UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rodrigo dos Santos Pacheco

PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA O P-LAPLACIANO COM DISTINTAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Santa Maria, RS
2019

Rodrigo dos Santos Pacheco

PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA O P-LAPLACIANO COM DISTINTAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Celene Buriol

Santa Maria, RS

2019

Pacheco, Rodrigo
PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA O P-LAPLACIANO COM DISTINTAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA / Rodrigo Pacheco.- 2019.
77 p.; 30 cm

Orientadora: Celene Buriol
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Equações Elípticas Não Lineares 2. Espectro do p Laplaciano 3. p-Laplaciano 4. Princípio de Ljusternik Schnirelman 5. Métodos Variacionais I. Buriol, Celene II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Rodrigo dos Santos Pacheco

PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA O P-LAPLACIANO COM DISTINTAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 25 de julho de 2019:

Celene Buriol

Celene Buriol, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Leonardo Prange Bonorino

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

A minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço, principalmente, a Deus. Por me abençoar e iluminar neste caminho que tenho trilhado.

Ao meu pai Horizonte e à minha mãe Nilda, por todo amor, apoio e incentivo que me deram desde que me conheço por gente.

Ao meu irmão Arthur, o meu muito obrigado. Levou tempo mas hoje posso dizer que tu não é só irmão, mas sim o meu melhor amigo.

À minha namorada Carine, por todos esses anos me apoiando em todas as decisões, sendo também mais do que uma namorada, mas uma melhor amiga.

Aos meus amigos que conviveram comigo nesses últimos anos, em especial, ao Anderson, Lucas, João e ao Michel por toda a parceria.

Ao professor Juliano, a quem devo imensamente pela amizade e por me guiar e mostrar como a matemática pode ser bela.

Aos membros da banca, por terem aceitado avaliar esta dissertação, e meu agradecimento especial à professora Celene Buriol, por todo carinho e por ter me aceitado como seu orientando de mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

É necessário sempre acreditar que o sonho é possível, que o céu é o limite e você, truta, é imbatível.

(Racionais MC's)

RESUMO

PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA O P-LAPLACIANO COM DISTINTAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

AUTOR: Rodrigo dos Santos Pacheco

ORIENTADORA: Celene Buriol

O objetivo deste trabalho é, através do princípio de Ljusternik-Schnirelman, obter uma sequência de autovalores para o p-Laplaciano com as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin-Steklov, este último sendo uma combinação das condições de contorno de Robin com as condições de Steklov. Além disso, apresentamos uma caracterização para a regularidade das autofunções associadas e analisamos o espectro dos problemas em questão, em especial, exploraremos o primeiro autovalor dos mesmos.
Palavras-Chave: Equações Elípticas Não Lineares, Espectro do p-Laplaciano, p-Laplaciano, Princípio de Ljusternik-Schnirelman, Métodos Variacionais.

ABSTRACT

EIGENVALUES PROBLEMS FOR THE P-LAPLACIAN WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

AUTHOR: Rodrigo dos Santos Pacheco

ADVISOR: Celene Buriol

The goal of this work is to obtain, through the Ljusternik-Schnirelman principle, a sequence of eigenvalues for p-Laplacian with Dirichlet, Neumann and Robin-Steklov boundary conditions, the last one which is a combination of the Robin boundary conditions with Steklov boundary conditions. Moreover, we present a characterization for the regularity of the eigenfunctions and make an analysis of the spectrum of problems considered, especially, we will explore the first eigenvalue of them.

Keywords: Nonlinear Elliptic Equations, p-Laplacian Spectrum, p-Laplacian, Ljusternik-Schnirelman Principle, Variational Methods.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $|\nabla u| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$;
- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω;
- $u \not\equiv 0$ indica que existe um conjunto A, de medida positiva, com $u(x) \neq 0$, para todo $x \in A$;
- $supp(u) = \overline{\{u \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}$;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$;
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$;
- $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ e $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla u$;
- $\|u\| = \left[\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)dx\right]^{\frac{1}{p}}$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$;
- $\|u\|_a = \left[\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega a(x)|u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$;
- $\|u\|_\beta = \left[\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|u|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$;
- $\|u\|_p = \left[\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ e $\|u\|_{p,\partial} = \left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$;
- $\|u\|_\infty = \inf\{a \geq 0;\ |\{x \in \Omega;\ |u(x)| > a\}| = 0\}$;
- $\|f\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \displaystyle\max_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha f\|_\infty$;
- $[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \displaystyle\sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\forall x \neq y$;
- $\|f\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \displaystyle\max_{|\alpha|\leq 1}[D^\alpha f]_{C^\alpha(\Omega)}$;
- $\|T\|^* = \sup\{|T(x)|;\ \|x\| = 1\}$;
- X^* é o espaço dual de $(X, \|\cdot\|)$, munido da norma $\|\cdot\|^*$;
- $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ é continuamente k vezes diferenciável$\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ é continuamente infinitamente diferenciável$\}$;
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega);\ supp(u)$ é compacto$\}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $\|u\|_p < \infty\}$;
- $L^p(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \to \mathbb{R};\ u$ é σ-mensurável e $\|u\|_{p,\partial} < \infty\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $\|u\|_\infty < \infty\}$;

- $L^\infty(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \to \mathbb{R};\ u$ é σ-mensurável e $\|u\|_\infty < \infty\}$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq 1\}$;
- $W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u\chi_K \in W^{1,p}(\Omega),$ para cada compacto $K \subset \Omega\}$;
- $W^{1,p}_0(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u = 0$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço$\}$;
- $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^1(\overline{\Omega});\ D^\nu f \in C^\alpha(\Omega),\ \forall\ |\nu| \leq 1\}$;
- q.t.p. significa quase todo ponto, s.p.g. significa sem perda de generalidade;
- $u_n \to u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 \Leftrightarrow u_n$ converge fortemente para u em X;
- $u_n \rightharpoonup u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(u_n) - f(u)| = 0,\ \forall f \in X^* \Leftrightarrow u_n$ converge fracamente para u em X.

Sumário

1 Introdução

Problemas de otimização aparecem de forma extensiva na história da Matemática e um dos mais famosos foi resolvido no final do século XVII, por Newton e Leibniz: o problema da Braquistócrona, isto é, dada uma partícula e dois pontos, qual é a curva ligada por tais pontos sobre a qual tal partícula desliza, considerando apenas a gravidade como força atuante, livre de atrito, em tempo mínimo.

Tais problemas ganharam rigor a partir do século XVIII, sobre o estudo das equações diferenciais. Desde então, surgiram alguns problemas, hoje clássicos, como as equações da onda e do calor.

Um operador comum a tais equações é o Laplaciano. Este operador não é só de interesse físico, como aparece em outras áreas da matemática, como por exemplo, na Geometria Diferencial. Uma extensão natural do Laplaciano é o p-Laplaciano. Este possui também várias aplicações físicas, como na glaciologia, quando $p \in (1, \frac{4}{3}]$, em meios porosos, para $p = \frac{3}{2}$, ou na dinâmica dos fluídos, onde a tensão de cisalhamento τ é dada pela fórmula:

$$\tau = r(x) \triangle_p u(x).$$

Neste caso, se $p = 2$, o fluído é dito Newtoniano. Se $p < 2$, tal fluído é pseudoplástico e se $p > 2$, o fluído é dilatante. Para mais detalhes, recomendamos [4].

Um caminho natural para o entendimento do p-Laplaciano é englobar os resultados clássicos da teoria elíptica do Laplaciano. O objetivo desta dissertação é garantir a existência de uma sequência de autovalores para o p-Laplaciano para distintas condições de fronteira. Para isto, utilizaremos a teoria de Ljusternik-Schnirelman, que pode ser encontrada com maiores detalhes em [9], [19], [41], [42] e referências correspondentes.

No trabalho desenvolvido, consideramos os seguintes problemas de autovalor:

- Problema de Dirichlet:

$$D(\Omega) : \begin{cases} -\triangle_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Problema de Neumann:

$$N(\Omega):\begin{cases} -\triangle_p u = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \partial\Omega.\end{cases}$$

- Problema de Robin-Steklov:

$$RS(\Omega):\begin{cases} -\triangle_p u = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega,\\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta |u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \partial\Omega.\end{cases}$$

Nos três problemas acima, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe $C^{0,1}$ (veja Definição 6.1.3), $\frac{\partial}{\partial \eta}$ denota a derivada normal exterior com respeito a $\partial\Omega$, $\triangle_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, com $p > 1$, e o parâmetro β, em $RS(\Omega)$, pertence a $L^\infty(\partial\Omega)$, com $\overline{\beta} = \inf_{s\in\partial\Omega} \beta(s) > 0$.

Denotaremos o princípio de Ljusternik-Schnirelman como princípio L-S. A vantagem de trabalhar com este é a possibilidade de englobar esses problemas em um único problema de autovalor.

A bibliografia básica deste trabalho é [26] para os problemas de Dirichlet e Neumann e [11] para o problema de Robin-Steklov, que combina os problemas com condição de fronteira de Robin com as condições de fronteira de Steklov, estudados em [26]. Esta dissertação foi estruturada da seguinte forma: Inicialmente, damos condições para aplicar o princípio L-S em funcionais adequados, onde englobamos a existência das sequências L-S de autovalores para os três problemas acima em casos particulares desses funcionais.

Após isto, apresentamos uma caracterização para a solução fraca dos três problemas de fronteira. Em seguida, mostramos que as autofunções associadas aos autovalores desse problema são essencialmente limitadas, de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, e sob certas hipóteses, as autofunções serão de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Prosseguindo, caracterizamos o primeiro autovalor desses problemas, provando que eles são simples (isto é, quaisquer duas autofunções associadas ao primeiro autovalor são linearmente dependentes), suas autofunções associadas não mudam de sinal em Ω e quaisquer autofunções associadas a autovalores distintos do primeiro devem mudar de sinal no domínio.

Logo após, mostramos que o espectro de $D(\Omega)$, $N(\Omega)$ e $RS(\Omega)$ é fechado. Utilizando este fato, provamos que o primeiro autovalor para esses problemas é isolado. Este roteiro é seguido no capítulo 3, para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, e no capítulo 4, que é destinado ao problema $RS(\Omega)$.

Por fim, listamos resultados que foram utilizados ao longo da dissertação, como algumas desigualdades e teoremas de imersão, bem como a regra da cadeia no espaço $W^{1,p}(\Omega)$ e resultados sobre domínios nodais, que foram essenciais na demonstração de que o espectro dos problemas $D(\Omega)$, $N(\Omega)$ e $RS(\Omega)$ é isolado.

2 O princípio de Ljusternik-Schnirelman

Observamos aqui que mais detalhes sobre a teoria de Ljusternik-Schnirelman são encontrados em Browder [9] ou Zeidler [42] (seção 44.5 e observação 44.23). Tal princípio, que nos garantirá a existência de uma sequência de autovalores para os problemas de Dirichlet, Neumann e Robin-Steklov, se baseia em resultados clássicos da teoria dos pontos críticos, como a condição de Palais-Smale e o Teorema do Passo da Montanha.

Para iniciarmos, sejam X um espaço de Banach real, reflexivo e $F, G : X \to \mathbb{R}$. Consideremos o problema de autovalor:

$$F'(u) = \mu G'(u), \tag{1}$$

onde $u \in S_G = \{u \in X; G(u) = 1\}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Em Zeidler [42], temos que (u, μ) é solução de (1) se, e somente se, u é ponto crítico de F com respeito a S_G. Assumimos que:

(H1) $F, G \in C^1(X, \mathbb{R})$ são funcionais pares, com $F(0) = 0 = G(0)$;

(H2) F' é fortemente contínua, isto é,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \Rightarrow F'(u_n) \to F'(u) \text{ em } X^*,$$

e se $u \in E(S_G)$, que representa a envoltória convexa de S_G, então $F(u) = 0$;

(H3) G' é limitada e satisfaz:

$$(u_n \rightharpoonup u,\ G'(u_n) \rightharpoonup v \text{ e } \langle G'(u_n), u_n \rangle \to \langle v, u \rangle) \Rightarrow u_n \to u \text{ em } X;$$

(H4) O conjunto de nível S_G é limitado. Além disso, se $u \neq 0$ em X, então

$$\langle G'(u), u \rangle > 0,\ \lim_{t \to +\infty} G(tu) = +\infty \text{ e } \inf_{u \in S_G} \langle G'(u), u \rangle > 0.$$

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_n$ como a classe de todos subconjuntos compactos e simétricos K de S_G, de modo que $F(u) > 0$ em K e $\gamma(K) \geq n$, onde $\gamma(K)$ é o Gênero de Krasnosel'skii, dado por

$$\gamma(K) = \inf\{j \in \mathbb{N};\ \exists\ h : K \to \mathbb{R}^j \setminus \{0\}, \text{com } h \text{ contínua e ímpar}\}.$$

Consideremos

$$a_n = \begin{cases} \sup\limits_{H \in \mathbb{A}_n} \inf\limits_{u \in H} F(u), & \text{se } \mathbb{A}_n \neq \emptyset, \\ 0, & \text{se } \mathbb{A}_n = \emptyset, \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\chi = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N};\ a_n > 0\}, & \text{se } a_1 > 0, \\ 0, & \text{se } a_1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Nessas hipóteses, enunciamos o princípio L-S.

Teorema 1: Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $F, G : X \to \mathbb{R}$ cumprindo as hipóteses **(H1)-(H4)**. Então valem as seguintes afirmações:

(i) Se $a_n > 0$, então (1) possui um par $-u_n, u_n$ de autovetores associados ao autovalor $\mu_n \neq 0$, de modo que $F(u_n) = a_n$;

(ii) Se $\chi = \infty$, então (1) tem infinitos pares $-u, u$, cada par associado a autovalores diferentes de zero;

(iii) $\infty > a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ e $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$;

(iv) Seja $\chi = \infty$. Assim também que se $u \in E(S_G)$ e $F(u) = 0$, então $\langle F'(u), u\rangle = 0$. Com isso, existe uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distintos autovalores de (1), tal que $\mu_n \to 0$ quando $n \to \infty$;

(v) Se, para $u \in E(S_G)$, $F(u) = 0$, temos que $u = 0$, então $\chi = \infty$ e existe uma sequência de autopares $((u_n, \mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de (1) tais que $u_n \rightharpoonup 0$, $\mu_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e $\mu_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Veja em Browder [9] ou Zeidler [42]. ■

A ideia central desta primeira parte é utilizar o Teorema 1 em funcionais F e G adequados, tais que a existência de autovalores para os problemas $D(\Omega)$, $N(\Omega)$ e $RS(\Omega)$ sejam casos particulares da existência da sequência de autovalores obtida para esses funcionais mais gerais.

Para darmos continuidade ao trabalho, sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, X um subespaço fechado de $W^{1,p}(\Omega)$, com $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq X \subseteq W^{1,p}(\Omega)$. Esta escolha do espaço X é de forma que inclua todos os espaços que buscamos autofunções, ou seja, espaços atrelados aos três problemas de fronteira anteriormente citados. A norma em X é a induzida pela norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\| = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos, em X, os funcionais

$$F(u) = \int_\Omega a|u|^p dx + \int_{\partial\Omega} b|u|^p ds, \tag{4}$$

e

$$G(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)dx + \int_{\partial\Omega} c|u|^p ds, \tag{5}$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$ e $b, c \in L^\infty(\partial\Omega)$ com $a > 0$ e $b, c \geq 0$ q.t.p. em Ω. Para facilitar a notação, definimos

$$A = \frac{1}{p}F^{'} \text{ e } B = \frac{1}{p}G^{'},$$

onde, para $u, v \in X$,

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx + \int_{\partial\Omega} b|u|^{p-2}uvds \tag{6}$$

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx + \int_{\partial\Omega} c|u|^{p-2}uvds. \tag{7}$$

Notamos que

$$F'(u) = \mu G'(u) \Leftrightarrow Au = \mu Bu, \text{ com } G(u) = 1.$$

Assumindo a validade da última igualdade, observamos que, para cada $v \in X$,

$$\int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx + \int_{\partial\Omega} b|u|^{p-2}uvds = \mu L, \tag{8}$$

onde $L = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx + \int_{\partial\Omega} c|u|^{p-2}uvds\right)$. No que segue, mostraremos que F, G cumprem as condições **(H1)-(H4)**.

