\ &= (\text{div } V)\sqrt{EG - F^2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

desde que a parametrização ϕ seja coerente com a orientação de S . Buscamos simplificar um pouco mais a expressão obtida para o $\text{div } V$, (2.8). Escrevendo $V = \alpha\phi_u + \beta\phi_v + \gamma N$ e usando a matriz da transformação $-DN_{\phi(u,v)}$ relativa à base $\{\phi_u, \phi_v\}$ para exprimir os vetores N_u e N_v , como segue:

$$-N_u = a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v$$

e

$$-N_v = a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v,$$

temos:

$$\begin{aligned} \phi_v \times N_u + N_v \times \phi_u &= -\phi_v \times (a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v) - (a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v) \times \phi_u \\ &= (a_{11} + a_{22})\phi_u \times \phi_v \\ &= 2H\sqrt{EG - F^2}N, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\langle V, \phi_v \times N \rangle &= \langle \alpha\phi_u + \beta\phi_v + \gamma N, \phi_v \times N \rangle \\
&= \langle \alpha\phi_u, \phi_v \times N \rangle \\
&= \alpha \langle \phi_u \times \phi_v, N \rangle \\
&= \alpha \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}$$

e

$$\langle V, N \times \phi_u \rangle = \beta \sqrt{EG - F^2}.$$

Prosseguindo com os cálculos, temos, usando a derivada do produto interno e do produto vetorial e que $A \times B = -B \times A$, que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v + \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v}, N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial u}, \phi_v \times N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial v}, N \times \phi_u \right\rangle \\
&= \left\langle -V, \frac{\partial}{\partial u}(\phi_v \times N) + \frac{\partial}{\partial v}(N \times \phi_u) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial u} \langle V, \phi_v \times N \rangle \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \langle V, N \times \phi_u \rangle \\
&= -\langle V, \phi_v \times N_u + N_v \times \phi_u \rangle + \frac{\partial}{\partial u} \langle V, \phi_v \times N \rangle + \frac{\partial}{\partial v} \langle V, N \times \phi_u \rangle \\
&= -\sqrt{EG - F^2} \langle V, 2HN \rangle + \frac{\partial}{\partial u} (\alpha \sqrt{EG - F^2}) + \frac{\partial}{\partial v} (\beta \sqrt{EG - F^2}).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos, desta última igualdade e de (2.8), a seguinte proposição:

Proposição 5. *Seja V um campo de vetores (não necessariamente tangentes) num aberto U coberto por uma parametrização $\phi(u, v)$ compatível com a orientação de S . Então:*

i) *se indicarmos por V^T a componente tangencial de V , temos:*

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\langle \frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v + \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v}, N \right\rangle = -\langle V, 2HN \rangle + \operatorname{div} (V^T); \quad (2.10)$$

ii) *se V for um campo tangente a S e tal que $V = \alpha\phi_u + \beta\phi_v$, temos:*

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\alpha \sqrt{EG - F^2}) + \frac{\partial}{\partial v} (\beta \sqrt{EG - F^2}) \right\}.$$

E por fim, temos o Teorema da Divergência em superfícies:

Teorema 8. *Seja V um campo de vetores tangentes em S e $\Omega \subset S$ uma região poligonal. Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V d\sigma = \int_{\gamma} \langle V, -\tau_2 \rangle ds, \quad (2.11)$$

onde $\gamma(s)$ é a fronteira de Ω e $\tau_2(s) \in T_{\gamma(s)}S$ é o vetor unitário perpendicular a $\gamma'(s)$ que aponta para dentro de Ω .

Antes de passar a prova deste teorema, vamos enunciar o Teorema de Green:

Teorema 9. *Sejam α uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário e R a região fechada delimitada por α . Se $V = (V_1, V_2)$ é um campo de vetores contínuo do \mathbb{R}^2 com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D que contém R , então*

$$\int_{\alpha} V_1 dx + \int_{\alpha} V_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

A demonstração deste teorema se encontra em [9], página 279, teorema 5.7.1.

Demonstração do teorema 8. Suponhamos que $\gamma(s)$ esteja parametrizada pelo comprimento de arco e seja percorrida de modo que Ω fique sempre à esquerda de γ . Note que τ_2 não está definido nos vértices de γ , o que não causa problema na integração, uma vez que isto acontece para um número finito de valores de s . Observe que basta provar o teorema na hipótese de que $\bar{\Omega}$ esteja contido em alguma vizinhança parametrizada, pois, caso contrário, é possível decompor Ω em um número finito de regiões poligonais $(\Omega_i)_{i=1}^n$ suficientemente pequenas. Admitindo que vale (2.11) para cada Ω_i e denotando por γ_i a fronteira de Ω_i e por τ_2^i o vetor associado, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} V d\sigma &= \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} \operatorname{div} V d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \langle V, -\tau_2^i \rangle ds \\ &= \int_{\gamma} \langle V, -\tau_2 \rangle ds. \end{aligned}$$

Suponhamos, então, que Ω esteja coberto pela parametrização $\phi(u, v)$ e ponhamos $\gamma(s) = \phi(u(s), v(s))$, com $s \in [0, L]$. Além disso, exigimos que a parametrização ϕ seja compatível com a orientação de S . Assim, pelo teorema de Green em \mathbb{R}^2 , temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} V d\sigma &= \int \int_{\phi^{-1}(\Omega)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\alpha \sqrt{EG - F^2}) + \frac{\partial}{\partial v} (\beta \sqrt{EG - F^2}) \right\} dudv \\ &= \int_0^L \sqrt{EG - F^2} (\alpha(s)v'(s) - \beta(s)u'(s)) ds. \end{aligned}$$

Buscamos simplificar a última integral. Para tal, formamos o produto vetorial membro a membro das igualdades

$$V(s) = \alpha(s)\phi_u + \beta(s)\phi_v$$

e

$$\gamma'(s) = u'(s)\phi_u + v'(s)\phi_v,$$

obtendo:

$$\begin{aligned}
 V(s) \times \gamma'(s) &= (\alpha(s)\phi_u + \beta(s)\phi_v) \times (u'(s)\phi_u + v'(s)\phi_v) \\
 &= \alpha(s)u'(s)(\phi_u \times \phi_u) + \beta(s)u'(s)(\phi_v \times \phi_u) + \alpha(s)v'(s)(\phi_u \times \phi_v) \\
 &\quad + \beta(s)v'(s)(\phi_v \times \phi_v) \\
 &= (\alpha(s)v'(s) - \beta(s)u'(s))(\phi_u \times \phi_v) \\
 &= \sqrt{EG - F^2}(\alpha(s)v'(s) - \beta(s)u'(s))N.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a integral acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \langle V(s) \times \gamma'(s), N \rangle ds &= \int_0^L \langle V(s), \gamma'(s) \times N \rangle ds \\
 &= \int_0^L \langle V(s), -\tau_2(s) \rangle ds \\
 &= \int_{\gamma} \langle V, -\tau_2 \rangle ds.
 \end{aligned}$$

□

Tendo conhecimento dos conceitos de gradiente e de divergente, podemos definir o operador Laplaciano, como segue:

Definição 15. O Laplaciano de uma função $f \in C^2(S)$ é dado por:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Exemplo 5. Para $S = \operatorname{Gr}(u)$, vamos calcular o Laplaciano de h , para $h(x, y) = u(x, y)$ como visto no exemplo 4. Em (2.4) obtivemos o gradiente de h . Agora, pela proposição

10 (ii), temos, para $\alpha = \frac{u_x}{1+|\nabla u|^2}$ e $\beta = \frac{u_y}{1+|\nabla u|^2}$, que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla h) &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \sqrt{EG-F^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta \sqrt{EG-F^2}) \right\} \\
&= \frac{1}{(1+u_x^2+u_x^2 u_y^2+u_y^2-u_x^2 u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+|\nabla u|^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+|\nabla u|^2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \left\{ \frac{u_{xx} \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \frac{1}{2}(1+|\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}(2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx})u_x}{1+|\nabla u|^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_{yy} \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \frac{1}{2}(1+|\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}(2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy})u_y}{1+|\nabla u|^2} \right\} \\
&= \frac{u_{xx} + u_{yy}}{1+|\nabla u|^2} - \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{(1+|\nabla u|^2)^2} \\
&= \frac{(u_{xx} + u_{yy})(1+u_x^2 + u_y^2) - u_x^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}}{(1+|\nabla u|^2)^2} \\
&= \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^2} [u_{xx}(1+u_y^2) + u_{yy}(1+u_x^2) - 2u_x u_y u_{xy}].
\end{aligned}$$

2.3 Geodésicas; Aplicação Exponencial

Para uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ que consiste em derivar u duas vezes em direções ortogonais e somar. Queremos generalizar esse cálculo simples para superfícies, o que só será possível com a introdução do referencial geodésico, que é um sistema de coordenadas em S que faz o papel da coordenadas (x, y) em \mathbb{R}^2 . Para introduzi-lo, precisamos definir geodésicas e aplicação exponencial.

Definição 16. Um campo de vetores W ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ é denominado paralelo se $D_{\alpha'(t)}W = 0$ para todo $t \in I$.

Definição 17. Uma curva parametrizada, não constante, $\gamma : I \rightarrow S$ é chamada geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo da curva γ em t , isto é, $D_{\gamma'(t)}\gamma(t) = 0$. Além disso, γ é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo $t \in I$.

O próximo resultado nos dá a existência e unicidade de geodésicas. Vale ressaltar que esse resultado será fundamental para definir a aplicação exponencial.

Proposição 6. Sejam $p \in S$ e $w \in T_p S$, com $w \neq 0$. Então existe um número $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.

Com as condições da proposição anterior, convém denotar a geodésica que depende do vetor $v \in T_p S$ e tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ por $\gamma(t, v) = \gamma$. No próximo resultado vamos verificar que é possível percorrer o traço de uma geodésica em um certo tempo ajustando a velocidade de maneira apropriada. Isso acontece porque a velocidade de uma geodésica, em módulo, é constante.

Lema 2. *Se a geodésica $\gamma(t, v)$ está definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $\gamma(t, \lambda v)$ está definida para $t \in (-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ e vale $\gamma(\lambda t, v) = \gamma(t, \lambda v)$.*

A prova deste lema se encontra em [2], lema 1, página 340 .

Se $v \in T_p S$, com $v \neq 0$, é tal que $\gamma(|v|, \frac{v}{|v|}) = \gamma(1, v)$ está definida, podemos escrever $\exp_p(v) = \gamma(1, v)$ e $\exp_p(0) = p$. Geometricamente isso significa percorrer (se possível) um comprimento igual a $|v|$ ao longo da geodésica γ passando por p na direção de v . O ponto que é obtido por esta construção é denotado por $\exp_p(v)$.

Apresentaremos agora dois resultados importantes sobre a aplicação exponencial.

Proposição 7. *Seja $p \in S$. Então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que \exp_p é definida e diferenciável no interior de um disco de raio ε de $T_p S$, com centro na origem.*

A prova deste resultado se encontra em [2], proposição 1, página 342.

Proposição 8. *A aplicação exponencial $\exp_p : B_\varepsilon \subset T_p S \rightarrow S$ é um difeomorfismo em uma vizinhança $U \subset B_\varepsilon$ da origem de $T_p S$.*

A prova desse teorema pode ser encontrada em [2], página 342, proposição 2.

Por conveniência, chamaremos V a vizinhança normal de $p \in S$ se $V = \exp_p(U)$, onde U é vizinhança da origem de $T_p S$ restrita a qual \exp_p é um difeomorfismo.

Sendo a aplicação exponencial um difeomorfismo em uma vizinhança U da origem, é possível determinar coordenadas em $V = \exp_p(U)$ a partir dela. Aqui, estaremos interessados nas coordenadas normais que são obtidas da seguinte forma: considere em $T_p S$, $p \in S$, dois vetores ortogonais, digamos e_1 e e_2 . Como $\exp_p : U \rightarrow V \subset S$ é um difeomorfismo, ela satisfaz as condições de uma parametrização local em p . Assim, se $q \in V$, então $q = \exp_p(w)$, com $w = ue_1 + ve_2$, $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $T_p S$, e, dessa forma, dizemos que q tem coordenadas (u, v) .

A seguir, introduziremos um campo de vetores que será útil mais adiante.

Lema 3. *Sejam X e Y campos de vetores diferenciáveis em uma superfície S . Então existe um único campo de vetores Z tal que, para toda função f diferenciável em S , $Zf = (XY - YX)f$, onde $X(f)(x) = df_x(X(x))$.*

A prova deste lema se encontra em [3], lema 5.2, página 28.

O campo de vetores Z dado pelo lema anterior é chamado de colchete e sua expressão é dada por $Z = [X, Y] = XY - YX$.

Definição 18. *Sejam S uma superfície regular, $p \in S$ e $U \subset S$ uma vizinhança de p . Um conjunto $\{E_i\}$ de campos de vetores ortonormais em cada ponto de U , com $i = 1, 2$ é dito um referencial geodésico se, em p , $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.*

Proposição 9. *Em um sistema de coordenadas normais centrado em $p \in S$, todos os símbolos de Christoffel são nulos em p .*

Observação 4. *Seja S uma superfície parametrizada por $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Observe que $\{\phi_u, \phi_v, N\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , onde N é a orientação de S . Assim, podemos exprimir as derivadas de segunda ordem de ϕ em termos dessa base:*

- $\phi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \phi_u + \Gamma_{11}^2 \phi_v + \lambda_1 N$;
- $\phi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \phi_u + \Gamma_{12}^2 \phi_v + \lambda_2 N$;
- $\phi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \phi_u + \Gamma_{21}^2 \phi_v + \lambda_3 N$;
- $\phi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \phi_u + \Gamma_{22}^2 \phi_v + \lambda_4 N$.

Os coeficientes Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da parametrização ϕ .

A prova desta proposição segue os passos da prova do Lema de Gauss, lema 3.5, página 76, [3].

Demonstração. Sejam S uma superfície, $p \in S$, $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$. Considere uma parametrização de S em p dada por $\phi(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$. Queremos mostrar que $\phi_{uu}(0, 0) = \phi_{vv}(0, 0) = \phi_{uv}(0, 0) = 0$. De fato, observe que a aplicação que associa $x \mapsto \phi(u, 0) = \exp_p(ue_1) = \gamma(u)$ define uma geodésica em S . Assim,

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(u, 0) &= \frac{\partial}{\partial u} \phi_u(u, 0) \\ &= \nabla_{\phi_u} \phi_u(u, 0) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos $\phi_{vv}(0, v) = 0$. No que segue, provemos que

$$\langle \phi_u(u, 0), \phi_v(u, 0) \rangle = 0, \tag{2.12}$$

para todo $u \in (-\delta, \delta)$. Observe que

$$\langle \phi_u(u, 0), \phi_v(u, 0) \rangle u = \langle d(\exp_p)_{ue_1} ue_1, d(\exp_p)_{ue_1} e_2 \rangle.$$

Considere em $T_p S$ os vetores perpendiculares $w_1 = ue_1$ e $w_2 = e_2$. Defina $w(s) = (\cos s)w_1 + (\sin s)w_2$ e seja $f(s, t) = \exp_p(tw(s))$. Note que, para cada s fixado, a curva $t \mapsto f(s, t)$ é uma geodésica. Logo, $|f_t(s, t)|$ não depende de t . Considere $A = f_t(0, 1)$ e $B = f_s(0, 1)$. Observe que:

$$\begin{aligned} A &= f_t(0, 1) \\ &= \frac{d}{dt} \exp_p(tw(0))|_{t=1} \\ &= \frac{d}{dt} \exp_p(tue_1)|_{t=1} \\ &= d(\exp_p)_{ue_1} ue_1 \\ &= u\phi_u(u, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= f_s(0, 1) \\ &= \frac{d}{ds} \exp_p(w(s))|_{s=0} \\ &= d(\exp_p)_{w(0)} w'(0) \\ &= \phi_v(u, 0). \end{aligned}$$

Assim, (2.12) é equivalente a $\langle A, B \rangle$. Desse modo, queremos mostrar que $\langle A, B \rangle = 0$. Inicialmente, vejamos que $\frac{\partial}{\partial t} \langle f_s(s, t), f_t(s, t) \rangle(t) = 0$. Para tal, note que $[f_s, f_t] = 0$, pois

$$\begin{aligned} [f_s, f_t](u) &= \nabla_{f_s} f_t(u) - \nabla_{f_t} f_s(u) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} u \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tendo a igualdade acima, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f_s, f_t \rangle(s, t) &= \langle \nabla_{f_t} f_s, f_t \rangle(s, t) + \langle f_s, \nabla_{f_t} f_t \rangle(s, t) \\ &= \langle \nabla_{f_t} f_s, f_t \rangle(s, t) \\ &= \langle \nabla_{f_s} f_t, f_t \rangle(s, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} |f_t|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato da curva $t \mapsto f(s, t)$ ser geodésica. Com isso, $\langle f_s, f_t \rangle$ não depende de t e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle f_t(0, 1), f_s(0, 1) \rangle \\ &= \langle f_t(0, 0), f_s(0, 0) \rangle \\ &= \langle ue_1, e_2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, tendo que $\langle A, B \rangle = 0$, temos que $\langle u\phi_u, \phi_v \rangle(u, 0) = 0$, para todo $u \in (-\delta, \delta)$. Consequentemente, $\langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle(p) = 0$. \square

Corolário 1. *Sejam S uma superfície, $p \in S$ e $U \subset S$ uma vizinhança de p . Então existe um referencial geodésico em U .*

Demonstração. Observe que podemos escrever $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$. Como, pela proposição anterior, os símbolos de Cristoffel são todos nulos para um sistema de coordenadas normais, temos que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. \square

Neste instante, exibiremos uma proposição que nos permite determinar, de forma equivalente a definição 11, o gradiente de uma função f e calcularemos o laplaciano de f .

Proposição 10. *Seja f uma função diferenciável na superfície S e seja $\{E_1, E_2\}$ um referencial geodésico numa vizinhança de $p \in S$. Então $\nabla f(p) = \sum_{i=1}^2 E_i(f)E_i(p)$.*

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2\}$ um referencial geodésico na vizinhança de $p \in S$. Note que podemos escrever o vetor $\nabla f(p)$ como combinação linear do referencial geodésico, obtendo

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla f(p), E_i \rangle E_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^2 df_p E_i E_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^2 E_i(f) E_i(p). \end{aligned}$$

\square

Proposição 11. *Sejam X, Y e Z compos de vetores diferenciáveis em \mathbb{R}^3 . Então, $\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$.*

Demonstração. De fato, considere $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^3)$. Note que, podemos escrever $Z = \sum_{i=1}^3 \langle Z, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^3 z_i e_i$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_X Z &= X \left(\sum_{i=1}^3 z_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 X(z_i) e_i, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= Y \left(\sum_{i=1}^3 X(z_i) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 Y(X(z_i)) e_i. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \sum_{i=1}^3 Y(X(z_i))e_i - \sum_{i=1}^3 X(Y(z_i))e_i + \nabla_{[X, Y]}Z \\ &= -\nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_{[X, Y]}Z \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos. □

Finalmente, calculemos o laplaciano de uma função diferenciável f :

$$\Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f)(p) \tag{2.13}$$

$$= \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^2 E_i(f)E_i(p)\right) \tag{2.14}$$

$$= \sum_{i=1}^2 E_i(E_i(f))(p). \tag{2.15}$$

3 Solubilidade do Problema de Dirichlet para Gráficos cmc

Para mostrar a existência de solução para o problema

$$(\spadesuit) = \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

usaremos o Método da Continuidade. Considere, pois, o conjunto

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ tal que } Q_t H(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\phi\},$$

onde $Q_t H(u_t) = \operatorname{div} \frac{\nabla u_t}{\sqrt{1+|\nabla u_t|^2}} + 2tH$. Neste capítulo, buscamos mostrar a abertura e o fechamento de V no intervalo $[0, 1]$, com o intuito de utilizar o fato de que os intervalos de \mathbb{R} são conexos para concluir que $V = [0, 1]$. Dessa forma, teremos que $1 \in V$ e a função correspondente a $t = 1$ garante que o problema de Dirichlet clássico é solúvel. Vale ressaltar que as principais bibliografias utilizadas aqui são [8] e as notas de aula do curso de EDP's elípticas do professor Jaime Ripoll.

Definição 19. Definimos $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ como o conjunto de funções de classe C^2 cujas derivadas de segunda ordem são Hölder contínuas com expoente α em $\bar{\Omega}$ (ver definição 33 no apêndice) e $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ como sendo o conjunto de funções de classe $C^{2,\alpha}$ (ver definição 35 no apêndice) tais que sua restrição ao bordo é nula. Esses espaços são normados com a norma $|u|_{2,\alpha} = |u|_2 + \sup_{\Omega} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \right]_{\alpha}$ (que está definida no exemplo 6, no apêndice deste trabalho).

Definição 20. O bordo de um domínio Ω é dito de classe $C^{2,\alpha}$ se a curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que parametriza $\partial\Omega$ é de classe $C^{2,\alpha}$.

