**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA**

**Dienifer da Luz Ferner**

# GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Santa Maria, RS
2019

**Dienifer da Luz Ferner**

# GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani

Santa Maria, RS

2019

Ferner, Dienifer da Luz
GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA / Dienifer da Luz Ferner.- 2019.
183 p.; 30 cm

Orientador: Rita de Cássia Pistóia Mariani
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2019

1. Ensino de Geometria 2. Tratamentos figurais 3. Apreensões 4. Visualização 5. Ensino Superior I. Mariani, Rita de Cássia Pistóia II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Dienifer da Luz Ferner

**GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

**Aprovado em 27 de agosto de 2019:**

______________________________________
**Rita de Cássia Pistóia Mariani, Drª.** (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

______________________________________
**Saddo Ag Almouloud, Dr.** (PUC-SP)

______________________________________
**Inês Farias Ferreira, Drª.** (UFSM)

______________________________________
**Maria Arlita da Silveira Soares, Drª.** (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS

2019

## AGRADECIMENTOS

*À Deus, pela vida e por sempre apresentar caminhos que nos levam a continuar na busca por nossos sonhos.*

*À minha família, pelo apoio e amor dedicados em todas as horas necessárias. Um especial agradecimento à pessoa que sempre esteve comigo, João Paulo, pela compreensão quanto à minha ausência e que com muita paciência e carinho, me ajudou a concluir esta etapa.*

*À minha orientadora, Drª Rita de Cássia Pistóia Mariani, que é uma grande incentivadora do exercício dessa profissão, pelo seu exemplo de dedicação ao ato de ensinar, que não mediu esforços para o desenvolvimento desta pesquisa. Por acreditar e confiar em mim, transmitindo sua calma e conhecimento nos momentos fundamentais.*

*Aos Professores Doutores Saddo Ag Almouloud, Inês Farias Ferreira e Maria Arlita da Silveira Soares, membros da Banca Examinadora, por terem atendido ao convite para desempenhar este papel, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho, pelas sugestões e críticas que contribuíram para a elaboração e evolução deste.*

*Mais uma vez a Prof. Drª Maria Arlita da Silveira Soares e ao Prof. Me Leugim Corteze Romio por incansáveis incentivos desde a graduação. Por vibrarem com minhas conquistas, pela força e confiança depositas em mim.*

*Aos professores do PPGEMEF/UFSM que dividiram seus conhecimentos durante os componentes curriculares e que auxiliaram de forma direta ou indireta esta pesquisa.*

*Aos licenciandos em Matemática participantes deste estudo, pela disponibilidade e colaboração no desenvolvimento das atividades.*

*Foram vocês que me proporcionaram esse voo. Meus agradecimentos são para todos vocês.*

# RESUMO

## GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

AUTORA: Dienifer da Luz Ferner
ORIENTADORA: Rita de Cássia Pistóia Mariani

Esta pesquisa tem por objetivo analisar tratamentos figurais mobilizados por licenciandos em Matemática ao estudar conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição. Para tal, adotou-se os pressupostos teóricos dos registros de representação semiótica. O estudo é de cunho qualitativo, seguindo princípios da Análise de Conteúdo. A produção de dados considerou quatro obras que se destacam em bibliografias de componentes curriculares relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria que compõem a matriz curricular de cursos de Matemática Licenciatura, ofertados por instituições federais do Brasil. Além disso, conta com o desenvolvimento de três tarefas estruturadas a partir da reorganização de atividades apresentadas nas obras analisadas, tendo em vista a discussão sobre conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição. Diante das análises realizadas, constatou-se que as atividades propostas nas obras enfatizaram o registro em língua natural para comunicar seus enunciados e, na maioria das vezes, permanece nessa representação, evidenciando uma atividade de tratamento. Em contrapartida, o registro figural e a desconstrução dimensional são pouco explorados. Quanto às apreensões figurais, as atividades analisadas pode possibilitar a mobilização da perceptiva e discursiva. Após uma readequação de algumas dessas atividades às ideias de Raymond Duval, estas foram desenvolvidas com sete licenciandos em Matemática. A realização e análise do bloco de tarefas permitiu constatar que os acadêmicos foram retirados da sua zona de conforto em diferentes momentos, ora por representações distintas do cubo, ora por descrições que exigiam recorrer a resultados da Geometria Espacial de Posição. Este movimento fez com que os sujeitos mobilizassem diferentes tipos de transformações cognitivas e distintas apreensões figurais o que contribuiu para o movimento de desconstrução dimensional e para o funcionamento espontâneo da visualização. Além disso, observou-se que os participantes demonstraram conhecimentos sobre conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição e que estimularam a ação de ver em Geometria ao desenvolver as atividades organizadas. Pode-se dizer que os tratamentos figurais contribuíram de forma integra para a visualização em Geometria, considerando as soluções pertinentes apresentadas pelos acadêmicos. À vista deste resultado pode-se afirmar que os tratamentos figurais são um meio que contribui na aprendizagem da visualização em Geometria, considerando as soluções apresentadas pelos acadêmicos na realização das atividades propostas. Diante do exposto, enfatiza-se a importância de se explorar esse tipo de atividade durante qualquer nível de ensino.



**Palavras-chave:** Ensino de Geometria. Tratamentos figurais. Apreensões. Visualização. Ensino Superior.

## ABSTRACT

### SPACE GEOMETRY OF POSITION UNDER THE VIEW OF SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS: A STUDY WITH MATH LICENSORS

AUTHOR: Dienifer da Luz Ferner
ADVISOR: Rita de Cássia Pistóia Mariani

This research aims to analyze figurative treatments mobilized by undergraduates in Mathematics when studying concepts/contents of Position Spatial Geometry. For this, the theoretical assumptions of the semiotic representation registers were adopted. The study is qualitative, following the principles of Content Analysis. The data production considered four works that stand out in bibliographies of curricular components related to the teaching and learning of Geometry that make up the curricular matrix of Mathematics Degree courses, offered by federal institutions in Brazil. In addition, it has the development of three structured tasks from the reorganization of activities presented in the analyzed works, in view of the discussion about concepts / contents of Position Spatial Geometry. Given the analyzes performed, it was found that the activities proposed in the works emphasized the registration in natural language to communicate their statements and, in most cases, remains in this representation, evidencing a treatment activity. In contrast, the figural record and the dimensional deconstruction are little explored. As for the figurative apprehensions, the analyzed activities can enable the mobilization of the perceptive and discursive. Following a readjustment of some of these activities to the ideas of Raymond Duval, they were developed with seven undergraduates in Mathematics. The accomplishment and analysis of the task block showed that the students were removed from their comfort zone at different times, sometimes by different representations of the cube, sometimes by descriptions that required the use of results from Position Spatial Geometry. This movement caused the subjects to mobilize different types of cognitive transformations and distinct figurative apprehensions, which contributed to the movement of dimensional deconstruction and the spontaneous functioning of visualization. In addition, it was observed that participants demonstrated knowledge about concepts / contents of Position Spatial Geometry and that stimulated the action of seeing in Geometry when developing organized activities. It can be said that the figurative treatments contributed in an integral way to the visualization in Geometry, considering the pertinent solutions presented by the academics. In view of this result it can be stated that the figurative treatments are a means that contributes to the learning of visualization in geometry, considering the solutions presented by the academics in carrying out the proposed activities. Given the above, the importance of exploring this type of activity during any level of education is emphasized.

**Keywords:** Geometry Teaching. Figurative Treatments. Seizures. Visualization. University Education.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE GRÁFICOS

## LISTA DE QUADROS

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados aspectos sobre a trajetória acadêmica da pesquisadora. Em seguida, são expostos os objetivos estabelecidos para a pesquisa, bem como o caminho metodológico percorrido. Finalizando, apresenta-se uma breve descrição sobre a composição desta dissertação.

## 1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA DA PESQUISADORA

A presente pesquisa emerge de experiências vivenciadas no período da graduação no curso de Matemática Licenciatura, concluído ao final do ano de 2016 e realizado na Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus Itaqui/RS, em especial, durante a participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), nos grupos de pesquisa matE² (Educação e Educação Matemática) e EMgep (Educação Matemática: grupo de estudos e pesquisas).

Na graduação, o contato com o componente curricular, específico e obrigatório, de Geometria Espacial (GE) ocorreu no 2º semestre do curso de Matemática Licenciatura, após ter cursado o componente curricular de Geometria Plana. Ambos foram abordados de maneira axiomática, com ênfase na realização de demonstrações matemáticas e na mobilização de representações algébricas e numéricas, para fins de mensurar áreas e volumes de objetos geométricos, sem discussões relacionadas a abordagem desses conceitos/conteúdos na Educação Básica.

Quando havia a necessidade de representar objetos tridimensionais, estes, geralmente, eram disponibilizados de forma impressa ou “esboçados” no quadro, isto é, ao se tratar tais objetos, estes foram representados em perspectiva com apenas um ponto de vista e de forma “estática”. Esta era uma dificuldade enfrentada pela turma, a qual está relacionada com a habilidade de visualização em Geometria, que exige analisar o objeto por meio de suas propriedades.

Durante participação no Pibid, do 3º ao 8º semestre do curso, foram desenvolvidas atividades como: leituras sobre Educação Matemática, elaboração de planejamentos, monitorias e interaulas[1]. Nestas últimas, destaca-se que foi possível acompanhar, durante um ano letivo, uma turma de 3º ano do Ensino Médio, sobretudo, no estudo de GE. Constatou-se

[1] Espaço-tempo de produção do conhecimento no contraturno escolar, o qual estabelece intermediações conceituais dos conteúdos trabalhados na escola e universidade.

que esses conceitos foram tratados com ênfase na utilização de fórmulas em detrimento as demonstrações, os tratamentos figurais e a mobilização de diferentes representações matemáticas. Ressalta-se que outras pesquisas (LEIVAS, 2009; KLUPPEL, 2012; CARVALHO, 2013; OLIVEIRA, 2016) reafirmam esta prática.

No grupo de pesquisa matE², no qual participo desde o ano de 2015, foram realizadas problematizações acerca das temáticas: currículo, políticas públicas e formação de professores de Matemática. Dentre estas atividades, sublinha-se os estudos da teoria dos registros de representação semiótica (RRS), desenvolvida por Raymond Duval, e análises de livros didáticos. Entende-se que essa teoria permite (re)pensar sobre saberes ensinados na escola, pois possibilita refletir sobre os fundamentos da Matemática e de sua aprendizagem (SOARES, 2016). As investigações de livros didáticos foram realizadas com o propósito de auxiliar professores a formular critérios para analisar este recurso quanto aos limites/lacunas e potencialidades no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

É importante registrar, também, que as experiências vivenciadas nesses espaços-tempo contribuíram para definir a problemática de meu Trabalho de Conclusão de Curso[2] (TCC). A referente pesquisa teve por objetivo analisar se e como são abordados os elementos fundamentais ao desenvolvimento do pensamento geométrico nas propostas de coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015, adotadas pelas escolas Estaduais do Município de Itaqui/RS. As análises foram baseadas na fundamentação teórica do modelo de Van Hiele, o qual expõe interpretações sobre a ruptura entre o ensino da Geometria e sua compreensão, e na teoria dos RRS, destacando as especificidades da aprendizagem matemática, em particular, no que tange a importância das representações semióticas nas atividades deste campo do conhecimento.

A análise das coleções de livros didáticos realizada no TCC permitiu concluir que a maioria das atividades propostas nas unidades/capítulos específicas de GE aborda questões relacionadas às grandezas área e volume, em detrimento ao estudo das propriedades de figuras geométricas espaciais e dos tratamentos figurais.

Em relação à teoria dos RRS, percebeu-se que a conversão é a transformação cognitiva mais explorada. Esta transformação é fundamental para a aprendizagem matemática, desde que seja abordada em diferentes sentidos. Estas ideias serão aprofundadas no Capítulo 3. Contudo, nas coleções analisadas, mais de 90% das atividades partem de uma representação

[2] FERNER, D. L. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**: análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Trabalho de Conclusão de Cursos (Graduação em Matemática Licenciatura) - Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2016.

em língua natural para uma representação algébrica e são concluídas com a mobilização desta representação.

Salienta-se que o registro figural é utilizado, na maioria das vezes, nas coleções, como um registro intermediário, pois o foco das atividades refere-se à determinação de área ou de volume de figuras espaciais. Entende-se que, por se tratar de conteúdos/conceitos relacionados a GE, este deveria ser abordado, também, como registro de chegada em atividades envolvendo construções geométricas, pois estas "formam imagens passíveis de comunicar uma ideia, um conceito ou um pensamento" (MORAN; FRANCO, 2015, p. 65), essenciais à argumentação e realização de demonstrações.

A partir do ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física - PPGEMEF e da inserção no EMgep, passei a me apropriar de alguns estudos desenvolvidos neste ambiente no campo da Geometria, tais como, Arcego (2017), Collet (2017), Kiefer (2017) e Mumbach (2018) ao mesmo tempo em que buscava singularidade e sentido para este estudo.

Arcego (2017) explorou o campo da Geometria Plana por meio da área do círculo, enfatizando a discussão sobre apreensões figurais mobilizadas em uma sequência de atividades desenvolvidas com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Esta investigação contribuiu na organização e análise das tarefas propostas nesta dissertação ao considerar que as atividades devem partir de enunciados que não envolvam exclusivamente o registro em língua natural e ao mesmo tempo proporcionem a mobilização de mais de uma apreensão figural[3].

Collet (2017) e Kiefer (2017) abordaram questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) relacionadas a área de figuras planas com, respectivamente, estudantes que participavam do programa de iniciação científica da OBMEP de nível 2 e acadêmicos de um curso de formação inicial de professores de Matemática. Estes estudos, assim como, Arcego (2017), apresentam a possibilidade e a importância de se tomar uma teoria de aprendizagem, como os RRS, para a compreensão de conhecimentos matemáticos. E estas destacam que é a mobilização de diferentes representações para um mesmo objeto matemático que auxilia no entendimento destes.

Além disso, Kiefer (2017) elabora uma discussão sobre *software*[4] de Geometria Dinâmica associados a teoria dos RRS. Ressalta-se que este recurso não foi utilizado

---

[3] Este termo será discutido no Capítulo 3 desta dissertação.
[4] Este é um termo estrangeiro que não é pluralizado, ou seja, não sofre flexão em número. Logo este será utilizado para se referir a um ou mais, a depender do sentido em que é empregado na frase.

mediante uma sequência de comandos, mas para complementar e mobilizar com mais facilidade algumas representações realizadas nos protocolos dos acadêmicos, bem como para testar hipóteses evidenciadas nas análises parciais e a mobilização de diferentes apreensões.

Mumbach (2018) investigou o campo geométrico tendo como colaboradores licenciados em Matemática, com intuito de identificar limites e potencialidades de componentes curriculares de práticas de ensino. Os resultados deste estudo evidenciaram ao analisar os planejamentos relacionados à Geometria dos professores em formação inicial que um *software* de Geometria Dinâmica, neste caso o GeoGebra, foi empregado, praticamente, em todas organizações realizadas. As possíveis apreensões figurais a serem mobilizadas pelas organizações dos planejamentos dos acadêmicos foram, com mais frequência, perceptiva e sequencial, pois as atividades em sua maioria fazia referência à construção de objetos matemáticos. Foi destacado pela pesquisadora que os conceitos geométricos não foram detalhados, ou seja, não foram exploradas propriedades das construções realizadas, conduzindo a perceber a insegurança destes sujeitos ao abordar essa área da Matemática.

Diante dos estudos já produzidos no âmbito do grupo de pesquisa e das experiências acadêmicas da pesquisadora, esta investigação enfatizará a discussão no contexto do Ensino Superior referente a questões do campo da Geometria Espacial ainda não exploradas nos estudos deste grupo. Porém, propõe a continuidade dos entendimentos e contribuições da teoria dos RRS, principalmente, tratamentos figurais, os quais foram analisados, em parte, por meio da apreensão operatória destacada nas pesquisas citadas. Bem como, a teoria dos RRS aliada a recursos didáticos, como *software* de Geometria Dinâmica, dos quais já obteve-se alguns resultados, e a utilização de materiais manipuláveis, para auxiliar no desenvolvimento da habilidade de ver no espaço.

## 1.2 PROBLEMATIZAÇÃO DO TEMA

O estudo da Geometria é fundamental “à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços” (BRASIL, 2002, p. 123), bem como à resolução de problemas de diferentes áreas do conhecimento. Pavanello (2004, p. 4) reafirma essas ideias ao mencionar que, “a geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível”.

Assim, pode-se anunciar que esse campo da Matemática propicia a construção de um pensamento específico. O pensamento geométrico potencializa o

> [...] desenvolvimento de abstrações e representações do espaço, é uma poderosa via de generalização da própria álgebra e, ainda, está em estreita ligação com o desenvolvimento do pensamento combinatório, estatístico-probabilístico, na medida em que esquemas, tabelas e gráficos de diferentes tipos são representações, tanto do tratamento da informação, como das funções que expressam relações especiais, que modelam fenômenos da ciência, da tecnologia e da sociedade. (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 38).

Nesta perspectiva, a Geometria origina duas maneiras diferentes de se pensar, a primeira refere-se a questões associadas à posição relativa das formas e a segunda trata de questões tocantes às medidas. Estas duas formas devem ser exploradas de modo articulado para que os estudantes possam "usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real [bem como] para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas" (BRASIL, 2002, p. 123). No entanto, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, direcionados ao Ensino Médio (BRASIL, 2002), os conceitos/conteúdos deste campo da Matemática se restringem, geralmente, à métrica (cálculo de áreas e volumes), ou seja, enfatizam apenas uma das maneiras de se pensar, referindo-se a esta como uma "abordagem tradicional" que ocorre no ensino de Geometria.

A relevância dada no trabalho com as medidas em detrimento ao estudo das propriedades de objetos geométricos pode estar relacionada às dificuldades demonstradas por professores em conceitos/conteúdos de Geometria. Estes obstáculos são apontados em diferentes pesquisas da área de Educação Matemática (LOVIS; FRANCO, 2015; LORENZATO, 1995; PAVANELLO, 1993; SCHEIFER, 2017).

Os resultados da pesquisa de Lovis e Franco (2015, p. 86), desenvolvida com um grupo de professores de Matemática atuantes em escolas sobre o ensino de conceitos geométricos na Educação Básica, apontam indícios das causas dessas dificuldades. Os investigadores constataram que nem todos os professores participantes tiveram a oportunidade de cursar um componente curricular de Geometria Euclidiana durante a graduação, ou de participar de discussões sobre metodologias e/ou materiais específicos para o ensino e aprendizagem desta área.

Uma situação preocupante sobre o ensino de Geometria é mencionada na investigação de Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004). Os pesquisadores constataram uma contradição entre o discurso e a prática de um grupo de professores. Apesar desses profissionais evidenciarem a importância do ensino de Geometria, ao analisar os conceitos/conteúdos matemáticos por eles selecionados, observa-se poucos ou nenhum tópico relacionado a este campo da Matemática.

Geralmente, os conceitos geométricos estão organizados, nos currículos, em: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e Geometrias Não-Euclidianas. A GE, foco desta investigação, analisa o espaço. Sendo assim, investiga objetos que possuem mais de duas dimensões, estes são nomeados como sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais. Conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006), o estudo da GE é fundamental para o desenvolvimento da capacidade de abstração do estudante, bem como reconhecer propriedades das formas geométricas, resolver problemas práticos do cotidiano, estimar e comparar resultados.

Entende-se que, o trabalho com conceitos/conteúdos da Geometria na escola deveria ser introduzido por meio da GE, visto que os objetos do mundo "real" são tridimensionais e por intermédio desta pode-se trabalhar conceitos da Geometria Plana, em razão de que esta requer procedimentos de abstração e generalização. Essa organização vem sendo ressaltada desde a criação dos PCN (1997), destinados ao 1º e 2º ciclo do Ensino Fundamental, e, também, está presente na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) e em outros referenciais curriculares, por exemplo, o Referencial Curricular do Rio Grande do Sul, orientado para o Ensino Fundamental (RIO GRANDE DO SUL, 2009).

A BNCC (2018) enfatiza que conceitos/conteúdos desse campo da Matemática devem ser explorados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por exemplo, iniciando pelo reconhecimento de pontos de referência para localização; representação de espaços conhecidos; identificação de características de formas geométricas espaciais. No entanto, a prática escolar raramente implementa essa proposta. Estes podem ser um dos motivos para as dificuldades apresentadas por estudantes e professores no trabalho com a Geometria, apontadas em diferentes estudos (LEIVAS, 2009; KLUPPEL, 2012; CARVALHO, 2013; VIANA, 2015).

Apesar da GE ser essencial à problematização e modelagem do espaço em que vivemos, o que vem se destacando no seu ensino, assim como na Geometria Plana, é a "valorização da aplicação de fórmulas e não no estudo dos elementos e propriedades dos objetos tridimensionais" (BORSOI, 2016, p. 15). Sublinha-se que esta situação pode ser influenciada por diferentes fatores já citados anteriormente.

No entanto, a "abordagem tradicional" de se ensinar Geometria não contribui para o desenvolvimento do pensamento específico deste campo, o qual os estudantes necessitam para "investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes", para favorecer o “estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais”. (BRASIL, 2018, p. 271).

A BNCC, referente ao Ensino Médio (BRASIL, 2018), enfatiza que para uma aprendizagem em Matemática é fundamental a compreensão dos objetos matemáticos. Para tanto, salienta a “importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas” (BRASIL, 2018, p. 529). Dentre as competências específicas de Matemática para o Ensino Médio destacadas neste documento, tem-se: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p. 531).

As habilidades apontadas para essa competência enfatizam o uso de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, pois conforme este documento, esta mobilização contribui na ampliação da capacidade do estudante de pensar matematicamente. Salienta-se que essas ideias, também, são manifestadas na teoria elaborada por Duval (2004, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2013, 2016).

Ao tratar da teoria dos RRS, conforme Duval (2011), para aprender a ver em Geometria, é necessário que sejam propostas atividades em que não se recorra apenas a medidas e cálculo, ou seja, atividades apresentadas em uma “abordagem tradicional” como mencionada nos PPC (BRASIL, 2002). Ao estudar a GE, o aprendiz é “convidado a ampliar sua capacidade de abstração e surge mais fortemente a necessidade de mobilizar as habilidades de visualização espacial” (BORSOI, 2016 p. 15), pois nem sempre identifica-se a primeira vista o que se busca na análise de uma figura.

O desenvolvimento de habilidades “de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas” (BRASIL, 2002, p. 123) é parte integrante da aprendizagem de conceitos/conteúdos geométricos. Documentos curriculares, a saber, BNCC (2018) e PCN (1998, 2002), também, destacam a importância do desenvolvimento da habilidade de percepção espacial, ou seja, “ver” no espaço.

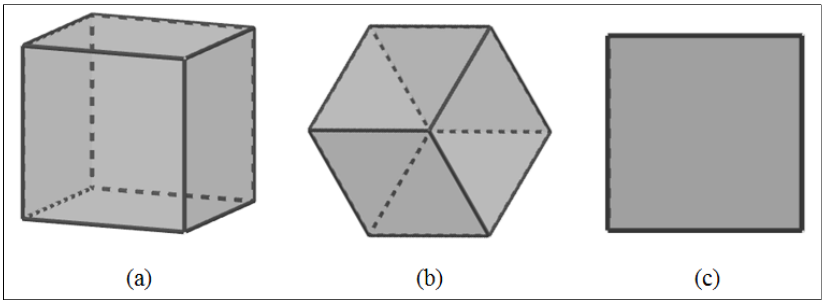
Dada a importância da visualização na aprendizagem de Geometria, Flores, Wagner e Buratto (2012) analisaram pesquisas realizadas no Ensino Superior e na formação inicial de professores, publicadas no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), no período de 1998 a 2010, que abordaram esta questão. Neste estudo foram identificadas aproximadamente 2000 produções no evento, destas 66 abordaram a visualização, sendo que em 32 o entendimento de visualização aproxima-se da definição dada por Duval. Esta definição será discutida no próximo capítulo.

Geralmente, nas aulas que tratam de conceitos/conteúdos de GE, os objetos tridimensionais são apresentados aos estudantes em representações planas, ou seja, as figuras tridimensionais desenhadas em uma superfície plana (em perspectiva). Salienta-se que estas representações em perspectiva sob diferentes pontos de vista de objetos 3D são evidenciadas como objetivos/habilidades para o 3º ciclo do Ensino Fundamental e Ensino Médio (BRASIL, 1998, 2002, 2018).

As representações de objetos tridimensionais em perspectiva são discutidas por Rommevaux (1998, p. 31, tradução nossa), a qual propõe que é necessário "distinguir o bidimensional representando o tridimensional, que concebe a foliação do espaço tridimensional em planos de diferentes direções" que é a capacidade de discerni-los que gera uma representação tridimensional. Em outros termos, ver no espaço, para Rommevaux (1998), está diretamente relacionado a identificação de unidades figurais, neste caso, o reconhecimento de planos em uma representação não tridimensional.

Cabe destacar que, a identificação do objeto matemático tridimensional, assim como suas unidades figurais, ficam mais ou menos visíveis em certas representações em perspectiva. Por exemplo, as representações figurais em duas dimensões de um cubo, apresentadas na Figura 1, evidenciam este fato.

Figura 1 – Representações figurais em perspectiva de um cubo




Fonte: Adaptado de Scheifer (2017, p. 59).

A forma de representação (a) do cubo é a mais usual, na qual tem-se uma melhor percepção de todas as faces do objeto. Na representação (b) um par de vértices está sobreposto, pode-se evidenciar que, sem a presença de um discurso/enunciado, a imagem, ao menos em um primeiro momento, pode ser identificada como um hexágono (figura plana). Na representação (c), na qual os vértices do cubo estão sobrepostos, dois a dois, a figura apresenta apenas uma face do cubo. Sendo assim, da mesma forma que a representação (b), o discurso/enunciado se faz necessário para a identificação de um objeto tridimensional. Destaca-se que essas mudanças de ponto de vista, são denominadas por Rommevaux (1998) com base na teoria dos RRS, como uma “função de tratamento”.

Os *software* de Geometria Dinâmica podem vir a contribuir na aprendizagem de conceitos/conteúdos referentes a GE, pois estes possibilitam a modificação de posição (diferentes vistas) de figuras geométricas, ou seja, proporcionam a “função de tratamento”, mantendo suas propriedades e fornecendo uma “confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações” (DUVAL, 2011, p. 84), que lápis, papel, régua, compasso, por exemplo, propiciam apenas de forma limitada.

Este pensamento também é apresentado por Pereira (2012, p. 35, tradução nossa) que interpreta que “as condições de um desenho escapam do controle conceitual”, isto é, as interpretações do ponto de vista do desenho são coerentes, mas não são condições generalizadas de forma conceitual. Tendo em vista esse entendimento sobre o desenho, Gravina (1996) defende que ao se trabalhar com *software* de Geometria Dinâmica os conceitos geométricos são elaborados com equilíbrio figural e conceitual, pois desenvolve a habilidade de reconhecer representações diferentes de uma mesma configuração pela possibilidade de “manipular” a figura no monitor verificando suas diferentes versões de ponto de vista. Este recurso pode facilitar o desenvolvimento de níveis mais abstratos de conhecimento na Geometria, pelo fato da possibilidade de manipulação dos objetos geométricos e generalização de conceitos (PEREIRA, 2012).

As OCEM (BRASIL, 2006, p. 89) destacam que, a atividade que envolve os *software* de Geometria Dinâmica “coloca em funcionamento diferentes habilidades cognitivas – o pensar geométrico, o pensar estratégico, o pensar hierárquico”. A BNCC (2018, p. 276), também, propõe a utilização desses recursos, entendendo que eles “têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas”, desta forma o apresenta nos objetivos de conhecimento na unidade de Geometria ao longo do Ensino Fundamental – anos finais.

Além das vantagens mencionadas sobre o uso de *software*, Borba e Penteado (2003) em sua obra *Informática e Educação Matemática*, já mencionavam que os computadores estavam cada vez mais presentes na atividade humana, independente da área que estivéssemos nos referindo. Sendo assim, passados mais de 15 anos desta publicação, e com o maior avanço das tecnologias, ainda é fundamental que os computadores e outros recursos digitais “também estejam presentes nas atividades escolares” atuais.

Para ver no espaço, de acordo com Rommevaux (1998), é necessário primeiramente conhecer o que buscamos, o que devemos ver. Desta forma, se evidencia a importância do registro em língua natural para a identificação, bem como a utilização de materiais manipuláveis para o reconhecimento do objeto tridimensional. Para a pesquisadora, tendo em vista dificuldades apresentadas por estudantes em imaginar o objeto 3D e seus respectivos planos de formação, tem-se a necessidade de utilizar materiais manipuláveis como um intermediário para dar às representações planas a possibilidade de um reconhecimento tridimensional. Logo este recurso possibilita uma base para a atividade de abstração.

Ponte e Serrazina (2000), também, evidenciam que a manipulação de materiais tem um papel importante na construção de conceitos geométricos. Conforme os pesquisadores, é essencial utilizar representações e modelos que contribuam com a construção de conceitos matemáticos pelo simples fato destes serem abstratos.

Moran (2015) afirma que é possível representar objetos geométricos 3D, mantendo sua dimensão, proporcionando dessa forma a identificação de seus elementos figurais e também propiciando a manipulação do objeto que oportuniza a visualização por diferentes ângulos.

Outro fator contribuinte para a utilização deste recurso, conforme Lorenzato (2006), é que estes favorecem a realização de descobertas e permitem um trabalho menos formal, pois despertam a curiosidade nos estudantes, levando-os a execução de “tentativas e erros” na resolução de um problema proposto. No entanto, o autor admite que o trabalho do professor, neste sentido, é fundamental, uma vez que ele precisa pensar na utilização correta desses materiais, considerando que estes não garantem a aprendizagem de nenhum conceito/conteúdo matemático se não houver um encaminhamento organizado pelo professor.

Assim, conforme Matos e Serrazina (1996), os conceitos matemáticos que os estudantes devem construir não estão diretamente em nenhum material manipulável para se abstrair de forma empírica. Os investigadores mencionam que é necessário que o professor organize de forma adequada o ambiente de aprendizagem, oriente os estudantes a atribuir significado às suas ações com o material e os estimulem a realizar explorações, formulações e verificações sobre, no caso da Geometria, as figuras e as suas propriedades.

Desta forma, os *software* de Geometria Dinâmica e os materiais manipuláveis podem ser utilizados de forma conjunta, um complementando o outro, de modo a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Sem esquecer que não é apenas a utilização desses recursos que irá garantir a aprendizagem dos estudantes, pois o que auxilia alguns sujeitos pode não contribuir para a aprendizagem de outros.

## 1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando a relevância da GE, mas tendo em vista dificuldades apresentadas em seu ensino e aprendizagem, tem-se como questão norteadora: *Quais contribuições de um estudo de conceitos da Geometria Espacial de Posição, apoiado em tratamentos figurais, de acordo com Duval, na formação inicial de professores de Matemática?*

Para tanto, o objetivo geral é analisar tratamentos figurais mobilizados por licenciandos em Matemática ao estudar Geometria Espacial de Posição.

Assim, alguns objetivos específicos são elencados:

a) analisar quatro referências bibliográficas mais indicadas dentre os Projetos Pedagógicos de Cursos de Matemática Licenciatura em suas ementas de componentes curriculares que tratam de Geometria, em especial, GE, no que tange aos aspectos da teoria dos RRS;
b) (re)organizar, desenvolver e analisar alternativas de atividades para se revisitar conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição que foram propostas nas obras analisadas de modo que envolvam articulações de representações e tratamentos figurais agregados a materiais manipuláveis e/ou *software* de Geometria Dinâmica como recursos didáticos com licenciandos em Matemática.

## 1.4 CAMINHO METODOLÓGICO

A pesquisa possui uma abordagem qualitativa, conforme propõem Lüdke e André (1986, p. 12), pois nesta a "preocupação com o processo é muito maior do que com o produto", pois os dados são analisados sob um ponto de vista cognitivo em função da teoria escolhida. Estes estão apresentados de forma predominantemente descritiva, mas isto não exclui a possibilidade de subsidiar algumas análises a partir de dados quantitativos. Quanto aos procedimentos, a investigação tem inspirações na técnica de Análise de Conteúdo. Para Bardin (2011, p. 48), esta é

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens,

> indicadores [...] que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] destas mensagens.

O desenvolvimento desta técnica consiste em três etapas, sendo elas: a) *Pré-análise*: é basicamente a organização da pesquisa, etapa que compreende a formulação dos objetivos, leitura "flutuante", escolha dos documentos a serem analisados e elaboração das categorias de análise, não necessariamente nesta ordem; b) *Exploração do material*: baseia-se na análise e produção de dados; c) *Tratamento dos resultados e interpretações*: consiste em tratar dados obtidos de modo a se tornarem significativos e válidos.

Com o intuito de atender aos objetivos elencados para o desenvolvimento desta investigação[5], foram necessários dois momentos organizados pela técnica de Análise de Conteúdo.

O primeiro momento da pesquisa refere-se ao mapeamento de ementas de cursos de Matemática Licenciatura, que tem como propósito identificar componentes curriculares que tratam de GE e, posteriormente, verificar e analisar bibliografias que são comuns aos cursos. Nesta fase, busca-se observar se as atividades propostas nessas obras abordam a mobilização e articulação de diferentes registros de representação semiótica, bem como os tratamentos figurais. Para isso, segue-se as três etapas da técnica adotada.

Na *pré-análise* foram definidas as obras a serem exploradas e, após a realização de uma leitura flutuante, elaborou-se critérios de análise. Ressalta-se que alguns destes já haviam sido definidos a priori, pois envolvem conceitos da teoria dos RRS, tais como: a) representações mobilizadas para enunciação e resolução da questão; b) apreensões mobilizadas; c) desconstrução dimensional. Após a delimitação dos critérios, foi realizada a segunda etapa da Análise de Conteúdo, *exploração do material*. Nesta as questões propostas pelas obras mapeadas em ementas de cursos de Matemática Licenciatura foram descritas e analisadas quanto aos critérios definidos. Para a realização da última etapa da técnica escolhida, organizaram-se quadros que envolveram as atividades investigadas quanto aos aspectos da teoria do RRS. Assim, ocorreu então a interpretação dos dados obtidos com o intuito de elencar semelhanças e diferenças evidenciadas nas obras.

O segundo momento da pesquisa conta com a produção de dados por meio de um questionário semi-estruturado (Apêndice A) (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) que buscou identificar o perfil dos participantes (Seção 1.4.1) e um bloco de tarefas (Apêndices B, C e D), ambos desenvolvidos com acadêmicos de um curso de Matemática Licenciatura. Salienta-se que este

[5] Ressalta-se que o projeto desta pesquisa foi aprovado no primeiro semestre de 2018 pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP) da UFSM (Anexo A) (CAAE: 89496118.1.0000.5346).

grupo foi selecionado tendo em vista as poucas pesquisas desenvolvidas com este nível de escolaridade em relação aos outros níveis (NOVAK, 2018) ainda mais a se tratar de conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição (GEP).

A pesquisa se desenvolveu no ambiente do componente curricular MTM1062 – Educação Matemática II[6] no segundo semestre de 2018, ofertado no curso de Matemática Licenciatura Noturno da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) com acadêmicos que estavam cursando. Dentre os objetivos deste componente, destaca-se: "Identificar diferentes formas de organização e apresentação curricular de conteúdos de Matemática do Ensino Médio; [...]; Estudar ideias essenciais da Matemática para o Ensino Médio" (UFSM, 2013, n.p).

Para evidenciar a importância da abordagem da GEP, aos licenciandos em Matemática, o bloco de tarefas elaborado, contendo 10 atividades, tem como foco a discussão formal de conceitos/conteúdos deste campo da Geometria. Estas foram elaboradas buscando contribuir com o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico com base na teoria dos RRS, visando explorar, em especial, tratamentos figurais.

A pesquisadora entrou em contato com os acadêmicos matriculados no componente curricular MTM1062 – Educação Matemática II para expor o projeto e verificar a disponibilidade de participarem voluntariamente deste estudo. Após a disposição destes sujeitos a participarem da pesquisa, deu-se início aos encontros. As intervenções foram realizadas em sete horas aula consecutivas, durante a primeira quinzena do mês de novembro de 2018, as quais uma hora aula foi destinada ao preenchimento do termo de consentimento e aplicação do questionário semi-estruturado; e seis horas aula foram reservadas ao desenvolvimento e discussão das tarefas.

A *pré-análise*, neste segundo momento, consistiu na organização de tarefas com base na fundamentação teórica produzida, nos mapeamentos realizados e obras analisadas. Na etapa da *exploração do material*, realizou-se o desenvolvimento das atividades, nas quais obteve-se os protocolos escritos para que, posteriormente, fossem analisados segundo os pressupostos teóricos dos RRS referentes aos conceitos/conteúdos de GEP.

Na última etapa, *tratamento dos resultados e interpretações*, os dados produzidos foram compilados por meio de quadros-resumo, evidenciando interpretações a respeito do objetivo desta pesquisa.

---

[6] Ofertada para o 7° semestre do curso.

