UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA TERMOELÁSTICO HIPERBÓLICO COM DOMÍNIO NÃO LIMITADO EM $\mathbb{R}$

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Christian Róger Vilela Pieper

Santa Maria, RS, Brasil
2019

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA TERMOELÁSTICO HIPERBÓLICO COM DOMÍNIO NÃO LIMITADO EM $\mathbb{R}$

Christian Róger Vilela Pieper

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Celene Buriol

Santa Maria, RS, Brasil
2019

Pieper, Christian Róger Vilela
Existência, unicidade e estabilidade de solução para um problema termoelástico hiperbólico com domínio não limitado em R / Christian Róger Vilela Pieper.- 2019.
81 f.; 30 cm

Orientadora: Celene Buriol
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Existência e unicidade de solução 2. Comportamento assintótico 3. Modelo Termoelástico 4. Lei de Cattaneo I. Buriol, Celene II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Christian Róger Vilela Pieper

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA TERMOELÁSTICO HIPERBÓLICO COM DOMÍNIO NÃO LIMITADO EM $\mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado pela comissão examinadora, abaixo assinada em 29 de agosto de 2019:

Celene Buriol, Dr ª. (UFSM)
(Presidente - Orientadora)

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)
(Examinador)

Maurício Zahn, Dr. (UFPel)
(Examinador)

Santa Maria, RS, Brasil
2019

DEDICATÓRIA

A todos aqueles que estiveram comigo durante a elaboração deste trabalho e, de alguma maneira, contribuíram no mesmo.
Em especial aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar este trabalho vejo que o mesmo nada mais é do que um reflexo de tudo aquilo que foi realizado durante o período do mestrado, sejam eles momentos de estudo ou lazer. Com isto, gratidão é o sentimento que tenho a todos que estiveram presentes de alguma maneira pois sozinho não seria capaz de concretizar esta dissertação.

Primeiramente, agradeço aos meus pais Francisco Rogerio e Maria Cristina por sempre apoiarem minhas escolhas e fazerem o possível para eu concretizá-las. Senão fossem eles, chegar ao final deste não seria possível.

Sou agradecido a minha namorada Jaíne por todo apoio e compreensão no tempo em que estive ausente e nos momentos difíceis pelos quais passei.

Agradeço a minha orientadora, professora Dr.ª Celene Buriol, por acolher-me e me mostrar a direção para a realização de um trabalho do qual tenho muito orgulho. Sou grato ainda por sua amizade, a qual se mostrou valiosa em inúmeros momentos.

Aproveito também para expressar a importância do curso de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e do seu corpo docente na minha formação.

Não poderia esquecer dos amigos e colegas que junto comigo conviveram na sala dos alunos do PPGMat por todos os momentos compartilhados, tanto nos estudos, quanto nas ocasiões de lazer e descontração, as quais foram de suma importância nessa caminhada.

Reservo uma parte destes agradecimentos para destacar não somente aqueles os quais estiveram comigo durante os anos de mestrado mas também, aqueles que fizeram parte da minha caminhada. Antes disso, na Universidade Federal de Pelotas, os quais suas contribuições foram extremamente importantes para a elaboração deste trabalho.

Entre eles as professoras Dr.ª Lisandra de Oliveira Sauer e Dr.ª Andrea Morgado e o professor Dr. Maurício Zahn o qual tive a honra de te-lô como examinador desta dissertação, e agradeço por suas preciosas contribuições. E ainda, agradeço ao professor Dr. Fidelis Bittencourt da UFSM por suas contribuições enquanto examinador deste trabalho.

Por último, deixo aqui meu agradecimento a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), cujo o presente trabalho foi realizado com apoio da mesma – Código de Financiamento 001.

COMO NOSSOS PAIS

Por: Renato Enoch

Não quero lhe falar, meu grande amor
Das coisas que aprendi nos discos
Quero lhe contar como eu vivi
E tudo o que aconteceu comigo
Viver é melhor que sonhar
Eu sei que o amor é uma coisa boa
Mas também sei que qualquer canto
É menor do que a vida de qualquer pessoa
Por isso cuidado, meu bem
Há perigo na esquina
Eles venceram
E o sinal tá fechado pra nós que somos jovens
Para abraçar meu irmão e *beijar quem se ama*, na rua
É que se fez o seu braço, o seu lábio e a sua voz
Você me pergunta, pela minha paixão
Eu digo que estou encantado
Como uma nova invenção
Eu vou ficar nesta cidade, não vou ir pro sertão
Pois vejo vir vindo no vento o cheiro da nova estação
E eu sei de tudo na vida viva do meu coração
Já faz tempo, eu vi você na rua...

Cabelo ao vento
Gente jovem reunida
Na parede da memória
Essa lembrança é o quadro que dói mais
Minha dor é perceber
Que apesar de termos feito tudo, tudo o que fizemos
Nós ainda somos os mesmos
E vivemos...
Nós ainda somos os mesmos
E vivemos como os nossos pais
Nossos ídolos, ainda são os mesmos
E as aparências, elas não enganam, não
Você diz: "Que depois deles, não apareceu mais ninguém"
Você pode até dizer: "Que eu tô por fora
Ou então que eu tô inventando"
Mas é você, que ama o passado e que não vê
É você, que ama o passado
E que não vê, que o novo sempre vem
E hoje eu sei, que quem me deu a ideia
De uma nova consciência e juventude
Tá em casa guardado por Deus, contando os seus metais
Minha dor é perceber
Que apesar de termos feito tudo
Tudo, tudo o que fizemos
Nós ainda somos os mesmos
E vivemos...
Nós ainda somos os mesmos
E vivemos...
Nós ainda somos os mesmos
E vivemos como os nossos pais...

Antônio Carlos Belchior

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA TERMOELÁSTICO HIPERBÓLICO COM DOMÍNIO NÃO LIMITADO EM $\mathbb{R}$

AUTOR: Christian Róger Vilela Pieper
ORIENTADORA: Celene Buriol
Data e Local: Santa Maria, 29 de agosto de 2019.

Consideremos o Problema de Cauchy que descreve a dinâmica de vibrações de vigas linear em $\mathbb{R}$ sujeitas a efeitos térmicos modelados pela lei de Cattaneo.

Concentraremos nossa atenção na obtenção de existência e unicidade de solução e na análise do comportamento assintótico de tal solução.

Na primeira parte provaremos a existência e unicidade de soluções para o modelo termoelástico

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xxtt} + \delta\theta_{xx} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \end{cases}.$$

Com condições iniciais $u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); \theta(x,0) = \theta_0(x);$ $q(x,0) = q_0(x)$.

Na segunda parte encontramos uma taxa de decaimento para a energia total

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta^2 + \tau q^2\right] \mathrm{d}x$$

associada ao modelo descrito acima.

Palavras Chave: Existência e unicidade de solução, Comportamento assintótico, Modelo termoelástico, Lei de Cattaneo.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

EXISTENCE, UNICITY AND STABILITY TO SOLUTION FOR A HYPERBOLIC THERMOELASTIC PROBLEM WITH DOMAIN NOT LIMITED TO $\mathbb{R}$

AUTHOR: Christian Róger Vilela Pieper
ADVISOR: Celene Buriol

Consider the Cauchy Problem which describes the dynamics of linear rafters vibrations in $\mathbb{R}$ subjected to thermal effects modeled by the Cattaneo law.

We will focus our attention on obtaining the existence and uniqueness of the solution and analyzing the asymptotic behavior of such a solution.

In the first part we will prove the existence and uniqueness of solutions for the thermoelastic model.

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xxtt} + \delta\theta_{xx} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \end{cases}.$$

With initial conditions $u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); \theta(x,0) = \theta_0(x);$ $q(x,0) = q_0(x)$.

In the second part we find a decay rate for total energy

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta^2 + \tau q^2\right] \mathrm{d}x$$

associated with the model described above.

Keywords: Existence and uniqueness of solution, Asymptotic behavior, Thermoelastic model, Cattaneo law.

Sumário

Introdução

Atualmente, encontram-se na literatura vários artigos indicando a importância de se estudar modelos de evolução descrito por Equações Diferenciais Parciais em domínios não limitados. Dentre eles citamos Buriol and Menzala (2006), Da Luz and Charao (2009) e Racke and Ueda (2016) e suas respectivas referências.

Em Buriol and Menzala (2006) os autores consideram o modelo quase-linear

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u - M\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\bigtriangledown u|^2 \, \mathrm{d}x\right) \Delta u = 0, \text{ em } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x);\ u_t(x,0) = u_1(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

onde M é uma função real não decrescente satisfazendo

$$M \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^+\right) \text{ e } M(s), M'(s) \geqslant 0, \forall s \geqslant 0.$$

Para $n = 2$ a função $u = u\,(x,t)$ representa o deslocamento transversal de uma placa ocupando o domínio $\Omega = \mathbb{R}^2$, já para $n = 1$ o mesmo modela, por exemplo, o deslocamento de uma viga com domínio $\Omega = \mathbb{R}$.

Usando multiplicadores foi mostrado que a solução u do modelo (1) satisfaz as seguintes propriedades

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \to 0 \text{ quando } t \to +\infty, \text{ se } n \geqslant 6$$

e

$$\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 \, \mathrm{d}x \to 0 \text{ quando } t \to +\infty, \text{ se } n \geqslant 5,$$

onde Ω é uma região qualquer limitada do $\mathbb{R}^n$. Ressalta-se aqui, que o modelo (1) é conservativo.

Da Luz and Charao (2009) consideram o problema dissipativo

$$\begin{cases} u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + u_t = f\left(u_t\right), x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0 \\ u(0,x) = u_0(x); u_t(0,x) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

onde γ é constante e $f(u_t)$ é um termo não linear da forma $|u_t|^p$.

Usando teoria de multiplicadores, os autores provaram que a energia total associada a (2), dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t^2 + |\bigtriangledown u|^2 + |\Delta u_t|^2 \right] \mathrm{d}x$$

satisfaz $E(t) \leqslant c I_0 \left(1+t\right)^{-1}$.

Para tal taxa de decaimento foi considerado $I_0 < \delta, \delta > 0$, onde $I_0 = \|u_0\|^2_{H^3(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)}$. O qual, na terminologia matemática, significa que foram tomados dados iniciais pequenos.

Nesse trabalho consideraremos a equação de placas $u_{tt} - \mu u_{xxtt} + u_{xxxx}$, $\mu > 0$, submetida a efeitos térmicos. No que diz respeito aos efeitos térmicos, a teoria clássica de Fourier para a propagação do calor apresenta uma controvérsia pois admite propagação térmica com velocidade infinita, o qual não é o mais adequado para representar vários fenômenos físicos (mais detalhes em Chandrasekharaiah (1998)).

Para contornar essa questão, uma alternativa é substituir a equação do calor parabólico (modelada pela lei de Fourier) por uma equação do transporte do calor que seja hiperbólica, o que pressupõe velocidade finita de propagação. Neste sentido, escolhemos a lei de Cattaneo, ver Cattaneo (1948), para representar a condução do calor no lugar da lei de Fourier.

A seguir daremos uma ideia da construção do modelo de Cattaneo:

É sabido da lei de Fourier que o fluxo de calor q é proporcional ao derivada primeira da temperatura. Sendo assim, seja $\theta = \theta\left(p,t\right)$ (temperatura em ponto no instante t); portanto

$$q + k\theta_x = 0 \tag{3}$$

onde $k > 0$ representa a *condutividade térmica.*

Se usarmos a lei de Fourier, teremos:

$$\rho c\, \theta_t + q_x = 0 \tag{4}$$

onde $\rho > 0$ é a densidade de massa e $c > 0$ denota o calor específico por unidade de massa.

Substituindo (3) em (4) temos

$$\theta_t - \frac{k}{\rho c}\theta_x = 0,$$

que é a equação clássica do calor.

Se considerarmos a lei de Cattaneo usaremos no lugar de (3) a equação

$$\alpha q_t + q + k\theta_x = 0 \tag{5}$$

onde $\alpha > 0$ é uma propriedade termoelástica do material.

Derivando (4) em relação a t e (5) em relação a x e substituindo uma na outra obtemos:

$$\alpha\theta_{tt} + \theta_t - \frac{k}{\rho c}\theta_x = 0$$

que é uma equação do tipo hiperbólica e com isso temos velocidade finita de propagação.

Levando em conta a discussão anterior onde as constantes $\tau = \alpha$ e k estão definidas em (5) e (3), respectivamente, consideremos o modelo

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xxtt} + \delta\theta_{xx} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \end{cases} \tag{6}$$

onde $u = u\,(x,t)\,, \theta = \theta\,(x,t)\,, q = q\,(x,t)$ são funções que representam o deslocamento transversal e a temperatura conforme mencionados respectivamente em (1), (3) e (5).

Acrescentamos ao modelo (6) as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); \theta(x,0) = \theta_0(x); q(x,0) = q_0(x). \tag{7}$$

Nesse trabalho utilizando a teoria de Semi-Grupos de operadores lineares obtemos a existência e unicidade de solução para o modelo (6)-(7).

Além disso, usando a técnica considerada em Racke and Ueda (2016) mostramos que a energia total

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta^2 + \tau q^2\right] \mathrm{d}x \tag{8}$$

associada ao modelo (6)-(7) possui a seguinte taxa de decaimento:

$$E(t) \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0$$

onde $\tilde{K}$ é dado em (3.39) e $C = \dfrac{1}{2730}\dfrac{\tau\mu}{6}$.

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, introduzimos as notações, principais definições, proposições e teoremas da Teoria das Distribuições, Espaços de Sobolev e de Semigrupos de Operadores Lineares.

No capítulo 2 é feita a transformação do sistema (6)-(7) para a forma matricial, obtendo-se um problema abstrato, possibilitando a utilização da teoria de semigrupos para mostrar a existência e unicidade de solução.

Por último, no capítulo 3 é provado o decaimento da energia total associada ao sistema (6)-(7). Para isso, utilizaremos um funcional de Lyapunov adequado que é obtido através da pertubação da energia.

Na conclusão apresentamos algumas possibilidades para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Notação e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em muitos casos as demonstrações serão omitidas por se tratar de resultados conhecidos, mas citaremos as referências de onde estes, junto com as suas demonstrações, se encontram.

1.1 Notação

1. $|\cdot|$ - valor absoluto ou norma.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ - produto interno em $L^2(\mathbb{R})$.
3. $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R})}$ - norma em $L^2(\mathbb{R})$.
4. $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ - espaço das funções localmente integráveis.
5. $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{K})$ - espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{K}$.
6. $C((0, +\infty); \mathbb{K})$ - espaço das funções contínuas e derivadas contínuas de $(0, +\infty)$ em $\mathbb{K}$.
7. $\mathbb{K}'$ - dual do espaço $\mathbb{K}$.
8. $\hat{f}$ representa a transformada de Fourier da função f.

1.2 Definições e Resultados de Análise

Nessa seção introduziremos definições e resultados preliminares que embasarão os resultados apresentados nas seções seguintes:

Definição 1.1. *Dado um espaço vetorial* $\mathbb{H}$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C})$, *uma função* $\|\cdot\| : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ *é chamada norma se, satisfaz as seguintes propriedades:* $\forall x, y \in \mathbb{H}$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

i) $\|x\| \geqslant 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.2. *Seja* $\mathbb{H}$ *um espaço vetorial normado. Diz-se que* $\mathbb{H}$ *é completo, se toda sequência de Cauchy em* $\mathbb{H}$ *é convergente.*

Um espaço vetorial normado completo com a métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach.

Definição 1.3. *Seja* $\mathbb{H}$ *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C})$.