Proposição 1: Se $F, G : X \to \mathbb{R}$ são os funcionais definidos como em (4) e (5). Então F, G cumprem as condições **(H1)-(H4)**.

Prova: **(H1)** É imediato que F, G são funcionais pares, com $F(0) = 0 = G(0)$. Para provarmos que F, G são de classe C^1, mostraremos inicialmente que $\varphi : X \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

também o é. Para isto, definimos $F_1 : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $F_1(x, y) = p \int_0^{|y|} s^{p-1} ds$, para todo $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Assim, para $0 < h < 1$ e $u, v \in X$,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u + hv) - \varphi(u)}{h} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u + h\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{h} dx \\ &= \int_\Omega \frac{F_1(x, \nabla u + h\nabla v) - F_1(x, \nabla u)}{h} dx. \end{aligned}$$

Ainda, dado $x \in \Omega$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|F_1(x, \nabla u + h\nabla v) - F_1(x, \nabla u)|}{|h|} &\leq p|\nabla u + \alpha h\nabla v|^{p-1}|\nabla v| \\ &\leq p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|. \end{aligned}$$

Disto, da desigualdade de Hölder, do expoente conjugado de p ser $\frac{p}{p-1}$ e do Lema 6.1.3,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|F_1(x, \nabla u + h\nabla v) - F_1(x, \nabla u)|}{|h|} dx &\leq p \int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| dx \\ &\leq p\| |\nabla u| + |\nabla v| \|_p^{p-1} \|\nabla v\|_p \\ &\leq K(p)p(\|u\|^{p-1} + \|v\|^{p-1})\|v\|. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\frac{|F_1(x, \nabla u + h\nabla v) - F_1(x, \nabla u)|}{|h|} \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema 6.2.1, segue que

$$\lim_{h \to 0^+} \left[\frac{F_1(x, \nabla u + h\nabla v) - F_1(x, \nabla u)}{h} \right] = p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 6.1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\varphi(u+hv)-\varphi(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+}\int_\Omega \frac{F_1(x,\nabla u+h\nabla v)-F_1(x,\nabla u)}{h}dx \\
&= \int_\Omega \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{F_1(x,\nabla u+h\nabla v)-F_1(x,\nabla u)}{h}\right]dx \\
&= p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla dx.
\end{aligned}$$

De forma análoga, com $-1<h<0$, temos

$$\lim_{h\to 0^-}\left[\frac{\varphi(u+hv)-\varphi(u)}{h}\right]=p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi(u+hv)-\varphi(u)}{h}\right]=p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx.$$

Consideremos agora, para cada $u\in X$ fixado, o funcional $T_u: X\to\mathbb{R}$, dado por $T_u(v)= p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx$, para todo $v\in X$. Afirmamos que T_u é linear e limitado.
Com efeito, a linearidade é consequência da linearidade do operador ∇. Da desigualdade de Hölder, segue que, para todo $v\in X$,

$$\begin{aligned}
|T_u(v)| &\le p\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|dx \\
&\le p|||\nabla u|||_p^{p-1}|||\nabla v|||_p \\
&\le p\|u\|^{p-1}\|v\|.
\end{aligned}$$

Desta forma, T_u é limitado. Logo, φ é diferenciável a Gateaux, com derivada de Gateaux neste ponto dada por $\varphi'(u)=T_u$. Por fim, mostremos que $\varphi': X\to X^*$, dado por $\varphi'(u)=T_u$, é um operador contínuo. Para isso, sejam $(u_k)\subset X$ e $u\in X$, com $u_k\to u$ em $(X,\|.\|)$. Consideremos, agora, $\psi: X\to\left[L^{p'}(\Omega)\right]^n$, definido por

$$\psi(u)=|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \forall\ u\in X, \tag{9}$$

onde p' é o expoente conjugado de p, e $Y=\left[L^{p'}(\Omega)\right]^n$ é munido da norma

$$|||f|||_Y=\left[\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{p'}^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}},\ \forall\ f=(f_1,\cdots,f_n)\in Y.$$

Por $u \in X$, temos que ψ está bem definido, pois $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega)$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Notamos agora que $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ é limitado, pois, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \|\psi_i(u)\|_{p'}^{p'} &= \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p'} dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} dx \\ &\leq \|u\|^p. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$|||\psi(u)|||_Y^{p'} = \sum_{i=1}^n \|\psi_i(u)\|_{p'}^{p'} \leq n\|u\|^p.$$

Ainda, ψ é contínuo, pois, do Lema 6.1.3 e da equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$, segue que

$$\begin{aligned} \|\psi(u_k) - \psi(u)\|_{p'} &= \left(\int_\Omega |\psi(u_k) - \psi(u)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n |\psi_i(u_k) - \psi_i(u)| \right]^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K(p')^{\frac{1}{p'}} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\psi_i(u_k) - \psi_i(u)|^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &= C_1 \left[\sum_{i=1}^n \|\psi_i(u_k) - \psi_i(u)\|_{p'}^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= C_1 |||\psi(u_k) - \psi(u)|||_Y, \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |||\psi(u_k) - \psi(u)|||_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\psi_i(u_k) - \psi_i(u)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left\{ \int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^n |\psi_i(u_k) - \psi_i(u)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \tilde{C}_2 \left(\int_\Omega |\psi(u_k) - \psi(u)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \tilde{C}_2 \|\psi(u_k) - \psi(u)\|_{p'}, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Disto, existem constantes $\overline{a}, \overline{b} > 0$ tais que

$$\overline{b}\|f\|_{p'}^{p'} \leq |||f|||_{Y}^{p'} \leq \overline{a}\|f\|_{p'}^{p'}. \tag{10}$$

Consideremos, agora, os seguintes casos:

Caso 1: $2 < p < \infty$.

Por $u, v \in X$, pelo Lema 6.1.5 **(i)**, pela desigualdade de Hölder e por (10), observando que o expoente conjugado de $p-1$ é $\frac{p-1}{p-2}$ temos, portanto,

$$\begin{aligned}
|||\psi(u) - \psi(v)|||_{Y}^{p'} &\leq \overline{a}\int_{\Omega} |\psi(u) - \psi(v)|^{p'} dx \\
&\leq \overline{a}A_1^{p'} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p'}(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)} \\
&= K_1 \int_{\Omega} (|\nabla u - \nabla v|^{p})^{\frac{1}{p-1}} \left[(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} dx \\
&\leq K_1\|\nabla u - \nabla v\|_{p}^{p'} \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{p}^{p'(p-2)} \\
&\leq K_1\|\nabla u - \nabla v\|_{p}^{p'}(\|\nabla u\|_{p} + \|\nabla v\|_{p})^{p'(p-2)} \\
&\leq K_2\|u - v\|^{p'}(\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{p'(p-2)}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$|||\psi(u) - \psi(v)|||_{Y} \leq K_3\|u - v\|(\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{(p-2)}, \tag{11}$$

onde a constante $K_3 > 0$ é independende de u e v.

Caso 2: $1 < p \leq 2$.

Neste caso, se $u, v \in X$, pelo Lema 6.1.5 **(ii)**, temos

$$\begin{aligned}
|||\psi(u) - \psi(v)|||_{Y}^{p'} &\leq \overline{a}\int_{\Omega} |\psi(u) - \psi(v)|^{p'} dx \\
&\leq \overline{a}A_2^{p'} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)} dx \\
&= K_4 \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p} dx \\
&\leq K_4\|u - v\|^{p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|||\psi(u) - \psi(v)|||_{Y} \leq K_5\|u - v\|^{p-1}, \tag{12}$$

onde $K_5 > 0$ é uma constante independente de u e v. De (11) e (12) temos que ψ é contínuo. Por fim, considerando a desigualdade de Hölder e (10),

$$\begin{aligned} |T_{u_k}(v) - T_u(v)| &\leq p\int_\Omega |\psi(u_k) - \psi(u)||\nabla v| dx \\ &\leq p\|\psi(u_k) - \psi(u)\|_{p'} \|\nabla v\|_p \\ &\leq pK\| |\psi(u_k) - \psi(u)| \|_Y \|\nabla v\|_p \\ &\leq pK\| |\psi(u_k) - \psi(u)| \|_Y \|v\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\varphi'(u_k) - \varphi'(u)\|^* &= \sup\{|\varphi'(u_k)(v) - \varphi'(u)(v)|;\ v \in X \text{ e } \|v\| = 1\} \\ &= \sup\{|T_{u_k}(v) - T_u(v)|;\ v \in X \text{ e } \|v\| = 1\} \\ &\leq pK\| |\psi(u_k) - \psi(u)| \|_Y. \end{aligned}$$

Por ψ ser contínuo, temos que $\psi(u_k) \to \psi(u)$ quando $k \to \infty$, e assim, $\varphi'(u_k) \to \varphi'(u)$ quando $k \to \infty$, em $(X^*, \|\cdot\|^*)$. Com isto, φ' é contínuo, e assim, φ é de classe C^1. Seja agora $\phi(u) = \displaystyle\int_\Omega a|u|^p dx$. Provemos que ϕ é de classe C^1, com derivada de Gateaux dada por

$$\phi^{'}(u)(v) = p\int_\Omega a|u|^{p-2}uv dx,\ \forall\ u, v \in X.$$

De fato, para $0 < h < 1$ e $u, v \in X$, temos que

$$\frac{\phi(u+hv) - \phi(u)}{h} = \int_\Omega \frac{a|u+hv|^p - a|u|^p}{h} dx.$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio e do Lema 6.1.3, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|a|\left[|u+hv|^p - |u|^p\right]}{|h|} &\leq p|a||u+\alpha hv|^{p-1}|v| \\ &\leq p\|a\|_\infty (|u| + |v|)^{p-1}|v| \\ &\leq K(p)p\|a\|_\infty (|u|^p + |v|^p). \end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega \frac{|a|\left[|u+hv|^p - |u|^p\right]}{|h|} \leq \int_\Omega K(p)p\|a\|_\infty (|u|^p + |v|^p) < \infty,$$

temos que $\frac{|a|[|u+hv|^p - |u|^p]}{|h|} \in L^1(\Omega)$. Disto, e do Teorema da Convergência Dominada de

Lebesgue (Teorema 6.1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\phi(u+hv)-\phi(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+}\left[\int_\Omega \frac{a|u+hv|^p - a|u|^p}{h}dx\right] \\
&= \int_\Omega \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{a|u+hv|^p - a|u|^p}{h}\right]dx \\
&= p\int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx.
\end{aligned}$$

De forma análoga, com $-1 < h < 0$, temos

$$\lim_{h\to 0^-}\left[\frac{\phi(u+hv)-\phi(u)}{h}\right] = p\int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\phi(u+hv)-\phi(u)}{h}\right] = p\int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx.$$

Ainda, para $u \in X$ fixado, o funcional $S(u)$, definido por $S_u(v) = p\int_\Omega a|u|^{p-2}uvdx$, para todo $v \in X$, é linear e limitado. De fato, a linearidade de S_u é imediata e, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|S_u(v)| &\leq p\|a\|_\infty \int_\Omega |u|^{p-1}|v|dx \\
&\leq p\|a\|_\infty \|u\|_p^{p-1}\|v\|_p \\
&\leq p\|a\|_\infty \|u\|^{p-1}\|v\|.
\end{aligned}$$

Logo, S_u é limitado, e assim, ϕ é diferenciável a Gateaux em $u \in X$, com sua derivada de Gateaux em u dada por $\phi^{'}(u) = S_u$. Provemos que $\phi^{'} : X \to X^*$, definida por $\phi^{'}(u) = S_u$, para todo $u \in X$, é contínuo. Para tal, sejam (u_n) uma sequência em X e $u \in X$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } (X, \|\cdot\|_a),$$

onde

$$\|u\|_a = \left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^p + a|u|^p\right]dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $a : \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que $a \in L^\infty(\Omega)$, podemos mostrar que, definidos por $\|\cdot\|_a$ define uma norma em X. Mostraremos, a seguir, alguns lemas que serão úteis para provar que $\phi^{'}$ é contínuo.

Lema 1: O funcional $I : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$, dado por $I(u) = \|u\|_a$, é contínuo e convexo.

Prova: Seja $u \in X$. Como $a \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} I(u)^p &= \|u\|_a^p \\ &= \|\nabla u\|_p^p + \int_\Omega a(x)|u(x)|^p dx \\ &\leq \max\{1, \|a\|_\infty\}\|u\|^p. \end{aligned}$$

Denotando $A = \max\{1, \|a\|_\infty\}^{\frac{1}{p}}$, que é uma constante positiva, segue que

$$\|u\|_a \leq A\|u\|, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{13}$$

o que prova a continuidade de I. Por $\|\cdot\|_a$ ser uma norma em X, logo, I é convexo. ■

Do lema acima, vimos que I é contínuo e convexo, consequentemente, I é fracamente sequencialmente contínuo em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$. Logo, toda sequência (u_m) tal que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$ satisfaz

$$\liminf_{m \in \mathbb{N}} I(u_m) \geq I(u).$$

Lema 2: Existe $\delta > 0$ tal que $\|u\|_a^p \geq \delta\|u\|_p^p$, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Sejam $S = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \|u\|_p = 1\}$ e $\delta = \inf_{u \in S} \|u\|_a^p$. Afirmamos que existe $\tilde{u} \in S$, tal que $\|\tilde{u}\|_a^p = \delta$. Com efeito, da definição de ínfimo, existe uma sequência (u_m) em S, de modo que

$$\|u_m\|_a^p \to \delta \text{ e } \|u_m\|_a^p < \delta + 1. \tag{14}$$

Ainda, por $\|u_m\|^p = \|\nabla u_m\|_p^p + \|u_m\|_p^p$ e por $u_m \in S$, $\|u_m\|^p = \|\nabla u_m\|_p^p + 1$. Portanto, por $a \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u_m\|^p - 1 &= \|\nabla u_m\|_p^p \\ &\leq \|\nabla u_m\|_p^p + \int_\Omega a|u|^p dx \\ &= \|u_m\|_a^p. \end{aligned}$$

Consequentemente, por (14),

$$\|u_m\|^p \leq \|u_m\|_a^p + 1 < \delta + 2.$$

Com isto, a sequência (u_m) é limitada em $(X, \|\cdot\|)$, que por sua vez é um espaço reflexivo, logo, do Lema 6.1.6, existem uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ em } (X, \|\cdot\|). \tag{15}$$

Por isto e por (14), temos da observação feita anteriormente ao lema em questão que

$$\|\tilde{u}\|_a \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_{m_k}\|_a = \delta^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda, de (15), concluímos do Teorema 6.1.7 que $u_{m_k} \to \tilde{u}$ em $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Por conseguinte, em razão de $u_{m_k} \in S$ e da continuidade da norma $\|\cdot\|_p$, $\tilde{u} \in S$. Disto e de $\|\tilde{u}\|_a \leq \delta^{\frac{1}{p}}$, temos que $\delta = \|\tilde{u}\|_a^p$, o que prova a afirmação. Ainda, temos que $\delta > 0$, pois caso $\delta = 0$, pela afirmação anterior, $\|\tilde{u}\|_a^p = 0$. Consequentemente, $\tilde{u} = 0$ em X, o que é um absurdo, pois $\tilde{u} \in S$. Por fim, se $u = 0$, não há nada a se fazer. Caso $u \in X$ for tal que $u \neq 0$, então considere $v = \dfrac{u}{\|u\|_p} \in X$. Assim, $v \in S$, logo, $\|v\|_a^p \geq \delta$. Portanto, $\|u\|_a^p \geq \delta\|u\|_p^p$, o que encerra a demonstração. ■

Proposição 2: As normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, por $a \geq 0$,

$$\|u\|^p \leq \|u\|_a^p + \|u\|_p^p.$$

Pelo Lema 2,

$$\|u\|^p \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|u\|_a^p,$$

assim,

$$\|u\| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_a.$$

Disto e de (13) temos a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ em X.