### 1.4.1 Perfil dos participantes da pesquisa

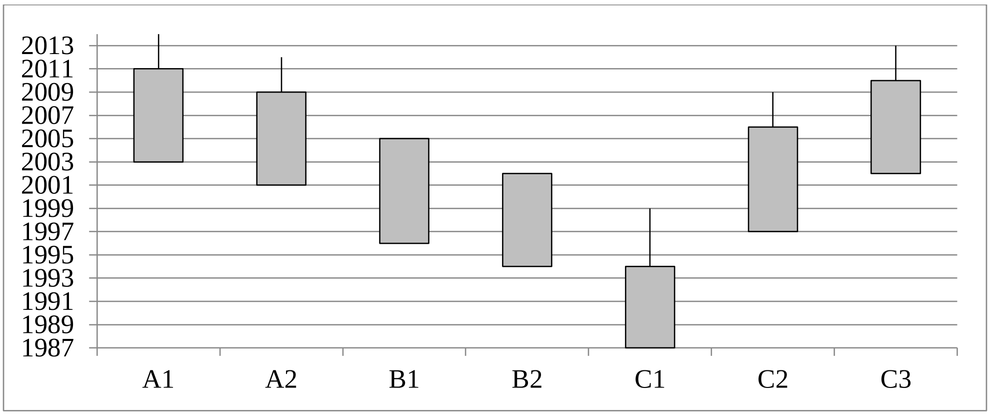
O questionário semi-estruturado (Apêndice A) preenchido pelos participantes da pesquisa tinha como objetivo compreender o perfil dos acadêmicos a partir de aspectos pessoais, formação escolar, trajetória no curso de Matemática Licenciatura e alguns componentes curriculares específicos.

Os integrantes da turma na qual se desenvolveu a pesquisa disponibilizaram-se a participar, assim, sete acadêmicos foram envolvidos nas ações. Estes, de modo a não expô-los, foram denominados como A1, A2, B1, B2, C1, C2 e C3, conforme a organização das equipes para o desenvolvimento das tarefas.

A faixa etária dos acadêmicos está entre 22 a 38 anos. O grupo é formado por três pessoas do gênero feminino e o restante masculino. Dentre os participantes têm-se três solteiros, um divorciado, um demarcou a alternativa “outro” e um casado que é o único que informou ter filhos.

Os dados dispostos no Gráfico 1 se referem à formação escolar dos licenciandos a partir de uma legenda na qual início e término do Ensino Fundamental – EF está representado por retângulo e Ensino Médio – EM por um segmento de reta. Todos realizaram o EF na modalidade regular e frequentaram este nível de ensino durante a faixa etária estabelecida (até 15 anos), variando entre escolas estaduais (A1; B1; B2; C1), municipais (A1; C2; C3) e particulares (A2). Dentre os acadêmicos apenas o C1 concluiu o EF em sete anos e o C2 em nove anos, o restantes demandou o tempo regular[7], oito anos.

Gráfico 1 – Período de formação escolar dos participantes da pesquisa



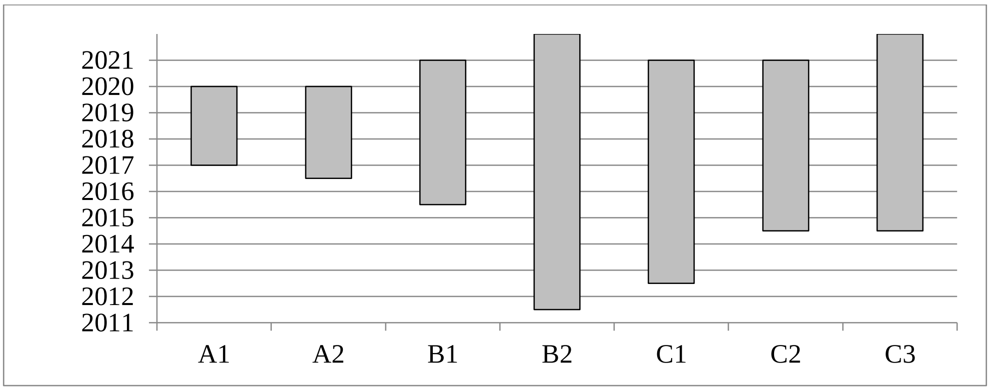

Fonte: Dados da pesquisa.

[7] Até 2010 duração do ciclo educacional poderia ser de oito anos.

Dois dos participantes, B1 e B2, concluíram o EM por meio do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e por Exame Supletivo, respectivamente. Os demais concluíram de forma regular em escolas estaduais (A1; C1; C2; C3) e particulares (A2) durante três anos, apenas um destes demandou cinco anos para finalizar esta etapa. Sublinha-se que os dois níveis de ensino citados foram realizados pelos participantes em cidades distintas, sendo elas: Dom Pedrito/RS (B1), Jaguari/RS (C3), Paraíso do Sul/RS (A1), Santa Maria/RS (A2; B2; C1; C2).

Dentre os participantes da pesquisa, mesmo esta sendo desenvolvida em um componente curricular do curso de Matemática Licenciatura Noturno, há um acadêmico do curso de Matemática Licenciatura Diurno[8] matriculado neste e participando desta investigação (A1). No Gráfico 2 está distribuído o ano de ingresso de cada participante, bem como o possível ano de conclusão informado pelo próprio. Salienta-se que o ingresso no curso de período noturno ocorre no segundo semestre do ano.

Gráfico 2 – Período de ingresso e possível conclusão do curso de Matemática Licenciatura dos participantes da pesquisa




Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se que o número idealizado de semestres para a conclusão do curso de Matemática Licenciatura Noturno, na instituição que foi desenvolvida a pesquisa, é de 10 semestres e no curso com período diurno é de oito semestres, tendo o período máximo para a conclusão estipulado em 15 e 12 semestres, respectivamente. Conforme os dados apontados no Gráfico 2, apenas o A2 mencionou estar apto a concluir o curso em nove semestres, que é

[8] A Universidade Federal de Santa Maria oferta dois cursos de Matemática Licenciatura com turnos distintos, diurno e noturno.

um período menor do que o estabelecido. No entanto, salienta-se que não se pode afirmar que os demais acadêmicos irão exceder o tempo máximo estipulado, pois não se tem informações quanto a realização de trancamento por um período determinado do curso.

Os Gráficos 1 e 2 indicam informações sobre a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Apenas o participante B1 concluiu um nível de ensino e ingressou no próximo com a diferença menor que um ano, porém este acadêmico realizou o ENEM como forma de conclusão do EM. O caso que há mais distanciamento de tempo, aproximadamente 13 anos, entre término e início de estudos é o do acadêmico C1. Os outros participantes, A1, A2, B2, C2, C3, obtiveram um afastamento entre os níveis mencionados de, aproximadamente, três, quatro, cinco, cinco e um ano, respectivamente.

Os licenciandos foram questionados quanto a forma que estudam para os componentes curriculares cursados na graduação. Estes indicaram que resolvem as atividades/listas/exercícios disponibilizados pelos professores (A1; A2; B1; B2; C1; C2; C3), fazem outras atividades além das contidas nas listas (B1; C2), assistem vídeos sobre conceitos/conteúdos na internet (B1; C2), buscam os monitores e/ou professores para solução de eventuais dúvidas (A1; A2), bem como realizam leitura de obras da área (A2).

O A1 (curso diurno) mencionou que estuda com colegas, já os participantes do curso noturno informaram que estudam, na maior parte do tempo, de forma individual. Este fato, provavelmente, ocorre pela falta de tempo disponível e compatível entre esses acadêmicos, tendo em vista que a maioria atua em outras profissões não relacionadas a educação durante o turno diurno.

Ao questionar os participantes quanto a alguns componentes curriculares já cursados. Salienta-se que os componentes curriculares questionados não são pré-requisitos para a resolução do bloco de tarefas desta pesquisa, mas os conceitos/conteúdos ministrados durante o desenvolvimento dos mesmos podem facilitar em alguns questionamentos ou ações das atividades. O Quadro 1 expõe as informações citadas pelos acadêmicos quanto a terem cursado ou não os componentes mencionados.

Quadro 1 – Componentes curriculares cursados pelos participantes da pesquisa

(continua)

| Componentes Curriculares \ Participantes | A1 | A2 | B1 | B2 | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I** | x | x | x | -[9] | x | x | x |
| **Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática II** | x | x | x | - | x | x | x |

[9] Símbolo que representa a não realização do componente curricular.

Quadro 1 – Componentes curriculares cursados pelos participantes da pesquisa

(conclusão)

| Participantes / Componentes Curriculares | A1 | A2 | B1 | B2 | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Geometria Plana** | x | x | x | x | x | x | x |
| **Geometria Espacial** | x | x | x | - | x | x | - |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os componentes apontados no quadro acima foram indicados tendo em vista que esta investigação trata de assuntos da GEP, esta está vinculada ao componente de Geometria Espacial (5° semestre), bem como a necessidade de alguns conceitos da Geometria Plana (4° semestre); os componentes de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I (1° semestre) e II (6° semestre) foram questionados pretendendo verificar se os participantes já teriam realizado alguma manipulação ou conhecimento sobre *software* de Geometria Dinâmica. Dentre os dados obtidos, apenas o B2 não realizou os componentes curriculares que tratam especificamente de recursos tecnológicos, mas este fato não indica que o participante não tenha realizado o contato/manipulação destas ferramentas em outros momentos.

Quanto ao componente de Geometria Espacial, este tem como objetivo “Compreender os principais resultados da geometria espacial, dando ênfase ao processo lógico-dedutivo e aos aspectos de aplicabilidade destes na resolução de problemas teóricos e práticos; intuir e visualizar figuras no espaço” (UFSM, 2013, n.p), assim estando diretamente relacionado a pesquisa. Cinco sujeitos haviam sido aprovados e dois, B2 e C3, até o momento da intervenção, não haviam cursado. O A1 mencionou o aproveitamento do componente curricular de outra universidade e os participantes A2, B1, C1, C2 realizaram este no ano/semestre de, respectivamente, 2018/02, 2017/02, 2012/02, 2017/02. Estes acadêmicos ainda informaram que estudavam para o componente de Geometria Espacial por meio de suas anotações de aula, vídeos e obras de conceito/conteúdo da área.

A partir das informações descritas nesta seção foi possível obter um delineamento da turma e dos participantes desta pesquisa.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Para o desenvolvimento desta dissertação adota-se uma organização de seis capítulos. Tendo como capítulo introdutório a discussão já apresentada sobre a trajetória acadêmica percorrida pela autora, assim como a problematização do tema, os objetivos, o caminho metodológico adotado para esta investigação e o perfil dos participantes da pesquisa.

O Capítulo 2 apresenta na Seção 2.1 uma revisão bibliográfica sobre o tema pesquisado. Esta busca a partir de pesquisas na área evidenciar a importância do ensino e aprendizagem de Geometria, bem como verificar o que vem sendo investigado neste campo sob o aporte teórico dos RRS, no que se refere a Geometria Espacial de Posição. No próximo capítulo, apresenta-se o referencial teórico que fundamenta esta pesquisa, buscando aproximá-lo do contexto da GE e expondo a importância do registro figural na aprendizagem de Geometria.

O Capítulo 4 descreve a Análise de Conteúdo realizada de obras identificadas em projetos pedagógicos de cursos de Matemática Licenciatura. No Capítulo 5 estão organizadas as etapas percorridas para a elaboração, desenvolvimento e as análises do bloco de tarefas elaborado com o intuito de contribuir com questões sobre a visualização em GE por meio de tratamentos figurais.

E por fim apresenta-se o último capítulo desta dissertação, o qual expõe algumas ponderações obtidas durante o desenvolvimento da pesquisa, seguido pelos apêndices e anexos empregados.

# 2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA: ALGUNS INDÍCIOS IDENTIFICADOS POR MEIO DE UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

São apresentadas duas seções durante o capítulo, uma delas busca identificar o que está sendo produzido em termos de pesquisas referentes à Geometria, principalmente, sobre GE. Para tanto, são expostos os dados de dois mapeamentos que versam sobre este campo da Matemática e sobre o aporte teórico dos RRS, bem como sobre Geometria Espacial de Posição. A terceira seção, "Geometria Espacial de Posição: alguns resultados", aborda a questão epistemológica do conceito discutido durante a dissertação.

## 2.1 MAPEAMENTO DE PESQUISAS SOBRE GEOMETRIA

Para a composição da revisão bibliográfica deste estudo foram elaborados dois mapeamentos. O primeiro considerando pesquisas em Geometria que utilizam como aporte teórico a teoria dos RRS. A partir dos resultados obtidos e do fato de não encontrar estudos específicos sobre Geometria Espacial de Posição, optou-se por investigar este campo da Matemática sem restrição teórica na tentativa de identificar o que se destaca em termos de conceitos/conteúdos, objetivos, metodologias de pesquisa e ensino, nível de ensino ao qual a pesquisa é destinada e utilização de recursos didáticos.

### 2.1.1 Registros de Representação Semiótica em pesquisas sobre Geometria

Tendo em vista a importância das representações em Geometria, esta subseção apresenta um mapeamento de pesquisas acadêmicas brasileiras, tomando como fonte o banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–CAPES[10], referentes a conceitos/conteúdos de Geometria Plana e Espacial que se apropriaram de ideias da teoria dos RRS. A escolha de mapear estes campos da Geometria justifica-se pelo fato de que ambos estão muito próximos em termos de discussões sobre tratamentos figurais e visualização.

As fontes de produção de dados foram teses e dissertações disponibilizadas no portal da CAPES, no qual, durante o mês de maio do ano de 2018, realizou-se a pesquisa a partir da combinação dos descritores "representação(s) semiótica(s)" e "geometria". Na tentativa de

[10] Link de acesso: <http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>

refinar os resultados, a pesquisa foi efetuada nas grandes áreas do conhecimento das ciências humanas e multidisciplinar, que desenvolvem pesquisas referentes à área da Educação Matemática e afins.

Após esta primeira investigação, obteve-se um total de 88 pesquisas que dispunham dos descritores utilizados, das quais 79 estavam disponíveis para a realização de *download*. Destas foi realizada a leitura dos resumos e da ficha catalográfica no intuito de organizá-las quanto as seguintes informações: título, autor(a), orientador(a), ano de publicação, instituição e programa de pós-graduação na qual foi realizada, tipo de pesquisa, conceito/conteúdo mobilizado, objetivo, nível de abrangência, metodologia, recursos didáticos e resultados obtidos, e investigou-se também aspectos abordados da teoria dos RRS e se obteve auxilio de outra teoria.

Dentre as 79 pesquisas identificadas (13 teses; 66 dissertações), 57 abordam conceitos/conteúdos da Geometria (Plana, Espacial, Analítica e Não-euclidiana) e 22 estão relacionadas a outros campos da Matemática, como, por exemplo, funções, sistemas lineares, números racionais, números complexos, entre outros. Localizaram-se 31[11] estudos que exploram exclusivamente a Geometria Plana e/ou Espacial (Apêndice E). A partir desse recorte organizou-se o Quadro 2 que contém a distribuição das sete teses e 24 dissertações nos programas de pós-graduação, bem como suas respectivas instituições de ensino.

Quadro 2 – Distribuição das pesquisas por programa de pós-graduação e instituição de ensino

| **Programa de Pós-Graduação** | **Instituição de Ensino** | **D** | **T** |
|---|---|---|---|
| Educação | Universidade Federal do Mato Grosso do Sul | 0 | 1 |
| Educação | Universidade Estadual de Ceará | 1 | 0 |
| Educação | Universidade Estadual de Ponta Grossa | 2 | 0 |
| Educação | Universidade de Brasília | 0 | 1 |
| Educação Científica e Tecnológica | Universidade Federal de Santa Catarina | 1 | 0 |
| Educação em Ciências e Matemática | Universidade Federal de Mato Grosso | 0 | 1 |
| Educação Matemática | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo | 7 | 3 |
| Educação Matemática | Universidade Estadual de Santa Cruz | 1 | -[12] |
| Educação Matemática e Ensino de Física | Universidade Federal de Santa Maria | 2 | - |
| Educação Matemática e Tecnológica | Universidade Federal de Pernambuco | 1 | - |
| Educação para a Ciência e a Matemática | Universidade Estadual de Maringá | 0 | 1 |
| Ensino de Ciências e Educação Matemática | Universidade Estadual da Paraíba | 1 | - |
| Ensino de Ciências e Matemática | Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais | 1 | - |
| Ensino de Ciências e Matemática | Universidade Federal de Uberlândia | 1 | - |
| Ensino de Ciências e Matemática | Universidade Franciscana | 2 | 0 |
| Ensino de Matemática | Universidade Federal do Rio de Janeiro | 1 | - |
| Ensino de Matemática | Universidade Federal do Rio Grande do Sul | 3 | - |

[11] Estas pesquisas foram identificadas pela letra P e numeradas de 1 a 31.
[12] Símbolo utilizado para os programas que não possuem curso de Doutorado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se que, diante a análise do Quadro 2, o programa de pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) é o que apresentou o maior número de produções, dez ao total, sobre o aporte teórico da teoria dos RRS em pesquisas que exploram conceitos/conteúdos de Geometria Plana e/ou Espacial.

Este fato pode ter sido influenciado por este ser um dos mais antigos programas de pós-graduação do Brasil referente a área de Educação Matemática, tendo iniciado o seu curso de mestrado no ano de 1994 e seu curso de doutorado no ano de 2002, possuir uma linha de pesquisa seguindo, principalmente, a perspectiva da didática da matemática francesa e que possui ao menos dois docentes que tem como tema de pesquisa o ensino e aprendizagem de Geometria. Além disso, sublinha-se que dentre as dez pesquisas produzidas neste programa de pós-graduação, sete delas (duas teses e cinco dissertações) foram orientadas pelo mesmo docente, Dr. Saddo Ag Almouloud[13].

O Rio Grande do Sul, apresentou-se com sete dissertações, sendo assim o segundo estado brasileiro com maior número de pesquisa relacionadas a Geometria Plana e/ou Espacial aliadas a teoria dos RRS. Estas pesquisas foram localizadas em três diferentes programas de pós-graduação oferecidos pelas seguintes instituições de ensino: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM); Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Universidade Franciscana (UFN). Destaca-se que dentre as dissertações identificadas cinco foram orientadas por diferentes pesquisadores.

O período das defesas dos estudos identificados encontrou-se entre os anos de 2007 e 2017, como exposto no Quadro 3.

Quadro 3 – Distribuição das pesquisas por período de conclusão

| **Período** | **Quant. de pesquisas** |
|---|---|
| 2007 – 2009 | 4 |
| 2010 – 2013 | 11 |
| 2014 – 2017 | 16 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao tratar do ensino e aprendizagem em Geometria é recorrente, em estudos atuais, o destaque de questões sobre seu abandono influenciadas por meio de pesquisas do século

[13]Link de acesso currículo lattes: <http://lattes.cnpq.br/9168215683139657>.

passado (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995). No entanto, os dados do Quadro 3, evidenciam que mesmo restringindo o referencial teórico, no período do ano de 2014 à 2017 ocorreu um aumento considerável na quantidade de investigações que exploram este campo. Este acréscimo sobre estudos referentes a Geometria já vinha sendo constatado por outras investigações, independentemente da perspectiva teórica (ANDRADE; NACARATO, 2004; CLEMENTE et al., 2015).

Sublinha-se que no ano de 2016 ocorreu a conclusão do maior número de pesquisas sobre conceitos/conteúdos de Geometria Plana e/ou Espacial aliados a teoria dos RRS, com um total de sete produções, tendo pesquisas desenvolvidas nos estados do Mato Grosso, Paraíba, Rio Grande do Sul, Santa Catarina e São Paulo. Esse dado revela que este tema não está sendo influenciado apenas por uma linha de pesquisa ou por algum docente, pertencente a um programa de pós-graduação específico.

No Quadro 4 está disposta a organização das investigações por nível de abrangência e o campo da Geometria, Plana e/ou Espacial, que foi explorado. É evidente o maior interesse por conceitos/conteúdos da Geometria Plana e o nível da Educação Básica. Os dados permitiram verificar que, com um total de, aproximadamente, 64% das pesquisas mapeadas destinam-se a Educação Básica, em que os conteúdos abordados foram: perímetro; área; volume; transformações geométricas; figuras planas e sólidos geométricos e suas construções.

Quadro 4 – Distribuição das pesquisas por nível de abrangência e campo da Geometria

| **Nível de abrangência** | **Quant. de pesquisas** | | |
|---|---|---|---|
| | **Geometria Plana** | **Geometria Espacial** | **Geometria Plana e Espacial** |
| Educação Básica | 10 | 7 | 2 |
| Ensino Superior | 6 | 0 | 1 |
| Formação Continuada | 4 | 0 | 1 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se que há um total de sete pesquisas direcionadas ao nível da Educação Básica que exploraram, de forma objetiva, os conceitos/conteúdos de área e volume de objetos matemáticos. Dentre essas, quatro, ou seja, mais da metade, abrangem o campo específico da GE.

As pesquisas direcionadas ao Ensino Superior e Formação Continuada estão relacionadas a conceitos/conteúdos como: figuras planas (construções); área e congruência; lugares geométricos; transformações geométricas no plano; demonstrações.

Evidencia-se que a GE, mesmo quando aliada a pesquisas que discutem conceitos/conteúdos de Geometria Plana, possui menor representatividade dentre os estudos identificados. Este dado manifesta a necessidade de mais pesquisas neste campo do conhecimento. Bem como, investigações aliadas ao Ensino Superior e formação continuada de professores, tendo em vista que se observou apenas duas investigações nestas áreas de ensino, isso quando abordadas juntamente com outros conceitos/conteúdos.

Outro fato constatado nas pesquisas mapeadas foi quanto a escolha das fontes de produção/coleta de dados. Verificou-se que, aproximadamente, 72% dos estudos utilizaram sequência de atividades e os demais exploraram livros didáticos, artigos científicos e questões de provas de larga escala. Estes resultados estão de acordo com a metodologia de ensino e pesquisa mais utilizada pelas produções, a Engenharia Didática, proposta por Michèle Artigue, e aplicada em, aproximadamente, 41% das pesquisas. Os outros 59% das investigações explicitaram apenas procedimentos metodológicos orientados a partir de: pesquisas bibliográficas; estudo de caso; Análise de Conteúdo.

Ao investigar quais aspectos da teoria dos RRS (Quadro 5) foram explorados na análise e resultados das pesquisas mapeadas, constatou-se que as transformações cognitivas, ou seja, tratamentos e conversões entre representações, foram abordadas em 30 investigações. Em outras palavras, apenas uma pesquisa relacionada a Geometria Plana não analisou esse aspecto. Ressalta-se que, dentre esses 30 estudos, dez verificaram exclusivamente esse ponto da teoria.

Quadro 5 – Distribuição das pesquisas por aspectos da teoria dos RRS

| **Aspectos da teoria dos RRS** | **Pesquisas** | | |
|---|---|---|---|
| | **Geometria Plana** | **Geometria Espacial** | **Geometria Plana e Espacial** |
| Apreensões figurais | 11 | 5 | 3 |
| Desconstrução dimensional | 4 | 2 | 3 |
| Olhares em geometria | 2 | 0 | 1 |
| Transformações cognitivas | 19 | 7 | 4 |

Fonte: Dados da pesquisa.

As apreensões figurais foram identificadas nas análises e resultados de 19 estudos, sendo o segundo aspecto mais enfatizado. Estas são analisadas concomitantemente com a desconstrução dimensional de uma figura geométrica, isto é, abordam tratamentos figurais, em nove pesquisas. Conforme Duval (2011), é a compreensão desse tipo de tratamento que permite que os estudantes entrem na maneira de ver em Geometria, desta forma, destaca-se a necessidade de mais estudos sobre este aspecto.

Dentre as pesquisas que abordam de forma específica conceitos/conteúdos de Geometria Espacial, apenas duas analisam tratamentos figurais (BETTIN, 2017; PALLES, 2013). Recorrendo aos trabalhos publicados de Duval (1999, 2004, 2005, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2013, 2016), encontra-se poucas discussões sobre GE, sendo assim, destaca-se a dissertação de Palles (2013), pois esta apresenta reflexões sobre a teoria dos RRS e este campo da Geometria. Na pesquisa, a autora reorganiza exemplos e esquemas para o ensino de Geometria, já publicados pelo autor da teoria para duas dimensões, para a terceira dimensão, ou seja, para a GE.

Ressalta-se que os quatro aspectos apontados no Quadro 5, foram estudados em apenas três investigações de forma simultânea (ASSUMPÇÃO, 2015; SCHEIFER, 2017; TREVISAN, 2016), sendo que apenas a pesquisa de Scheifer (2017) apresentou conceitos/conteúdos de GE e de forma conjunta com a Geometria Plana. A pesquisa citada analisou, conforme a teoria dos RRS, 51 questões da Prova Brasil para o Ensino Fundamental e Médio que envolvem Geometria. Desta forma, as observações realizadas pela autora auxiliaram nesta pesquisa no que diz respeito a elaboração das tarefas (Seção 5.1).

Ao investigar sobre a utilização ou a sugestão para o uso de materiais manipuláveis e/ou *software* de Geometria Dinâmica nas pesquisas mapeadas, constatou-se que, aproximadamente, 65% dos estudos, isto é, 20 investigações referem-se a estes recursos em suas análises. Segue no Quadro 6 a organização destas por campo da Geometria, Plana e/ou Espacial.

Quadro 6 – Distribuição das pesquisas por recursos utilizados e campo da Geometria

| **Recursos** | **Pesquisas** | | |
|---|---|---|---|
| | **Geometria Plana** | **Geometria Espacial** | **Geometria Plana e Espacial** |
| Materiais Manipuláveis | 1 | 0 | 1 |
| *Software* de Geometria Dinâmica | 6 | 7 | 0 |
| Materiais Manipuláveis e *Software* de Geometria Dinâmica | 4 | 0 | 1 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os *software* de Geometria Dinâmica obtiveram ênfase nas pesquisas destinadas a conceitos/conteúdos de GE, sendo que seis utilizaram o Cabri e uma o GeoGebra, ambos 3D.

Uma interpretação para esta diferença é o fato, mencionado em Soares, Ferner e Mariani (2018), de que a janela de visualização 3D do GeoGebra foi disponibilizada a partir do ano de 2013, e dos estudos que empregaram o Cabri 3D, apenas dois são posteriores a esta data.

Os materiais manipuláveis foram pouco destacados quando abordados de forma isolada dos *software* de Geometria Dinâmica. Estes foram identificados apenas em uma pesquisa referente a Geometria Plana e um estudo que aborda conceitos/conteúdos de Geometria Plana e Espacial de forma simultanea. Os recursos mencionados quando dispostos em um mesmo estudo recebem ênfase no campo específico da Geometria Plana.

Evidencia-se que apenas uma investigação fez uso de materiais manipuláveis e *software* de Geometria Dinâmica que envolvesse o campo da GE. Esta foi a pesquisa realizada por Moran (2015), na qual foi desenvolvida uma sequência de atividades com professores da Educação Básica, referente a conceitos/conteúdos de Geometria Plana e Espacial. Para a resolução das atividades foi disponibilizado diferentes registros de representação (materiais manipuláveis, expressões gráficas e *software* GeoGebra).

Conforme a autora supracitada, a utilização do *software* de Geometria Dinâmica foi destacada pelo auxílio na movimentação das figuras e dos elementos figurais, contribuindo no raciocínio utilizado para a resolução da atividade. Mas, não se pode afirmar que este tipo de representação é o mais adequado ao se tratar de conceitos geométricos, pois as análises realizadas revelaram que não há uma "melhor" representação figural, esta depende do que é exigido pela atividade proposta.

Sendo assim, outro destaque na pesquisa foi o de que os materiais manipuláveis possibilitaram "tentativas empíricas - como recortes, uso de régua, dobraduras - que pudessem resultar na solução para o problema" (MORAN, 2015, p. 232-233). Deste modo, a investigação exposta, assim como Rommevaux (1998), fez com que esta pesquisa se propusesse a elaborar e explorar atividades por meio destes dois recursos mencionados.

A partir dos resultados apresentados é necessário destacar o fato de não obter-se pesquisas que contemplassem a formação de futuros professores de Matemática explorando, especificamente, conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição tendo como aporte teórico os RRS. Desta maneira, optou-se por realizar outro mapeamento mais específico para este campo do conhecimento apresentado na próxima subseção.

### 2.1.2 Geometria Espacial de Posição em pesquisas na Matemática

No mapeamento anterior, identificou-se estudos que propõem construções de objetos geométricos, logo de alguma forma conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição são abordados, no entanto, tais investigações não tomam esta área do conhecimento como foco central. Por este motivo, optou-se por realizar outro mapeamento no mesmo banco de dados, desconsiderando o referencial teórico e buscando por este assunto em específico.

Os descritores selecionados, no primeiro momento, foram "geometria espacial", "de posição" ou "posicional". Porém, o menor número de pesquisas localizadas a partir das combinações dos descritores mencionados foi de 94330 (noventa e quatro mil, trezentos e trinta) estudos. Esta busca foi realizada com o termo *and*[14] entre os descritores, desta maneira estes estavam presentes nas pesquisas mapeadas, mas não garantia que estavam em sequência, ou seja, um seguido imediatamente do outro. Por essa razão preferiu-se recorrer à descritores mais específicos, a saber: "geometria espacial de posição" e "geometria espacial posicional". Com estes localizou-se seis investigações, o que evidencia, mais uma vez, o número restrito de estudos sobre esses conceitos/conteúdos e a importância de se analisar sobre o tema.

Ao utilizar o descritor "geometria espacial de posição" identificou-se cinco dissertações classificadas quanto a grande área do conhecimento em Multidisciplinar e Ciências Exatas e da Terra, respectivamente, uma e quatro pesquisas. Estas foram concluídas entre os anos de 2011 a 2017, e serão descritas brevemente em ordem cronológica, apontando alguns resultados que possam contribuir de alguma forma em termos de organização e análise das tarefas desta investigação.

O estudo de Muraca (2011) foi defendido junto ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo/SP. Este apresenta questões sobre a Geometria Espacial de Posição, em especial, retas paralelas, retas reversas, posições de reta e plano, figuras espaciais e o conceito de quadrilátero reverso. A investigação foi realizada com professores da Educação Básica, ou seja, visou a formação continuada, explorando os conceitos/conteúdos mencionados por meio de atividades exploratório-investigativas.

Ao realizar este estudo com professores, o pesquisador verificou que as definições em Geometria apresentadas por estes sujeitos eram restritas. Muraca (2011, p. 113) exemplificou este fato a partir da definição dada pelos participantes da pesquisa para retas paralelas da seguinte forma:

[14] Termo em inglês utilizado pela plataforma de busca para pesquisar dois ou mais descritores simultaneamente em um mesmo estudo.

> Eles diziam que retas paralelas são retas que não se cruzam. Porém durante as atividades, ao representarem duas retas no paralelepípedo e verificar sua posição relativa eles perceberam que elas não se cruzavam, mas eles mesmos diziam não ser paralelas. Eles ficaram bastante perturbados e não sabiam explicar o motivo disso.

Esse fato evidencia que os professores determinavam retas paralelas considerando apenas a Geometria Plana, pois se referiam apenas a necessidade de não possuir ponto em comum entre as retas. Mas em GE não ter pontos em comum é uma condição necessária para que retas distintas sejam paralelas, mas não é condição suficiente para que isso ocorra. Dado isto, Muraca (2011) sugere que essa situação se deve a pouca exploração de posições relativas entre retas no espaço.

Ressalta-se que as outras quatro pesquisas identificadas com o descritor “geometria espacial de posição” fazem parte de programas de mestrados profissionais em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT em diferentes instituições de ensino. Sublinha-se que a investigação mais antiga identificada obteve-se acesso apenas ao seu “produto”.

Resende (2013), em sua pesquisa realizada na Universidade Federal de São João del-Rei/MG, organizou uma sequência de 10 atividades desenvolvidas utilizando planificações de sólidos geométricos. Sua elaboração foi prevista de modo a auxiliar estudantes do 2° ano do Ensino Médio da modalidade de Educação de Jovens e Adultos – EJA, abordando em suas atividades conceitos/conteúdos como reconhecimento de sólidos geométricos, noções primitivas e axiomas, posições relativas, perpendicularismo, projeções, distâncias e ângulos.

A pesquisa de Arruda (2014) propôs a manipulação de recursos oferecidos pelo *software* GeoGebra em sua versão 3D, explorando conceitos/conteúdos como reta, plano, plano perpendicular, prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Durante o estudo foram apresentadas discussões sobre “conceitos básicos”[15] da Geometria Plana e Espacial, o histórico do GeoGebra e a tecnologia 3D, seguido dos comandos deste *software* e ao final foi exposto algumas possíveis aplicações deste recurso a partir de problemas matemáticos.

As atividades elaboradas não foram aplicadas, mas são direcionadas aos anos finais da Educação Básica, explorando tanto a Geometria Espacial de Posição como a Métrica. A pesquisadora afirmou que seu estudo foi organizado de forma a contribuir com a capacitação de professores que queiram utilizar essa tecnologia em suas aulas para ofertar “melhores oportunidades de compreensão ao seu aluno, já que o recurso da visualização é de extrema

[15] Termos utilizados por Arruda (2014).

importância para o desenvolvimento de habilidade no que se refere ao bloco de conteúdos de Espaço e Forma" (ARRUDA, 2014, p. 119).

Oliveira (2016) apresentou em seu trabalho intitulado "Geometria Espacial de Posição: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia" a organização de uma sequência de atividades, desenvolvidas com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. O pesquisador, também, realizou uma investigação em livros didáticos utilizados pelos participantes, constatando que a ênfase ao se tratar de conceitos/conteúdos de GE não é a posicional ou axiomática, e sim o cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos.

Dentre as atividades propostas no estudo citado, haviam construções de figuras tridimensionais, as quais o investigador evidenciou um problema se realizadas sem o uso de *software* de Geometria Dinâmica, a saber: "Distorções, falta de visibilidade e até mesmo a falta de criatividade seria um empecilho para o cumprimento destas atividades" (OLIVEIRA, 2016, p. 118). Dessa forma, o recurso tecnológico foi utilizado no intuito de viabilizar as construções mantendo suas propriedades.

A mais recente pesquisa referente a conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição identificada foi a investigação de Barbosa (2017) que também propõe o uso de *software* de Geometria Dinâmica para a abordagem deste campo do conhecimento, bem como, a Geometria Esférica. O estudo evidencia que este recurso proporciona

> [...] a construção de figuras por meio de propriedades estabelecidas, e, usando o recurso de arrastar, verificar diferentes representações de uma mesma situação. Ao fazer isso, podem ser notados padrões e regularidades, estimulando a investigação e o desenvolvimento da cognição para demonstração. (BARBOSA, 2017, p. 118)

Ao tratar da GEP uma sequência de atividades foi desenvolvida com uma turma de 3° ano do Ensino Médio, na qual a pesquisadora constatou a dificuldade dos estudantes quanto a escrita, destacando que esta "não atingiu o nível de formalidade habitual da matemática, invocando muitas vezes verbos de ação para descrever propriedades e acrescentando condições desnecessárias em definições" (BARBOSA, 2017, p. 119).

Com o descritor "geometria espacial posicional" identificou-se apenas uma pesquisa. Esta foi elaborada por Brito (2013) no Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Lavras/MG, tendo como propósito central o desenvolvimento da capacidade de visualização e orientação espacial do estudante. A investigação contém uma sequência de atividades proposta para os anos finais do Ensino Médio, a qual explora conceitos/conteúdos de posições relativas entre retas, pontos e retas, retas e planos, pontos e planos e entre planos.

As atividades são abordadas, inicialmente, pela manipulação de materiais concretos, posteriormente, pela utilização do *software* Wingeom e para "consolidação da aprendizagem"[16] é sugerido o *software* de jogo Gemp. Sendo assim, salienta-se que o pesquisador compreende que os recursos tecnológicos são uma ferramenta de interesse dos estudantes, pois "tornam o aprendizado mais dinâmico, atrativo e de fácil compreensão como também leva à visualização dos elementos a serem estudados, transcendendo a forma tradicional de ensino" (BRITO, 2013, p. 57).

As pesquisas mapeadas, em sua maioria, destinaram-se ao Ensino Médio e evidenciam a utilização de recursos tecnológicos ao se tratar de conceitos/conteúdos de GEP. Durante a análise das pesquisas mapeadas, alguns fatos chamaram a atenção, como a afirmação da ênfase dada pelos livros didáticos sobre o cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos, a importância e necessidade do desenvolvimento de estudos sobre GEP com professores e a falta de formalidade utilizada por estudantes e professores do Ensino Médio.

Perante estas informações, reforçou-se o propósito de pesquisar sobre a visualização de representações figurais, analisando como isto se apresenta em bibliografias destinadas ao ensino e aprendizagem de conceitos/conteúdos de GEP e como se posicionam e agem futuros professores diante de questões que exploram conceitos/conteúdos desta área abordando o uso de materiais manipuláveis e *software* de Geometria Dinâmica de forma conjunta. Para tanto se faz necessário apresentar os entendimentos de conceitos deste campo da Geometria que serão utilizados para organizar o bloco de tarefas desta pesquisa.