Um produto interno em $\mathbb{H}$ *é uma aplicação* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ *que satisfaz as seguintes propriedades: para todo* $x, y, z \in \mathbb{H}$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$, *tem-se*

i) $\langle x + y, z \rangle_{\mathbb{H}} = \langle x, z \rangle_{\mathbb{H}} + \langle y, z \rangle_{\mathbb{H}}$;

ii) $\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{H}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{H}}$;

iii) $\langle x, y \rangle_{\mathbb{H}} = \overline{\langle y, x \rangle_{\mathbb{H}}}$;

iv) $\langle x, x \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0$ *e* $\langle x, x \rangle_{\mathbb{H}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.4. *Dizemos que um espaço vetorial* $\mathbb{H}$ *munido com um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ *é um Espaço de Hilbert se* $\mathbb{H}$ *for completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Definição 1.5. *Uma aplicação linear* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$*, entre espaços de Banach* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$*, é uma imersão isométrica se* $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}}, \forall x \in \mathbb{X}$.

Uma imersão isométrica sobrejetiva T *é dita um isomorfismo isométrico ou simplesmente isometria.*

Definição 1.6. *Seja* $\mathbb{H}$ *um espaço vetorial real. Uma aplicação* $a : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é chamada forma bilinear se satisfaz, para todo* $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{H}$ *e para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$;

ii) $a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2)$.

Definição 1.7. *Uma forma bilinear* $a : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{H}$ *é um espaço de Hilbert é dita*

i) contínua se existe constante $C_0 \geqslant 0$ *tal que*

$$|a(u, v)| \leqslant C_0\|u\|_{\mathbb{H}}\|v\|_{\mathbb{H}}, \forall u, v \in \mathbb{H}; \tag{1.1}$$

ii) coerciva se existe constante $C_1 \geqslant 0$ *tal que*

$$a(u, u) \geqslant C_1\|u\|^2_{\mathbb{H}}, \forall u \in \mathbb{H}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.8 (Lax-Milgran)**.** *Seja* $\mathbb{H}$ *um espaço de Hilbert real e* $a : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear contínua e coerciva sobre* $\mathbb{H}$*. Se* $f \in \mathbb{H}'$ *onde* $\mathbb{H}'$ *denota o dual de* $\mathbb{H}$*, então existe um único* $u \in \mathbb{H}$ *tal que*

$$a(u, v) = f(v), \forall v \in \mathbb{H}.$$

Demonstração. Encontra-se em Kreyszig (1978). □

Definição 1.9. *Seja* p *um número real tal que* $1 \leqslant p < +\infty$ *e* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aberto.*

Representa-se por $L^p(\Omega)$ *a classe de equivalência de todas as funções mensuráveis* u*, definidas em* Ω *tais que* $|u|^p$ *é integrável no sentido de Lesbegue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Lema 1.10. *Seja $1 \leqslant p < +\infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Além disso, a função*

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$, que torna o mesmo um espaço de Banach.

Demonstração. Encontra-se em Brezis (2010). □

Lema 1.11. *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x, \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

e a respectiva norma

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \forall u \in L^2(\Omega).$$

Demonstração. Encontra-se em Brezis (2010). □

Proposição 1.12 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a e b números reais não negativos.*

Se $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ são tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, então

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Encontra-se em Medeiros and de Mello (1985). □

Corolário 1.13. *Se a e b são números reais não negativos e $\varepsilon > 0$, então:*

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + (4\varepsilon)^{-1} b^2.$$

Demonstração. Com efeito, aplicando a Proposição anterior, com $p = 2$, $a = (2\varepsilon)^{1/2} a$ e $b = (2\varepsilon)^{-1/2} b$, segue o resultado. □

Proposição 1.14 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ são tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |v|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

Ou ainda, em termos de norma, podemos escrever

$$\|uv\|_1 \leqslant \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Demonstração. Encontra-se em Medeiros and de Mello (1985). □

1.3 Espaço das Distribuições

Definição 1.15. *Dada uma função contínua $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ o conjunto dado por*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω, com suporte compacto em Ω.

Definição 1.16. *Chama-se de multi-índice qualquer n-upla em $\mathbb{N}^n$, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ é multi-índice, se $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \cdots, n$.*

Define-se $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_j$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

Definição 1.17. *Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e α um multi-índice. Define-se*

$$\boldsymbol{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso $n = 1$ temos, por exemplo, $\boldsymbol{D}^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{N}$.

Assim, o número $|\alpha|$ representa a ordem de derivação, enquanto que cada coordenada α_j representa a quantidade de derivadas na direção de x_j que serão calculadas.

Por exemplo, se $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$, o operador derivação será igual ao operador identidade, isto é, $\boldsymbol{D}^0 u = u$, para todo $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é aberto.

1.3.1 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Consideremos o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\varsigma)_{\varsigma\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe $K \subseteq \Omega$ tal que

$$supp(\Omega) \subseteq K \text{ e } supp(\varphi_\varsigma) \subseteq K, \forall \varsigma \in \mathbb{N}; \tag{1.3}$$

ii)

$$\mathbf{D}^\alpha \varphi_\varsigma \to \mathbf{D}^\alpha \varphi \text{ uniformemente em } \Omega \tag{1.4}$$

para cada multi-índice α quando $\varsigma \to +\infty$.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida em (1.3) e (1.4), será denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$ e denominado de *Espaço das Funções Testes.*

Definição 1.18. *Uma distribuição T é um funcional linear contínuo sobre $\mathscr{D}(\Omega)$, isto é, dado uma função $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ associamos um valor $T(\varphi)$ de tal modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

i) $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$;

ii) Se $\varphi_\varsigma \to \varphi$, *então* $T(\varphi_\varsigma) \to T(\varphi)$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ou seja,

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \left\{ \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}; T \text{ é linear e contínuo} \right\}.$$

Observação 1.19. $\mathscr{D}'(\Omega)$ *é dito* Espaço das Distribuições *sobre* Ω.

1.3.2 Convergência e Derivação em $\mathscr{D}'(\Omega)$

Definição 1.20. *Diz-se que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável a Lesbegue em todo compacto $K \subseteq \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é,*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u| \, \mathrm{d}x < +\infty,$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$.

Definição 1.21. *A sequência de distribuições escalares $(T_\varsigma)_{\varsigma \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathscr{D}'(\Omega)$ quando*

$$\langle T_\varsigma, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Observação 1.22. *Com esta notação de convergência, $\mathscr{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas*

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega), \text{ para } 1 \leqslant p < +\infty. \tag{1.5}$$

Mais detalhes sobre (1.5) encontra-se em Medeiros and Miranda (2000).

Definição 1.23. *Dada uma distribuição T sobre Ω e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos a derivada distribucional ou derivada no sentido das distribuições de ordem α de T como sendo a distribuição*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^\alpha T : \mathscr{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\mapsto \langle \boldsymbol{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \boldsymbol{D}^\alpha \varphi \rangle . \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.24. *Definimos por $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < +\infty$, o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que, para todo $|\alpha| \leqslant m$, $\boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $\boldsymbol{D}^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições, isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n); |\alpha| \leqslant m\}.$$

Proposição 1.25. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < +\infty$, munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| \boldsymbol{D}^{\alpha} u \|^p \right)^{1/p},$$

são espaços de Banach.

Demonstração. Encontra-se em Medeiros and Miranda (2000). □

Observação 1.26. *No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, o qual é denotado por $H^2 = H^2(\Omega)$.*

Definição 1.27. *O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Definição 1.28. *O dual topológico $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,p}(\Omega)$ onde*
$1 \leqslant p < +\infty$ com $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Observação 1.29. *Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^2(\Omega)$, e seu dual é denotado por $H^{-m}(\Omega)$.*

Observação 1.30. *Dos teoremas de imersão, temos que:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega); \tag{1.7}$$

Mais detalhes sobre os teoremas de imersão encontramos em Medeiros and Miranda (2000).

Lema 1.31. *O operador $\left(I - \mu \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R})$ é limitado.*

Demonstração. Devemos mostrar que existe $M > 0$ tal que:

$$\left\| \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f \right\|_{H^2(\mathbb{R})} \leqslant M \|f\|, \text{ para todo } f \in L^2(\Omega).$$

Consideramos daí a seguinte igualdade

$$u - u_{xx} = f. \tag{1.8}$$

Com isto, observemos que se $\|u\| = 0$ a desigualdade acima torna-se válida. Nota-se que $u = \left(I - \mu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f \in H^2(\Omega)$. Além disso, multiplicando (1.8) por u, integrando em $\mathbb{R}$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 \,\mathrm{d}x + \mu \int_{\mathbb{R}} u_x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} fu \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|\|u\|,$$

logo

$$\|u\|^2 + \mu\|u_x\|^2 \leqslant \|f\|\|u\|,$$

segue daí e do fato de $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$, ver Brezis (2010), que

$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|\|u\| \leqslant M_1\|f\|\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$, onde $M_1 > 0$ é tal que $\|u\| \leqslant M_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Consequentemente,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant M_1\|f\|. \tag{1.9}$$

No entanto, de (1.8), temos $\|u_{xx}\| \leqslant \|f\| + \|u\|$. Logo, de (1.9) segue que

$\|u_{xx}\| \leqslant \|f\| + M_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f\| + M_1^2\|f\| \leqslant M\|f\|$, onde $M = 1 + M_1^2$.

Portanto,

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} = \|u_{xx}\| \leqslant M\|f\|, \tag{1.10}$$

onde (1.10) segue do fato de $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ser uma isometria (veja Medeiros and Miranda (2000)), e portanto,

$$\left\| \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f \right\|_{H^2(\mathbb{R})} \leqslant M\|f\|.$$

□

1.5 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Apresentaremos nessa seção resultados importantes para a obtenção dos resultados do próximo capítulo.

Definição 1.32. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos semigrupos lineares limitados de X.*

Dizemos que uma aplicação $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:

i) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 1.33. *Uma família $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares num espaço de Banach X, é chamado semigrupo fortemente contínuo se além de (i) e (ii) da **Definição 1.32**, é satisfeita a seguinte condição:*

para todo $(x,t) \in X \times [0, +\infty)$, $(x,t) \to T(t)x \in X$ é contínua em cada ponto.

Observação 1.34. *Chamamos de semigrupo de classe C_0, ou ainda C_0-semigrupo, a um semigrupo fortemente contínuo.*

Definição 1.35. *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X. O operador linear $\mathcal{A} : D_{\mathcal{A}} \subseteq X \to X$ definido em*

$$D_{\mathcal{A}} = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\}$$

e dado, para cada $x \in D_{\mathcal{A}}$, por:

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

é chamado o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Definição 1.36. *Um operador linear $\mathcal{A}$ definido em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, se diz dissipativo se, para todo $x \in D_{\mathcal{A}}$,*

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle_{\mathbb{H}} \leqslant 0.$$

Teorema 1.37 (de Lumer-Phillips). *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear numa espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ com domínio $D_{\mathcal{A}}$ denso em $\mathbb{H}$. Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ talque a imagem de $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é todo espaço $\mathbb{H}$, isto é, $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathbb{H}$ (dito maximal), então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Encontra-se em Pazy (2012). □

Teorema 1.38. *Suponha que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{H})$ é um C_0-semigrupo. Então, existem $M \geqslant 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leqslant Me^{\omega t}$, para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Encontra-se Pazy (2012). □

Teorema 1.39. *Seja $\mathbb{H}$ um espaço de Banach e seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ em $\mathbb{H}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$. Se $\mathcal{B}$ é um operador linear limitado em $\mathbb{H}$ então $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ em $\mathbb{H}$, satisfazendo $\|S(t)\| \leqslant Me^{(\omega + M\|\mathcal{B}\|)t}$.*

Demonstração. Pazy (2012). □

O próximo teorema dá uma resposta quanto à possibilidade de se resolver o problema abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z = \mathcal{A}Z, \text{ para todo } t > 0 \\ Z(0) = Z_0 \in \mathbb{H}, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $\mathcal{A} : D_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador linear num espaço de Banach $\mathbb{H}$.

Antes disso, vejamos a seguinte definição:

Definição 1.40. *Dizemos que uma função $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{H}$ é uma* ***solução clássica*** *ou* ***solução forte*** *de* (1.11) *se*

$$Z \in C\left(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0, \infty); \mathbb{H}\right)$$

e Z satisfaz (1.11).

Teorema 1.41. *Assumindo que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em $\mathbb{H}$, então a seguinte condição é satisfeita:*

para cada $Z_0 \in D(\mathcal{A})$, o problema de Cauchy (1.11) *possui única solução clássica Z.*

Demonstração. Pazy (2012). □

1.6 Transformada de Fourier e o Teorema de Plancherel

Nesta seção iremos apresentar a Transformada de Fourier e algumas propriedades que seguem do mesmo. Iremos também, enunciar o teorema de Plancherel.

Ainda, apresentaremos alguns resultados para funções complexas.

Os resultados aqui enunciados serão de extrema importância no último capítulo. Estes, juntamente com as suas justificativas, podem ser encontrados em Cavalcanti and Cavalcanti (2009), Figueiredo (2000), Rivera (1999) e Yosida (1965).

Definição 1.42. *Uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito se f é infinitamente diferenciável e*

$$p_k(f) = \sup_{|\alpha| \leqslant K} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2_{\mathbb{R}^n})^k \, |(D^\alpha f)(x)| < +\infty, \forall k \in \mathbb{N}.$$

O espaço das funções rapidamente decrescente no infinito é denotado por $S(\mathbb{R}^n)$ e este é um espaço vetorial com as operações de soma e produto por escalar de funções usuais.

No espaço $S(\mathbb{R}^n)$, definimos a seguinte noção de convergência:

Definição 1.43. *Seja $(f_\varsigma)_{\varsigma \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $S(\mathbb{R}^n)$.*

Dizemos que $f_\varsigma \to 0$ em $S(\mathbb{R}^n)$ quando para todo $k \in \mathbb{N}$, $p_k(f_\varsigma) \to 0$ em $\mathbb{R}$.

Ainda, $f_\varsigma \to f$ em $S(\mathbb{R}^n)$ se $p_k(f_\varsigma - f) \to 0$ em $\mathbb{R}$.

As formas lineares definidas em $S(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $S(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições temperadas.*

O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sequências é representado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.44. *Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a Transformada de Fourier de f é dada por:*

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\xi) = \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observemos que $\mathcal{F}$ está bem definida pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix\xi} f(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Lema 1.45. *Podemos provar que $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 1.46. *Se T e S são distribuições temperadas, então:*

$$\mathcal{F}(\alpha T + \beta S) = \alpha \mathcal{F}T + \beta \mathcal{F}S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.47. *Se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, então:*

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|} \xi^{|\alpha|} \mathcal{F}T.$$

O próximo resultado nos diz que a Transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo isométrico:

Teorema 1.48 (de Plancherel)**.** *A aplicação $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g \rangle\,, \text{ para todo } f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Do Teorema de Plancherel segue o seguinte resultado:

Corolário 1.49. *Para toda função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos $\|f\| = \|\hat{f}\|$.*

Nos dois próximos Lemas, f, g juntamente com as suas Transformadas de Fourier $\hat{f}, \hat{g}$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Estes resultados, assim como os demais desta seção, como já havíamos comentado, serão utilizados no capítulo 3.