Por fim, por $v \in X$ e por I ser um funcional contínuo, da desigualdade de Hölder e das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ serem equivalentes em X, existe uma constante D_1, tal que

$$\begin{aligned} |S_{u_n}(v) - S_u(v)| &\leq p\|I(u_n) - I(u)\|_{p'} \|v\|_p \\ &\leq pD_1\|I(u_n) - I(u)\|_{p'} \|v\|_a. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\|\phi^{'}(u_n) - \phi^{'}(u)\|_a^* &= \sup\{|\phi^{'}(u_n)(v) - \phi^{'}(u)(v)|;\ v \in X \text{ e } \|v\|_a = 1\} \\
&= \sup\{|S_{u_n}(v) - S_u(v)|;\ v \in X \text{ e } \|v\|_a = 1\} \\
&\leq pD_1 \|I(u_n) - I(u)\|_{p'}.
\end{aligned}
$$

Assim, por I ser contínuo, temos que $\|I(u_n) - I(u)\|_{p'} \to 0$, quando $n \to \infty$, e assim, $\phi^{'}(u_n) \to \phi^{'}(u)$ em $(X^*, \|\cdot\|_a^*)$, o que prova a continuidade de $\phi^{'}$, e assim, que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. De forma inteiramente análoga a que utilizamos para mostrar que ϕ é de classe C^1, podemos mostrar que $\varpi, \kappa : X \to \mathbb{R}$, definidos por $\varpi(u) = \int_{\partial\Omega} b|u|^p ds$ e $\kappa(u) = \int_{\partial\Omega} c|u|^p ds$ também o são, utilizando ao invés da norma $\|\cdot\|_a$, a norma $\|\cdot\|_\beta$.

Para provarmos **(H2)**, basta mostrarmos que A é fortemente contínuo, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$ em X, então $Au_n \to Au$ em X^*. Para cada $v \in X$, pela desigualdade de Hölder em $L^p(\partial\Omega)$ e pelos teoremas 6.1.1 e 6.1.2, segue que

$$
\begin{aligned}
|\langle Au_n - Au, v\rangle| &\leq \left|\int_\Omega a(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v dx\right| + \left|\int_{\partial\Omega} b(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v ds\right| \\
&\leq \|a\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|_p \\
&+ \|b\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1},\partial} \|v\|_{p,\partial} \\
&\leq C_1 \|a\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}} \|v\| \\
&+ C_2 \|b\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1},\partial} \|v\|.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\omega_n = |u_n|^{p-2}u_n \to \omega = |u|^{p-2}u$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Ora, por $u_n \rightharpoonup u$ em X, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Logo, $\omega_n(x) \to \omega(x)$ q.t.p. em Ω. Por isto e pelo Lema 6.1.1, temos que $\omega_n \to \omega$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. De forma análoga, mostra-se que $\omega_n \to \omega$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega)$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\|Au_n - Au\|^* &= \sup\{|Au_n(v) - Au(v)|;\ v \in X \text{ e } \|v\| = 1\} \\
&\leq C_1 \|a\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&+ C_2 \|b\|_\infty \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1},\partial}.
\end{aligned}
$$

Como $\omega_n \to \omega$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e em $L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega)$, quando $n \to \infty$, segue do Lema 6.1.1, que $Au_n \to Au$ em X^*. Para provarmos a validade de **(H3)**, necessitaremos do próximo lema.

Lema 3: Se B é o funcional definido em (7), então, para quaisquer $u, v \in X$, tem-se

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq (\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1})(\|u\| - \|v\|).$$

Além disso, vale a seguinte equivalência:

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Prova: Ora,

$$\begin{aligned}
\langle Bu - Bv, u - v\rangle &= \int_\Omega \left[|\nabla u|^p + |\nabla v|^p - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla u\right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[|u|^p + |v|^p - |u|^{p-2}uv - |v|^{p-2}vu\right] dx \\
&+ \int_{\partial\Omega} c(s) \left[|u|^p + |v|^p - |u|^{p-2}uv - |v|^{p-2}vu\right] ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} c(s) \left[|u|^p + |v|^p - |u|^{p-2}uv - |v|^{p-2}vu\right] ds &\geq \int_{\partial\Omega} c(s) \left[|u|^p + |v|^p - |u|^{p-1}|v| - |v|^{p-1}|u|\right] ds \\
&= \int_{\partial\Omega} c(s) \left(|u|^{p-1} - |v|^{p-1}\right) (|u| - |v|)\, ds \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\langle Bu - Bv, u - v\rangle &\geq \|u\|^p + \|v\|^p - \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv\right) dx \\
&- \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla u + |v|^{p-2}vu\right) dx. \blacklozenge
\end{aligned}$$

Ainda, da desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{16}$$

e

$$\int_\Omega |u|^{p-2}uv dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

De (16), (17) e do Lema 6.1.4, com $\alpha = \frac{p-1}{p} \in (0,1)$ e

$$a_1 = \int_\Omega |\nabla u|^p dx,\ b_1 = \int_\Omega |u|^p dx,\ c_1 = \int_\Omega |\nabla v|^p dx,\ d_1 = \int_\Omega |v|^p dx,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv\right) dx &\le \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le N \\
&= \|u\|^{p-1}\|v\|, \qquad (\star)
\end{aligned}$$

com $N = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Analogamente, ao trocarmos u por v na desigualdade acima, segue que

$$\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla u + |v|^{p-2}vu\right) dx \le \|v\|^{p-1}\|u\|. \tag{18}$$

Portanto, combinando $(\star)$ e (18) em ♦, concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle Bu - Bv, u - v\rangle &\ge \|u\|^p + \|v\|^p - \|u\|^{p-1}\|v\| - \|v\|^{p-1}\|u\| \\
&= \left(\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1}\right)\left(\|u\| - \|v\|\right) \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle Bu - Bv, u - v\rangle = 0 &\Leftrightarrow \left(\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1}\right)\left(\|u\| - \|v\|\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \|u\| = \|v\|.
\end{aligned}$$

Como $\|u\| = \|v\|$, temos a igualdade em (16) e em (17). Como há a igualdade na desigualdade de Hölder (Teorema 6.1.5), temos que $u = kv$ q.t.p. em Ω, para alguma constante $k \ge 0$. Ainda por $\|u\| = \|v\|$, temos que $k = 1$, e assim, $u = v$ q.t.p. em Ω, o que encerra a demonstração do lema em questão. ■

Agora estamos aptos a provar **(H3)**. Fazendo contas análogas para às que fizemos para Au na demonstração de **(H2)**, concluímos que B é limitado, logo, G' também o é. Sejam, ainda, $(u_n) \subset X$, $u \in X$ e $v \in X^*$, de modo que

$$u_n \rightharpoonup u, \;\; Bu_n \rightharpoonup v \text{ e } \langle Bu_n, u_n \rangle \to \langle v, u \rangle.$$

Visto que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Por X ser reflexivo, pelo Teorema de Lindenstrauss-Asplund-Troyanski (veja [37]), que existe uma norma em X, equivalente a norma usual em X, de modo que este espaço seja localmente uniformemente convexo. Com isto, resta-nos apenas mostrar que $\|u_n\| \to \|u\|$, pois, em tais espaços, convergência fraca e convergência em norma implicam em convergência forte. Observamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle Bu_n - Bu, u_n - u \rangle &= \lim_{n\to\infty} (\langle Bu_n, u_n \rangle - \langle Bu_n, u \rangle - \langle Bu_n, u_n - u \rangle) \\
&= \langle v, u \rangle - \langle v, u \rangle - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, do Lema 3, temos

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u \rangle \geq \left(\|u_n\|^{p-1} - \|u\|^{p-1} \right) (\|u_n\| - \|u\|)$$

Das duas estimativas acima e do Teorema do Sanduíche, temos que $\|u_n\| \to \|u\|$ quando $n \to \infty$, o que prova a validade da condição **(H3)**.
Finalmente, para provarmos **(H4)**, é imediato que $\lim\limits_{t\to\infty} G(tu) = \infty$, pela caracterização de G. Ainda, o conjunto de nível S_G é limitado, pois, se $u \in S_G$,

$$1 = G(u) = \|u\|^p + \int_{\partial\Omega} c(s)|u(s)|^p ds \geq \|u\|^p.$$

Por fim, temos que $\inf\limits_{u \in S_G} \langle G'(u), u \rangle = \inf\limits_{u \in S_G} G(u) \cdot p = p > 0$, pois $G(u) = 1$ em S_G, e, se $u \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\langle G'(u), u \rangle &= p\|u\|^p + p \int_{\partial\Omega} c(s)|u|^p ds \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Com isto, temos a validade de **(H4)**, consequentemente, a validade da proposição em questão. ■

Provaremos, no que segue, o principal resultado deste capítulo, que garante a existência da sequência L-S para os funcionais definidos em (4) e (5).

Teorema 2 (Existência da sequência L-S): Seja X um subespaço fechado de $W^{1,p}(\Omega)$, onde $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq X$, e F, G os funcionais definidos como em (4) e (5). Então existe uma sequência não crescente de autovalores não negativos (μ_n), tais que $\mu_n \to 0$ quando $n \to \infty$, onde

$$\mu_n = \sup_{H \in \mathbb{A}_n} \inf_{u \in H} F(u) \tag{19}$$

e cada μ_n é um autovalor de (1).

Prova: Pela Proposição 1, podemos aplicar o Teorema 1 aos funcionais F, G definidos em (4) e (5). A existência da sequência de autovalores (μ_n) é consequência da parte (v) do Teorema 1. Ainda,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_n G(u_n) \\ &= \mu_n \langle B u_n, u_n \rangle \\ &= \langle A u_n, u_n \rangle \\ &= F(u_n) \\ &= a_n, \end{aligned}$$

pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $u_n \in S_G$, $G(u_n) = 1$ e da parte (i) do Teorema 1, $F(u_n) = a_n$. Da caracterização de a_n, dada em (2), temos a validade do Teorema 2. ■

Em posse do Teorema 2, utilizaremos os funcionais F, G definidos em (4) e (5), com a, b e c adequados para garantir a existência de uma sequência de autovalores não negativos para os problemas $D(\Omega), N(\Omega)$ e $RS(\Omega)$.

3 Os problemas de Dirichlet e Neumann

Neste capítulo garantiremos a existência de uma sequência de autovalores para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, utilizando o principio L-S, bem como assegurar, a partir de resultados vistos em [14], [27] e [36], regularidade para as autofunções associadas a tais autovalores e, para finalizar o capítulo, discorreremos sobre o espectro dos problemas em questão, em especial, sobre o primeiro autovalor dos mesmos. Antes de utilizarmos os funcionais F e G definidos em (4) e (5) e o Teorema 2 para garantir a existência de uma sequência de autovalores para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, precisamos tanto de uma caracterização das soluções fracas dos problemas de fronteira quanto espaços X apropriados. As próximas seções serão dedicadas à determinação desses espaços e dos funcionais específicos.

3.1 Soluções Fracas

Soluções fracas de uma equação diferencial são soluções mais gerais, pois é sabido que uma solução clássica de uma equação diferencial é uma solução fraca da mesma, já a recíproca não é sempre verdadeira. O objetivo desta seção é definir quando um par (u, λ) é uma solução fraca dos problemas de Dirichlet e Neumann.

Definição 1: Seja $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Neumann. Um par $(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca dos problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$ quando,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u v dx, \ \forall \ v \in X. \tag{20}$$

Quando $u \neq 0$, o par (u, λ) é dito um autopar, λ um autovalor e u uma autofunção associada a λ. Se escolhermos $v = u$ em (20), concluímos que os autovalores são não negativos. Soluções fracas são soluções mais gerais para os problemas de contorno e, ainda neste capítulo, veremos quando uma solução fraca será uma solução clássica de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$.

3.2 Resultados de existência para $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$

Esta seção é destinada a garantir a existência de uma sequência de autovalores para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$. Para isto, utilizaremos casos particulares dos funcionais F e G definidos em (4) e (5), além da sequência L-S, obtida para esses funcionais no Teorema 2.

Teorema 3 (Existência da sequência de autovalores para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$): Sejam $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Neumann, e F, G definidos em (4) e (5), com $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ e $c \equiv 0$. Então existe uma sequência não decrescente de autovalores não negativos (λ_n) de (20), obtidos utilizando o princípio L-S, tal que $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1 \to \infty$, quando $n \to \infty$, onde cada μ_n é um autovalor da correspondente equação $F'(u) = \mu G'(u)$, definida em (1).

Prova: Se $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ e $c \equiv 0$, então

$$F(u) = \int_\Omega |u|^p dx \text{ e } G(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx.$$

Disto e de (1),

$$\int_\Omega |u|^{p-2} uv dx = \mu \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2} uv) dx \right), \ \forall \ v \in X.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx, \ \forall \ v \in X.$$

Comparando isto com (20), temos, pelo Teorema 2, que existe uma sequência não decrescente $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$ de autovalores não negativos, onde cada μ_n é um autovalor de $F'(u) = \mu G'(u)$. Como $\mu_n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. ■

Como $S_{W_0^{1,p}(\Omega)} \subset S_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde $S_X = \{u \in X;\ G(u) = 1\}$, do Teorema 3 e de (19), temos que $\lambda_n^N \leq \lambda_n^D$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $(\lambda_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\lambda_n^D)_{n \in \mathbb{N}}$ são as sequências de autovalores dos problemas de Dirichlet e de Neumann, respectivamente.

Encerrando esta seção, veremos quando uma solução fraca dos problemas de Dirichlet e Neumann é uma solução clássica desses problemas, a partir de uma regularização adequada das autofunções.

Proposição 3: Se (u, λ) é um autopar de (20) tal que $u \in W^{2,p}(\Omega)$, então (u, λ) resolve os problemas de Dirichlet e Neumann no sentido clássico.

Prova: Faremos aqui a demonstração para o problema $N(\Omega)$, pois a demonstração para $D(\Omega)$ é análoga. Para isto, sejam $X = W^{1,p}(\Omega)$ e $(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ um autopar de (20), com $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Pelo Teorema 6.1.6, devemos mostrar que vale

$$\int_\Omega (-\triangle_p u) v dx = \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u v dx, \ \forall \ v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{21}$$

Pelo Teorema de Green (veja [35]), que vale para $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e Ω de classe $C^{0,1}$, em (20), obtemos

$$\int_\Omega (-\triangle_p u) v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u v dx, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Utilizando $v \in C_0^\infty(\Omega)$ na igualdade acima segue a validade de (21). Logo,

$$-\triangle_p u = \lambda |u|^{p-2} u \text{ em } \Omega.$$

Disto, decorre que

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = 0, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Do Teorema 6.1.2, temos que a igualdade acima vale para todo $v \in L^p(\partial\Omega)$. Como o operador traço é compacto, temos que $|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$, e assim, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$, como desejávamos. ∎

Com a Proposição 3, temos que soluções fracas dos problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, com regularidade $W^{2,p}(\Omega)$, são soluções clássicas dos problemas de Dirichlet e Neumann. No próximo capítulo, buscaremos resultados de regularidade para as autofunções dos problemas de fronteira.