## 2.2 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: ALGUNS RESULTADOS

Esta seção visa embasar de forma teórica alguns conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição a serem recorridos durante a organização, desenvolvimento e análise das tarefas. Não se trata de uma sequência de conceitos, isto é, não se tem por objetivo, neste momento, manter uma ordem no que se está apresentando, pois o encadeamento organizado a seguir pretende apenas expor a forma como se compreende alguns tópicos deste campo.

Ao tratar da GEP, durante as atividades, será evidenciado o sólido geométrico cubo. Esta escolha foi tomada tendo em vista, como apontam as pesquisas de Rommevaux (1988) e

---

[16] Termo utilizado por Brito (2013).

Novak (2018), as dificuldades apresentadas por estudantes na visualização de figuras/sólidos geométricos, em especial, na GE, assim como, na elaboração de representações mentais destes objetos. Optou-se por priorizar o cubo, na maioria das atividades, por este ser uma forma utilizada em objetos cotidianos e também ser uma condição "especial" de outro poliedro muito estudado na matemática escolar que são os prismas retangulares.

Este sólido é definido como um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes, assim entende-se que este é formado pela reunião de seis paralelogramos que possuem a característica mencionada, ou seja, organizado por seis quadrados congruentes. Sendo que a figura geométrica quadrado é organizada por quatro segmentos de reta congruentes e por ângulos também congruentes. Assim, esta pesquisa tem a intenção de explorar por meio do cubo conceitos/conteúdos de GEP, por exemplo, colinearidade e coplanaridade de pontos; posição relativa entre planos, reta e plano e entre retas.

Considerando que o cubo é organizado por pontos no espaço, assim como, por retas e planos, se faz necessário expor os entendimentos sobre estes entes geométricos. Bem como, discutir sobre paralelismo e perpendicularismo entre os elementos pertencentes ao cubo que mantém suas características e propriedades.

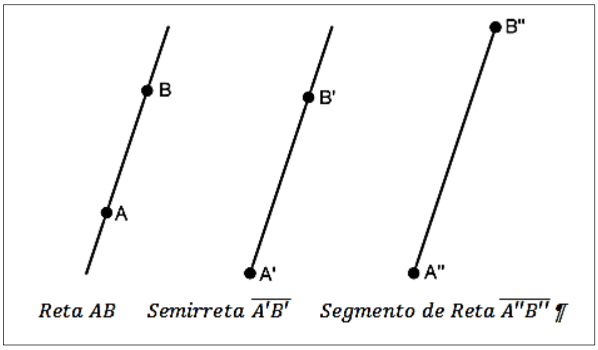
Primeiramente, é fundamental mencionar as noções primitivas da Geometria que são a base para a construção dos entendimentos geométricos, sendo estes: ponto, reta, plano e espaço. Para tanto, é possível apenas indicar suas propriedades e características, pois não há uma definição estabelecida para estes elementos.

Entende-se que um ponto não possui dimensão, assim classifica-se como dimensão 0. Para nomear um ponto utilizamos uma letra maiúscula, por exemplo, ponto A. Sua representação figural é feita por meio de um círculo, mas deve ficar claro que esta é apenas uma forma de representá-lo, tendo em vista que este elemento não possui qualquer tipo de medida.

Partindo do entendimento de ponto, as retas são formadas por esses elementos organizados em linhas infinitas que não possuem curvas. Com base nesta informação, pode-se concluir que reta não possui largura, mas compreende-se que entre dois pontos pertencentes a este ente geométrico existe uma distância, logo pode-se concluir que este elemento possui comprimento. Assim a reta é unidimensional, ou seja, possui dimensão 1. Parte de uma reta pode ser denominada como semirreta ou segmento de reta. Suas características diferem da reta apenas no fato da semirreta possuir apenas uma de suas extremidades definida por um ponto e a outra sendo infinita e o segmento de reta possui extremidades definidas por pontos, logo é finito.

Considerando que uma reta possui os pontos A e B, para fazer referência a ela pode-se utilizar algumas nomenclaturas, como: reta *r* (utiliza-se uma letra minúscula), reta AB ou $\overleftrightarrow{AB}$. Para mencionar a semirreta que possui os pontos A e B, sendo, por exemplo, A uma das extremidades, utiliza-se a nomenclatura $\overrightarrow{AB}$, já a nomenclatura empregada para um segmento de reta com extremidade A e B, é da forma $\overline{AB}$. Em termos de representação figural, uma reta é caracterizada apenas por uma parte da reta, pois este elemento é infinito, logo impossível de representá-lo de forma integra. Desta maneira, as representações de reta, semirreta e segmento de reta são estabelecidas da mesma forma (Figura 2), o que difere é apenas a demarcação de seus pontos.

Figura 2 – Representações figurais de reta, semirreta e segmento de reta




Fonte: Organizado pela autora.

Um conjunto de retas justapostas formam um plano, assim organiza-se uma superfície plana infinita, sem ondulações. Desta maneira, pode-se afirmar que este ente primitivo é bidimensional, ou seja, obtém dimensão 2. Um plano pode ser nomeado por uma letra do alfabeto grego ou por meio de três pontos pertencentes a ele, por exemplo, plano $\pi$ ou plano ABC, sendo que A, B e C estão contidos no plano. Já sua representação figural, geralmente, é estabelecida pelo desenho de um paralelogramo.

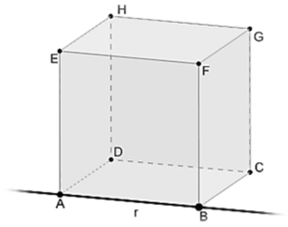
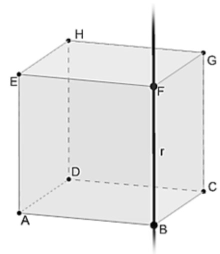
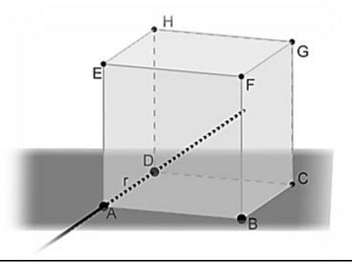
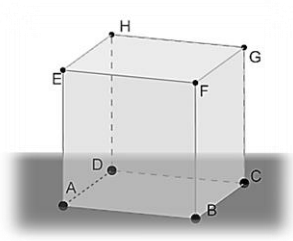
Figuras planas são formadas por pontos pertencentes a um mesmo plano (DOLCE; POMPEO, 2005, p.9), por exemplo, um quadrado que é limitado por segmentos de reta, esta forma geométrica é a que compõe as faces de um cubo. No entanto, o cubo é um objeto tridimensional, sendo assim, é necessário definir o que se entende por espaço. Pode-se pensar no espaço como uma sobreposição de planos, assim este torna-se infinito em todas direções, obtendo comprimento, largura e altura, sendo classificado como tridimensional, ou seja, dimensão 3. Posto isto, o espaço é onde os sólidos geométricos podem ser estruturados.

A seguir algumas definições, postulados e teoremas serão apresentados relacionando o cubo e seus elementos. Evidencia-se que os resultados apresentados na sequência foram reproduzidos da obra “Introdução à Geometria Espacial” organizada por Carvalho (2005).

Sublinha-se que postulados são fatos tomados como verdade e utilizados como ponto de partida para se obter algum resultado; que definição é a descrição das característica de algo; e que teoremas são proposições provadas por meio de demonstrações que utilizam-se de postulados, definições ou até mesmo de outros teoremas já provados. Adotando a Geometria Plana como ponto de partida, no Quadro 7 são apresentadas algumas propriedades iniciais válidas para o espaço e exemplificadas pelo objeto cubo.

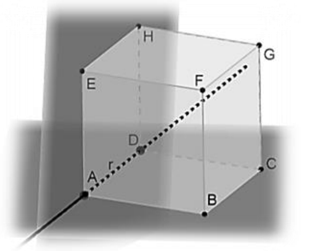
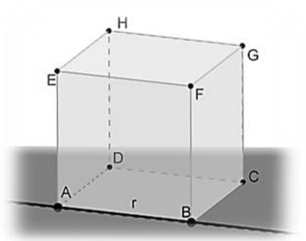
Quadro 7 – Resultados sobre propriedades iniciais em relação ao espaço

(continua)

| **Descrição** | **Exemplo** | |
|---|---|---|
| **Postulado 1**<br><br>*Por dois pontos do espaço passa uma e somente uma reta.* |  | Pelos pontos A e B passa somente a reta *r*. |
| **Postulado 2**<br><br>*Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.* |  | Dentre os vértices do cubo, apenas os pontos B e F pertencem a reta *r* demarcada. Sendo assim, tem-se que os pontos A, C, D, E, G e H não pertencem a reta *r*. |
| **Postulado 3**<br><br>*Por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um e somente um plano.* |  | Dados os pontos A, D e B, sendo que o ponto B não pertence a mesma reta *r* que passa por A e D. Logo, tem-se o plano ADB. |
| **Postulado 4**<br><br>*Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.* |  | Dado o plano ABC demarcado na figura, tem-se que os pontos A, B, C e D pertencem ao plano e que os pontos E, F, G e H não pertencem ao plano. |

Quadro 7 – Resultados sobre propriedades iniciais em relação ao espaço

(conclusão)

| Descrição | Exemplo | |
|---|---|---|
| **Postulado 5**<br><br>*Se dois planos possuem um ponto em comum então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum (e portanto, pelo menos uma reta em comum).* |  | Dado o plano ABC que contém o ponto A e o plano ADH que também contém A, tem-se que estes possuem pelo menos mais um ponto em comum, neste caso, o ponto D. Sabendo que dois pontos determinam uma reta, tem-se que a reta *r* está contida em ambos os planos. |
| **Postulado 6**<br><br>*Se uma reta tem dois de seus pontos em um plano, então ela está contida no plano.* |  | Tem-se um plano ABC que contém os pontos A e B, e a reta *r* formada por esse pontos. Logo, pode-se concluir que a reta *r* está contida no plano mencionado. |

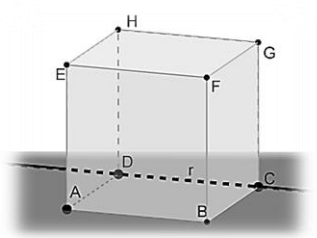
Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 4-7).

Os resultados evidenciados por meio dos postulados expostos no Quadro 7 estão relacionados a propriedades básicas de ponto, reta e plano, mais precisamente, a respeito de colinearidade e coplanaridade. Estas são informações tomadas como verdades para a Geometria Espacial.

Os teoremas apresentados no Quadro 8 também são tocantes a casos de coplanaridade. Estes necessitam de uma prova para se tornarem válidos, mas acentua-se que serão tomados como verdades, nesta pesquisa, pois as demonstrações não são o foco principal da investigação.

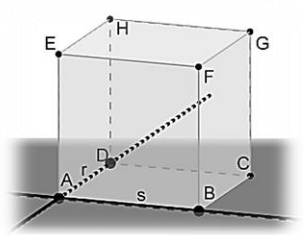
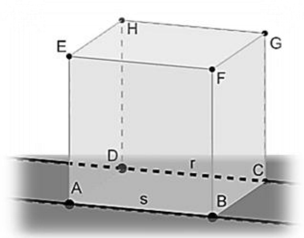
Quadro 8 – Resultados sobre coplanaridade

(continua)

| Descrição | Exemplo | |
|---|---|---|
| **Teorema 1**<br><br>*Por uma reta r e um ponto A exterior a reta passa um único plano.* |  | Dado o ponto A e a reta *r*, tem-se apenas o plano ADC que contém esses elementos. |

Quadro 8 – Resultados sobre coplanaridade

(conclusão)

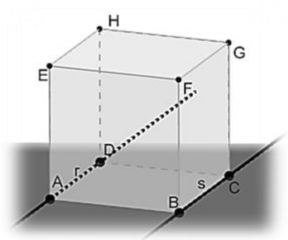
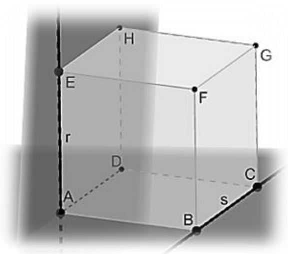
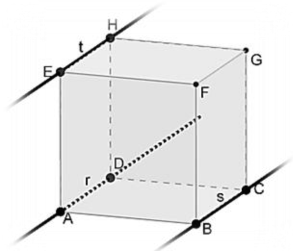
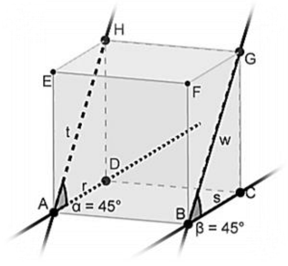
| **Descrição** | **Exemplo** | |
|---|---|---|
| **Teorema 2**<br><br>*Por duas retas concorrentes s e t passa um único plano.* |  | Sendo as retas *r* e *s* concorrentes, tem-se que apenas o plano ABD as contém. |
| **Teorema 3**<br><br>*Por duas retas paralelas e distintas s e t passa um único plano.* |  | Pelas retas *r* e *s* passa somente o plano ABC. |

Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 5-6).

Logo, as informações apresentadas nos Quadro 7 e 8 são essenciais para se determinar uma reta e um plano. Assim como, identificar e justificar se pontos dados pertencem, ou não, a uma mesma reta ou plano.

As retas podem ser classificadas, quanto suas posições relativas, como: concorrentes, paralelas (distintas ou coincidentes) ou reversas. No primeiro caso mencionado, duas retas são ditas coincidentes caso tenham todos seus pontos iguais. Retas concorrentes são aquelas que possuem apenas um ponto em comum e podem ser classificadas como perpendiculares, caso o ângulo formado entre elas seja reto. Ao pensar na ocorrência de paralelismo entre retas quando se está em uma dimensão 2, é necessário apenas verificar se não há algum ponto em comum, isto já garante o fato do paralelismo entre estes entes geométricos. Na GE este fato se mantém, mas ainda é preciso verificar o caso de coplanaridade entre as retas. Retas reversas ocorrem apenas na dimensão 3, pois são aquelas que não possuem ponto em comum e se localizam em planos distinto. Sendo assim, no Quadro 9 seguem alguns argumentos que podem ser utilizados para verificar a situação posição entre retas.

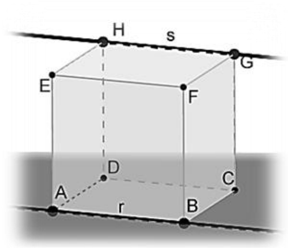
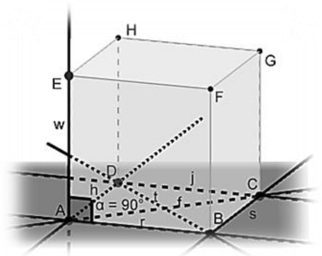
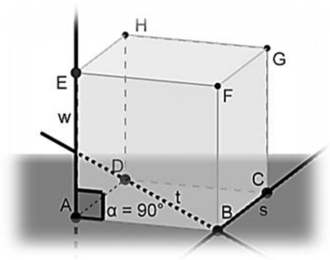
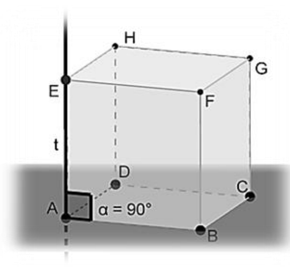
Quadro 9 – Resultados sobre paralelismo entre retas

<table>
<tr><th>Descrição</th><th colspan="2">Exemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Definição 1<br><br>Duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto em comum mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica em que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas de retas reversas.</td><td>
</td><td>Sabendo que as retas r e s não possuem ponto em comum e que estão contidas no plano ABC, pode-se concluir que estas são paralelas.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Sabendo que as retas r e s não possuem ponto em comum e que estão contidas, respectivamente, nos planos ADH e ABC, pode-se concluir que estas são reversas.</td></tr>
<tr><td>Teorema 4<br><br>Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.</td><td>
</td><td>Pelos pontos B e E não pertencentes a reta r, passa uma única reta paralela a ela que os contém, respectivamente, retas s e t.</td></tr>
<tr><td>Teorema 5<br><br>Sejam (r, s) e (r’, s’) dois pares de retas concorrentes tais que r e r’ são paralelas entre si e s e s’ também são paralelas entre si. O ângulo formado por r e s é igual ao ângulo formado por r’ e s’.</td><td>
</td><td>Sejam as retas r e s paralelas entre si, e as retas t e w também paralelas entre si. Tem-se que o ângulo formado entre r e t é igual ao formado entre s e w.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 14-17).

Há três possíveis posições relativas entre reta e plano. Seja *r* uma reta e α um plano, caso dois ou mais pontos pertencentes a *r* também pertençam a α, diz-se que a reta está contida no plano. Se *r* e α possuírem apenas um ponto em comum, sua classificação é dita como secante. E ainda tem-se a possibilidade de não haver pontos em comum entre a reta *r* e o plano α, sendo assim, estes entes geométricos são ditos paralelos. Para justificar essas posições de forma mais rigorosa, um dos argumentos que pode ser utilizado é o primeiro teorema apresentado no Quadro 10.

Quadro 10 – Resultados sobre paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

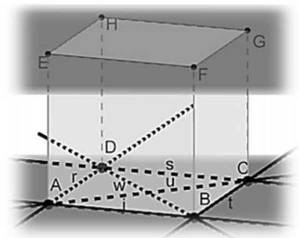
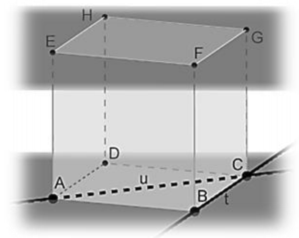
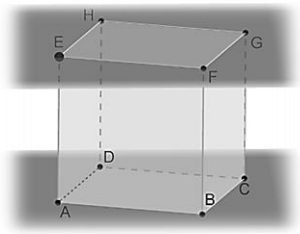
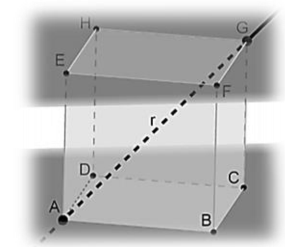
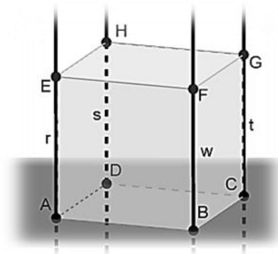
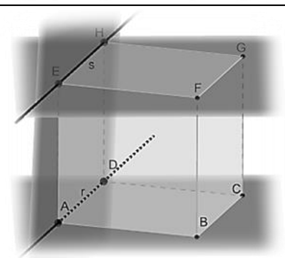
| **Descrição** | **Exemplo** | |
|---|---|---|
| **Teorema 6**<br><br>*Um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se e somente se existe uma reta s paralela a r e contida em α.* |  | Sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas e que a reta *r* está contida no plano ABC, pode-se concluir que a reta *s* é paralela ao plano ABC. |
| **Definição 2**<br><br>*Diz-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta contida no plano.* |  | Sabendo que as retas *r*, *s*, *j*, *h*, *f* e *t* estão contidas no plano ABC, e, tendo em vista as propriedades do cubo, estas são ortogonais a reta *w*. Logo, tem-se que a reta *w* e o plano ABC são perpendiculares entre si. |
| **Teorema 7**<br><br>*Se r é ortogonal a um par de retas concorrentes de α então r é perpendicular a α.* |  | Sabendo que as retas *t* e *s* pertencentes ao plano ABC são concorrentes em B, e que a reta HD é ortogonal as retas AD e DC, tem-se que a reta *w* é perpendicular ao plano ABC. |
| **Teorema 8**<br><br>*Por um ponto dado, se pode traçar um único plano perpendicular a uma reta dada. Por um ponto dado, se pode traçar uma única reta perpendicular a um plano dado.* |  | Dado o ponto C e a reta *t*, tem-se que apenas o plano ABC é perpendicular a esta reta.<br>Dado o ponto E e o plano ABC, tem-se que apenas a reta *t* é perpendicular ao plano ABC. |

Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 19, 42-46).

Se houver a classificação de reta e plano secantes, pode ser que estes também sejam ditos perpendiculares, caso ocorra um ângulo reto entre os elementos em questão. Alguns teoremas que auxiliam nesta verificação estão apresentados também no Quadro 10.

Quanto às posições relativas entre planos, estes podem ser classificados como: coincidentes, secantes ou paralelos, respectivamente, possuem todos seus pontos em comum, possuem uma reta em comum, não possuem pontos em comum. Os teoremas expostos no Quadro 11 auxiliam na justificativa da ocorrência das posições destacadas.

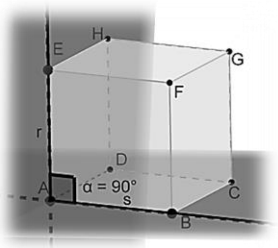
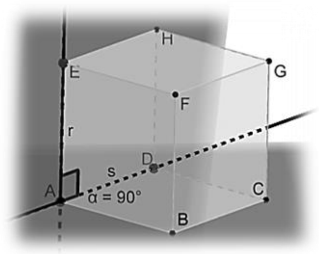
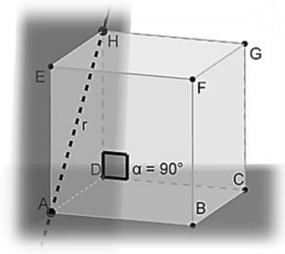
Quadro 11 – Resultados sobre paralelismo de planos

<table>
<tr><th>Descrição</th><th colspan="2">Exemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Teorema 9<br><br>Se α e β são paralelos, então α é paralelo a cada reta de β. Reciprocamente, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas ao plano β, então α e β são paralelos.</td><td>
</td><td>Sabendo que os planos ABC e EFG são paralelos entre si, tem-se que o plano EFG é paralelo a todas as retas contidas no plano ABC. Logo, as retas r, s, t, u, w e j são paralelas ao plano EFG.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>As retas u e t contidas no plano ABC são concorrentes entre si e paralelas ao plano EFG. Logo os planos ABC e EFG também são paralelos.</td></tr>
<tr><td>Teorema 10<br><br>Por todo ponto A exterior a um plano dado α passa exatamente um plano β paralelo a α.</td><td>
</td><td>Dado o ponto E não pertencente ao plano ABC, existe apenas o plano EFG que contém o ponto E e é paralelo ao plano ABC.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Teorema 11<br><br>Se uma reta corta um plano, corta também qualquer plano paralelo a este. Se um plano corta uma reta, corta também qualquer reta paralela a ela.</td><td>
</td><td>Sabendo que a reta r corta o plano ABC e que os planos ABC e EFG são paralelos, tem-se que a reta r também corta o plano EFG.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Sabendo que o plano ABC corta a reta AE e que esta é paralela as retas BF, CG e DH, tem-se que o plano ABC também corta as retas mencionadas.</td></tr>
<tr><td>Teorema 12<br><br>Se um plano α corta um plano β segundo uma reta r, ele corta um plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r.</td><td>
</td><td>Sabendo que o plano ADH é secante ao plano ABC pela reta r, que os planos ABC e EFG são paralelos e que as retas r e s são paralelas, tem-se que o plano ADH é secante ao plano EFG pela reta s.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 23-28).

No caso dos planos serem classificados, em relação as suas posições, como secantes, ainda pode haver a possibilidade desta interseção formar um ângulo reto entre estes entes geométricos. Se este fato ocorrer estes elementos são chamados de planos perpendiculares entre si. Os teoremas referentes a esta posição relativa entre planos são mencionados no Quadro 12.

Quadro 12 – Resultados sobre planos perpendiculares

| **Descrição** | **Exemplo** | |
|---|---|---|
| **Teorema 13**<br><br>*Dois planos α e β são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.* |  | Sabendo que a reta *r* está contida no plano ADH e que a reta *s* está contida no plano ABC, e que as retas mencionadas são perpendiculares em relação aos planos citados em que não estão contidas, tem-se que os planos ADH e ABC são perpendiculares entre si. |
| **Teorema 14**<br><br>*Se um plano α é perpendicular a um plano β e a reta r de α é perpendicular à reta de interseção de α e β, então r é perpendicular a β.* |  | Tendo que os planos ABC e ADH são perpendiculares entre si e que a reta AE contida no plano ADH é perpendicular a reta *s* contida nos dois plano mencionados, pode-se concluir que a reta *r* é perpendicular ao plano ABC. |
| **Teorema 15**<br><br>*Por uma reta não perpendicular a um plano passa um único plano perpendicular a este plano.* |  | Sabendo que a reta *r* não é perpendicular ao plano ABC, logo tem-se que apenas o plano ADH que contém a reta *r* é perpendicular ao plano ABC. |

Fonte: Adaptado de Carvalho (2005, p. 54-58).

Como já mencionado anteriormente, os resultados apresentados foram utilizados nas discussões teóricas quanto às resoluções dos acadêmicos no desenvolvimento das tarefas.

Após apresentar essas definições, postulados e teoremas a partir de exemplos do objeto cubo, verifica-se que uma representação figural de forma estática não permite mostrar todas as informações necessárias. Neste caso, em alguns momentos, no desenvolvimento das atividades irá se recorrer ao uso de um *software* de Geometria Dinâmica, tendo em vista que este auxiliará, por meio de sua possibilidade de rotação do objeto na visão dos elementos a serem analisados.

O próximo capítulo apresenta a discussão sobre a importância do registro figural em Geometria Espacial sob o ponto de vista da teoria dos registros de representação semiótica.

# 3 O REGISTRO FIGURAL NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Ao tratar de ensino e aprendizagem de Matemática é necessário mencionar que este campo do conhecimento é estudado, exclusivamente, por meio de representações semióticas, pois esta é a via exclusiva de acesso aos objetos matemáticos (DUVAL, 2016). O ponto, por exemplo, é um objeto geométrico que não possui dimensão, mas representamos este ente primitivo por intermédio de sua notação simbólica ou até mesmo por uma representação figural bidimensional, ou seja, uma marca no papel/monitor, intersecção entre duas retas, que, por menor que seja, possui largura e comprimento.

Desta forma, recorre-se a teoria dos registros de representação semiótica, organizada pelo filósofo e psicólogo, Raymond Duval, para subsidiar a discussão sobre a necessidade das representações em Matemática, bem como a argumentação sobre o processo de ensino e aprendizagem, aquisição do conhecimento e visualização em Geometria.

É necessário, primeiramente, sublinhar o que se entende por registro e representações semióticas. Conforme Duval (2012a, p. 269), as representações semióticas são “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem [restrições próprias] [...] de significação e de funcionamento” e registro é “um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (DUVAL, 2011, p. 97), estes podem ser categorizados em língua natural, simbólico, configuração geométrica e gráfico. Destaca-se que, nesta pesquisa, a classificação do registro em língua natural inclui a linguagem formal da Matemática, assim como, alguma simbologia que possa estar associada a mesma.

Segundo Duval (2012a), *semiósis* refere-se a produção ou apreensão de uma representação semiótica e *noésis* significa a compreensão conceitual do objeto matemático. O autor destaca que uma não existe sem a outra, ou seja, é necessário *semiósis* para que haja *noésis*. Mas, chama atenção para o fato de que só há *noésis* se o objeto matemático se distingue de suas diferentes representações, pois se este fato não ocorrer, os conhecimentos adquiridos só poderão ser utilizados em um mesmo contexto matemático, desta forma não se obterá a compreensão total do objeto.

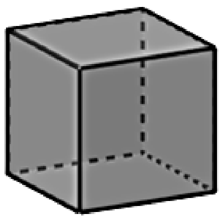
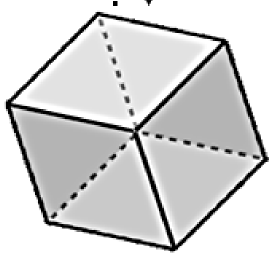
As dificuldades apresentadas na aprendizagem da Matemática, de acordo com Duval (2013), não estão exclusivamente associadas aos conceitos/conteúdos abordados, mas também à pluralidade de representações semióticas empregadas e o uso “confuso” que fazem delas. Em outras palavras, a diversidade de representações semióticas e seus modos de funcionamento próprio que são questões importantes para a compreensão desse campo do conhecimento. Sendo assim, torna-se indispensável a abordagem de um mesmo conceito/conteúdo matemático por meio de diferentes representações semióticas.

Dado este fato, compreende-se que o mais pertinente matematicamente em uma representação semiótica são as possíveis transformações que podem ser realizadas. Assim, torna-se fundamental versar sobre as duas transformações cognitivas da atividade matemática, são elas (DUVAL, 2009):

a) Tratamento: quando a transformação gera outra representação semiótica no mesmo registro em qual foi formada, ou seja, é uma transformação interna ao registro;
b) Conversão: quando a transformação gera uma representação semiótica que pertence a outro registro, isto é, uma transformação externa ao registro de partida.

O exemplo exposto no Quadro 13 apresenta para o mesmo objeto matemático, o cubo, em dois tipos de registros, língua natural e figural, as possíveis transformações cognitivas, tratamento e conversão, que podem ser realizadas entre as representações destacadas de cada um dos registro.

Quadro 13 – Transformações cognitivas de tratamento e conversão para representações de um cubo

| **Registro em língua natural** | **Registro Figural** |
| --- | --- |
| Poliedro com seis faces quadradas congruentes. |  |
| Paralelepípedo reto com suas arestas congruentes. | |
| Sólido geométrico formado por todos os segmentos de reta paralelos à reta r que partem de um quadrado contido em $\alpha$ e findam em $\beta$, sendo que $\alpha$ e $\beta$ são planos paralelos, *r* uma reta perpendicular a $\alpha$ e os segmentos de reta possuem comprimento de acordo com o lado do quadrado. |  |

Fonte: Organizado pela autora.

No Quadro 13 os tratamentos sugeridos estão indicados por setas pontilhadas e as conversões apontadas por setas contínuas. Destaca-se que estas setas estão posiconadas em diferentes sentidos, pois, a título de exemplo, é possível partir de um das descrições do cubo e ir para uma de suas representações figurais, assim como, ver a figura do cubo e o descrevê-lo. Essa coordenação entre as representações de diferentes registros é “a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos” (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 470).

A aquisição do conhecimento matemático está condicionada a mobilização e coordenação de, ao menos dois, registros de representação semiótica. Neste sentido, a “conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática” (DUVAL, 2011, p. 100). No entanto, não basta explorar atividades que envolvam a conversão de representações em apenas um sentido, por exemplo, partir de um enunciado em língua natural e obter a resposta final em uma representação figural, ou seja, é necessário explorar também o sentido inverso. Conforme Duval (2004, p. 182, tradução nossa), a conversão inversa em Geometria “[...] é necessária para que os estudantes entrem nas restrições do discurso matemático e favoreçam a articulação com o registro das figuras”.

Entretanto, a atividade de converter uma representação em outra é menos imediata e simples do que se parece. Um estudante ao realizar uma conversão entre duas representações não garante que este saiba realizar a mesma operação de forma inversa. No caso da Geometria, esse fato se impõe em função das mudanças de dimensões que são realizadas em termos de registros, desta forma se constata a necessidade de aprender a ver neste campo da Matemática.

Os problemas em Geometria, conforme Duval (2012b, p. 119), possuem grande originalidade comparados a outros propostos em Matemática, pois exigem “uma forma de expressão que não repousa na oposição geralmente feita entre a língua natural e as línguas formalizadas”, entendendo que nesta área do conhecimento a visualização é um intermédio natural entre essas duas línguas.

Sendo assim, este campo do conhecimento requer essencialmente harmonia entre dois registros semióticos: o registro figural, para visualização de formas do espaço, e o discurso[17] por meio do registro em língua natural, para indicar propriedades e estabelecer muitas outras (DUVAL, 2004). O pesquisador enfatiza que, em Geometria, o desenvolvimento e a coordenação das representações associadas a estes registros precisam ser postas como

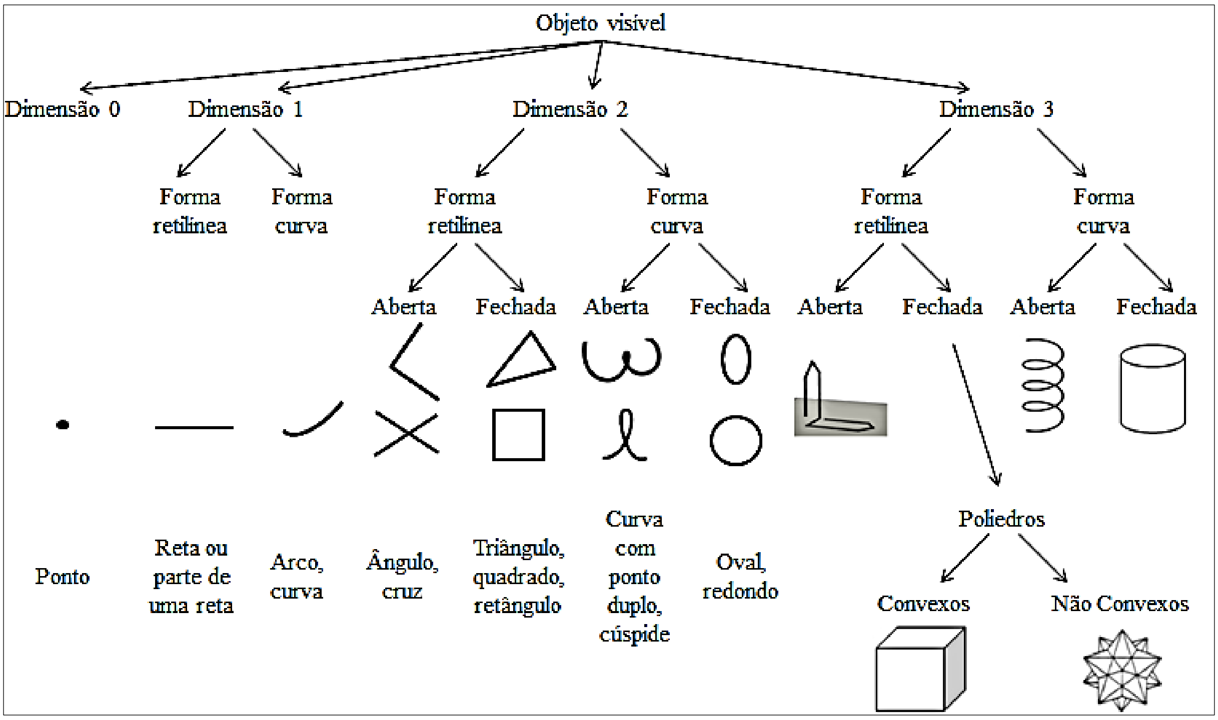
[17] Produção intencional de alguém (DUVAL, 2011).

objetivos de ensino, visto que são tão fundamentais quanto os próprios conceitos/conteúdos matemáticos, pois "essas condições cognitivas são, de certo modo, condições para aprender a aprender em geometria" (DUVAL, 2005, p. 8, tradução nossa).

As figuras geométricas apresentam três características que confirmam seu poder cognitivo (DUVAL, 2011): possuem valor intuitivo; proporcionam o reconhecimento quase imediato do objeto representado; e são construídas de forma instrumental (régua, compasso, *software*, entre outros). As duas primeiras estão relacionadas diretamente com a visualização e a terceira com as propriedades geométricas.

De acordo com o autor, a visão é o que proporciona acesso direto ao objeto, já a visualização está relacionada a identificação de unidades figurais de representação que são classificadas visualmente do tipo dimensional e qualitativa (Figura 3). De acordo com Duval (1999, p. 10, tradução nossa) a "[...] visualização é baseada na produção de uma representação semiótica" em que esta "mostra relações, ou melhor, organização de relações entre unidades representativas". Portanto, "Ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados." (DUVAL, 2011, p. 85). Desta maneira, a mudança de dimensão está no interior do olhar geométrico.

Figura 3 – Classificação das unidades figurais




Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 159) e Palles (2013, p. 41).

Pode-se dizer que só é uma figura, em Matemática, aquela que consiga ser configurada através de unidades figurais de uma dimensão menor que a sua. Por exemplo, um cubo possui três dimensões, mas esta figura geométrica é formada por faces quadradas de dimensão 2, estas faces contém segmentos de reta de dimensão 1 e os pontos que unem os segmentos de reta das faces possuem dimensão 0.

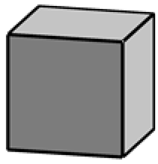
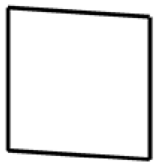
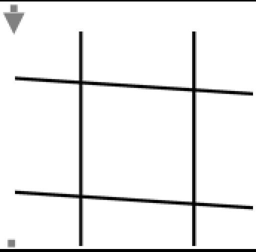
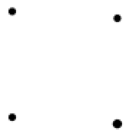
Aprender a ver em Geometria não é uma ação tão bem sucedida como para objetos concretos, logo requer um treinamento específico. Segundo Duval (2005), a maioria dos estudantes possui uma deficiência heurística de interpretação geométrica, isto é, uma incapacidade de ir além do primeiro olhar direcionado a figura. Arrisca-se mencionar duas hipóteses para a causa dessa deficiência. Uma delas é a de que "Não existe, por exemplo, nenhuma aprendizagem de regras de tratamento próprias do registro das figuras geométricas" (DUVAL, 2009, p. 62). Como já mencionado em seções anteriores, geralmente, os conceitos/conteúdos matemáticos são explorados com uma forte influência da mobilização de regras, tornando a resolução de atividades apenas uma mera reprodução de etapas.