Lema 1.50. *Se* $\hat{f} = f_1 + if_2$, *então*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left|\hat{f}\right|^2\right\} = 2\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{f}}_t\right\}. \tag{1.12}$$

Demonstração. De fato, como sabemos $\left|\hat{f}\right|^2 = f_1^2 + f_2^2$ assim, basta observarmos que

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{f}}_t\right\} &= 2\mathrm{Re}\left\{\left(f_1 + if_2\right)\left(f_{1t} - if_{2t}\right)\right\} \\
&= 2\mathrm{Re}\left\{\left(f_1 f_{1t} + f_2 f_{2t}\right) + i\left(f_2 f_{1t} - f_1 f_{2t}\right)\right\} \\
&= 2\left(f_1 f_{1t} + f_2 f_{2t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{f_1^2 + f_2^2\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left|\hat{f}\right|^2\right\}.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.51. *Se* $\hat{f} = f_1 + if_2$ *e* $\hat{g} = g_1 + ig_2$, *então*

$$\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{g}\bar{\hat{f}}\right\} \tag{1.13}$$

e

$$\mathrm{Re}\left\{i\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\} = -\mathrm{Re}\left\{i\hat{g}\bar{\hat{f}}\right\}. \tag{1.14}$$

Ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\}\right] = \mathrm{Re}\left\{\hat{f}_t\bar{\hat{g}}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}_t\right\}. \tag{1.15}$$

Demonstração. Com efeito, mostraremos primeiramente a validade de (1.13):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\left(f_1 + if_2\right)\left(g_1 - ig_2\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(f_1 g_1 + f_2 g_2\right) + i\left(f_2 g_1 - f_1 g_2\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(g_1 f_1 + g_2 f_2\right) + i\left(g_2 f_1 - g_1 f_2\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(g_1 + ig_2\right)\left(f_1 - if_2\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{g}\bar{\hat{f}}\right\}.
\end{aligned}$$

Ainda, analisando o lado esquerdo de (1.14), temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{i\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{i\left(f_1 + if_2\right)\left(g_1 - ig_2\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{i\left[\left(f_1 g_1 + f_2 g_2\right) + i\left(f_2 g_1 - f_1 g_2\right)\right]\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{-\left(f_2 g_1 - f_1 g_2\right) + i\left(f_1 g_1 + f_2 g_2\right)\right\} \\
&= f_1 g_2 - f_2 g_1. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Re}\left\{i\hat{g}\bar{\hat{f}}\right\} &= -\mathrm{Re}\left\{i\left(g_1+ig_2\right)\left(f_1-if_2\right)\right\} \\
&= -\mathrm{Re}\left\{i\left[\left(g_1f_1+g_2f_2\right)+i\left(g_2f_1-g_1f_2\right)\right]\right\} \\
&= -\mathrm{Re}\left\{-\left(g_2f_1-g_1f_2\right)+i\left(g_1f_1+g_2f_2\right)\right\} \\
&= g_2f_1-g_1f_2. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Portanto de (1.16) e (1.17) segue a validade da igualdade (1.14).

Por fim, mostremos a última igualdade:

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\hat{f}_t\bar{\hat{g}}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}_t\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\left(f_{1t}+if_{2t}\right)\left(g_1-ig_2\right)\right\} \\
&+ \mathrm{Re}\left\{\left(f_1+if_2\right)\left(g_{1t}-ig_{2t}\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(f_{1t}g_1+f_{2t}g_2\right)+i\left(f_{2t}g_1-f_{1t}g_2\right)\right\} \\
&+ \mathrm{Re}\left\{\left(f_1g_{1t}+f_2g_{2t}\right)+i\left(f_2g_{1t}-f_1g_{2t}\right)\right\} \\
&= f_{1t}g_1+f_{2t}g_2+f_1g_{1t}+f_2g_{2t}. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\hat{f}\bar{\hat{g}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\left(f_1g_1+f_2g_2\right)+i\left(f_2g_1-f_1g_2\right)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(f_1g_1+f_2g_2\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(f_1g_1\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(f_2g_2\right) \\
&= f_{1t}g_1+f_1g_{1t}+f_{2t}g_2++f_2g_{2t}. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Logo, de (1.18) e (1.19) segue (1.15). □

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução e o Problema Principal

Neste capítulo vamos obter a existência e unicidade de solução para o modelo (6)-(7), apresentado na introdução:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xxtt} + \delta\theta_{xx} = 0, \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ \theta_t + kq_x - \delta u_{xxt} = 0, \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ u\,(x,0) = u_0(x),\ u_t\,(x,0)\,u_1(x),\ \theta\,(x,0) = \theta_0(x),\ q\,(x,0) = q_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde μ, δ, k e τ são constantes positivas dadas e $u := u\,(x,t)$, $\theta := \theta\,(x,t)$ e $q := q\,(x,t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0. + \infty)$.

No que segue, vamos descrever o procedimento que será usado para provar a existência e unicidade do *problema de valor inicial* (PVI) (2.1) acima:

Primeiramente aplicaremos uma mudança de variável adequada em (2.1) com o objetivo de reescrevê-lo na forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z = (\mathcal{A} + \mathcal{B})\,Z \\ Z(0) = Z_0 \end{cases},$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são operadores lineares definidos num certo espaço de Hilbert $\mathbb{H}$,

o qual será descrito posteriormente.

Após, a fim de utilizar o **Teorema 1.37** (de Lumer-Phillips), provaremos que o operador $\mathcal{A}$ é *dissipativo* e *maximal*. Ainda, será provado que $\mathcal{B}$ é um operador linear limitado em $\mathbb{H}$.

Por fim, de posse dos resultados acima descritos e fazendo uso da teoria de *Distribuições* e *Semi-Grupos* será possível provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *O Problema de Cauchy descrito em* (2.1) *possui única solução* $Z = \{u, v, \theta, q\}$. *Isto é, existe único*

$$Z \in C\left(\mathbb{R}_+; \mathbb{D}\right) \cap C^1\left([0, \infty); \mathbb{H}\right)$$

que seja solução de (2.1), *onde* $\mathbb{D} := H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

2.2 Resultados Preliminares

Considerando a mudança de variável $v = u_t$ e aplicando uma pertubação u na primeira equação de (2.1), para quaisquer $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, podemos reescrever tal PVI como

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t + \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}(u_{xxxx} + u) + \delta\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{xx} = \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u \\ \theta_t + kq_x - \delta v_{xx} = 0 \\ q_t + \tau^{-1}q + \tau^{-1}k\theta_x = 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x), \\ v(0, x) &= v_0(x), \\ \theta(0, x) &= \theta_0(x), \\ q(0, x) &= q_0(x). \end{aligned}$$

Observação 2.2. *Note que a forma na qual o PVI* (2.1) *foi reescrito está bem posto já que o operador* $\left(I - \mu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ *é um isomorfismo (veja Medeiros and Miranda (2000)) portanto,* $\left(I - \mu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$ *existe.*

Feito isto, ponhamos $Z(x,t) := Z = [u\ v\ \theta\ q]^T$ e $Z_0(x) := Z_0 = [u_0(x)\ v_0(x)\ \theta_0(x)\ q_0(x)]^T$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $t \geqslant 0$. E, além disso, sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas matrizes dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + I\right) & 0 & -\delta\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \delta\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -k\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\tau^{-1}k\frac{\partial}{\partial x} & -\tau^{-1}I \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Com o que temos em (2.3) e (2.4) podemos reescrever (2.2) como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z = (A+B)Z, \forall\ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ Z(x,0) = Z_0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{2.5}$$

Antes de definirmos os operadores lineares $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, os quais foram citados no início deste capítulo, tratemos de exibir o espaço $\mathbb{H}$ que estes estarão definidos, assim como o produto interno e norma em $\mathbb{H}$.

Seja assim, $\mathbb{H}$ o espaço dado por

$$\mathbb{H} = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Em $\mathbb{H}$ definimos a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde para quaisquer $Z_1 = [u_1\ v_1\ \theta_1\ q_1]^T, Z_2 = [u_2\ v_2\ \theta_2\ q_2]^T$ pertencentes a $\mathbb{H}$, temos:

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_{1_{xx}}, u_{2_{xx}} \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \mu \langle v_{1_x}, v_{2_x} \rangle + \langle \theta_1, \theta_2 \rangle + \tau \langle q_1, q_2 \rangle, \tag{2.7}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do $L^2(\mathbb{R})$ definido no **Lema 1.11**.

Observação 2.3. *Note que a forma bilinear* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida acima é um produto interno de* $\mathbb{H}$.

Proposição 2.4. *Tem-se que* $\mathbb{H}$ *dado em* (2.6) *é um Espaço de Hilbert com o produto interno definido em* (2.7).

Demonstração. Ora, como $H^p(\mathbb{R})$ para $p \geqslant 1$ é um espaço de Hilbert.

Logo, como o produto cartesiano finito de espaços de Hilbert e o $L^2(\mathbb{R})$, são espaços de Hilbert, segue que $\mathbb{H}$ definido em (2.6) também o é. □

Ainda, em $\mathbb{H}$ definimos a norma abaixo:

$$\|Z\|_{\mathbb{H}}^2 = \|u\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|v\|^2 + \mu\|v_x\|^2 + \|\theta\|^2 + \tau\|q\|^2, \ \forall Z \in \mathbb{H} \tag{2.8}$$

à qual é induzida pelo produto interno (2.7).

Agora, seja $D \subseteq \mathbb{H}$ dado por

$$\mathbb{D} = \left\{ [u \ v \ \theta \ q]^T \in \mathbb{H}; u \in H^3(\mathbb{R}), \, v \in H^2(\mathbb{R}), \, \theta \in H^1(\mathbb{R}) \text{ e } q \in H^1(\mathbb{R}) \right\},$$

ou ainda,

$$\mathbb{D} = H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

Assim, em $\mathbb{D}$ definimos o operador $\mathcal{A} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ o qual para qualquer $Z \in \mathbb{D}$ é dado por:

$$\mathcal{A}Z = \begin{bmatrix} v \\ -\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} - \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u - \delta\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} \\ \delta v_{xx} - k q_x \\ -\tau^{-1} q - \tau^{-1} k \theta_x \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Queremos definir também o operador $\mathcal{B} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, onde

$$\mathcal{B}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall Z \in \mathbb{D}. \tag{2.11}$$

Observação 2.5. *Note que, de* (2.3)-(2.4) *e* (2.10)-(2.11)*, segue que*

$$(A+B)Z = \mathcal{A}Z + \mathcal{B}Z, \text{ para todo } Z \in \mathbb{D}.$$

No que se segue, provaremos que o operador linear $\mathcal{A}$ definido em (2.10) está nas hipóteses do *teorema de Lumer-Phillips*, isto é, iremos mostrar que $\mathcal{A}$ é *dissipativo* e *maximal*. Mas, inicialmente vejamos alguns Lemas técnicos que irão auxiliar na prova destes resultados.

Lema 2.6. *Para quaisquer $f, g \in \mathbb{H}$, vale*

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right]\left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (fg)\, \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Sejam f, g duas aplicações quaisquer de $\mathbb{H}$. Daí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right]\left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right]\left[g - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] g\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Considerando a derivada no sentido das distribuições, observe que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\,\mathrm{d}x = -\mu\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] g\,\mathrm{d}x.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right]\left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] g\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f\right] g\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \right] g \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \right] g \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (fg) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Concluindo assim, a prova do Lema. □

Nos próximos dois Lemas iremos utilizar o resultado enunciado e provado acima. Além disso, estaremos considerando $[u \ v \ \theta \ q]^T$ um elemento qualquer de $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{H}$. Sendo assim, temos:

Lema 2.7. *Sendo u e v funcionais quaisquer de $H^3(\mathbb{R})$ e $H^2(\mathbb{R})$, respectivamente, segue que*

$$
\begin{aligned}
-\mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u_{xxxx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x &= - \int_{\mathbb{R}} u_{xx} v_{xx} \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u_{xxxx} \right] v \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

E ainda,

$$
-\mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u \right]_x v_x \, \mathrm{d}x = - \int_{\mathbb{R}} uv \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u \right] v \, \mathrm{d}x.
$$

Demonstração. Primeiramente, provemos a primeira igualdade.

$$
\begin{aligned}
-\mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u_{xxxx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x &= \mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u_{xxxx} \right] v_{xx} \, \mathrm{d}x \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} u_{xxxx} \right] [-\mu v_{xx}] \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Somando e subtraindo adequadamente o operador identidade I, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&-\mu\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]_x v_x\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]\left[\left\{\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-I\right\}v\right]\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v\right]\mathrm{d}x\\
&+ \int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]v\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}u_{xxxx}v\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]v\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}u_{xx}v_{xx}\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u_{xxxx}\right]v\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Provando então, o que queríamos.

Agora, mostraremos a validade da segunda afirmação deste lema. Assim,

$$
\begin{aligned}
&-\mu\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]_x v_x\,\mathrm{d}x\\
&= \mu\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]v_{xx}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right][-\mu v_{xx}]\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]\left[\left\{\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-I\right\}v\right]\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v\right]\mathrm{d}x\\
&+ \int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]v\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}uv\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\left[\left(I-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}u\right]v\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Concluindo a prova do lema. $\square$

Lema 2.8. *Para todo $v \in H^2(\mathbb{R})$ e todo $\theta \in H^1(\mathbb{R})$ temos que:*

$$-\mu\delta \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x = -\delta \int_{\mathbb{R}} \theta v_{xx} \, \mathrm{d}x + \delta \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] v \, \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Nas hipóteses deste lema e utilizando o **Lema 2.6** temos

$$\begin{aligned}
- & \ \mu\delta \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x \\
= & \ \mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] v_{xx} \, \mathrm{d}x \\
= & \ - \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] [-\mu v_{xx}] \, \mathrm{d}x \\
= & \ - \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] \left[\left\{ \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - I \right\} v \right] \mathrm{d}x \\
= & \ - \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v \right] \mathrm{d}x \\
+ & \ \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] v \, \mathrm{d}x \\
= & \ - \int_{\mathbb{R}} u_{xxxx} v \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] v \, \mathrm{d}x \\
= & \ - \int_{\mathbb{R}} \theta v_{xx} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xx} \right] v \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mostrando, assim, o que queríamos. $\square$

Tendo-se a validade dos **Lemas técnicos 2.7** e **2.8** estamos em condições de enunciar e provar o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *O operador linear $\mathcal{A}$ dado em* (2.10) *é dissipativo, isto é, para todo $Z \in \mathbb{D}$ segue que $\langle \mathcal{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} \leqslant 0$, onde tal produto interno é o que está definido em* (2.7).

Demonstração. Seja $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T \in \mathbb{D}$ qualquer. Daí, aplicando $\mathcal{A}Z$ e Z em $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ temos

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathcal{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} = \langle v, u \rangle + \langle v_{xx}, u_{xx} \rangle \\
+ \ & \left\langle \left[-\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} - \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u - \delta \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} \right], v \right\rangle \\
+ \ & \mu \left\langle \left[-\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} - \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u - \delta \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} \right]_x, v_x \right\rangle \\
+ \ & \langle [\delta v_{xx} - k q_x], \theta \rangle + \tau \left\langle \left[-\tau^{-1} q - \tau^{-1} k \theta_x \right], q \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Ou ainda, usando as propriedades de produto interno

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} \ = \ & \langle v, u \rangle + \langle v_{xx}, u_{xx} \rangle \\
- \ & \left\langle \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx}, v \right\rangle - \left\langle \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u, v \right\rangle \\
- \ & \delta \left\langle \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx}, v \right\rangle - \mu \left\langle \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} \right]_x, v_x \right\rangle \\
- \ & \mu \left\langle \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u \right]_x, v_x \right\rangle - \mu\delta \left\langle \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} \right]_x, v_x \right\rangle \\
+ \ & \delta \langle v_{xx}, \theta \rangle - k \langle q_x, \theta \rangle - \langle q, q \rangle - k \langle \theta_x, q \rangle .
\end{aligned}
$$

Agora, aplicaremos no que está posto acima, a definição do produto interno em $L^2(\mathbb{R})$, obtendo,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} \ = \ & \int_{\mathbb{R}} vu \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} v_{xx} u_{xx} \, \mathrm{d}x \\
- \ & \int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} v \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} uv \, \mathrm{d}x \\
- \ & \delta \int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} v \, \mathrm{d}x - \mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x \\
- \ & \mu \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u \right]_x v_x \, \mathrm{d}x - \mu\delta \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} \right]_x v_x \, \mathrm{d}x \\
+ \ & \delta \int_{\mathbb{R}} v_x \theta \, \mathrm{d}x - k \int_{\mathbb{R}} q_x \theta \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} q^2 \, \mathrm{d}x - k \int_{\mathbb{R}} \theta_x q \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Por fim, do **Lema 2.7** e **Lema 2.8** podemos reescrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}Z, Z\rangle_{\mathbb{H}} &= \int_{\mathbb{R}} vu\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} v_{xx}u_{xx}\,\mathrm{d}x \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx} v\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} uv\,\mathrm{d}x \\
&- \delta\int_{\mathbb{R}} \left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx} v\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} u_{xx}v_{xx}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u_{xxxx}\right] v\,\mathrm{d}x \\
&- \int_{\mathbb{R}} uv\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} u\right] v\,\mathrm{d}x \\
&- \delta\int_{\mathbb{R}} \theta v_{xx}\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathbb{R}} \left[\left(I - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{xx}\right] v\,\mathrm{d}x \\
&+ \delta\int_{\mathbb{R}} v_x\theta\,\mathrm{d}x - k\int_{\mathbb{R}} q_x\theta\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} q^2\,\mathrm{d}x - k\int_{\mathbb{R}} \theta_x q\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo os devidos cancelamentos concluímos que $\langle \mathcal{A}Z, Z\rangle_{\mathbb{H}} = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} q^2\,\mathrm{d}x$, ou seja, $\langle \mathcal{A}Z, Z\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant 0$.