3.3 Regularidade das autofunções de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$

Esta seção tem por proposta mostrar que as autofunções da forma fraca de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$ são de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, com $\alpha \in (0,1)$, e quando $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$ (Definição 6.1.4), com $0 < \gamma \leq 1$, as autofunções fracas estarão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ambos resultados dependem das soluções fracas dos problemas aqui tratados sejam essencialmente limitadas. Para isto, provaremos o próximo resultado.

Teorema 4 (Limitação das soluções fracas de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$): Sejam $X = W_0^{1,p}(\Omega)$

para o problema de Dirichlet ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Neumann e $(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ um autopar da forma fraca (20). Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe $C^{0,1}$. Devido a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, quando $p > n$, resta-nos considerar o caso $1 < p \leq n$. Suponha que u seja uma autofunção de (20), que não mude de sinal em Ω, digamos $u \geq 0$ (o caso $u \leq 0$ é análogo). Utilizaremos, a seguir a técnica de iteração de Moser (veja [15]). Para $M > 0$, defina $v_M(x) = min\{u(x), M\}$. Definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq M, \\ M, & \text{se } x > M, \end{cases}$$

segue que $v_M(x) = (f \circ u)(x)$ e, do Teorema 6.2.1, temos que $v_M \in X \cap L^\infty(\Omega)$. Pondo, para cada $k > 0$ real, $\varphi_k = v_M^{kp+1}$, do Teorema 6.2.1 segue que $\varphi_k \in X \cap L^\infty(\Omega)$ e $\nabla\varphi_k = (kp+1)v_M^{kp}\nabla v_M$. Utilizando φ_k como uma função teste em (20), obtemos

$$(kp+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot v_M^{kp}\nabla v_M = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv_M^{kp+1}dx \leq \lambda \int_\Omega u^{(k+1)p}dx,$$

ou, por $\left[\nabla v_M^{(k+1)}\right]^p = (k+1)^p v_M^{kp}\left[\nabla v_M\right]^p$,

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega |\nabla v_M^{k+1}|^p dx \leq \lambda \int_\Omega u^{(k+1)p}dx.$$

Das duas últimas estimativas,

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega (|\nabla v_M^{k+1}|^p + |v_M^{k+1}|^p)dx \leq \left(\lambda + \frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\right)\int_\Omega u^{(k+1)p}dx,$$

o que implica em

$$\|v_M^{k+1}\|^p \leq \left(\lambda\frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)\|u\|_{(k+1)p}^{(k+1)p}. \tag{22}$$

Agora, pelo Teorema 6.1.1, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$, se $p < n$ e $p^* = 2p$, se $p = n$. Logo, existe $C_1 > 0$, tal que

$$\|v_M^{k+1}\|_{p^*} \leq C_1\|v_M^{k+1}\|.$$

Disto e de (22) segue que

$$
\begin{aligned}
\|v_M\|_{(k+1)p^*} &= \left[\int_\Omega |v_M|^{(k+1)p^*} dx\right]^{\frac{1}{(k+1)p^*}} \\
&= \|v_M^{k+1}\|_{p^*}^{\frac{1}{k+1}} \\
&\leq C_1^{\frac{1}{k+1}} \|v_M^{k+1}\|^{\frac{1}{k+1}} \\
&= C_1^{\frac{1}{k+1}} \left(\lambda \frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)^{\frac{1}{(k+1)p}} \|u\|_{(k+1)p}.
\end{aligned}
$$

Visto que existe o limite, quando $k \to \infty$, de $\left(\lambda \frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p\sqrt{k+1}}}$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $\left(\lambda \frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p\sqrt{k+1}}} \leq C_2$, para todo $k > 0$. Portanto,

$$\|v_M\|_{(k+1)p^*} \leq C_1^{\frac{1}{k+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|_{(k+1)p}.$$

Ainda, $\lim\limits_{M\to\infty} v_M = u$. Disto e do Lema de Fatou (Teorema 6.1.4), obtemos

$$\|u\|_{(k+1)p^*} \leq C_1^{\frac{1}{k+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|_{(k+1)p}. \tag{23}$$

Como (23) vale para todo $k > 0$, escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $k = k_n$, com $(k_n + 1)p = (k_{n-1} + 1)p^*$, $k_0 = 0$, temos

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C_1^{\frac{1}{k_n+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{k_n+1}}} \|u\|_{(k_{n-1}+1)p^*}.$$

Pela recursividade de (k_n), temos que $k_n + 1 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} C_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}} \|u\|_{p^*}.$$

Por $\frac{p}{p^*} < 1$, existe o limite, quando $n \to \infty$, de $C_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}}$ e $C_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}}$. Assim, existe $C > 0$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C\|u\|_{p^*}. \tag{24}$$

Denote, para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n = (k_n + 1)p^*$. Temos que $r_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Caso $u \notin L^\infty(\Omega)$, existem $\varepsilon > 0$ e A subconjunto de medida positiva em Ω, tal que, para todo

$x \in A$, $|u(x)| > C\|u\|_{p^*} + \varepsilon := K$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|u\|_{r_n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A K^{r_n} dx \right)^{\frac{1}{r_n}} \\
&= \liminf_{n\to\infty} K|A|^{\frac{1}{r_n}} \\
&= K \\
&> C\|u\|_{p^*},
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois contraria (24). Deste modo, $u \in L^\infty(\Omega)$. Caso u seja uma autofunção de (20) que muda de sinal em Ω, efetuando contas similares às que fizemos neste teorema, com u^+ e u^-, concluímos que $u^+, u^- \in L^\infty(\Omega)$. Como $L^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial, $u = u^+ - u^- \in L^\infty(\Omega)$, o que encerra a demonstração em questão. ∎

Seja, agora, Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Consideremos a equação elíptica

$$-\triangle_p u(x) = f(x, u(x)) \text{ em } \Omega, \tag{25}$$

com $1 < p < \infty$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, isto é,

(i) $F(\cdot, s)$ é mensurável, em Ω, para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado;

(ii) $F(x, \cdot)$ é contínua, em $\mathbb{R}$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Uma função $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ é dita uma solução fraca de (25) quando

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, u) \varphi dx, \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Teorema 5: Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca de (25) e $g(x) = f(x, u(x))$ q.t.p. $x \in \Omega$. Se $g \in L^q(\Omega)$, com $q > \frac{p}{p-1} n$, então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0, 1)$. Em particular, o resultado segue, se $g \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: Veja DiBenedetto [14] (Teorema 2, página 829 e Corolário 1, página 830) ou Tolksdorf [36]. ∎

Utilizando o teorema anterior, estamos aptos a provar o próximo resultado:

Corolário 1: Se u é uma autofunção no sentido fraco (20), então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Prova: Pelo Teorema 4, temos que qualquer autofunção da forma fraca (20) pertence a $L^\infty(\Omega)$. Definindo $g : \Omega \to \mathbb{R}$, por $g(x) = |u(x)|^{p-2} u(x)$, temos que g é uma função de Carathéodory e $g \in L^\infty(\Omega)$. Disto e do Teorema 5, segue que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para todo

$u \in X$ solução fraca de (20) e algum $\alpha \in (0, 1)$. ■

O próximo resultado será útil tanto para demonstrar a veracidade do Corolário 2, quanto para provar que as autofunções associadas ao primeiro autovalor não mudam de sinal em Ω.

Teorema 6 (Desigualdade de Harnack): Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca de (25). Suponha ainda que, para quaisquer $M \in \mathbb{R}$ e $(x, s) \in \Omega \times (-M, M)$, vale a condição

$$|f(x, s)| \leq b_1(x)|s|^{p-1} + b_2(x),$$

onde b_1 e b_2 são funções não negativas em $L^\infty(\Omega)$, dependentes apenas de M. Caso $0 \leq u(x) < M$ no cubo $K(3r) := K_{x_0}(3r) \subset \Omega$, de centro em $x_0 \in \Omega$ e raio $3r$, paralelo aos eixos coordenados, então existe uma constante C tal que

$$\max_{K(r)} u(x) \leq C \min_{K(r)} u(x).$$

Prova: Veja Trudinger [38] (Teorema 1.1, página 724 e Corolário 1.1, página 725). ■

Corolário 2: Se u é uma autofunção não negativa da forma fraca (20), então u é positiva em todo domínio Ω.

Prova: Seja u uma autofunção não negativa de (20). Do Teorema 4 e do Corolário 1, temos que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0, 1)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $0 \leq u(x) < M$ q.t.p. $x \in \Omega$, com $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Suponhamos $u(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in \Omega$. Como $g(x, s) = |s|^{p-2}s$ é tal que

$$|g(x, s)| \leq |s|^{p-1},$$

temos, pelo Teorema 6, que existe uma constante C tal que

$$\max_{K(r)} u(x) \leq C \min_{K(r)} u(x) = 0.$$

Desta forma, $u \equiv 0$ em $K(r)$, que por sua vez é compacto. Ainda, dado $x_1 \in \Omega$, como Ω é conexo, em particular, conexo por caminhos, existe um caminho ligando x_1 a x_0, que pode ser coberto por tais cubos $K(r)$, e tal cobertura é finita. Utilizando novamente o Teorema 6, concluímos que $u(x_1) = 0$, e assim, $u \equiv 0$ em Ω, o que é um absurdo, pois as autofunções aqui consideradas são não nulas. Portanto, $u > 0$ em Ω. ■

Provamos que as soluções fracas u de (20) estão em $L^\infty(\Omega)$, e disto, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. O próximo resultado garante uma melhor regularidade das soluções fracas dos problemas de Dirichlet e Neumann, quando houver uma regularidade melhor para a fronteira de Ω.

Teorema 7: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\partial\Omega \in C^{1,\gamma}$ (veja Definição 6.1.4), $0 < \gamma \leq 1$ e u uma solução fraca limitada do problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u(x) = g(x), & \text{q.t.p. } x \in \Omega, \\ u = \phi, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{26}$$

com $\|u\|_\infty \leq M$. Se $g \in L^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$, com $\|g\|_\infty \leq K$ e $\|\phi\|_{C^{1,\gamma}(\partial\Omega)} \leq L$, então existe uma constante positiva $\alpha = \alpha(\gamma, n, p, M, K)$ tal que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\gamma, n, p, M, K, L, \Omega).$$

Prova: Veja Lieberman [27] (Teorema 1, página 1203). ∎

Observamos que uma solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de (26) é da forma

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega g\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

com $u = \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se $\phi \equiv 0$, então ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema 7. Portanto, se $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$, para algum $\gamma \in (0,1]$, então as autofunções da forma fraca (20) estarão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Constatamos que o autor de [26] observa que até o momento não há regularidade maior que $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para as autofunções da forma fraca dos problemas de Dirichlet e Neumann.

3.4 Uma análise do espectro de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$

Findando este capítulo, analisaremos o espectro dos dois problemas em questão, em especial, sobre o primeiro autovalor dos mesmos. Salientamos que a prova de que o espectro de cada um dos problemas acima ser fechado é fundamental para a demonstração de que o primeiro autovalor associado aos problemas de Dirichlet e Neumann é isolado.

Faremos, agora, uma análise sobre o primeiro autovalor associado aos problemas $D(\Omega)$ ou $N(\Omega)$. No que segue, assumimos que $\partial\Omega$ é de classe $C^{1,\gamma}$, com $0 < \gamma \leq 1 < p < \infty$. Pela caracterização dada em (20), dividindo ambos os lados de (1) por μ_n, o primeiro autovalor dos problemas de Dirichlet e Neumann, obtidos no Teorema 3, podem ser descritos, via quocientes de Rayleigh (veja [21]), por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X} \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx; \ \int_\Omega |u|^p dx = 1 \right\},$$

onde $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Neumann. Da própria definição, λ_1 é o menor autovalor atrelado aos problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$. Mostraremos a seguir que as autofunções associadas ao primeiro autovalor não mudam de sinal em Ω.

Lema 4: Seja u uma autofunção associada a λ_1, então $u > 0$ ou $u < 0$ em Ω.

Prova: Se $|u(x_0)| = 0$, para algum $x_0 \in \Omega$, então, pela desigualdade de Harnack, temos que $u \equiv 0$ no cubo $K(r)$, de centro em x_0 e raio $r > 0$. Em particular, $u \equiv 0$ na bola $B(x_0; r)$. Utilizando o mesmo argumento do Corolário 2, para qualquer $x \in \Omega$, podemos cobrir o caminho que liga x_0 a x por finitas bolas, que por sua vez é um conjunto compacto e, utilizando novamente a desigualdade de Harnack, concluímos que $u(x) = 0$ em Ω, e assim, $u \equiv 0$ em Ω, o que é um absurdo, pois u é uma autofunção associada a λ_1. Disto, $|u|$ deve ser positiva em todo domínio Ω, e assim, $u > 0$ ou $u < 0$ em Ω. ■

Provaremos, a seguir, a simplicidade do autovalor λ_1, isto é, quaisquer autofunções associadas a λ_1 são linearmente dependentes.

Teorema 8: Sejam $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para os problemas de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Se $u, v \in X$ são autofunções associadas a λ_1, então $u = cv$, para alguma constante c.

Prova: Pelo Lema 4, podemos assumir s.p.g. que $u, v > 0$ em Ω. Defina, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\eta = \frac{(u+\varepsilon)^p - (v+\varepsilon)^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \text{ e } \theta = \frac{(v+\varepsilon)^p - (u+\varepsilon)^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}.$$

Pelo Teorema 6.2.1, temos que

$$\nabla \eta = \left\{ 1 + (p-1) \left[\frac{(v+\varepsilon)}{(u+\varepsilon)} \right]^p \right\} \nabla u - p \left(\frac{v+\varepsilon}{u+\varepsilon} \right)^{p-1} \nabla v. \tag{27}$$

Como $u, v \in L^\infty(\Omega) \cap X$,

$$\left| \frac{v+\varepsilon}{u+\varepsilon} \right| \leq \frac{\|v+\varepsilon\|_\infty}{\overline{M}} < \infty \text{ e } \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty,$$

pois $\|u+\varepsilon\|_\infty \geq |u+\varepsilon| \geq |u| \geq \overline{M}$, para algum $\overline{M} > 0$. Disto e de (27), segue que $\nabla\eta \in L^p(\Omega)$, e assim, $\eta \in X$. Pela simetria de η e θ, temos uma expressão similar à de $\nabla\eta$ para $\nabla\theta$, logo, $\theta \in X$. Para facilitarmos a escrita, definimos $u_\varepsilon = u+\varepsilon$ e $v_\varepsilon = v+\varepsilon$. Utilizando as mesmas como funções teste em (20), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)dx &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\eta dx + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\theta dx \\
&= \int_\Omega \left\{1+(p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right\}|\nabla u_\varepsilon|^p dx \\
&+ \int_\Omega \left\{1+(p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right\}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&- \int_\Omega p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx \\
&- \int_\Omega p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx.
\end{aligned}$$

Agora, por $\nabla \ln u = \dfrac{\nabla u}{u}$, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)dx &= \int_\Omega (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)(|\nabla \ln u_\varepsilon|^p - |\nabla \ln v_\varepsilon|^p)dx \\
&- p\int_\Omega v_\varepsilon^p |\nabla \ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln u_\varepsilon \cdot (\nabla \ln v_\varepsilon - \nabla \ln u_\varepsilon)dx \\
&- p\int_\Omega u_\varepsilon^p |\nabla \ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln v_\varepsilon \cdot (\nabla \ln u_\varepsilon - \nabla \ln v_\varepsilon)dx.
\end{aligned}$$

Observamos, ainda, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_1 \int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)dx = 0. \tag{28}$$

Consideremos o caso $p \geq 2$. Ora,

$$\begin{aligned}
0 &\leq C(p)\int_\Omega \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&= C(p)\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon - \frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\nabla v_\varepsilon\right|^p dx + C(p)\int_\Omega \left|\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\right|^p dx
\end{aligned}$$