A outra hipótese é que o "Vai e vem entre visualização e linguagem envolve um salto no número de dimensões para conhecer os objetos matemáticos que são representados dentro de cada registro" (DUVAL, 2005, p. 5, tradução nossa). Ao optar pelo registro em língua natural é evidente o predomínio das unidades figurais de dimensão 1 e 0 (reta, segmento de reta, ponto) utilizadas para fins de definição e descrição de figuras. Em contra partida, ao tratar de representações no registro figural, é notório a influência que as unidades figurais com maior dimensão causam. Destaca-se que na visualização de um objeto tridimensional, nem sempre as unidades figurais de três dimensões se sobressaem as demais, pois essa percepção depende da forma que a figura é apresentada, a qual, geralmente, é realizada por meio de uma representação em perspectiva.

O Quadro 14 expõe uma organização realizada por Duval (2005) para problematizar as relações dimensionais entre o objeto matemático em sua representação figural e em língua natural, tendo em vista a variação das dimensões[18]. As setas contínuas apresentam a articulação entre as duas representações estabelecidas e as setas pontilhadas representam, conforme o pesquisador, o "hiato dimensional".

[18] O numerador é a dimensão real do objeto e o denominador corresponde a dimensão em que esta representação é produzida.

Quadro 14 – Contradição cognitiva do conhecimento geométrico

| Número de dimensões | Visualização | Discurso |
|---|---|---|
| **3D / 2D** |  | Um **poliedro**. |
| **2D / 2D** |  | Um **polígono** que seja uma face de um poliedro ou figura obtida por um plano de intersecção de outro poliedro. |
| **1D / 2D** |  | **Retas** com relação entre elas (perpendiculares, paralelas, concorrentes, etc.) permitindo distinguir as propriedades do polígono e as retas sendo reduzidas aos **segmentos**. |
| **0D / 2D** |  | **Pontos** que podem ser a interseção de retas ou vértices de um polígono. Os quais não são pontos arbitrários que marcamos em linha reta ou em um plano e que aparecem independentes. |

Fonte: Adaptado de Duval (2005, p. 47).

Evidencia-se que nas conversões realizadas entre as representações figurais e em língua natural (setas contínuas) é necessária a capacidade de mobilizar a desconstrução dimensional das formas. De acordo com Duval (2005, p. 45, tradução nossa), “há um fenômeno cognitivo fundamental: a ruptura entre o número de dimensões consideradas para identificar uma unidade figural no que é visualizado e o número de dimensões consideradas para nomear os objetos e as relações que se identifica”. Em outras palavras, a conversão no sentido representação figural para língua natural há uma redução no número de dimensões, mas se a conversão for inversa há um aumento de dimensões.

Quanto ao “hiato dimensional”, este leva, no ensino de Geometria, a duas formas inversas: o “hiato dimensional que é intrínseco às abordagens geométricas e o hiato dimensional didático resultante da organização da aquisição do conhecimento” (DUVAL, 2005, p. 48, tradução nossa) Por exemplo, na maioria dos livros didáticos é necessário determinar de forma conceitual, primeiramente, ponto, retas, polígonos, nesta sequência, para então definir um poliedro, ou seja, partir da menor para a maior dimensão. Este tipo de ação, segundo Duval (2005, p. 47, tradução nossa), "é contrário ao longo e necessário trabalho de desconstrução dimensional para entrar na compreensão do conhecimento geométrico", pois na visualização, como já mencionado, é necessário identificar as unidades figurais, processo que é realizado partindo da maior para a menor dimensão.

As figuras geométricas podem ter diferentes compreensões dependendo de cada sujeito, ou seja, interpretações autônomas que são classificadas por Duval (2012b) em quatro tipos de apreensões, a saber, perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. Sublinha-se que não há apenas a mobilização de uma apreensão para a resolução de uma atividade, geralmente, estas são promovidas de forma conjunta em um mesmo problema.

A apreensão perceptiva refere-se a organização de elementos de uma figura. Ou seja, explora a interpretação das formas de uma representação geométrica impondo uma maneira comum de ver. Em GE, tem-se o obstáculo das representações em perspectiva, como mostrado na Figura 1 da seção 1.2, em que nem sempre é possível identificar a primeira vista um objeto tridimensional.

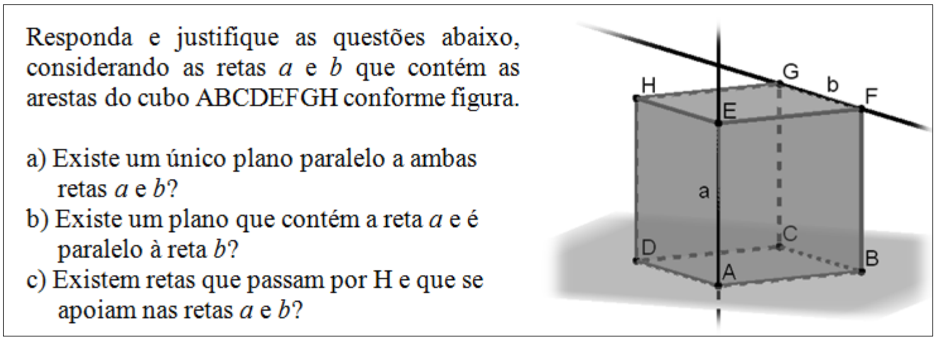
A "organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a esconder outras" (DUVAL, 2004, p. 169, tradução nossa). No entanto, ocasionalmente, as unidades figurais reconhecidas não são as necessárias para a resolução da atividade proposta, sendo assim, as "figuras podem ter um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado" (DUVAL, 2012a, p. 136).

Para Duval (2004, p. 168, tradução nossa), a apreensão perspectiva subordina-se a apreensão discursiva, pois é "necessária uma indicação verbal para ancorar a figura como uma representação de tal objeto matemático". Assim, "uma figura geométrica não se mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito" (DUVAL, 2012b, p. 133).

Desta maneira, a apreensão discursiva está relacionada a articulação entre registro figural e língua natural, ou seja, figura e enunciado das atividades em Geometria. Como afirma Duval (2012b, p. 135), esta apreensão "equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável", dito de outro modo, refere-se a compreensão das unidades figurais apresentadas no enunciado do problema a respeito da figura.

A Figura 4 expõe uma atividade em que, ao menos, é indispensável a mobilização de duas apreensões, a saber, discursiva e perceptiva. A apreensão discursiva é explorada quando em seu enunciado a figura exibida é definida como um cubo, desta forma é necessário que se saiba as características/propriedades desse sólido geométrico para que seja possível solucionar os itens a, b e c da atividade. Já a identificação da apreensão perceptiva é explícita, visto que ao verificar, por exemplo, apenas o enunciado não é possível compreender onde estão localizadas as retas *a* e *b*, assim como, o reconhecimento dos planos fundamentais para a resolução da questão.

Figura 4 – Atividade que propõe apreensão discursiva e perceptiva


Responda e justifique as questões abaixo, considerando as retas *a* e *b* que contém as arestas do cubo ABCDEFGH conforme figura.

a) Existe um único plano paralelo a ambas retas *a* e *b*?
b) Existe um plano que contém a reta *a* e é paralelo à reta *b*?
c) Existem retas que passam por H e que se apoiam nas retas *a* e *b*?



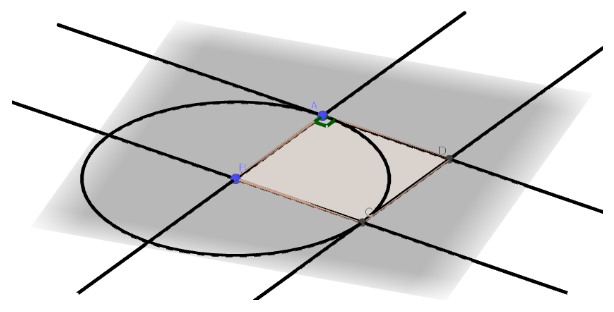
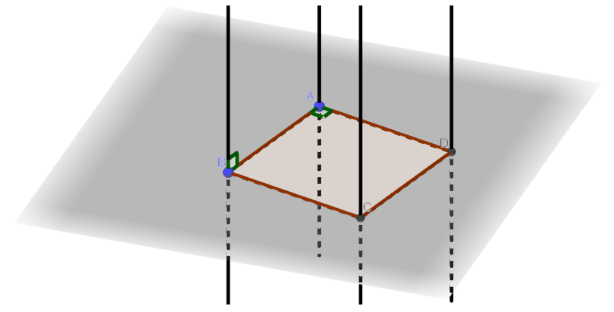
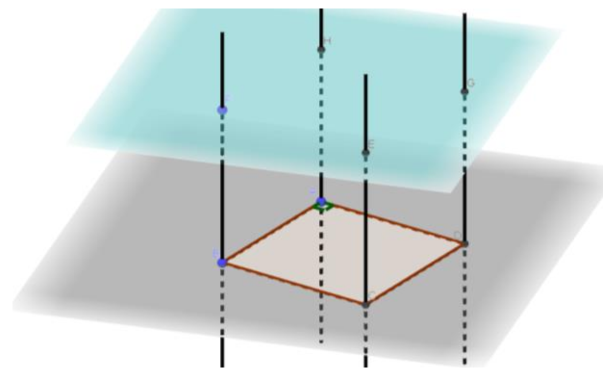
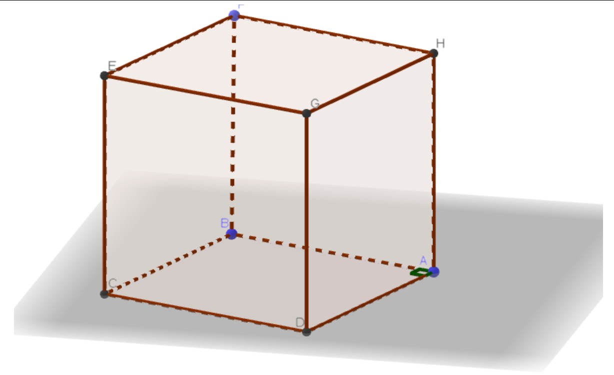
Fonte: Adaptado de Muraca (2011, p. 149-150).

Sublinha-se que as apreensões destacadas não são as únicas que podem ser mobilizadas para a resolução da atividade, estas foram evidenciadas visto que já estão definidas no texto. Mas a apreensão operatória, definida posteriormente, também pode ser utilizadas em termos da rotação mental do objeto matemático para uma melhor visão.

A apreensão sequencial está relacionada à atividade de descrição ou construção com o objetivo de reproduzir uma figura. Dessa maneira, para descrever um objeto matemático é necessário utilizar as unidades figurais de menor dimensão, como foi apresentado no Quadro 13 dessa seção ao tratar das representações em língua natural. Esta apreensão, também, é observada em atividades que propõem a construção de figuras geométricas em que é essencial seguir uma sequência de passos de modo que as propriedades estejam evidentes para definir o objeto.

Por exemplo, suponhamos que o enunciado de uma atividade seja: “Construa um cubo no *software* GeoGebra”, essa organização por meio do recurso tecnológico está apresentada no Quadro 15. Na realização da etapa 1 da construção do cubo, foi estruturada uma das faces do sólido tendo em vista suas propriedades, ou seja, construiu-se um quadrado por meio de retas paralelas e perpendiculares e uma circunferência utilizada para manter as arestas congruentes. A etapa 2 se deteve na construção de quatro retas distintas perpendiculares ao plano da face em que estas interceptam cada um dos vértices do quadrado.

Quadro 15 – Exemplo que propõe apreensão sequencial

| *Etapa 1* | *Etapa 2* |
| --- | --- |
|  |  |
| *Etapa 3* | *Etapa 4* |
|  |  |

Fonte: Organizado pela autora.

Na etapa 3 da construção, criou-se um plano paralelo ao da face inicial, em que a distância entre os planos foi determinada por meio de um segmento com comprimento igual ao lado do quadrado. Este segmento esta contido em uma das retas perpendiculares criada na etapa anterior, em que uma de suas extremidades é um dos vértice do quadrado. Dessa forma, a outra extremidade do segmento pertence a um plano paralelo ao quadrado. Nesta etapa ainda foi realizada a demarcação dos pontos de interseção entre o plano criado e as retas perpendiculares a ele. Na etapa 4 utilizou-se a ferramenta polígono disponibilizada pelo *software* para evidenciar o objeto criado.

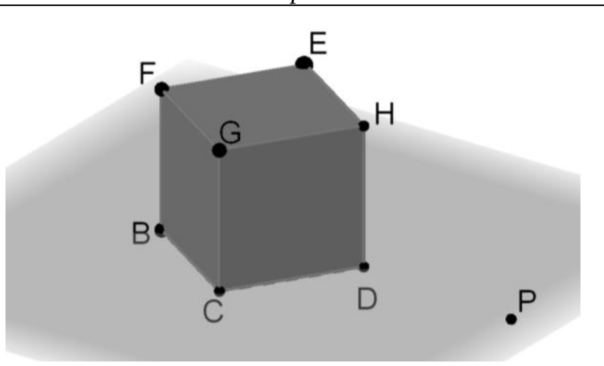
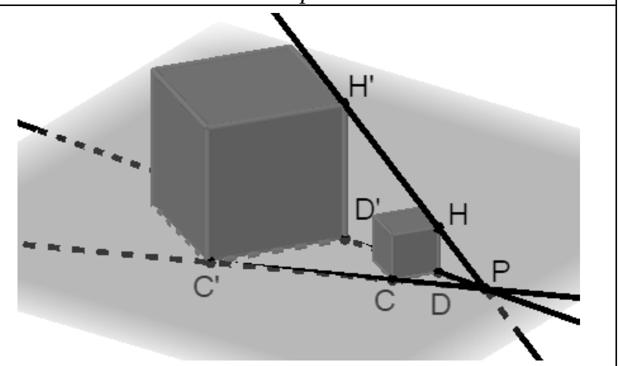
Salienta-se que, as etapas apresentadas para a construção do cubo foram organizadas para exemplificar de forma breve como pode ser mobilizada a apreensão sequencial, visto que omitiu-se algumas especificações e que esta é apenas uma das diversas maneiras possíveis de estruturar este objeto matemático. Destaca-se ainda que, o *software* utilizado dispõe de ferramentas como polígonos regulares, prisma e o “próprio cubo”, as quais proporcionam uma construção imediata do objeto, porém optou-se pela não utilização destas para ressaltar as unidades figurais mobilizadas.

A construção das figuras de forma instrumental ou por meio de um *software* proporciona a elaboração de observações, bem como verificações sobre suas propriedades. Entretanto, Duval (2005) aponta que é equivocado acreditar que construir figuras geométricas é suficiente para aprender a visualizar em Geometria. O pesquisador destaca que essas atividades requerem apenas uma sucessão de processos, tendo em vista o que pretende-se obter.

Conforme Duval (2009, p. 72), o poder heurístico das figuras em Geometria "se explica pelo fato que os tratamentos figurais que elas permitem efetuar não são computacionalmente equivalentes aos raciocínios dedutivos que estabelecem um teorema no registro de uma escrita simbólica ou na língua natural". Na busca por solucionar alguns problemas em Geometria, podem ser feitas diferentes modificações e reorganizações nas figuras, estas entendidas como tratamentos figurais que constituem a apreensão operatória, cujas modificações são classificadas como óticas, posicionais e mereológicas (DUVAL, 2012b).

A modificação ótica concerne na relação de tamanho da figura geométrica, ou seja, ela transforma uma figura em outra sem que nada mude em sua forma ou orientação no plano. Por exemplo, no Quadro 16, por meio da transformação geométrica homotetia pode-se transformar o cubo em outro semelhante.

Quadro 16 – Exemplo que propõe apreensão operatória ótica

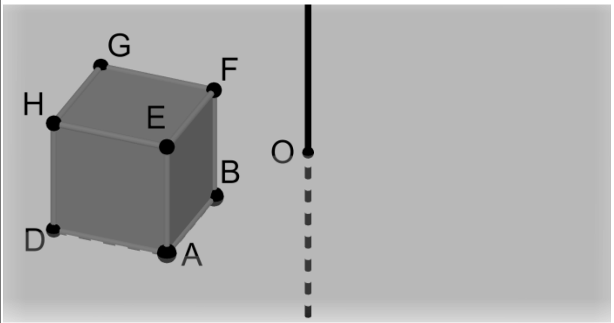
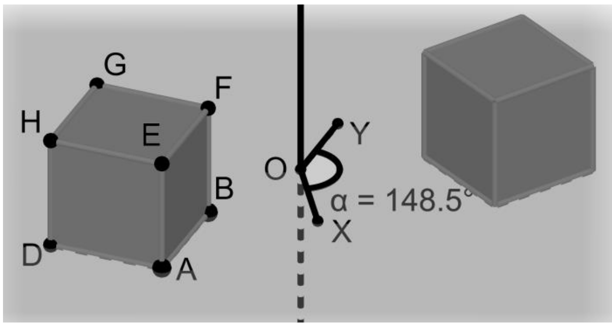
| *Etapa 1* | *Etapa 2* |
|---|---|
|  |  |

Fonte: Adaptado de Salazar (2009, p. 85).

No Quadro 16 na etapa 1, a figura inicial é o cubo ABCDEFGH, em que a face ABCD e o ponto P pertencem a um mesmo plano. A etapa 2 consiste na transformação geométrica do plano, homotetia, definida por seu centro P e pela razão três. Nesta etapa, tem-se a ampliação da figura inicial, criando assim uma nova figura, o cubo A’B’C’D’E’F’G’H’.

A modificação posicional está diretamente vinculada às transformações de rotação e translação de um objeto matemático, pois corresponde a atividade de deslocar uma figura em relação a um referencial. O Quadro 17 expõe um exemplo desse tratamento figural por meio da rotação de um cubo, tendo como objeto de referência uma reta.

Quadro 17 – Exemplo que propõe apreensão operatória posicional

| *Etapa 1* | *Etapa 2* |
|---|---|
|  |  |

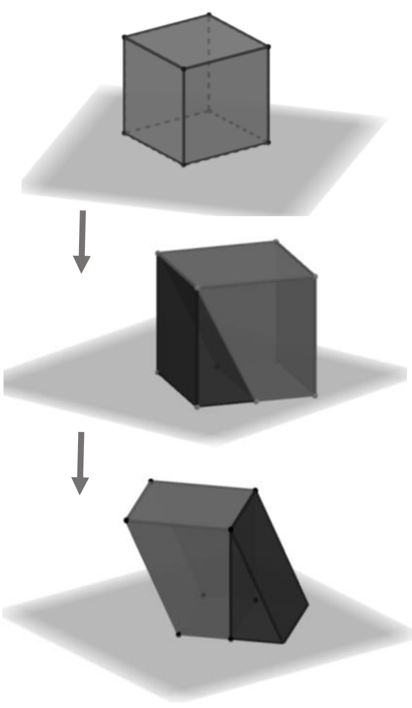
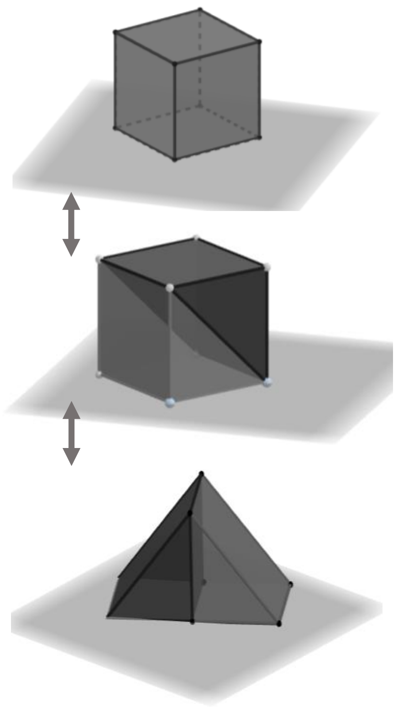
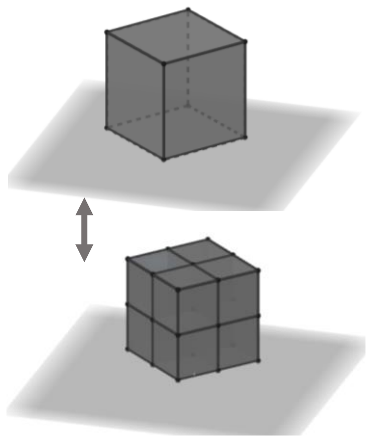
Fonte: Adaptado de Salazar (2009, p. 86).

Na etapa 1 do Quadro 17, tem-se a figura inicial do cubo ABCDEFGH e a reta *r* em que seu ponto O pertence ao mesmo plano que a face ABCD do cubo. Na etapa 2, a figura inicial é deslocada, utilizando a transformação geométrica do plano, rotação, em torno da reta *r*, eixo de rotação, conforme a abertura do ângulo XÔY, desta forma estabelecendo um novo posicionamento do cubo.

A modificação mereológica, ou simplesmente, reconfiguração, esta relacionada à divisão e/ou organização de uma figura em outras de mesma dimensão (nD[19]→nD). Esta modificação pode ser classificada de três formas, apresentadas e exemplificadas no Quadro 18. Uma das possíveis modificações que podem ser realizadas por meio da apreensão operatória mereológica é a heterogênea. Esta consiste em subdividir uma figura em diferentes partes, sendo que estas são distintas do formato inicial da figura e também distintas entre si, e é por este motivo que Duval (2005) as classifica como decomposições não visualmente reversíveis (setas somente em um sentido na exemplificação apresentada no Quadro 18), isto é, após a realização das partições, não é tão simples retornar a figura inicial.

[19] Número de dimensões.

Quadro 18 – Exemplo que propõe apreensão operatória mereológica

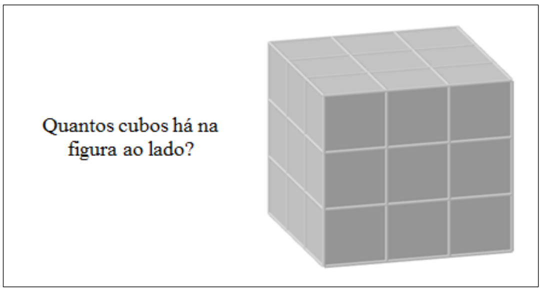
| **Modificação heterogênea** | **Modificação homogênea** | **Modificação estritamente homogênea** |
|---|---|---|
| Decomposta em figuras diferentes da forma inicial. | Decomposta em figuras diferentes da forma inicial, mas iguais entre si. | Decomposta em figuras de mesma forma inicial. |
|  |  |  |

Fonte: Adaptado de Duval (2005, p. 21).

Existem também as modificações homogêneas, nas quais as subfiguras formadas por essa decomposição são distintas apenas da figura inicial, mas iguais entre si. Já a modificação estritamente homogênea, possui a característica de obter suas subfiguras iguais a forma da figura inicial. Salienta-se que as decomposições homogêneas são classificadas como transformações visualmente reversíveis, visto que, conforme Duval (2005), podem ser reorganizadas a forma inicial à mera visão da figura, por este fato as setas contidas em seus exemplos possuem duplo sentido.

Duval (2005, p. 22, grifo do autor, tradução nossa) afirma que as modificações mereológicas podem ser realizadas "*fisicamente* (cortando e remontando as peças obtidas como para um quebra-cabeça), *graficamente* (adicionando o que chamamos de linhas reorganizadoras acima da figura) ou mesmo *simplesmente olhando* (e não 'mentalmente')". A Figura 5 propõe um exemplo de atividade que pode propiciar a apreensão operatória mereológica com decomposição estritamente homogênea e heterogênea, assim como também pode mobilizar a apreensão perceptiva e discursiva.

Figura 5 – Exemplo que propõe apreensão operatória mereológica com decomposição estritamente homogênea e heterogênea, apreensão perceptiva e discursiva

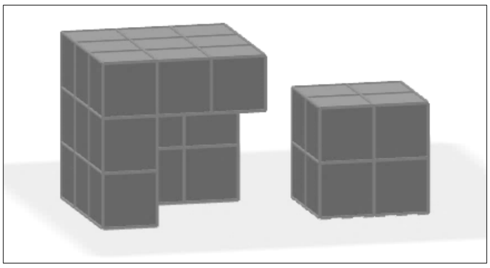



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 169).

A atividade proposta na Figura 5 pode ser solucionada, considerando que a representação configura um objeto tridimensional, “simplesmente olhando” e recorrendo as características do cubo. A percepção que se impõe é a de um cubo formado por outros cubos menores, desta forma a resposta, a primeira vista, poderia ser a de 28 cubos, ou seja, a figura inicial do cubo mais os 27 cubos menores que a compõe. Sendo assim, pode-se mobilizar a apreensão operatória mereológica com decomposição estritamente homogênea, pois as partições realizadas são iguais a figura inicial.

No entanto, temos também outras possibilidades de cubos, como, por exemplo, a combinação exposta na Figura 6, na qual foi considerado um cubo de dimensão 2x2. Desse modo, se realizarmos as outras combinações existentes de cubos 2x2, obtemos um total de oito cubos desta dimensão.

Figura 6 – Exemplo que propõe apreensão operatória mereológica com decomposição heterogênea



Fonte: Organizado pela autora.

De acordo com Duval (2004, p. 165, tradução nossa) cada uma das modificações que podem ser realizadas por meio da mobilização da apreensão operatória "promovem operações específicas e constituem a produtividade heurística das figuras". Para o autor, a decomposição mereológica é assumida como uma das operações fundamentais para se obter a compreensão matemática das figuras, mas menciona que "[...] quando as hipóteses incluem números como medidas de lados ou segmentos, a apreensão operatória é [na maioria das vezes] neutralizada e a figura cumpre apenas uma função ilustrativa ou de suporte" (DUVAL, 1999, p. 12, tradução nossa).

A outra operação dita como fundamental é a desconstrução dimensional (nD→(n-1)D) de figuras geométricas, que conforme Duval (2004), constitui o mecanismo cognitivo da visualização em Matemática, pois a mudança de dimensões esta no centro do olhar geométrico. Para o pesquisador essas operações puramente figurais são as que "permitem transformar qualquer figura em outra com a finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação" (DUVAL, 2011, p.85). A tomada de consciência desses tratamentos figurais possibilita "entrar na maneira matemática de ver em geometria".

Enquanto as modificações mereológicas estão estreitamente relacionadas à percepção visual, a desconstrução dimensional está inteiramente subordinada ao discurso. Desta forma, Duval (2005, p. 23-24, tradução nossa) afirma que, "essa desconstrução dimensional das formas é o pré-requesito para uma compreensão efetiva de qualquer enunciado de propriedades geométricas". A relevância dada a essa operação é justificada posto que

> [...] uma figura aparentemente reduzida a uma única unidade de dimensão 2 (um quadrado, por exemplo), só é uma figura, em matemática, à condição de que seja considerada como uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 (os segmentos que formam os lados). Isso porque são as relações (paralelismo, simetria, tangência, ...) entre as unidades figurais elementares que constituem o conteúdo pertinente de uma figura geométrica. (DUVAL, 2004, p. 159, tradução nossa)

Assim, para Duval (2016), os estudantes além de construir figuras geométricas devem também apreender a desconstruí-las, mesmo que utilizem como recurso um programa computacional. Sendo assim, evidencia-se que a desconstrução dimensional não pode ser materializada visto a necessidade de representação de diferentes dimensões, desta forma, os *software* de Geometria Dinâmica podem ser um recurso aliado neste sentido.

Ao referir-se a *software*, mesmo apresentando pouquíssimas discussões, Duval (2011) menciona que, este recurso não proporciona um “novo” registro de representação, pois exibe as mesmas representações realizadas no papel para uma apreensão visual. Pois, por exemplo, ver uma figura no papel ou no monitor exigirá que sejam realizados os mesmos tratamentos figurais. Mas, nesta pesquisa, entende-se que se pode utilizar o dinamismo da representação produzida por um *software* para auxiliar na visualização do objeto, baseando-se no estudo de Salazar (2009), será utilizado o termo “registro figural dinâmico” ao se tratar desse tipo de representação.

A utilização de *software* de Geometria Dinâmica possibilita a aceleração dos tratamentos figurais por meio das funções arrastamento e manipulação direta que proporcionam o movimento, a mudança de posição, de forma e de medidas da figura, são assumidas como ponto positivo a ser considerado no processo de ensino e aprendizagem, especialmente, ao trabalhar com GE. Visto que as representações em perspectiva dos objetos tridimensionais, conforme Duval (2004), causam duas limitações, uma relacionada a não variação de ponto de vista e a outra devido a ausência da terceira dimensão, pois pode levar a uma visão ambígua da figura. O autor, ainda, destaca que as figuras geométricas, bem como os gráficos, quando utilizado esse recurso, “tornam-se manipuláveis como objetos reais” (DUVAL, 2011, p. 137).

Ao mencionar objetos reais, torna-se necessário evidenciar o entendimento desse recurso sob o olhar da teoria dos RRS. Duval (2016, p. 32) compreende que, objetos concretos “são aqueles cujo acesso é multissensorial”, isto é, aqueles que possibilitam ver e tocar, mas afirma que “não se pode falar em invariância para esses objetos”. Sendo assim, consegue-se apenas realizar uma descrição do objeto, jamais defini-lo.

Desta forma, os materiais manipuláveis, que serão utilizados, nesta pesquisa, a saber, sólidos geométricos construídos com papel ou canudos, não são interpretados como um tipo de registro figural, pois estes não possibilitam “operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações” (DUVAL, 2011, p. 97). Entende-se então que materiais manipuláveis não são representações semióticas, mas podem desencadear representações figurais. Sendo assim, será adotado o termo registro material para tratar deste tipo de recurso.

Considerando a necessidade do desenvolvimento do pensamento geométrico para o ensino e aprendizagem em GE, no intuito de contribuir neste processo, esta pesquisa de mestrado utilizará em suas análises os entendimentos apresentados sobre a teoria dos RRS, sendo mais específico, transformações cognitivas, apreensões e tratamentos figurais.

# 4 ANÁLISE DE CONTEÚDO DE OBRAS REFERENTES À GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo são apresentados os dados produzidos a partir da Análise de Conteúdo de bibliografias mencionadas em projetos pedagógicos de cursos presenciais de Matemática Licenciatura, cadastrados na página digital do e-MEC, mapeados no final do primeiro semestre de 2018.

## 4.1 PRÉ-ANÁLISE DAS OBRAS

Nesta etapa, buscou-se investigar projetos pedagógicos de cursos presenciais de Matemática Licenciatura em instituições públicas brasileiras que estivessem em atividade. Esta parte da pesquisa destina-se a identificação das obras mais evidenciadas em ementas de componentes curriculares referentes ao ensino e aprendizagem de conceitos/conteúdos de Geometria Espacial. A partir desta verificação, buscou-se analisar como são apresentadas as atividades deste assunto levando em consideração os entendimentos baseados na teoria dos RRS. Para (re)organizar algumas das atividades identificadas para a elaboração do bloco de tarefas a ser desenvolvido com licenciandos em Matemática.

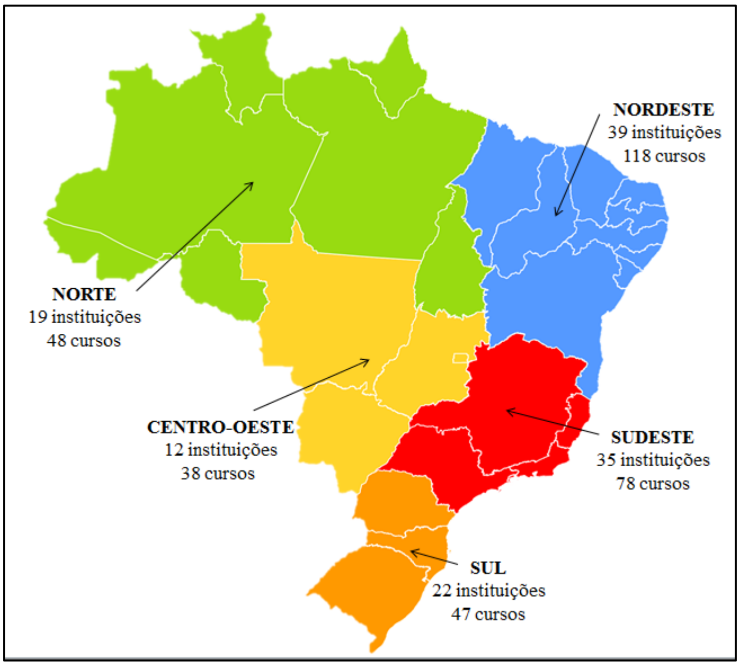
Na página digital do e-MEC[20], a qual contém o cadastro das instituições de Ensino Superior e seus respectivos cursos foi realizada uma "consulta interativa"[21] em cada uma das unidades federativas (estados e distrito federal) brasileiras. A pesquisa buscou por cursos presenciais de Matemática Licenciatura em atividade e gratuitos, ocorrendo entre os dias 28 de junho a 09 de julho do ano de 2018.

Identificou-se 329 cursos vinculados a 127 instituições de Ensino Superior, distribuídas em todas unidades federativas brasileiras. O curso ofertado pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) é o mais antigo em atividade, tendo seu início no ano de 1931. Salienta-se que a criação dos cursos de formação de professores de Matemática foi identificada até o ano consultado, ou seja, 2018. O ápice de abertura destes cursos foi entre os anos de 2009 a 2011, com o início de 85 cursos, os quais representam aproximadamente 25,8% do total mapeado, sendo em sua maioria (63 cursos) ofertados por instituições federais de ensino.

[20] Página organizada pelo ministério da Educação, na qual instituições de educação superior realizam o credenciamento, buscam autorização, reconhecimento e renovação de reconhecimento de cursos.
[21] Opção disponibilizada pelo site.

O resultado apresentado pode ter sido influenciado pelo decreto nº 6.096, de 24 de abril de 2007, o qual instituiu o Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais (REUNI), na busca pela ampliação do acesso e a permanência na Educação Superior, ou seja, o aumento de vagas e a criação de novos cursos deste nível de ensino. A Figura 7 apresenta a distribuição por regiões brasileiras das instituições e cursos mapeados.

Figura 7 – Instituições e cursos mapeados em regiões brasileiras




Fonte: Dados da pesquisa.

A região sudeste, apesar de ser a região do país com a maior quantidade de habitantes, com cerca de 41,9% da população brasileira[22], apresenta, aproximadamente, 23,7% dos cursos mapeados. A região nordeste é a que oferta a maioria dos cursos de Matemática Licenciatura gratuitamente de forma presencial, mesmo esta não sendo a maior em área territorial e com uma população de 27,6% dos habitantes do Brasil, oferta 35,9% destes cursos.

Cabe destacar que, a metade dos cursos localizados na região nordeste são oferecidos por instituições federais de ensino. Diante desse resultado, destaca-se que dentre 329 cursos

[22] Dados estimados pelo site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, acessado pelo link: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/por-cidade-estado-estatisticas.html?t=destaques&c=Brasil> em agosto de 2018.

mapeados, 205 são ofertados por instituições federais, 121 por instituições estaduais e três por instituições municipais.

Na busca por refinar os dados apresentados, optou-se por investigar os cursos de Matemática Licenciatura presenciais oferecidos por instituições federais, visto que estes representam, aproximadamente, 62,3% dos cursos desta área no Brasil, são mantidos pelo mesmo órgão público, e estão localizados, ao menos um, em cada unidade federativa.

Prosseguindo na pesquisa, acessou-se os *sites* dos cursos selecionados, na busca de seus projetos pedagógicos de curso (PPC), visto que estes são documentos públicos e devem estar disponíveis para acesso. Constatou-se, dentre os 205 cursos mapeados anteriormente, um total de 113 PPC disponíveis de forma *online* no *site* dos cursos, estes dados estão organizados no Quadro 19, segundo suas respectivas unidades federativas.

Quadro 19 – Organização por unidades federativas dos cursos de Matemática Licenciatura presenciais em atividade ofertados por instituições federais

| **Região brasileira** | **Unidade federativa** | **Quantidade de instituições de Ensino Superior** | **Quantidade de cursos ofertados** | **Quantidade de cursos ofertados que dispõem seu PPC *online*** |
|---|---|---|---|---|
| Centro-Oeste | Distrito Federal | 2 | 3 | 1 |
| | Goiás | 4 | 17 | 7 |
| | Mato Grosso | 2 | 5 | 3 |
| | Mato Grosso do Sul | 2 | 7 | 6 |
| Nordeste | Alagoas | 2 | 3 | 3 |
| | Bahia | 4 | 10 | 5 |
| | Ceará | 4 | 9 | 7 |
| | Maranhão | 2 | 6 | 2 |
| | Paraíba | 3 | 7 | 2 |
| | Pernambuco | 3 | 4 | 2 |
| | Piauí | 2 | 11 | 2 |
| | Rio Grande do Norte | 3 | 6 | 2 |
| | Sergipe | 2 | 3 | 2 |
| Norte | Acre | 2 | 3 | 0 |
| | Amazonas | 2 | 2 | 0 |
| | Amapá | 2 | 2 | 0 |
| | Pará | 4 | 10 | 2 |
| | Rondônia | 2 | 3 | 2 |
| | Roraima | 2 | 2 | 2 |
| | Tocantins | 2 | 6 | 0 |
| Sudeste | Espírito Santo | 2 | 5 | 3 |
| | Minas Gerais | 16 | 25 | 16 |
| | Rio de Janeiro | 6 | 10 | 7 |
| | São Paulo | 3 | 15 | 14 |
| Sul | Paraná | 3 | 7 | 2 |
| | Rio Grande do Sul | 7 | 17 | 14 |
| | Santa Catarina | 3 | 7 | 7 |

Fonte: Dados da pesquisa.