Logo, de fato $\mathcal{A}$ é um operador linear dissipativo. □

Na próxima seção vamos obter elementos que nos ajudem a mostrar que o operador linear $\mathcal{A}$ definido em (2.10) é maximal, ou de maneira mais formal, queremos provar que, dado $U = [f\ g\ h\ p]^T \in \mathbb{H}$ existe $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T \in \mathbb{D}$ tal que

$$(I - \mathcal{A})\,Z = U. \tag{2.12}$$

A existência de tal elemento $Z \in \mathbb{D}$ será consequência da aplicação do teorema de *Lax-Milgran* em operadores $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$ adequados, definidos em um determinado Espaço de Hilbert $\mathbb{K}$.

Veremos que, de acordo como serão definidos, b será uma forma bilinear contínua e coerciva sobre $\mathbb{K}$ e F pertencerá ao dual de $\mathbb{K}$.

Analisando então a igualdade (2.12) temos que $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T$ deverá satisfazer o seguinte sistema

$$\begin{cases} u - v = f \\ u_{xxxx} + u + \delta\theta_{xx} + v - \mu v_{xx} = g - \mu g_{xx} \\ kq_x - \delta v_{xx} + \theta = h \\ (1+\tau)q + k\theta_x = \tau p \end{cases}. \tag{2.13}$$

Daí, isolando v e q na primeira e quarta linha de (2.13) temos, respectivamente, que

$$v = u - f \text{ e } q = \frac{\tau}{1+\tau}p - \frac{k}{1+\tau}\theta_x. \tag{2.14}$$

Substituindo então (2.14) em (2.13), segue que

$$\begin{cases} u_{xxxx} - \mu u_{xx} + 2u + \delta\theta_{xx} = f + g - \mu g_{xx} - \mu f_{xx} \\ \theta - \delta u_{xx} - \frac{k^2}{1+\tau}\theta_{xx} = h - \frac{k\tau}{1+\tau}p_x + \delta f_{xx} \end{cases} \tag{2.15}$$

Observação 2.10. *Veja que tendo-se as igualdades dadas em* (2.14)*, temos que encontrar Z que satisfaça* (2.13)*, o qual é equivalente a solucionar o sistema* (2.15)*.*

2.3 Os Operadores $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$

Considere o espaço $\mathbb{K}$ dado por

$$\mathbb{K} = H^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}).$$

Note que com argumentos semelhantes aos usados na **Proposição 2.4** concluímos que $\mathbb{K}$ é Espaço de Hilbert com o produto interno proveniente dos espaços $H^2(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

No que segue vamos definir os operadores $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$, os quais nos referimos anteriormente. Seja $b : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde para quaisquer $V = [\omega\ \eta]^T, J = [u\ \theta]^T \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} b(J,V) &= \langle u_{xx}, \omega_{xx}\rangle + \mu\langle u_x, \omega_x\rangle + 2\langle u, \omega\rangle \\ &- \delta\langle \theta_x, \omega_x\rangle + \frac{k^2}{1+\tau}\langle \theta_x, \eta_x\rangle + \delta\langle u_x, \eta_x\rangle + \langle \theta, \eta\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Abrindo o produto interno de $L^2(\mathbb{R})$ dado no **Lema 1.11**, temos o operador b possui a forma integral

$$\begin{aligned} b(J,V) &= \int_{\mathbb{R}} u_{xx}\omega_{xx}\,\mathrm{d}x + \mu\int_{\mathbb{R}} u_x\omega_x\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}} u\omega\,\mathrm{d}x \\ &- \delta\int_{\mathbb{R}} \theta_x\omega_x\,\mathrm{d}x + \frac{k^2}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} \theta_x\eta_x\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathbb{R}} u_x\eta_x\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \theta\eta\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por fim, defina o operador $F : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F(V) &= \int_{\mathbb{R}} (f+g)\omega\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} (f+g)\omega_{xx}\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}} h\eta\,\mathrm{d}x + \frac{k\tau}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} p\eta_x\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathbb{R}} f_{xx}\eta\,\mathrm{d}x, \forall\, V = (\omega,\eta) \in \mathbb{K}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Antes de tratarmos das propriedades à cerda dos operadores b e F definidos acima, veja que se multiplicarmos a primeira equação de (2.15) por ω e a segunda por η, e após integrarmos ambas as equações em $\mathbb{R}$ teremos ainda um novo sistema equivalente a (2.15), o qual é dado por:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} u_{xxxx}\omega\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} u_{xx}\omega dx + 2\int_{\mathbb{R}} u\omega\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}} \theta_{xx}\omega\,\mathrm{d}x \\ \quad = \int_{\mathbb{R}} (f+g)\omega\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} g_{xx}\omega\,\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}} f_{xx}\omega\,\mathrm{d}x \\ \quad \int_{\mathbb{R}} \theta\eta\,\mathrm{d}x - \delta\int_{\mathbb{R}} u_{xx}\eta\,\mathrm{d}x - \frac{k^2}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} \theta_{xx}\eta\,\mathrm{d}x \\ \quad = \int_{\mathbb{R}} h\eta\,\mathrm{d}x - \frac{k\tau}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} p_x\eta\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathbb{R}} f_{xx}\eta\,\mathrm{d}x \end{cases}.$$

E mais, somando as suas duas equações, o novo sistema dado acima, pode ser escrito como

$$b\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}\right), \forall \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathbb{K}. \tag{2.18}$$

Passaremos agora a provar algumas propriedades dos operadores $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$ que serão importantes para aplicarmos o Teorema de *Lax-Milgran*.

Lema 2.11. *O operador* $b : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido em* (2.16) *é uma forma bilinear e* $F : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado em* (2.17) *é linear.*

Demonstração. O resultado segue da forma na qual os operadores $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$ estão definidos. Pois, o produto interno em $L^2(\mathbb{R})$ é uma forma bilinear e , portanto, $b(\cdot,\cdot)$ também será.

Já $F(\cdot)$ é uma soma finita de integrais sobre $\mathbb{R}$, e portanto linear. $\square$

Os próximos dois resultados tratam de importantes propriedades de $b(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$.

Proposição 2.12. *A forma bilinear* $b(\cdot,\cdot)$ *definida em* (2.16) *é contínua e coerciva.*

Demonstração. Provaremos primeiramente a continuidade de $b(\cdot,\cdot)$.

Pelas desigualdades triangular e de Hölder (**Proposição 1.14**), vem

$$\begin{aligned} |b(J,V)| &\leqslant |\langle u_{xx},\omega_{xx}\rangle| + \mu|\langle u_x,\omega_x\rangle| + 2|\langle u,\omega\rangle| + \delta|\langle \theta_x,\omega_x\rangle| \\ &+ \frac{k^2}{1+\tau}|\langle \theta_x,\eta_x\rangle| + \delta|\langle u_x,\eta_x\rangle| + |\langle \theta,\eta\rangle| \\ &\leqslant \|u_{xx}\|\|\omega_{xx}\| + \mu\|u_x\|\|\omega_x\| + 2\|u\|\|\omega\| + \delta\|\theta_x\|\|\omega_x\| \quad (2.19) \\ &+ \frac{k^2}{1+\tau}\|\theta_x\|\|\eta_x\| + \delta\|u_x\|\|\eta_x\| + \|\theta\|\|\eta\|. \end{aligned}$$

Tomando, $C_0 = \max\left\{2, \delta, \mu, \dfrac{k^2}{1+\tau}\right\}$, obtemos a seguinte majoração:

$$\begin{aligned} b(J,V)| &\leqslant C_0(\|u_{xx}\|\|\omega_{xx}\| + \|u_x\|\|\omega_x\| + \|u\|\|\omega\| + \|\theta_x\|\|\omega_x\| \\ &+ \|\theta_x\|\|\eta_x\| + \|u_x\|\|\eta_x\| + \|\theta\|\|\eta\|) \\ &\leqslant C_0\left(\|u_{xx}\| + \|u\| + \|\theta_x\| + \|\theta\|\right)\left(\|\omega_{xx}\| + \|\omega\| + \|\eta_x\| + \|\eta\|\right) \\ &= C_0\left(\|u\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^1}\right)\left(\|\omega\|_{H^2} + \|\eta\|_{H^1}\right) = C_0\|Z\|_{\mathbb{K}}\|V\|_{\mathbb{K}}, \forall Z, V \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Portanto, $|b(J,V)| \leqslant C_0\|Z\|_{\mathbb{K}}\|V\|_{\mathbb{K}}$, para qualquer $(J,V) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e pela **Definição 1.7**, $b(\cdot,\cdot)$ é contínuo.

Ainda, pondo $C_1 = \min\left\{1, \dfrac{k^2}{1+\tau}\right\}$ temos que

$$\begin{aligned}
b(J,J) &= \langle u_{xx}, u_{xx}\rangle + \mu\langle u_x, u_x\rangle + 2\langle u, u\rangle - \delta\langle \theta_x, u_x\rangle \\
&+ \frac{k^2}{1+\tau}\langle \theta_x, \theta_x\rangle + \delta\langle u_x, \theta_x\rangle + \langle \theta, \theta\rangle \\
&= \|u_{xx}\|^2 + \mu\|u_x\|^2 + 2\|u\|^2 + \frac{k^2}{1+\tau}\|\theta_x\|^2 + \|\theta\|^2 \\
&\geqslant C_1\left(\|u_{xx}\|^2 + \|u\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta\|^2\right) \\
&= C_1\left(\|u\|^2_{H^2} + \|\theta\|^2_{H^1}\right) \\
&= C_1\|Z\|^2_{\mathbb{K}}, \forall V \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Logo, $b(J,J) \geqslant C_1\|J\|^2_{\mathbb{K}}$, para todo $V \in \mathbb{K}$. Donde pela **Definição 1.7** (ii), segue que $b(\cdot,\cdot)$ é coerciva.

Concluindo assim a prova. □

Proposição 2.13. *O funcional linear F definido em* (2.17) *pertence ao dual de* $\mathbb{K}$.

Demonstração. Como por definição $F(\cdot)$ é linear, para que $F \in \mathbb{K}'$ é suficiente que $F(\cdot)$ seja contínuo. Então, vamos mostrar tal continuidade.

Seja $V = [\omega, \eta]^T \in \mathbb{K}$ e considere a constante

$$C_2 = \max\left\{\|f+g\|, (\|h\| + \delta\|f_{xx}\|), \mu\|f+g\|, \frac{k\tau}{1+\tau}\|p\|\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Daí, } |F(V)| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}}(f+g)\omega\,\mathrm{d}x\right| + \mu\left|\int_{\mathbb{R}}(f+g)\omega_{xx}\,\mathrm{d}x\,\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} h\eta\,\mathrm{d}x\right| \\
&+ \frac{k\tau}{1+\tau}\left|\int_{\mathbb{R}} p_x\eta\,\mathrm{d}x\right| + \delta\left|\int_{\mathbb{R}} f_{xx}\eta\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}}|(f+g)\omega|\,\mathrm{d}x + \mu\int_{\mathbb{R}}|(f+g)\omega_{xx}|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}}|h\eta|\,dx \\
&+ \frac{k\tau}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}}|p_x\eta|\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathbb{R}}|f_{xx}\eta|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|f+g\|\|\omega\| + \mu\|f+g\|\|\omega_{xx}\| + \|h\|\|\eta\| \qquad (2.20) \\
&+ \frac{k\tau}{1+\tau}\|p\|\|\eta_x\| + \delta\|f_{xx}\|\|\eta\| \\
&\leqslant C_2\left(\|\omega_{xx}\| + \|\omega\| + \|\eta_x\| + \|\eta\|\right) \\
&= C_2\left(\|\omega\|_{H^2} + \|\eta\|_{H^1}\right) = C_2\|V\|_K.
\end{aligned}$$

Note que a validade de (2.20) é devido a *Desigualdade de Hölder*.

Portanto, como visto acima, $|F(V)| \leqslant C_2\|V\|_{\mathbb{K}}$, para todo $V \in \mathbb{K}$. O que implica na continuidade da $F(\cdot)$. $\square$

Tendo-se provado as duas Proposições anteriores enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.14. *Existe único* $J = [u\ \theta]^T \in \mathbb{K}$ *tal que a igualdade*

$$b\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix}\right), \forall \begin{bmatrix} \omega \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathbb{K}.$$

é satisfeita para todo $V = [\omega\ \eta]^T \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Pela **Proposição 2.12** temos a continuidade e coercitividade da forma bilinear $b(\cdot,\cdot)$. Já pela **Proposição 2.13** obtemos que o funcional linear $F(\cdot)$ pertence a $\mathbb{K}'$ (espaço dual de $\mathbb{K}$).

Logo estamos nas hipóteses do **Teorema 1.8** (de *Lax-Milgran*). Portanto existe único $J \in \mathbb{K}$ tal que

$$b(J, V) = F(V), \forall V \in \mathbb{K},$$

provando assim o que queríamos. $\square$

O teorema acima já nos garante a existência de $u \in H^2(\mathbb{R})$ e $\theta \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, nos garante a unicidade dos mesmos.

Porém, para que estes componham tal $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T$, que satisfaz (2.13), é necessário que $u \in H^3(\mathbb{R})$, $v \in H^2(\mathbb{R})$, $\theta \in H^1(\mathbb{R})$ e $q \in H^1(\mathbb{R})$. E afim de obtermos isto que temos o próximo resultado.

Proposição 2.15. *Temos que* $J = [u\ \theta]^T$ *dado pelo* ***Teorema 2.14*** *é tal que*
$u \in H^3(\mathbb{R})$ *e* $\theta \in H^1(\mathbb{R})$.

Além disso, existem e são únicos $v \in H^2(\mathbb{R})$ *e* $q \in H^1(\mathbb{R})$ *de tal modo que*
$Z = [u\ v\ \theta\ q]^T$ *satisfaz o sistema* (2.13).

Demonstração. Consideremos aqui, $J = [u\ \theta]^T$ dado pelo **Teorema 2.14**.