Fazendo, na primeira integral da última estimativa, $x = \dfrac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\nabla v_\varepsilon$ e $y = \nabla u_\varepsilon$, e para a segunda integral da última estimativa $x = \dfrac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon$ e $y = \nabla v_\varepsilon$, da desigualdade (a) do

Lema 6.1.2, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq C(p)\int_\Omega \left(\frac{1}{v_\varepsilon^p}+\frac{1}{u_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx\\
&\leq C(p)\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon - \frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\nabla v_\varepsilon\right|^p dx + C(p)\int_\Omega \left|\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\right|^p dx\\
&\leq \int_\Omega (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)(|\nabla \ln u_\varepsilon|^p - |\nabla \ln v_\varepsilon|^p)dx\\
&- p\int_\Omega v_\varepsilon^p|\nabla \ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln u_\varepsilon\cdot(\nabla \ln v_\varepsilon - \nabla \ln u_\varepsilon)dx\\
&- p\int_\Omega u_\varepsilon^p|\nabla \ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln v_\varepsilon\cdot(\nabla \ln u_\varepsilon - \nabla \ln v_\varepsilon)dx\\
&= \lambda_1\int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)dx.
\end{aligned}$$

Disto, de (28) e do Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega C(p)\left(\frac{1}{v_\varepsilon^p}+\frac{1}{u_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx = 0.$$

Consequentemente, pelo Teorema 6.1.4, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon] = 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto,

$$v\nabla u = u\nabla v,\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Por conseguinte, $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p. em Ω, e assim, existe uma constante c tal que $u = cv$ q.t.p. em Ω, quando $p \geq 2$. Agora, se $1 < p < 2$, aplicando a desigualdade (b) do Lema 6.1.2, com $x = v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon$ e $y = u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p)\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^{2-p}}dx\\
&\leq \int_\Omega (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)(|\nabla \ln u_\varepsilon|^p - |\nabla \ln v_\varepsilon|^p)dx\\
&- p\int_\Omega v_\varepsilon^p|\nabla \ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln u_\varepsilon\cdot(\nabla \ln v_\varepsilon - \nabla \ln u_\varepsilon)dx\\
&- p\int_\Omega u_\varepsilon^p|\nabla \ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla \ln v_\varepsilon\cdot(\nabla \ln u_\varepsilon - \nabla \ln v_\varepsilon)dx\\
&= \lambda_1\int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)dx.
\end{aligned}$$

E, por (28) e pelo Teorema do Sanduíche, temos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega C(p)(u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon^p+v_\varepsilon^p)\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon+u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^{2-p}}dx=0,$$

e assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon]=0,\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Repetindo os argumentos utilizados no caso $p\geq 2$, concluímos que existe uma constante c tal que $u=cv$ q.t.p. em Ω, quando $1<p<2$, garantindo a validade do teorema em questão. ■

Com isto, provamos que o primeiro autovalor dos problemas de Dirichlet e Neumann é simples. Provaremos agora que quaisquer autofunções associadas a outros autovalores que não o primeiro devem mudar de sinal em Ω.

Teorema 9: Seja $v\in X$ uma autofunção associada a $\lambda\neq\lambda_1$. Então v muda de sinal em Ω.

Prova: Suponhamos que v não mude de sinal em Ω. Pelo Corolário 2, podemos assumir $v>0$ em Ω. Consideremos, ainda, u uma autofunção associada a λ_1. Efetuando contas similares às feitas no Teorema 8, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left[\lambda_1\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\lambda\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right](u_\varepsilon^p-v_\varepsilon^p)dx &= \int_\Omega(u_\varepsilon^p-v_\varepsilon^p)(|\nabla\ln u_\varepsilon|^p-|\nabla\ln v_\varepsilon|^p)dx\\
&- p\int_\Omega v_\varepsilon^p|\nabla\ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla\ln u_\varepsilon\cdot(\nabla\ln v_\varepsilon-\nabla\ln u_\varepsilon)dx\\
&- p\int_\Omega u_\varepsilon^p|\nabla\ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla\ln v_\varepsilon\cdot(\nabla\ln u_\varepsilon-\nabla\ln v_\varepsilon)dx.\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde, na última estimativa, utilizamos a desigualdade (c) do Lema 6.1.2, com $x=\nabla\ln u_\varepsilon$ e $y=\nabla\ln v_\varepsilon$ e vice-versa. Tomando $\varepsilon\to 0^+$, obtemos

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega(u^p-v^p)dx\geq 0. \tag{29}$$

Considerando, em (29), ku ao invés de u, para todo $k>0$, segue que

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega(k^pu^p-v^p)dx\geq 0.$$

Desta forma, escolhendo $k^p < \frac{\int_\Omega v^p dx}{\int_\Omega u^p dx}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega (k^p u^p - v^p)dx \\ &< (\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega \left(\frac{\int_\Omega v^p dx}{\int_\Omega u^p dx}u^p - v^p\right)dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, v deve mudar de sinal em Ω. ∎

A partir de agora, provemos agora que o espectro de $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$ é fechado.

Teorema 10: Os conjuntos de autovalores de Dirichlet e Neumann são fechados.

Prova: Sejam X igual a $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$ para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, respectivamente, e $((u_n, \gamma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de autopares de (20) tal que $\gamma_n \to \gamma$, para algum $\gamma \geq 0$, pois todos os autovalores são não negativos. Assumimos, s.p.g., $\|u_n\| = 1$. Disto, e de X ser um espaço reflexivo, do Lema 6.1.6, (u_n) possui uma subsequência fracamente convergente em X, que ainda denotaremos por u_n. Pelo Lema 1,

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle \geq (\|u_n\|^{p-1} - \|u\|^{p-1})(\|u_n\| - \|u\|).$$

Ainda, por (u_n, γ_n) ser um autopar de (20), para todo $n \in \mathbb{N}$, e da caracterização de γ_n dada no Teorema 3, o lado esquerdo da desigualdade acima é tal que

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle = (\mu_n + 1)\langle Au_n, u_n - u\rangle - \langle Bu, u_n - u\rangle,$$

que tende a zero, quando $n \to \infty$. Disto, $\|u_n\| \to \|u\|$ quando $n \to \infty$ e, do Teorema de Lindenstrauss-Asplund-Troyanski (veja [37]), podemos utilizar em $W^{1,p}(\Omega)$ uma norma, que é equivalente à norma usual, tal que $W^{1,p}(\Omega)$ com tal norma seja localmente uniformemente convexo, e assim, $u_n \to u$ em X. Finalmente, para provarmos que γ é um autovalor de (20) e u uma autofunção associada, devemos mostrar que, quando $n \to \infty$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx, \ \forall\ v \in X, \tag{30}$$

e

$$\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n v dx \to \int_\Omega |u|^{p-2}uv dx, \ \forall\ v \in X. \tag{31}$$

Sejam $w_n = |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ e $w = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$. Por $u_n \to u$ em X, temos que $w_n(x) \to w(x)$

q.t.p. $x \in \Omega$, e

$$\int_\Omega |w_n|^{\frac{p}{p-1}} dx \to \int_\Omega |w|^{\frac{p}{p-1}} dx.$$

Pelo Lema 6.1.1, $w_n \to w$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Ainda, da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \nabla v dx \right| &\leq \left[\int_\Omega |w_n - w|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|w_n - w\|_{\frac{p}{p-1}} \|\nabla v\|_p. \end{aligned}$$

Disto e do Teorema do Sanduíche, segue a validade de (30). Analogamente, mostra-se a validade de (31). ■

Provaremos, no que segue, que o primeiro autovalor dos problemas de Dirichlet e Neumann é isolado. Para tal, utilizaremos o fato de que o espectro desses problemas é fechado e que as autofunções estão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Relembramos que se u é uma função contínua em Ω, então o conjunto $Z(u) = \{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}$ é dito conjunto zero de u, e cada componente conexa ω de $\Omega \setminus Z(u)$ é dito um domínio nodal de u. (Para mais detalhes, veja []).

Dado um autovalor λ de (20) e u uma autofunção associada a λ, definimos $N(u)$ como o número de componentes de $\Omega \setminus Z(u)$ e $N(\lambda)$ como o supremo de $N(u)$. O próximo teorema garantirá que $N(\lambda)$ é finito.

Teorema 11: Seja (u, λ) um autopar de (20) e ω um domínio nodal de u. Então existem duas constantes c e r, independentes de ω, u e λ, de modo que

$$|\omega| \geq [(\lambda + 1)c^p]^r > 0.$$

Além disso, ao considerarmos $C = |\omega| \geq [(\lambda + 1)c^p]^r$, temos $N(\lambda) \leq \frac{|\Omega|}{C}$.

Prova: Seja $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para os problemas de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Como $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, em particular, $u \in C(\overline{\Omega})$. Seja $\overline{u} = u\chi_\omega$. Pelo Teorema 6.3.1, $\overline{u} \in X$ e $\nabla \overline{u} = \nabla u \chi_\omega$. Tomando $v = \overline{u}$ em (20), temos, pelo Teorema 6.3.1 e pelo Corolário 6.3.1,

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^p dx = \lambda \int_\Omega |\overline{u}|^p dx = \lambda \int_\omega |u|^p dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega (|\nabla \overline{u}|^p + |\overline{u}|^p)dx = (\lambda + 1)\int_\omega |u|^p dx. \tag{32}$$

Ora, pela desigualdade de Hölder, com $\frac{p^*}{p}$ e o seu expoente conjugado $\frac{p^*}{p^*-p}$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ se $p < n$ e $p^* = 2p$ se $p \geq n$, temos

$$(\lambda + 1)\int_\omega |u|^p dx \leq (\lambda + 1)|\omega|^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_\omega |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Por isto e por (32),

$$\int_\Omega (|\nabla \overline{u}|^p + |\overline{u}|^p)dx \leq (\lambda + 1)|\omega|^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_\omega |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Também, pelo Teorema 6.1.1, $\|\overline{u}\|_{p^*} \leq c\|\overline{u}\|$, o que implica em

$$\|\overline{u}\|^p \leq c^p(\lambda + 1)|\omega|^{1-\frac{p}{p^*}}\|\overline{u}\|^p.$$

Como $\overline{u} \neq 0$, concluímos que $|\omega| \geq ((\lambda+1)c^p)^r$, onde $r = \frac{-n}{p}$ se $p < n$ e $r = -2$ se $p \geq n$.
■

Corolário 3: Seja $(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ um autopar de (20) e seja $\Omega^+ = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$, com $|\Omega^+| > 0$. Então existem duas constantes c e r, independentes de u e λ, tais que

$$|\Omega^+| \geq [(\lambda + 1)c^p]^r =: D > 0.$$

E o resultado também continua valido para $\Omega^- = \{u \in \Omega;\ u(x) < 0\}$, se $|\Omega^-| > 0$.

Prova: Pelo Lema 6.2.2, $u^+ \in X$. Utilizando os mesmos argumentos da prova do Teorema 11, com u^+ ao invés de $\overline{u}$, obtemos a validade do corolário em questão. ■

Estamos em condições de provar que o primeiro autovalor λ_1 é isolado.

Teorema 12: O primeiro autovalor λ_1 dos problemas de Dirichlet e Neumann é isolado.

Prova: Sejam $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet ou $X = W^{1,p}(\Omega)$ para o problema de Neumann. Suponhamos que λ_1 não seja isolado. Então, pelo Teorema 10, existe uma sequência $((u_n, \gamma_n))$ de distintos autovalores e distintas autofunções tais que $u_n \to u$ em X, $\gamma_n \to \lambda_1$, sendo u uma autofunção associada a λ_1. Suponhamos, s.p.g., que $\|u_n\| = \|u\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $u > 0$ em Ω. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_n^- = \{x \in \Omega;\ u_n(x) < 0\} \text{ e } \Omega_n^+ = \{x \in \Omega;\ u_n(x) > 0\}.$$

Pelo Corolário 3, existe $D > 0$ tal que $|\Omega_n^-| \geq D > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, $|\Omega_n^-|$ é uniformemente limitada inferiormente. Como u é contínua e positiva em todo Ω, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\Omega_\varepsilon| > |\Omega| - \frac{D}{4}, \tag{33}$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega;\ u(x) > \varepsilon\}$. Ainda, pelo Teorema 6.1.8, existe $E \subset \Omega_\varepsilon$ tal que $|\Omega_\varepsilon \setminus E| \leq \frac{D}{4}$, isto é

$$|E| \geq |\Omega_\varepsilon| - \frac{D}{4}. \tag{34}$$

e $u_n \to u$ uniformemente em E. Disto, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in E$. Ainda, por $E \subset \Omega_\varepsilon$, $u(x) > \varepsilon$. Disto, temos que $E \subset \Omega_{n_\varepsilon}^+$. Por isso, por (33) e por (34),

$$\begin{aligned} D \leq |\Omega_{n_\varepsilon}^-| &< |\Omega| - |E| \\ &< |\Omega| - |\Omega_\varepsilon| + \frac{D}{4} \\ &< |\Omega| - |\Omega| + \frac{D}{2} \\ &= \frac{D}{2}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, λ_1 é isolado. ∎

4 O problema de Robin-Steklov

Neste capítulo, estudaremos o problema de Robin-Steklov

$$RS(\Omega):\begin{cases}-\triangle_p u=\lambda|u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega,\\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\beta|u|^{p-2}u=\lambda|u|^{p-2}u, & \text{em } \partial\Omega,\end{cases}$$

que é uma combinação dos problemas de Robin e de Steklov que foram estudados em An Lê [26]. Para este problema, nos baseamos nas ideias desenvolvidos em [11]. Um dos diferenciais desse problema é que o autovalor aparece tanto em Ω quando na fronteira de Ω. Aqui, faremos a mesma construção para os problemas de Dirichlet e Neumann: caracterizamos as soluções fracas do problema $RS(\Omega)$ e, a partir destas, obteremos uma sequência de autovalores pelo princípio L-S. Após isso, buscaremos resultados de regularidade para as autofunções associadas a tais autovalores e, por fim, faremos uma análise do espectro do problema em questão, em especial, sobre o primeiro autovalor λ_1.

4.1 Soluções Fracas

Faremos, agora, a caracterização das soluções fracas do problema $RS(\Omega)$. Lembramos que tal definição é importante para garantir a existência de uma sequência de autovalores, obtidos a partir da sequência L-S, de forma similar à que fizemos para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$. Neste sentido, utilizaremos o Teorema 2 para garantir a existência de uma sequência de autovalores para o problema $RS(\Omega)$, a partir dos funcionais definidos em (4) e (5).

Definição 2: Um par $(u,\lambda)\in W^{1,p}(\Omega)\times\mathbb{R}$ é dito uma solução fraca do problema $RS(\Omega)$ quando, para todo $v\in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx+\int_{\partial\Omega}\beta|u|^{p-2}uvds=\lambda\left(\int_\Omega|u|^{p-2}uvdx+\int_{\partial\Omega}|u|^{p-2}uvds\right). \tag{35}$$

Como antes, tal par (u,λ), com $u\neq 0$, é dito um autopar, λ um autovalor e u sua autofunção associada. Ao tomarmos $v=u$ em (35), temos que todos os autovalores são não negativos. Provaremos, a seguir, a existência da sequência L-S para o problema $RS(\Omega)$.

4.2 Resultados de existência para $RS(\Omega)$

Utilizaremos a caracterização das soluções fracas do problema $RS(\Omega)$, obtida em (35), em conjunto com o Teorema 2, para mostrarmos que existe uma sequência de autovalores para o problema $RS(\Omega)$, a partir do princípio L-S, aplicado aos funcionais dados em (4) e (5), com a, b e c específicos.