As regiões centro-oeste, sul e norte possuem, respectivamente, 15,6%, 15,12% e 13,65% dos cursos ofertados por instituições federais. No entanto, mais uma vez, as regiões brasileiras que se destacam são a sudeste e nordeste, com, respectivamente, a maior quantidade de instituições federais, 27 ao total, e a maioria dos cursos de formação inicial de professores de Matemática, 59 na totalidade.

Dentre os 59 cursos mapeados na região nordeste, nove são oferecidos por Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia (IF) que estão localizados com uma unidade em cada estado pertencente a esta região[23]. Tendo em vista que, identificou-se 81 instituições federais que ofertam cursos de formação inicial de professores de Matemática no Brasil, destaca-se que cerca de 39,5% destas instituições são IF, 32 ao total. Sendo assim, estados como: Goiás, Minas Gerais, Rio de Janeiro e Rio Grande do Sul, possuem mais de uma instituição como esta.

Evidencia-se que apenas os estados do Paraná e Mato Grosso do Sul não possuem IF que ofertam curso de Matemática Licenciatura. Uma hipótese a ser estabelecida para a não existência de um curso de formação inicial de professores de Matemática no IF de Mato Grosso do Sul, é que a Universidade Estadual e Federal deste estado, juntas oferecem nove cursos, dentre os quais sete são ofertados nas mesmas cidades em que os institutos possuem sede. Destaca-se, ainda, que o curso mais recente[24] ofertado dentre os citados, foi criado em 2009 no mesmo ano em que o IF em questão.

O estado de Minas Gerais, pertencente a região sudeste, abrange 16 instituições federais que ofertam cursos de formação inicial de professores de Matemática de forma presencial. Este fato resulta no maior número de cursos oferecidos em uma unidade federativa brasileira, 25 cursos ao total, distribuídos em 11 universidades e cinco IF.

Salienta-se que 16 dos cursos mapeados no estado de Minas Gerais possuem seus PPC disponíveis para acesso de forma *online* em seus *sites*. Este dado, juntamente com os 14 cursos do estado de São Paulo, contribuíram para que a região sudeste seja a que apresentou a maior quantidade de cursos Matemática Licenciatura, ofertados presencialmente por instituições federais, com seus PPC disponíveis em seus *sites*, com a representatividade de 35,7%.

O estado do Rio Grande do Sul encontra-se após o estado de Minas Gerais em quantidade de instituições federais mapeadas e de cursos de Licenciatura em Matemática,

[23] Alagoas; Bahia; Ceará; Maranhão; Paraíba; Pernambuco; Piauí; Rio Grande do Norte; Sergipe.
[24] Ofertado pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus Ponta Porã.

ofertados de forma presencial. Desta forma, é o segundo estado brasileiro a proporcionar a formação de novos professores nesta área de ensino.

Dentre os cursos de formação inicial de professores de Matemática ofertados em instituições federais, foi identificado um total de 55,1% dos PPC destes. Estes documentos objetivam apresentar o curso e sua organização, expondo, em sua maioria, itens como: dados de identificação do curso; objetivos; perfil do egresso; campo de atuação profissional; corpo docente; organização curricular, entre outros.

Tendo como objetivo desta etapa da Análise de Conteúdo identificar e selecionar bibliografias em comum entre os componentes curriculares específicos da Matemática e os de ensino e aprendizagem, ambos relacionadas à Geometria Espacial, recorreu-se aos PPC que apresentam ementa/objetivos e bibliografia(s) para cada um dos componentes curriculares ofertados durante o curso. Desta forma, a análise prosseguiu com os dados de 95 PPC, pois 18 dos cursos mapeados anteriormente não cumpriram com o requisito estabelecido, ou seja, não apresentaram ementa/objetivos e bibliografia(s).

Na busca por identificar os componentes específicos da Matemática e os de ensino e aprendizagem que apresentassem algum conceito/conteúdo relacionado à Geometria Espacial, optou-se por utilizar a ferramenta de pesquisa disponibilizada por programas leitores de arquivos em formato *pdf*. Nesta ferramenta aplicou-se os descritores: “geometri”, o qual associou termos como geometria e geométrico(s); “espaço e forma” e “grandezas e medidas”, por se tratarem de eixos/blocos de conteúdos empregados pelos PCN e BNCC que envolvem conceitos/conteúdos relacionados ao campo da Geometria. Cabe destacar que, a busca com os descritores foi realizada no nome, ementa e objetivos dos componentes curriculares contidos nos PPC.

Localizou-se 645 componentes curriculares específicos da Matemática (Quadro 20), os quais foram categorizados conforme os conceitos/conteúdos que estavam propostos em sua ementa, como: Desenho Geométrico; Desenho Geométrico e Geometria Descritiva; Desenho Geométrico e Geometria Plana; Geometria Analítica; Geometria Descritiva; Geometria Diferencial; Geometria Espacial; Geometria Fractal; Geometrias Não-Euclidianas; Geometria Plana; Geometria Plana e Espacial; Outros. Destaca-se que esta última categoria, “Outros”, abrange componentes curriculares que possuem como objetivo explorar distintos conceitos/conteúdos específicos da Matemática[25], os quais complementam a formação inicial de professores desta área.

[25] Matemática Básica; Variáveis Complexas; Física; Álgebra Linear; Matemática Discreta; Cálculo Diferencial e Integral; Libras; Probabilidade e Estatística; Trigonometria; entre outras.

Quadro 20 – Organização dos componentes curriculares mapeados com a utilização dos descritores

| Componentes Curriculares | | Obrigatórios | Optativos | Total |
|---|---|---|---|---|
| Específicos da Matemática | Desenho Geométrico | 42 | 9 | 51 |
| | Desenho Geométrico e Geometria Descritiva | 6 | 1 | 7 |
| | Desenho Geométrico e Geometria Plana | 10 | 0 | 10 |
| | Geometria Analítica | 120 | 0 | 120 |
| | Geometria Descritiva | 4 | 1 | 5 |
| | Geometria Diferencial | 4 | 15 | 19 |
| | Geometria Dinâmica | 2 | 0 | 2 |
| | Geometria Espacial | 72 | 0 | 72 |
| | Geometria Fractal | 0 | 1 | 1 |
| | Geometrias Não-Euclidianas | 16 | 4 | 20 |
| | Geometria Plana | 80 | 1 | 81 |
| | Geometria Plana e Espacial | 19 | 0 | 19 |
| | Outros | 202 | 36 | 238 |
| Ensino e Aprendizagem | | 90 | 8 | 98 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os componentes curriculares classificados como “Outros”, foram mapeados por, na maioria dos casos, apresentar em sua ementa o descritor “geometri”, por exemplo, em “Cálculo Diferencial e Integral” há em sua ementa a interpretação geométrica de conceitos/conteúdos como: limite, derivada e integral; “Matemática Discreta” que propõe o estudo de Progressões Geométricas; “Libras” apresenta o ensino de sinais básicos e a expansão do vocabulário, dentre os quais estão os conceitos geométricos.

O campo específico da Geometria que obteve maior ênfase nos PPC mapeados foi a Geometria Analítica. Nesta as representações mais utilizadas são as algébricas e gráficas, tendo em vista os conceitos/conteúdos a serem explorados[26], essa constatação foi realizada diante do exposto em suas ementas e/ou objetivos. São 120 componentes curriculares obrigatórios referentes à Geometria Analítica, distribuídos entre os 95 PPC mapeados. Em outras palavras, 24 cursos ofertam dois componentes curriculares com conceitos/conteúdos específicos de Geometria Analítica e o curso oferecido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense/RJ, oferta três componentes curriculares obrigatórios referentes a esse campo da Geometria, a saber: Geometria Analítica I (Vetores no Plano, reta no $\mathbb{R}^2$, circunferência no $\mathbb{R}^2$); Geometria Analítica II (elipse, hipérbole, parábola, equações de

[26] Geralmente, coordenadas cartesianas, vetores no plano e no espaço, posições relativas entre retas e planos, lugares geométricos, entre outros.

retas e cônicas em coordenadas polares); Geometria Analítica III (vetores no espaço, plano, reta no $\mathbb{R}^3$, superfícies quádricas).

O componente curricular referente a conceitos/conteúdos da Geometria Fractal foi identificado na Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui/RS, de forma optativa. O qual, além de propor o estudo de conceitos/conteúdos deste campo, apresenta a proposta de elaboração de atividades para a inserção desta Geometria na Educação Básica. A Geometria Dinâmica como componente curricular foi identificada na Universidade Federal do Rio Grande/RS, esta é proposta com carga horária de 90h, distribuídas em dois componentes curriculares obrigatórios que visam explorar conceitos/conteúdos de Geometria Plana e Espacial por meio de ferramentas que tornem a Geometria dinâmica.

A Geometria Diferencial, apesar de apresentar 19 componentes curriculares, 15 destes são ofertados de forma optativa, ou seja, apenas quatro cursos mapeados exploram de forma exclusiva e obrigatória conceitos/conteúdos deste campo da Geometria. Os cursos mencionados são ofertados pelas seguintes instituições de ensino: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano/GO; Universidade Federal de Goiás/GO; Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira/CE; Universidade Federal de Roraima/RR.

A Geometria Descritiva, campo que se destina ao estudo de figuras espaciais sobre o plano, ou seja, figuras 3D representadas em 2D, mesmo quando aliada ao Desenho Geométrico, foi a menos enfatizada, após a Geometria Fractal e a Geometria Dinâmica, apresentando apenas 12 componentes curriculares distribuídos em 11 instituições federais. Sublinha-se que a discussão realizada em aulas referentes à Geometria Descritiva pode estar diretamente relacionada a uma seção de componentes curriculares de Desenho Geométrico, Sendo assim, não se pode concluir que esta não é abordada ao longo do curso de formação quando não mapeada em um componente específico a ela.

Obteve-se 68 componentes curriculares de Desenho Geométrico, reunindo os ofertados juntamente com conceitos/conteúdos de Geometria Descritiva ou Geometria Plana, o que permite concluir que este componente curricular não é oferecido em todos os cursos mapeados. Outro fato que precisa ser evidenciado é o de que, mesmo diante desta informação, não pode-se afirmar que os conceitos/conteúdos referentes a este campo da Geometria não são trabalhados durante o decorrer do curso, pois podem estar distribuídos em diferentes componentes curriculares, como, por exemplo, Geometria Plana e/ou Espacial na construção de objetos matemáticos por meio de suas propriedades.

Assuntos específicos da Geometria Plana, os quais localizam-se nas categorias "Desenho Geométrico e Geometria Plana", "Geometria Plana", "Geometria Plana e Espacial", são discutidos em 110 componentes curriculares, distribuídos em 94 instituições federais, isto é, apenas uma instituição da região centro-oeste do Brasil não aborda esse campo da Geometria de forma específica. Salienta-se que esta instituição, em relação a componentes curriculares específicos de conceitos/conteúdos da Geometria, oferta apenas um referentes a Geometria Analítica e um a Desenho Geométrico.

Os conceitos/conteúdos relacionados à GE foram explorados, de forma específica, em 91 componentes curriculares, nestes foram contabilizados, também, os que estudam conceitos/conteúdos de Geometria Plana de forma conjunta. Estes estão distribuídos em 85 cursos de formação inicial de professores, isto é, a GE não é explorada de forma específica em oito dos cursos mapeados, nesta parte da pesquisa. No entanto, há quatro cursos[27] que oferecem dois componentes curriculares específicos de Geometria Espacial.

Constatou-se que, aproximadamente, 70,3% dos componentes mapeados são ofertados no início do curso, ou seja, entre 1º e 3º semestres. Também, foi possível verificar que, cerca de 49% dos dados mapeados, apresentam o pré-requisito de um componente curricular de Geometria Plana, cabe destacar que, nesta apuração percentual, foram desconsiderados os componentes curriculares ofertados no 1º semestre e os que estão relacionados a conceitos/conteúdos de Geometria Plana.

Diante das ementas verificadas, pôde-se observar que os componentes curriculares referentes à GE abordam, geralmente, assuntos relacionados a posições relativas entre retas, planos e reta e plano, áreas e volumes de sólidos geométricos, usualmente nesta sequência. Os objetivos, expostos nos PPC referentes a esta área da Geometria, foram identificados em 41 componentes curriculares, entre esses apenas oito destacam o desenvolvimento da habilidade de visualização de figuras no espaço e/ou em perspectiva, em outras palavras, buscam explorar aspectos visuais da Geometria Espacial. Ressalta-se que essa habilidade é evidenciada em documentos curriculares da Educação Básica, como destacado no Capítulo 1 desta pesquisa, dada a importância de seu desenvolvimento. Sendo assim, torna-se relevante explorar o desenvolvimento desta competência na formação inicial de professores de Matemática.

[27] Estes cursos são ofertados pelas seguintes instituições: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense/RJ; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim/ES; Universidade Federal de Viçosa, campus Viçosa/MG; Universidade Federal de Mato Grosso, campus Rondonópolis/MT.

Constatou-se que apenas seis componentes curriculares que exploram conceitos/conteúdos de Geometria Espacial propõem em seus objetivos a discussão sobre a abordagem deste campo da Geometria na Educação Básica. Por se tratar de cursos de Matemática Licenciatura, pode-se pensar que ocorra em componentes curriculares referentes ao ensino e aprendizagem de conceitos/conteúdos de Geometria. No entanto, entre os 95 PPC analisados, apenas 44,2% apresentaram algum componente curricular referente a este assunto por meio dos descritores utilizados. Esta informação é um fato preocupante, considerando as inúmeras constatações de dificuldades apresentadas tanto por professores como por estudantes de qualquer nível de ensino (BARBOSA, 2017; KUMMER, 2018).

No intuito de verificar quais são as obras referentes a GE mais utilizadas nos cursos, organizou-se uma tabela com as obras mencionadas nas bibliografias básicas e complementares dos componentes curriculares relacionados as classificações: “Desenho Geométrico”, “Desenho Geométrico e Geometria Descritiva”, “Geometria Descritiva”, “Geometria Dinâmica”, “Geometria Espacial” e “Geometria Plana e Espacial”, visto que estes encontram-se relacionados ao tema da pesquisa. Nesta busca localizou-se um total de 266 obras distintas, desconsiderando a discriminação entre diferentes edições de um mesmo livro que possuí título e autores idênticos.

Posteriormente, de posse dos 98 componentes curriculares relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria mapeados por meio dos descritores, realizou-se uma “comparação” entre as bibliografias básicas e complementares mencionadas nestes e as obras já identificadas na etapa anterior, com o intuito de verificar os títulos em comum.

Desta forma, apontou-se 50 obras (Apêndice F) em comum aos componentes curriculares específicos da Matemática e os de ensino e aprendizagem, ambos relacionados à Geometria. É necessário destacar que, entre essas obras em comum haviam revistas da área da Educação e Educação Matemática e alguns títulos relacionados a outros conceitos/conteúdos da Geometria, pois a pesquisa foi realizada em componentes curriculares que abrangiam, por exemplo, a Geometria Plana e Espacial, concomitantemente, estas obras foram desconsideradas (Apêndice G).

O Quadro 21 expõe as 11 referências mapeadas que obtiveram cinco ou mais menções nos componentes curriculares de ensino e aprendizagem referentes à Geometria, tendo em vista que o foco deste capítulo é explorar obras que receberam mais ênfase no intuito de verificar o que é evidenciado nestas acerca de conceitos/conteúdos de Geometria Espacial, bem como, apresentar suas aproximações e distanciamentos da teoria dos RRS.

Quadro 21 – Menções das obras nos componentes curriculares de ensino e aprendizagem mapeados

| **Obra** | **Bibliografia** | | **Total** |
|---|---|---|---|
| | **Básica** | **Complementar** | |
| BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com cabri-géomètre II**. São Carlos: EDUFSCAR, 2002. | 5 | 0 | 5 |
| CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. | 3 | 2 | 5 |
| D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 14ª ed. Campinas: Papirus, 2007. | 3 | 6 | 9 |
| FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. (Org.); MARCHESI, A. et al. **Por trás da porta, que Matemática acontece**? Campinas, SP: Editora Graf. FE/Unicamp, 2001. | 0 | 5 | 5 |
| LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999. | 5 | 5 | 10 |
| LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: Graftex, 1991 | 2 | 3 | 5 |
| LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando a geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. | 8 | 6 | 14 |
| LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. | 4 | 7 | 11 |
| POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. | 8 | 6 | 14 |
| RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. **Matematicativa**. 3ª ed. João Pessoa: EDUFP, 2004. | 2 | 5 | 7 |
| WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. | 4 | 1 | 5 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Para concluir a primeira etapa da Análise de Conteúdo, selecionou-se quatro obras que obtiveram o maior número de menções dentre as expostas no Quadro 21, a saber:

a) O1[28]: *Aprendendo e ensinando geometria*;
b) O2: *A arte de resolver problemas*;
c) O3: *Para aprender Matemática*;
d) O4: *A Matemática do Ensino Médio*.

Salienta-se que a última obra selecionada "A Matemática do Ensino Médio" trata-se de uma coleção de livros de conteúdos específicos da Matemática. Portanto, para esta análise, priorizou-se o volume 2, em razão de apresentar capítulos como: "Ponto, reta e plano"; "Perpendicularismo"; "Poliedros", e o volume 4, que une as atividades já apresentadas nos volumes anteriores da coleção e suas soluções de forma mais detalhada.

[28] Essa nomenclatura será utilizada para identificação das obras selecionadas durante as análises, referindo-se a Obra 1, Obra 2, e assim por diante.

Após a realização de uma leitura flutuante foi necessário organizar as obras em dois blocos. Um bloco destinado a referências que estão relacionadas as discussões da área da Educação Matemática, as quais são organizadas a partir de capítulos teóricos escritos por um ou mais autores que argumentam e apresentam aspectos teóricos sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, sendo estas O1, O2 e O3. E outro bloco refere-se aos livros didáticos que possuem uma estrutura de conceitos/conteúdos e atividades da área da Matemática, que é o caso do O4.

Compreendendo a diversidade do que consta nas obras selecionadas, procurou-se estabelecer critérios de análise que permitissem a realização de uma análise única para os dois blocos designados. Desta forma, considerou-se quatro critérios:

a) Indícios de abordagens sobre o ensino e aprendizagem de GE propostas nas obras;

b) Conceitos/conteúdos de GE identificados nas obras;

c) Transformações cognitivas, apreensões e desconstrução dimensional das figuras que podem ser mobilizadas em atividades relacionadas a conceitos/conteúdos de GE;

d) Indicações sobre o uso de recursos didáticos manipuláveis e digitais ao discutir conceitos/conteúdos de GE.

Finalizada a *pré-análise*, apresenta-se na próxima seção a segunda etapa da Análise de Conteúdo, *exploração do material*, na qual é organizada o encadeamento das verificações dos critérios estabelecidos nas obras selecionadas.

## 4.2 EXPLORAÇÃO DAS OBRAS

Esta etapa da Análise de Conteúdo tem por objetivo avaliar e produzir dados para a pesquisa. Logo, destacam-se algumas informações gerais das quatro obras selecionadas, por exemplo, como estão sistematizadas, sobre o que versam os capítulos e quais destes evidenciam entendimentos sobre GE, para assim investigar aspectos da teoria dos RRS. Ao realizar a análise do bloco de obras destinado àquelas relacionadas a discussões da área da Educação Matemática, manteve-se a ordem disposta na seção anterior de acordo com o número de menções às referências nos componentes curriculares relativos ao ensino e aprendizagem de Geometria.

A obra *Aprendendo e ensinando geometria* (O1) pertencente à área da Educação Matemática, obteve um total de 21 menções entre todos os componentes curriculares mapeados, sendo identificada em 16 PPC distintos. Salienta-se que, seis das citações foram apontadas em componentes curriculares específicos da Matemática, sendo estes os que abordam conceitos/conteúdos de GE. Torna-se relevante destacar o fato de que quatro PPC apresentam essa referência apenas nesta situação, ou seja, não possuem componentes curriculares relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria que apontem essa obra em suas bibliografias.

O1 apresenta discussões específicas sobre ensino e aprendizagem da área investigada. Foi organizada pelos autores Mary Montgomery Lindquist e Albert P. Shulte e publicada no ano de 1987, nos Estados Unidos da América, tendo sua primeira tradução em língua portuguesa no ano de 1994. Esta obra é constituída por cinco partes, a saber: “Perspectivas”; “Resolução de problemas e aplicações”; “Atividades em foco”; “A geometria e outras partes da Matemática: uma visão”; “Formação de professores”, nas quais estão distribuídos um total de 20 capítulos, elaborados por diferentes autores.

Os artigos que compõem a obra versam sobre a resolução de problemas de Geometria por meio de suas aplicações, bem como relacioná-los com outras ciências. Estes promovem a discussão sobre como os estudantes aprendem conceitos geométricos, quais dificuldades são apresentadas por estes sujeitos e o que poderia ser realizado para modificar esse quadro. Na apresentação desta obra um fato interessante a ser destacado é que “[...] não são só os professores de Matemática de países subdesenvolvidos, por exemplo, que fogem da geometria; que o temor da geometria também aflige o aluno dos países ricos...” (LINDQUIST; SHULTE, 2011, n.p), ou seja, os problemas no ensino e aprendizagem desta área do conhecimento podem ser identificados em diferentes localidades.

Ao realizar a busca por conceitos/conteúdos de GE na O1, verificou-se que há apenas dois, dentre os 20 capítulos, que apresentam alguma discussão sobre essa área da Geometria. Salienta-se que a procura, tanto nesta como nas outras obras deste bloco, foi efetuada por meio da leitura flutuante de modo a identificar tanto capítulos específicos deste campo da Geometria, bem como subseções dos capítulos, atividades, tudo que fizesse referência a GE de alguma forma.

O capítulo “Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos”[29] aborda a necessidade de resolver problemas para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes, à vista disso aponta algumas classificações[30] destes, a saber, problemas de reconhecimento; treinamento básico e prática de algoritmos; aplicações abertas; aplicações reais; álgebra; extensões; pesquisas abertas. Na sequência expõe uma coletânea de

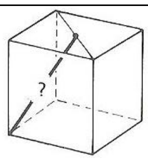
[29] Capítulo elaborado por George A. Milauskas.
[30] Não serão detalhadas, pois não é o foco desta pesquisa.

38 problemas e sugestões para suas resoluções, dentre eles, identificou-se três que envolvem conceitos/conteúdos de GE.

Ao realizar a resolução dos problemas identificados, neste capítulo, verifica-se a necessidade da conversão da representação em língua natural para a numérica, sendo assim estão relacionados à Geometria Espacial Métrica. Cabe destacar que as resoluções foram baseadas nas soluções fornecidas pela obra.

Nos dois primeiros problemas identificados ressalta-se que há uma representação figural do objeto envolvido, utilizada apenas de forma intermediária, pois há a possibilidade de resolvê-los sem recorrer à figura, tendo em vista que os dados necessários para soluciona-lo estão especificados em seu enunciado. Desta forma, pode-se afirmar que a mobilização da apreensão discursiva é necessária e a apreensão perceptiva, de ambos os problemas mencionados, pode ser mobilizada de modo a auxiliar na interpretação do enunciado por meio do reconhecimento das formas da figura apresentada na situação descrita. O Quadro 22 apresenta um desses exemplos, este requer a identificação de uma distância que é relatada no enunciado, bem como apresentada na representação figural.

Quadro 22 – Problema 1 da O1 que possui a representação figural como intermediária

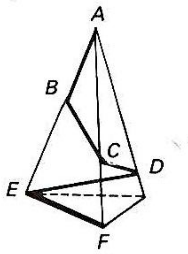
| | | |
|---|---|---|
| Cada aresta do cubo da ilustração mede 6 cm. Ache a distância do ponto médio de uma das diagonais das faces ao vértice mais distante do cubo.   | **Transformação Cognitiva** | Língua natural - Numérica |
| | **Apreensões** | Discursiva e perceptiva |
| | **Desconstrução Dimensional** | 3D-2D-1D-0D |

Fonte: (MILAUSKAS, 2011, p. 93).

Destaca-se ainda que o estudante para compreender o problema pode realizar uma desconstrução dimensional da figura, pois é necessário o reconhecimento de uma das faces do cubo (2D), sua diagonal (1D), ponto médio (OD) e vértice do cubo (0D) para identificar a distância que deve ser calculada.

No terceiro problema identificado no capítulo (Quadro 23), existe uma relação direta que deve ser feita entre o enunciado em língua natural e a representação figural da pirâmide, pois para interpretar a atividade é preciso localizar na figura os segmentos mencionados no enunciado. Desta forma, a resolução do problema promove a mobilização da apreensão discursiva e perceptiva, assim como a apreensão operatória de posição realizando mentalmente uma rotação, visto que é necessário visualizar as faces por onde o inseto traçou seu caminho.

Quadro 23 – Problema 3 da O1 que promove a apreensão discursiva, operatória de posição e perceptiva

<table>
<tr><td rowspan="3">Um inseto caminha do cume de uma pirâmide regular, contornando a figura, pelo trajeto de segmentos iguais $AB = BC = CD = DE = EF$. Ache a medida do ângulo do vértice superior de cada um dos três triângulos isósceles congruentes que são suas faces. (Se precisar de uma pista, retorne ao problema 7.)<br><br></td><td>Transformação Cognitiva</td><td>Língua natural e figural - Numérica</td></tr>
<tr><td>Apreensões</td><td>Discursiva, operatória de posição e perceptiva</td></tr>
<tr><td>Desconstrução Dimensional</td><td>3D-2D-1D-0D</td></tr>
</table>

Fonte: (MILAUSKAS, 2011, p. 98).

Para a resolução do problema, tendo em vista que os segmentos descritos por meio de pontos estão localizados sobre as faces congruentes, nas sugestões fornecidas pela obra, é aconselhado que “dobre” a pirâmide, fazendo com que os segmentos de reta fiquem apenas sobre uma figura plana, ou seja, todos sobre um triângulo isósceles. A partir disso, é necessário utilizar propriedades da figura geométrica em questão, bem como complementação de ângulos, para assim determinar a medida do ângulo do vértice superior da figura. Logo, a desconstrução dimensional é evidenciada pela necessidade de identificação das unidades figurais 2D, 1D e 0D.

Outro capítulo desta obra que expõe uma discussão específica sobre GE denomina-se “Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros”[31]. Este capítulo propõe a construção de sólidos geométricos por meio de canudos e linha, pois afirma que essa ação contribui para o reconhecimento de relações espaciais.

São apresentadas seis atividades de construção[32] de materiais manipuláveis com suas devidas instruções. O Quadro 24 expõe a proposta para construir, utilizando canudos como material, um cubo com um tetraedro no seu interior, as instruções dadas na sequência são para que se organize um tetraedro (poliedro já construído em atividades anteriores) e em suas faces construa-se pirâmides, para então concluir o objeto desejado. Salienta-se que é indicado o comprimento de cada canudo a ser utilizado durante a construção.

[31] Capítulo elaborado por Victoria Pohl.

[32] Tetraedro, octaedro, tetraedro inscrito no tetraedro, cubo inscrito no octaedro, octaedro inscrito no tetraedro e cubo inscrito tetraedro.

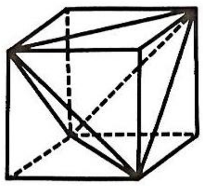
Quadro 24 – Atividade da O1 que propõe a construção de material manipulável

<table>
<tr><td rowspan="3">

**Atividade 6. Cubo sobre tetraedro**

Para esta atividade não se recomendam canudos de coquetel, porque a agulha com a linha deverá ser introduzida por alguns canudos seis vezes; se os canudos forem muito estreitos, a agulha ficará presa dentro deles.

Cubo sobre tetraedro



</td><td>Transformação Cognitiva</td><td>-[33]</td></tr>
<tr><td>Apreensões</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Desconstrução Dimensional</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: (POHL, 2011, p. 186).

Na continuação, deste capítulo, foram identificadas 12 questões que deverão ser resolvidas com o auxílio dos objetos construídos anteriormente. Estas envolvem a atividade de tratamento em língua natural, ou seja, não sofrem mudança em sua representação inicial. São frases a serem completadas com quantidades de elementos contidos nos objetos matemáticos descritos, em sua maioria, relacionados a conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição, visto que é necessário entendimentos de paralelismo e reconhecimento das unidades figurais dos poliedros construídos. Desta forma, os materiais manipuláveis produzidos podem auxiliar neste reconhecimento por meio da facilidade de seu manuseio e visualização[34] de vértices e arestas evidenciados por meio dos canudos, assim como, as representações figurais desencadeadas pelo registro material.

A segunda obra, O2, *A arte de resolver problemas*, foi mencionada em diferentes PPC, 11 ao total, e identificada 15 vezes nos componentes curriculares mapeados. Dentre estes, constatou-se que uma refere-se a conceitos/conteúdos específicos de GE e as outras 14 menções foram indicadas em componentes curriculares relativos ao ensino e aprendizagem de Geometria. Esta obra apresenta uma discussão sobre resolução de problemas, versando sobre diferentes campos da Matemática. Ressalta-se que oito componentes curriculares apresentam essa questão em sua ementa, sendo que um[35] destes é organizado apenas com este objetivo, ou seja, visa discutir exclusivamente sobre a resolução de problemas.

A O2 foi elaborada por George Polya em 1977, tendo sua versão em português publicada no ano de 2006. A obra tem o intuito de promover o interesse sobre resolver

---

[33] Símbolo utilizado para denotar a não identificação do critério de análise.
[34] Termo utilizado pelos autores da O1.
[35] Componente curricular de “Técnicas de Resolução de Problemas”, ofertado pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Nilópolis/RJ.

problemas em Matemática, destinado a professores que buscam desenvolver em seus alunos essa capacidade, a estudantes que queiram mobilizar essa habilidade ou a qualquer pessoa que tenha interesse em maneiras de “invenção” e “descoberta”. A O2 é organizada em quatro partes, a saber: “Em Aula”; “Como Resolver um Problema”; e “Pequeno Dicionário de Heurística”, que discutem princípios particulares da resolução de problemas; e “Problemas, Indicações, Soluções”, que apresenta questões para serem desenvolvidas com estudantes.

Dentre os 20 problemas expostos em sua última parte, três envolvem GE. No Quadro 25 é reproduzida umas das questões, a qual aborda os possíveis eixos de rotação de um cubo e seus ângulos, bem como a média aritmética destes.

Quadro 25 – Problema 1 da O2 que aborda eixos de rotação de um cubo

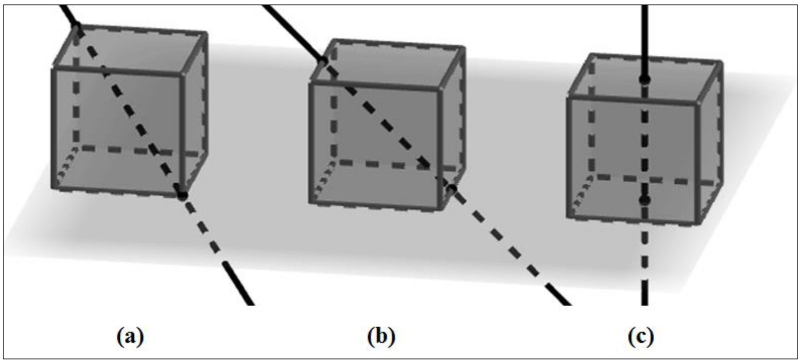
| | | |
|---|---|---|
| 8. Chama-se “eixo” de um sólido uma reta que liga dois pontos da sua superfície e tal que o sólido, girando em torno dessa linha, em um ângulo superior a 0° e inferior a 360°, coincida com ele mesmo.<br>Determinar os eixos de um cubo. Descrever claramente a localização desses eixos e calcular o ângulo de rotação de cada um deles. Admitindo que a aresta do cubo tem comprimento unitário, calcular a média aritmética dos comprimentos dos eixos. | **Transformação Cognitiva** | Língua natural - Numérica |
| | **Apreensões** | - |
| | **Desconstrução Dimensional** | - |

Fonte: (POLYA, 2006, p. 186).

Destaca-se que o problema parte de uma representação em língua natural, exigindo uma conversão para a representação numérica. Entretanto, é necessário ao menos imaginar o objeto e seus eixos de rotação para obter as possíveis soluções, ou seja, a representação figural torna-se essencial.

Na Figura 8 são apresentados exemplos das possíveis combinações de pontos para a composição da reta como eixo de rotação. Estas combinações, a saber, são: (a) eixo passando por dois vértices opostos, com 120° e 240° como ângulo de rotação; (b) eixo tocando pontos médios de arestas opostas, obtendo uma rotação de 180º; (c) eixo interceptando o centro de faces opostas, com 90°, 180° e 270°, sendo os ângulos de rotação necessários para que o objeto coincida com ele mesmo.

Figura 8 – Possíveis combinações para a resolução do Problema 1 da O2 com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica




Fonte: Organizado pela autora.

A resolução do problema por meio da utilização de um *software* de Geometria Dinâmica possibilita que se manipule a representação do sólido geométrico, realizando as rotações e verificando a pertinência da solução obtida. Salienta-se que esta, assim como as outras duas questões identificadas, não propõe representação figural para a resolução do problema, dessa forma não há mobilização das apreensões figurais, bem como de uma desconstrução dimensional. Por conseguinte, tendo em vista a importância da visualização dos objetos para a resolução dos problemas analisados, ressalta-se a não valorização da representação figural por parte do autor desta obra.

Outro problema identificado na O2 é apresentado no Quadro 26, o qual mobiliza uma atividade de conversão de uma representação em língua natural para uma representação algébrica. Na atividade apresentada o registro figural não é exposto, as informações são apenas descritas em seu enunciado, sendo assim não haverá a mobilização de apreensões figurais ou desconstrução dimensional do objeto.

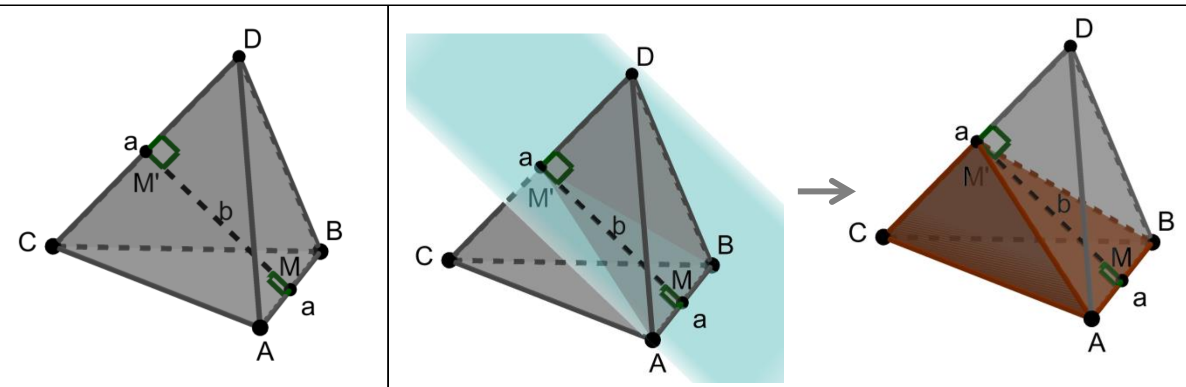
Quadro 26 – Problema 2 da O2 que aborda o volume de um tetraedro

<table>
<tr><td rowspan="3">9. Num tetraedro (não necessariamente regular), duas arestas opostas têm o mesmo comprimento $a$ e são perpendiculares entre si. Além disso, cada uma delas é perpendicular a uma linha de comprimento $b$ que liga os seus pontos médios. Exprimir o volume do tetraedro em função da $a$ e $b$ e demonstrar a resposta.</td><td>Transformação Cognitiva</td><td>Língua natural - Algébrica</td></tr>
<tr><td>Apreensões</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Desconstrução Dimensional</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: (POLYA, 2006, p. 187).

Destaca-se que a resolução da questão apresentada pela obra propõe que se crie um plano que contenha uma aresta de comprimento $\alpha$ e uma aresta de comprimento $b$ que seja perpendicular a criada anteriormente, dividindo o objeto matemático em outros dois tetraedros (Figura 9). Após esta identificação, pode-se calcular o volume do objeto. É notória, visto a complexidade desta atividade, a necessidade da visualização, considerando que para essa resolução deve-se recorrer a apreensão mereológica, que conforme Duval (2005), esta não é realizada mentalmente, e sim, fisicamente, graficamente ou simplesmente olhando o objeto.