Em (2.18) tomando $\omega \equiv 0$ e aplicando J dado acima, segue que

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} \theta_x \eta_x \,\mathrm{d}x \ &+ \ \delta \int_{\mathbb{R}} u_x \eta_x \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \theta\eta \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} h\eta \,\mathrm{d}x + \frac{k\tau}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} p\eta_x + \delta \int_{\mathbb{R}} f_{xx}\eta \,\mathrm{d}x, \forall \eta \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Em particular, assumindo η uma aplicação qualquer em $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ e analisando cada parcela da equação (2.21) como a derivada de uma distribuição fundamental (já que $\theta, \theta_x, u_x, h, p, f_{xx} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{k^2}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} \theta_{xx} \eta \,\mathrm{d}x \ &- \ \delta \int_{\mathbb{R}} u_{xx} \eta \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \theta\eta \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} h\eta \,\mathrm{d}x - \frac{k\tau}{1+\tau}\int_{\mathbb{R}} p_x\eta + \delta \int_{\mathbb{R}} f_{xx}\eta \,\mathrm{d}x, \ \forall \eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Segue daí e da igualdade de funções no sentido das distribuições, que

$$-\frac{k^2}{1+\tau}\theta_{xx} - \delta u_{xx} + \theta = h - \frac{k\tau}{1+\tau}p_x + \delta f_{xx} \text{ em } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Com isto, segue que θ é solução da equação

$$\frac{k^2}{1+\tau}\theta_{xx} = \delta u_{xx} - \theta + h - \frac{k\tau}{1+\tau}p_x + \delta f_{xx} \in H^{-1}(\mathbb{R}). \tag{2.22}$$

Como o operador $\left(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) : H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ é isometria e, por (2.22) temos, $\theta_{xx} \in H^{-1}(\mathbb{R})$ segue que

$$\theta \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.23}$$

Considerando agora em (2.18) $\eta \equiv 0$ e com argumentos análogos aos utilizados acima, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} u_{xxxx}\omega \,\mathrm{d}x - \mu \int_{\mathbb{R}} u_{xx}\omega \,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}} u\omega \,\mathrm{d}x + \delta \int_{\mathbb{R}} \theta_{xx}\omega \,\mathrm{d}x \\ = &\int_{\mathbb{R}} (f+g)\omega \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} (f+g)_x\omega \,\mathrm{d}x, \ \forall \omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Donde,

$$u_{xxxx} - \mu u_{xx} + 2u + \delta\theta_{xx} = f + f_x + g + g_x \text{ em } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Assim, U é solução da equação

$$u_{xxxx} = \mu u_{xx} - 2u - \delta\theta_{xx} + f + f_x + g + g_x \in H^{-1}(\mathbb{R}). \tag{2.25}$$

Portanto, da isometria $\left(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) : H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ e por (2.25) concluímos que $u_{xxxx} \in H^{-1}(\mathbb{R})$. Daí,

$$u \in H^3(\mathbb{R}). \tag{2.26}$$

Agora, como por (2.14) $v = u - f$, tendo-se que $f \in H^2(\mathbb{R})$ e por (2.26) temos $u \in H^3(\mathbb{R}) \subseteq H^2(\mathbb{R})$, concluímos que

$$v \in H^2(\mathbb{R}). \tag{2.27}$$

Por fim, de (2.14) e (2.13), temos que

$$q = \frac{\tau}{1+\tau}p - \frac{k}{1+\tau}\theta_x \text{ e } q_x = k^{-1}\delta v_{xx} - k^{-1}\theta + k^{-1}h$$

das quais segue que $q \in L^2(\mathbb{R})$ e $q_x \in L^2(\mathbb{R})$, respectivamente. Portanto,

$$q \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.28}$$

Logo, por (2.26), (2.27), (2.23) e (2.28) obtemos a existência de

$$Z = [u\ v\ \theta\ q]^T \in H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) = D_{\mathcal{A}}.$$

Além disso, por construção segue que Z é único. □

Finalmente, tendo-se provado o resultado anterior estamos em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 2.16. *O operador linear $\mathcal{A}$ definido em* (2.10) *é maximal.*

Demonstração. Dado $U = [f\ g\ h\ p]^T \in \mathbb{H}$ temos pela **Proposição 2.15** que existe único $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T \in D_{\mathcal{A}}$ que satisfaz o sistema (2.13).

Mas, dizer que Z satisfaz (2.13) é equivalente a dizer que

$$(I - \mathcal{A})\, Z = U.$$

Logo, em resumo, dado $U = [f\ g\ h\ p]^T \in \mathbb{H}$, existe único $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T \in D_{\mathcal{A}}$ tal que $(I - \mathcal{A})\, Z = U$, ou ainda $Im(I - \mathcal{A}) = D_{\mathcal{A}}$. Portanto, $\mathcal{A}$ é maximal. □

2.4 Prova do Teorema 2.1

O que faremos agora, é provar o resultado principal deste capítulo apresentado no **Teorema 2.1**, ou seja, mostrar a existência e unicidade de solução para o *Problema de Cauchy* (2.1).

Para isso, veremos uma sequência de resultados que nos levará a concluir o que queremos.

Proposição 2.17. *Seja $\mathcal{A} : D_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{H}$ o operador linear dado em* (2.10). *Então, $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Pelo **Teorema 2.9**, $\mathcal{A}$ é dissipativo e pelo **Teorema 2.16** o mesmo é maximal.

Ainda, observando que $D_{\mathcal{A}}$ é denso em $\mathbb{H}$. Portanto, o operador linear $\mathcal{A}$ está nas hipóteses do **Teorema 1.8** de *Lax-Milgran.*

Logo, $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathbb{H}$, como queríamos provar. □

Antes de prosseguirmos obtendo resultados que nos levem a provar o **Teorema 2.1**, vejamos um resultado a cerca do operador $\mathcal{B}$ dado em (2.11).

Lema 2.18. *O operador linear $\mathcal{B}$ definido em* (2.11) *é limitado.*

Demonstração. Com efeito, o fato de $\mathcal{B}$ ser limitado é uma consequência do **Lema 1.31**. □

Proposição 2.19. *O operador linear* $\mathcal{A}+\mathcal{B}:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{H}$ *é gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $S(t)$ *em* $\mathbb{H}$.

Demonstração. De fato, pela **Proposição 2.17** segue que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em $\mathbb{H}$, digamos que tal semigrupo é denotado por $\{T(t)\}\subseteq\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

Pelo **Teorema 1.38**, temos que existem $M\geqslant 1$ e $\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}\leqslant Me^{\beta t},\ \textit{para todo}\ t\geqslant 0.$$

Ainda, pelo **Lema 2.18** temos que $\mathcal{B}$ é um operador linear limitado.

Logo, segue do **Teorema 1.39** que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ em $\mathbb{H}$. Ainda, tal semigrupo satisfaz $\|S(t)\|\leqslant Me^{(\beta+M\|\mathcal{B}\|)t}$. □

De posse dos dois últimos resultados, estamos aptos a apresentar uma prova do **Teorema 2.1** e de um resultado complementar, os quais dizem que:

O Problema de Cauchy descrito em (2.1) *possui única solução* $Z=\{u,v,\theta,q\}$. *Isto é, existe único* $Z\in C\left(\mathbb{R}_+;\mathbb{D}\right)\cap C^1\left([0,\infty);\mathbb{H}\right)$ *que seja solução de* (2.1), *onde*

$$\mathbb{D}:=H^3(\mathbb{R})\times H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}).$$

Além disso,

Proposição 2.20. *Se tomarmos* $Z_0=(u_0(x),u_1(x),\theta_0(x),q_0(x))\in D\left(\mathcal{A}^2\right)$ *em* (2.1), *isto é,* $Z_0\in H^4\times H^3\times H^2\times H^2$ *temos que* (2.1) *possui uma única solução forte*

$$Z\in C\left(\mathbb{R}_+;D\left(\mathcal{A}^2\right)\right)\cap C^1\left([0,\infty);D\left(\mathcal{A}\right)\right). \tag{2.29}$$

Demonstração. (**Teorema 2.1** e **Proposição 2.20**)

Com efeito, segue do **Teorema 1.41** aplicado à **Proposição 2.19** que o PVI (2.5) o qual é descrito por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z = (A+B)Z, \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ Z(x,0) = Z_0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

para cada $Z_0 \in D_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$, possui única solução clássica

$$Z = \{u, v, \theta, q\}\,. \tag{2.30}$$

Mas, da maneira em que os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão definidos, respectivamente, em (2.3) e (2.4), e pela mudança de variável feita anteriormente em (2.2) temos que resolver o Problema de Cauchy (2.1), que é equivalente a resolver o PVI (2.5).

Sendo assim Z dado em (2.30) é também solução de (2.1).

Logo, o *Problema de Cauchy* (2.1) possui única solução $Z = [u\ v\ \theta\ q]^T$.

Ou ainda, para cada $Z_0 \in \mathbb{D}$ existe e é único

$$Z \in C\left(\mathbb{R}_+; \mathbb{D}\right) \cap C^1\left([0,\infty); \mathbb{H}\right)$$

que é solução de (2.1), concluindo assim a prova do teorema. $\square$

Capítulo 3

Decaimento da Energia Total

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é mostrar o decaimento da energia total associada ao Problema de Cauchy (6)-(7) para o caso particular $\delta = 1$, $k = 1$, $0 < \mu \leqslant 1$ e $\tau \leqslant 1$, implicando em $\mu + 5\tau \leqslant 6$, o qual é baseado em Racke and Ueda (2016). O caso $\delta > 0$ e $\delta \neq 1$, $k > 0$ e $k \neq 1$, $\mu > 1$ não será feito aqui . Porém, o mesmo também pode ser encontrado em Racke and Ueda (2016).

Mais precisamente, neste capítulo vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Para cada* $Z_0 = \{u_0, u_1, \theta_0, q_0\} \in \mathcal{D} = H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, *seja* $Z = \{u, u_t, \theta, q\}$ *a solução do modelo* (6)-(7) *obtida no* ***Teorema 2.1****.*

Então, a energia total associada a (6)-(7)

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta^2 + \tau q^2\right] \mathrm{d}x$$

satisfaz

$$E(t) \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0.$$

Com, $C = \dfrac{1}{2730}\dfrac{\tau\mu}{6}$ *e* $\tilde{K}$ *é uma constante positiva.*

Considerando a solução $Z = \{u, u_t, \theta, q\}$ obtida pelo **Teorema 2.1**, inicialmente no Problema de Cauchy (6)-(7), com $\delta = 1$, $k = 1$, $\mu \leqslant 1$ e $\tau \leqslant 1$, aplicamos a **Definição 1.44** da *Transformada de Fourier* no mesmo, juntamente com suas propriedades dadas na **Proposição 1.46** e **1.47** temos assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + \xi^4 \hat{u} + \mu \xi^2 \hat{u}_{tt} - \xi^2 \hat{\theta} = 0 \\ \hat{\theta}_t + i\xi \hat{q} + \xi^2 \hat{u}_t = 0 \\ \tau \hat{q}_t + \hat{q} + i\xi \hat{\theta} = 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

com condições iniciais $\hat{u}_0(\xi), \hat{u}_1(\xi), \hat{\theta}_0(\xi), \hat{q}_0(\xi)$ e única solução $\left\{\hat{u}, \hat{u}_t, \hat{\theta}, \hat{q}\right\}$.

Onde, tal Problema de Cauchy possui energia associada dada por:

$$W(\xi, t) = \left(1 + \mu\xi^2\right) |\hat{u}_t|^2 + \xi^4 |\hat{u}|^2 + \left|\hat{\theta}\right|^2 + \tau |\hat{q}|^2 . \tag{3.2}$$

Usando técnica de multiplicadores definimos os seguintes funcionais:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = 1/2 \left[1 + \tau\xi^2\right]\left[1 + (\tau + \mu)\xi^2\right] W(\xi, t) . \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned} J(\xi, t) &= \alpha_1 \xi \left(1 + \tau\mu\xi^2\right) \tau \mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\} \\ &+ \alpha_1\alpha_2 \left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\left(1 + \mu\xi^2\right) \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\} \\ &+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\left(1 + \mu\xi^2\right) \xi^2 \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde α_1, α_2 e α_3 são constantes positivas cujos valores serão estipulados mais adiante.

3.2 Lemas Técnicos

Nesta seção apresentamos uma séries de lemas técnicos que nos auxiliarão posteriormente.

Lema 3.2. *Seja $W(\xi, t)$ o funcional definido em (3.2). Então,* $\dfrac{\partial}{\partial t} W(\xi, t) = -2|\hat{q}|^2$, *para todo* $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Demonstração. Com efeito, derivando em relação a t o funcional W temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W(\xi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\xi^4|\hat{u}|^2\right\}\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left|\hat{\theta}\right|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\tau|\hat{q}|^2\right\},\ \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty),\end{aligned}$$

daí e pelo **Lema 1.50**,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W(\xi,t) &= 2\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}_{tt}\right\}+2\xi^4\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{u}}_t\right\}\\ &+ 2\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{\theta}}_t\right\}+2\tau\mathrm{Re}\left\{\hat{q}\bar{\hat{q}}_t\right\},\ \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Observe que de (3.1) segue, para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$:

- $\xi^2\hat{\theta}\bar{\hat{u}}_t=\hat{u}_{tt}\bar{\hat{u}}_t+\xi^4\hat{u}\bar{\hat{u}}_t+\mu\xi^2\hat{u}_{tt}\bar{\hat{u}}_t=\left(1+\mu\xi^2\right)\hat{u}_{tt}\bar{\hat{u}}_t+\xi^4\hat{u}\bar{\hat{u}}_t,$
- $\hat{\theta}_t\bar{\hat{\theta}}=-i\xi\hat{q}\bar{\hat{\theta}}-\xi^2\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}},$
- $\tau\hat{q}_t\bar{\hat{q}}=-\hat{q}\bar{\hat{q}}-i\xi\hat{\theta}\bar{\hat{q}}.$

Assim, das três igualdades acima e de (3.5), para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}W(\xi,t)=2\mathrm{Re}\left\{\xi^2\hat{\theta}\bar{\hat{u}}_t\right\}+2\mathrm{Re}\left\{-i\xi\hat{q}\bar{\hat{\theta}}-\xi^2\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}+2\mathrm{Re}\left\{-\hat{q}\bar{\hat{q}}-i\xi\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}.$$

Portanto, pelo **Lema 1.51**,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W(\xi,t) &= 2\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}-\xi\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}-2\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\\ &- 2\mathrm{Re}\left\{\hat{q}\bar{\hat{q}}\right\}+2\xi\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}=-2\mathrm{Re}\left\{\hat{q}\bar{\hat{q}}\right\},\ \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{\partial}{\partial t}W(\xi,t)=-2|\hat{q}|^2$, para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Provando assim o que queríamos. □

Lema 3.3. *Considerando $E(\xi,t)$ o funcional definido em (3.3), temos que a sua derivada em t é dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)=-\left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\xi^2\right]|\hat{q}|^2,\ \textit{para todo}\ (\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Demonstração. De fato, do **Lema 3.2** segue a prova do resultado. Já que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{1/2\left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\xi^2\right]W(\xi,t)\right\} \\
&= 1/2\left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\xi^2\right]\frac{\partial}{\partial t}\left\{W(\xi,t)\right\} \\
&= -\left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\xi^2\right]|\hat{q}|^2, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4. *Assumindo que $J(\xi,t)$ é o funcional definido em* (3.4)*, então*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t) &= -\alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 \\
&+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 \\
&- \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^6\left(1+\tau\mu\xi^2\right)|\hat{u}|^2-\alpha_1\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&+ \alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&+ \alpha_1\tau\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)|\hat{q}|^2+\alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&+ \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Da definição de J em (3.4) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t) = \alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\right] \tag{3.6}$$

$$+\ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\right] \tag{3.7}$$

$$+\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left[\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}\right]. \tag{3.8}$$

Para concluir a prova do Lema, vamos calcular as derivadas parciais que encontram-se em (3.6), (3.7) e (3.8). Assim, observando que por (3.1)

- $\left(1+\mu\xi^2\right)\hat{u}_{tt} = -\mu\xi^2\hat{u}_{tt}+\xi^2\hat{\theta}$
- $\hat{\theta}_t = -i\xi\hat{q}-\xi^2\hat{u}_t$
- $\tau\hat{q}_t = -\hat{q}-i\xi\hat{\theta}$

e fazendo uso dos resultados obtidos no **Lema 1.51**, temos:

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\right] &= \tau\left[\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}_t\bar{\hat{q}}\right\}+\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}_t\right\}\right] \\
&= \tau\mathrm{Re}\left\{i\left(-i\xi\hat{q}-\xi^2\hat{u}_t\right)\bar{\hat{q}}\right\}-\mathrm{Re}\left\{i\left(\tau\hat{q}_t\right)\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&= \tau\xi\mathrm{Re}\left\{\hat{q}\bar{\hat{q}}\right\}-\tau\xi^2\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}-\mathrm{Re}\left\{i\left(-\hat{q}-i\xi\hat{\theta}\right)\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&= \tau\xi\left|\hat{q}\right|^2-\tau\xi^2\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}+\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}-\xi\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&= \tau\xi\left|\hat{q}\right|^2-\xi\left|\hat{\theta}\right|^2-\tau\xi^2\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}+\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

- $$\tau\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\right]=\tau\xi\left|\hat{q}\right|^2-\xi\left|\hat{\theta}\right|^2-\tau\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}+\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}. \quad (3.9)$$

Ainda,

$$
\begin{aligned}
\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\right] &= \left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_{tt}\bar{\hat{\theta}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}_t\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)\hat{u}_{tt}\bar{\hat{\theta}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}_t\bar{\hat{u}}_t\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(-\xi^4\hat{u}+\xi^2\hat{\theta}\right)\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&+ \left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\left(-i\xi\hat{q}-\xi^2\hat{u}_t\right)\bar{\hat{u}}_t\right\} \\
&= -\xi^4\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}+\xi^2\left|\theta\right|^2-\left(1+\mu\xi^2\right)\xi\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{u}}_t\right\} \\
&- \left(1+\mu\xi^2\right)\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2.
\end{aligned}
$$

Então,

- $$
\begin{aligned}
\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\right] &= \xi^2\left|\theta\right|^2-\left(1+\mu\xi^2\right)\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2 \qquad (3.10) \\
&- \xi^4\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}-\left(1+\mu\xi^2\right)\xi\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{u}}_t\right\}.
\end{aligned}$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}\right] &= \left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_{tt}\bar{\hat{u}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}_t\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(-\xi^4\hat{u}+\xi^2\hat{\theta}\right)\bar{\hat{u}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}\right|^2 \\
&= -\xi^4\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{u}}\right\}+\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{u}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}\right|^2 \\
&= -\xi^4\left|\hat{u}\bar{\hat{u}}\right|+\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{u}}\right\}+\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}\right|^2.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

- $$\left(1+\mu\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}\right] = -\xi^4\left|\hat{u}\bar{\hat{u}}\right| + \left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}\right|^2 + \xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{u}}\right\}. \tag{3.11}$$

Daí, substituindo o que foi obtido em (3.9), (3.10) e (3.11), respectivamente em (3.6), (3.7) e (3.8) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t) &= \alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi\left|\hat{q}\right|^2 - \xi\left|\hat{\theta}\right|^2 + \tau\xi^2\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\} + \mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}\right] \\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2 - \xi^2\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}_t\right|^2 - \xi^4\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}\right. \\
&- \left.\xi\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{u}}_t\right\}\right] \\
&+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left[-\xi^4\left|\hat{u}\right|^2 + \left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}_t\right|^2 + \xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{\theta}\bar{\hat{u}}\right\}\right].
\end{aligned}$$

Logo, reorganizando os termos da igualdade acima:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t) &= -\alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}_t\right|^2 \\
&+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}_t\right|^2 \\
&- \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^6\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{u}\right|^2 - \alpha_1\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&+ \alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&+ \alpha_1\tau\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{q}\right|^2 + \alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\} \\
&+ \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi\left[\tau\xi^2 + \alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração do Lema. □

Antes de enunciarmos e provarmos o próximos Lemas consideremos as estimativas pautadas na observação a seguir, tais quais resultam de uma aplicação direta do **Lema 1.13** da *Desigualdade de Young.*

Observação 3.5. *Sejam,* ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, *e* ε_6 *constantes positivas, as quais no momento oportuno serão adequadamente estipuladas. Então,*

$$(i)\ |\xi|^2 \left|\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\hat{u}_t\right|^2 + \frac{1}{2}\xi^4 \left|\hat{u}\right|^2,$$

$$(ii)\ \xi^2 \left|\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right| \leqslant \varepsilon_1\xi^4 \left|\hat{u}\right|^2 + (4\varepsilon_1)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2,$$

$$(iii)\ \left|\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right| \leqslant \varepsilon_2 \left|\hat{u}_t\right|^2 + (4\varepsilon_2)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2,$$

$$(iv)\ |\xi| \left|\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right| \leqslant \varepsilon_3\xi^2 \left|\hat{\theta}\right|^2 + (4\varepsilon_3)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2,$$

$$(v)\ |\xi| \left|\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right| \leqslant \varepsilon_4\xi^2 \left|\hat{u}_t\right|^2 + (4\varepsilon_4)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2,$$

$$(vi)\ \tau|\xi| \left|\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right| \leqslant \varepsilon_5 \left|\hat{u}_t\right|^2 + (4\varepsilon_5)^{-1}\tau\xi^2\left|\hat{q}\right|^2,$$

$$(vii)\ \mu|\xi| \left|\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right| \leqslant \varepsilon_6\mu^2\xi^2 \left|\hat{u}_t\right|^2 + (4\varepsilon_6)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2.$$

Lema 3.6. *Para* $\left\{\hat{u},\ \hat{u}_t, \hat{\theta}, \hat{q}\right\}$, *solução do Problema de Cauchy* (3.1), *valem as seguintes estimativas:*

$$\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)|\xi|\,\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\} \leqslant \left(\alpha_1+\alpha_1\tau\mu\xi^2\right)\left\{\varepsilon_3\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2 + (4\varepsilon_3)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2\right\},$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}\\
&\leqslant \left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau\mu\xi^2\right.\\
&- \left.\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\varepsilon_1\xi^4\left|\hat{u}\right|^2+(4\varepsilon_1)^{-1}\left|\theta\right|^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]|\xi|\,\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&\leqslant \left[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\mu\xi^2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right]\\
&\quad\left\{\varepsilon_4\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2+(4\varepsilon_4)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2\right\}\\
&+ \alpha_1\xi^2\left\{\varepsilon_5\left|\hat{u}_t\right|^2+(4\varepsilon_5)^{-1}\tau^2\xi^2\left|\hat{q}\right|^2\right\}\\
&+ \left[\alpha_1\tau^2\xi^4+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^4\right]\\
&\quad\left\{\varepsilon_6\mu^2\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2+(4\varepsilon_6)^{-1}\left|\hat{q}\right|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ *e* ε_6 *constantes positivas quaisquer.*

Demonstração. Com efeito, temos que a primeira desigualdade sai diretamente aplicando-se a estimativa (iv) da **Observação 3.5**.

Agora, aplicaremos a estimativa (ii), também da **Observação 3.5**, em

$$\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\,\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}\\
&\leqslant\ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\varepsilon_1\xi^4\left|\hat{u}\right|^2+\left(4\varepsilon_1\right)^{-1}\left|\theta\right|^2\right\}\\
&=\ \left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right)\left(\alpha_3-1\right)\xi^2\\
&\quad\ \left\{\varepsilon_1\xi^4\left|\hat{u}\right|^2+\left(4\varepsilon_1\right)^{-1}\left|\theta\right|^2\right\}\\
&=\ \left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau\mu\xi^2\right.\\
&-\ \left.\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\varepsilon_1\xi^4\left|\hat{u}\right|^2+\left(4\varepsilon_1\right)^{-1}\left|\theta\right|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\,\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}\\
&\leqslant\ \left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau\mu\xi^2\right.\\
&-\ \left.\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\varepsilon_1\xi^4\left|\hat{u}\right|^2+\left(4\varepsilon_1\right)^{-1}\left|\theta\right|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Por fim, note que

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&=\ \left(\alpha_1+\alpha_1\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\alpha_2+\alpha_2\mu\xi^2\right]\\
&\quad\ \left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&=\ \left[\alpha_1\tau\xi^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\mu\xi^2+\alpha_1\tau^2\mu\xi^4\right.\\
&+\ \left.\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu^2\xi^4\right]\\
&\quad\ \left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&=\ \left[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\mu\xi^2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right]\\
&\quad\ \left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&+\ \alpha_1\xi^2\tau\left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&+\ \left[\alpha_1\tau^2\xi^4+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^4\right]\mu\left|\xi\right|\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&= \left[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\mu\xi^2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right]|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&+ \alpha_1\xi^2\tau|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&+ \left[\alpha_1\tau^2\xi^4+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^4\right]\mu|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando na igualdade acima as estimativas (v), (vi) e (vii) da **Observação 3.5**, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}\\
&\leqslant \left[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\mu\xi^2+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^2\right]\\
&\quad\left\{\varepsilon_4\xi^2|\hat{u}_t|^2+(4\varepsilon_4)^{-1}|\hat{q}|^2\right\}\\
&+ \alpha_1\xi^2\left\{\varepsilon_5|\hat{u}_t|^2+(4\varepsilon_5)^{-1}\tau^2\xi^2|\hat{q}|^2\right\}\\
&+ \left[\alpha_1\tau^2\xi^4+\alpha_1\alpha_2\tau\mu\xi^4\right]\left\{\varepsilon_6\mu^2\xi^2|\hat{u}_t|^2\right.\\
&+ \left.(4\varepsilon_6)^{-1}|\hat{q}|^2\right\}.
\end{aligned}
$$

O que encerra a prova do Lema. □

Lema 3.7. *Sendo* $\left\{\hat{u},\,\hat{u}_t,\hat{\theta},\hat{q}\right\}$*, solução do Problema de Cauchy* (3.1)*, considerando* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ *e* ε_6 *constantes positivas quaisquer, valem também as estimativas:*

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\left\{\varepsilon_3\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2+(4\varepsilon_3)^{-1}|\hat{q}|^2\right\}\\
&\qquad\leqslant\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau|\xi|\operatorname{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\leqslant\\
&\alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\left\{\varepsilon_3\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2+(4\varepsilon_3)^{-1}|\hat{q}|^2\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\varepsilon_2|\hat{u}_t|^2+(4\varepsilon_2)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2\right\}\\
&\qquad\leqslant\ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\operatorname{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\leqslant\\
&\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\varepsilon_2|\hat{u}_t|^2+(4\varepsilon_2)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2\right\},
\end{aligned}
$$

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\frac{1}{2}\left|\hat{u}_t\right|^2+\frac{1}{2}\xi^4\left|\hat{u}\right|^2\right\}$$
$$\leqslant \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}\leqslant$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\frac{1}{2}\left|\hat{u}_t\right|^2+\frac{1}{2}\xi^4\left|\hat{u}\right|^2\right\}.$$

Demonstração. As estimativas apresentadas neste Lema saem diretamente da aplicação dos itens (iv), (iii) e (i) da **Observação 3.5** em $\left|\xi\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\right|$, $\left|\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\right|$ e $\left|\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}\right|$, respectivamente. □

3.3 O Funcional $H(\xi,t)$

Feita a sequência de Lemas da seção anterior, vamos definir um funcional $H(\xi,t)$ o qual é uma pertubação do energia $W(\xi,t)$ e é obtido utilizando técnica de multiplicadores.

Definição 3.8. *Sendo $\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)$ o funcional definido em* (3.3) *e $J(\xi,t)$ dado em* (3.4)*, definimos o funcional linear $H(\xi,t)$, por:*

$$H(\xi,t)=\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)+J(\xi,t),\ \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
H(\xi,t) &= 1/2\left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\xi^2\right]W(\xi,t)\\
&+ \alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\mathrm{Re}\left\{i\hat{\theta}\bar{\hat{q}}\right\}\\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}\right\}\\
&+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)\xi^2\mathrm{Re}\left\{\hat{u}_t\bar{\hat{u}}\right\}.
\end{aligned}$$

Relembremos que nosso objetivo neste capítulo é provar o resultado apresentado no **Teorema 3.1**, ou seja, mostrar que

$$E(t)\leqslant\tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}}+2e^{-Ct}E(0),\ \forall t\geqslant 0.$$

Com, $\tilde{K} = K \sup_{|\xi|\leqslant 1} W(\xi, 0)$ onde $K > 0$ e $C = \dfrac{1}{2730}\dfrac{\tau\mu}{6}$.

Para isso, com o auxílio dos Lemas técnicos apresentados anteriormente provaremos que o funcional energia $W(\xi, t)$ possui decaimento exponencial. Após, utilizaremos o **Teorema 1.48 de Plancherel** e técnicas de cálculo para retornar ao funcional $E(t)$ e assim concluir a prova do **Teorema 3.1**.

Vejamos agora dois resultados que irão dar estimativas para $\dfrac{\partial}{\partial t}H(\xi, t)$ e $H(\xi, t)$:

Proposição 3.9. *Seja $H(\xi, t)$ o funcional dado na **Definição 3.8**. Então,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) &\leqslant -\frac{1}{7!}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2\right\}\\ &- \frac{1}{16}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2.\end{aligned}$$

Demonstração. Com efeito, visto que pela **Definição 3.8**

$$H(\xi,t) = \tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) + J(\xi,t), \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty),$$

tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) + \frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t), \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Ou ainda, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R}\times[0, +\infty)$, do **Lema 3.3** e **3.4** temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) &= -\alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2\\ &+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2\\ &- \alpha_1\alpha_2\alpha_3\xi^6\left(1+\tau\mu\xi^2\right)|\hat{u}|^2-\alpha_1\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2\\ &+ \alpha_1\alpha_2\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2\\ &- \left[1+\tau\xi^2\right]\left[1+(\tau+\mu)\,\xi^2\right]|\hat{q}|^2\\ &+ \alpha_1\tau\xi^2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)|\hat{q}|^2+\alpha_1\xi\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\mathrm{Re}\left\{i\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\right\}\\ &+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^4\left[\alpha_3-1\right]\mathrm{Re}\left\{\hat{u}\bar{\hat{\theta}}\right\}\\ &+ \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi\left[\tau\xi^2+\alpha_2\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\mathrm{Re}\left\{i\hat{u}_t\bar{\hat{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Daí, aplicando os resultados do **Lema 3.6** obtemos a seguinte estimativa:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) \leqslant H_1(\xi,t)+H_2(\xi,t)+H_3(\xi,t)+H_4(\xi,t)\,,\ \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Onde,

$$\begin{aligned}
H_1(\xi,t) &:= \alpha_1\left[\alpha_2(\varepsilon_4+\alpha_3-1)+\varepsilon_5\right]\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&+ \alpha_1\alpha_2(\varepsilon_4+\alpha_3-1)(\tau+1)\mu\xi^4\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&+ \alpha_1\left[\alpha_2(\alpha_3-1)+\varepsilon_6(\tau+\alpha_2\mu)\right]\tau\mu^2\xi^6\left|\hat{u}_t\right|^2,\\
H_2(\xi,t) &:= \alpha_1\alpha_2\left[\varepsilon_1(\alpha_3-1)-\alpha_3\right]\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^6\left|\hat{u}\right|^2,\\
H_3(\xi,t) &:= \alpha_1\left[\alpha_2\left(1+\frac{\alpha_3-1}{4\varepsilon_1}\right)+\varepsilon_3-1\right]\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2,\\
H_4(\xi,t) &:= \left[\frac{\alpha_1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{\alpha_2}{\varepsilon_4}\right)-1\right]\left|\hat{q}\right|^2\\
&+ \left[(\alpha_1-2)\tau+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\{1+\tau\}}{4\varepsilon_4}-1\right)\mu\right]\xi^2\left|\hat{q}\right|^2\\
&+ \left[\left\{\frac{\alpha_1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon_5}+\frac{1}{\varepsilon_6}\right)-1\right\}\tau+\left\{\alpha_1\left(\tau+\frac{\alpha_2}{4\varepsilon_6}\right)-1\right\}\mu\right]\tau\xi^4\left|\hat{q}\right|^2.
\end{aligned}$$