3.1 Abertura de V

Para mostrar que V é aberto em $[0, 1]$, devemos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 10. Sejam Ω um domínio limitado e suave do \mathbb{R}^2 e $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Considere $t_0 \in [0, 1]$ e suponha que existe $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $Q_{t_0} H(u_0) = 0$ e $u_0|_{\partial\Omega} = t_0\phi$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$, existe $u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $Q_t H(u_t) = 0$ e $u_t|_{\partial\Omega} = t\phi$.

Para mostrar tal teorema, vamos fazer uso do Teorema da Função Implícita para espaços de Banach e de alguns resultados de EDPs que nos permitirão aplicar o teorema.

Teorema 11 (Teorema da Função Implícita para Espaços de Banach). *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados, com Y espaço de Banach. Considere $A \subset X \times Y$ aberto e $f : A \rightarrow Z$ uma aplicação de classe C^1 satisfazendo:*

- i) $f(x_0, y_0) = 0$, para algum $(x_0, y_0) \in A$;
- ii) $[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)]^{-1} : Z \rightarrow Y$ existe e é contínua.

Então, existem $U \subset X$ e $V \subset Y$ vizinhanças de x_0 e y_0 , respectivamente, tais que para todo $x \in U$, existe um único $\phi(x) \in V$, com $f(x, \phi(x)) = 0$. Além disso, ϕ é diferenciável em x_0 e

$$D\phi(x_0) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \phi(x_0)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \phi(x_0)). \quad (3.1)$$

Demonstração. Detotamos $T = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Por hipótese, T é invertível. Logo, podemos definir a aplicação $h : A \rightarrow Y$ por $h(x, y) = y - T^{-1}f(x, y)$. Derivando h com relação à y , temos:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \quad (3.2)$$

Como $\frac{\partial h}{\partial y}$ é contínua em (x_0, y_0) temos que existem vizinhanças U_1 de x_0 e $r > 0$ tais que se $(x, y) \in U_1 \times \overline{B_r(y_0)}$, então $|\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{2}$. Segue da última desigualdade e da equação (3.2) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \left| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \\ &= \left| I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - I + T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \\ &= \left| - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + T^{-1} T \right| \\ &= \left| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right|, \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in U_1 \times \overline{B_r(y_0)}$.

Usando a Desigualdade do Valor Médio, temos que, se $y_1, y_2 \in V$,

$$\begin{aligned} |h(x, y_1) - h(x, y_2)| &\leq \sup_{y \in V} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) |y_1 - y_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|, \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo $x \in U_1$.

Uma vez que h é contínua, existe uma vizinhança $U \subset U_1$ de x_0 tal que para $x \in U$, tem-se $|h(x, y_0) - h(x_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}$, ou ainda

$$|h(x, y_0) - y_0| \leq \frac{r}{2}, \quad (3.4)$$

para todo $x \in U$.

Agora, fixemos $x \in U$ e definimos $h_x : V \rightarrow V$ por $h_x(y) = h(x, y)$. Mostremos que h_x está bem definida. Com efeito, se $y \in \overline{B_r(y_0)}$, então, usando as equações (3.4) e (3.3), temos:

$$\begin{aligned} |h_x(y) - y_0| &= |h(x, y) - h(x, y_0) + h(x, y_0) - y_0| \\ &\leq |h(x, y) - h(x, y_0)| + |h(x, y_0) - y_0| \\ &\leq \frac{1}{2}|y - y_0| + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Portanto, $h_x(\overline{B_r(y_0)}) \subset \overline{B_r(y_0)}$ e, assim, h_x está bem definida. Note que, pela desigualdade (3.3), temos, para todo $y_1, y_2 \in \overline{B_r(y_0)}$,

$$|h_x(y_1) - h_x(y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

Logo, h_x é uma contração. Sendo $\overline{B_r(y_0)}$ um espaço métrico completo, concluímos, pelo teorema de Ponto Fixo de Banach (teorema 43, ver apêndice), que h_x tem um único ponto fixo $y = y(x)$. Definimos, então, a aplicação $\phi : U \rightarrow \overline{B_r(y_0)}$, por $\phi(x) = y$, onde y é o único ponto fixo da função h_x . Observe que $h_{x_0}(y_0) = h(x_0, y_0) = y_0$. Assim, $\phi(x_0) = y_0$, ou seja $f(x_0, \phi(x_0)) = f(x_0, y_0) = 0$. Mais geralmente, se $x \in U$,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= h_x(\phi(x)) \\ &= h(x, \phi(x)) \\ &= \phi(x) - T^{-1}f(x, \phi(x)), \end{aligned}$$

donde segue que $T^{-1}f(x, \phi(x)) = 0$, ou ainda, $f(x, \phi(x)) = 0$, para todo $x \in U$. Na verdade, todas as soluções de $f(x, y) = 0$ são da forma $(x, \phi(x))$, para todo $x \in U$, pois se $f(x, y) = 0$, então

$$\begin{aligned} h_x(y) &= h(x, y) \\ &= y - T^{-1}f(x, y) \\ &= y, \end{aligned}$$

e, daí, $y = \phi(x)$. Vejamos, agora, que ϕ é contínua em U . De fato, sejam $x \in U$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Uma vez que h é contínua, temos que, fixado $y \in V$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - x| < \delta$, então $|h(z, y) - h(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Em particular, para $y = \phi(x)$, temos que, se $z \in U$ e $|x - z| < \delta$, então

$$|h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.5)$$

Usando a Desigualdade Triangular e a equação (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
|\phi(z) - \phi(x)| &= |h_z(\phi(z)) - h_x(\phi(x))| \\
&= |h(z, \phi(z)) - h(x, \phi(x))| \\
&= |h(z, \phi(z)) - h(z, \phi(x)) + h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))| \\
&\leq |h(z, \phi(z)) - h(z, \phi(x))| + |h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))| \\
&\leq \frac{1}{2}|\phi(z) - \phi(x)| + |h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}|\phi(z) - \phi(x)| \leq |h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))|. \quad (3.6)$$

Portanto, segue das equações (3.5) e (3.6) que, se $z \in U$ e $|x - z| < \delta$, então

$$|\phi(z) - \phi(x)| \leq 2|h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando, assim, que ϕ é contínua. Finalmente, provaremos que ϕ é diferenciável em x_0 e que vale (3.1). Pela diferenciabilidade de f em (x_0, y_0) , temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = R(h, k),$$

onde $\frac{|R(h,k)|}{|(h,k)|} \rightarrow 0$ quando $|h|, |k| \rightarrow 0$. Seja $k = \phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$. Sendo $y_0 = \phi(x_0)$, temos que:

$$f(x_0 + h, \phi(x_0 + h)) - f(x_0, \phi(x_0)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = R(h, k).$$

Mas, $f(x, \phi(x)) = 0$. Daí,

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = R(h, k).$$

Aplicando T^{-1} , onde $T = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
-T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h - T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]k &= T^{-1}R(h, k) \Rightarrow -T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h \\
&\quad - T^{-1}Tk = -T^{-1}R(h, k) \\
&\Rightarrow -T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h - k = -T^{-1}R(h, k).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$k + T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h = -T^{-1}R(h, k),$$

ou ainda,

$$-(\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h = T^{-1}R(h, k).$$

Portanto, para mostrar a equação (3.1), basta verificar que $\frac{|T^{-1}R(h,k)|}{|h|} \rightarrow 0$ quando $|h| \rightarrow 0$. Para tal, veja que:

$$\begin{aligned} \frac{|T^{-1}\Phi(h,k)|}{|h|} &= \frac{|k||T^{-1}R(h,k)|}{|k||h|} \\ &\leq |k||T^{-1}| \frac{|R(h,k)|}{|k||h|}. \end{aligned}$$

Note que se $|h| \rightarrow 0$, então, por k depender de h , $|k| \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $\frac{|R(h,k)|}{|(h,k)|} \rightarrow 0$. Dessa forma, $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|T^{-1}R(h,k)|}{|h|} = 0$, o que justifica a diferenciabilidade da ϕ e conclui a prova do teorema. \square

Além disso, se fará necessário alguns resultados sobre o operador linear elíptico L , cuja definição será dada a seguir.

Definição 21. *Um operador da forma*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \left(a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u \right) + \sum_{i=1}^n \left(b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + c(x)u$$

com $a^{ij} = a^{ji}$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é dito um operador linear elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz dos coeficientes $[a^{ij}(x)]$ é positiva, isto é, se $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ denotam os autovalores mínimo e máximo de $[a^{ij}(x)]$, respectivamente, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Teorema 12. *Seja $L : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ um operador linear elíptico dado por:*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^2 b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u + cu. \quad (3.7)$$

Se $c \leq 0$, então L é injetivo.

Demonstração. Considere $u, v \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Se $L(u) = L(v)$, então temos que $L(u - v) = L(u) - L(v) = 0$. Dessa forma, pelo Princípio do Máximo (teorema 34, ver apêndice), $\sup_{\bar{\Omega}} |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v| = 0$ e, portanto, $u = v$. \square

Teorema 13. *Seja Ω um domínio suave e limitado. Então, todo operador linear elíptico $L : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ dado por (3.7), onde a_{ij} , b_i e c são funções Hölder contínuas com expoente α em $\bar{\Omega}$ e $c \leq 0$, é um operador sobrejetivo.*

Demonstração. Dado $t \in [0, 1]$, considere o operador $L_t = (1 - t)\Delta + tL$. Note que L_t é um operador linear elíptico. Seja $u \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Pondo $f = L_t(u)$, decorre do teorema 47 (ver apêndice A) que

$$|u|_{2,\alpha} \leq C_1(|u|_0 + |f|_{0,\alpha}).$$

Pelo teorema 46 (ver apêndice) temos que

$$|u|_0 \leq C_2 |f|_{0,\alpha}$$

de modo que

$$|u|_{2,\alpha} \leq C |f|_{0,\alpha} = C |L_t(u)|_{0,\alpha},$$

o que mostra que as hipóteses do Método da Continuidade (teorema 44, ver apêndice) são satisfeitas. Uma vez que o operador Laplaciano (Δ) é sobrejetivo (teorema 38), segue-se que o operador L também o é. \square

Teorema 14. *O operador $L^{-1} : C^\alpha(\bar{\Omega}) \longrightarrow C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ é contínuo.*

Demonstração. Sejam $f, g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ e $u, v \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tais que $L(u) = f$ e $L(v) = g$. Então, uma vez que $L(u - v) = f - g$, obtemos do teorema 47 que

$$\begin{aligned} |L^{-1}(f) - L^{-1}(g)|_{2,\alpha} &= |u - v|_{2,\alpha} \\ &\leq C_1 (|u - v|_0 + |f - g|_{0,\alpha}). \end{aligned}$$

Do teorema 46 temos

$$|u - v|_0 \leq C_2 |f - g|_{0,\alpha},$$

o que nos dá

$$|u - v|_{2,\alpha} \leq C |f - g|_{0,\alpha},$$

o que prova a continuidade de L^{-1} . \square

Passemos, então, a prova do teorema 10.

Demonstração (Teorema 10). Considere o operador $T : \mathbb{R} \times C^2(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ dado por $T(t, w) = Q_{tH}(w + t\phi)$, onde $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Vamos verificar que o Teorema da Função Implícita se aplica a este operador. Observe que:

- T é derivável com relação a variável w . Considere $z = w_0 + hv$. Note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\nabla w_0}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{div} \nabla w_0 + \left\langle \nabla \left(\frac{1}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \nabla w_0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0_{xx}}(1 + w_{0_y}^2) + w_{0_{yy}}(1 + w_{0_x}^2) - 2w_{0_{xy}}w_{0_x}w_{0_y}]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \frac{\nabla z}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} &= \frac{1}{(1 + |\nabla z|^2)^{\frac{3}{2}}} [z_{xx} + z_{xx}z_y^2 + z_{yy} + z_{yy}z_x^2 - 2z_{xy}z_xz_y] \\
&= \frac{1}{(1 + |\nabla(w_0 + hv)|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0xx} + hv_{xx} + (w_{0xx} + hv_{xx})(w_{0y} + hv_y)^2 \\
&\quad + (w_{0yy} + hv_{yy}) + (w_{0yy} + hv_{yy})(w_{0x} + hv_x)^2 \\
&\quad - 2(w_{0xy} + hv_{xy})(w_{0x} + hv_x)(w_{0y} + hv_y)] \\
&= \frac{1}{(1 + |\nabla(w_0 + hv)|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0xx} + hv_{xx} + (w_{0xx} + hv_{xx})(w_{0y}^2 + 2w_{0y}hv_y + h^2v_y^2) \\
&\quad + w_{0yy} + hv_{yy} + (w_{0yy} + hv_{yy})(w_{0x}^2 + 2w_{0x}hv_x + h^2v_x^2) - 2(w_{0xy} + hv_{xy}) \cdot \\
&\quad (w_{0x}w_{0y} + hw_{0x}w_{0x}v_y + hv_xw_{0y} + hv_xv_y)] \\
&= \frac{1}{(1 + |\nabla(w_0 + hv)|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0xx}(1 + w_{0y}^2) + w_{0yy}(1 + w_{0x}^2) - 2w_{0xy}w_{0x}w_{0y} + h \cdot \\
&\quad (v_{xx} + 2w_{0xx}w_{0y}v_y + v_{xx}w_{0y}^2 + v_{yy} + 2w_{0yy}w_{0x}v_x + v_{yy}w_{0x}^2 - 2w_{0xy}w_{0x}v_y \\
&\quad - 2w_{0xy}v_xw_{0y} - 2v_{xy}w_{0x}w_{0y}) + h^2(w_{0xx}v_y^2 + 2w_{0y}v_{xx}v_y + w_{0yy}v_x^2 + 2v_{yy}w_{0x}v_x \\
&\quad - 2w_{0xy}v_xv_y - 2v_{xy}w_{0x}v_y - 2v_{xy}v_xw_{0y}) + h^3(v_{xx}v_y^2 + v_{yy}v_x^2 - 2v_{xy}v_xv_y)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_2T(t, w_0).v &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [T(t, w_0 + hv) - T(t, w_0)] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(1 + |\nabla(w_0 + hv)|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0xx}(1 + w_{0y}^2) + w_{0yy}(1 + w_{0x}^2) - 2w_{0xy}w_{0x}w_{0y} \right. \\
&\quad + h(v_{xx} + 2w_{0xx}w_{0y}v_y + v_{xx}w_{0y}^2 + v_{yy} + 2w_{0yy}w_{0x}v_x + v_{yy}w_{0x}^2 - 2w_{0xy}w_{0x}v_y \\
&\quad - 2w_{0xy}v_xw_{0y} - 2v_{xy}w_{0x}w_{0y}) + h^2(w_{0xx}v_y^2 + 2w_{0y}v_{xx}v_y + w_{0yy}v_x^2 + 2v_{yy}w_{0x}v_x \\
&\quad - 2w_{0xy}v_xv_y - 2v_{xy}w_{0x}v_y - 2v_{xy}v_xw_{0y}) + h^3(v_{xx}v_y^2 + v_{yy}v_x^2 - 2v_{xy}v_xv_y)] \\
&\quad \left. - \frac{1}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{3}{2}}} [w_{0xx}(1 + w_{0y}^2) + w_{0yy}(1 + w_{0x}^2) - 2w_{0xy}w_{0x}w_{0y}] \right) \\
&= \frac{1}{(1 + |\nabla w_0|^2)^{\frac{3}{2}}} [v_{xx}(1 + w_{0y}^2) + v_{yy}(1 + w_{0x}^2) + 2v_y(w_{0xx}w_{0y} - w_{0xy}w_{0x}) \\
&\quad + 2v_x(w_{0yy}w_{0x} - w_{0xy}w_{0y}) - 2w_{0x}w_{0y}v_{xy}].
\end{aligned}$$

Dessa forma, T é derivável com relação à variável w .

- T é de classe C^1 na variável w . Observe que:

$$\begin{aligned}
 |D_2T(t, w_1).v - D_2T(t, w_2).v| &= \left| \frac{1}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} [v_{xx}(1 + w_{1y}^2) + v_{yy}(1 + w_{1x}^2) + 2v_y(w_{1xx}w_{1y} \right. \\
 &\quad \left. - w_{1xy}w_{1x}) + 2v_x(w_{1xx}w_{1x} - w_{1xy}w_{1y}) - 2w_{1x}w_{1y}wv_{xy}] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}} [v_{xx}(1 + w_{2y}^2) + v_{yy}(1 + w_{2x}^2) + 2v_y(w_{2xx}w_{2y} \right. \\
 &\quad \left. - w_{2xy}w_{2x}) + 2v_x(w_{2yy}w_{2x} - w_{2xy}w_{2y}) - 2w_{2x}w_{2y}v_{xy}] \right| \\
 &\leq |v_{xx}(\frac{1 + w_{1y}^2}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 + w_{2y}^2}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}})| + |v_{yy}(\frac{1 + w_{1x}^2}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad - \frac{1 + w_{2x}^2}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}})| + |2v_y(\frac{w_{1xx}w_{1y} - w_{1xy}w_{1x}}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad - \frac{w_{2xx}w_{2y} - w_{2xy}w_{2x}}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}})| + |2v_x(\frac{w_{1yy}w_{1x} - w_{1xy}w_{1y}}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad - \frac{w_{2yy}w_{2x} - w_{2xy}w_{2y}}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}})| + |v_{yy}(\frac{-2w_{1x}w_{1y}}{(1 + |\nabla w_1|^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2w_{2x}w_{2y}}{(1 + |\nabla w_2|^2)^{\frac{3}{2}}})| \\
 &\leq C|v|_{2;\Omega},
 \end{aligned}$$

onde $C = C(w_1, w_2, |w_1|_2, |w_2|_2)$ é suficientemente pequena se $w_1, w_2 \in C^2(\bar{\Omega})$, com $|w_1 - w_2|$ suficientemente pequeno. Dessa forma, T é de classe C^1 na variável w .

- T é de classe C^1 na variável t . É claro que para $\phi = 0$, T é de classe C^1 na variável t e para $\phi \neq 0$ as contas serão omitidas.

Pelo que foi feito acima, T é de classe C^1 . Além disso, dado $t_0 \in [0, 1]$, existe, por hipótese, $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $Q_{t_0H}(u_0) = 0$ e $u_0|_{\partial\Omega} = t_0\phi$. Pondo $w_0 = u_0 - t_0\phi$, temos que $T(t_0, w_0) = 0$, com $w_0 \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Agora devemos mostrar que $[\frac{\partial T}{\partial w}(t_0, w_0)]^{-1} : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ existe e é contínua. De fato, pelos teoremas 12, 13 e 14, temos que o operador $\frac{\partial T}{\partial w}$ é um isomorfismo. Dessa forma, tendo que $[\frac{\partial T}{\partial w}(t_0, w_0)]^{-1}$ existe e é contínua, estamos nas hipóteses do Teorema da Função Implícita. Assim, existe $\phi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset [0, 1] \rightarrow V \subset C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $T(t, \phi(t)) = 0$, ou seja, $Q_{tH}(\phi(t) + t\phi) = 0$ e $u_t|_{\partial\Omega} = t\phi$. \square

3.2 Fechamento de V

Inicialmente, lembremos que o conjunto V é dado por:

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\phi\}.$$

Queremos provar que V é fechado em $[0, 1]$. Com a teoria que estudamos até agora, é possível provar o seguinte teorema:

Teorema 15. *Se existe uma constante $M > 0$ tal que $|u|_1 \leq M$, para toda função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que existe $t \in [0, 1]$ de modo que $Q_{tH}(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = t\phi$, então V é fechado em $[0, 1]$.*

Portanto, pelos teoremas 10 e 15, para mostrar a existência de solução para o PD é suficiente encontrar $M > 0$ como na hipótese do teorema 15.

Mas, antes disso, relembremos um resultado de Análise Real que será utilizado na demonstração em questão.

Teorema 16 (Derivação termo a termo). *Seja (f_n) uma sequência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g , então (f_n) converge em $[a, b]$ uniformemente para uma função f de classe C^1 , tal que $f' = g$. Em resumo: $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ desde que as derivadas f'_n convirjam uniformemente.*

A prova deste teorema encontra-se em [12], Teorema 4, página 162.

Antes de passar para a prova de que se existe uma estimativa *a priori* para a norma $|\cdot|_1$, então V é fechado, vamos definir operador quase linear elíptico.

Definição 22. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja $U \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Então o operador*

$$Qu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u + b(x, u, \nabla u),$$

com $a^{ij} = a^{ji}$ é elíptico em U se os coeficientes da matriz $[a^{ij}(x, z, p)]$ são positivos para todo $(x, z, p) \in U$. Se $\lambda(x, z, p)$, $\Lambda(x, z, p)$ denotam, respectivamente, os autovalores mínimo e máximo de $[a^{ij}(x, z, p)]$, isso significa que

$$0 < \lambda(x, z, p) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x, z, p) |\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e para todo $(x, z, p) \in U$.