Figura 9 – Representação figural para Problema 2 da O2




Representação figural descrita no enunciado da atividade

Representação figural sugerida para solucionar a atividade

Fonte: Organizado pela autora.

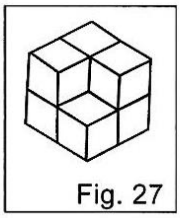
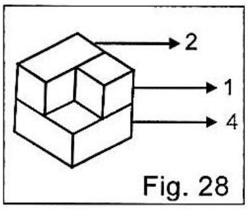
A O3, *Para aprender matemática*, foi selecionada por obter 12 menções ao total, sendo que 11 foram em componentes curriculares relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria, localizados em sete PPC distintos. Apenas uma citação foi mapeada em um[36] componente curricular que aborda conceitos/conteúdos específicos da Matemática, neste caso, da GE.

Esta obra, publicada no ano de 2006, foi escrita por Sérgio Lorenzato e faz parte de uma coleção de livros dedicados a formação de professores. Os 25 capítulos que estruturam a O3 apresentam princípios de uma metodologia proposta pelo autor, que devem ser interpretados como recomendações e que não seguem uma ordem, pois por vezes podem ser integrados. As discussões vão de reflexões pedagógicas a organização das aulas, por exemplo, “Ensinar com conhecimento”; “Investir em sua formação”; “Pensar no que faltou”; “Valorizar os erros dos alunos”; “Enfatizar os porquês matemáticos”, não, necessariamente, nesta ordem.

[36] Ofertado pela Universidade Federal de Itajubá/MG.

Por se tratar de uma obra constituída de textos que discutem o ensino e a aprendizagem apresenta apenas algumas atividades a título de exemplificação. Em termos de Geometria, a Plana é a mais valorizada em relação as outras. Contudo, identificou-se uma questão envolvendo a GE. Esta foi localizada no capítulo denominado “Ensinar integradamente aritmética, geometria, e álgebra” (Quadro 27), a qual envolve juntamente representações numéricas, bem como representação em perspectiva de objetos tridimensionais.

Quadro 27 – Atividade 1 da O3 que mobiliza o registro figural

<table>
<tr>
<td rowspan="3">f) Se 1 corresponde a , então , $2^3-1$ corresponde a<br><br>Fig. 27<br>A figura 27 também pode ser percebida sendo composta por três partes que valem 4, 2 e 1, como mostra a figura 28.<br><br><br>Fig. 28<br>Portanto, $2^3-1$ deve ser equivalente a $2^2+2+1$.</td>
<td>Transformação Cognitiva</td>
<td>Numérica - Figural</td>
</tr>
<tr>
<td>Apreensões</td>
<td>Discursiva e perceptiva</td>
</tr>
<tr>
<td>Desconstrução Dimensional</td>
<td>-</td>
</tr>
</table>

Fonte: (LORENZATO, 2010, p. 66).

A atividade apresentada no Quadro 27 promove uma conversão da representação numérica para a figural. Em termos de apreensões, tem-se a perceptiva, visto que é necessário o reconhecimento da representação figural de um cubo, assim como a apreensão discursiva, que conduz o enunciado da atividade para sua resolução. A desconstrução dimensional não é mobilizada em virtude de que a figura se mantém em uma representação tridimensional.

No que tange ao segundo bloco de obras, ou seja, o concernente a livros didáticos que apresenta uma estrutura de conceitos/conteúdos e atividades da área específica da Matemática, selecionou-se, como já mencionado anteriormente, a obra O4, *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2 e 4, pois obteve 65 citações, nas bibliografias mapeadas, em 54 PPC. Dentre estas, 10 são respectivas a componentes curriculares que abordam discussões sobre o ensino e aprendizagem de Geometria, as demais foram identificadas em componentes curriculares específicos da Matemática, a saber: Geometria Espacial, Desenho Geométrico, Geometria Dinâmica, Geometria Plana e Espacial, com respectivamente, 44, dois, um, oito menções. Compreende-se o fato da ênfase nesses componentes, tendo em vista a organização da estrutura desta obra.

A O4 foi organizada por Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, tendo sua primeira publicação em 1988, sendo destinada a professores do Ensino Médio e estudantes de Licenciatura em Matemática. Destaca-se que ao longo desta dissertação ao se tratar de conceitos/conteúdos explorados na O4, a referência será o volume 2 desta coleção, e ao se abordar as resoluções das atividades analisadas, a referência buscada foi o volume 4, tendo em vista seu maior detalhamento quanto as soluções exibidas.

Os autores já destacam no prefácio do livro-texto que a GE “envolve um esforço de imaginação bastante superior ao da Geometria Plana, principalmente devido às limitações causadas pela representação bidimensional das figuras” (LIMA et al., 2006, n.p.), tendo em vista esse comentário, uma das preocupações postas na obra é a de propor atividades que facilitem o desenvolvimento de sua “visão”[37] e intuição espacial.

Esta obra, em seu volume 2, apresenta dois temas centrais: Matemática Discreta e Introdução a Geometria Espacial, distribuídos em 12 capítulos. São seis capítulos que envolvem conceitos/conteúdos de GE, organizados em 138 páginas que representam 46,15% da O4 em seu segundo volume. O capítulo “Ponto, Retas e Planos” aborda discussões iniciais sobre esta área, a partir de noções primitivas e alguns axiomas, para então abordar posições de reta em relação a outra reta e a um ou dois planos. Com base nestas ideias, os autores propõem a construção de alguns sólidos (pirâmides, cones, prismas e cilindros), para após discutir relações de paralelismo e proporcionalidade, tendo em vista os objetos tridimensionais.

São propostas, ao final do capítulo citado, 26 atividades relacionadas aos assuntos desenvolvidos, dentre as quais, mesmo os autores apontando a importância da “visão”, apenas duas atividades possuem ilustrações, e quanto às resoluções, menos da metade das atividades apresentam figuras como uma representação intermediária para auxiliar em sua compreensão. Constatou-se que a maioria das questões evidencia seu enunciado por meio da representação em língua natural e que há predomínio da transformação cognitiva de tratamento. Há oito

[37] O entendimento sob esse termo não esta definido na obra.

questões que possuem indicações como: mostre, demonstre, prove. Somente seis questões mobilizam a atividade de conversão, tendo como representação de partida a língua natural e após a transformação semiótica obtém representações algébricas ou numéricas.

Destaca-se que nenhuma atividade solicita a representação figural em sua resolução, mas a grande maioria pode ser auxiliada por esse tipo registro. Por exemplo, a questão apresentada no Quadro 28 mobiliza uma atividade de tratamento no registro em língua natural que exige a compreensão da simbologia matemática. Entende-se que se faz necessária a representação figural, ao menos como intermediária, pois a questão requer que o estudante em sua resolução enuncie a figura formada por meio da secção realizada.

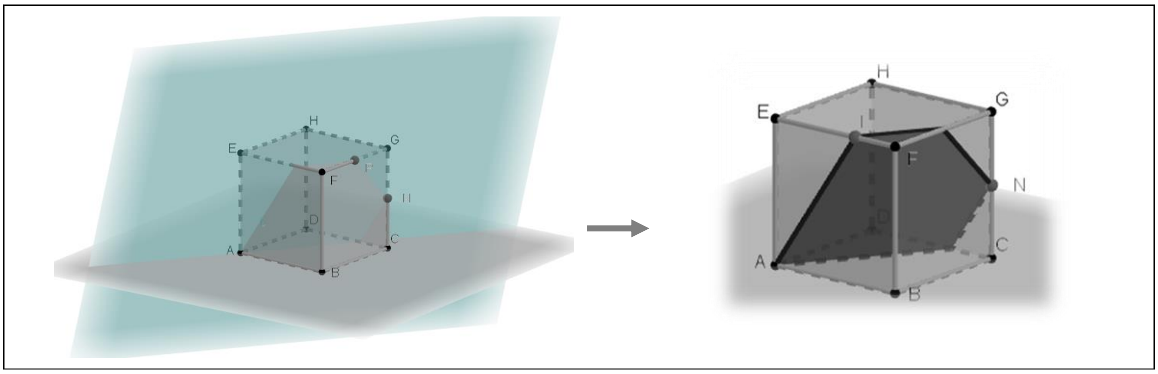
Quadro 28 – Atividade 17 do cap. 7 da O4 que mobiliza tratamento matemático em língua natural

<table>
<tr><td rowspan="3">17. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo tal que $AB = AD = AE = 6$. Estude as seções determinadas neste paralelepípedo pelos planos definidos pelos ternos de pontos $(M, N, P)$ abaixo:<br>a) $M = A, N =$ ponto médio de $CG$ e $P =$ ponto médio de $DH$<br>b) $M = A, N = C, P =$ ponto médio de $FG$<br>c) $M = A, N =$ ponto médio de $CG$ e $P =$ ponto médio de $FG$<br>d) $M =$ ponto médio de $AE, N =$ ponto médio de $BC, P =$ ponto médio de $GH$</td><td>Transformação Cognitiva</td><td>Língua natural</td></tr>
<tr><td>Apreensões</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Desconstrução Dimensional</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 185-186).

Sublinha-se que a resolução apresentada no volume 4 da O4 para a atividade exibida no Quadro 28, expõe a representação figural do objeto tridimensional indicado no enunciado e a secção formada em cada item. No entanto, para uma melhor compreensão por parte do estudante, essa questão pode ser abordada com o recurso de um *software* de Geometria Dinâmica. Este possibilita a construção do paralelepípedo indicado, com seus específicos comprimentos, o que permite verificar que este é um cubo, bem como permite a criação dos pontos médios e planos estabelecidos. Para, então, realizar a verificação das figuras obtidas por meio das secções. A Figura 10 apresenta a resolução do item *c* que é um tanto complexo para apenas se imaginar.

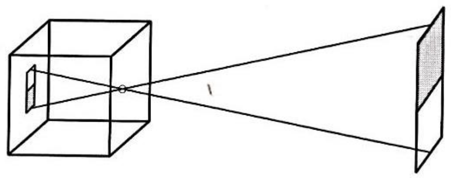
Figura 10 – Possível resolução para o item (c) da atividade 17 do cap. 7 da O4 com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica




Fonte: Organizado pela autora.

Como já dito, apenas duas atividades possuem representação figural em seu enunciado, quanto as apreensões, estas mobilizam a perceptiva e discursiva, assim como promovem uma desconstrução dimensional dos objetos tridimensionais apresentados. O Quadro 29 expõe uma destas atividades, a qual contém a descrição de uma câmera fotográfica, sua ilustração e dois questionamentos. O primeiro relacionado às dimensões de uma fotografia retirada de uma janela em que seu tamanho é enunciado; e o segundo refere-se a distância entre uma pessoa e a câmera para que esta fotografe o corpo inteiro do sujeito, tendo em vista sua altura e dimensões do filme utilizado.

Quadro 29 – Atividade 24 do cap. 7 da O4 que promove a apreensão perceptiva e discursiva

<table>
<tr>
<td rowspan="3">**24.** Uma câmera fotográfica rudimentar pode ser construída fazendo um pequeno furo em uma caixa, de modo que imagens de objetos sejam formadas na parede oposta e registradas em um filme, como ilustrado na figura 7.22.<br>Suponha que a câmara da figura tenha 10 cm de profundidade<br>a) Que dimensões terá a fotografia de uma janela de 3 m de comprimento e 1,5 m de largura, paralela ao plano do filme e situada a 6 m da câmera?<br>b) Se uma pessoa tem 1,75 m de altura e o filme usado é de 35 mm × 25 mm, a que distância mínima da câmera a pessoa deverá ficar para que possa ser fotografada de corpo inteiro?<br></td>
<td>**Transformação Cognitiva**</td>
<td>Língua natural e figural - Numérica</td>
</tr>
<tr>
<td>**Apreensões**</td>
<td>Discursiva e perceptiva</td>
</tr>
<tr>
<td>**Desconstrução Dimensional**</td>
<td>3D-2D-1D</td>
</tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 186-187).

Nesta atividade a apreensão perceptiva é mobilizada juntamente com a discursiva, visto que é essencial a descrição dada à câmera, assim como, sua imagem. Em virtude da necessidade de se calcular as dimensões da fotografia e distâncias solicitadas, a desconstrução dimensional é realizada do tridimensional para o unidimensional.

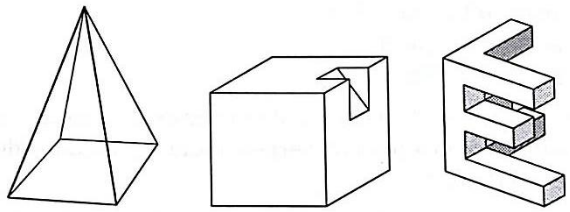
O capítulo “Perpendicularismo” aborda assuntos como retas e planos, assim como, construções baseadas nestes entes geométricos em relação a perpendicularidade, por exemplo, prismas retos, pirâmides e octaedro regulares. Nesta seção, também, é discutido sobre projeções ortogonais, simetria e reflexão. São 17 exercícios indicados, sendo que 14 destes mobilizam a transformação cognitiva de tratamento, 12 em representações em língua natural e dois em representações figurais.

Têm-se ainda atividades que apresentam a transformação cognitiva de conversão, sendo estas da representação figural para língua natural, da representação em língua natural para a algébrica, e da representação em língua natural e figural para a numérica. Um exemplo das atividades que propõem a conversão é a que apresenta a figura da planta de um quarto, no qual pretende-se colocar um fio para conectar a lâmpada localizada no centro do teto, deste cômodo, ao interruptor que esta junto a porta. Nesta atividade pede-se que determine o comprimento de fio necessário em diferentes casos. Desta forma, tendo em vista que a planta apresentada é bidimensional, é imprescindível a desconstrução dimensional para o reconhecimento dos segmentos em que o fio conector irá passar.

Dentre as 17 atividades, salienta-se que apenas quatro apresentam uma representação figural em seu enunciado, seja ela fundamental ou auxiliar à interpretação da questão. Recorrendo as soluções apresentadas para as atividades analisadas, observou-se que seis exploraram a representação figural como um registro intermediário de modo a contribuir com a compreensão do estudante. Dentre estas, três foram identificadas em questões que possuem o intuito de demonstrar ou mostrar algo por meio de propriedades matemáticas e relações entre os objetos.

Duas das atividades que envolvem figuras são as mesmas que promovem tratamentos matemáticos, logo, um tratamento figural. O Quadro 30 apresenta uma destas, na qual pode-se dizer que a apreensão perceptiva e operatória de posição são necessárias para a resolução, pois, respectivamente, há a necessidade de reconhecer os contornos e formas das figuras e rotacionar de forma mental os objetos representados de modo a identificar as vistas solicitadas.

Quadro 30 – Atividade 12 do cap. 8 da O4 que promove tratamento matemático em uma representação figural

<table>
<tr><td rowspan="3">**12.** Desenhe as vistas frontal, superior e de perfil dos sólidos abaixo.<br></td><td>**Transformação Cognitiva**</td><td>Figural</td></tr>
<tr><td>**Apreensões**</td><td>Perceptiva e operatória de posição</td></tr>
<tr><td>**Desconstrução Dimensional**</td><td>3D-2D</td></tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 204).

Na atividade acima, a desconstrução dimensional ocorre pela necessidade de representação de uma figura plana (2D), isto é, das vistas solicitadas dos sólidos (frontal, superior e de perfil). A outra questão que envolve esse tipo de representação está relacionada à projeções, abordando de forma inversa a atividade apresentada, ou seja, expõe as vistas de um sólido e solicita que este seja desenhado. Desta forma, também, proporciona mobilização da apreensão perceptiva e operatória de posição, mas não a desconstrução dimensional pelo motivo do aumento de dimensão ao passar da projeção (2D) para o sólido originário desta (3D).

Considerando as questões que proporcionam tratamento na representação em língua natural, entende-se que o registro figural deve ser mobilizado, ao menos mentalmente, em termos de verificações das propriedades necessárias para garantir a resolução do problema. Um exemplo que pode ser exposto é o da atividade reproduzida no Quadro 31, a qual propõe investigar o sólido geométrico que têm seus vértices nos centros das faces dos objetos indicados.

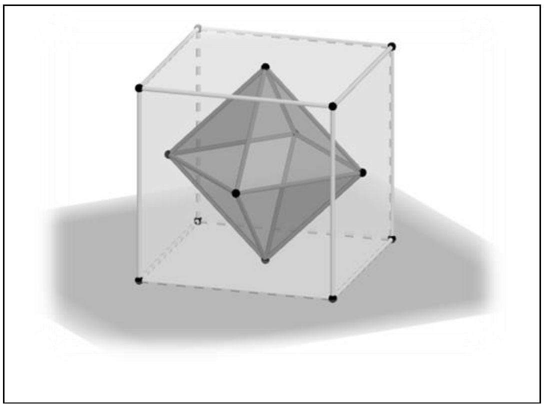
Quadro 31 - Atividade 5 do cap. 8 da O4 que mobiliza tratamento em língua natural

<table>
<tr><td rowspan="3">**5.** Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um tetraedro regular? de um cubo? de um octaedro regular?</td><td>**Transformação Cognitiva**</td><td>Língua natural</td></tr>
<tr><td>**Apreensões**</td><td>-</td></tr>
<tr><td>**Desconstrução Dimensional**</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 203).

A Figura 11 apresenta a solução para quando o sólido indicado é o cubo, dessa forma pode-se ver que a figura formada induz a um octaedro regular, mas para garantir este fato é necessário ter em vista algumas propriedades, como, por exemplo, a congruência das faces do cubo e de seus pontos médios, desta forma realizando uma desconstrução dimensional do objeto.

Figura 11 – Possível resolução para atividade 5 do cap. 8 da O4 com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica



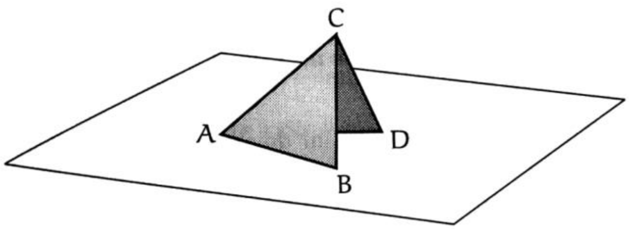
Fonte: Organizado pela autora.

O capítulo intitulado "Medindo Distâncias e Ângulos" aborda estas relações métricas entre pontos, retas e planos, apresenta, também, um item específico para esfera. Este capítulo propõe em nove de suas questões a mobilização da atividade de tratamento na representação em língua natural e em seis destas é necessário a utilização de propriedades e teoremas de forma explícita. O restante das atividades, 13 ao total, promovem a transformação cognitiva de conversão. Isto é, 13 destas atividades partem da representação em língua natural para numérica e algébrica, respectivamente, quatro e nove atividades.

Somente duas atividades apresentam a representação figural, ambas de modo auxiliar, ou seja, é possível resolver a questão sem recorrer a figura. No entanto, dentre as 22 atividades expostas neste capítulo, 13 utilizam em suas resoluções a representação figural do objeto foco da atividade. Este fato mostra indícios da importância deste tipo de representação para os autores ao se tratar de questões geométricas.

O Quadro 32 apresenta uma das questões que promove a atividade de conversão, que parte da representação em língua natural para a numérica e exibi uma representação figural, de modo a contribuir para sua interpretação. Em vista disso, pode-se compreender que as apreensões perceptiva e discursiva podem ser mobilizadas, pois deve-se recorrer a figura e ao enunciado para solucionar a atividade. A desconstrução dimensional ocorre da dimensão 3 para a dimensão 0 por meio do reconhecimento do ângulo a ser calculado (2D), da diagonal demarcada (1D) e dos pontos citados (0D).

Quadro 32 – Atividade 5 do cap. 9 da O4 que mobiliza conversão da representação em língua natural e figural para numérica

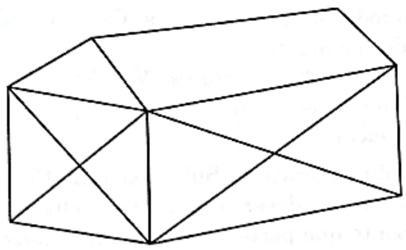
<table>
<tr><td rowspan="3">**5.** Um pedaço de papel em forma de um quadrado ABCD é dobrado ao longo da diagonal AC de modo que os lados AB e AD passem a formar um ângulo de 60°. A seguir, ele é colocado sobre uma mesa, apoiado sobre esses lados. Nessas condições, calcule o ângulo que a reta AC e o plano ABC formam com o plano horizontal.<br><br></td><td>**Transformação Cognitiva**</td><td>Língua natural e figural - Numérica</td></tr>
<tr><td>**Apreensões**</td><td>Discursiva e perceptiva</td></tr>
<tr><td>**Desconstrução Dimensional**</td><td>3D-2D-1D-0D</td></tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 227).

Na sequência, é apresentado o capítulo “Poliedros”, o qual propõe as primeiras relações a respeito do número de faces, arestas e vértices, para introduzir poliedros regulares, bem como o teorema de Euler. Ao fim, propõe 13 atividades, dentre as quais há sete e seis transformações cognitivas de tratamentos e conversões, respectivamente. As conversões mobilizadas partem da língua natural e transformam-se em representações numéricas e algébricas. Os tratamentos utilizam representações como: língua natural e figural. Destaca-se que apenas duas atividades possuem a representação figural em seu enunciado e não há atividade que apresente figura em sua resolução, nem ao menos para auxiliar em sua compreensão.

O Quadro 33 apresenta a atividade que mobiliza o tratamento na representação figural. Em termos de apreensões, a perceptiva é mobilizada, pois a figura é essencial para a resolução da questão, assim como a apreensão operatória mereológica, tendo em vista que o estudante deverá reproduzir a figura para verificar se é possível desenha-la sem tirar o lápis do papel e não passar novamente em uma das linhas já traçadas, será necessário que este vá criando figuras pertencentes a figura inicial, como: retângulos e triângulos.

Quadro 33 – Atividade 12 do cap. 9 da O4 que mobiliza tratamento matemático na representação figural

| | | |
|---|---|---|
| **12.** Verifique se o desenho abaixo pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de uma linha já traçada.  | **Transformação Cognitiva** | Figural |
| | **Apreensões** | Operatória mereológica e perceptiva |
| | **Desconstrução Dimensional** | 3D-2D-1D |

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 250).

Nesta questão também é possível verificar a necessidade da desconstrução dimensional na figura inicial. A primeira vista leva a pensar em uma “casa” em que é possível ver apenas duas de suas paredes e seu telhado, assim tem-se a representação de um objeto tridimensional. Para resolver a atividade, deve-se recorrer as “linhas”, isto é, aos segmentos de reta, para então verificar o que a questão busca solucionar.

No penúltimo capítulo da obra, “Volumes e Áreas”, são explorados os conceitos/conteúdos, geralmente, mais enfatizados em Geometria. Em outras palavras, apresenta, primeiramente, como calcular área e volume de um paralelepípedo retângulo, para então introduzir o princípio de Cavalieri. A partir dessa ideia, introduz como realizar esses cálculos para prismas, pirâmides, cilindros e cones. Dentre as atividades sugeridas, nenhuma possui a representação figural, apenas apresentam em seus enunciados, em língua natural, os elementos para a resolução do problema. Desta forma, não foram analisadas atividades quanto às apreensões figurais e desconstrução dimensional. Mas é importante destacar que em seis atividades a representação figural é utilizada como auxiliar para a resolução da questão.

Há três atividades que mobilizam apenas tratamento em língua natural e 16 que promovem a conversão de seu enunciado para a representação numérica (oito questões) ou algébrica (oito questões). O Quadro 34 apresenta uma dessas conversões que buscam um valor numérico.

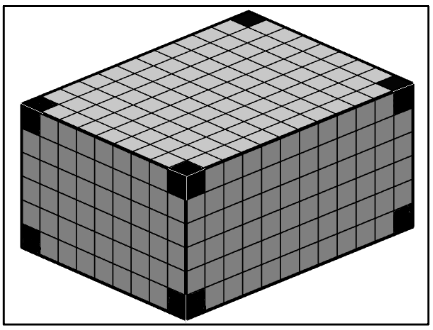
Quadro 34 – Atividade 2 do cap. 11 da O4 que mobiliza conversão da representação em língua natural para numérica

<table>
<tr>
<td rowspan="3">2. Um tablete de doce de leite medindo 12cm por 9cm por 6cm, está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.<br>a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com o papel laminado?<br>b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel?<br>c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel?<br>d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel?</td>
<td>Transformação Cognitiva</td>
<td>Língua natural - Numérica</td>
</tr>
<tr>
<td>Apreensões</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>Desconstrução Dimensional</td>
<td>-</td>
</tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 271-272).

Na atividade exposta pode-se constatar que, se houvesse a representação figural em seu enunciado, esta mobilizaria a apreensão mereológica, tendo em vista as partições feitas no tablete mencionado. A Figura 12 apresenta uma representação que poderia ter sido utilizada juntamente com o enunciado da atividade, bem como a marcação sobre os cubos solicitados no item *d*. Salienta-se que são oito cubos que possuem três de suas faces cobertas com o papel laminado, apenas sete desses podem ser visualizados, sendo assim é necessário imaginá-lo ou desenhá-lo em uma posição diferente da oferecida para concluir a atividade, realizando desta forma a apreensão posicional.

Figura 12 – Representação figural para a Atividade 2 do cap. 11 da O4



Fonte: Organizado pela autora.

A Figura 12 foi construída por meio do *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra 3D. Este pode auxiliar o estudante na resolução da atividade, visto que possibilita a rotação do objeto construído, como também, a troca de cor/marcação nos cubos contabilizados nos diferentes itens da questão.

O capítulo denominado “Superfícies e Sólidos de Revolução” versa sobre como se formam esses objetos, seus centros de gravidade, os teoremas de Pappus e por meio deste o cálculo da área e volume da esfera. São sete atividades propostas apenas em língua natural, estas promovem atividades de tratamento e conversão para a representação algébrica e numérica, respectivamente, uma, duas, quatro questões.

Ressalta-se que mesmo o capítulo e as atividades versando sobre figuras tridimensionais, nenhuma representação figural é apresentada junto ao enunciado das atividades, mas todas possuem essa representação em suas resoluções, mesmo que a figura não seja a representação de chegada da questão. O Quadro 35 expõe uma das atividades que mobiliza a transformação cognitiva de conversão entre a representação em língua natural e numérica, bem como a sugestão de resolução oferecida pelos autores.

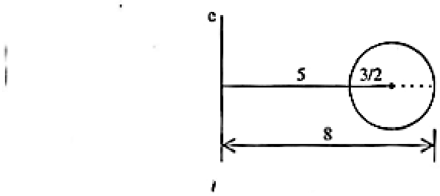
Quadro 35 – Atividade 2 do cap. 12 da O4 e sua resolução

<table>
<tr>
<td rowspan="3">

**2.** Calcule a área e o volume de um toro sabendo que as circunferências interna e externa têm diâmetros 10cm e 16cm.

***Resolução:***

2. O toro é formado pela rotação de um círculo de raio 1,5cm em torno de um eixo distante 5cm dele.




Temos $L = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi$, $S = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$ e $x = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$. Logo,

$$A = 2\pi\cdot\frac{13}{2}\cdot 3\pi = 39\pi^2 cm^2,$$

$$V = 2\pi\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{9\pi}{4} = \frac{117}{4}\pi^2 cm^3.$$

</td>
<td>Transformação Cognitiva</td>
<td>Língua natural - Numérica</td>
</tr>
<tr>
<td>Apreensões</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>Desconstrução Dimensional</td>
<td>-</td>
</tr>
</table>

Fonte: (LIMA et al., 2006, p. 298; LIMA et al., 2007, p. 268).

Tendo em vista a resolução oferecida, a representação figural auxilia na compreensão da atividade, para que se entenda quais são as medidas enunciadas, para então calcular a área e o volume do toro solicitado.

Concluída a exploração dos dados, a próxima seção expõe a última etapa da Análise de Conteúdo, em que são realizadas as interpretações dos elementos evidenciados.

## 4.3 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DAS OBRAS

Nesta última etapa da Análise de Conteúdo foi realizado o tratamento e a síntese de dados significativos para a pesquisa. Para isto, sistematizaram-se quadros que classificam as atividades identificadas quanto aos aspectos da teoria dos RRS, a saber, transformações cognitivas, apreensões figurais e desconstrução dimensional.

O Quadro 36 expõe a organização da análise produzida a partir das atividades das obras que compõem o bloco destinado a referências que abordam discussões da área da Educação Matemática. A O1 é a que apresenta o maior número de atividades, isto é, 84% do total de questões deste bloco.

Quadro 36 – Síntese da análise do bloco destinado às referências relacionadas a discussões da área da Educação Matemática

| **Obra** | **Nº de atividades** | **Transformações cognitivas**[38] | | | | | **Apreensões**[39] | | | | | | **Desconstrução Dimensional** | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | **O** | | | | | | | |
| | | **F e LN → N** | **LN** | **LN→A** | **LN→N** | **N→F** | **P** | **D** | **S** | **M** | **P** | **Ó** | **3D** | **2D** | **1D** | **0D** | |
| **O1** | 12 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 21 |
| | 1 | - | - | - | x | - | x | x | - | - | - | - | x | x | x | x | |
| | 1 | - | - | - | x | - | x | x | - | - | - | - | x | x | x | - | |
| | 1 | 1 | - | - | - | - | x | x | - | - | x | - | x | x | x | x | |
| | 6 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| **O2** | 1 | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3 |
| | 1 | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| **O3** | 1 | - | - | - | - | x | x | x | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 |
| **Total** | 25 | 1 | 13 | 1 | 3 | 1 | 4 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 2 | 25 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre as atividades que promovem transformações cognitivas, 19 ao total, tem-se que a maioria viabiliza o tratamento matemático em língua natural. Porém, Duval (2011) afirma que as conversões entre representações semióticas são as que contribuem de uma melhor forma para a compreensão dos objetos desta área do conhecimento. Desta forma, destaca-se a

[38] Algébrica (A); Figural (F); Língua Natural (LN); Numérica (N).
[39] Perceptiva (P); Discursiva (D); Sequencial (S); Operatória (O) Mereológica (M), Posicional (P) e Ótica (Ó).

necessidade de se propor mais atividades que favoreçam a conversão de representações semióticas, dado que apenas seis foram constatadas durante a análise deste bloco.

E ainda que existam questões que possibilitem a conversão de representações, a maioria destas, cinco atividades, parte do registro em língua natural, ou seja, há apenas uma atividade que apresenta outro tipo de representação de partida, no caso, a numérica. Duval (2011) destaca que, para que haja coordenação simultânea entre várias representações é essencial realizar a conversão nos dois sentidos e não apenas em um único, isto é, a representação semiótica de partida de uma atividade deve ser abordada como uma representação de chegada em outra atividade. No entanto, este fato não ocorre neste bloco de obras.

Apenas quatro atividades exploram a representação figural, sendo que uma foi abordada na atividade de conversão da O3. Enquanto que as outras identificadas na O1 não foram requisitadas como representação de partida ou de chegada da atividade, servem apenas de auxílio para a resolução, mas ocasionaram a mobilização dos outros aspectos da teoria que foram investigados, tais como a desconstrução dimensional e algumas diferentes apreensões figurais.

Quanto às apreensões, três delas foram constatadas. A apreensão perceptiva foi observada nas quatro atividades em que a representação figural foi apresentada junto ao enunciado. Esta apreensão relaciona o reconhecimento visual da forma, no entanto, como revela Duval (2012a, p. 124), "os objetos que aparecem podem [...] ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver", desta forma, é necessário uma descrição discursiva do objeto. Sendo assim, a apreensão perceptiva deve estar acompanhada da apreensão discursiva da figura, que é o que ocorreu na análise das atividades deste bloco, pois nas questões não era possível resolvê-las apenas baseando-se em suas representações figurais. Ainda em termos de apreensões, a operatória de posição foi constada em apenas uma das atividades.

A desconstrução dimensional das formas, assim como as apreensões, ocorre unicamente por meio de uma figura, já que está relacionada às maneiras de ver em Matemática. Portanto, somente três problemas mobilizaram este aspecto da teoria dos RRS. Por se tratar da área de GE, todas partem do 3D, sendo que em duas atividades há a necessidade do reconhecimento de objetos em 2D e 1D, como faces e segmentos/arestas de um objeto tridimensional, e uma exige a identificação de vértices e ponto médio de um segmento, desta forma exige a dimensão 0.

A análise do bloco referente aos livros didáticos que apresentam uma estrutura de conceitos/conteúdos e atividades da área da Matemática, no caso, O4, está organizada no

Quadro 37 de acordo com a sequência de capítulos apresentada na seção anterior. No que concerne às transformações cognitivas, verificou-se que, aproximadamente, 51% das atividades evidenciam o tratamento matemático e que a maioria destas questões o realiza por meio da representação em língua natural. Salienta-se que quatro atividades mobilizam a representação figural para esta transformação cognitiva. Torna-se relevante destacar esse dado, pois ao se tratar de conceitos/conteúdos geométricos, identifica-se a discrepância entre os tratamentos matemáticos em que a total ênfase está no discurso.

Quadro 37 – Síntese da análise do bloco destinado à referência relacionada a discussões da área da Matemática

| **Obra O4** | **Nº de atividades** | **Transformações cognitivas** | | | | | | **Apreensões** | | | | | | **Desconstrução Dimensional** | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | **O** | | | | | | | |
| | | **F** | **LN** | **F→LN** | **F e LN→N** | **LN→A** | **LN→N** | **P** | **D** | **S** | **M** | **P** | **Ó** | **3D** | **2D** | **1D** | **0D** | |
| **Cap. 7** | 18 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 26 |
| | 1 | - | x | - | - | - | - | x | x | - | - | - | - | x | x | - | - | |
| | 2 | - | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | - | x | - | - | x | x | - | - | - | - | x | x | x | - | |
| | 3 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| **Cap. 8** | 12 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 17 |
| | 1 | x | - | - | - | - | - | x | - | - | - | x | - | x | x | - | - | |
| | 1 | x | - | - | - | - | - | x | - | - | - | x | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | - | x | - | - | x | x | - | - | - | - | - | x | x | - | |
| **Cap. 9** | 9 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 22 |
| | 8 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | - | - | x | - | x | x | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 3 | - | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | - | - | x | - | - | x | x | - | - | - | - | x | x | x | x | |
| **Cap. 10** | 4 | - | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 13 |
| | 5 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 2 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | x | - | - | - | - | - | x | x | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | x | - | - | - | - | - | x | - | - | x | - | - | x | x | x | x | |
| **Cap. 11** | 8 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 19 |
| | 8 | - | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 3 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| **Cap. 12** | 4 | - | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 7 |
| | 2 | - | - | - | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| | 1 | - | x | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | |
| **Total** | 104 | 4 | 50 | 1 | 3 | 25 | 21 | 9 | 6 | 0 | 1 | 2 | 0 | 5 | 6 | 4 | 2 | 104 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas conversões realizadas têm-se o predomínio daquelas que mobilizam a língua natural em seu enunciado e propõem como registro de chegada a representação numérica ou algébrica, estas representam, cerca de, 45% e 49% cada uma, respectivamente.

Dentre as 104 atividades analisadas, apenas nove apresentam juntamente ao seu enunciado uma representação figural. Sendo assim, são apenas estas que proporcionam algum tipo de apreensão figural e podem mobilizar uma desconstrução dimensional da figura. Este é um dado muito inferior ao desejado se tratando do campo da GE, pois Duval (2005) sinaliza que o entendimento em Geometria também está relacionado às operações puramente figurais, isto é, nas modificações realizadas em uma figura e a redução de dimensões por meio da visualização. No entanto, o dado constatado, quanto à representação figural, não abrange nem 9% das questões analisadas neste bloco de referências.

Considerando as informações expostas, há um distanciamento entre as propostas das obras e os pressupostos teóricos dos RRS, no que tange a aprendizagem em Geometria, em particular, a Espacial. Salienta-se a carência das representações figurais nas obras analisadas, pois estas são indispensáveis se tratando de transformações cognitivas, principalmente, em questões que envolvem a conversão, tendo em vista que é a mobilização desta atividade que auxilia na compreensão do objeto matemático. Bem como, o desenvolvimento das apreensões figurais que evidenciam diferentes maneiras de ver em Geometria analisando desta forma a atividade geométrica realizada pelo estudante e as dificuldades apresentadas por eles. Destaca-se, também, pelo mesmo fato mencionado sobre as representações figurais, a falta da desconstrução dimensional, a qual é vista como necessária para o reconhecimento de um objeto geométrico e um meio de desenvolver a habilidade de visualização.

# 5 ANÁLISE DE CONTEÚDO DO BLOCO DE TAREFAS REFERENTES À GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Conforme Duval (2011, p. 92), “Para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos”. Desta maneira, com o objetivo de explorar a visualização em Geometria, organizou-se três tarefas[40] compostas por 10 atividades que envolvem articulações de representações e tratamentos figurais, bem como conceitos/conteúdos referentes à Geometria Espacial de Posição.