Tomando em H_1, H_2, H_3 e H_3 definidos acima, $\alpha_1 = 1/12$, $\alpha_2 = 1/5$, $\alpha_3 = 1/2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1/2$, $\varepsilon_4 = 1/4$, $\varepsilon_5 = 1/21$, e $\varepsilon_6 = 1/24$ e lembrando que $\tau + \mu/5 \leqslant 6/5$, para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ temos:

$$\begin{aligned}
H_1(\xi,t) &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{21}\right]\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&+ \frac{1}{12}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right)(\tau+1)\mu\xi^4\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&+ \frac{1}{12}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{24}\left(\tau+\frac{1}{5}\mu\right)\right]\tau\mu^2\xi^6\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&\leqslant -\frac{1}{7!}\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2-\frac{1}{240}(1+\tau)\mu\xi^4\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&- \frac{1}{12}\left[-\frac{1}{10}+\frac{1}{24}\frac{6}{5}\right]\tau\mu^2\xi^6\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&= -\frac{1}{7!}\xi^2\left|\hat{u}_t\right|^2\\
&- \frac{1}{240}(1+\tau)\mu\xi^4\left|\hat{u}_t\right|^2-\frac{1}{240}\tau\mu^2\xi^6\left|\hat{u}_t\right|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$,

$$H_1(\xi, t) \leqslant -\frac{1}{7!}\xi^2 |\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{240}(1+\tau)\mu\xi^4 |\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{240}\tau\mu^2\xi^6 |\hat{u}_t|^2 .$$

Ou ainda, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} H_1(\xi, t) &\leqslant -\frac{1}{7!}\left[1 + \mu\xi^2 + \tau\mu\xi^2 + \tau\mu^2\xi^4\right]\xi^2 |\hat{u}_t|^2 \\ &= -\frac{1}{7!}\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left(1 + \mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} H_2(\xi, t) &= \frac{1}{12}\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\right]\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^6 |\hat{u}|^2 \\ &= -\frac{3}{240}\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^6 |\hat{u}|^2 \\ &\leqslant -\frac{1}{240}\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^6 |\hat{u}|^2 , \forall\, (\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} H_3(\xi, t) &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1/2 - 1}{4(1/2)}\right) + \frac{1}{2} - 1\right]\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2 \left|\hat{\theta}\right|^2 \\ &= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{10} - 1\right]\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2 \left|\hat{\theta}\right|^2 \\ &\leqslant -\frac{1}{48}\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2 \left|\hat{\theta}\right|^2 , \forall\, (\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \end{aligned} \tag{3.14}$$

E, por último, sabendo que $\tau \leqslant 1$, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, temos:

$$\begin{aligned} H_4(\xi, t) &= \left[\frac{1/12}{4}\left(\frac{1}{1/2} + \frac{1/5}{1/4}\right) - 1\right]|\hat{q}|^2 \\ &+ \left[\left(\frac{1}{12} - 2\right)\tau + \left(\frac{(1/12)(1/5)\{1+\tau\}}{4(1/4)} - 1\right)\mu\right]\xi^2 |\hat{q}|^2 \\ &+ \left[\left\{\frac{1/12}{4}\left(\frac{1}{1/21} + \frac{1}{1/24}\right) - 1\right\}\tau \right. \\ &+ \left. \left\{\frac{1}{12}\left(\tau + \frac{1/5}{4(1/24)}\right) - 1\right\}\mu\right]\tau\xi^4 |\hat{q}|^2 \\ &\leqslant -\frac{113}{120}|\hat{q}|^2 - \left[\frac{23}{12}\tau + \frac{29}{30}\mu\right]\xi^2 |\hat{q}|^2 - \left[\frac{3}{48}\tau + \frac{49}{60}\right]\tau\xi^4 |\hat{q}|^2 \\ &\leqslant -\frac{1}{16}\left[1 + 2\tau\xi^2 + \mu\xi^2 + \tau^2\xi^4 + \tau\mu\xi^4\right]|\hat{q}|^2 \\ &= -\frac{1}{16}\left(1 + \tau\xi^2\right)\left(1 + [\tau + \mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2 . \end{aligned}$$

Então,

$$H_4(\xi,t) \leqslant -\frac{1}{16}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty). \tag{3.15}$$

Portanto, de (3.12),(3.13), (3.14) e (3.15) podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) \;\leqslant\; & -\frac{1}{7!}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2\\ & -\frac{1}{240}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^6|\hat{u}|^2-\frac{1}{48}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2\\ & -\frac{1}{16}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) \;\leqslant\; & -\frac{1}{7!}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2\right\}\\ & -\frac{1}{16}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.10. *Seja $H(\xi,t)$ o funcional dado na* ***Definição 3.8*** *tal que $\mu\leqslant 1$. Então,*

$$\frac{13}{12}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)\leqslant H(\xi,t)\leqslant\frac{11}{12}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t), \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Demonstração. Visto que $H(\xi,t)=\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)+J(\xi,t)$, aplicando no mesmo as estimativas obtidas no **Lema 3.7** e reorganizando os seus termos, obtemos o seguinte:

$$I(\xi,t)\leqslant H(\xi,t)\leqslant S(\xi,t), \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty). \tag{3.16}$$

Com,

$$I(\xi,t):=I_1(\xi,t)+I_2(\xi,t)+I_3(\xi,t)+I_4(\xi,t) \tag{3.17}$$

e

$$S(\xi,t):=S_1(\xi,t)+S_2(\xi,t)+S_3(\xi,t)+S_4(\xi,t). \tag{3.18}$$

Onde, para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$,

$$
\begin{aligned}
I_1(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\right.\\
&- \left.\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)(2\varepsilon_2+\alpha_3)\right\}|\hat{u}_t|^2\\
I_2(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left\{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(\tau\xi^2+\left[1+\mu\xi^2\right]\right)\right.\\
&- \left.\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\mu\xi^2\right)\right\}\xi^4|\hat{u}|^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+(1-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\xi^4|\hat{u}|^2\\
I_3(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&- \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\varepsilon_3\tau\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&- \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)(4\varepsilon_2)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[(1+\mu\xi^2)\left\{1-\frac{\alpha_1\alpha_2}{4\varepsilon_2}\right\}+\tau\xi^2\left\{1-\alpha_1\varepsilon_3\right\}\right]\left|\hat{\theta}\right|^2\\
I_4(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\tau|\hat{q}|^2\\
&- \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)(4\varepsilon_3)^{-1}\tau|\hat{q}|^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left\{1+[\tau+\mu]\,\xi^2-\frac{\alpha_1}{2\varepsilon_3}\right\}\tau|\hat{q}|^2.
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
S_1(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\mu\xi^2\right)\left\{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\right.\\
&+ \left.\alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)[2\varepsilon_2+\alpha_3]\right\}|\hat{u}_t|^2\\
S_2(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left\{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(\tau\xi^2+\left[1+\mu\xi^2\right]\right)\right.\\
&+ \left.\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(1+\mu\xi^2\right)\right\}\xi^4|\hat{u}|^2\\
S_3(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&+ \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\varepsilon_3\tau\xi^2\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+\mu\xi^2\right)(4\varepsilon_2)^{-1}\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[(1+\mu\xi^2)\left\{1+\frac{\alpha_1\alpha_2}{4\varepsilon_2}\right\}+\tau\xi^2\left\{1+\alpha_1\varepsilon_3\right\}\right]\left|\hat{\theta}\right|^2\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\frac{61}{60}(1+\mu\xi^2)+\frac{13}{12}\tau\xi^2\right]\left|\hat{\theta}\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4(\xi,t) &:= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\tau\,|\hat{q}|^2 \\
&+ \alpha_1\left(1+\tau\mu\xi^2\right)(4\varepsilon_3)^{-1}\tau\,|\hat{q}|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left\{1+[\tau+\mu]\,\xi^2+\frac{\alpha_1}{2\varepsilon_3}\right\}\tau\,|\hat{q}|^2
\end{aligned}
$$

Agora, em $I_j(\xi,t)$ e $S_j(\xi,t)$ com $j\in\{1,2,3,4\}$ pondo $\alpha_1=1/12$, $\alpha_2=1/5$,
$\alpha_3=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1/2$ e sendo $\mu\leqslant 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
I_1(\xi,t) &\geqslant \frac{1}{2}\left(1+\mu\xi^2\right)\left(1+\tau\xi^2\right)\left\{1+[\tau+\mu]\,\xi^2-\frac{1}{40}\right\}|\hat{u}_t|^2 \\
&\geqslant \frac{39}{80}\left(1+\mu\xi^2\right)\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 \\
I_2(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\frac{119}{120}\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\xi^4\,|\hat{u}|^2 \\
&\geqslant \frac{119}{240}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\xi^4\,|\hat{u}|^2 \\
I_3(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\frac{29}{30}(1+\mu\xi^2)+\frac{23}{24}\tau\xi^2\right]\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&\geqslant \frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
I_4(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left\{\frac{11}{12}+[\tau+\mu]\,\xi^2\right\}\tau\,|\hat{q}|^2 \\
&\geqslant \frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\tau\,|\hat{q}|^2
\end{aligned}
$$

Assim, do que temos acima e por (3.17) podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
I(\xi,t) &\geqslant \left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \\
&\quad \left\{\frac{39}{80}\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\frac{119}{240}\xi^4\,|\hat{u}|^2+\frac{11}{24}\left|\hat{\theta}\right|^2+\frac{11}{24}\tau\,|\hat{q}|^2\right\} \\
&\geqslant \frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \\
&\quad \left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4\,|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2+\tau\,|\hat{q}|^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
I(\xi,t)\geqslant\frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4\,|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2+\tau\,|\hat{q}|^2\right\},
$$

ou ainda,

$$I(\xi,t) \geqslant \frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)W(\xi,t) = \frac{11}{12}\tilde{\mathcal{E}}. \tag{3.19}$$

Ainda, temos:

$$\begin{aligned}
S_1(\xi,t) &\leqslant \frac{1}{2}\left(1+\mu\xi^2\right)\left(1+\tau\xi^2\right)\left\{1+[\tau+\mu]\,\xi^2+\frac{1}{40}\right\}|\hat{u}_t|^2 \\
&\leqslant \frac{41}{80}\left(1+\mu\xi^2\right)\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 \\
S_2(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\tau\xi^2+\frac{121}{120}\left(1+\mu\xi^2\right)\right]\xi^4|\hat{u}|^2 \\
&\leqslant \frac{121}{240}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\xi^4|\hat{u}|^2 \\
S_3(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\frac{61}{60}(1+\mu\xi^2)+\frac{13}{12}\tau\xi^2\right]\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&\leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
S_4(\xi,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\tau\xi^2\right)\left[\frac{61}{60}(1+\mu\xi^2)+\frac{13}{12}\tau\xi^2\right]\left|\hat{\theta}\right|^2 \\
&\leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left|\hat{\theta}\right|^2.
\end{aligned}$$

Então, das estimativas acima e de (3.18) segue que:

$$\begin{aligned}
S(\xi,t) &\leqslant \left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \\
&\quad \left\{\frac{41}{80}\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\frac{121}{240}\xi^4|\hat{u}|^2+\frac{13}{24}\left|\hat{\theta}\right|^2+\frac{13}{24}\tau|\hat{q}|^2\right\} \\
&\leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \\
&\quad \left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2+\tau|\hat{q}|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S(\xi,t) \leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left\{\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2+\tau|\hat{q}|^2\right\},$$

ou ainda,

$$S(\xi,t) \leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)W(\xi,t) = \frac{13}{12}\tilde{\mathcal{E}}. \tag{3.20}$$

Logo, de (3.16), (3.19) e (3.20) temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)W(\xi,t) \leqslant H(\xi,t) \\ \leqslant\ & \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)W(\xi,t)\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ou seja,

$$\frac{11}{12}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) \leqslant H(\xi,t) \leqslant \frac{13}{12}\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)\,.$$

Provando assim o que queríamos. □

Provados os dois resultados anteriores, buscaremos agora uma relação entre $H(\xi,t)$ e sua derivada parcial em t.

Para isso, afim de simplificar os cálculos, fixaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} & A(\xi,t) := \left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2 + \xi^4|\hat{u}|^2 + \left|\hat{\theta}\right|^2, \\ & B(\xi,t) := \left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)|\hat{q}|^2 \\ \text{e}\quad & C(\xi) = \left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right), \forall\xi\in\mathbb{R} \text{ e } \forall t\geqslant 0. \end{aligned}$$

Daí, com a notação acima definida temos que o funcional $\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)$ dado em (3.3) pode ser reescrito como:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) = \frac{1}{2}C(\xi)A(\xi,t) + \frac{\tau}{2}B(\xi,t)\,, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty). \tag{3.22}$$

E, ainda, podemos definir um funcional $\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,t)$ dado por

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,t) := \frac{1}{7!}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A(\xi,t) + \frac{1}{16}B(\xi,t)\,, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty). \tag{3.23}$$

Ora, da forma que temos o funcional $\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,t)$ anteriormente definido e, pela **Proposição 3.9** temos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t) \leqslant -\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,t)\,, \forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty). \tag{3.24}$$

Com o objetivo de buscarmos tal relação entre $H(\xi,t)$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}H(\xi,t)$ vejamos alguns Lemas:

Observação 3.11. *Note que,* $\left(1+\mu\xi^2\right) \geqslant 0$. *Então,* $\left(1+\mu\xi^2\right)+\tau\xi^2 \geqslant \tau\xi^2$, *ou seja,* $\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \geqslant \tau\xi^2$.

Portanto, $\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \geqslant \left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\xi^2$. *Ou ainda,* $\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\xi^2$
$\leqslant \left(1+\tau\mu\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \leqslant \left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)$.

Logo,

$$0 < \left(1+\tau\mu\xi^2\right)\tau\xi^2 \leqslant C(\xi).$$

Lema 3.12. *Considerando o funcional* $\tilde{\mathcal{E}}\,(\xi,t)$ *dado em* (3.3), *para todo* $(\xi,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty)$, *temos que:*

$$\left(1+\tau\xi^2\right)\xi^2\tilde{\mathcal{E}}\,(\xi,t) \leqslant \frac{C\,(\xi)}{2}\left[\left(1+\tau\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)+B\,(\xi,t)\right].$$

Demonstração. Considerando o funcional $\tilde{\mathcal{E}}$ reescrito em (3.22), para todo $(\xi,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty)$ segue que

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\right]\tilde{\mathcal{E}}\,(\xi,t)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\right]\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)A\,(\xi,t)\\
&+ \frac{\tau}{2}\left[\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2\right]B\,(\xi,t)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)\left[\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)\right]\right.\\
&+ \left.\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)B\,(\xi,t)\right\}\\
&= \frac{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)}{2}\left[\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)+B\,(\xi,t)\right]\\
&= \frac{C\,(\xi)}{2}\left[\left(1+\tau\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)+B\,(\xi,t)\right].
\end{aligned}$$

Provando assim o que queríamos. □

Lema 3.13. *Sendo* $\tilde{\mathcal{E}}_1$ *o funcional definido em* (3.23) *temos:*

$$7!\,\tilde{\mathcal{E}}_1\,(\xi,t) \geqslant \left[\left(1+\tau\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)+B\,(\xi,t)\right],\ \forall\,(\xi,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Demonstração. De fato, segue de (3.23) que $\tilde{\mathcal{E}}_1\,(\xi,t) = \dfrac{1}{7!}\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A\,(\xi,t)+\dfrac{1}{16}B\,(\xi,t)$.