Definição 23. *O operador quase linear Q está na forma de divergência se existem uma função vetorial diferenciável $A(x, z, p) = (A^1(x, z, p), \dots, A^n(x, z, p))$ e uma função escalar $B(x, z, p)$ contínuas, tais que:*

$$Qu = \operatorname{div} A(x, u, \nabla u) + B(x, u, \nabla u),$$

com $u \in C^2(\Omega)$.

Agora estamos aptos a provar que V é fechado desde que exista uma estimativa para a norma C^1 .

Para isso, considere (t_n) uma sequência em V tal que $t_n \rightarrow t$. A mostrar: $t \in V$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja u_n a solução associada a t_n . Suponha que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|u_n|_1 \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que cada função $u_n \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfaz $Q_{tH}(u_n) = 0$ e $u_n|_{\partial\Omega} = t_n \phi$. Além disso, Q_{tH} é um operador elíptico em $\bar{\Omega}$, com $A = \frac{\nabla u_n}{\sqrt{1+|\nabla u_n|^2}}$ de

classe C^1 e $B = 2t_n H$ contínua. Aplicando o teorema 13.2 de [8] garantimos a existência de $\gamma \in (0, 1)$ com $\gamma = \gamma(A, \Omega)$ de modo que $|\nabla u_n|_{\gamma; \Omega} \leq c$, onde a constante c depende de $c = c(M, A, B, \Omega, |\phi|_{2; \Omega})$. Dessa forma, $|u_n|_{1, \gamma} \leq M + c$. Agora vamos linearizar o operador Q_{tH} . Suponha que $u \in C^{2, \gamma}(\bar{\Omega})$ seja solução de $Q_{tH} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2tH$ tal que $u|_{\partial\Omega} = t\phi$, com $\phi \in C^{2, \gamma}(\bar{\Omega})$. Definimos, então, $f_H = -2tH(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}$ e $L : C^{2, \gamma}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ por $L_H(v) = (1 + u_y^2)v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + (1 + u_x^2)v_{yy}$. Como u é classe $C^{2, \gamma}$, as derivadas primeiras de u são de classe C^γ e, portanto, os coeficientes de L_H e f_H também são. Além disso, u é solução de $L_H = f_H$. Dessa forma, estamos nas hipóteses do teorema 47. Obtemos, então, a seguinte estimativa:

$$|u|_{2, \min\{\alpha, \gamma\}} \leq C(|u|_{0, \alpha; \Omega} + |\phi|_{2, \alpha; \Omega} + |f_H|_{0, \alpha; \Omega}),$$

onde $C = C(\alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Como $|u_n|_1 \leq M$, temos que a sequência (u_n) é lipschitziana, pois conseguimos majorar $|\nabla u_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (u_n) é equicontínua. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existem $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e uma função u de modo que $u_n|_{n \in \mathbb{N}_1} \rightarrow u$. Agora, considere a sequência $(\frac{\partial u_n}{\partial x_1})_{n \in \mathbb{N}_1}$. De maneira semelhante a anterior, obtemos a equicontinuidade dessa sequência. De novo, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existem um conjunto de índices $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e uma função v tais que $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}|_{n \in \mathbb{N}_2} \rightarrow v$. Repetimos esse processo para a sequência $(\frac{\partial u_n}{\partial x_2})$. Para as sequências $(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2})$, $(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2})$ e $(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2})$, a equicontinuidade segue do fato das funções $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_n$, com $i, j = 1, 2$ serem Hölder contínuas. Aí basta aplicar o teorema de Arzelá-Ascoli e, em seguida, aplicar o teorema 16, obtendo $u \in C^2(\bar{\Omega})$, com $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $u_n \rightarrow u$ em $C^2(\bar{\Omega})$. Dessa forma, nos resta mostrar que u satisfaz $Q_{tH}(u) = 0$ e que $u \in C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})$.

Afirmção 1: u satisfaz $Q_{tH}(u) = 0$.

De fato, iniciemos lembrando que $T : [0, 1] \times C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$, dado por $T(w, t) = Q_{tH}(w + t\phi)$, é um operador de classe C^1 , como mostrado na abertura de V . Em particular, T é contínuo. Assim,

$$\begin{aligned}
 Q_{tH}(u) &= T(t, u) \\
 &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, u_n)\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n, u_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{t_n H}(u_n) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ou seja, u é uma solução de $Q_{tH} = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n|_{\partial\Omega} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n\phi \\ &= t\phi. \end{aligned}$$

Afirmção 2: $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Provar essa afirmação é equivalente a provar o seguinte teorema:

Teorema 17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio suave, limitado e considere $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Seja $u \in C^2(\bar{\Omega})$ uma solução de $Q_{tH} = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = \phi$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Mas, para provar o teorema 17, precisamos do seguinte resultado auxiliar:

Teorema 18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Suponha que u é uma função de classe $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $Lu = f$ em Ω e $u = \phi$ em $\partial\Omega$, com f e os coeficientes do operador linear estritamente elíptico pertencentes a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

A prova deste teorema se encontra em [8], teorema 6.19.

Agora estamos hábeis a provar o teorema 17.

Demonstração Teorema 17. A ideia da prova consiste em transformar nosso problema não linear $Q_{tH} = 0$ em um problema linear e aplicar o teorema (18). Faremos isso definindo $f_H = -2tH(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}$ e o operador linear $L : C^{2,\gamma}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ por $L_H(v) = (1 + u_y^2)v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + (1 + u_x^2)v_{yy}$. Aí, concluímos que $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. \square

Isso conclui a prova de que uma estimativa *a priori* da norma C^1 das soluções é suficiente para mostrar que V é fechado em $[0, 1]$.

3.3 Princípios do Máximo

Nesta seção, serão apresentados resultados úteis para o supremo e o gradiente de soluções de EDPs elípticas em domínios limitados do \mathbb{R}^2 , os quais serão utilizados na prova dos teoremas 1 e 2, respectivamente.

Vamos provar um caso particular do teorema 10.1 de [8]

Teorema 19. *Dado $H \in \mathbb{R}$, considere o operador $Q : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ dado por $Q(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H$. Se $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $Q(u) \geq Q(v)$ em Ω e $u \leq v$*

em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω . Além disso, se $Qu > Qv$ em Ω , $u \leq v$ em $\partial\Omega$, temos a desigualdade estrita $u < v$ em Ω .

Demonstração. Defina o operador M como sendo $M(u) = (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$, que é um operador elíptico. Daí,

$$\begin{aligned} M(u) - M(v) &= (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - (1 + |\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \\ &= u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y - [v_{xx}(1 + v_y^2) + v_{yy}(1 + v_x^2) - 2v_{xy}v_xv_y] \\ &= u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y + v_{xx}(1 + u_y^2) - v_{xx}(1 + u_x^2) + v_{yy}(1 + u_x^2) \\ &\quad - v_{yy}(1 - u_x^2) - 2v_{xy}u_xu_y + 2v_{xy}u_xu_y - (v_{xx}(1 + v_y^2) + v_{yy}(1 + v_x^2) - 2v_{xy}v_xv_y) \\ &= (u_{xx} - v_{xx})(1 + u_y^2) + (u_{yy} - v_{yy})(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y - 2v_{xy}u_xu_y + v_{xx}(1 + u_y^2) \\ &\quad + v_{yy}(1 + u_x^2) + 2v_{xy}u_xu_y - (v_{xx}(1 + v_y^2) + v_{yy}(1 + v_x^2) - 2v_{xy}v_xv_y) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Escrevendo:

$$w = u - v$$

$$a^{11} = 1 + u_y^2, \quad a^{12} = -2u_xu_y = a^{21}, \quad a^{22} = 1 + u_x^2$$

$$b_1 = v_{xx}(u_y + v_y) + 2v_{xy}u_x, \quad b_2 = v_{yy}(u_x + v_x) + 2v_{xy}v_y,$$

obtemos o seguinte operador:

$$Lw = \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial}{\partial x_i} w.$$

Observe que L é um operador linear e $Lw \geq 0$. Disso e do fato de que $u \leq v$ em $\partial\Omega$, temos, pelo teorema 45, que $u \leq v$ em Ω , como queríamos. Agora, por hipótese, temos que $Qu > Qv$ e $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Assim, $w = u - v \leq 0$. Suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = v(x_0)$. Consequentemente, $w(x_0) = 0$, isto é, w tem máximo interior. Por outro lado, considerando o operador linear L como antes, temos que $Lw > 0$. Dessa forma, w não pode ter máximo interior. Portanto $u < v$ em Ω . \square

Teorema 20. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado, sejam $u, v, w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $p \in \partial\Omega$. Se $u(p) = v(p) = w(p)$ e $w \leq u \leq v$ em Ω , então $|\nabla u(p)| \leq \max\{|\nabla w(p)|, |\nabla v(p)|\}$.

Demonstração. Considere $M = \max\{|\nabla w(p)|, |\nabla v(p)|\}$ e N o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ no ponto p apontado para o interior do domínio Ω . Seja a um vetor unitário tal que $\langle a, N \rangle \geq 0$ e considere a curva $\gamma : [0, l] \rightarrow \bar{\Omega}$ de modo que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = a$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $0 < \delta \leq l$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$, vale:

$$-(M + \varepsilon) \leq \frac{w(\gamma(t)) - w(p)}{t} \leq \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t} \leq \frac{v(\gamma(t)) - v(p)}{t} \leq M + \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t} \right| \leq M + \varepsilon.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ no lado esquerdo da desigualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \nabla u(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\ &= \langle \nabla u(p), a \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos:

$$\langle \nabla u(p), a \rangle \leq M + \varepsilon.$$

Agora, considere $a = \frac{\nabla u(p)}{|\nabla u(p)|}$. Daí, $\langle \nabla u(p), a \rangle \leq M + \varepsilon$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\nabla u(p)|^2 &= \langle \nabla u(p), \nabla u(p) \rangle \Rightarrow |\nabla u(p)| = \langle \nabla u(p), \frac{\nabla u(p)}{|\nabla u(p)|} \rangle \\ &\Rightarrow |\nabla u(p)| \leq M. \end{aligned}$$

□

No que segue, estamos interessados em obter uma estimativa *a priori* para o módulo do gradiente de u . Para tal será necessário provar dois lemas, como vemos a seguir:

Lema 4. *Sejam S uma superfície regular, $p \in S$ e $\{E_1, E_2\}$ um referencial geodésico definido em uma vizinhança $U \subset S$ de p . Então valem as seguintes afirmações:*

$$(i) \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle = -|dN|^2;$$

$$(ii) \text{ se a curvatura média } H \text{ de } S \text{ é constante, então } \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle(p) = 0, \text{ com } k \in \{1, 2\}.$$

Demonstração. (i) Queremos mostrar que $\sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle = -|dN|^2$. Observe que, como $\langle N, N \rangle = 1$, derivando em relação a E_i , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= E_i(\langle N, N \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} N, N \rangle + \langle N, \nabla_{E_i} N \rangle \\ &= 2\langle \nabla_{E_i} N, N \rangle. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\langle \nabla_{E_i} N, N \rangle = 0$. Derivando novamente em relação a E_i , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= E_i(\langle \nabla_{E_i} N, N \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle + \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} N \rangle, \end{aligned}$$

donde segue que $\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle = -\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} N \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle &= - \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} N \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, E_j \rangle E_j, \sum_{k=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle E_k \right\rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, E_j \rangle^2 \\ &= -|dN|^2, \end{aligned}$$

como queríamos.

(ii) Observe que $\langle N, E_k \rangle = 0$. Derivando em relação a E_i , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= E_i(\langle N, E_k \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle + \langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle = -\langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle. \quad (3.8)$$

Derivando mais uma vez em relação a E_i , obtemos:

$$\begin{aligned} E_i(\langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle) &= -E_i(\langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle) \Rightarrow \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle + \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_k \rangle = \\ &= -\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_k \rangle - \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_k \rangle. \end{aligned}$$

Sendo $\nabla_{E_i} N(p) \in T_p S$ e $(\nabla_{E_i} E_k(p))^T = 0$ segue que $\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_k \rangle(p) = 0$ e, consequentemente,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle(p) = -\langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_k \rangle(p). \quad (3.9)$$

Note que a aplicação dN é simétrica (teorema 4), isto é,

$$\langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle = \langle \nabla_{E_k} N, E_i \rangle, \quad (3.10)$$

para todo $i, k \in \{1, 2\}$. Do fato de $\langle N, E_i \rangle = 0$ segue, por um argumento análogo ao anterior, que

$$\langle \nabla_{E_k} N, E_i \rangle = -\langle N, \nabla_{E_k} E_i \rangle. \quad (3.11)$$

Assim, de (3.8), (3.10) e (3.11) temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_i} N, E_k \rangle = \langle \nabla_{E_k} N, E_i \rangle &\Rightarrow -\langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle = -\langle N, \nabla_{E_k} E_i \rangle \\ &\Rightarrow \langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle = \langle N, \nabla_{E_k} E_i \rangle. \end{aligned}$$

Derivando a última igualdade em relação a E_i , obtemos:

$$\begin{aligned} E_i(\langle N, \nabla_{E_i} E_k \rangle) &= E_i(\langle N, \nabla_{E_k} E_i \rangle) \Rightarrow \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_k \rangle + \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_k \rangle = \\ &\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_k} E_i \rangle + \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i \rangle \end{aligned}$$

e, em particular, no ponto p , temos:

$$\langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_k \rangle(p) = \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i \rangle(p). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.9), obtemos:

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle(p) = -\langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i \rangle(p). \quad (3.13)$$

Agora, como $\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0$ em \mathbb{R}^3 (ver final da seção 2.3), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_i + \nabla_{[E_i, E_k]} E_i)(p) \Rightarrow 0 = \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i(p) - \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_i(p) \\ &\Rightarrow \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i(p) = \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_i(p), \end{aligned}$$

implicando, por (3.13), que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle(p) &= -\sum_{i=1}^2 \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_i \rangle(p) \\ &= -\sum_{i=1}^2 \langle N, \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_i \rangle(p) \\ &= -\langle N, \nabla_{E_k} \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i \rangle(p). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{tr} (dN) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle \\ &= c, \end{aligned}$$

onde c é constante. Consequentemente, $\sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle = \text{cte}$. Assim,

$$E_k(\langle N, \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i \rangle) = 0, \quad (3.14)$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_k} N, \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i \rangle + \langle N, \nabla_{E_k} (\sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i) \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \nabla_{E_k} N, \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i \rangle \\ &= -\langle N, \nabla_{E_k} (\sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i) \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Logo, de (3.9) e de (3.15):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_k \rangle(p) &= -\langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_k \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_{E_k} N, \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i} E_i \rangle(p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 5. *Sejam v um vetor fixo em \mathbb{R}^3 e $f = \langle v, N \rangle$, onde N é o vetor normal à S . Então, se a curvatura média H de S é constante, f satisfaz $\Delta f + |dN|^2 f = 0$.*

Demonstração. Sejam $p \in S$ e $\{E_1, E_2\}$ um referencial geodésico como no lema anterior. Como vimos em (2.13), $\Delta f(p) = \sum_{i=1}^2 E_i(E_i(f))(p)$. Derivando f em relação a E_i , temos:

$$\begin{aligned} E_i(f) &= E_i(\langle v, N \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} v, N \rangle + \langle v, \nabla_{E_i} N \rangle \\ &= \langle v, \nabla_{E_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Derivando novamente em relação a E_i , obtemos:

$$\begin{aligned} E_i(E_i(f)) &= E_i(\langle v, \nabla_{E_i} N \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} v, \nabla_{E_i} N \rangle + \langle v, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle \\ &= \langle v, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^2 \langle v, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p). \quad (3.16)$$

Como podemos escrever

$$v = \langle v, E_1 \rangle(p) E_1(p) + \langle v, E_2 \rangle(p) E_2(p) + \langle v, N \rangle(p) N(p), \quad (3.17)$$

obtemos, aplicando o lema anterior e utilizando (3.16) e (3.17), que:

$$\begin{aligned}
 \Delta f(p) &= \sum_{i=1}^2 \langle v, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \langle \langle v, E_1 \rangle(p) E_1(p) + \langle v, E_2 \rangle(p) E_2(p) + \langle v, N \rangle(p) N(p), \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(p) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 \langle v, E_1 \rangle(p) \langle E_1, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) + \langle v, E_2 \rangle(p) \langle E_2, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) \\
 &\quad + \langle v, N \rangle(p) \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \langle v, N \rangle(p) \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) \\
 &= \langle v, N \rangle(p) \sum_{i=1}^2 \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N \rangle(p) \\
 &= -f(p) |dN|^2(p).
 \end{aligned}$$

Sendo p arbitrário temos $\Delta f + |dN|^2 f = 0$. □

Teorema 21. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução de $Q_H = 0$ em Ω e $u = \phi$ em $\partial\Omega$, então $\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|$.*

Demonstração. Seja $v = e_3$. Note que, para o caso em que $S = Gr(u)$, $N = \left(u_x, u_y, \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$. Assim, temos, para f definida como no lema anterior, $f(p) = \langle e_3, N(p) \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$. Observe que $f < 0$ e, novamente pelo lema anterior, $\Delta f = -|dN|^2 f \geq 0$, ou seja, f é subharmônica. Pelo Princípio do Máximo (teorema 33), temos que f atinge máximo no bordo de seu domínio. Seja p_0 o ponto que que f atinge seu máximo. Então

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u(p)|^2}} &\leq \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u(p_0)|^2}} \Rightarrow \sqrt{1+|\nabla u(p_0)|^2} \geq \sqrt{1+|\nabla u(p)|^2} \\
 &\Rightarrow |\nabla u(p_0)|^2 \geq |\nabla u(p)|^2,
 \end{aligned}$$

isto é, $|\nabla u|$ assume máximo no bordo. □

3.4 Resultados Complementares

Nesta seção, iremos apresentar a Desigualdade de Jensen, a Desigualdade Isoperimétrica, a Fórmula da Coárea para superfícies e o Princípio do Máximo para funções subharmônicas em seperfícies, resultados que serão utilizadas posteriormente. Começemos pela Desigualdade de Jensen. Mas antes de enunciá-la, relembremos os conceitos de função côncava e função convexa.

Definição 24. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se convexa quando seu gráfico está abaixo de qualquer de suas secantes, onde uma secante é um segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ para quaisquer $a, b \in I$. E uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava, se $-f$ é convexa.

Nesse sentido, temos o seguinte teorema:

Teorema 22 (Desigualdade de Jensen). *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Se $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$, isto é, se f é uma função convexa em todo o intervalo (a, b) , então para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$, vale:*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Demonstração. Faremos a prova para o caso em que $f'' \geq 0$. A prova será feita por indução em n . Note que a desigualdade é válida para $n = 1$. Então, suponhamos por hipótese de indução que a desigualdade é válida para $n - 1$ e provemos que ela vale para n . Inicialmente, fixemos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} e chamemos $x_n = x$. Denotemos $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = l$ e $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) = k$. A mostrar:

$$\frac{k + f(x)}{n} \geq f\left(\frac{l + x}{n}\right),$$

para todo $x \in (a, b)$. Consideremos, então, a seguinte função:

$$g(x) = \frac{k + f(x)}{n} - f\left(\frac{l + x}{n}\right).$$

Derivando a função g , obtemos:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{n} - \frac{1}{n} f'\left(\frac{l + x}{n}\right).$$

Note que

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{n} - \frac{1}{n} f'\left(\frac{l + x}{n}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{n} = \frac{1}{n} f'\left(\frac{l + x}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow f'(x) = f'\left(\frac{l + x}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{l + x}{n} \\ &\Leftrightarrow nx - x = l \\ &\Leftrightarrow x = \frac{l}{n - 1}. \end{aligned}$$

Uma vez que f' é não decrescente em (a, b) , já que, por hipótese, $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$, podemos afirmar que se $x < \frac{l}{n-1}$ teremos $g'(x) \leq 0$ e se $x > \frac{l}{n-1}$ teremos

$g'(x) \geq 0$. Assim, $x = \frac{l}{n-1}$ é um ponto de mínimo global para g no intervalo (a, b) . Daí,

$$\begin{aligned}
 g(x) &\geq g\left(\frac{l}{n-1}\right) \\
 &= \frac{k + f\left(\frac{l}{n-1}\right)}{n} - f\left(\frac{l + \frac{l}{n-1}}{n}\right) \\
 &= \frac{k}{n} + \frac{1}{n}f\left(\frac{l}{n-1}\right) - f\left(\frac{l(n-1) + l}{n(n-1)}\right) \\
 &= \frac{k}{n} + \frac{1}{n}f\left(\frac{l}{n-1}\right) - f\left(\frac{l}{n-1}\right) \\
 &= \frac{k}{n} - \frac{(n-1)}{n}f\left(\frac{l}{n-1}\right) \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

pois, por hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{n-1} \geq f\left(\frac{l}{n-1}\right) &\Rightarrow k \geq (n-1)f\left(\frac{l}{n-1}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{n-1}{n}f\left(\frac{l}{n-1}\right).
 \end{aligned}$$

Do fato de $g(x) \geq 0$ segue a desigualdade desejada. \square

A versão da Desigualdade de Jensen que será usada na demonstração do teorema 2 é a seguinte:

Teorema 23. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, denotando por L o volume de Ω ,*

$$\phi\left(\frac{1}{L} \int_{\Omega} f(x) dx\right) \leq \frac{1}{L} \int_{\Omega} \phi(f(x)) dx \quad (3.18)$$

A demonstração desse resultado se encontra em [5].