Teorema 13 (Existência da sequência de autovalores para o problema $RS(\Omega)$): Sejam $X = W^{1,p}(\Omega)$ e $F, G : X \to \mathbb{R}$ definidos em (4) e (5), com $a \equiv 1$, $b \equiv 1$ e $c \equiv 1 + \beta$. Então existe uma sequência não decrescente de autovalores não negativos (λ_n) de (35), obtidos a partir do princípio L-S, tal que $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, onde cada μ_n é um autovalor da equação $F'(u) = \mu G'(u)$, definida em (1).

Prova: Para $a \equiv 1$, $b \equiv 1$ e $c \equiv 1 + \beta$, temos

$$F(u) = \int_\Omega |u|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u|^p ds, \;\; G(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx + \int_{\partial\Omega} (1+\beta)|u|^p ds.$$

Como $F'(u) = \mu G'(u)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx + \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uvds &= \mu\Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx \\ &+ \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uvds + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2}uvds\Big), \;\; \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2}uvds = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\left(\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx + \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uvds\right). \tag{36}$$

Ao compararmos (36) com (35), pelo Teorema 2, garantimos a existência de uma sequência não decrescente de autovalores não negativos, $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$, onde cada μ_n é um autovalor de $F'(u) = \mu G'(u)$, definido em (1). Como $\mu_n \to 0$, quando $n \to \infty$, $\lambda_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. ∎

Veremos, a seguir, quando uma solução fraca do problema $RS(\Omega)$ é uma solução clássica do problema de Robin-Steklov.

Proposição 4: Seja $(u, \lambda) \in W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ um autopar de (35), com $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Então (u, λ) resolve o problema $RS(\Omega)$, no sentido clássico.

Prova: Seja $(u,\lambda) \in W^{1,p}(\Omega)$, com $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Pelo Teorema de Green (veja [35]),

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega (-\bigtriangleup_p u) v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} v ds.$$

Disto e de (35), temos, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (-\bigtriangleup_p u) v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} v ds + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2} u v ds = \lambda \left(\int_\Omega |u|^{p-2} u v dx + \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} u v ds \right). \tag{37}$$

Considerando em (37), $v \in C_0^\infty(\Omega)$, concluímos que

$$\int_\Omega (\bigtriangleup_p u + \lambda |u|^{p-2} u) v dx = 0,$$

e, pelo Teorema 6.1.6, $-\bigtriangleup_p u = \lambda |u|^{p-2} u$ em Ω. Por conseguinte,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} v ds + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2} u v ds = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} u v ds, \ \forall\ v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Agora, do Teorema 6.1.2, a imagem do operador traço $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$ é compacta. Com isso,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} v ds + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2} u v ds = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} u v ds, \ \forall\ v \in L^p(\partial\Omega).$$

Portanto, $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta |u|^{p-2} u = \lambda |u|^{p-2} u$ em $\partial\Omega$, o que encerra a demonstração. ∎

Para o que segue, seja $W^{1,p}(\Omega)$, munido da norma

$$\|u\|_\beta = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_{\partial\Omega} \beta(s) |u|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Devido a $\beta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ser um elemento de $L^\infty(\partial\Omega)$, com $\beta \geq 0$, podemos mostrar que $\|\cdot\|_\beta$, de fato, é uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Veremos, a seguir, a equivalencia entre $\|\cdot\|_\beta$ e a norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Lema 5: As normas $\|\cdot\|_\partial$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, onde

$$\|u\|_\partial^p = \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_{p,\partial}^p.$$

Prova: Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pelo Teorema 6.2.2, existe uma constante $C_0 > 1$ tal que

$$\|u\|_{p,\partial}^p \leq (C_0 - 1)\|u\|^p.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{p,\partial}^p \leq C_0\|u\|^p - \|u\|^p.$$

Com isso,

$$\|u\|_{\partial}^p \leq C_0\|u\|^p. \tag{38}$$

Provemos agora que existe uma constante $\overline{C_0} > 0$ tal que

$$\|u\|_p^p \leq \overline{C_0}\|u\|_{\partial}^p, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{39}$$

Caso (39) valha, podemos tomar $C_1 > 1$, tal que $\|u\|_p^p \leq (C_1 - 1)\|u\|_{\partial}^p$, e assim, $\|u\|^p \leq C_1\|u\|_{\partial}^p$. Suponhamos o contrário, isto é, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$\|u_k\|_p^p > k\|u_k\|_{\partial}^p. \tag{40}$$

Assumimos, s.p.g., $\|u_k\|_p = 1$. Por (40),

$$\|u_k\|_{\partial} \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Por isso,

$$\|u_k\|_{p,\partial} \to 0 \text{ e } \|\nabla u_k\|_p^p \to 0, \text{ quando } k \to \infty. \tag{41}$$

Como $\|u_k\|$ é limitado e $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existem uma subsequência, ainda denotada por (u_k), e $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, tal que

$$u_k \rightharpoonup u_0, \text{ quando } k \to \infty, \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|),$$

e assim, pelo Teorema 6.1.1,

$$u_k \to u_0 \text{ em } (L^p(\Omega), \|\cdot\|_p).$$

Por outro lado, devido a $u_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u_0 \text{ em } (L^p(\Omega))^n.$$

Deste modo, por $u_k \rightharpoonup u_0$ em $L^p(\Omega)$,

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_p^p \geq \|\nabla u_0\|_p^p.$$

Disto e de (41), $\|\nabla u_0\|_p^p = 0$, e assim, u_0 é constante. Agora, pelo Teorema 6.2.2, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$ é compacto. Consequentemente,

$$0 = \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{p,\partial} \geq \|u_0\|_{p,\partial},$$

ou seja, $\|u_0\|_{p,\partial} = 0$. Logo, $u_k \to 0$ em $L^p(\Omega)$ com $\|u_k\|_p^p = 1$, o que é um absurdo. Por isto, vale (39), e com (38), a proposição em questão. ■

Proposição 5: As normas $\|\cdot\|_\beta$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Ora, dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_\beta^p &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|u|^p ds \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \|\beta\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u|^p ds \\ &\leq \max\{1, \|\beta\|_\infty\}\|u\|_\partial^p \end{aligned}$$

Denotando $A = \max\{1, \|\beta\|_\infty\}^{\frac{1}{p}} > 0$, temos que $\|u\|_\beta \leq A\|u\|_\partial$, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, por $\overline{\beta} = \inf\limits_{s\in\partial\Omega} \beta(s) > 0$,

$$\begin{aligned} \|u\|_\beta^p &= \int_\Omega |u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|u|^p ds \\ &\geq \int_\Omega |u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \overline{\beta}|u|^p ds \\ &\geq \min\{1, \overline{\beta}\}\|u\|_\partial^p. \end{aligned}$$

Definindo $B = \min\{1, \overline{\beta}\}^{\frac{1}{p}} > 0$, temos $\|u\|_\beta \geq B\|u\|_\partial$, e assim, $\|\cdot\|_\beta$ e $\|\cdot\|_\partial$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$. Por isto e pelo Lema 5, $\|\cdot\|_\beta$ e $\|\cdot\|$ também são normas equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$. ■

Tendo em mãos a equivalencia da norma $\|\cdot\|_\beta$, com a norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$ em

$W^{1,p}(\Omega)$, podemos mostrar que as autofunções associadas a qualquer autovalor de (35) pertencem a $L^\infty(\Omega)$.

4.3 Regularidade das autofunções de $RS(\Omega)$

Nesta seção, mostraremos que as autofunções de (35) estão em $C^{1,\alpha}(\Omega)$, e quando $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$, para algum $\gamma \in (0,1]$, as autofunções são de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, de forma similar ao processo utilizado no capítulo anterior para os problemas $D(\Omega)$ e $N(\Omega)$, bem como usar os mesmos resultados que foram citados anteriormente na seção 3.3. No que segue e $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $C^{0,1}$.

Teorema 14 (Limitação das soluções fracas de $RS(\Omega)$): Se $(u,\lambda) \in W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (35), então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: Por $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, quando $p > n$, basta considerarmos o caso $1 < p \leq n$. Suponhamos, inicialmente, $u \geq 0$. Utilizaremos, novamente, a técnica de iteração de Moser. Para isso, para cada $M > 0$, sejam $v_M(x) = \min\{u(x), M\}$ e $\phi = v_M^{kp+1}$, com $k > 0$. Do Teorema 6.2.1, $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\nabla\phi = (kp+1)v_M^{kp}\nabla v_M$ e $v_M \mid_{\partial\Omega} = \min\{u \mid_{\partial\Omega, M}\}$. Utilizando ϕ como função teste em (35), segue que

$$\begin{aligned}(kp+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_M v_M^{kp}dx + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{p-2}uv_M^{kp+1}ds &= \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}uv_M^{kp+1}dx \\ &+ \lambda\int_{\partial\Omega}|u|^{p-2}uv_M^{kp+1}ds,\end{aligned}$$

ou

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega |\nabla v_M^{k+1}|^p dx + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{p-2}uv_M^{kp+1}ds \leq \lambda\left(\int_\Omega |u|^{(k+1)p}dx + \int_{\partial\Omega}|u|^{(k+1)p}ds\right).$$

Disto, de $\lim_{M\to\infty} v_M = u$ e do Teorema 6.1.4,

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega |\nabla u^{k+1}|^p dx + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{(k+1)p}ds \leq \lambda\left(\int_\Omega |u|^{(k+1)p}dx + \int_{\partial\Omega}|u|^{(k+1)p}ds\right).$$

Ainda, por $\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} < 1$, para todo $k > 0$,

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\left(\int_\Omega |\nabla u^{k+1}|^p dx + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{(k+1)p}ds\right) \leq \lambda\left(\int_\Omega |u|^{(k+1)p}dx + \int_{\partial\Omega}|u|^{(k+1)p}ds\right),$$

ou seja,

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\|u^{k+1}\|_\beta^p \leq \lambda\left(\|u^{k+1}\|_p^p + \|u^{k+1}\|_{p,\partial}^p\right). \tag{42}$$

Em [31], página 265, temos a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{p,\partial}^p \leq \varepsilon\|u\|^p + C(\varepsilon)\|u\|_p^p,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Disto e das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\beta$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$\|u\|_{p,\partial}^p \leq \varepsilon C^{'}\|u\|_\beta^p + C(\varepsilon)\|u\|_p^p,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Utilizando u^{k+1} ao invés de u na desigualdade acima, temos, de (42)

$$\left(\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} - \lambda\varepsilon C^{'}\right)\|u^{k+1}\|_\beta^p \leq \lambda(1 + C(\varepsilon))\|u^{k+1}\|_p^p.$$

Como $\varepsilon \to 0$, podemos assumir que $\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} - \lambda\varepsilon C^{'} > 0$, e assim,

$$\|u\|_\beta \leq \left(\lambda(1+C(\varepsilon))\frac{1}{\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} - \lambda\varepsilon C'}\right)^{\frac{1}{(k+1)p}}\|u\|_{(k+1)p.} \tag{43}$$

Ainda, por $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, se $p < n$, e $p^* = \frac{np}{n-p}$ ou $p \geq n$ e $p^* = 2p$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u^{k+1}\|_{p^*} \leq C_1\|u^{k+1}\|_\beta,$$

e disto,

$$\|u\|_{(k+1)p^*} \leq C_1^{\frac{1}{k+1}}\|u\|_\beta. \tag{44}$$

Por existir o limite, quando $k \to \infty$, de $\left(\lambda(1+C(\varepsilon))\frac{1}{\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} - \lambda\varepsilon C'}\right)$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\left(\lambda(1+C(\varepsilon))\frac{1}{\frac{(kp+1)}{(k+1)^p} - \lambda\varepsilon C'}\right)^{\frac{1}{p\sqrt{k+1}}} \leq C_2.$$

Disto, de (43) e de (44), segue que

$$\|u\|_{(k+1)p^*} \leq C_1^{\frac{1}{k+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\|u\|_{(k+1)p},\ \forall\, k > 0. \tag{45}$$

Como (45) vale para todo $k > 0$, obtemos uma sequência recursiva (k_n), de modo que

$(k_n+1)p = (k_{n-1}+1)p^*$, $k_0 = 0$. Da recursividade da mesma, decorre que $k_n+1 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^n$. Consequentemente,

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} C_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}} \|u\|_{p^*}.$$

E, por $\frac{p}{p^*} < 1$, existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C\|u\|_{p^*}. \tag{46}$$

Definindo $r_n = (k_n+1)p^*$, temos, de $\frac{p}{p^*} < 1$, que $r_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Se $u \notin L^\infty(\Omega)$, então existem $\varepsilon_1 > 0$ e um conjunto de medida positiva $A \subset \Omega$, tal que $|u(x)| > C\|u\|_{p^*} + \varepsilon_1 := K$, para todo $x \in A$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|u\|_{r_n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A K^{\frac{1}{r_n}} dx\right)^{\frac{1}{r_n}} \\
&= \liminf_{n\to\infty} K|A|^{\frac{1}{r_n}} \\
&= K \\
&> C\|u\|_{p^*},
\end{aligned}$$

o que contraria (46). Portanto, $u \in L^\infty(\Omega)$. Caso u mude de sinal em Ω, basta considerarmos u^+ e u^- e, analogamente, mostra-se que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$, $u^- \in L^\infty(\Omega)$, e assim, $u = u^+ - u^- \in L^\infty(\Omega)$. ■

Consideremos agora a equação elíptica definida em (25). Nas mesmas condições do Teorema 5, garantiremos que as autofunções de (35) são de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha > 0$.

Corolário 4: Se u é uma autofunção no sentido fraco (35), então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Prova: Demonstração análoga à feita no Corolário 1. ■

Corolário 5: Se u é uma autofunção não negativa da forma fraca (35), então u é positiva em todo domínio.

Prova: Demonstração análoga à do Corolário 2.

Teorema 15: Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, com $\partial\Omega$ de classe $C^{1,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$.

e u uma solução fraca da forma

$$\begin{cases} -\triangle_p u(x) = g(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \phi(x,u), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{47}$$

com $\|u\|_\infty \leq M$. Ainda, se $g \in L^\infty(\Omega)$, com $\|g\|_\infty \leq K$ e

$$|\phi(x,z) - \phi(y,w)| \leq L\left[|x-y|^\gamma + |z-w|^\gamma\right], \ |\phi(x,z)| \leq L,$$

para todo $(x,z),(y,w) \in \partial\Omega\times[-M,M]$, então existe uma constante $\alpha = \alpha(\gamma,n,p,M,K) > 0$ tal que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\gamma,n,p,M,K,L,\Omega).$$

Prova: Veja Lieberman [27] (Teorema 2, página 1204). ■

Como uma solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de (47) satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega g\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \phi(x,u)\varphi ds, \ \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Observamos que se $\phi(x,s) = (\lambda - \beta)|s|^{p-2}s$, então ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema 15, para $0 < \gamma \leq \min\{p-1,1\}$. Como, neste caso, a solução fraca de (47) e de (35) serão as mesmas, se $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$, para algum $\gamma \in (0,1]$, então as autofunções da forma fraca (35) estão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

4.4 Uma análise do espectro de $RS(\Omega)$

Nesta seção, faremos uma análise do primeiro autovalor do problema $RS(\Omega)$, bem como, provaremos que o espectro do problema de Robin-Steklov é fechado. No que segue, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe $C^{1,\gamma}$, para algum $\gamma \in (0,1]$ e $1 < p < \infty$. De (35), via teoria dos quocientes de Rayleigh (veja [21]), temos que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|u|^p ds; \ \int_\Omega |u|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u|^p ds = 1 \right\}, \tag{48}$$

e assim, λ_1 é o menor dentre todos os autovalor do problema $RS(\Omega)$. Veremos, a seguir, que as autofunções associadas a λ_1 não devem mudar de sinal em $\overline{\Omega}$.