## 5.1 PRÉ-ANÁLISE DO BLOCO DE TAREFAS

As atividades que compõem as tarefas foram elaboradas a partir de questões analisadas nas obras, descritas no capítulo anterior, assim como, nos estudos identificados durante os mapeamentos apresentados no Capítulo 2. Destaca-se que três das quatro obras analisadas fazem parte da bibliografia de componentes curriculares do curso de Matemática Licenciatura Noturno da Universidade Federal de Santa Maria. No entanto, isto não implica que os participantes da pesquisa já tenham tido acesso a tais discussões, pois as atividades foram reestruturadas de modo a explorar conceitos/conteúdos da GEP, considerando aspectos da teoria dos RRS, visto que raras questões verificadas nas obras exploradas utilizam desta combinação.

A Tarefa I foi estruturada de modo a investigar a mudança de dimensão, isto é, partir do plano para o espaço. Bem como, verificar entendimentos dos licenciandos sobre o objeto matemático cubo.

Na atividade 1 desta tarefa (Quadro 38), primeiramente, deve-se construir, utilizando 12 canudos de mesmo tamanho e uma linha para interliga-los, diferentes quantidades de quadrados solicitados. Em seguida, é pedido para que se esboce uma representação figural das construções realizadas com o material concreto no quadro disposto, isto é, três, quatro e cinco quadrados estruturados. No item *1-a*, é questionada a possibilidade de se construir utilizando o mesmo material, 12 canudos e linha, mais de cinco quadrados. Essa resolução requer que se modifique a dimensão explorada, pois as construções a serem realizadas anteriormente são dispostas em um mesmo plano, mas para construir mais de cinco quadrados é necessário abandonar o bidimensional e recorrer ao tridimensional.

[40] Entende-se o termo “tarefa” está relacionado a um grupo de atividades que versam sobre a mesma temática e que estão relacionadas entre si, com intuito de sistematizar alguns resultados.

Quadro 38 – Organização da atividade 1 da Tarefa I

1) *Configurações de figuras com canudos*: Utilize uma linha e 12 canudos de mesmo tamanho para construir a quantidade de quadrados indicada abaixo. A seguir, esboce as construções no espaço indicado:

| TRÊS | QUATRO | CINCO |
|---|---|---|
| | | |

1-a) Pode-se afirmar que é possível construir mais de cinco quadrados com o mesmo material. Quantos quadrados você consegue construir? Justifique sua resposta.

1-b) Escolha três perspectivas da construção anterior e fotografe-a.

Fonte: Adaptado de Pohl (2011, p 186-188).

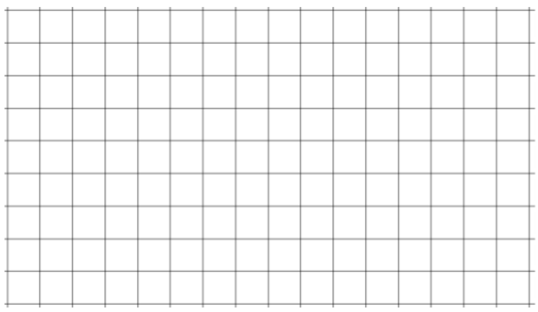
A figura geométrica quadrado possui ângulos internos de 90°, considerando a dimensão 2, apenas quatro lados podem incidir em um mesmo vértice para manter essa característica. A troca de dimensão para realizar a construção com mais de cinco quadrados é necessária, pois ao buscar manter-se em duas dimensões, tem-se que quatro canudos já serão utilizados na organização da primeira forma, restando oito destes. Tendo em vista a informação dada inicialmente, que em um dos vértices do quadrado já organizado pode-se incidir mais duas arestas formando ângulos de 90°, restando apenas seis canudos que devem ser utilizados para completar os quadrados. Logo, na dimensão 2 é possível construir no máximo quatro quadrados de mesma unidade, utilizando 12 canudos de mesmo tamanho. Desta forma, para solucionar o item *1-a*, é necessária a construção de um cubo, sólido que possui seis faces quadradas e 12 arestas, assim correspondendo a solicitação da questão.

A realização do item *1-b* está relacionada ao modo de ver o sólido geométrico, isto é, as diferentes perspectivas em que este pode ser apresentado. A questão solicita que o participante fotografe em três diferentes perspectivas o cubo criado no item anterior da atividade. Os licenciandos terão um local apropriado que contará com contraste de cor entre o canudo e o fundo, além de um recurso fotográfico que irá repassar as imagens para um computador. Tendo em vista que a fotografia do objeto gera uma imagem, neste item da atividade, a possível transformação cognitiva a ser realizada é a de tratamento no registro figural.

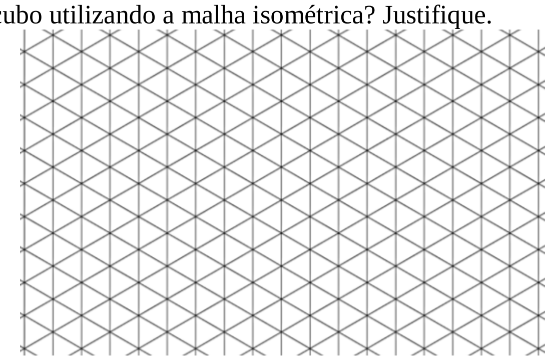
A atividade 2 da Tarefa I (Quadro 39) tem o intuito de explorar a apreensão sequencial e discursiva, a partir da descrição do objeto matemático, mas como se solicita a representação figural do cubo, a apreensão perceptiva também poderá ser mobilizada durante a descrição do sólido. Nesta é solicitada a nomeação dos vértices e descrição do cubo em relação aos planos que o compõem. Sendo assim, será necessário o entendimento da organização deste objeto quanto aos planos que o formam e suas posições relativas. A representação figural foi requerida com a intenção de compará-la com as fotografias realizadas na atividade 1, de modo a verificar se ocorre alguma mudança de perspectiva referente ao cubo, se irá prevalecer a representação usual ou as fotografias irão influenciar de alguma forma.

Quadro 39 – Organização da atividade 2 da Tarefa I

2) Desenhe um cubo utilizando a malha quadriculada, nomeie os vértices e descreva-o em relação aos planos que o compõem.



2-a) É possível desenhar um cubo utilizando a malha isométrica? Justifique.



Fonte: Organizado pela autora.

No item *2-a* é questionada a possibilidade de se representar um cubo em uma malhada isométrica, isto é, em uma malha de triângulos equiláteros organizada por retas paralelas a representação dos eixos *x*, *y* e *z*. Desta vez, a representação em perspectiva do cubo que contém duas faces paralelas ao plano da folha de protocolo fornecida não é possível de ser esboçada neste tipo de malha, ou seja, o participante deverá buscar outra maneira de representá-lo. Quanto à justificativa, esta deverá recorrer também a posições relativas de planos e/ou retas que compõem o objeto. A malha isométrica foi disposta caso o participante queira utiliza-la para representar o cubo, não é de uso obrigatório da questão.

A atividade 3 da Tarefa I (Quadro 40), assim como a proposta de construir figuras geométricas com canudos (atividade 1), foi adaptada da O1. Essa propõe que se realize uma desconstrução dimensional do 3D até 0D, com o auxilio da construção com canudos ou das representações figurais realizadas na atividade 2, para completar as descrições sobre o objeto matemático solicitado.

Quadro 40 – Organização da atividade 3 da Tarefa I

| |
|---|
| 3) Complete as descrições a partir da análise de um cubo e enumere em ordem decrescente de prioridade (1 mais importante e 4 menos importante) os itens que você considera relevante.<br>(    ) Um cubo tem ____ vértices, ____ arestas e ____ faces.<br>(    ) Nesse cubo, ____ arestas incidem em cada vértice e ____ faces incidem em cada vértice.<br>(    ) Cada aresta é paralela a ____ arestas, intercepta ____ arestas e é reversa com outras ____ arestas.<br>(    ) Cada face é paralela a ____ de suas faces e intercepta o plano de outras ____ faces. |

Fonte: Adaptado de Pohl (2011, p. 186-188).

Para a realização da atividade 3 é necessário que o participante tenha conhecimento dos elementos do cubo, assim como, compreensão sobre retas paralelas, perpendiculares e reversas, e também sobre planos paralelos e perpendiculares. Tendo em vista que os estudantes podem recorrer ao material manipulável produzido e/ou as representações figurais do cubo, há a possibilidade das apreensões perceptiva, discursiva e operatória de posição serem mobilizadas, considerando a visão, a descrição das frases e a rotação mental do objeto. Ainda, pede-se que apresente o que se considera mais importante ao descrever um cubo diante das frases completadas. Salienta-se que esta atividade possibilita o tratamento na representação da língua natural, tendo como auxílio a representação figural e/ou representação material.

A atividade 4 (Quadro 41) busca identificar a relevância de possíveis representações e materiais didáticos mobilizados nas atividades 2 e 3. Compreende-se que materiais manipuláveis contribuem, em um primeiro momento, para percepção visual dos objetos matemáticos, porém, “para termos acesso a esses objetos, precisamos de uma atividade de produção semiótica” (DUVAL, 2013, p. 16). Neste caso, esta atividade é resolvida por meio da representação figural auxiliada pelo discurso, pois entende-se que a visualização depende do reconhecimento das unidades figurais que são identificadas por meio destes dois tipos de registros.

Quadro 41 – Organização da atividade 4 da Tarefa I

4) Considere as opções a seguir e atribua um percentual para cada elemento que contribui na resolução da atividade 3. (Lembre-se de totalizar 100% em cada coluna)

| **Elemento** | **Atividade 2** | **Atividade 3** |
|---|---|---|
| Representação figural | | |
| Objeto manipulável | | |
| Imagem mental | | |
| Outro | | |

Fonte: Organizado pela autora.

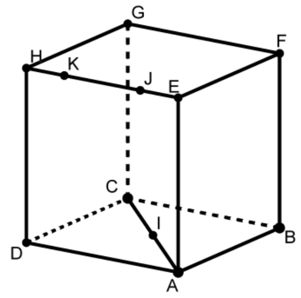
Na atividade apresentada no Quadro 41 é solicitado que se considere um total de 100% e o distribua entre os elementos dispostos conforme a contribuição de cada um para a resolução das atividades indicadas. Desta forma, provoca-se uma reflexão por parte dos acadêmicos, visto que estes necessitam repensar sobre os encadeamentos realizados para a resolução e argumentação apresentadas nas atividades 2 e 3.

A Tarefa II foi organizada com o objetivo de investigar conhecimentos dos licenciandos quanto a propriedades do objeto matemático cubo com ênfase nas posições relativas entre retas e planos. As atividades elaboradas exploram diferentes representações figurais em perspectiva do cubo que visam evidenciar a importância da variação do ponto de vista na identificação de relações entre elementos. Ainda, nestas atividades, recorre-se ao uso do *software* de Geometria Dinâmica para construir o objeto cubo, buscando, desta forma, identificar o entendimento dos participantes quanto ao processo de organização a ser seguido.

A atividade 1 da Tarefa II (Quadro 42), aborda o compreensão de colinearidade e coplanaridade de pontos. Nesta atividade é exposta a representação figural do cubo em que há pontos que nomeiam seus vértices, assim como, pontos nomeados que pertencem a suas arestas e faces. Estes elementos são combinados nos itens da atividade que questiona se os mesmos são colineares e/ou coplanares, e solicita justificativa junto a uma representação figural.

Quadro 42 – Organização da atividade 1 da Tarefa II

1) Observe os pontos de A a K nos vértices, arestas e faces do cubo. Verifique se os pontos indicados em cada item são colineares e/ou coplanares.
Esboce uma representação figural e uma justificativa de acordo com o(s) item(s) que você marcou, identificando intersecções, caso necessário.




| | |
|---|---|
| 1-a) A e G<br>( ) colineares ( ) coplanares | 1-b) G, F e I<br>( ) colineares ( ) coplanares |
| 1-c) H, I, K e J<br>( ) colineares ( ) coplanares | 1-d) H, D, I e C<br>( ) colineares ( ) coplanares |

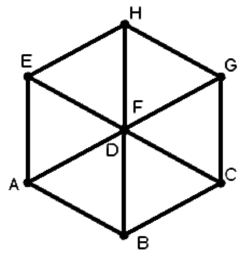
Fonte: Adaptado de Pohl (2011, p 186-188).

Para obter a resolução dos itens indicados na atividade 1 é necessário o entendimento de como pode ser definida a formação de uma reta e um plano, para então estabelecer se os pontos serão colineares e/ou coplanares. Esta atividade mobiliza dois tipos de registros de representação, a língua natural e o figural, estes em duas dimensões distintas, respectivamente, 0D (pontos) e 3D (cubo) e para solucionar a questão ainda é necessário mobilizar elementos nas dimensões 1D (reta) e 2D (plano). Em termos de apreensões, a perceptiva e discursiva devem ser mobilizadas visto que o enunciado e a representação figural do cubo inicial são essenciais para a resolução da questão.

Na atividade 2, desta tarefa (Quadro 43), pretende-se investigar se os estudantes reconhecem as possíveis posições relativas entre os entes geométricos, considerando uma representação do cubo que não é tão recorrente ao se estudar este objeto matemático, mas que foi apresentada aos participantes na tarefa anterior ao se construir a representação figural do cubo na malha isométrica. Salienta-se que na representação figural exposta no enunciado dois vértices do cubo estão sobrepostos e nenhuma de suas arestas está pontilhada, assim não retratando a profundidade existente na figura, levando quem olha a primeira vista a imagem de um hexágono.

Quadro 43 – Organização da atividade 2 da Tarefa II

2) Analise a representação do cubo e identifique posições relativas entre os entes geométricos, justificando suas respostas com notação matemática pertinente:




| *Posições relativas entre duas retas: paralelas, concorrentes (perpendiculares) e reversas (ortogonais).* | |
|---|---|
| 2-a) Retas EF e DC: | 2-b) Retas AE e AD: |
| 2-c) Retas HD e FG: | 2-d) Retas AE e DF: |

| *Posições relativas entre reta e plano: reta contida no plano, reta secante ao plano e reta paralela ao plano.* | |
|---|---|
| 2-e) Reta HD e plano formado pelos pontos E, F, G: | 2-f) Reta BG e plano formado pelos pontos C, G, F: |

| *Posições relativas entre dois planos: coincidentes, secantes e paralelos.* | |
|---|---|
| 2-g)Planos formados pelos pontos A, B, F e B, C, D: | 2-h)Planos formados pelos pontos A, B, E e C, D, H: |

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006, p 185-186).

As possíveis posições relativas entre os entes geométricos são elencadas, mas não são fornecidas suas definições, assim como, não são mencionadas as notações matemáticas. Nesta atividade, a transformação cognitiva é de conversão entre a representação figural e língua natural, visto que é necessária a figura e a descrição que informa qual é o objeto matemático, para então realizar a classificação das posições relativas solicitadas.

Logo, as apreensões perceptiva e discursiva deverão ser mobilizadas durante a resolução da atividade 2, visto que estas são essenciais para a concluir a questão. A apreensão operatória de posição possivelmente será empregada em virtude da representação figural selecionada, pois a rotação do objeto de forma mental, ou até mesmo a realização de outra representação figural, facilitará a visualização das posições solicitadas. A desconstrução dimensional é exigida para que se possa solucionar a atividade, posto que a representação figural de partida é um objeto tridimensional (3D), as posições relativas questionadas envolvem planos (2D) e retas (1D) que são indicados por meio de seus pontos (0D).

A atividade 3 (Quadro 44) propõe a construção de um cubo com o uso do *software* GeoGebra 3D, tendo em vista que esta ferramenta “permite manipular a figura para ter a percepção do que está acontecendo e para poder levantar hipóteses, fazer considerações de elementos pertinentes à situação e até verificar propriedades invariantes na situação" (VIEIRA, 2007, p. 63), pois entende-se que a construção de sólidos geométricos requer a mobilização de suas propriedades.

Quadro 44 – Organização da atividade 3 da Tarefa II

<table>
<tr><td colspan="2">3) Construa um cubo no GeoGebra usando apenas as ferramentas: ponto, reta, plano, compasso.<br>Descreva os passos adotados na construção, mencionando relações entre os entes geométricos a partir da denominação disponibilizada pelo software.<br>Salve o arquivo na área de trabalho do notebook renomeando-o como "Tarefa2_Q3_Cubo".</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>Objetivo</td></tr>
<tr><td>Passo 1)<br>Passo 2)<br>Passo 3)</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Organizado pela autora.

Para a resolução da atividade apresentada no Quadro 44 é solicitado que o participante utilize apenas as ferramentas ponto e compasso além daquelas que permitem criar retas e planos. O *software* GeoGebra 3D possui ferramentas como polígono regular, prisma e até o próprio cubo, mas como o objetivo da atividade é explorar as propriedades do sólido, por este motivo foi solicitado o não uso dessas ferramentas.

A apreensão que pode ser mobilizada na atividade 3 da Tarefa II é a sequencial, dado que a questão solicita a construção do cubo e sua descrição. Entretanto, as apreensões perceptiva e operatória posicional e/ou ótica podem ser mobilizadas, pelo fato do acadêmico construir o cubo antes mesmo de descrevê-lo, gerando então a possibilidade de visualizá-lo e manipulá-lo de forma dinâmica.

A atividade 4 (Quadro 45) está diretamente relacionada com o desenvolvimento da atividade 3. Esta busca possibilitar uma reflexão do participante quanto a sua construção na atividade anterior, isto é, que o acadêmico aponte quais propriedades/características do cubo foram mantidas e priorizadas durante sua solução.

Quadro 45 – Organização da atividade 4 da Tarefa II

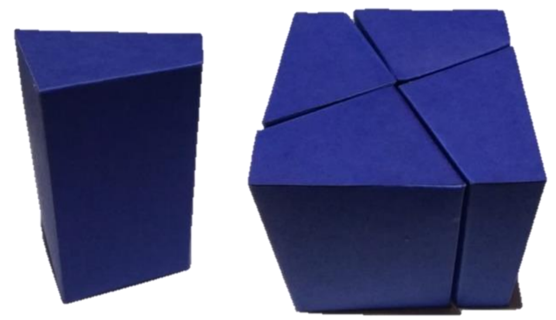
| |
|---|
| 4) Interprete seu roteiro de construção do cubo no GeoGebra e exponha o que você levou em consideração para compor esse sólido. |

Fonte: Organizado pela autora.

A Tarefa III foi elaborada com o intuito de abordar a construção e desconstrução de um cubo por meio de suas partes. Estas ações buscam explorar propriedades deste objeto matemático, ora por materiais concretos, ora por representações figurais.

A atividade 1 da Tarefa III deve ser realizada com o auxílio do material manipulável fornecido. Neste caso, serão quatro prismas retos congruentes (Figura 13, item (a)), em que suas bases são quadriláteros que possuem dois ângulos opostos retos e formam um cubo, quando dispostos conforme a vista superior exposta na Figura 13 no item (b). As peças serão entregues aos participantes sem informações sobre suas características, isto é, não será comentado sobre a congruência das peças e a medida dos ângulos das faces.

Figura 13 – Material manipulável utilizado para atividade 1 da Tarefa III



(a) (b)

Fonte: Organizado pela autora.

Nesta atividade (Quadro 46) deve-se, primeiramente, agrupar as quatro peças de modo a formar um cubo. Este processo de agrupamento das representações de prismas é semelhante ao realizado na mobilização da apreensão operatória mereológica, pois é a organização de peças que formam um objeto sem alterar a dimensão. Considerando que o registro material desencadeia representações semiótica, neste caso, representações figurais, compreende-se que a apreensão operatória mereológica pode ser mobilizada, assim como, a apreensão perceptiva, mobilizada ao visualizar o objeto final.

Quadro 46 – Organização da atividade 1 da Tarefa III

(continua)

| |
|---|
| 1) Organize as quatro peças de modo a formar um cubo.<br>1-a) Quais estratégias foram utilizadas para montar o cubo?<br><br>1-b) Enumere em ordem decrescente de prioridade (1 mais importante e 4 menos importante) os itens que você considerou relevante ao organizar as peças. |

Quadro 46 – Organização da atividade 1 da Tarefa III

(conclusão)

| |
|---|
| (  ) Medida dos ângulos.<br>(  ) Medida das arestas.<br>(  ) Simetria das peças.<br>(  ) Outro(s). Qual(is)?______________________________ |

Fonte: Organizado pela autora.

No item *1-a* é solicitado que se indique quais estratégias foram utilizadas durante a organização das peças para estruturar um cubo. No item *1-b* é requerido que se aponte a relevância considerada em cada processo realizado para a composição do cubo, a partir da organização das quatro peças. Ao realizar esta atividade, os acadêmicos estão refletindo sobre suas ações, revisitando procedimentos e conceitos/conteúdos, bem como organizando seus argumentos ao trabalhar com este material manipulável.

A atividade 2 (Quadro 47) foi adaptada de O4 de modo que seja explorada a Geometria Espacial de Posição. Para que se possa resolvê-la é necessária a realização de “cortes” no sólido descrito, para tanto, é preciso reconhecer qual a posição relativa entre os planos que cortam suas faces. Bem como, a identificação da organização das partes obtidas por meio dos “cortes” no objeto inicial. Nesta atividade, o objeto mencionado é um paralelepípedo, mas é apresentada a característica que este possui seus lados com medida *a*, logo um cubo, esta é a primeira percepção que o estudante deve ter.

Quadro 47 – Organização da atividade 2 da Tarefa III

| |
|---|
| 2) Um paralelepípedo reto que possui a medida dos seus lados *a* está inteiramente coberto com papel. Para realizar uma divisão deste objeto, duas a duas faces perpendiculares entre si foram cortadas, cada uma, por três planos distintos que possuem a mesma distância entre si e as faces do sólido. Justifique suas respostas para as questões abaixo.<br><br>2-a) Desenhe este sólido, identificando os planos que contém as faces e os planos das secções.<br><br>2-b) Identifique e classifique os planos das secções em relação as suas posições relativas?<br><br>2-c) O sólido ficou dividido em quantas partes? Cite, pelo menos, três características de cada parte.<br><br>2-d) Quantas partes não possuem nenhuma face coberta com o papel? Por quê?<br><br>2-e) Quantas dessas partes possuem apenas uma face coberta com o papel? Por quê?<br><br>2-f) Quantas dessas partes possuem exatamente duas faces cobertas? Por quê?<br><br>2-g) Quantas dessas partes possuem três faces cobertas com o papel? Por quê? |

Fonte: Adaptado de Pohl (2011, p 186-188).

O item *2-a* solicita a representação figural do objeto descrito, isto é, o cubo inicial e os planos que realizam as secções neste objeto. Desta forma, pode-se classificar como uma atividade de conversão da representação em língua natural para a figural. Salienta-se que a representação requerida tem o intuito de dar suporte na resolução dos itens seguintes.

No item *2-b* é proposta a identificação e classificação quanto às posições dos planos das secções realizadas. Esta atividade requer que os estudantes visualizem, a partir da representação figural realizada anteriormente, as relações entre os planos que efetuam os "cortes" no sólido descrito. Neste item, as apreensões perceptiva e discursiva devem ser mobilizadas, visto a necessidade de identificação dos planos por meio do visual e de suas descrições relacionadas aos seus posicionamentos. Salienta-se que a apreensão operatória de posição pode ser utilizada, de forma mental, no intuito de verificar a posição dos planos por outros ângulos. Assim como, a apreensão operatória mereológica, que mesmo neste item não sendo solicitada de forma explicita a repartição do cubo em objetos de mesma dimensão, estes a partir de suas características podem contribuir para compreensão das posições dos planos.

É solicitado, entre os itens *2-c* ao *2-g* da atividade 2, a quantidade de partes que o objeto inicial ficou dividido, as características destas e o reconhecimento das partes que ficaram com alguma parcela de papel em suas faces. Ao mencionar partições e se manter em uma mesma dimensão, neste caso, a dimensão 3, pode-se afirmar a mobilização da apreensão operatória mereológica, pois esta é necessária para o desenvolvimento da resolução do problema. Assim como, as apreensões operatória posicional, perceptiva e discursiva, tendo em vista a possibilidade de realizar mentalmente a rotação da figura e sua visualização (imagem e propriedades).

A próxima seção apresenta a exploração das atividades desenvolvidas, isto é, as resoluções realizadas pelos licenciandos. A organização desta seção está disposta em subseções específicas para as tarefa executada.

## 5.2 EXPLORAÇÃO DO BLOCO DE TAREFAS

Cada tarefa foi realizada em um encontro, estes ocorreram no mês de novembro de 2018, em um total de três encontros. Sete acadêmicos participaram do desenvolvimento das atividades, optou-se por organizar a turma em duas duplas e um trio de escolha dos próprios sujeitos, tendo em vista que estes no decorrer das aulas do componente curricular de

Educação Matemática II tinham o hábito de realizar as atividades em conjunto. Assim estabeleceram-se três equipes, estas foram denominadas como A[41], B[42] e C[43].

As tarefas foram disponibilizadas aos participantes de forma impressa durante os encontros e também expostas com o auxílio de um projetor multimídia para que, após a realização das atividades, discussões sobre as resoluções estabelecidas pelos acadêmicos fossem feitas. Para o desenvolvimento da atividade 3 da Tarefa II, utilizou-se *notebook* para operar o *software* de Geometria Dinâmica, neste caso, o GeoGebra. A escolha por este programa se deu por ser um *software* gratuito e compatível aos sistemas operacionais Windows e Linux e já instalados nas máquinas disponíveis para a realização da pesquisa. Assim como, conforme Novak (2018), por este favorecer a exploração de figuras e sólidos geométricos, bem como a organização de conjecturas, apreensões figurais e desconstrução dimensional.

### 5.2.1 Tarefa I

No primeiro encontro, realizou-se uma breve apresentação da pesquisadora com a turma e de como iriam decorrer os próximos encontros. Ressalta-se que o conceito/conteúdo a ser abordado durante a investigação não foi mencionado aos acadêmicos, tendo em vista que esta informação poderia influenciar na resolução da primeira atividade a ser desenvolvida com o grupo.

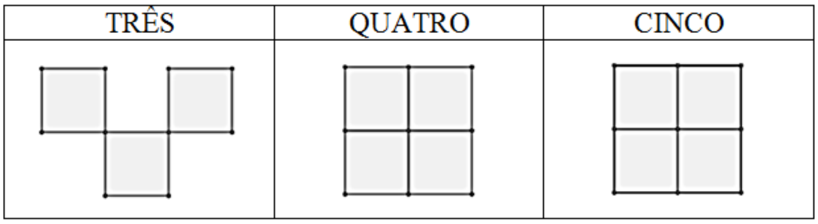
Na atividade 1 da Tarefa I, foi entregue a cada participante 12 canudos de mesmo tamanho e uma linha para que construíssem os quadrados solicitados. Não foi mencionado em momento algum que as construções deveriam se manter em um mesmo plano.

As possíveis construções pensadas para a realização desta atividade em seu item *1*, estão apresentadas no Quadro 48. Na primeira construção é necessário utilizar 12 canudos para formar três quadrados, assim criam-se figuras que não possuem lados adjacentes. Na segunda construção, para organizar quatro quadrados, utilizou-se da conexão dos mesmos por meio de seus lados e vértices. Até o momento, os lados dos quadrados estão sendo formados pela mesma unidade de medida, mas para visualizar cinco quadrados construídos com os canudos é indispensável mudar o modo de ver. Nesta nova composição, manteve-se a construção anterior e considerou-se o quadrado que possui como unidade de medida dois

[41] Composta por A1 e A2.
[42] Composta por B1 e B2.
[43] Composta por C1, C2 e C3.

canudos. Logo, a organização de cinco quadrados por meio de 12 canudos é formada por um quadrado de unidade dois que está subdividido em quatro quadrados que possuem como unidade de medida apenas um canudo.

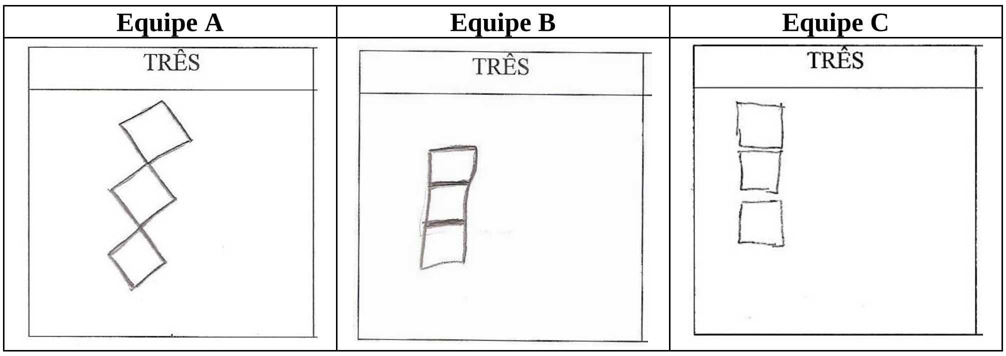
Quadro 48 – Possível solução para atividade 1 da Tarefa I




Fonte: Organizado pela autora.

Destaca-se que nenhuma das construções realizadas pelos participantes (Quadro 49) para a organização de três quadrados foi igual a idealizada para a resolução da questão. A Equipe A organizou três quadrados e os uniu por meio de seus vértices, tanto na construção realizada com o material concreto quanto na representação figural, concluindo desta forma o solicitado pela atividade. As Equipes B e C ao estruturar os quadrados com os canudos e a linha, obtiveram a mesma solução, uniram as formas através de suas arestas utilizando todo o material disponível. No entanto, as representações figurais realizadas foram distintas, ambas produziram três quadrados, mas ao observar a figura apresentada pela Equipe B e tentar reproduzi-la utilizando o material, seria necessário apenas o uso de 10 canudos, já a representação da Equipe C demarca o uso de todos canudos disponibilizados para a construção.

Quadro 49 – Resolução das equipes para atividade 1 da Tarefa I




Fonte: Dados da pesquisa.

Como já dito no Capítulo 3, materiais manipuláveis podem desencadear representações no registro figural, posto isto e analisando a resolução dos acadêmicos, percebe-se dificuldades de alguns deles na transformação da visão de um registro material para o registro figural, já que nesta transição algumas características não foram preservadas. Sendo assim, todas as equipes conseguiram realizar a conversão da representação em língua natural para a figural tendo com auxílio o registro material, sendo que apenas uma equipe a executou de forma equivocada.

A realização das construções que solicitavam quatro e cinco quadrados tinham a mesma organização, sendo necessário apenas mudar o ponto de vista. Destaca-se que todos os participantes chegaram na mesma representação material e figural estabelecida pela pesquisadora na elaboração das atividades. No entanto um fato chamou atenção, a Equipe A construiu as representações, figural e material, para solucionar o questionamento sobre os quatro quadrados sem conseguir obter uma resposta para a outra construção. Enquanto as Equipes B e C conseguiram elaborar e representar apenas os cinco quadrados. Duval (2003, p.45, tradução nossa) afirma o quão difícil, "se não quase impossível, ver algo diferente do que identificamos à primeira vista em um desenho" e perante este acontecimento, confirma-se o quanto a primeira visão de algo nos limita ao reconhecimento de outras possibilidades.

O item *1-a* afirmava a possibilidade da construção de mais de cinco quadrados utilizando todo o material fornecido e questionava sobre a quantidade de quadrados que o participante conseguiria construir tomando as mesmas condições. Um dos integrantes da Equipe A identificou de imediato o que deveria ser construído e comentou com seu colega: "Só fazer um cubo!". Partindo deste comentário, na resposta e justificativa solicitada, escreveram: "Conseguimos construir com 6. Um cubo possui 6 faces e todas as faces são quadrados" (Excerto Equipe A), após isto, iniciaram a construção do cubo com o material manipulável disponível.

Já as Equipes B e C buscaram diferentes maneiras de reorganizar os canudos, mas sempre permanecendo em um mesmo plano. Depois de diversas tentativas destes participantes, a pesquisadora realizou uma intervenção na qual informou que seria necessário sair da segunda dimensão. Após este aviso, os participantes logo identificaram que deveria ser realizada a construção de um cubo.

As justificativas apresentadas foram "Fazendo um cubo podemos ter 6 quadrados" (Excerto Equipe B) e "06, com a construção de um cubo" (Excerto Equipe C). Ambas respostas, assim como a exposta pela Equipe A, mostram que os participantes compreendem que o sólido cubo é formado por seis quadrados. Destaca-se, porém que nenhuma equipe mencionou que este são congruentes, tendo em vista que a construção anterior possuía quadrados com lados de medidas diferentes, ou que o cubo é formado por 12 arestas, que é a mesma quantidade de canudos fornecidos. Logo, pode-se dizer que estes mobilizaram um tratamento na língua natural obtendo o auxílio do registro material.

Para realização do item *1-b*, o qual solicitava fotos que mostrassem o cubo em diferentes perspectivas, foi disponibilizado aos participantes, uma placa de isopor, palitos para fixar o objeto construído e folhas brancas para utilizar como fundo para as imagens. Salienta-se que todos os acadêmicos se engajaram nesta atividade, isto é, cada um fotografou, por meio de seu *smartphone*, ao menos uma perspectiva de seu cubo e enviou por meio de um aplicativo para a pesquisadora.

De posse das imagens fornecidas pelos licenciandos, percebeu-se que, ao menos, uma das perspectivas escolhidas por eles se semelha à vista usual do cubo (Quadro 50), em outras palavras, aquela vista presente na maioria das representações figurais que busca ilustrar o cubo, em especial, em livros didáticos destinados a Educação Básica.

Quadro 50 – Resolução das equipes para o item 1-b da Tarefa I com vista usual do cubo

| **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|
|  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

Obtiveram-se também perspectivas do cubo diferentes das usuais, como, por exemplo, as expostas no Quadro 51. As Equipes A e C mostraram vistas bem semelhantes, que evidenciam as quatro arestas paralelas entre si contidas no cubo, organizando-as de forma paralela as bordas da fotografia.

Quadro 51 – Resolução das equipes para o item 1-b da Tarefa I com vistas diferentes do cubo

| Equipe A | Equipe B | Equipe C |
|---|---|---|
|  |  |  |

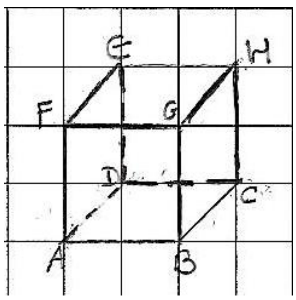
Fonte: Dados da pesquisa.

Já a Equipe B capturou a vista frontal ou vista superior do cubo, a qual expõe apenas uma das faces do objeto na fotografia, se aproximando da imagem de um quadrado, ou seja, apenas quatro arestas ficam visíveis. Diante das imagens apresentadas pelas equipes, pode-se constatar que a perspectiva usual do cubo influencia na visão dos acadêmicos, tendo em vista que esta foi a primeira opção de ângulo das equipes. Percebeu-se que os demais pontos de vista foram apresentados por exigência da atividade, caso contrário, teriam exposto apenas o ponto de vista usual.

A atividade 2 da Tarefa I que solicitava, em um primeiro momento, o desenho de um cubo em uma malha quadriculada juntamente com a nomeação de seus vértices e a descrição do sólido em relação aos seus planos, induzia os acadêmicos a desenhar o cubo similar a sua representação usual, tendo em vista que desta forma os vértices a serem nomeados ficam visíveis. Os desenhos e descrições realizadas pelos participantes estão apresentados no Quadro 52.

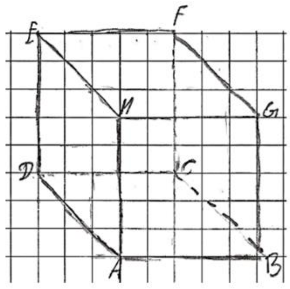
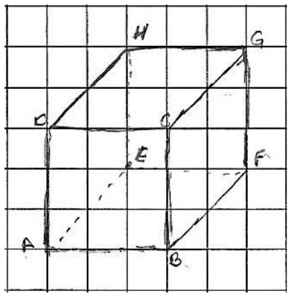
Quadro 52 – Resolução das equipes para a atividade 2 Tarefa I

(continua)

| Participantes | Representação figural | Descrição |
|---|---|---|
| **Equipe A** |  | Nomenclatura:<br>α: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{FG}$<br>β: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{BC}$<br>γ: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{DC}$<br>ϕ: plano a partir do ponto F e da reta $\overleftrightarrow{AD}$<br>δ: plano a partir do ponto F e da reta $\overleftrightarrow{AB}$<br>θ: plano a partir do ponto A e da reta $\overleftrightarrow{DC}$<br>O plano α é perpendicular aos planos β, γ, ϕ e δ<br>Esses, por sua vez são perpendiculares ao plano θ. |

Quadro 52 – Resolução das equipes para a atividade 2 Tarefa I

(conclusão)

| Participantes | Representação figural | Descrição |
|---|---|---|
| **Equipe B** |  | O plano ABCD é paralelo ao plano EFGH, assim como, o plano EHAD é paralelo ao FGCB e o AMGB // EFCD. |
| **Equipe C** |  | O cubo é formado por 6 planos onde (ABCD // EFGH) $\perp$ (BFGC; CDHG; ADHE; ABFC). |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os acadêmicos representaram o cubo utilizando as demarcações da malha quadriculada por meio de traços contínuos e pontilhados, que retratam, respectivamente, arestas que estão à frente e que estão por detrás do objeto do ponto de vista organizado. Este fato demonstra a preocupação dos participantes em expressar a profundidade existente no sólido.