No que segue, enunciaremos a Desigualdade Isoperimétrica no plano, a qual será utilizada na demonstração do teorema 1.

Teorema 24. *Seja α uma curva fechada simples retificável de comprimento l no plano \mathbb{R}^2 que engloba uma região de área A . Então*

$$A \leq \frac{l^2}{\pi^2}. \quad (3.19)$$

A prova deste teorema se encontra em [11].

Agora, vamos apresentar a Fórmula da Coárea para superfícies.

Teorema 25 (Fórmula da Co-área). *Sejam S uma superfície, V o volume n -dimensional de um subconjunto de S e A o volume $(n - 1)$ -dimensional. Considere Ω um domínio em S e $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. Seja $h \in L^1(\Omega)$ uma função qualquer. Definimos $\Omega(t) = \{p \in S; h(p) \geq t\}$ e $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$. Então*

$$\int_{\Omega} h |\nabla f| dV = \int_0^{\infty} \int_{\Gamma(t)} h dA_t.$$

A prova deste teorema se encontra em [4], capítulo IV.

Finalmente, vamos enunciar o Princípio do Máximo para funções subharmônicas em superfícies.

Teorema 26. *Sejam S uma superfície com bordo e $f \in C^\infty(S)$ uma função subharmônica, isto é, $\Delta f \geq 0$ em S . Então, $\sup_S f = \sup_{\partial S} f$.*

A prova deste resultado se encontra em [10], página 37.

4 Existência de Solução para o PD em superfícies cmc com bordo plano

Neste capítulo, visamos provar os teoremas 2 e 1, os quais estão enunciados a seguir:

Teorema 27. *Seja S uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante $H > 0$, cujo bordo está contido no plano $P = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = 0\}$, onde $a \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário. Denote por S^+ a região de S que está acima do plano P e suponha que a aplicação de Gauss N da imersão satisfaz*

$$\int_{S^+} |\langle N, a \rangle| dS \leq \rho^2 \frac{\pi}{H^2}.$$

Então, se h^+ é o máximo da altura de S^+ com respeito ao plano P , temos:

$$h^+ \leq \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{H^2}{\pi} \int_{S^+} |\langle N, a \rangle| dS} \right)$$

e a igualdade vale se, e somente se, S é uma calota esférica.

Teorema 28. *Seja Ω um domínio planar, limitado e convexo. Para cada número real H tal que $AH^2 < \rho^2\pi$, onde A representa a área do domínio Ω , existe uma solução suave do seguinte Problema de Dirichlet:*

$$(\spadesuit) \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = -2H, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto é, existe um gráfico suave sobre Ω , o qual é uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante H e cujo bordo é $\partial\Omega$.

De acordo com o teorema 15, para mostrar o teorema 1 é necessário encontrar uma constante c tal que $|\cdot|_1 \leq c$. Nesse sentido, o teorema 2 será de suma importância, já que ele nos dá uma estimativa *a priori* para a norma $|\cdot|_0$. Nesse sentido, começaremos com a prova do teorema 2. Em seguida demonstraremos a existência de solução para o PD (\spadesuit) , ou seja, apresentaremos a prova do teorema 1.

Demonstração (Teorema 2). Nesta prova, faremos o caso onde a superfície S é o gráfico de uma função $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Seja S uma superfície regular com bordo de curvatura média constante $H \neq 0$. Suponha que a orientação N de S é dada do modo que $H > 0$. Além disso, suponha que o bordo ∂S esteja contido no plano $\{z = 0\}$. Note

que S é parametrizada por $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por $\phi(x, y) = (x, y, u(x, y))$ e tem como vetor normal $N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}(u_x, u_y, -1)$. Considere a função altura $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p, e_3 \rangle_{\mathbb{R}^3}$. Considere o conjunto $\Omega(t) = \{p \in S; h(p) \geq t\}$, $\partial\Omega(t) = \Gamma(t) = \{p \in S; h(p) = t\}$ se $t \geq 0$ e $\Omega(t) = \emptyset$ se $t < 0$. Agora, defina a função $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(t) = \int_{\Omega(t)} |\langle N, e_3 \rangle| dA.$$

Afirmção 1: Se S é o gráfico de uma função $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, então $J(t) = A(U_t)$, para $U_t = \{(x, y) \in U; u(x, y) \geq t\}$ e A representa a área.

Note que, $J(t) = \int_{\Omega(t)} |\langle N, e_3 \rangle| dA$. Fazendo a troca do domínio de integração, temos:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_{\Omega(t)} |\langle N, e_3 \rangle| dA \\ &= \int_{U_t} |\langle N, e_3 \rangle| \sqrt{EG - F^2} dA \\ &= \int_{U_t} \left| \left\langle \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(u_x, u_y, -1), (0, 0, 1) \right\rangle \right| \sqrt{EG - F^2} dA \\ &= \int_{U_t} 1 dA \\ &= A(U_t), \end{aligned}$$

onde E , F e G são dados como no teorema 5. Observe que a função J é contínua. Então, aplicando a fórmula da co-área (teorema 25) temos:

$$J(t) = \int_t^\infty \int_{\Gamma(t)} \frac{|\langle N, e_3 \rangle|}{|\nabla h|} ds dt.$$

Além disso, a derivada de J existe para quase todo $t \in \mathbb{R}$ e é dada por:

$$J'(t) = \frac{d}{dt} \int_t^\infty \int_{\Gamma(t)} \frac{|\langle N, e_3 \rangle|}{|\nabla h|} ds dt \tag{4.1}$$

$$= - \int_{\Gamma(t)} \frac{|\langle N, e_3 \rangle|}{|\nabla h|} ds, \tag{4.2}$$

onde esta igualdade se dá pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Por outro lado, temos as seguintes afirmações:

Afirmção 2: $\nabla h(p) = \langle v_t, e_3 \rangle v_t$, para v_t tal que $v_t \in T_p S$, v_t é perpendicular às curvas de nível de u , $|v_t| = 1$, v_t é perpendicular N e v_t aponta para o interior de $\Omega(t)$.

De fato, observe que para todo $v \in T_p S$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla h(p), v \rangle &= \langle di_p(v), e_3 \rangle \\ &= \langle v, e_3 \rangle, \end{aligned}$$

onde $i_p : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a função imersão. Assim, $\nabla h(p)$ é o vetor w de $T_p S$ que satisfaz $\langle w, v \rangle = \langle e_3, v \rangle$, para todo $v \in T_p S$. Mostremos que $w = \nabla h(p)$ é a projeção de e_3 sobre $T_p S$. Note que:

$$\begin{aligned} w &= \langle w, v_t \rangle v_t + \langle w, \Gamma' \rangle \Gamma' \\ &= \langle e_3, v_t \rangle v_t + \langle e_3, \Gamma'(t) \rangle \Gamma'(t) \\ &= \langle e_3, v_t \rangle v_t, \end{aligned}$$

uma vez que $e_3 \perp \Gamma'(t)$, onde Γ' é o vetor tangente a curva Γ .

Afirmiação 3: $\Delta h(p) = 2H \langle N(p), e_3 \rangle$.

De fato, considere o campo de vetores $V = e_3$. Note que V é um campo de vetores constante e, assim, $\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0$. Dessa forma, utilizando a expressão obtida em (2.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\langle \frac{\partial V}{\partial u} \times \phi_v + \phi_u \times \frac{\partial V}{\partial v}, N \right\rangle &= -\langle V, 2HN \rangle + \operatorname{div}(V^T) \Rightarrow 0 = -\langle e_3, 2HN \rangle + \operatorname{div}(\nabla h) \\ &\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla h) = 2H \langle e_3, N \rangle \\ &\Rightarrow \Delta h = 2H \langle e_3, N \rangle. \end{aligned}$$

Observe que, ao longo da curva $\Gamma(t)$,

$$|\nabla h|_{\Gamma(t)}^2 = \langle v_t, e_3 \rangle^2 = 1 - \langle N, e_3 \rangle^2,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} J'(t) &= - \int_{\Gamma(t)} \frac{\sqrt{1 - \langle v_t, e_3 \rangle^2}}{\langle v_t, e_3 \rangle} ds \\ &= \int_{\Gamma(t)} \psi(\langle v_t, e_3 \rangle) ds, \end{aligned}$$

onde $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\psi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para todo $x \in (0, \rho]$ e é sendo linear em $[\rho, 1)$, com $\psi(1) = 0$, onde $\rho > 0$ satisfaz $\rho^2 + \rho - 1 = 0$.

Afirmiação 4: ψ é uma função côncava.

Lembremos que uma forma de mostrar que uma função é côncava é mostrar que sua derivada segunda é negativa em todo seu domínio. Então, calculemos as derivadas de primeira e segunda ordem de ψ para $x \in (0, \rho]$:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \tag{4.3}$$

e

$$\psi''(x) = \frac{-2}{x^3 \sqrt{1-x^2}} + \frac{x^3}{x^4 \sqrt{(1-x^2)^3}} < 0, \tag{4.4}$$

pois, para $x \in (0, \rho]$

$$\begin{aligned} 2 > x^2 - x^4 &\Rightarrow 2x > x^3 - x^5 \\ &\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2} > x^3 \\ &\Rightarrow \frac{2}{x^3\sqrt{1-x^2}} > \frac{x^3}{x^4\sqrt{(1-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

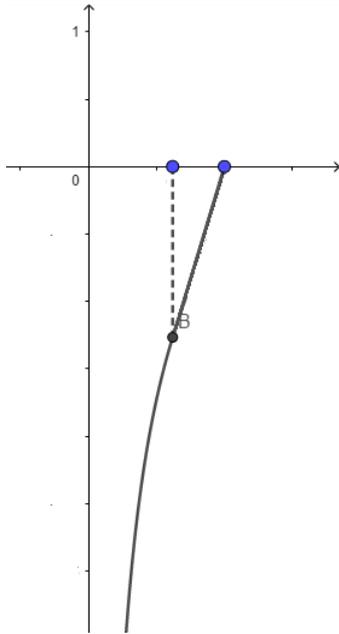


Figura 1 – Gráfico de ψ

Além disso, ψ é uma função de classe C^1 . Note que, pela figura 1, o único ponto onde a derivada de ψ poderia não ser contínua é $\psi(\rho)$, o que não acontece, pois as derivadas laterais coincidem nesse ponto. De fato, observe que, pela expressão (4.3) temos:

$$\psi'(\rho^-) = \frac{1}{\rho^2\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Além disso, note que a parte linear de ψ é dada por $\psi(x) = -\frac{\psi(\rho)}{1-\rho}x + \frac{\psi(\rho)}{1-\rho}$. Daí,

$$\psi'(\rho^+) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho(1-\rho)}.$$

Por outro lado, ρ satisfaz a equação $\rho^2 + \rho - 1 = 0$, donde segue que:

$$\begin{aligned}
 \rho^2 + \rho - 1 = 0 &\Rightarrow (\rho - 1)(\rho^2 + \rho - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \rho^3 - 2\rho + 1 = 0 \\
 &\Rightarrow (1 - \rho) = \rho(1 - \rho^2) \\
 &\Rightarrow \rho(1 - \rho) = \rho^2(1 - \rho^2) \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\rho^2\sqrt{1 - \rho^2}} = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho(1 - \rho)} \\
 &\Rightarrow \psi'(\rho^-) = \psi'(\rho^+).
 \end{aligned}$$

Do fato de ψ ser de classe C^1 e de sua derivada primeira ser não decrescente, o que decorre de $\psi'' < 0$ em $(0, \rho)$, ψ' é contínua em $(0, 1)$ e constante em $(\rho, 1)$, ou seja, temos que ψ é côncava no intervalo $(0, 1]$.

No que segue, vamos aplicar a Desigualdade de Jensen (teorema 23) em $J'(t)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 J'(t) &\leq \int_{\Gamma(t)} \psi(\langle v_t, e_3 \rangle) ds \\
 &\leq L(t) \psi \left(\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} \langle v_t, e_3 \rangle ds \right), \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

onde $L(t)$ é o comprimento da curva plana $\Gamma(t)$. Como vimos anteriormente, $\Delta h = 2H\langle N, e_3 \rangle$. Daí, aplicando o teorema do divergente (teorema 8),

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(t)} \Delta h dA &= \int_{\Omega(t)} 2H\langle N, e_3 \rangle dA \Rightarrow \int_{\Gamma(t)} \langle \nabla h, v_t \rangle ds = 2H \int_{\Omega(t)} \langle N, e_3 \rangle dA \\
 &\Rightarrow \int_{\Gamma(t)} \langle v_t, e_3 \rangle \langle v_t, v_t \rangle ds = 2HA(U_t) \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$$\tag{4.7}$$

Além disso, como J é decrescente, $J(t) \leq J(0) \leq \frac{\rho^2\pi}{H^2}$ e levando em conta a definição de J , temos:

$$A(U_t) = \int_{\Omega(t)} \langle N, e_3 \rangle ds \leq J(t) \leq J(0) \leq \frac{\rho^2\pi}{4},$$

onde a última desigualdade segue por hipótese. Consequentemente,

$$\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} \langle v_t, e_3 \rangle ds = \frac{2HA(U_t)}{L(t)} < \rho. \tag{4.8}$$

Substituindo essas informações em (4.1), aplicando a igualdade (4.8) e utilizando a Desigualdade Isoperimétrica (teorema 24), obtemos:

$$\begin{aligned}
 J'(t) &\leq_{(4.5)} L(t)\psi\left(\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma(t)} \langle v_t, e_3 \rangle ds\right) \\
 &=_{(4.8)} L(t)\psi\left(\frac{2HA(U_t)}{L(t)}\right) \\
 &= -L(t) \frac{\sqrt{1 - \frac{4H^2A(U_t)^2}{L(t)^2}}}{\frac{2HA(U_t)}{L(t)}} \\
 &= -L(t) \frac{\sqrt{L(t)^2 - 4H^2A(U_t)^2}}{L(t)} \frac{L(t)}{2HA(U_t)} \\
 &= -L(t) \frac{\sqrt{L(t)^2 - 4H^2A(U_t)^2}}{2HA(U_t)}. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Como a função $f(x) = \frac{-x\sqrt{x^2-4H^2A^2}}{2HA}$ é decrescente e $L \leq \sqrt{4\pi A}$, temos:

$$\begin{aligned}
 J'(t) &\leq -L(t) \frac{\sqrt{L(t)^2 - 4H^2A(U_t)^2}}{2HA(U_t)} \\
 &\leq -2\sqrt{\pi A(U_t)} \frac{\sqrt{4\pi A(U_t) - 4H^2A(U_t)^2}}{2HA(U_t)} \\
 &= -2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{4A(U_t)^2(\pi - H^2A(U_t))}}{2HA(U_t)} \\
 &= -2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\pi - H^2A(U_t)}}{H},
 \end{aligned}$$

para quase todo ponto $t \geq 0$. Assim sendo, deduzimos a seguinte desigualdade diferencial para a função J :

$$J'(t) \leq -2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\pi - H^2J(t)}}{H},$$

para quase todo ponto $t \geq 0$.

Afirmção 5: A desigualdade anterior implica que $(\sqrt{\pi - H^2J(t)})' \geq \sqrt{\pi}H$, para quase todo ponto $t \geq 0$.

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\pi - H^2J(t)})' \geq \sqrt{\pi}H &\Rightarrow -\frac{1}{2}(\pi - H^2J(t))^{-\frac{1}{2}}H^2J'(t) \geq \sqrt{\pi}H \\
 &\Rightarrow -HJ'(t) \geq 2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi - H^2J(t)} \\
 &\Rightarrow J'(t) \leq -2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\pi - H^2J(t)}}{H}.
 \end{aligned}$$

Uma vez que J é contínua, temos que $\sqrt{\pi - H^2J}$ também é. Dessa forma, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vamos integrar (4) de $t = 0$ a $t = h^+$, onde h^+ é a

altura máxima da superfície acima do plano onde o bordo está contido, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{h^+} \left(\sqrt{\pi - H^2 J(t)} \right)' dt &\geq \int_0^{h^+} \sqrt{\pi} H dt \Rightarrow \sqrt{\pi - H^2 J(t)} \Big|_0^{h^+} \geq \sqrt{\pi} H h^+ \\
 &\Rightarrow \sqrt{\pi - H^2 J(h^+)} - \sqrt{\pi - H^2 J(0)} \geq \sqrt{\pi} H h^+ \\
 &\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi - H^2 J(h^+)} - \sqrt{\pi - H^2 J(0)}}{H \sqrt{\pi}} \geq h^+ \\
 &\Rightarrow \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{H^2 J(0)}{\pi}} \right) \geq h^+.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos uma estimativa para altura máxima h^+ da superfície S com relação ao plano $\{z = 0\}$. \square

Tendo o teorema 2 provado, obtemos uma estimativa para a função altura. No que segue, vamos em busca de uma estimativa *a priori* para a norma C^1 , para garantir o fechamento de V e a existência de solução para o problema (\spadesuit).

Demonstração (Teorema 1). Observe que queremos mostrar a existência de um gráfico sobre um domínio planar, limitado e convexo Ω , com curvatura média constante $H > 0$ satisfazendo $AH^2 < \rho^2\pi$, onde A é a área de Ω . Mas, isso equivale a encontrar a solução do Problema de Dirichlet (\spadesuit). Para cada $0 < H \leq H_0$, onde H_0 é uma constante positiva fixada tal que $AH_0^2 < \rho^2\pi$, suponha que u_H é solução de (\spadesuit). Precisamos encontrar uma constante c tal que $|u_H|_1 \leq c$, pois, assim, obtemos o fechamento do conjunto V , garantindo a existência de solução para (\spadesuit) (veja teorema 15).