Proposição 6: As autofunções associadas a λ_1 são positivas ou negativas em $\overline{\Omega}$.

Prova: Seja u uma autofunção associada a λ_1. De (48) e do Lema 6.2.2, temos que $|u|$ é também uma autofunção associada a λ_1. Da desigualdade de Harnack, obtemos que $|u| > 0$ em Ω. Se existir $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, do Lema de Hopf (veja [40]), segue que $\frac{\partial |u|}{\partial \eta}(x_0) < 0$. Porém

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\lambda - \beta)\,|u|^{p-2}u.$$

Consequentemente, $|\nabla |u|(x_0)|^{p-2}\frac{\partial |u|}{\partial \eta}(x_0) = 0$, concluíndo que $\frac{\partial |u|}{\partial \eta}(x_0) = 0$, o que gera uma contradição. Portanto, $|u| > 0$ em $\overline{\Omega}$. ■

Lema 6 (Identidade de Picone): Sejam $u \geq 0$, $v > 0$ duas funções contínuas e diferenciáveis q.t.p. em Ω. Denotemos

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u,$$

e

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)\nabla v.$$

Logo, $L(u,v) = R(u,v)$. Ainda, $L(u,v) \geq 0$ q.t.p. em $\Omega \times \Omega$ e $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω se, e somente se, $u = kv$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

Prova: Ora, a igualdade entre L e R segue de que

$$\begin{aligned} R(u,v) &= |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\frac{pu^{p-1}v^{p-1}\nabla u - u^p(p-1)v^{p-2}\nabla v}{v^{2p-2}}\nabla v \\ &= |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla v\nabla u + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p \\ &= L(u,v). \end{aligned}$$

Ainda, pela desigualdade de Young (Teorema 6.1.3), fazendo $a = |\nabla u|$ e $b = \left(\frac{u|\nabla v|}{v}\right)^{p-1}$, observando que $q = \frac{p}{p-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla u||\nabla v|^{p-1} &\leq \frac{|\nabla u|^p}{p} + \left[\left(\frac{u|\nabla v|}{v}\right)^{p-1}\right]^{\frac{p}{p-1}}\frac{(p-1)}{p} \\ &= \frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p\left(\frac{p-1}{p}\right). \end{aligned}$$

Contudo, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v &\leq \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla u\nabla v|\\ &\leq \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}L(u,v) &= |\nabla u|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p\\ &+ p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right]\\ &\geq p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla u||\nabla v| + p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right]\\ &= p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right]\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Agora,

$$L(u,v) = |\nabla u|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p + p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right].$$

Caso $L(u,v) = 0$, decorre que, da igualdade acima, que

$$\begin{aligned}0 &= L(u,v)\\ &\geq p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right]\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Disto, tiramos que

$$|\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p = p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla u||\nabla v|. \ (\star)$$

Da definição de L e da estimativa obtida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$0 \leq |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| \leq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Ao considerarmos $K = \{x \in \Omega;\ \frac{u}{v}|\nabla v| = 0\}$ temos, de $(\star)$, que $|\nabla u| = 0$ q.t.p. em K.

Portanto,

$$|\nabla u| = \frac{u}{v}|\nabla v| = 0 \text{ q.t.p. em } K. \ (\star\star)$$

Seja $\eta = \dfrac{|\nabla u|v}{|\nabla v|u}$. De $(\star)$,

$$\frac{|\nabla u|^p}{|\nabla v|^p} + (p-1)\frac{u^p}{v^p} - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\frac{|\nabla u|}{|\nabla v|} = 0,$$

por isto,

$$\frac{v^p|\nabla u|^p}{u^p|\nabla v|^p} + p - 1 - p\frac{v|\nabla u|}{u|\nabla v|} = 0.$$

Disto,

$$\eta^p + p - 1 - p\eta = 0.$$

Do Lema 6.1.8, segue que $\eta = 1$, e assim,

$$|\nabla u| = \frac{u}{v}|\nabla v| \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K. \ (\star\star\star)$$

Por isso, e por $L(u,v) = 0$,

$$|\nabla u|^p + (p-1)|\nabla u|^p - p\frac{u}{v}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K.$$

Consequentemente,

$$|\nabla u|^2 + (p-1)|\nabla u|^2 - p\frac{u}{v}\nabla u \nabla v = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K.$$

De $(\star\star\star)$, segue que

$$\begin{aligned} p|\nabla u|^2 - p\frac{u}{v}\nabla u\nabla v = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K \ &\Leftrightarrow \ |\nabla u|^2 - \frac{u}{v}\nabla u \nabla v = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K \\ &\Leftrightarrow \ \nabla u\left(\nabla u - \frac{u}{v}\nabla v\right) = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K \\ &\Leftrightarrow \ \nabla u = \frac{u}{v}\nabla v \text{ q.t.p. em } \Omega \setminus K. \end{aligned}$$

Por fim, disto e de $(\star\star)$, $\nabla u = \frac{u}{v}\nabla v$ em Ω. Logo, $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p. em Ω, e assim, $u = kv$, para alguma constante $k \in \mathbb{R}$, encerrando esta demonstração. ■

Teorema 16: O primeiro autovalor λ_1 de (35) é simples.

Prova: Suponha que u, v sejam autofunções associadas a λ_1, s.p.g., $u > 0$, $v > 0$ em Ω.

Para $\varepsilon > 0$, pela identidade de Picone no par u, v_ε, com $v_\varepsilon = v + \varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega L(u, v_\varepsilon)dx \\ &= \int_\Omega R(u, v_\varepsilon)dx \\ &= \int_\Omega \left[|\nabla u|^p - |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \nabla \left(\frac{u^p}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Disto, de $\nabla v = \nabla v_\varepsilon$ e de (35), com $v = u$, segue que

$$0 \leq \int_\Omega L(u, v_\varepsilon)dx \leq -\int_{\partial\Omega} \beta(s)u^p ds + \lambda_1 \int_\Omega u^p dx + \lambda_1 \int_{\partial\Omega} u^p ds - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \left(\frac{u^p}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) dx. \tag{49}$$

Como $\frac{u^p}{v_\varepsilon^{p-1}} \in W^{1,p}(\Omega)$, temos em (49) que, por $v > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \;\; \leq & \;\; -\int_{\partial\Omega} \beta(s)u^p ds + \lambda_1 \int_\Omega u^p dx + \lambda_1 \int_{\partial\Omega} u^p ds \\ & + \int_{\partial\Omega} \beta(s) \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p ds - \lambda_1 \int_\Omega \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p dx - \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 6.1.9),

$$\int_\Omega \lim_{\varepsilon \to 0} L(u, v_\varepsilon)dx = 0.$$

Portanto, $L(u, v) = 0$ q.t.p. em Ω. Do Lema 6, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $u = kv$. ■

Teorema 17: Se v é uma autofunção associada a $\lambda \neq \lambda_1$, então v muda de sinal em Ω.

Prova: Suponha que v não muda de sinal em Ω, s.p.g., $v > 0$. Seja u um autovalor associado a λ_1. Fazendo contas similares as feitas em (49), temos que

$$\begin{aligned} 0 \;\; \leq & \;\; -\int_{\partial\Omega} \beta(s)u^p ds + \lambda_1 \int_\Omega u^p dx + \lambda_1 \int_{\partial\Omega} u^p ds \\ & + \int_{\partial\Omega} \beta(s) \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p ds - \lambda \int_\Omega \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} u^p ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$,

$$0 \leq (\lambda_1 - \lambda) \left(\int_\Omega u^p dx + \int_{\partial\Omega} u^p ds \right),$$

o que é um absurdo, pois $\lambda > \lambda_1$ e $\left(\int_\Omega u^p dx + \int_{\partial\Omega} u^p ds\right) > 0$. Portanto, v muda de sinal em Ω. ■

Com o Teorema 17, garantimos que as autofunções que estejam associadas a autovalores que sejam distintos de λ_1 devem mudar de sinal em Ω. Provemos, a seguir, que este resultado vale também para $\overline{\Omega}$.

Teorema 18: Seja u uma autofunção correspondente a $\lambda > \lambda_1$, então u muda de sinal em $\overline{\Omega}$. Mais ainda, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^*}} + |\partial\Omega^-|^{1-\frac{1}{p^\partial}} \geq \frac{1}{\lambda C}, \tag{50}$$

e

$$|\Omega^+|^{1-\frac{p}{p^*}} + |\partial\Omega^+|^{1-\frac{1}{p^\partial}} \geq \frac{1}{\lambda C}, \tag{51}$$

onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ e $p^\partial = \frac{(n-1)p}{n-p}$ se $1 < p < n$ e $p^* = 2p = p^\partial$ se $p \geq n$.

Prova: Seja u uma autofunção correspondente a $\lambda > \lambda_1$. Então, do Teorema 17, u muda de sinal em Ω. Suponha que u não muda de sinal em $\partial\Omega$. Assim, podemos supor, s.p.g., que $u \leq 0$ em $\partial\Omega$. Usando u^+ como uma função teste em (35), temos que u^+ é também uma autofunção associada a λ. Desde que u^+ não muda de sinal em Ω, usando o Teorema 17 e a Proposição 6, obtemos que $\lambda = \lambda_1$, o que é um absurdo. Para a demonstração de (50), usaremos u^- como uma função teste na forma fraca (35). Ora,

$$\|u^-\|_\beta^p = \lambda(\|u^-\|_p^p + \|u^-\|_{p,\partial}^p).$$

Agora, da desigualdade de Hölder,

$$\|u^-\|_\beta^p \leq \lambda|\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_\Omega |u^-|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} + \lambda|\partial\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^\partial}} \left(\int_{\partial\Omega} |u^-|^{p^\partial} dx\right)^{\frac{p}{p^\partial}}.$$

Por $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\partial}(\partial\Omega)$ (Teoremas 6.1.1 e 6.1.2), existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$\|u^-\|_{p^*}^p \leq C_1\|u^-\|_\beta^p \text{ e } \|u^-\|_{p^\partial,\partial}^p \leq C_2\|u^-\|_\beta^p.$$

Logo,

$$\|u^-\|_\beta^p \leq \lambda C_1|\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^*}}\|u^-\|_\beta^p + \lambda C_2|\partial\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^\partial}}\|u^-\|_\beta^p.$$

Consequentemente, $|\Omega^-|^{1-\frac{p}{p^*}} + |\partial\Omega^-|^{1-\frac{1}{p^\partial}} \geq \frac{1}{\lambda C}$, com $C = \max\{C_1, C_2\}$. De forma análoga mostra-se a validade de (51). ■

Teorema 19: O espectro do problema $RS(\Omega)$ é fechado.

Prova: Sejam $X = W^{1,p}(\Omega)$ e $((u_n, \gamma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de autopares de (35) tais que $\gamma_n \to \gamma$, para algum $\gamma \geq 0$. Assumimos, s.p.g., $\|u_n\| = 1$. Disto e de X ser um espaço reflexivo, do Lema 6.1.6, (u_n) possui uma subsequência fracamente convergente em X, que ainda será denotada por u_n. Como (u_n, γ_n) satisfaz (35), temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \beta |u_n|^{p-2} u_n v ds = \gamma_n \left(\int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n v dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^{p-2} u_n v ds \right), \ \forall\, v \in X.$$

Como,

$$\langle Bu_n, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (1+\beta)|u_n|^{p-2} u_n v ds, \ \forall\ v \in X,$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle &= \gamma_n \left(\int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) ds \right) \\ &+ \int_{\partial\Omega} |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) ds - \langle Bu, u_n - u\rangle, \end{aligned}$$

que tende a 0, quando $n \to \infty$. O restante da prova é inteiramente análogo ao que foi feito na prova do Teorema 10. Logo, (u, γ) é um autopar de (35). ■

Por fim, provemos que o primeiro autovalor λ_1 do problema $RS(\Omega)$ é isolado.

Teorema 20: O principal autovalor λ_1 de (35) é isolado.

Prova: Assuma que existe uma sequência de distintos autovalores λ_n, de (35), com $\lambda_n \to \lambda_1$. Seja u_n uma autofunção associada a λ_n. De (35), com $u_n = u = v$,

$$0 < \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|u_n|^p ds = \lambda_n \left(\int_\Omega |u_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^p ds \right). \tag{52}$$

Definindo

$$v_n := \frac{u_n}{\left(\int_\Omega |u_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}},$$

por v_n ser limitado em $W^{1,p}(\Omega)$, existem, do Lema 6.1.6, uma subsequência, ainda denotada por v_n e $v \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$. Ainda mais, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega |v_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} |v_n|^p ds = \frac{\int_\Omega |u_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^p ds}{\int_\Omega |u_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^p ds} = 1. \tag{53}$$

Por outro lado, do Teorema 6.1.4,

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|v|^p ds \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|v_n|^p ds.$$

Disto, de (52) e de (53), segue que

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|v|^p ds \leq \lambda_1.$$

Da definição de λ_1 em (48), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s)|v|^p ds = \lambda_1.$$

Da Proposição 6, temos que $|v| > 0$. Se $v > 0$ (o outro caso é análogo), concluímos da convergência em medida da sequência v_n com respeito a v (Lema 6.1.7) que

$$|\Omega_n^-| \to 0 \text{ e } |\partial\Omega_n^-| \to 0,$$

o que contradiz (50). Logo, vale a afirmação inicial. ■

5 Conclusão

O princípio L-S mostrou-se útil para obter uma sequência de autovalores para o p-Laplaciano, justamente por que diversas condições de fronteira podem ser englobadas em um único problema de autovalor. Observamos que não nos aprofundamos sobre tal teoria e sobre a demonstração dos resultados de regularidade das autofunções, pois o estudo destes é suficiente para a confecção de uma outra dissertação.

Observamos que o princípio L-S pode também ser tanto utilizado com condições mistas de fronteira quanto com domínios em variedades. O princípio L-S com condições de fronteira mista requer certos cuidados, pois necessita de uma adaptação na norma do espaço que será utilizado.

Ainda, conforme An Lê observa em [26], algumas questões ficam para trabalhos futuros:

- Os autovalores obtidos a partir da sequência L-S são únicos?
- O espectro desses problemas é discreto?
- Que tipo de alternativa de Fredholm pode ser derivado de tais autovalores?
- Quais são os resultados de ressonância?

Referências

[1] ADAMS, R. FOURNIER, J., **Sobolev Spaces**, second ed., Academic Press, New York, 2003.

[2] ALLEGRETTO, W., HUANG, Y.X., **A Picone's identity for the p-Laplacian and aplications**, Nonlinear anal., pp 725-728, 1987.

[3] ANANE, A., **Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids**, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math (305), pp 725-728, 1987.

[4] ASTARITA, G., MARRUCCI, G., **Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, McGraw-Hill, New York, 1974.

[5] BARTLE, R.G., **The Elements of Integration**, John Wiley and Sons, Inc., New York . London . Sydney, 1966.

[6] BIEZUNER, R.J., **Autovalores do Laplaciano**, Notas de aula do curso Tópicos em Análise: Autovalores do Laplaciano, 2006.

[7] BONDER, J.F., ROSSI, J.D., **Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions**, J. Math. Anal. Appl. 263, pp. 195-223, 2001.

[8] BRÉZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2011.

[9] BROWDER, F., **Existence theorems for nonlinear partial differential equations**, in: Global Analysis, Proceedings of the Symposium Pure Mathematics, vol. XVI, Berkeley, California, 1968, American Mathematics Society Providence, RI, pp. 1-60, 1970.

[10] CAVALCANTI, M.M., DOMINGOS, CAVALCANTI, V.N. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, Maringá, Eduem, 2009.

[11] CHAKRONE, O., DARHOUCHE, O., RAHMANI, M., TSOULI, N., **Nonlinear Eigenvalue Problem for the p-Laplacian**, Comm. in Math. Anal. 20, pp 69-82, 2017.