Daí, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) &\geqslant \frac{1}{7!}\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A(\xi, t) + \frac{1}{7!}B(\xi, t) \\ &= \frac{1}{7!}\left[\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2 A(\xi, t) + B(\xi, t)\right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

ou seja, $7!\,\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) \geqslant \left(1 + \tau\xi^2\right)\xi^2 A(\xi, t) + B(\xi, t)$, para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ Como queríamos provar. □

3.4 Decaimento Exponencial da Energia Total

Nesta seção provaremos que a energia total $W(\xi, t)$, definida em (3.2) possui um decaimento exponencial. Antes, porém, com os resultados obtidos nos Lemas da seção anterior, poderemos provar o seguinte resultado preliminar:

Teorema 3.14. *Se $H(\xi, t)$ é o funcional definido em* (3.8)*. Então,*

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi, t) + \frac{1}{2730}\frac{\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{C(\xi)}H(\xi, t) \leqslant 0, \forall\,(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \tag{3.26}$$

Demonstração. Dos **Lemas 3.12** e **3.13** temos que:

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) &\leqslant \frac{C(\xi)}{2}\left[\left(1 + \tau\xi^2\right)\xi^2 A(\xi, t) + B(\xi, t)\right] \\ &\leqslant \frac{7!\,C(\xi)}{2}\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t), \forall\,(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ou seja,

$$-\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) \leqslant -\frac{2\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{7!\,C(\xi)}\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t), \forall\,(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \tag{3.28}$$

Ainda, usando a estimativa obtida em (3.10) e a relação entre os funcionais $\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t)$ e $\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)$ dadas em (3.28), temos que:

$$-\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) \leqslant -\frac{24\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{7!13\,C(\xi)}H(\xi, t), \forall\,(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \tag{3.29}$$

Portanto, de (3.24) e por (3.29) segue que:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi, t) \leqslant -\frac{1}{2730}\frac{\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{C(\xi)}H(\xi, t), \forall\,(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t)+\frac{1}{2730}\frac{\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{C(\xi)}H(\xi,t)\leqslant 0,\forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}[0,+\infty). \quad (3.30)$$

□

Com isto, vamos mostrar que o funcional $W(\xi,t)$ possui decaimento exponencial:

Teorema 3.15. *A energia total* $W(\xi,t)$ *definida em* (3.2) *possui decaimento exponencial dado por*

$$W(\xi,t)\leqslant\frac{13}{11}e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t}W(\xi,0),\forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Onde, $p(\xi)=\dfrac{\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)}$.

Demonstração. Podemos olhar a desigualdade (3.26) obtida no Teorema 3.14 como uma *Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem* cujo fator integrante é
$\beta(\xi,t)=e^{\frac{1}{2730}p(\xi)t}$, com

$$p(\xi)=\frac{\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2}{C(\xi)}.$$

Com isto e de (3.30),para todo $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta(\xi,t)H(\xi,t)\right]=\frac{\partial}{\partial t}H(\xi,t)+p(\xi)H(\xi,t)\leqslant 0. \quad (3.31)$$

Mas integrando em $[0,+\infty)$ e aplicando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^t\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\beta(\xi,t)H(\xi,t)\right]\right\}\mathrm{d}s &= \beta(\xi,t)H(\xi,t)-\beta(\xi,0)H(\xi,0)\\ &= \beta(\xi,t)H(\xi,t)-H(\xi,0). \quad (3.32)\end{aligned}$$

Logo, segue de (3.31) e (3.32) que:

$$\beta(\xi,t)H(\xi,t)-H(\xi,0)\leqslant 0,\forall\,(\xi,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Ou ainda,

$$H(\xi,t) \leqslant [\beta(\xi,t)]^{-1} H(\xi,0), \forall (\xi,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty). \tag{3.33}$$

Assim, observando (3.21) e (3.33) temos que devido a (3.21) temos que $H(\xi,0) \leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\xi^2\right) W(\xi,0)$, podemos concluir que, para todo $(\xi,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, vale:

$$\begin{aligned}
&\frac{11}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\xi^2\right) W(\xi,t) \\
&\leqslant \frac{13}{24}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\xi^2\right)[\beta(\xi,t)]^{-1} W(\xi,0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$W(\xi,t) \leqslant \frac{13}{11} e^{-\left[\frac{1}{2730}\frac{\left(1+\tau\xi^2\right)\tau\xi^2}{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\xi^2\right)}t\right]} W(\xi,0), \forall (\xi,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty).$$

Ou seja,

$$W(\xi,t) \leqslant \frac{13}{11} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0), \forall (\xi,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty).$$

□

Com o Teorema acima provamos que a energia total associada ao sistema (3.1) possui decaimento exponencial.

3.5 Relação Entre $W(\xi,t)$ e $E(t)$

O que será feito agora é através do *Teorema de Plancherel* relacionar o funcional $W(\xi,t)$ com o operador $E(t)$ definido no **Teorema 3.1** e após, usando o resultado obtido no **Teorema 3.15** mostraremos que $E(t)$ possui também um decaimento.

Consideremos então o próximo resultado:

Proposição 3.16. *Sendo $E(t)$ o funcional definido no **Teorema 3.1** e $W(\xi,t)$ dado em (3.8), temos:*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} W(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = E(t), \forall t \geqslant 0.$$

Demonstração. De fato, visto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} W(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}}\left[\left(1+\mu\xi^2\right)|\hat{u}_t|^2+\xi^4|\hat{u}|^2+\left|\hat{\theta}\right|^2+\tau|\hat{q}|^2\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}|\hat{u}_t|^2\,\mathrm{d}\xi+\mu\int_{\mathbb{R}}|\xi\hat{u}_t|^2\,\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{R}}\left|\xi^2\hat{u}\right|^2\mathrm{d}\xi \qquad (3.34)\\ &+ \int_{\mathbb{R}}\left|\hat{\theta}\right|^2\mathrm{d}\xi+\tau\int_{\mathbb{R}}|\hat{q}|^2\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Assim, aplicando em (3.34) o (1.49) do *Teorema de Plancherel* temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} W(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}}u_t^2\,\mathrm{d}x+\mu\int_{\mathbb{R}}u_{tx}^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}u_{xx}^2\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_{\mathbb{R}}\theta^2\,\mathrm{d}x+\tau\int_{\mathbb{R}}q^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} W(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}\left[u_t^2+\mu u_{tx}^2+u_{xx}^2+\theta^2+\tau q^2\right]\mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} W(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi=2E(t),\,\forall t\geqslant 0.$$

□

3.6 Prova do Teorema 3.1

Antes de seguirmos buscando elementos que provarão o resultado principal deste capítulo, enunciamos o próximo Lema. O mesmo não terá suas justificativas aqui apresentadas, mas sua prova pode ser encontrada em Horbach (2016).

Lema 3.17. *Sejam $k>-n$, $\vartheta>0$ e $C>0$. Então existe uma constante $K>0$ dependendo de n tal que*

$$\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-C|\xi|^{\vartheta}t}\,|\xi|^k\,\mathrm{d}\xi\leqslant K(1+t)^{-\frac{n+k}{\vartheta}},$$

para todo $t>0$.

Então, finalmente, mostremos o Teorema principal deste capítulo o qual diz que:

Para cada $Z_0 = \{u_0, u_1, \theta_0, q_0\} \in \mathcal{D} = H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, seja $Z = \{u, u_t, \theta, q\}$ a solução do (6)-(7) obtida no **Teorema 2.1**.

Então, a energia total associada a (6)-(7)

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + \mu u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta^2 + \tau q^2\right] \mathrm{d}x$$

satisfaz

$$E(t) \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0.$$

Com $C = \dfrac{1}{2730}\dfrac{\tau\mu}{6}$ e $\tilde{K}$ é uma constante positiva.

Demonstração. [Do **Teorema 3.1**] Inicialmente lembrando que pelo **Teorema 3.15**

$$W(\xi, t) \leqslant \frac{13}{11} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi, 0), \forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

com, $p(\xi) = \left[\left(1 + \tau\mu\xi^2\right)\xi^2\right] / \left[\left(1 + \tau\xi^2\right)\left(1 + [\tau + \mu]\xi^2\right)\right]$.

Ainda, pela **Proposição 3.16** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} W(\xi, t)\,\mathrm{d}\xi = E(t), \forall t \geqslant 0$.

Assim,

$$E(t) \leqslant \frac{13}{22}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi, 0)\,\mathrm{d}\xi, \forall t \geqslant 0. \tag{3.35}$$

O que faremos agora é dividir o restante da prova em duas partes. Primeiramente avaliaremos a integral em (3.35) para região de baixa frequência, isto é, para $|\xi| \leqslant 1$. Após, faremos uma estimativa na região de altas frequências, ou seja, em $|\xi| \geqslant 1$.

Com isto, juntando as duas partes teremos uma estimativa para $E(t)$, provando assim o que queremos.

Então, considerando $\mu \leqslant 1, \tau \leqslant 1$ e $|\xi| \leqslant 1$, notemos que

$$\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) \leqslant 6, \text{ daí } \frac{1}{\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right)} \geqslant \frac{1}{6}.$$

Ainda, $\left(1+\tau\mu\xi^2\right)\xi^2 \geqslant \tau\mu\xi^2$. Portanto,

$$p(\xi) \geqslant \frac{\tau\mu}{6}\xi^2, \text{ ou ainda, } -p(\xi) \leqslant -\frac{\tau\mu}{6}\xi^2. \tag{3.36}$$

Assim, usando (3.36) segue que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi &\leqslant \int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}\frac{\tau\mu}{6}\xi^2 t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant \sup_{|\xi|\leqslant 1} W(\xi,0) \int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}\frac{\tau\mu}{6}\xi^2 t}\mathrm{d}\xi, \forall t \geqslant 0.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \sup_{|\xi|\leqslant 1} W(\xi,0) \int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}\frac{\tau\mu}{6}\xi^2 t}\mathrm{d}\xi, \forall t \geqslant 0. \tag{3.37}$$

Logo, no **Lema 3.17** tomando $k=0, n=1, \vartheta=2$ e $C = \dfrac{1}{2730}\dfrac{\tau\mu}{6}$ e, assim, o aplicando no lado direito da inequação (3.37), obtemos que existe $K := K(n) > 0$ tal que:

$$\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \forall t \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Onde,

$$\tilde{K} = K \sup_{|\xi|\leqslant 1} W(\xi,0)\,. \tag{3.39}$$

Consideremos, agora, $\mu \leqslant 1, \tau \leqslant 1$ e $|\xi| \geqslant 1$ teremos:

$$\begin{aligned}\left(1+\tau\xi^2\right)\left(1+[\tau+\mu]\,\xi^2\right) &= 1+(\tau+\mu)\,\xi^2+\tau\xi^2+\tau\,[\tau+\mu]\,\xi^4 \\ &\leqslant \xi^4\left(2\tau+\mu+\tau\,[\tau+\mu]\right) \leqslant 6\xi^4.\end{aligned}$$

Daí, $p(\xi) \geqslant \dfrac{\tau\mu}{6}$, ou ainda, $-p(\xi) \leqslant -\dfrac{\tau\mu}{6}$. Disto obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi &\leqslant \int_{|\xi|\geqslant 1} e^{-Ct} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \\ &= e^{-Ct}\int_{|\xi|\geqslant 1} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant e^{-Ct}\int_{\mathbb{R}} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi, \text{ onde } C = \frac{1}{2730}\frac{\tau\mu}{6}.\end{aligned}$$

Mas pela Proposição 3.16 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi = E(0)$. Então, disto e da estimativa anterior concluímos que:

$$\int_{|\xi|\geqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \leqslant 2e^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0. \tag{3.40}$$

Ora,

$$\begin{aligned}\frac{13}{22}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi &= \frac{13}{22}\left[\int_{|\xi|\leqslant 1} +e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi\right.\\ &+ \left.\int_{|\xi|\geqslant 1} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi\right], \forall t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Portanto, de (3.38), (3.40) e (3.41) segue que:

$$\frac{13}{22}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2730}p(\xi)t} W(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0.$$

Logo, da estimativa obtida acima e de (3.35) concluímos que

$$E(t) \leqslant \tilde{K}(1+t)^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-Ct}E(0), \forall t \geqslant 0.$$

Concluindo, assim, a prova deste teorema. □

Conclusão e Considerações Finais

Ao final desse trabalho podemos destacar alguns pontos relevantes, tais como para a busca de solução do sistema (6)-(7) num espaço adequado e taxa de decaimento para a energia total associada a tal sistema.

O capítulo 1, referente aos resultados preliminares, foi de extrema importância pois neste estava todo o embasamento para o prosseguimento desse trabalho. Em enfase estão os teoremas de *Lax-Milgran* e de *Lumer-Phillips* os quais foram fundamentais para conseguirmos a existência e unicidade do sistema em questão.

No capítulo 2 determinamos a existência e unicidade de solução do modelo considerado. Encontramos, também, o espaço adequado onde tal solução se encontra. Não somente os teoremas de *Lax-Milgran* e de *Lumer-Phillips* foram importantes para obtermos tais resultados mas também tiveram extrema importância a teoria de Semigrupos à qual está apresentada em Pazy (2012).

Por último, no capítulo 3, já tendo-se determinada a existência e unicidade da solução do modelo (6)-(7), baseado na técnica encontrada em Racke and Ueda (2016), foi feito um estudo para determinar o comportamento assintótico da solução em um caso particular. Aqui, destacamos a importância da teoria de Fourier, em particular, a *Transformada de Fourier* e suas propriedades, assim como o teorema de *Plancherel*, para a obtenção da taxa de decaimento para a energia total associada ao modelo abordado.

Para trabalhos futuros, destacamos o estudo do comportamento assintótico do modelo (6)-(7) para os casos que aqui não estudamos, alguns dos

quais uma parte são abordados por Racke and Ueda (2016). Mais precisamente, no decaimento, considerar $\mu > 1$ e ainda $\delta \neq 1$ e $k \neq 1$. Salientamos também podemos estudar o modelo (6)-(7) em $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$.

Por fim, destacamos que apesar das dificuldades encontradas, o que se é esperado, este trabalho serviu de grande aprendizado permitindo o estudo de diversos conceitos, por exemplo, teoria de Fourier, Distribuições e Semigrupos entre outros, possibilitando o uso dos mesmos em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media.

Buriol, C. and Menzala, G. P. (2006). Time behavior for a class of nonlinear beam equations. *Differential and Integral Equations*, 19(1):15–29.

Cattaneo, C. S. (1948). Conduzione del calore. *Atti. Sem. Mat.Fis.*, 3:83–101.

Cavalcanti, M. M. and Cavalcanti, V. D. (2009). Introduçaoa teoria das distribuiçoes e aos espaços de sobolev. *Maringá: UEM.*

Chandrasekharaiah, D. (1998). Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. *Applied Mechanics Reviews*, 51(12):705–729.

Da Luz, C. R. and Charao, R. C. (2009). Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 6(02):269–294.

Figueiredo, d. D. G. (2000). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Horbach, J. L. (2016). *Existência de Soluções e Comportamento Assintótico Ótimo para Equações Dissipativas tipo Placas/Boussinesq Generalizadas em Rn.* PhD thesis, Univerversidade Federal de Santa Catarina.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. wiley New York.

Medeiros, L. and Miranda, M. M. (2000). Espaços de sobolev (introdução aos problemas elíticos não homogeneos). *Notas de Aula, IMUFRJ*.

Medeiros, L. A. J. and de Mello, E. A. (1985). *A integral de Lebesgue*, volume 1. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Pazy, A. (2012). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media.

Racke, R. and Ueda, Y. (2016). Dissipative structures for thermoelastic plate equations in rn. *Advances in differential equations*, 21(7/8):601–630.

Rivera, J. E. M. (1999). *Teoria das distribuiçoes e equaçoes diferenciais parciais*. Laboratorio Nacional de Computação Cientifica.

Yosida, K. (1965). Functional analysis.| springer-verlag. *New York*.