Note que, pelo teorema 2,

$$\sup u_H \leq \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{AH^2}{\pi}} \right). \quad (4.10)$$

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} \right)$. Tomando $0 < x \leq H_0$, vemos que f é

não-decrescente, pois

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}\right) + \frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}\right)' \\
 &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} + \frac{1}{x} \left(-\left(1 - \frac{Ax^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(-2\frac{Ax}{\pi}\right)\right) \\
 &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} + \frac{A}{\pi \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}} \\
 &= \frac{-\pi \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} + \pi \left(1 - \frac{Ax^2}{\pi} + Ax^2\right)}{x^2 \pi \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}} \\
 &= \frac{-\pi \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} + \pi - Ax^2 + Ax^2}{x^2 \pi \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}} \\
 &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

como queríamos. Disso e do fato de $H \leq H_0$, temos, por (4.10), que:

$$u_H \leq \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{AH^2}{\pi}}\right) \leq \frac{1}{H_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{AH_0^2}{\pi}}\right). \tag{4.12}$$

Além disso, $u_H \geq 0$. De fato, basta aplicar o teorema 19 com $u = 0$ e $v = u_H$. Assim, obtemos uma estimativa *a priori* $C^0(\bar{\Omega})$ para a solução u_H em $\bar{\Omega}$. No que segue, buscamos encontrar uma estimativa global para o gradiente. Mas, para isso, será necessária uma estimativa *a priori* para $C^0(\bar{\Omega})$ mais refinada, para que possamos utilizar o argumento do quarto de cilindro e concluir a prova deste teorema. Note que, basta estimarmos o gradiente de u_H em $\partial\Omega$, uma vez que ao final do capítulo 3 provamos o Princípio do Máximo para o gradiente (teorema 21). Agora, note que, por hipótese $AH_0^2 \leq \rho^2\pi < \frac{3\pi}{4}$. Considere a função $g(x) = \frac{1}{2H_0} - \frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}\right)$, definida em $[0, H_0]$. Vejamos que g é decrescente:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}\right) + \frac{1}{x} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Ax^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2Ax}{\pi}\right) \\
 &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{Ax^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{\pi} \left(1 - \frac{Ax^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}}} \left[\frac{1}{x^2} \sqrt{1 - \frac{Ax^2}{\pi}} - \frac{1}{x^2} - \frac{A}{\pi} \right] \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $g < g(H_0)$. Além disso, uma vez que

$$AH_0^2 < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -AH_0^2 > \frac{-3\pi}{4}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
 g(H_0) &= \frac{1}{2H_0} - \frac{1}{H_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{AH_0^2}{\pi}} \right) \\
 &> \frac{1}{2H_0} - \frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_0} \left(1 - \frac{3\pi}{4\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2H_0} - \frac{1}{H_0} + \frac{1}{2H_0} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, $g > 0$. Disso e de (4.10) podemos concluir que:

$$u_H \leq \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{AH^2}{\pi}} \right) \leq \frac{1}{2H} - \varepsilon(H_0) \quad (4.13)$$

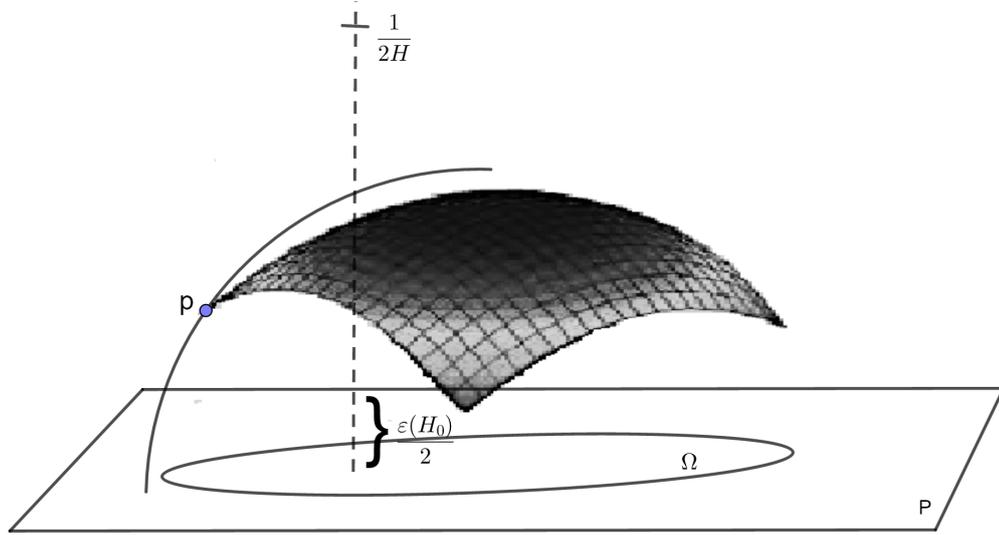
para um certo número positivo $\varepsilon(H_0)$, que depende apenas de H_0 . Agora, vamos estimar o gradiente de u_H . Para isso, usaremos um argumento bastante geométrico. Considere P o plano que contém Ω . Considere uma plano P' paralelo ao plano P que distam uma altura de $\frac{1}{2H_0}$ um do outro. Movemos o gráfico S_H da solução u_H de tal maneira que o plano P fique $\frac{\varepsilon(H_0)}{2}$ mais próximo do plano P' . Dado um ponto $p \in \partial\Omega$, denotamos por C_p o quarto de cilindro de raio $\frac{1}{2H_0}$, de modo que C_p não intercepte o gráfico S_H , que seu lado côncavo fique a frente de S_H e que o eixo do quarto de cilindro seja paralelo a reta tangente a curva convexa $\partial\Omega$ no ponto p . Observe que C_p é um outro gráfico de superfície com curvatura média H_0 . Agora, vamos deslizar o quarto de cilindro em direção a superfície S_H até a primeira tocar a outra. Denotemos por c_p a função cujo gráfico é o quarto de cilindro C_p . Note que, conforme deslizamos o quarto de cilindro, os domínios de c_p variam. Consideremos, então $U \subset F \cap \Omega$, onde F é o domínio de c_p .

Mostremos que o ponto de toque é $p \in \partial\Omega$. Veja que C_p não pode tocar a superfície S_H em cima, pois o quarto de cilindro está acima de S_H por (4.13). Além disso, vejamos que C_p não pode ter o primeiro ponto de toque no interior da superfície S_H . Suponha que isso aconteça. Então, teríamos $c_p > u_H$ em ∂U e, sabemos que

$$Q_H(u_H) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0,$$

$$\begin{aligned}
 Q_H(c_{\frac{1}{2H_0}}) &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla C_{\frac{1}{2H_0}}}{\sqrt{1 + |\nabla C_{\frac{1}{2H_0}}|^2}} \right) + 2H \\
 &= -2H_0 + 2H < 0,
 \end{aligned}$$

ou seja, $Q_H(u_H) \geq Q_H(c_{\frac{1}{2H_0}})$ em U . Daí, pelo Princípio do Máximo para operadores quase lineares (teorema 19), que $u_H < c_p$ em U , o que implicaria que não há ponto de toque entre as superfícies C_p e S_H . Absurdo! Logo, p é o primeiro ponto de toque entre



C_p e S_H . Agora vamos, de fato, estimar o gradiente da solução u_H . Note que $\nabla u_H(p)$ é paralelo a $\eta(p)$, onde $\eta(p)$ é o vetor normal ao $\partial\Omega$, pois o gradiente é perpendicular as curvas de nível. De forma semelhante, $\nabla c_p(p)$ é paralelo a $\eta(p)$. Daí, temos que $\nabla u_H(p) = \langle \nabla u_H(p), \eta(p) \rangle \eta(p)$. Observe que:

$$|\nabla u_H(p)| = \langle \nabla u_H(p), \eta(p) \rangle = \frac{d}{dt} u(\alpha(t))|_{t=0}, \quad (4.14)$$

onde α é uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \eta(p)$. Por C_p estar acima de $S_H = Gr(u_H)$ e pelo teorema 20, que nos diz que essa desigualdade é preservada para as derivadas, segue que:

$$\frac{d}{dt} u(\alpha(t))|_{t=0} \leq \frac{d}{dt} C_p(\alpha(t))|_{t=0} = k'(0), \quad (4.15)$$

onde $k(x) = \sqrt{\frac{1}{4H_0^2} - \left(x - \sqrt{\frac{\varepsilon(H_0)}{2H_0} - \frac{\varepsilon(H_0)^2}{4}}\right)^2} + \frac{1}{2H_0} - \frac{\varepsilon(H_0)}{2}$ é obtida da equação da circunferência de centro $(\sqrt{\frac{\varepsilon(H_0)}{2H_0} - \frac{\varepsilon(H_0)^2}{4}}, \frac{\varepsilon(H_0)}{2})$ e raio $\frac{1}{2H_0}$. Daí,

$$|\nabla u_H(p)| \leq k'(0) = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon(H_0)}{2H_0} - \frac{\varepsilon(H_0)^2}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4H_0^2} - \frac{\varepsilon(H_0)}{2H_0} + \frac{\varepsilon(H_0)^2}{4}}}. \quad (4.16)$$

Logo, como (4.16) não depende do p , obtivemos uma estimativa *a priori* para $\nabla u_H(p)$. Dessa forma, pelo teorema 15, existe u_H e concluímos a prova deste teorema. \square

Referências

- [1] ARAÚJO, P. V. Geometria Diferencial, 3 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [2] CARMO, M. P. do. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 6 ed., SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [3] CARMO, M. P. do. Geometria riemanniana, 5ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [4] CHAVEL, I. Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1984.
- [5] Desigualdade de Jensen. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27sinequality>> Acesso em: fev. 2019.
- [6] FEDERER, H. Geometric Measure Theory. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [7] Geometry and Topology. Disponível em: <<http://www.math.toronto.edu/mgualt/MAT1300/>> Acesso em: mar. 2019.
- [8] GILBARG, D. e TRUDINGER, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2 ed., Springer-Verlag, Berlim, 1983.
- [9] GONÇALVES, M. B. FLEMMING, D. M. Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície, 3 ed., Makron Books, São Paulo, 2000.
- [10] KLASER, P. K. Equação de Poisson em variedades riemannianas e estimativas do primeiro autovalor. 2010. 58 p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2010.
- [11] KLASER, P. K.; TELICHEVESKY, M. O Problema Isoperimétrico. In: IV Colóquio de Matemática da Região Sul, 2016, Rio Grande. Anais do IV Colóquio de Matemática da Região Sul. Rio Grande: FURG, 2016. Disponível em: <<https://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/wp-content/uploads/sites/4/2016/04/MinicursoProblemaIsoperimetrico.pdf>>. Acesso em: abr. 2019.
- [12] LIMA, E. L. Análise Real, vol. 1, 12 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
- [13] LIMA, E. L. Análise Real, vol. 2, 6 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [14] LIMA, E. L. Espaços Métricos, 1 ed., Rio de Janeiro, 1975.
- [15] LÓPEZ, R. MONTIEL, S. Constant mean curvature surfaces with planar boundary, Duke Math. J. 85 (1996), 583–604.

-
- [16] MENDES, A. F. O Teorema da Função Implícita para Espaços de Banach. 2014. 39 p. Trabalho de conclusão de curso-Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, PB, 2014.
- [17] MONTIEL, S. A height estimate for H-surfaces and existence of H-graphs. American Journal of Mathematics. Estados Unidos, ano 123, p. 505-514, 2001.
- [18] RADÓ, T. The problem of the least area and the problem of Plateau. Math. Z, v.82, p. 763-796 (1930).
- [19] RADÓ, T. Contributions to the theory of minimal surface. Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, v.6, p. 1-20, (1932).
- [20] RIPOLL, J. Some characterization, uniqueness and existence results for euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary. Pacific journal of mathematics, v. 198, n. 1, p. 175-196, 03 2001.
- [21] SERRIN, J. The problem for quasilinear elliptic equation with many independent variables. Philosophical Transactions of the Royal Society A, London, v. 264, n. 1153, p. 413-496, 05 1969.

5 Apêndice A: EDPs Lineares Elípticas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Neste apêndice, buscamos demonstrar a existência de $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo o seguinte Problema de Dirichlet (PD):

$$(*) = \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L é um operador linear elíptico, como visto na definição 21. Para poder fazer as contas com detalhes, sempre que necessário vamos supor $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

5.1 O caso particular do operador Laplaciano

Começaremos com o caso onde o operador L é o Laplaciano.

Consideremos o operador $\Delta : C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^0(\overline{\Omega})$ dado por

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u).$$

A partir da definição desse operador, dada uma função $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, obtemos o seguinte Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Queremos encontrar soluções para a EDP $\Delta u = 0$ em Ω . Para tal, vamos usar a teoria de EDP's elípticas. A ideia é: primeiramente, resolver o problema quando o domínio é uma bola de raio R ; em seguida, usar a existência de solução em bolas para demonstrar que o PD tem solução em domínios mais gerais. Iniciaremos com alguns resultados preliminares, buscando os resultados de existência de solução do Problema de Dirichlet. Num primeiro momento os resultados parecerão desconexos, mas eles serão de suma importância para a resolução do PD.

Definição 25. Dizemos que a função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é:

- i) harmônica em Ω se $\Delta u = 0$;
- ii) subharmônica em Ω se $\Delta u \geq 0$;
- iii) superharmônica em Ω se $\Delta u \leq 0$.

Agora, relembremos o Teorema da Divergência e o Teorema de Mudança de Variáveis em \mathbb{R}^n .

Teorema 29 (Divergência). *Seja Ω_0 um domínio limitado com bordo $\partial\Omega_0$ de classe C^1 e seja η o vetor normal exterior a $\partial\Omega_0$. Para qualquer campo de vetores $W \in C^1(\overline{\Omega_0})$, temos que:*

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} W \, dx = \int_{\partial\Omega_0} W \cdot \eta \, ds. \quad (5.1)$$

Observação 5. *Em particular, se $u \in C^2(\overline{\Omega_0})$, então, pondo $W = \nabla u$ em (5.1), obtemos:*

$$\int_{\Omega_0} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega_0} \nabla u \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds. \quad (5.2)$$

Teorema 30 (Mudança de Variável). *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 , $X \subset U$ um conjunto J -mensurável compacto, $Y = h(X)$ e $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,*

$$\int_{h(X)} f(y) \, dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)| \, dx.$$

Além disso, vamos apresentar a fórmula da co-área, que será útil mais adiante.

Teorema 31. *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n e f uma função real lipschitziana em Ω . Então, para uma função integrável g , temos*

$$\int_{\Omega} g(x) |\nabla f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}(t)} g(x) \, ds^{n-1} \right) dt,$$

onde s^{n-1} representa o elemento de volume $(n-1)$ -dimensional.

Observação 6. *Tem-se que $w_n = |B_1(0)|$ é o volume n -dimensional da bola de raio 1 em \mathbb{R}^n , $|B_R| = w_n R^n$, $|\partial B_R| = n w_n R^{n-1}$ e $w_2 = \pi$.*

Corolário 2. *Sejam $\Omega = B_R(y) \subset \mathbb{R}^n$ e $\rho(x) = |x - y|$, temos que se $g : B_R(y) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função radialmente simétrica, isto é, que depende apenas da distância a y , então escrevendo $g(x) = g(\rho(x))$, obtemos:*

$$\int_{B_R(y)} g(x) \, dx = \int_0^R g(\rho) n w_n \rho^{n-1} \, d\rho.$$

Demonstração. Faremos a prova para o caso $n = 2$. Observe que, em $\Omega \setminus \{y\}$,

$$\begin{aligned} |\nabla \rho(x)| &= \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{|x - y|^2} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{|x - y|^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Disso e da fórmula da coárea segue que:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} g(x) dx &= \int_0^R \int_{\partial B_t(y)} g(t) ds dt \\ &= \int_0^R g(t) |\partial B_t(y)| dt \\ &= \int_0^R g(t) 2\pi t dt. \end{aligned}$$

□

O primeiro resultado que vamos ver é a Desigualdade do Valor Médio.

Teorema 32. *Seja $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u = 0$ ($\geq 0, \leq 0$) em Ω . Então, para qualquer bola $B = B_R(y) \subset \Omega$, temos:*

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u ds \tag{5.3}$$

e

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{w_n R^n} \int_B u dx. \tag{5.4}$$

Demonstração. Nesta demonstração, faremos o caso em que u é superharmônica, isto é, $\Delta u \geq 0$. O caso em que u é subharmônica decorre da substituição de u por $-u$. Defina

$$\phi(R) = \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) ds(y).$$

Afirmção 1: $\lim_{R \rightarrow 0} \phi(R) = u(y)$.

De fato, como u é contínua em x , dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $R_0 > 0$ tal que se $y \in B_{R_0}(y)$, então $u(y) - \varepsilon < u(x) < u(y) + \varepsilon$. Para $R < R_0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(y)} (u(y) - \varepsilon) ds &\leq \int_{\partial B_R(y)} u(x) ds \leq \int_{\partial B_R(y)} (u(y) + \varepsilon) ds \\ \Rightarrow (u(y) - \varepsilon) |\partial B_R(y)| &\leq \int_{\partial B_R(y)} u(x) ds \leq (u(y) + \varepsilon) |\partial B_R(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(y) - \varepsilon &\leq \phi(R) \leq u(y) + \varepsilon \\ \Rightarrow |u(y) - \phi(R)| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Afirmção 2: ϕ é não crescente em R .

Para isso, mostremos que $\frac{d}{dR}\phi(R) \leq 0$. Aqui usaremos o Teorema de Mudança de Variável (teorema 30), fazendo a seguinte mudança: $z = \frac{x-y}{R} \Leftrightarrow x = y + Rz$, ou seja, queremos levar os pontos $x \in \partial B_R(y)$ para S^{n-1} . Daí,

$$\int_{\partial B_R(y)} u(x) ds_x = \int_{S^{n-1}} u(y + Rz) R^{n-1} ds_z.$$

Dessa forma, pelo Teorema de Divergente (teorema 29)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR}\phi(R) &= \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{nw_n} \int_{S^{n-1}} u(y + Rz) ds_z \right) \\ &= \frac{1}{nw_n} \int_{S^{n-1}} \frac{d}{dR} (u(y + Rz)) ds_z \\ &= \frac{1}{nw_n} \int_{S^{n-1}} \nabla u(y + Rz) \cdot z dz \\ &= \frac{1}{nw_n} \int_{S^{n-1}} \nabla u(y + Rz) \cdot \eta ds(z) \\ &= \frac{1}{nw_n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div}(\nabla u(y + Rz)) dz \\ &= \frac{1}{nw_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(y + Rz) \cdot R dz \\ &= \frac{R}{nw_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(y + Rz) dz \leq 0. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue do fato de que o divergente de $z \mapsto \nabla u(y + Rz)$ é igual a $Ru_{xx} + Ru_{yy} = R\Delta u(y + Rz)$. Portanto, se $R > 0$, temos que $\frac{d}{dR}\phi(R) \leq 0$, isto é, ϕ é não crescente em R . Logo, $u(y) = \lim_{R \rightarrow 0} \phi(R) \geq \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \Phi(R)$, ou seja, vale (5.3). Para mostrar (5.4), note que, do provado acima, temos:

$$nw_n R^{n-1} u(y) \geq \int_{\partial B_R(y)} u(x) ds(y).$$

Integrando em R de 0 a R_0 e utilizando a fórmula da co-área, obtemos:

$$nw_n u(y) \int_0^{R_0} R^{n-1} dR \geq \int_0^{R_0} \int_{\partial B_R(y)} u(x) ds_y dR \Rightarrow nw_n u(y) \frac{R_0^n}{n} \geq \int_{B_{R_0}(y)} u(x) dx,$$

ou seja, segue a desigualdade desejada. \square

Agora, vamos mostrar resultados voltados ao Princípio do Máximo.

Teorema 33. *Seja $u \in C^2(\Omega)$ com $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) em Ω e suponha que existe um ponto $y \in \Omega$ para o qual $u(y) = \sup_{\Omega} u$ ($\inf_{\Omega} u$). Então u é constante. Consequentemente, uma função harmônica não pode assumir um valor máximo ou mínimo em um ponto interior a menos que ela seja constante.*

Demonstração. Suponha que $\Delta u \geq 0$ em Ω , $M = \sup_{\Omega} u$ e defina $\Omega_M = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$. Como, por hipótese, existe $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup_{\Omega} u$, segue que $\Omega_M \neq \emptyset$. Mostremos, então, que Ω_M é aberto e fechado em Ω . Sendo u contínua, $u^{-1}(M) = \Omega_M$ é fechado em Ω . Agora, considere $z \in \Omega_M$ qualquer. Aplicando a Desigualdade do Valor Médio (5.4) para a função subharmônica $u - M$ na bola $B = B_R(z) \subset \Omega$, obtemos:

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{w_n R^n} \int_B (u - M) dx \leq 0.$$

Dessa forma, $u = M$ em B , ou seja, dado um $z \in \Omega_M$, existe uma bola $B_R(z) \subset \Omega$ tal que $u(x) = M$, para todo $x \in B_R(z)$. Disso decorre que Ω_M também é aberto em Ω . Portanto, como Ω é conexo, $\Omega_M = \Omega$, isto é, u é constante.

O resultado para funções superharmônicas segue pela substituição de u por $-u$. \square

Teorema 34. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) em Ω . Então, desde que o domínio Ω seja limitado, $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ ($\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$). Consequentemente, se u é harmônica, então $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$, para todo $x \in \Omega$.*

Demonstração. Suponha que u é tal que $\Delta u \geq 0$ em Ω . Sendo Ω um domínio limitado, existe $x \in \bar{\Omega}$ tal que $u(x) = \sup_{\Omega} u$. Assim, há duas possibilidades: ou $x \in \partial\Omega$ ou $x \in \Omega$. Se $x \in \partial\Omega$, então o supremo da função u é atingido no bordo de Ω . Por outro lado, se $x \in \Omega$, então, pelo Princípio do Máximo (teorema 33), a função u é constante e o supremo de u também é atingido em $\partial\Omega$. O caso em que u é tal que $\Delta u \leq 0$ é análogo. Além disso, se u é harmônica segue a desigualdade desejada. \square

Teorema 35. *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u = \Delta v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω .*

Demonstração. Considere a função $w = u - v$. Então, $\Delta w = 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial\Omega$. Segue, do teorema anterior, que $0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0$, para todo $x \in \Omega$. Portanto, $w = 0$ em Ω , isto é, $u = v$ em Ω . \square

Outro resultado que será importante mais adiante é a Desigualdade de Harnack, que será dada a seguir.