[12] DE FIGUEIREDO, D.G., GOSSEZ, J.-P. **On the first curve of the Fucik spectrum of an elliptic operator**, Differential Integral Equations 7, pp.1285-1302, 1994.

[13] DE GODOI, J.D.B., **Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações**, Tese (Doutorado em Matemática)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, São Paulo, 2012.

[14] DENG, S.G.,**Positive solutions for Robin problem involving the p(x)-Laplacian**, J. Math. Anal.Appl. 360(2), pp 548-560, 2009.

[15] DIBENEDETTO, E., $C^{1+\alpha}$ **local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations**, Nonlinear Anal. 7, pp 827-850, 1983.

[16] DRABEK, P., KUFNER, A., NICOLOSI, F., **Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities**, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications vol.5, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1997.

[17] FOLLAND, G., **Real Analysis Modern Techniques and their Applications**, New York, John Wiley and Sons, 1984.

[18] FUCIK, S., JOHN, O., KUFNER, A., **Function Spaces**, Noordhoff, Leyden, 1977.

[19] FUCÍK, S., NECAS, J., SOUCEK, J., SOUCEK, V., **Spectral Analysis of Nonlinear Operators**, Lecture Notes in Mathematics, vol. 346, Springer, Berlin, 1973.

[20] GARCÍA AZORERO, J.P., PERAL ALONSO, I., **Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues**, Comm. Partial Differential Equations 12, pp. 1389-1430, 1987.

[21] GILBARG, D., TRUDINGER, N.S., **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2001.

[22] HARDY, G., LITTLEWOOD, J., PÓLYA, G., **Inequalities**, Cambridge The University Press, London, 1934;

[23] IWANIEC, T., MANFREDI, J.J., **Regularity of p-harmonic functions on the plane**, Rev. Mat. Iberoamericana 5, pp. 1-19, 1989.

[24] KAVIAN, O., **Introduction à la théorie des points critiques et applications max problémes elliptiques**, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[25] KREYSZIG, E., **Introductory Functional Analysis with Applications**, Wiley, New York, 1978.

[26] LÊ, AN., **Eigenvalue problems for the p-Laplacian**, Nonlinear Anal. 64, pp 1957-1099, 2006.

[27] LIEBERMAN, G.M., **Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations**, Nonlinear Anal. 12, pp 1203-1219, 1988.

[28] LIMA, E., **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$, Primeira Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[29] LINDQVIST, P., **On the equation** $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, Proc. Amer. Math. Soc. 116, pp 583-584, 1992.

[30] MARTÍNEZ, S., ROSSI, J.D., **Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition**, Abstr. Appl. Anal. 7, pp 287-293, 2002.

[31] MAZ'JA, V.G., **Sobolev Spaces**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[32] NECAS, I., **The discreteness of the spectrum of a nonlinear Sturm-Liouville equation**, Soviet Math. Dokl. 12, pp.1779-1783, 1971.

[33] RAO, M.M., REN, Z.D., **Theory of Orlicz spaces**, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[34] RUDIN, W., **Principles of mathematical analysis**, McGraw-Hill, New York, 1976.

[35] SHOWALTER, R.E., **Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations**, Electronic Monographs in Differential Equations, San Marcos, TX, 1994.

[36] TOLKSDORF, P., **Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations**, J. Differential Equations 51, pp 126-150, 1984.

[37] TROYANSKI, S.L., **On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces**, Studia Math. 37, pp 173-180, 1970/1971.

[38] TRUDINGER, N.S., **On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations**, Comm. Pure Appl. Math. 20, pp 721-747, 1967.

[39] WINKERT, P., **L^∞ - estimates for nonlinear elliptic Neumann boundary value problems**, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 3, pp-289-302, 2010.

[40] VÁSQUEZ, J.L., **A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations**, Appl. Math. Optim. 12, pp.191-202, 1984.

[41] ZEIDLER, E., **The Ljusternik-Schnirelman theory for indefinite and not necessarily odd nonlinear operators and its applications**, Nonlinear Anal. 4, pp.451-489, 1980.

[42] ZEIDLER, E., **Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol.3**,

Variational Methods and Optimization, Springer, Berlin, 1985.

[43] ZEIDLER, E., **Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol.2A**, Linear Monotone Operators, Springer, Berlin, 1990.

6 Apêndice

Elencaremos aqui os resultados que nos auxiliaram na elaboração deste trabalho, bem como referências das suas demonstrações.

6.1 Resultados auxiliares e algumas desigualdades

Nesta seção separamos algumas desigualdades utilizadas ao decorrer da dissertação, bem como resultados de Análise Funcional e Teoria da Medida.

Lema 6.1.1: Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função de Young, isto é, existe $c > 0$ tal que $\phi(2t) \leq c\phi(t)$, para todo $t \geq 0$. Se (u_n) é uma sequência de funções integráveis em Ω tal que

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \text{ q.t.p. em } x \in \Omega \text{ e } \int_\Omega \phi(|u|)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(|u_n|)dx,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(|u_n - u|)dx = 0.$$

Prova: Veja Rao e Ren [33]. ■

Lema 6.1.2: (a) Se $p \geq 2$, então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x \cdot (y - x) + C(p)|x - y|^p. \tag{54}$$

(b) Se $1 < p < 2$, então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x \cdot (y - x) + C(p)\frac{|x - y|^2}{(|x| + |y|^{p-2})}. \tag{55}$$

(c) Para cada $x \neq y$, $p > 1$, temos que

$$|y|^p > |x|^p + p|x|^{p-2}x \cdot (y - x). \tag{56}$$

Prova: Veja Linqdvist [29]. ■

Lema 6.1.3: Se $0 \leq p < \infty$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então existe uma constante positiva $K(p)$, onde $K(p) = 1$, se $0 \leq p < 1$ e $K(p) = 2^{p-1}$, se $1 \leq p < \infty$, tal que $(a+b)^p \leq K(p)(a^p+b^p)$.

Prova: Veja Adams, Fournier [1]. ■

Lema 6.1.4: Sejam A, B, C, D números reais positivos e $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$, então $A^\alpha B^\beta + C^\alpha D^\beta \leq (A + C)^\alpha (B + D)^\beta$.

Prova: Veja Hardy, Littlewood, Pólya [22]. ■

Lema 6.1.5: Valem os seguintes itens:

(i) Se $2 \leq p < \infty$, então existe uma constante positiva A_1 tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq A_1|x - y|(|x| + |y|)^{p-2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) Se $1 < p \leq 2$, então existe uma constante positiva A_2 tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq A_2|x - y|^{p-1}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Prova: Veja Kavian [24]. ■

Teorema 6.1.1 (Rellich-Kondrachov): Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{0,1}$ em $\mathbb{R}^n$. Se $p \in [1, \infty)$, então o mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo, desde que

(i) $1 < p < n$ e $1 \leq q \leq \frac{np}{(n-p)}$, ou

(ii) $p \geq n$ e $q \in [1, \infty)$.

Além disso, caso $p < n$ e $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ ou $p \geq n$ e $q \in [1, \infty)$, o mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto.

Prova: Veja Fucik, John, Kufner [18]. ■

Teorema 6.1.2 (Operador traço): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe $C^{0,1}$, $n \geq 2$ e $p \in [0, \infty)$. Então existe um único operador, denominado operador traço,

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega),$$

contínuo, desde que:

(1) $p < n$ e $1 \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-p}$;

(2) $p \geq n$ e $q \in [1, \infty)$.

Além disso, se $p < n$ e $1 \leq q < \frac{(n-1)p}{n-p}$ ou $p \geq n$ e $q \in [1, \infty)$, então o operador Γ é compacto.

Prova: Veja Fucik, John, Kufner [18]. ■.

Lema 6.1.6: Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente.

Prova: Veja Brézis [8]. ■

Lema 6.1.7: Seja $(u_k) \subset L^p(\Omega)$. Se $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$, então u_k converge para u em medida.

Prova: Veja Kavian [24]. ■

Lema 6.1.8: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^p - px + p - 1$, com $1 < p < \infty$. Então $x = 1$ é a única raíz positiva de f.

Prova: Ora, temos que f é coerciva, com $f(0) = p + 1$, $f(1) = 0$. Ainda,

$$f^{'}(x) = p\left(x^{p-1} - 1\right).$$

Como $f^{'}(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$ e $f^{'}(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$, e f é contínua, logo, $x = 1$ é a única raíz positiva de f. ■

Definição 6.1.1: Sejam X um espaço de Banach e $U \subset X$ um conjunto aberto, $F : U \to \mathbb{R}$. Então o funcional F é derivável a Gateaux no ponto $u \in U$ se, para todo $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x) - \langle F^{'}, th \rangle}{t} = 0,$$

e dizemos que sua derivada de Gateaux no ponto x é $F^{'}(x)$. Agora, um funcional F é derivável a Fréchet no ponto $x \in U$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x) - \langle F^{'}, h \rangle}{\|h\|} = 0,$$

onde $F^{'}$ é a derivada de Fréchet de F.

Observamos que um funcional $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ quando sua derivada de Fréchet de F existe e é contínua em U. Ainda, toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gateaux.

Teorema 6.1.3 (Desigualdade de Young): Se $1 < p, q < \infty$, onde p e q são expoentes conjugados e $a, b \geq 0$, então $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Prova: Veja Folland [17]. ■

Teorema 6.1.4 (Lema de Fatou): Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis e não negativas definidas em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Prova: Veja Folland [17]. ■

Teorema 6.1.5 (Desigualdade de Holder): Sejam $1 < p, q < \infty$ expoentes conjugados e f, g funções mensuráveis em $\Omega \subset X$, então $fg \in L^1(\Omega)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ e vale a igualdade se, e somente se, $u = kv$ q.t.p. em Ω, para algum $k \geq 0$.

Prova: Veja Folland [17]. ■

Definição 6.1.2: Uma sequência de funções $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_\nu) \subset K, \ \forall \nu \in \mathbb{N};$$

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em Ω para cada multi-índice α quando $\nu \to \infty$.

Quando $C_0^\infty(\Omega)$ for munido da noção de convergência definida em **(i)** e **(ii)**, tal espaço será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 6.1.3: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos

$$x = (x', x_n), \text{ com } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

com

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n); \ x_n > 0\},$$

$$Q = \{x = (x', x_n); \ |x'| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^n_+,$$

$$Q_0 = \{x = (x', 0); \ |x'| < 1\}.$$

Dizemos que um conjunto aberto Ω é de classe $C^{0,1}$ se, para cada $x \in \partial\Omega$, existe uma vizinhança U de $x \in \mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetiva $H : Q \to U$ tal que

(i) $H \in C^1(\overline{\Omega})$;

(ii) $H^{-1} \in C^1(\overline{U})$;

(iii) $H(Q_+) = U \cap Q$;

(iv) $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

A aplicação H é dito um gráfico local.

Definição 6.1.4: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe $C^{1,\gamma}$, com $\gamma \in (0,1]$ se, para todo $x \in \partial\Omega$, existe uma bola $B \subset \mathbb{R}^n$ de centro em x, um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetora $\psi : B \to W$ tal que

(i) $\psi(\Omega \cap B) \subset \mathbb{R}^n_+$;

(ii) $\psi(\partial\Omega \cap B) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) $\psi \in C^{1,\gamma}(B),\ \psi^{-1} \in C^{1,\gamma}(W)$.

Quando $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$, dizemos que o domínio Ω é de classe $C^{1,\gamma}$.

Teorema 6.1.6 (Teorema de Du Bois Raymond): Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e T_u um operador linear, definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Prova: Veja Cavalcanti [10]. ∎

Teorema 6.1.7: Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach uniformemente convexo e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $(X, \|\cdot\|)$, que satisfaz $\limsup \|u_n\| \leq \|u\|$, então $u_n \to u$ em $(X, \|\cdot\|)$.

Prova: Veja Brézis [8]. ∎

Teorema 6.1.8 (Teorema de Egoroff): Sejam $\mu(X) < \infty$, f_n e f função complexas mensuráveis em X tal que $f_n \to f$ em q.t.p.. Então, para cada $\varepsilon > 0$, então existe $E \subset X$ tal que $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em E.

Prova: Veja Folland [17]. ∎

Teorema 6.1.9 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^1 tal que $f_n \to f$ em q.t.p. e existe $g \in L^1$ não negativa tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1$ e $\displaystyle\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Prova: Veja Folland [17]. ∎

6.2 A regra da cadeia em $W^{1,p}(\Omega)$ e seus subespaços

Nesse apêndice relembraremos alguns resultados importantes que foram utilizados nas seções 3.3 e 4.3, que também valem para $W^{1,p}(\Omega)$ e seus subespaços, onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ e $p > 1$. Tais resultado são encontrados em Brézis [8].

Se Ω é um domínio de classe $C^{0,1}$, podemos estudar o traço de uma dada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$, que será denotado por $u\mid_{\partial\Omega}$.

Lema 6.2.1: Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$, com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, valem os itens a seguir:

(i) Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $f(0) = 0$, então $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Em todos os casos, temos $\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u$. Mais ainda, os traços de u e $f(u)$ em $\partial\Omega$ satisfazem

$$f(u\mid_{\partial\Omega}) = f(u)\mid_{\partial\Omega}.$$

Lema 6.2.2: Sejam $X = W^{1,p}(\Omega)$ ou $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Se $u \in X$, então $u^+, u^-, |u| \in X$ e

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 0, \\ \nabla u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u = 0, \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Ainda mais, $(u\mid_{\partial\Omega})^+ = u^+\mid_{\partial\Omega}$ e $(u\mid_{\partial\Omega})^- = u^-\mid_{\partial\Omega}$.

Relembramos que uma função é suave por partes se esta é contínua e tem suas primeiras derivadas contínuas por partes. O conjunto dos pontos de f que não são diferenciáveis é dito conjunto dos pontos de canto de f. A seguinte regra da cadeia generaliza os dois lemas anteriores.

Teorema 6.2.1: Seja $f \in C(\mathbb{R})$ uma função suave por partes, com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então valem os seguintes itens:

(i) Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $f(0) = 0$, então $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Em todos os casos, temos que

$$\nabla(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)\nabla u, & \text{se } u \notin L, \\ 0, & \text{se } u \in L, \end{cases}$$

onde L denota o conjunto dos pontos de canto de f. Ainda mais, $f(u\mid_{\partial\Omega}) = f(u)\mid_{\partial\Omega}$.

6.3 Restrição de funções a domínios nodais

Seja u uma função contínua em um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^n$. Definimos o conjunto zero de u como

$$Z(u) = \{x \in \Omega;\ u(x) = 0\},$$

e dizemos que Ω_1 é um domínio nodal de u se Ω_1 é uma componente conexa de $\Omega \setminus Z(u)$.

Lema 6.3.1: Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$. Dado $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$, então os seguintes itens são equivalentes:

(i) $u = 0$ em $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Veja Brezis [8, Teorema IX.17]. ■

Enunciaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 6.3.1: Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ e $X = W^{1,p}(\Omega)$ ou $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Suponha que u é uma função em $X \cap C(\Omega)$. Dado Ω_1 um domínio nodal de u, então a função $u_1 = u\chi_{\Omega_1} \in X$, onde

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega_1, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Ainda mais, temos que $\nabla u_1(x) = \nabla u(x)\chi_{\Omega_1}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Prova: Veja An Lê [26]. ■

Temos um resultado similar para o traço das funções restrição.

Corolário 6.3.1: Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1 e $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que u tem finitos domínios nodais. Então, para cada domínio nodal Ω_0 de u, a função u_0 definida por $u_0 = u\chi_{\overline{\Omega_0}}$ está em $W^{1,p}(\Omega)$ e seu traço $u_0\mid_{\partial\Omega}$, de

u_0, satisfaz

$$u_0 \mid_{\partial\Omega} (x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_0, \\ 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Prova: Veja An Lê [26]. ■