Teorema 36 (Desigualdade de Harnack). *Seja u uma função harmônica não negativa em Ω . Então, para qualquer subdomínio limitado $\Omega' \subset\subset \Omega$, onde $\subset\subset$ significa que Ω'*

está compactamente contido em Ω , isto é, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, existe uma constante c que depende somente de n, Ω' e Ω tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u. \quad (5.5)$$

Demonstração. Sejam $y \in \Omega$ e $R > 0$ tais que $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Então, para quaisquer $x_1, x_2 \in B_R(y)$, temos, pela Desigualdade do Valor Médio (5.4) e usando que $B_R(x_1) \subset B_{2R}(y)$ e $B_{2R}(y) \subset B_{3R}(x_2)$,

$$u(x_1) = \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u dx \leq \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u dx, \quad (5.6)$$

$$u(x_2) = \frac{1}{w_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u dx \geq \frac{1}{w_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u dx. \quad (5.7)$$

Daí, como o lado direito de (5.6) é limitado por 3^n vezes o lado direito de (5.7), temos

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u dx \\ &\leq 3^n \frac{1}{w_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u dx \\ &\leq 3^n \frac{1}{w_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u dx \\ &= 3^n u(x_2). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u. \quad (5.8)$$

Agora, seja $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ compacto. Escolha R tal que $4R < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Sendo $\overline{\Omega'}$ compacto, dada uma cobertura formada por bolas abertas de raio R , existe uma cobertura finita formada por N bolas abertas de tal forma que $\Omega' \subset \cup_{i=1}^N B_R(y_i)$, com $y_i \in \overline{\Omega'}$. Escolha $x_1, x_2 \in \Omega'$ tais que $u(x_1) = \sup_{\Omega'} u$ e $u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$, e considere $\Gamma \subset \overline{\Omega'}$ uma curva fechada ligando x_1 a x_2 . Aplicando a desigualdade (5.6) em cada bola de raio R que cobre Γ e combinando as desigualdades obtidas, concluímos que $u(x_1) \leq 3^{nN} u(x_2)$. Basta tomar $c = 3^{nN}$ que obtemos a Desigualdade de Harnack. \square

Agora, vamos apresentar as Identidades de Green, uma solução para o Problema de Dirichlet em bolas e obter Fórmulas de Representação de Green. Para isso, consideremos Ω um domínio onde vale o Teorema da Divergência (teorema 29) e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Para determinar a Primeira Identidade de Green, faremos a seguinte substituição no Teorema da Divergência: $W = v\nabla u$, ou seja,

$$\int_{\Omega} \text{div}(v\nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \eta ds \Rightarrow \int_{\Omega} v\Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (5.9)$$

Para a Segunda Identidade de Green vamos fazer as seguintes operações: trocaremos u por v em (5.9) e faremos (5.9) menos a igualdade obtida dessa troca de u e v , isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v\Delta u + DuDv)dx - \int_{\Omega} (u\Delta v + DvDu)dx &= \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta})ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta})ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agora introduziremos a função Γ . Essa função será essencial para resolvermos o PD quando o domínio é uma bola de raio R , resultado esse que é importante para estendermos a resolução do PD para um domínio mais geral.

Definição 26. Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, definimos a função $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & n = 2. \end{cases}$$

A partir da função Γ , definimos a função g por $\Gamma(|x - y|) = g(x)$. Aqui, faremos as contas detalhadas para o caso $n = 2$, uma vez que, neste trabalho, resolveremos uma EDP em \mathbb{R}^2 e as contas para $n = 2$ e $n > 2$ são distintas.

Proposição 12. $g(x) = \Gamma(|x - y|)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

Demonstração. Obtemos as seguintes derivadas de g :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi |x - y|^2} \frac{1}{2} \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}} 2(x_i - y_i) \\ &= \frac{(x_i - y_i)}{2\pi |x - y|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} |x - y|^{-2} (x_i - y_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{2\pi} (-\langle x - y, x - y \rangle^{-2} 2(x_i - y_i)(x_i - y_i) + |x - y|^{-2} \langle e_i, e_i \rangle) \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2|x - y|^{-4} (x_i - y_i)^2 + |x - y|^{-2}). \end{aligned}$$

Para uso futuro, temos a seguinte derivada:

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\pi} (-2|x - y|^{-4} (x_2 - y_2)(x_1 - y_1)).$$

Assim, para $x \neq y$, temos:

$$\begin{aligned}
 \Delta g(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} [-2|x-y|^{-4}(x_1-y_1)(x_1-y_1) + |x-y|^{-2} - 2|x-y|^{-4}(x_2-y_2)(x_2-y_2) + |x-y|^{-2}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \{ |x-y|^{-4} [-2((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2) |x-y|^{-2}] \} \\
 &= \frac{1}{2\pi} [|x-y|^{-4} - |x-y|^{-2}|x-y|^{-2}] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Observe que g não está bem definida para $x = y$. Isso nos impede de substituir v por g na Segunda Identidade de Green. Um caminho para superar esse obstáculo é substituir o domínio Ω por $\Omega - \overline{B_\rho}$, onde $B_\rho = B_\rho(y)$ para ρ suficientemente pequeno. Daí, da Segunda Identidade de Green (5.10), podemos concluir que, para $u \in C^2(\overline{\Omega})$, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus B_\rho} (g\Delta u - u\Delta g) dx &= \int_{\Omega \setminus B_\rho} g\Delta u dx \\
 &= \int_{\partial(\Omega \setminus B_\rho)} \left(g \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds \\
 &= \int_{\partial\Omega} \left(g \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\partial B_\rho} \left(g \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega \setminus B_\rho} (g\Delta u - u\Delta g) dx = \int_{\partial\Omega} \left(g \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\partial B_\rho} \left(g \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds. \quad (5.11)$$

Antes de seguirmos com as contas, observemos que, eventualmente, confundiremos $g(\rho)$ e $g(x)$. Não há problema em fazer isso, desde que entendamos a diferença. Agora, note que

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B_\rho} g \frac{\partial u}{\partial \eta} ds &= g(\rho) \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \\
 &\leq g(\rho) \sup_{B_\rho} |\nabla u| \int_{\partial B_\rho} 1 ds \\
 &= 2\pi\rho g(\rho) \sup_{B_\rho} |\nabla u| \longrightarrow 0 \text{ quando } \rho \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B_\rho} u \frac{\partial g}{\partial \eta} ds &= -g(\rho) \int_{\partial B_\rho} u ds \\
 &= \frac{-1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho} u ds \longrightarrow -u(y) \text{ quando } \rho \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Fazendo $\rho \rightarrow 0$ na equação (5.11), chegamos na Fórmula de Representação de Green:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g(x)}{\partial \eta} - g(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} g(x) \Delta u dx. \quad (5.12)$$

Agora, veremos algumas variações da Fórmula de Representação de Green. Primeiramente, consideremos o caso em que u tem suporte compacto em \mathbb{R}^n , isto é, u se anula no exterior de algum conjunto compacto. Então (5.12) nos rende a seguinte fórmula:

$$u(y) = \int_{\Omega} g(x) \Delta u(x) dx. \quad (5.13)$$

Para uma função harmônica u , ou seja, $\Delta u = 0$, obtemos a seguinte fórmula:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g(x)}{\partial \eta} - g(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds. \quad (5.14)$$

Suponhamos, agora, que $h \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz $\Delta h = 0$ em Ω . Então, pela Segunda Identidade de Green, temos:

$$- \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds = \int_{\Omega} h \Delta u dx. \quad (5.15)$$

Adicionando (5.12) a (5.15), obtemos uma outra versão mais geral da Fórmula de Representação de Green, ou seja,

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} g \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} h \Delta u dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) ds - \int_{\partial\Omega} (g - h) \frac{\partial u}{\partial \eta} ds + \int_{\Omega} (g - h) \Delta u dx. \end{aligned} \quad (5.16)$$

No que segue, procuramos uma função h que torne nula a segunda parcela de (5.16), já que não temos conhecimento da derivada de u com relação ao vetor normal. Se $g - h = 0$ em $\partial\Omega$, temos de (5.16):

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial(g - h)}{\partial \eta} ds + \int_{\Omega} (g - h) \Delta u dx \quad (5.17)$$

e $g - h$ é chamada de Função de Green para o domínio Ω . Pelo teorema 35 temos a unicidade dessa função.

Seja, pois, $B_R = B_R(0)$. Dado $x \in B_R$, definimos seu inverso como sendo

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{R^2}{|x|^2} x, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Além disso, fixado $y \in \mathbb{R}^2$, há duas possibilidades: ou $y = 0$ ou $y \neq 0$. Se $y = 0$, definimos $h = \frac{1}{2\pi} \ln r$. Note que h é harmônica e $g - h = 0$ em ∂B_R . Se $y \neq 0$, definimos a

função $h(x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right)$, que satisfaz $\Delta h = 0$ para $x \neq y$. A prova disso é análoga a prova de que $\Delta g = 0$. Além disso, vejamos que $g - h = 0$ em $\partial B_R(0)$. Para verificar isso, mostraremos que $\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}| = |x - y|$, para todo $x \in \partial B_R(0)$ e para todo $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde $\bar{y} = \frac{R^2}{|y|^2}y$. Note que, mostrar a afirmação feita acima, equivale a mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{|y|^2}{R^2} \langle x - \bar{y}, x - \bar{y} \rangle &= \langle x - y, x - y \rangle \Leftrightarrow \frac{|y|^2}{R^2} (|x|^2 - 2\langle x, \bar{y} \rangle + |\bar{y}|^2) = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{|y|^2}{R^2} (R^2 - 2\langle x, \frac{R^2}{|y|^2}y \rangle + \frac{R^2}{|y|^4}|y|^2) = R^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\Leftrightarrow |y|^2 \left(1 - \frac{2}{R^2} \langle x, y \rangle \frac{R^2}{|y|^2} + \frac{R^2}{|y|^2}\right) = R^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2, \end{aligned}$$

o que é válido. Logo, $g - h = 0$ para $x \in \partial B_R(0)$.

A Função de Green para a bola B_R é dada por, para todo $x, y \in B_R$, com $x \neq y$ e y fixo:

$$G_y(x) = \begin{cases} g(x) - h(x), & y \neq 0 \\ g(x) - g(R), & y = 0. \end{cases}$$

Para todo $x, y \in \overline{B_R}$, a função G satisfaz as seguintes propriedades:

- $G_y(x) = G_x(y)$;

De fato, note que:

$$\begin{aligned} G_y(x) &= g(x) - h(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln|x - y| - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\ln|y - x| - \ln\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right)) \end{aligned}$$

Para mostrar que $G_y(x) = G_x(y)$, falta mostrar que $\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}| = \frac{|x|}{R}|\bar{x} - y|$. Note que, isso equivale a mostrar que $\frac{|y|^2}{R^2}|x - \bar{y}|^2 - \frac{|x|^2}{R^2}|\bar{x} - y|^2 = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{|y|^2}{R^2}|x - \bar{y}|^2 - \frac{|x|^2}{R^2}|\bar{x} - y|^2 &= \frac{|y|^2}{R^2} \langle x - \bar{y}, x - \bar{y} \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \langle \bar{x} - y, \bar{x} - y \rangle \\ &= \frac{|y|^2}{R^2} [|x|^2 - 2\langle x, \bar{y} \rangle + |\bar{y}|^2] - \frac{|x|^2}{R^2} [|\bar{x}|^2 - 2\langle \bar{x}, y \rangle + |y|^2] \\ &= \frac{|y|^2}{R^2} [|x|^2 - 2\langle x, \frac{R^2}{|y|^2}y \rangle + \frac{R^4}{|y|^2}] - \frac{|x|^2}{R^2} \left[\frac{R^4}{|x|^2} - 2\langle \frac{R^2}{|x|^2}x, y \rangle \right. \\ &\quad \left. + |y|^2 \right] \\ &= \frac{|y|^2|x|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle + R^2 - R^2 + 2\langle x, y \rangle - \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos.

- $G_y(x) \leq 0$.

De fato, observe que a aplicação $x \mapsto G(x, y) = g(x) - h(x)$ é harmônica para $x \neq y$ e $G(x, y) = 0$ para todo $x \in \partial B_R(0)$ e para todo $y \in B_R(0)$. Note que, $G(x, y) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow y$. Considere $B_\varepsilon(y)$ uma bola contida em $B_R(0)$, com ε suficientemente pequeno. Agora, se $A = B_R(0) \setminus B_\varepsilon(y)$, temos G harmônica em A e não positiva em ∂A . Logo, pelo Princípio do Máximo (teorema 33), $G \leq 0$ em A .

- Fixado $y \in B_R$, a função $x \mapsto G_y(x)$ tem derivada em relação ao vetor normal exterior em ∂B_R dada por $\frac{\partial G_y}{\partial \eta}(x) = \frac{1}{2\pi R|x-y|^2}(R^2 - |y|^2)$. De fato, se $x \in \partial B_R$, a derivada normal de G , onde η é o vetor posição, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_y}{\partial \eta}(x) &= \left\langle \nabla_x G(x, y), \frac{x}{R} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2\pi|x-y|^2}(x-y) - \frac{1}{2\pi|x-\bar{y}|^2}(x-\bar{y}), \frac{x}{R} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi|x-y|^2} \left(\frac{|x|^2}{R} - \frac{\langle x, y \rangle}{R} \right) - \frac{1}{2\pi|x-\bar{y}|^2} \left(\frac{|x|^2}{R} - \frac{\langle x, \bar{y} \rangle}{R} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{|x|^2}{|x-y|^2} - \frac{\langle x, y \rangle}{|x-y|^2} - \frac{|x|^2}{|x-\bar{y}|^2} + \frac{\langle x, \bar{y} \rangle}{|x-\bar{y}|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi R} (R^2|x-\bar{y}|^2 - \langle x, y \rangle|x-\bar{y}|^2 - R^2|x-y|^2 + \langle x, \bar{y} \rangle|x-y|^2) \frac{1}{|x-y|^2|x-\bar{y}|^2} \\
&= \frac{1}{2\pi R|x-y|^2|x-\bar{y}|^2} [R^2(|x-\bar{y}|^2 - |x-y|^2) - \langle x, y \rangle(-|x-\bar{y}|^2 + \frac{|x-y|^2 R^2}{|y|^2})] \\
&= \frac{1}{2\pi R|x-y|^2} [R^2(1 - \frac{|x-y|^2}{|x-\bar{y}|^2}) - \langle x, y \rangle(-1 + \frac{R^2|x-y|^2}{|y|^2|x-\bar{y}|^2})]. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
R^2(R^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2) = |y|^2 R^2 - 2R^2 \langle x, y \rangle + R^4 &\Rightarrow \frac{|y|^2 R^2 - 2|y|^2 \langle x, y \rangle + |y|^4}{|y|^2 R^2 - 2\langle x, y \rangle + R^4} = \frac{|y|^2}{R^2} \\
&\Rightarrow \frac{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2}{|x|^2 - \frac{2\langle x, y \rangle R^2}{|y|^2} + \frac{R^4}{|y|^2}} = \frac{|y|^2}{R^2} \\
&\Rightarrow \frac{|x-y|^2}{|x-\bar{y}|^2} = \frac{|y|^2}{R^2}. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.19) em (5.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi R|x-y|^2} \left[R^2(1 - \frac{|x-y|^2}{|x-\bar{y}|^2}) - \langle x, y \rangle(-1 + \frac{R^2|x-y|^2}{|y|^2|x-\bar{y}|^2}) \right] &= \frac{1}{2\pi R|x-y|^2} [R^2(1 - \frac{|y|^2}{R^2}) \\
&\quad - \langle x, y \rangle(-1 + \frac{R^2|y|^2}{|y|^2 R^2})] \\
&= \frac{1}{2\pi R|x-y|^2} (R^2 - |y|^2).
\end{aligned}$$

Teorema 37. *Se u é uma função harmônica, então a Fórmula da Integral de Poisson é dada por:*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{u}{|x - y|^2} ds_x \quad (5.20)$$

Observação 7. *Para $n > 2$ a Fórmula da Integral de Poisson é dada por:*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u}{|x - y|^n} ds_x \quad (5.21)$$

O próximo teorema nos garante que a Integral de Poisson resolve o PD clássico quando o domínio é uma bola.

Teorema 38. *Sejam $B = B_R(0)$ e ϕ uma função contínua no ∂B . Então a função*

$$u(y) = \begin{cases} \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_{\partial B} \frac{\phi(x)}{|x - y|^2} ds_y, & y \in B \\ \phi(y), & y \in \partial B \end{cases}$$

pertence a $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em B .

Demonstração. Provemos, inicialmente, que u é de classe C^0 em \bar{B} . Para isso, considere o núcleo de Poisson dado por

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R|x - y|^2} \quad (5.22)$$

com $x \in B$ e $y \in \partial B$. Para estabelecer a continuidade de u em ∂B , usamos a Fórmula de Poisson (5.21) para o caso em que u é a função constante igual a 1, ou seja,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \int_{\partial B} |x - y|^{-2} ds_x \\ &= \int_{\partial B} \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R|x - y|^2} ds_y \\ &= \int_{\partial B} K(x, y) ds_y. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Seja $y_0 \in \partial B$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Escolha $\delta > 0$ de modo que $|\phi(y) - \phi(y_0)| < \varepsilon$ sempre que $|y - y_0| < \delta$ e seja $M = \sup_{\partial\Omega} \phi$ no ∂B . Então, se $|y - y_0| < \frac{\delta}{2}$, temos, pela definição de u e por (5.23), que:

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(y_0)| &= \left| \int_{\partial B} K(x, y)(\phi(x) - \phi(y_0)) ds_x \right| \\
&\leq \int_{\partial B} K(x, y) |\phi(x) - \phi(y_0)| ds_x \\
&= \int_{|x-y_0| \leq \delta} K(x, y) |\phi(x) - \phi(y_0)| ds_x + \int_{|x-y_0| > \delta} K(x, y) |\phi(x) - \phi(y_0)| ds_x \\
&\leq \varepsilon \int_{|x-y_0| \leq \delta} K(x, y) ds_x + \int_{|x-y_0| < \delta} 2MK(x, y) ds_x \\
&= \varepsilon + 2M \int_{|x-y_0| > \delta} \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R|x-y|^2} ds_x \\
&= \varepsilon + 2M \frac{(R^2 - |y|^2)}{2\pi R} \int_{|x-y_0| > \delta} \frac{1}{|x-y|^2} ds_x \\
&\leq \varepsilon + 2M \left(\frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R} \right) \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \int_{|x-y_0| > \delta} 1 ds_x \\
&\leq \varepsilon + \frac{2M(R^2 - |y|^2)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \\
&= \varepsilon + \frac{2M(R^2 + |y|^2)}{\frac{\delta^2}{4}} \\
&= \varepsilon + \frac{8M(R^2 + |y|^2)}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade, devemos limitar a parcela $\frac{8M(R^2+|y|^2)}{\delta^2}$. Para isso, tome $\delta' = \frac{\varepsilon\delta^2}{16MR}$. Assim, se $|y - y_0| < \delta'$, então, uma vez que $R^2 + |y|^2 \leq 2R|y - y_0|$,

$$\begin{aligned}
\frac{8M(R^2 + |y|^2)}{\delta^2} &\leq \frac{8M(2R|y - y_0|)}{\delta^2} \\
&< \frac{8M(2R\varepsilon\delta^2)}{16MR\delta^2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos $|u(y) - u(y_0)| > 2\varepsilon$ e, portanto, u é contínua em \bar{B} . Agora, provemos que u é harmônica em B . Observe que a função u foi obtida da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
u(y) &= \int_{\partial B} \phi(y) \frac{\partial G_y}{\partial \eta} ds_x \\
&= \int_{\partial B} \phi(y) \left\langle \left(\frac{\partial G_y}{\partial y_1}(x), \frac{\partial G_y}{\partial y_2}(x) \right), \left(\frac{y_1}{R}, \frac{y_2}{R} \right) \right\rangle ds_x \\
&= \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{y_1}{R} \frac{\partial G_y}{\partial y_1}(x) + \frac{y_2}{R} \frac{\partial G_y}{\partial y_2}(x) \right) ds_x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_x u &= \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{y_1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial y} G_y(x) + \frac{y_2}{R} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial y_2} G_y(x) \right) ds_y + \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{y_1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial}{\partial y} G_y(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_2}{R} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial}{\partial y_2} G_y(x) \right) ds_y \\
&= \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{y_1}{R} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_y(x) + \frac{y_2}{R} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_y(x) \right) ds_y \\
&\quad + \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{y_1}{R} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_y(x) + \frac{y_2}{R} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_y(x) \right) ds_y \\
&= \int_{\partial B} \phi(y) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_x G_y + \frac{\partial}{\partial y_2} \Delta_x G_y \right) ds_y \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos. \square

Nesse instante, queremos obter estimativas interiores de derivadas para funções harmônicas através da diferenciação direta da Integral de Poisson. Então, sejam u uma função harmônica em Ω e $B = B_R(y) \subset \Omega$. Uma vez que o gradiente ∇u também é uma função harmônica, já que $\Delta u = 0$, em Ω , segue, pelos teoremas do Valor Médio e do Divergente, que é aplicado no campo $X = (u, 0)$ e considerando $\eta = (n_1, n_2)$, que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} u(y) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_B \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B} u \cdot n_1 ds.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_1} u(y) \right| &= \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B} u \cdot n_1 ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B} |u \cdot n_1| ds \\
&\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B} |u| ds \\
&= \frac{1}{\pi R^2} \sup_{\partial B} |u| \int_{\partial B} ds \\
&= \frac{2}{R} \sup_{\partial B} |u|. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Analogamente, $\left| \frac{\partial}{\partial x_2} u(y) \right| \leq \frac{2}{R} \sup_{\partial B} |u|$. Aplicando a desigualdade obtida para o gradiente de u , obtemos

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{R} \sup_{\partial B} |u|.$$

Consequentemente,

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{d_y} \sup_{\Omega} |u|, \quad (5.25)$$

onde $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega)$ é o raio da maior bola centrada em y contida em Ω .

Faremos um raciocínio semelhante para a derivada segunda. Note que, como $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u$ é harmônica,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(y) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\pi R^2} \int_B \frac{\partial}{\partial x_j} u dx \right).$$

Aplicando a desigualdade (5.24) na bola $B_{\frac{R}{2}}(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \right| &\leq \frac{2}{R} \sup_{\partial B_{\frac{R}{2}}(y)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \\ &= \frac{4}{R} \sup_{\partial B_{\frac{R}{2}}(y)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|. \end{aligned}$$

Agora, aplicaremos a mesma desigualdade (5.24), só que para $\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|$. Considere um ponto $p \in \partial B_{\frac{R}{2}}(y)$ e considere a bola $B_{\frac{R}{2}}(p)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(y) \right| &= \frac{4}{R} \sup_{p \in \partial B_{\frac{R}{2}}(y)} \left| \frac{\partial u(p)}{\partial x_j} \right| \\ &\stackrel{(5.24)}{\leq} \frac{4}{R} \left(\frac{2}{R} \sup_{B_{\frac{R}{2}}(p)} |u| \right) \\ &\leq \frac{16}{R^2} \sup_B |u| \\ &\leq \frac{16}{R^2} \sup_{\Omega} |u|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(y) \right| \leq \frac{16}{d_y^2} \sup_{\Omega} |u|,$$

para todo $y \in \Omega$ e para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

Antes de enunciar o próximo resultado, relembremos o Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 39. *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de aplicações contínuas $f_n : K \rightarrow N$, onde $K \subset M$ é um subconjunto compacto e M, N são espaços métricos. A fim de que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja relativamente compacta, é necessário e suficiente que:*

- i) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja equicontínua;

ii) Para cada $x \in K$, o conjunto $F(x) = \{f(x); f \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \subset N$ seja relativamente compacto em N .

A prova deste teorema pode ser encontrada em [14], proposição 16, página 375.

Lema 6. *Sejam (u_n) uma sequência qualquer de funções harmônicas em Ω e $K \subset \Omega$ compacto. Então (u_n) possui uma subsequência convergindo uniformemente em K para uma função harmônica.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de funções harmônicas em Ω . Uma vez que temos estimativas para o gradiente de cada u_n , estimativa (5.25), temos que u_n é lipschitziana e, portanto, equicontínua, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli, existe um conjunto de índices $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ de tal forma que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}'} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $u_n \rightarrow u$ uniformemente. Agora, considere a sequência $((u_n)_{x_1})_{n \in \mathbb{N}'}$ de funções harmônicas. De maneira semelhante a anterior, obtemos a equicontinuidade. Por Arzelá-Ascoli, existem $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ e uma função v tal que $(u_n)_x \rightarrow v$, com $((u_n)_x)_{n \in \mathbb{N}''} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}'}$. Por um resultado de análise na reta (derivação termo a termo, ver teorema 16), segue que $v = u_{x_1}$. Seguindo esse processo, obtemos a subsequência desejada. \square

Teorema 40. *Qualquer sequência limitada de funções harmônicas no domínio Ω possui subsequência convergindo uniformemente em qualquer subconjunto compacto de Ω .*

Demonstração. Considere $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$, com $K_i = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{i}\}$ compacto e $K_i \subset K_{i+1}$. Considere (u_n) uma sequência de funções harmônicas limitada em Ω . Pelo lema 6, existe uma subsequência (u_n^1) de (u_n) que converge uniformemente em K_1 . De novo, pelo lema 6, existe uma subsequência (u_n^2) de (u_n^1) que converge uniformemente em K_2 . Seguindo esse processo, temos, pelo lema 6, que existe uma subsequência (u_n^n) de (u_n^{n-1}) que converge uniformemente em K_n . Defina (utilizando o argumento da diagonal de Cantor) a sequência $v_n = u_n^n$. Seja $K \subset \Omega$ compacto. Note que existe $s \in \mathbb{N}$ de modo que $K \subset K_s$. Para $n > s$, (v_n) converge uniformemente em K_s e, portanto, converge uniformemente em K . \square

Com o teorema 38 determinamos uma solução para o PD quando o domínio é uma bola de raio R . Agora, podemos abordar o PD em um domínio limitado arbitrário. Para isso, será necessário apresentar uma outra definição de funções subharmônicas e superharmônicas e ver algumas propriedades que essas funções têm.

Definição 27. *Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é dita:*

- *subharmônica em Ω se para cada bola $B \subset \Omega$ e cada função harmônica h em B satisfazendo $u \leq h$ no ∂B , também temos $u \leq h$ em B ;*

- *superharmônica em Ω se para cada bola $B \subset \Omega$ e cada função harmônica h em B satisfazendo $u \geq h$ no ∂B , também temos $u \geq h$ em B .*

Observação 8. *Se $u \in C^2(\Omega)$ é subharmônica, isto é, $\Delta u \geq 0$ em Ω , então u é subharmônica de acordo com a definição 27.*

De fato, se $u \in C^2(\Omega)$ é subharmônica, então $\Delta u \geq 0$. Sejam $B \subset \Omega$ e h uma função harmônica em B satisfazendo $u \leq h$ em ∂B . Mostremos que $u \leq h$ em B . Note que a função $u - h \leq 0$ em ∂B . Assim, pelo Princípio do Máximo, $u - h \leq 0$ em B e, portanto $u \leq h$ em B .

Definição 28. *Sejam u uma função subharmônica em Ω e B uma bola estritamente contida em Ω . Denote por \bar{u} a função harmônica em B , que é dada pela Integral de Poisson (5.21) de u no ∂B satisfazendo $\bar{u} = u$ no ∂B . Definimos em Ω o levantamento harmônico de u (em B) por:*

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

Proposição 13. *As funções $u \in C^0(\Omega)$ subharmônicas satisfazem:*

- i) *a Desigualdade do Valor Médio;*
- ii) *o Princípio do Máximo em Ω ;*
- iii) *Se u é uma função subharmônica e v é uma função superharmônica, então a função $u - v$ é subharmônica;*
- iv) *Se v é superharmônica num domínio limitado Ω , com $v \geq u$ no $\partial\Omega$, então ocorre ou $u < v$ em Ω , ou $u \equiv v$;*
- v) *a função U é também subharmônica em Ω ;*
- vi) *Sejam u_1, u_2, \dots, u_N funções subharmônicas em um domínio Ω . Então a função $u(x) = \max\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)\}$ é também uma função subharmônica em Ω .*

Demonstração. i) Isso acontece, pois se u é subharmônica, então $u \leq h$ em uma bola B , para toda função harmônica h e para toda bola $B \subset \Omega$. Mas, $h(x) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} u dy$ e, assim, $u \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} u dy$.

ii) A prova desta afirmação é análoga a demonstração do teorema 33.

iii) A prova dessa afirmação seguirá em dois passos.

1º) Mostraremos que se a função v é superharmônica, então $-v$ é subharmônica;

2º) Provaremos que a soma de funções subharmônicas é também uma função subharmônica.

Primeiramente, como v é superharmônica, para cada bola B e cada função harmônica h em B satisfazendo $v \geq h$ em ∂B , tem-se também $v \geq h$ em B . Note que $-v \leq -h$ em ∂B e em B , para cada bola B e para cada função harmônica h . Assim, $-v$ é subharmônica. Agora, mostremos a segunda afirmação. Por hipótese, temos que u e $-v$ são funções subharmônicas. Seja $B \subset \Omega$ e h uma função harmônica tal que $u - v \leq h$ em ∂B . A mostrar: $u - v \leq h$ em B . Considere h_u a função harmônica tal que $h_u = u$ em ∂B . Por u ser subharmônica temos $u \leq h_u$ em B . Note que $-v \leq h - h_u$ em ∂B . Por $-v$ ser subharmônica, segue que $-v \leq h - h_u$ em B . Daí, $u - v \leq h - h_u + u \leq h$.

iv) Para demonstrar esta afirmação, note que, como u é uma função subharmônica e v uma função superharmônica, com $v \geq u$ no $\partial\Omega$, temos que a função $u - v$ satisfaz $u - v \leq 0$ em Ω . Além disso, $u - v$ é subharmônica. Assim, há dois casos a analisar:

- 1) $u - v$ não tem máximo interior;
- 2) $u - v$ tem máximo interior.

Se 1) ocorre, então, pelo Princípio do Máximo, $u \geq v$ em Ω . Suponha que exista $x \in \Omega$ de modo que $u(x) - v(x) = 0$. Assim, x é um ponto de máximo interior. Então $u - v$ é constante, digamos $u - v = M$. Note que ou $M < 0$ ou $M = 0$. Daí, se $M < 0$, então $u < v$ em Ω ; e se $M = 0$, então $u \equiv v$. Se 2) ocorre, então $u - v$ é constante. Basta fazer um argumento análogo ao anterior.

v) Queremos mostrar que o levantamento harmônico U é uma função subharmônica. Para isso, devemos mostrar que para cada bola e cada função harmônica h em Ω satisfazendo $U \leq h$ no bordo, também temos a validade dessa desigualdade na bola.

Considere, então, uma bola arbitrária $B' \subset \Omega$. Podem ocorrer quatro casos:

- 1) $B' \subset \Omega \setminus B$;
- 2) $B' \subset B \subset \Omega$;
- 3) $B' \cap B \neq \emptyset$ e $B' \cap (\Omega - B) \neq \emptyset$;
- 4) $B \subset B' \subset \Omega$.

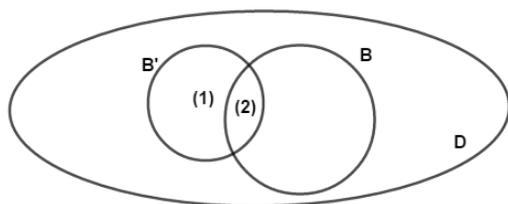


Figura 2 – Caso 3

Seja $h^* : B' \rightarrow \mathbb{R}$ a função harmônica satisfazendo $h^* = U$ no $\partial B'$. Se 1) ocorre, então $u = U = h^*$ em $\partial B'$ e, por u ser subharmônica, $U = u \leq h^*$ em B' . Se 2) acontece, então $U = h^*$ no $\partial B'$. Como h e h^* são harmônicas, elas coincidem em B' . Assim, $U \leq h^*$ em B' . Finalmente, se 3) ocorre afirmo que $U \leq h$ em B' . Primeiro, note que $u \leq U$ em todo Ω . Em $\partial(1) \cap B^C$ temos $U = h^*$. Além disso, em $\partial(1) \cap \bar{B}$ temos $U = h^*$. Logo, pelo item anterior, temos $U \leq h^*$ em (1). Por outro lado, em $\partial(2) \cap B$ temos $U = u \leq h^*$ e em $\partial(2) \cap \partial B$ temos $U = h^*$. Novamente pelo item anterior, temos $U \leq h^*$ em (2). Por fim, se 4) ocorre, mostremos que $U \leq h^*$ em B' . Uma vez que u é subharmônica em Ω , ocorre, em B' , que $h \geq u$. E, como $U = u$ em ∂B e $h \geq u$ em B' , segue que $h \geq U$ em ∂B . Por fim, sendo \bar{u} subharmônica em B e $h \geq \bar{u}$ em ∂B , segue que $h \geq \bar{u} = U$ em B .

□

Observação 9. Resultados análogos são obtidos para funções superharmônicas. Basta substituir u por $-u$ em $i)$, $ii)$, $iii)$, $iv)$ e $v)$.

Definição 29. Sejam Ω um domínio limitado e ϕ uma função limitada no $\partial\Omega$. Dizemos que:

- uma função subharmônica u de classe C^0 em $\bar{\Omega}$ é subfunção relativa a ϕ se ela satisfaz $u \leq \phi$ no $\partial\Omega$;
- uma função superharmônica u de classe C^0 em $\bar{\Omega}$ é uma superfunção relativa a ϕ se ela satisfaz $u \geq \phi$ no $\partial\Omega$.

Observação 10. Aplicando o Princípio do Máximo no domínio Ω , concluímos que toda subfunção é menor do que ou igual a toda superfunção.

Teorema 41. A função $u(x) = \sup_{v \in S_\phi} v(x)$ é harmônica em Ω , onde S_ϕ o conjunto das subfunções relativas a ϕ .

Demonstração. Pela observação feita acima, qualquer função $v \in S_\phi$ satisfaz $v \leq \sup \phi = c$, com c constante. Dessa forma, u está bem posta. Seja $y \in \Omega$ fixado porém arbitrário. Pela definição de u , existe uma sequência $(v_n) \subset S_\phi$ tal que $v_n(y) \rightarrow u(y)$. Substituindo v_n por $\max\{v_n, \inf \phi\}$, podemos assumir que a sequência (v_n) é limitada. Escolha R de modo que $B = B_R(y) \subset \Omega$ e defina V_n como o levantamento harmônico de v_n em B . Daí, pela propriedade v , $V_n \in S_\phi$, já que V_n é subharmônica e $V_n \leq \phi$ e $V_n(y) \rightarrow u(y)$. Obtemos uma limitação para a sequência (V_n) da seguinte forma: $\inf \phi \leq V_n \leq \sup \phi$. Assim, esta sequência contém uma subsequência (V_{n_k}) que converge uniformemente em qualquer bola $B_\rho(y)$, com $\rho < R$, para uma função harmônica v em B . Note que $v \leq u$

em B e $v(y) = u(y)$. Afirimo que $v = u$ em B . De fato, suponha existe algum $z \in B$ tal que $v(z) < u(z)$. Então existe uma função $\bar{u} \in S_\phi$ tal que $v(z) < \bar{u}(z)$. Definindo $w_k = \max\{\bar{u}, V_{n_k}\}$ e também o levantamento harmônico de w_k , obtemos, pelo mesmo argumento usado anteriormente, uma subsequência (W_k) convergindo para uma função harmônica w que satisfaz $v \leq w \leq u$ em B e $v(y) = w(y) = u(y)$. Segue, pelo Princípio do Máximo, que $v = w$ em B , o que contradiz o definição de \bar{u} . Portanto, u é harmônica em Ω . \square

Observação 11. *O teorema 41 exhibe uma função harmônica que é uma possível solução do PD clássico: $\Delta u = 0$ em Ω , $u = \phi$ no $\partial\Omega$, a qual é chamada solução de Perron.*

De fato, se o Problema de Dirichlet é solúvel, então sua solução é idêntica à solução de Perron. Seja w a solução presumida. Então $w \in S_\phi$ e $w \leq u$. Além disso, para toda função $v \in S_\phi$, temos, pelo Princípio do Máximo, que $v \leq w$. Daí, $u \leq w$ e, portanto, $u = w$.

Definição 30. *Seja $\xi \in \partial\Omega$. Então $w = w_\xi \in C^0(\bar{\Omega})$ é chamada uma barreira de ξ relativa a Ω se:*

- i) w é superharmônica em Ω ;
- ii) $w > 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$ e $w(\xi) = 0$.

Observação 12. *Uma definição mais geral do conceito de barreira demanda apenas que a função superharmônica w seja contínua e positiva em Ω e que $w(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \xi$.*

Definição 31. *A função w é dita uma barreira local em $\xi \in \partial\Omega$ se existe uma vizinhança N de ξ tal que w satisfaz a definição de barreira dada acima em $\Omega \cap N$.*

Definição 32. *Um ponto do bordo de Ω é chamado regular com respeito ao operador Laplaciano se existe uma barreira nesse ponto.*

Lema 7. *Seja u uma função harmônica definida em Ω pelo Método de Perron. Se ξ é um ponto regular do bordo de Ω e ϕ é contínua no ponto ξ , então $u(x) \rightarrow \phi(\xi)$ quando $x \rightarrow \xi$.*

Demonstração. Escolha $\varepsilon > 0$ e ponha $M = \sup|\phi|$. Sendo ξ um ponto regular do bordo de Ω , existe uma barreira w em ξ . Devido a continuidade de ϕ e de $w(x) > 0$, $\forall x \in \partial\Omega \setminus \{\xi\}$, existem constantes δ e k tais que $|\phi(x) - \phi(\xi)| < \varepsilon$ sempre que $|x - \xi| < \delta$ e $kw(x) \geq 2M$ sempre que $|x - \xi| \geq \delta$. Agora considere as funções $\phi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$ e $\phi(\xi) - \varepsilon - kw(x)$. Note que:

- i) Se $|x - \xi| < \delta$, $\phi(x) \leq \phi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$, pois $\phi(x) < \varepsilon + \phi(\xi)$ e $kw \geq 0$;
- ii) Se $|x - \xi| \geq \delta$, $\phi(x) \leq \phi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$, pois $kw(x) \geq 2M$;

iii) Se $|x - \xi| < \delta$, $\phi(x) \geq \phi(\xi) - \varepsilon - kw(x)$, pois $\phi(x) > -\varepsilon - \phi(\xi)$;

iv) Se $|x - \xi| \geq \delta$, $\phi(x) \geq \phi(\xi) - \varepsilon - kw(x)$, pois $-kw \leq -2M$.

Logo, a função $\phi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$ é superfunção, pois $\phi(\xi) + \varepsilon + kw(x) \geq \phi(x)$ e a função $\phi(\xi) - \varepsilon - kw(x)$ é subfunção, pois $\phi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq \phi(x)$. Conseqüentemente, da definição de u e do fato de cada superfunção dominar cada subfunção, temos, em Ω ,

$$\phi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \phi(\xi) + \varepsilon + kw(x),$$

ou ainda,

$$|u(x) - \phi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Agora, dado $\varepsilon' = 2\varepsilon > 0$, mostremos que existe $\delta' > 0$ tal que se $|x - \xi| < \delta'$, então $|u(x) - \phi(\xi)| < \varepsilon'$. Observe que $\frac{\varepsilon'}{2k} > 0$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|x - \xi| < \delta_1$, então $|w(x)| < \frac{\varepsilon'}{2k}$. Seja $\delta' = \min\{\delta, \delta_1\} > 0$. Aí, se $|x - \xi| < \delta'$, então

$$|u(x) - \phi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x) < \frac{\varepsilon'}{2} + k\frac{\varepsilon'}{2k} = \varepsilon'.$$

Portanto, $u(x) \rightarrow \phi(\xi)$ quando $x \rightarrow \xi$. □

Teorema 42. *O Problema de Dirichlet clássico (*) em um domínio limitado é solúvel se, e somente se, os pontos do bordo de seu domínio são todos regulares.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dado $\xi \in \partial\Omega$, mostremos que ξ é ponto regular. Seja ϕ dada por $\phi(x) = |x - \xi|$. Note que ϕ é contínua em $\partial\Omega$. Além disso, a função que soluciona o PD em Ω com valores ϕ no bordo é uma barreira para ξ , pois é contínua, não negativa e $u(\xi) = \phi(\xi) = 0$ e u é harmônica. Conseqüentemente, ξ é um ponto regular, como todos os pontos do $\partial\Omega$.

(\Leftarrow) Pelo lema anterior, a função proveniente do Método de Perron resolve o PD. □

Agora, podemos nos perguntar para quais domínios Ω todos os pontos do bordo são regulares. Seja Ω um domínio limitado de classe C^2 . Então, para cada $\xi \in \partial\Omega$, existe uma bola exterior $B^\xi = B_d(p)$, onde $d = |p - \xi|$, bola tal que $\overline{B^\xi} \subset \Omega^c$ e $\overline{B^\xi} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$. Considere $w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \Gamma(x - p) - \Gamma(\xi - p).$$

Vejamos que w é uma barreira de ξ relativa a Ω . Para isso, note que w é harmônica em Ω . Além disso, ela é positiva em Ω , uma vez que $|p - \xi| < |x - \xi|$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, com $x \neq \xi$. Finalmente,

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \Gamma(\xi - p) - \Gamma(\xi - p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que todo domínio de classe C^2 é um domínio regular. Na verdade, vale um resultado mais geral que nos permite concluir que um domínio que contenha bicos "para fora" também é um domínio regular (ver [8]).

Agora, queremos estender o PD clássico para a equação de Poisson, que é dada no seguinte problema:

$$(**) = \begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = \Phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para isso, precisaremos introduzir a noção de Hölder continuidade e de potencial Newtoniano. Seja f uma função integrável em um domínio Ω . O *Potencial Newtoniano* de f é a função w definida em \mathbb{R}^n por:

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y)dy. \quad (5.26)$$

Definição 33. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e f uma função definida em um conjunto limitado D que contém x_0 . Se $0 < \alpha < 1$, dizemos que f é Hölder contínua com expoente α em x_0 se a quantidade, chamada de α -Hölder coeficiente de f em x_0 , $[f]_{\alpha, x_0} = \sup_D \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}$ é finita.*

É possível estender a noção de Hölder continuidade para um conjunto D qualquer, como segue:

Definição 34. *Dizemos que uma função f é uniformemente Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1]$ em D se a quantidade $[f]_{\alpha, D} = \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, é finita. Além disso, dizemos que f é localmente Hölder contínua com expoente α em D se f é uniformemente Hölder contínua com expoente α em subconjuntos compactos de D .*

A Hölder continuidade é bastante adequada para o estudo de EDP. A partir dela podemos ampliar a noção de espaços de funções diferenciáveis. Nesse sentido, cabe definir os Hölder espaços.

Definição 35. *Sejam Ω um conjunto aberto e k um inteiro não-negativo. Os Hölder espaços $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ e $C^{k, \alpha}(\Omega)$ são definidos como os subespaços de $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^k(\Omega)$, respectivamente, constituídos de funções cuja k -ésima derivada parcial é uniformemente Hölder contínua e localmente Hölder contínua, respectivamente.*

Observação 13. *Por convenção vamos escrever:*

- $C^{0, \alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega)$
- $C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) = C^\alpha(\bar{\Omega})$,

com $0 < \alpha < 1$, salvo indicação contrária. Além disso, escrevemos:

- $C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega)$
- $C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega})$.

Em seguida, apresentaremos alguns resultados de diferenciabilidade para o Potencial Newtoniano em domínios limitados, com o intuito de resolver o PD clássico para a equação de Poisson com as mesmas condições de contorno para as quais a equação de Laplace (42) é solúvel .

Lema 8. *Sejam f uma função limitada e integrável em Ω e w o Potencial Newtoniano de f . Então $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e para qualquer $x \in \Omega$ vale*

$$D_i w(x) = \int_{\Omega} D_i \Gamma(x-y) f(y) dy, \quad (5.27)$$

com $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Seja f uma função limitada e integrável em Ω e seja w seu potencial Newtoniano, isto é, $w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) dx$. Defina $v(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) f(y) dx$. A mostrar: $v = \frac{\partial}{\partial x_i} w$. Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $|\eta(t)| \leq 1$, $|\eta'(t)| \leq 2$, $\eta(t) = 0$ para $t \leq 1$ e $\eta(t) = 1$ para $t \geq 2$. Considere $\eta_{\varepsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\eta_{\varepsilon}(x) = \eta(\frac{|x-y|}{\varepsilon})$. Defina também $w_{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $w_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \eta_{\varepsilon}(y) f(y) dx$. Vejamos que $w_{\varepsilon} \rightarrow w$ uniformemente em Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} |w(x) - w_{\varepsilon}(x)| &= \left| \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) dy - \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \eta_{\varepsilon}(y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) (1 - \eta_{\varepsilon}(y)) dy \right|. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Uma vez que η_{ε} vale 1 fora de qualquer bola de raio 2ε e que $|\eta(t)| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} (5.28) &\leq \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \Gamma(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \sup_{\Omega} |f| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \left| \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| \right| dy \\ &= \sup_{\Omega} |f| \int_0^{2\varepsilon} \int_{\partial B_r(x)} |\ln |x-y|| ds_y dr \\ &= \sup_{\Omega} |f| \left| \int_0^{2\varepsilon} 2\pi r \ln r dr \right| \\ &= \sup_{\Omega} |f| \left| \int_0^{2\varepsilon} (\ln r) 2\pi r dr \right|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\varepsilon} r \ln r dr &= \frac{4\varepsilon^2 \ln 2\varepsilon}{2} - \frac{(2\varepsilon)^2}{4} \\ &= 2\varepsilon^2 \ln(2\varepsilon) - \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon^2(2 \ln(2\varepsilon) - 1), \end{aligned}$$

temos que:

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \sup_{\Omega} |f| 2\pi |\varepsilon^2(2 \ln(2\varepsilon) - 1)|.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que $|w(x) - w_\varepsilon(x)| \rightarrow 0$ e, como o lado direito não depende de x , segue que $w_\varepsilon(x) \rightarrow w(x)$ uniformemente. Agora, observe que $\frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} (\Gamma(x-y)\eta_\varepsilon)f(y)dx$, uma vez que $\Gamma\eta_\varepsilon$ é limitada em Ω . Finalmente, mostremos que $\frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon \rightarrow v$ uniformemente em Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon - v \right| &= \left| \int_{\Omega} (\Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y))f(y)dy - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)f(y)dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} f(y) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) + \Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon \right) dy - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)f(y)dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)(1-\eta_\varepsilon(y))dy + \int_{\Omega} f(y)\Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(y)dy \right|. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Novamente, por η_ε ser igual a 1 fora de uma bola de raio 2ε , segue que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon - v \right| \leq \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)dy + \int_{B_{2\varepsilon}(x) \setminus B_\varepsilon(x)} f(y)\Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(y)dy \right|. \quad (5.30)$$

Agora, como $|\eta'(t)| \leq 2$ temos que $|\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(y)| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ e da fórmula da co-área, segue que:

$$\begin{aligned}
 (5.30) &\leq \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) dy + \int_{B_{2\varepsilon}(x) \setminus B_\varepsilon(x)} f(y) \Gamma(x-y) \frac{2}{\varepsilon} dy \right| \\
 &= \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} f(y) \frac{1}{2\pi} |x-y|^{-2} (x_i - y_i) dx + \int_{B_{2\varepsilon}(x) \setminus B_\varepsilon(x)} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| \frac{2}{\varepsilon} dy \right| \\
 &\leq 2 \sup_{\Omega} |f| \left(\left| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{|x-y|} dy \right| + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x) \setminus B_\varepsilon(x)} \ln |x-y| dy \right| \right) \\
 &= 2 \sup_{\Omega} |f| \left(\left| \int_0^{2\varepsilon} \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{|x-y|} ds_y dr \right| + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left| \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \int_{S_r(x)} \ln |x-y| ds_y dr \right| \right) \\
 &= 2 \sup_{\Omega} |f| \left(\left| \int_0^{2\varepsilon} \frac{1}{r} 2\pi r dr \right| + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left| \int_\varepsilon^{2\varepsilon} 2\pi r \ln r dr \right| \right) \\
 &= 2 \sup_{\Omega} |f| \left(\left| 2\pi \int_0^{2\varepsilon} dr \right| + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left| 2\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} r \ln r dr \right| \right) \\
 &= 4\pi \sup_{\Omega} |f| \left(r \Big|_0^{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left(\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) \Big|_\varepsilon^{2\varepsilon} \right) \\
 &= 4\pi \sup_{\Omega} |f| \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \pi} \left(\frac{(2\varepsilon)^2 \ln(2\varepsilon)}{2} - \frac{(2\varepsilon)^2}{4} - \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right) \\
 &= 4 \sup_{\Omega} |f| \left(2\varepsilon + \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\varepsilon \ln(2\varepsilon) - \varepsilon \ln \varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \right). \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Assim, $4 \sup_{\Omega} |f| \left(2\varepsilon + \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\varepsilon \ln(2\varepsilon) - \varepsilon \ln \varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \right) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, como queríamos. Portanto, a igualdade (5.27) é válida. Além disso, note que w é de classe C^1 , pois v é contínua. \square

Lema 9. *Sejam Ω um domínio onde o Teorema do Divergente é válido, f uma função limitada e localmente Hölder contínua com expoente α em Ω e w o Potencial Newtoniano de f . Então $w \in C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ e, para qualquer $x \in \Omega$, vale*

$$D_{ij}w(x) = \int_{\Omega} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x))dy - f(x) \int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)ds_y, \tag{5.32}$$

com $i, j = 1, \dots, n$, onde v_j é a j -ésima coordenada do vetor normal.

Demonstração. Seja $w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y)dy$ o potencial Newtoniano de f . Defina

$$u(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(f(y) - f(x))dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma v_j(y)ds_y.$$

Considere $v = \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)$ e defina, para cada $\varepsilon > 0$,

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y)f(y)dy,$$

onde η_ε é como no lema anterior. Derivando v_ε com relação a j -ésima coordenada e aplicando o teorema do Divergente 5.1 para o campo $X = (\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y), 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y)f(y)dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) \right) f(y)dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) \right) (f(y) - f(x))dy + f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) \right) dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) \right) (f(y) - f(x))dy - f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)v_j(y)ds_y. \end{aligned}$$

Mostremos, agora, que $\frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, observe que:

$$\begin{aligned} |u(x) - \frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i} \Gamma(f(y) - f(x))dy - f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)v_j(y)ds_y \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)\eta_\varepsilon(y) \right) (f(y) - f(x))dy \right. \\ &\quad \left. + f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)v_j(y)ds(y) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)(f(y) - f(x))(1 - \eta_\varepsilon(y)) \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_\varepsilon(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{B_{2\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y)(f(y) - f(x))dy \right| + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_\varepsilon(y) dy \\ &\leq [f]_\alpha \int_{B_{2\varepsilon}(x)} |x-y|^\alpha \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \Gamma \right| dy + [f]_\alpha \int_{B_{2\varepsilon}(x) \setminus B_\varepsilon(x)} |x-y|^\alpha \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \right| \frac{2}{\varepsilon} dy \\ &\leq [f]_\alpha \left(\int_0^{2\varepsilon} \int_{B_r(x)} \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^2} ds_y dr + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{2|x-y|^\alpha}{\varepsilon|x-y|} dy \right) \\ &= [f]_\alpha \left(\int_0^{2\varepsilon} 2\pi r^{\alpha-1} dr + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} 2\pi r^\alpha dr \right) \\ &= [f]_\alpha \left(2\pi \frac{(2\varepsilon)^\alpha}{\alpha} + 2\pi \left(\frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \right) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Lema 10. *Seja Ω um domínio limitado e suponha que todo ponto do bordo de Ω é regular. Então, se f é uma função limitada, localmente Hölder contínua em Ω , o PD clássico $\Delta u = f$ em Ω , $u = \Phi$ em $\partial\Omega$, tem solução única para quaisquer valores ϕ no bordo.*

Demonstração. Vamos definir w como o Potencial Newtoniano de f e $v = u - w$. Daí, o problema $\Delta u = f$ em Ω , $u = \phi$ em $\partial\Omega$ é equivalente ao problema $\Delta v = 0$ em Ω , $v = \phi - w$ em $\partial\Omega$. Pelo teorema (42), segue a existência e a unicidade da solução do PD. \square

5.2 O Método da Continuidade e o PD para Operadores Lineares Elípticos

Nosso objetivo, agora, é chegar ao Método da Continuidade. Para isso, será necessário introduzir o conceito de espaço de Banach e o teorema do ponto fixo de Banach.

Definição 36. *Seja V um espaço vetorial normado. Se V é completo, isto é, se toda sequência (x_n) de Cauchy é convergente em V , então dizemos que V é um espaço de Banach.*

Exemplo 6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Então $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, munido da norma $|u|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = |u|_{k;\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k;\alpha;\Omega} = |u|_{k;\alpha} + [D^k u]_{\alpha;\Omega}$, onde $[D^k u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha;\Omega}$, é um espaço de Banach. Assim, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ temos*

$$|u|_{2,\alpha} = \sup_{\Omega} u + \max\left\{\sup_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|, \sup_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\right\} + \max\left\{\sup_{\Omega} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|, \sup_{\Omega} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|, \sup_{\Omega} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right\} \\ + \max\left\{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right]_{\alpha,\Omega}, \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{\alpha,\Omega}, \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]_{\alpha,\Omega}\right\}.$$

Definição 37. *Uma aplicação $T : V \rightarrow V$, onde V é um espaço vetorial normado, é dita uma contração se existe $\theta < 1$ tal que*

$$|Tx - Ty| \leq \theta|x - y|,$$

para todo $x, y \in V$.

Teorema 43. *Seja $T : B \rightarrow B$ uma contração, com B um espaço de Banach. Então, T admite um único ponto fixo, isto é, existe uma única solução $x \in B$ da equação $Tx = x$.*

Demonstração. Considere $x_0 \in B$. Defina a sequência $(x_n) \subset B$ por $x_n = T^n x_0$, com $n = 1, 2, \dots$. Então, se $n \geq m$, temos, pela desigualdade triangular e pela definição de contração, que:

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{j=m+1}^n |x_j - x_{j-1}| \\ = \sum_{j=m+1}^n |T^{j-1}x_1 - T^{j-1}x_0| \\ \leq \sum_{j=m+1}^n \theta^{j-1} |x_1 - x_0| \\ \leq \frac{|x_1 - x_0| \theta^m}{1 - \theta}.$$

Dessa forma, (x_n) é uma sequência de Cauchy e, sendo B completo, (x_n) converge para um elemento $x \in B$. Além disso, T é contínua e, conseqüentemente, temos que:

$$\begin{aligned} Tx &= \lim Tx_n \\ &= \lim x_{n+1} \\ &= x, \end{aligned}$$

ou seja, x é um ponto fixo de T . Agora, suponha que x e y são pontos fixos de T . Pela definição de contração temos que:

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &\leq \theta|x - y| \Rightarrow |x - y| \leq \theta|x - y| \\ &\Rightarrow |x - y| = 0 \\ &\Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

ou seja, o ponto fixo é único. □

Definição 38. *Sejam V e W espaços vetoriais normados. Uma aplicação linear $T : V \rightarrow W$ é limitada se a quantidade*

$$|T| = \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{|Tx|_W}{|x|_V}$$

é finita.

Teorema 44 (Método da Continuidade). *Sejam B um espaço de Banach, V um espaço vetorial normado e $L_0, L_1 : B \rightarrow V$ operadores lineares limitados. Para cada $t \in [0, 1]$, considere o operador $L_t = (1 - t)L_0 + tL_1$ e suponha que existe uma constante c tal que*

$$|x|_B \leq c|L_t x|_V, \quad (5.33)$$

para $t \in [0, 1]$. Então o operador L_1 é sobrejetivo se, e somente se, o operador L_0 é sobrejetivo.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que o operador L_s é sobrejetivo para algum $s \in [0, 1]$. Por $|x|_B \leq c|L_s x|_V$, temos que L_s é injetivo. Conseqüentemente, existe $L_s^{-1} : V \rightarrow L_s(B)$. Agora, note que, para $t \in [0, 1]$ e $y \in V$, a equação $L_t x = y$ equivale a:

$$\begin{aligned} L_t x = y &\Leftrightarrow L_s x + L_t x = y + L_s x \\ &\Leftrightarrow L_s x = y + (L_s - L_t)x \\ &\Leftrightarrow L_s x = y + [(1 - s)L_0 + sL_1 - (1 - t)L_0 - tL_1] \\ &\Leftrightarrow L_s x = y + (t - s)L_0 - (t - s)L_1. \end{aligned}$$

Aplicando L_s^{-1} em ambos os lados da última igualdade, obtemos a seguinte equivalência:

$$L_s x = y + (t - s)L_0 - (t - s)L_1 \Leftrightarrow x = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x.$$

Defina $T : B \rightarrow B$ por $Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$. Então existe $\delta = \frac{1}{2c(|L_0| + |L_1|)} > 0$ tal que se $|s - t| < \delta$, então para $u, v \in B$ quaisquer

$$\begin{aligned} |Tv - Tu| &= |L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)v - L_s^{-1}y - (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)u| \\ &= |(t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)(v - u)| \\ &\leq |t-s||L_s^{-1}||L_0 + L_1||v - u| \\ &\leq \delta|L_s^{-1}||L_0 + L_1||v - u| \\ &= \frac{1}{2c(|L_0| + |L_1|)}|L_s^{-1}||L_0 + L_1||v - u| \\ &< \frac{1}{2}|v - u|, \end{aligned}$$

ou seja, T é uma contração e, conseqüentemente a aplicação é sobrejetiva para todo $t \in [0, 1]$ satisfazendo $|t-s| < \delta$. Dividindo o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos de comprimento menor do que δ vemos que a aplicação L_t é sobrejetiva para qualquer $t \in [0, 1]$ desde que ela seja sobrejetiva para algum $t \in [0, 1]$ fixado. Em particular, isso vale para $t = 0$ ou $t = 1$, como queríamos. \square

A ideia agora é estender a existência de solução de PD clássico para o seguinte problema

$$\begin{cases} Lu = f, & u \text{ em } \Omega \\ u = \phi, & u \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L é um operador linear elíptico (definição 21) e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado. O processo para obter a solução desse problema com coeficientes variáveis é reduzi-la a coeficientes constantes através do Método da Continuidade. Assim como o operador laplaciano, L também satisfaz o Princípio do Máximo, como segue:

Teorema 45. *Seja L um operador linear elíptico em um domínio limitado Ω . Suponha que $Lu \geq 0$ (≤ 0) em Ω , $c = 0$ em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de u em $\bar{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, isto é, $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ ($\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$).*

Demonstração. Vejamos que, inicialmente, que se $Lu > 0$ em Ω , então u não pode atingir máximo em um ponto interior de $\bar{\Omega}$. Caso atingisse, em um ponto x_0 teríamos $\nabla u(x_0) = 0$ e a matriz $\left[\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u(x_0)\right]$ não positiva. Mas, a matriz dos coeficientes a^{ij} , $[a^{ij}(x_0)]$ é positiva, uma vez que L é um operador elíptico. Conseqüentemente, $Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u(x_0) \leq 0$. Absurdo! Agora, por hipótese, $\frac{|b^i|}{\lambda} \leq b_0$, com b_0 constante. Então, desde que $a^{11} \geq \lambda$, existe uma constante suficientemente grande γ para a qual

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{\gamma}^{11} b^1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Conseqüentemente, para qualquer $\varepsilon > 0$, vale

$$L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$$

em Ω e, pelo provado acima, obtemos

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u,$$

como queríamos. □

Mas, antes de apresentar o principal teorema (teorema 48), vamos apresentar dois resultados que serão necessários em sua prova.

Teorema 46. *Seja $Lu \geq f$ ($= f$) em um domínio limitado Ω , onde L é um operador linear elíptico, com constante $c \leq 0$, e $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Então*

$$\sup_{\Omega} u (|u|) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ (|u|) + C \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} \left(\frac{|f|}{\lambda} \right), \quad (5.34)$$

onde C é uma constante dependendo apenas do diâmetro de Ω e $\beta = \frac{|b|}{\lambda}$. Em particular, se Ω está entre dois planos paralelos distantes uma quantidade d um do outro, então a desigualdade acima é satisfeita com $C = \exp^{(\beta+1)d} - 1$.

Teorema 47. *Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{R}^n e seja $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ uma solução do problema $Lu = f$ em Ω , onde $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ e os coeficientes de L satisfazem, para constantes positivas λ e Λ ,*

$$a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega}, |c|_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda.$$

Agora, seja $\phi(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e suponha que $u = \phi$ em $\partial\Omega$. Então,

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C (|u|_{0,\alpha;\Omega} + |\phi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}), \quad (5.35)$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

A prova destes dois resultados se encontra no livro *Elliptical Partial Differential Equations of Second Order* [8].

Teorema 48. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{2,\alpha}$ e L um operador estritamente elíptico, cujo termo $c \leq 0$. Se o problema de Dirichlet para a equação de Poisson, $\Delta u = f$ em Ω , $u = \phi$ em $\partial\Omega$, tem uma única solução de classe $C^{2,\alpha}$ em $\bar{\Omega}$, então o problema*

$$Lu = f \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \partial\Omega \quad (5.36)$$

também tem uma única solução de classe $C^{2,\alpha}$ em $\bar{\Omega}$ para toda f e para toda ϕ .

Demonstração. Por L ser estritamente elíptico, podemos assumir que os coeficientes de L satisfazem as condições

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (5.37)$$

e

$$|a_{ij}|_{0;\alpha}, |b^i|_{0;\alpha}, |c|_{0;\alpha} \leq \Lambda, \quad (5.38)$$

com constantes λ, Λ . Note que é suficiente restringir o bordo a zero, uma vez que o problema $Lu = f$ em Ω , $u = \phi$ em $\partial\Omega$ é equivalente a $Lv = f - L\phi \equiv f'$ em Ω , $v = u - \phi = 0$ em $\partial\Omega$. Consideremos, então, a família de equações

$$L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u = f, 0 \leq t \leq 1. \quad (5.39)$$

Observemos que $L_0 = \Delta$ e $L_1 = L$ e os coeficientes de L_t satisfazem as condições (5.37) e (5.38) com $\lambda_t = \min\{1, \lambda\}$ e $\Lambda_t = \max\{1, \Lambda\}$. O operador L_t pode ser considerado um operador linear limitado do espaço de Banach $B_1 = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ no espaço de Banach $B_2 = C^\alpha(\bar{\Omega})$. Dessa forma, a solubilidade do problema de Dirichlet $L_t u = f$ em Ω , $u = 0$ em $\partial\Omega$, para $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ arbitrária, é equivalente a invertibilidade da aplicação L_t , pois para cada $L_t u$ queremos encontrar a função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Denotemos por u_t a solução deste problema. Pelo teorema (46), temos:

$$|u_t|_0 \leq C \sup_{\Omega} |f| \leq C|f|_{0,\alpha},$$

onde a constante C depende apenas de λ, Λ e do diâmetro do domínio Ω . Aplicando o teorema (47), obtemos:

$$|u_t|_{2,\alpha} \leq C|f|_{0,\alpha},$$

isto é,

$$|u|_{B_1} \leq C|L_t u|_{B_2},$$

onde a constante C independe de t . Assim, o Método da Continuidade é aplicável e o resultado segue. \square