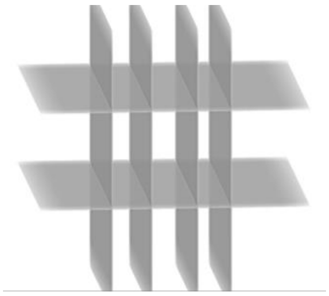
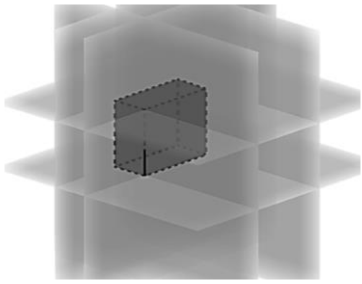
Quanto à nomeação dos vértices do cubo, a forma usual encontrada em livros didáticos da Educação Básica e nas bibliografias analisadas é a mesma apresenta pela Equipe C. Esta descreve uma das faces pela sequência de pontos A, B, C e D, em que o próximo ponto, E, é o extremo da aresta que contém o ponto A como sua outra extremidade, assim a aresta $\overline{AE}$ e é perpendicular as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, por exemplo. Os pontos F, G e H são nomeados respeitando o mesmo sentido utilizado na formação da primeira face.

As Equipes A e B nomearam o ponto E como sendo o extremo da aresta que contém o ponto D como sua extremidade, assim a aresta $\overline{DE}$ é perpendicular as arestas $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$. Quanto a ordem de nomeação do restante dos vértices, a Equipe A adotou o mesmo sentido utilizado para a primeira face. A Equipe B utilizou o sentido oposto. Salienta-se que não há uma forma correta para nomear os vértices, há apenas uma forma usual.

Entende-se por descrição de um objeto matemático, quando, por exemplo, a informação dada permite compreender de que objeto se trata ou até mesmo reproduzi-lo.

Desta forma, pode-se afirmar que os acadêmicos não atingiram o objetivo desta parte da tarefa, pois ao representar de forma figural as descrições expostas no Quadro 52, obtêm-se apenas algumas organizações necessárias para constituição do cubo (Quadro 53). Posto isso, evidencia-se que as equipes demonstraram dificuldades na representação em língua natural para apontar as características necessárias do objeto em questão.

Quadro 53 – Representação figural a partir das descrições apresentadas pelas equipes para a atividade 2 Tarefa I

| **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|
|  |  |  |

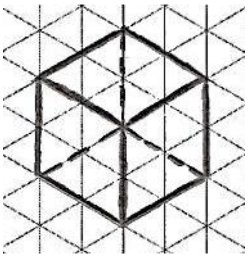
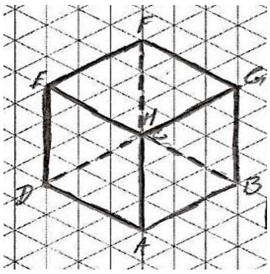
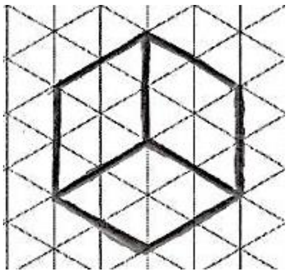
Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A informou que haviam dois planos distintos que eram perpendiculares a outros quatro planos, mas não mencionou as posições relativas entre os planos $\beta$, $\gamma$, $\phi$ e $\delta$, possibilitando, por exemplo, que estes fossem paralelos entre si, desta forma não determinando um cubo. A Equipe B, ao contrário da Equipe A, mencionou apenas os planos paralelos e não as situações de perpendicularidade, assim essa descrição pode ser interpretada como uma sequência de planos paralelos. Já a Equipe C utilizou uma forma de escrita não usual em Matemática, mas citou as situações de perpendicularidade e paralelismo existente entre os planos, no entanto, não mencionou a distância contida entre os elementos, viabilizando que este seja um paralelepípedo e não especificamente um cubo.

Nesta atividade, pode-se afirmar que as apreensões perceptiva e discursiva foram mobilizadas, pois as equipes realizaram a representação figural do cubo na malha quadriculada para então utilizá-la como auxílio na descrição do objeto a partir de seus planos, mobilizando assim a apreensão sequencial. Com esta informação, também, se pode perceber que, em termos de transformações cognitivas, os participantes realizaram em um primeiro momento a conversão da representação em língua natural para a figural ao representarem o objeto e após realizaram a conversão da representação figural para a língua natural para designar o cubo.

O item *2-a* questiona sobre a possibilidade de representar o cubo em uma malha isométrica, as ilustrações e justificativas fornecidas pelos participantes estão apresentadas no Quadro 54.

Quadro 54 – Resolução das equipes para o item 2-a da Tarefa I

| **Participantes** | **Desenho** | **Justificativa** |
|---|---|---|
| **Equipe A** |  | É possível, pois as linhas diagonais são paralelas entre si, assim como, as linhas na vertical. |
| **Equipe B** |  | Análogo ao cubo acima. |
| **Equipe C** |  | Sim, pois é possível estabelecer 6 planos com as características de um cubo na malha isométrica. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto às justificativas apresentadas, a Equipe A afirmou a possibilidade de construção do cubo se fundamentando no paralelismo das retas que formam a malha isométrica, fato que não foi mencionado (paralelismo) na descrição anterior dada por estes participantes. A Equipe B apenas relatou que seria análogo ao caso anterior, porém as malhas são distintas. Quanto à abertura dos ângulos, a malha quadriculada tem a medida de 90° e a malha isométrica 60°, desta forma, cada uma possui suas peculiaridades ao representar o cubo. A Equipe C mencionou que por meio da malha isométrica foi possível estabelecer seis planos que mantém as características de um cubo. No entanto, os acadêmicos demarcaram apenas três planos e com relação as característica não pode-se afirmar que estas são mantidas como um todo, pois o perpendicularismo existente entre as arestas do cubo não fica evidente por meio desta representação.

A Equipe C, diferente das outras equipes, demarcou apenas as faces visíveis em perspectiva do cubo e não concordou com a afirmação sobre a facilidade de visualizar a representação do sólido na malha formada por triângulos equiláteros. Uma possibilidade para a causa desta complexidade, pode ser então a falta das arestas pontilhadas que haviam nas construções dos participantes que fizeram a afirmação. Pois olhar a primeira vista a representação realizada pela Equipe C, sem que seja fornecida uma descrição, esta se assemelha a um hexágono dividido em três partes congruentes.

Assim como na atividade anterior (item *2*), os licenciandos realizaram primeiro a representação figural, mesmo que esta não fosse solicitada de forma direta pelo enunciado da atividade, para então buscar a justificativa da possibilidade de construção do objeto na malha isométrica. Esta informação, também, permite considerar que os acadêmicos ainda não haviam realizado a representação de um cubo neste tipo de malha. Sendo assim, compreende-se que ao resolver a questão, houve primeiramente uma conversão da representação em língua natural para a figural e após uma conversão da representação figural para a língua natural. Em termos de apreensões, pode-se constatar que a perceptiva, discursiva e operatória de posição foram mobilizadas após a realização da representação figural, sendo ambas utilizadas para responder ao questionamento do item *2-a*.

Aproveita-se para relatar a parte da atividade 4 que faz referência a atividade 2, a qual buscou indagar sobre a contribuição de elementos, como: representação figural; objeto manipulável; imagem mental, que influenciaram na resolução das atividades. O Quadro 55 expõe os percentuais indicados pelos acadêmicos a respeito da influência de cada elemento citado.

Quadro 55 – Resolução das equipes para a atividade 4 em relação a atividade 2 da Tarefa I

| **Elemento** / **Participantes** | **Representação Figural** | **Objeto manipulável** | **Imagem mental** |
|---|---|---|---|
| **Equipe A** | 20% | 0% | 80% |
| **Equipe B** | 0% | 100% | 0% |
| **Equipe C** | 30% | 40% | 30% |

Fonte: Dados da pesquisa.

Mesmo percebendo influência da representação figural na resolução da atividade 2, os participantes, ao serem questionados sobre a intervenção dos elementos, não mencionaram com tanta ênfase esse tipo de representação. A Equipe A apontou que a imagem mental do cubo foi o elemento que mais influenciou na resolução. Já as Equipe B e C evidenciaram o objeto manipulável, neste caso, o cubo produzido com canudos, sendo que a Equipe B atribuiu 100% da influência sob a resolução para este elemento.

A atividade 3 da Tarefa I, demandava entendimentos sobre vértices, arestas, faces, isto é, elementos de um sólido e sobre posições relativas a arestas e faces. Os participantes ao completarem as descrições estabelecidas não apresentaram nenhum equívoco nas respostas finais. No entanto, durante essa realização surgiram alguns questionamentos expostos pelas Equipes A e B. A Equipe A questionou sobre o que seriam arestas reversas, tal informação foi exposta somente para estes licenciandos e dada sequência a atividade.

A Equipe B, em uma discussão interna, comentou que arestas ortogonais são diferentes de arestas reversas e que desta forma haveriam apenas arestas ortogonais na organização do cubo. No entanto, ao explicar isto a pesquisadora e recorrer ao registro material manipulável para exemplificar, a equipe identificou o equívoco, ao verificar a existência de arestas reversas que formam um ângulo reto em faces distintas do cubo, compreendendo assim que quaisquer arestas ortogonais são reversas, tendo em vista a Definição 1[44].

A partir desta atividade evidenciou-se que, na maioria dos itens, os participantes reconheceram de forma plena os elementos do cubo e compreenderam as posições relativas entre seus elementos de forma a manter as propriedades do objeto. Ainda ressalta-se que, mesmo a atividade solicitando sua resolução como um complemento de uma representação em língua natural, os licenciandos se apoiaram na representação material para soluciona-lá. Este fato é evidenciado pelos participantes na descrição da próxima atividade.

Na atividade 4 da Tarefa I, a parte referente a análise da execução da atividade 3 (Quadro 56) revelou que os acadêmicos destinaram no mínimo 50% do percentual ao objeto manipulável. Desta forma, verifica-se a notável influência deste material para a resolução da atividade. O cubo organizado com canudos pode ter sido o mais recorrido pelo fato de ter suas arestas e vértices mais evidentes, assim como a possibilidade de realizar a rotação que proporciona ver por diferentes ângulos.

[44] Localizada na p. 45.

Quadro 56 – Resolução das equipes para a atividade 4 em relação a atividade 3 da Tarefa I

| Elemento / Participantes | Representação Figural | Objeto manipulável | Imagem mental |
|---|---|---|---|
| **Equipe A** | 20% | 60% | 20% |
| **Equipe B** | 50% | 50% | 0% |
| **Equipe C** | 25% | 50% | 25% |

Fonte: Dados da pesquisa.

A representação figural também foi utilizada pelas Equipes A, B e C, que atribuíram as porcentagens 20%, 50% e 25%, respectivamente. Já a imagem mental foi mencionada apenas pelas Equipes A e C. Vale destacar que ao realizar comentários ao final desta atividade, as Equipes A e C mencionaram que talvez a utilização do *software* GeoGebra auxiliasse tanto quanto o objeto manipulável na resolução da atividade 3.

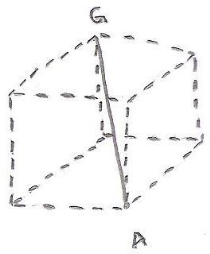
## 5.2.2 Tarefa II

O segundo encontro contou com a presença de seis acadêmicos, pois um dos integrantes da Equipe C não compareceu a aula. Neste encontro, deu-se o desenvolvimento das atividades que compõem a Tarefa II.

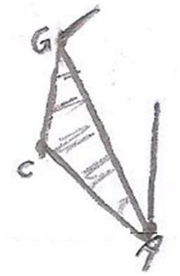
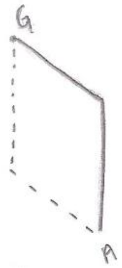
A atividade 1 explora entendimentos sobre colinearidade e coplanaridade de pontos por meio de representações figurais e justificativas em língua natural. Destaca-se que, no decorrer desta atividade, além das representações solicitadas, os acadêmicos realizaram gestos com as mãos para representar posições de retas e planos e "rabiscaram" sobre a representação figural fornecida. O Quadro 57 expõe os esboços e justificativas dos participantes para o item *1-a* em que foram indicados os pontos A e G.

Quadro 57 – Resolução das equipes para o item 1-a da Tarefa II

(continua)

| Pontos A e G | | |
|---|---|---|
| **Participantes** | **Representação figural** | **Justificativa** |
| **Equipe A** |  | *(**X**) colineares ( ) coplanares*<br>A e G são colineares, pois por A e G passa um segmento. |

Quadro 57 – Resolução das equipes para o item 1-a da Tarefa II

| **Pontos A e G** | | |
|---|---|---|
| **Participantes** | **Representação figural** | **Justificativa** |
| **Equipe B** |  | *(**X**) colineares (**X**) coplanares*<br>Por dois pontos distintos sempre passa uma reta, reta essa que está contida no plano que passa por ACG. |
| **Equipe C** |  | *(**X**) colineares (**X**) coplanares*<br>A e G estão no mesmo plano |

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A, a respeito da colinearidade dos pontos indicados, justificou apenas que estes são colineares pelo motivo de pertencerem a um mesmo segmento. A afirmação feita está correta, porém poderia ser mencionado o Postulado 1[45], o qual estabelece que: "Por dois pontos do espaço passa uma e somente uma reta". Já a coplanaridade de dois pontos não foi reconhecida, nem justificada pela dupla. Quanto à representação figural, esta evidenciou o cubo por segmentos pontilhados e o segmento $\overline{AG}$ de forma continua. Pode-se verificar que a perspectiva do cubo foi mantida conforme a figura fornecida no enunciado. Talvez essa não alteração de perspectiva tenha prejudicado a visualização do plano mais evidente que contém, no caso da representação realizada, o segmento $\overline{AG}$, o plano ACG, que divide o cubo em dois prismas congruentes.

A Equipe B foi a que mais se aproximou de uma linguagem formal e generalizada ao justificar a colinearidade dos pontos, evidenciando que por dois pontos distintos sempre existirá uma reta que passa por ambos. Ao explicar a coplanaridade, os estudantes afirmaram haver um plano que contem os dois pontos, mas apresentaram apenas um dos possíveis planos que a reta AG está contida, o plano denominado ACG. Assim por meio desta explanação, pode-se cogitar que a dupla não reconhece a infinidade de planos que passa por uma única

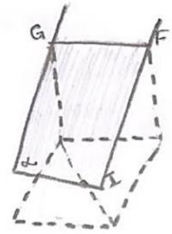
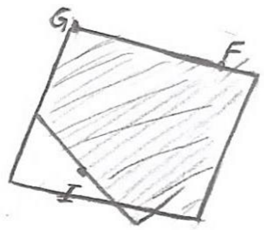
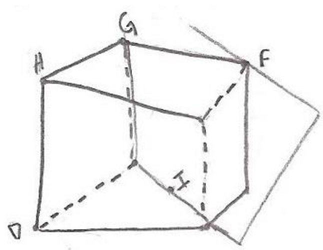
45 Localizada na p. 42.

reta. A representação figural realizada buscou evidenciar o plano ACG, no entanto, este foi limitado pelos segmentos $\overline{GC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AG}$.

A Equipe C não realizou uma justificativa para o fato de os pontos A e G serem colineares e apenas afirmou que estes pertencem a um mesmo plano sem esclarecer o porquê deste fato. Quanto à representação figural elaborada pela equipe, esta evidencia o plano ACG, porém, apenas os pontos A e G foram nomeados. O fato de ter dois segmentos pontilhados e dois com traço contínuo chamou atenção, pois este pode, talvez, ser explicado pela representação figural fornecida do cubo no enunciado da atividade. Nesta tem-se os segmentos $\overline{GC}$ e $\overline{CA}$ de forma pontilhada e o segmento $\overline{AE}$ de forma contínua, como $\overline{EG}$ faz parte da face superior do cubo, este também foi esboçado de forma contínua na representação da equipe.

O item *1-b* da Tarefa II determina três pontos (G, F e I) e solicita esboço e justificativas para os fatos de colinearidade e coplanaridade (Quadro 58). Os participantes afirmaram que os três pontos estabelecidos no item *1-b* são coplanares, no entanto, para o fato da não colinearidade, nenhum dos grupos apresentou argumento.

Quadro 58 – Resolução das equipes para o item 1-b da Tarefa II

| **Pontos G, F e I** | | |
|---|---|---|
| **Participantes** | **Representação figural** | **Justificativa** |
| **Equipe A** |  | *( ) colineares (***X***) coplanares*<br>São coplanares pois conseguimos traçar um plano passando pela reta que contém G e F e o ponto I. |
| **Equipe B** |  | *( ) colineares (***X***) coplanares*<br>Pois passa um plano por GFI. |
| **Equipe C** |  | *( ) colineares (***X***) coplanares*<br>Por definição três pontos quaisquer determinam um plano. |

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A, como no item anterior, elaborou sua justificativa de forma singular, isto é, apenas para os pontos determinados, afirmando que é possível traçar um plano que contenha a reta GF e o ponto I, sendo este o resultado do Teorema 1[46]. Quanto à representação figural exposta, esta apresenta o segmento de reta $\overline{GF}$ e o ponto I no plano denominado α (alfa). Repara-se que, assim como a representação figural no item *1-a* destes acadêmicos, os segmentos contínuos são os que fazem referência com o que se quer mostrar, neste caso o plano α, e os segmentos pontilhados os elementos que servem para complementar a figura.

A Equipe B apenas afirmou que existe um plano formado pelos pontos G, F e I, esta certeza pode ter sido provocada pelo conhecimento do Postulado 3[47], o qual menciona que "Por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um e somente um plano". Porém, a forma de escrita leva a entender que passa um único plano pelo plano GFI, logo a um equívoco na nomenclatura utilizada para citar os pontos, pois estes deveriam estar separados por vírgulas.

A representação figural utilizada para expor o plano GFI pela Equipe B está confusa considerando o posicionamento dos pontos e segmentos demarcados. Pois buscando compreender a representação como uma secção do cubo que passa pelos pontos G, F e I, o ponto G está como um vértice e o ponto F não, assim como também não se compreende qual é o segmento que o ponto I pertence. Percebeu-se que essa equipe procurou manter o segmento $\overline{GF}$ com a mesma angulação da representação do cubo em relação à borda da folha de registros, mas mesmo recorrendo a este artifício, verificou-se a dificuldade em representar o plano que contém uma das arestas do cubo e um ponto pertencente ao centro de uma das faces não formada pela aresta em questão.

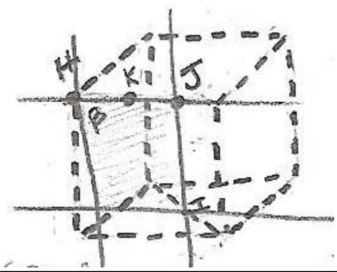
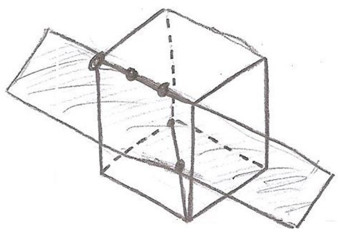
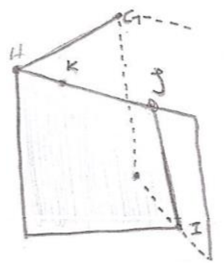
A Equipe C realizou sua justificativa por meio do Postulado 3[48] que afirma que três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles. No entanto, na escrita apresentada pelos acadêmicos, faltou apenas mencionar a não colinearidade destes pontos. Neste caso, a representação figural realizada por estes participantes espõe um cubo na mesma perspectiva utilizada na figura apresentada no enunciado. Os acadêmicos organizaram o cubo com arestas contínuas e pontilhadas, mas o fato inesperado é que as arestas pontilhadas não indicam que estas pertencem a parte detrás do cubo. Desta forma, causando incompreensão

[46] Localizada na p. 43.
[47] Localizada na p. 42.
[48] Localizada na p. 42.

sobre o porquê de diferenciá-las em termos de traçado. Também, salienta-se que o plano exposto não é o que contém os pontos G,F e I, mas o plano formado pelos pontos F, I, C e A.

Na atividade 1, em seu item *1-c*, é mencionado quatro pontos pertencentes ao cubo indicado no enunciado, a questão solicita a avaliação sobre estes serem colineares e/ou coplanares. As representações e justificações dadas pelos acadêmicos são expostas no Quadro 59.

Quadro 59 – Resolução das equipes para o item 1-c da Tarefa II

| **Pontos H, I, K e J** | | |
|---|---|---|
| **Participantes** | **Representação figural** | **Justificativa** |
| **Equipe A** |  | *( ) colineares (**X**) coplanares*<br>São coplanares pois conseguimos traçar um plano passando pela reta que contém H, K, J e o ponto I. |
| **Equipe B** |  | *( ) colineares (**X**) coplanares*<br>Análogo a *1-b*. |
| **Equipe C** |  | *( ) colineares (**X**) coplanares*<br>H, J, K são colineares e conseguimos um plano que passa por I.<br>(H,K,J) = reta<br>I = ponto qualquer<br>Por definição uma reta e um ponto determinam um plano. |

Fonte: Dados da pesquisa.

As equipes reconhecem que os pontos mencionados no item *1-c* são coplanares e não colineares, mas assim como no item anterior, buscam justificar somente o caso que ocorre. Diante dos argumentos apresentados pelas Equipes A e C, compreende-se que estas identificam que os pontos H, K e J pertencem a uma mesma reta. Tendo em vista estas afirmações, estes licenciandos apontam que a partir de uma reta e um ponto pode-se determinar um plano, utilizando assim o resultado do Teorema 1[49], mas não indicam que o ponto I não deve pertencer a reta, para então gerar o plano. A Equipe B apenas mencionou que a justificativa para a coplanaridade dos quatro pontos mencionados na questão é análoga à expressa para o item *1-b* desta atividade. Entretanto, a justificativa dada à situação anterior, os participantes expressaram somente que "passa" um plano pelos pontos citados.

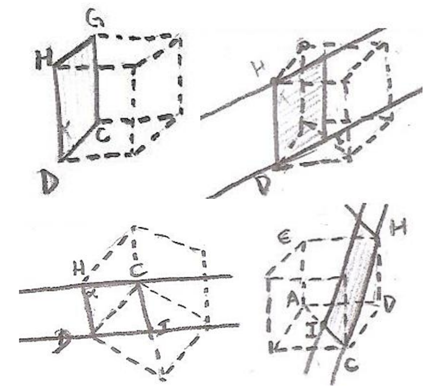
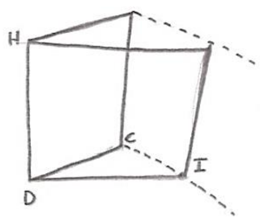
Quanto às representações figurais expostas para o item *1-c*, as Equipes A e B criaram representações corretas que evidenciam os pontos H, I, J e K mantendo a perspectiva da figura apresentada no enunciado da atividade e bastante semelhantes entre si quanto a demarcação do plano que contém os pontos mencionados. Destaca-se que mesmo a Equipe B não apresentando uma justificativa satisfatória para este item, identifica-se que esta reconheceu o plano formado pelos pontos citados.

Ao contrário da Equipe B, a Equipe C apresentou uma justificativa a coplanaridade do conjunto de pontos, mas não conseguiu realizar a representação figural de forma correta. Esta equipe, em sua representação figural, manteve a mesma perspectiva do cubo apresentado no enunciado da atividade, o plano demarcado contém os pontos H, I, J, K e D. No entanto, a partir destes pontos não é possível estabelecer um plano. Tendo em vista as características do cubo, identifica-se que o segmento $\overline{HJ}$ é perpendicular ao segmento $\overline{HD}$, logo, pelo Teorema 2[50], estes segmentos formam um plano que, neste caso, contém uma das faces do cubo (face AEHD). Sabendo que o ponto I pertence ao centro da face ABCD e que esta é diferente da face AEHD, pode-se concluir que não existe nenhum plano que contenha os pontos H, I, J, K e D.

Ainda sobre a atividade 1, agora em seu item *1-d*, o questionamento de colinearidade e coplanaridade é sobre os pontos H, D, I e C. No Quadro 60 aponta-se as justificativas e representações figurais elaboradas pelos acadêmicos para este item.

[49] Localizada na p. 43.
[50] Localizada na p. 44.

Quadro 60 – Resolução das equipes para o item 1-d da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="3">Pontos H, D, I e C</th></tr>
<tr><th>Participantes</th><th>Representação figural</th><th>Justificativa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Equipe A</td><td rowspan="2"></td><td>( ) colineares ( ) coplanares</td></tr>
<tr><td>É possível ter os seguintes planos: plano formado pela face DHGC; plano formado pela reta que contém HD e o ponto I; plano formado pela reta que contém CI e o ponto D; plano formado pela reta CI e o ponto H.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Equipe B</td><td rowspan="2"></td><td>( ) colineares ( ) coplanares</td></tr>
<tr><td>Não existe um plano que contém os pontos HDIC.<br>No caso, a intersecção da reta que passa por DH com a reta que passa por IC é vazia.<br>Não dá pra fazer um plano pois $\overline{HD} \cap \overline{CA} = \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Equipe C</td><td rowspan="2"></td><td>(X) colineares ( ) coplanares</td></tr>
<tr><td>H, D, C estão no mesmo plano ou H, D, I estão no mesmo plano.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A na busca por justificar a não coplanaridade dos pontos citados, mencionou as diferentes combinações de três elementos, dentre os pontos H, D, I e C, que formam um plano. Verificando a nomenclatura utilizada pela equipe ao definir o plano formado pelos pontos C, I e D, os participantes escreveram: “plano formado pela reta que contém CI e o ponto D” (Excerto Equipe A), interpreta-se, neste momento, que “CI” infere-se a notação de segmento de reta e, neste caso, falta a representação do traço na horizontal acima das letras do alfabeto latino em maiúsculo, para então nomear o elemento de forma correta ($\overline{CI}$). Porém, na definição do plano formado pelos pontos C, I e H, os licenciandos mencionaram: “plano formado pela reta CI e o ponto H” (Excerto Equipe A), assim evidencia-se que a escrita de um segmento e de uma reta são reportados da mesma maneira por estes participantes.

Foram quatro representações figurais apresentadas pela Equipe A, uma para cada plano citado. Três delas foram expostas na mesma perspectiva do cubo evidenciado no enunciado da atividade demarcando os pontos e planos requeridos. Mas o que chamou mais atenção foi a representação figural desenvolvida para exemplificar o plano que contém os pontos C, I e H. Nesta a equipe mencionou que "virou o cubo" para facilitar a visualização do plano, isto é, rotacionou o cubo por um ângulo de 180º tendo como eixo de rotação a aresta $\overline{AE}$, por exemplo. Evidencia-se que mesmo a Equipe A expressando e representando de forma figural os possíveis planos a serem gerados com a combinação entre três de quatro diferentes pontos, isto não explica o fato dos pontos H, D, I e C não gerarem um plano. A ocorrência disso pode ter sido consequência da falta de interpretação ou incompreensão do enunciado da questão.

Para justificar a não existência de um plano que contenha os pontos H, D, I e C, a Equipe B se baseou no Teorema 2[51] em que "Por duas retas concorrentes $s$ e $t$ passa um único plano". Os participantes afirmaram: "Não dá pra fazer um plano pois $\overline{HD} \cap \overline{CA} = \emptyset$" (Excerto Equipe B). No entanto, o teorema não garante este resultado, apenas assegura que se há interseção entre as retas, então estas são coplanares. Pois há a possibilidade de duas retas serem paralelas e formar um plano, ou seja, não há interseções entre as retas mas estas são coplanares (Definição 1[52]).

Quanto à representação figural, os participantes da Equipe B traçaram os segmentos $\overline{HB}$ e $\overline{CA}$, mas não esboçaram uma representação para o cubo. A partir da representação apresentada não há como verificar se estes segmentos não se interceptam, pois se prolongarmos cada um deles encontraremos um ponto de interseção, pois não há informações de que estes elementos pertencem a planos distintos. Logo, é necessária a realização da representação do cubo para que se possa identificar que as retas que contêm os segmentos mencionados são reversas (Definição 1[53]), isto é, estão localizadas em planos distintos e não possuem ponto em comum.

A Equipe C afirma que os pontos H, D, I e C são colineares, mas não justifica sua conclusão. Os participantes também não manifestaram que estes são coplanares, fato que deveria ser trivial, tendo em vista que reconheceram que os pontos estariam em uma mesma reta e esta pertence a um plano (Postulado 3[54]). Quanto à justificativa da não coplanaridade, assim como a Equipe A, a Equipe C apenas mencionou a existência de planos formados por três dos quatro pontos citados no item *1-d*. Na representação figural realizada pela equipe, os planos HDC e HDI estão destacados, mas observa-se que os pontos citados não fazem parte

[51] Localizada na p. 44.
[52] Localizada na p. 45.
[53] Localizada na p. 45.
[54] Localizada na p. 42.

de uma mesma reta como constaram os licenciandos. Assim a justificativa apresentada, bem como, a representação construída, não explicam o fato de os pontos H, D, I e C não pertencerem a um mesmo plano ou a uma mesma reta.

Ao finalizar a atividade 1, percebe-se que as equipes mobilizaram apreensões perceptiva e discursiva ao realizar representações figurais e em língua natural em todos os itens. Evidencia-se que a Equipe A no item *1-d* mobilizou a apreensão operatória de posição ao realizar em uma das representações figurais a mudança de ponto de vista do objeto cubo. Este fato ocorreu, provavelmente, pela necessidade de rotação mental do objeto para o reconhecimento de alguma reta e/ou plano, tendo em vista a identificação de coplanaridade e/ou colinearidade dos pontos.

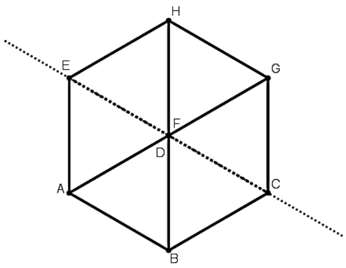
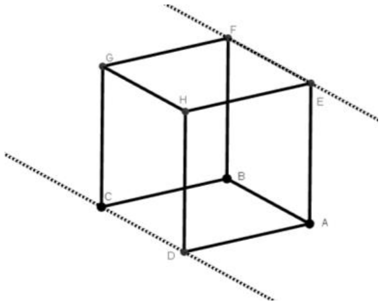
Cabe destacar que houveram dois tipos de transformações cognitivas, ambas tendo como representação de partida o figural e a língua natural, uma tendo como representação de chegada o figural e a outra em língua natural, respectivamente, o desenho e a justificativa solicitados no enunciado da atividade.

Quanto a desconstrução dimensional da atividade 1, esta foi realizada uma vez que o objeto inicial é tridimensional e o questionamento da atividade está relacionado com os pontos pertencentes ao mesmo. Uma observação pertinente a ser feita é que as unidades figurais 1D e 2D, retas e planos, não são mencionadas ou solicitadas durante o enunciado da atividade, mas estas foram fundamentais para resolução dos itens propostos. Desta forma, a desconstrução dimensional ocorreu do 3D a 0D.

A atividade 2 da Tarefa II explora posições relativas entre duas retas; uma reta e um plano; e entre dois planos por meio de uma representação não usual do cubo, na qual os participantes utilizaram justificativas com representações em língua natural buscando uma notação matemática pertinente. Nos quadros, a seguir, destaca-se que estes, além de apresentarem os argumentos expostos pelos participantes, buscam exemplificar o que ocorre entre os entes geométricos por meio da demarcação destes sobre a representação figural fornecida pelo enunciado da atividade e também em uma representação figural que facilite a visualização dos posicionamentos entre os elementos indicados.

O Quadro 61 expõe as relações apontas pelas equipes entre as retas EF e DC.

Quadro 61 – Resolução das equipes para o item 2-a da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posições relativas entre as retas EF e DC</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><th colspan="2">Equipe A</th><th colspan="2">Equipe B</th><th colspan="2">Equipe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{DC}$, pois estão em faces opostas e na mesma direção.</td><td colspan="2">$EF//DC$, pois $\overline{EF}$ e $\overline{DC}$ não se tocam, mas existe um plano que as contém.</td><td colspan="2">Paralelas, estão contidas em planos paralelos.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Os participantes identificaram que as retas citadas no item *2-a* são paralelas. Verificando as representações apresentadas no Quadro 61, compreende-se que os acadêmicos não se apoiaram apenas na representação fornecida pelo enunciado, pois por meio desta, iriam identificar que as retas seriam coincidentes, fato que não ocorreu. Logo, pode-se constatar que houve a mobilização da apreensão perceptiva, discursiva e operatória de posição, pois foi necessário compreender a figura e sua organização, bem como rotacionar a representação do cubo, para então identificar corretamente a posição assumida pelas retas.

Em relação à notação matemática, apenas a Equipe C não utilizou da simbologia de paralelismo "//" para informar a relação entre as retas, optando por escrever o termo "Paralelas". Na busca por justificar a posição entre as retas, as Equipes A e B, de certa forma, recorreram a Definição 1[55], que menciona o fato de que retas paralelas não possuem ponto em comum mas estão contidas em um mesmo plano. A Equipe A ao mencionar que as retas pertencem a faces opostas garante que estas não possuem ponto em comum. E ao referir-se que estas têm a mesma direção (termo mais utilizado na Geometria Analítica) garante o fato de que ao traçar um segmento perpendicular entre as duas retas tendo como extremidades um ponto de cada uma delas, este sempre terá o mesmo comprimento.

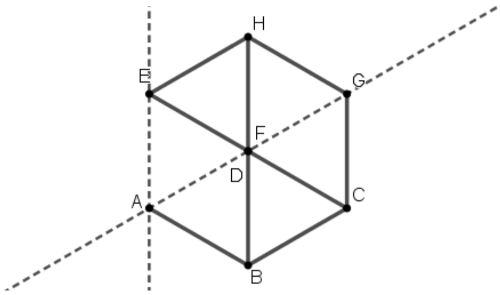
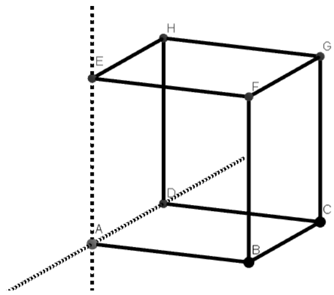
A Equipe C mencionou que as retas "estão contidas em planos paralelos" (Excerto Equipe C), mas somente este argumento não garante o paralelismo entre as retas. Pois, por exemplo, as retas EF e CH também pertencem a planos paralelos, no entanto, não são

[55] Localizada na p. 45.

paralelas entre si, e sim, reversas. A justificativa utilizada pela equipe evidencia apenas que não há ponto em comum entre as retas, assim, pela Definição 1[56], ainda é necessário mostrar que as retas estão contidas em um mesmo plano. Este caso também ocorreu com os participantes do estudo de Muraca (2011) comentada na Secção 2.2.2 desta pesquisa.

No Quadro 62 apresenta-se as justificativas elaboradas pelas equipes referente a posição relativa entre as retas AE e AD.

Quadro 62 – Resolução das equipes para o item 2-b da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posições relativas entre as retas AE e AD</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><th colspan="2">Equipe A</th><th colspan="2">Equipe B</th><th colspan="2">Equipe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$, pois a interseção entre as duas retas forma 90°.</td><td colspan="2">$AE \perp AD$, perpendiculares, pois entre elas forma-se um ângulo reto, ∃ um plano que os contém.</td><td colspan="2">Concorrentes, estão no mesmo plano e se interceptam formando ângulo de 90°.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Os participantes da pesquisa constataram o fato de haver a interseção entre as retas AE e AD e o ângulo de 90° formado entre elas. As duas representações figurais exibidas no Quadro 62 levam a concluir que as retas citadas possuem um ponto em comum, assim como a nomenclatura utilizada para identificar as retas, pois ambas contém o ponto A. Mas pode-se ainda definir que estas são retas perpendiculares por meio da interpretação das representações, compreendendo que os elementos mencionados contém, cada um, uma arestas do cubo e/ou rotacionando o objeto de modo a identificar o ângulo reto formado entre retas. Logo, mobiliza-se as apreensões perceptiva, discursiva e operatória de posição.

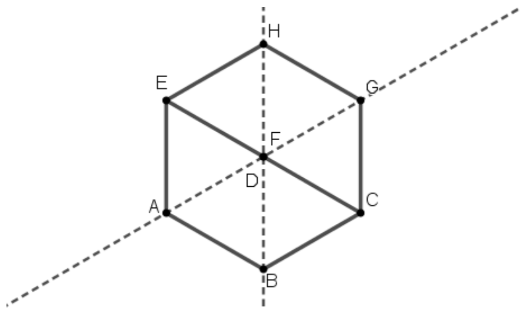
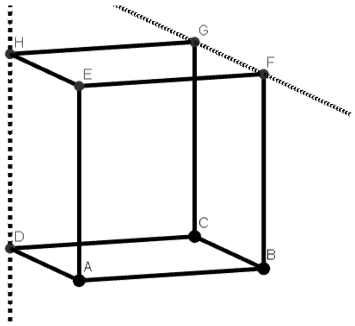
As Equipes A e B optaram por utilizar a simbologia de perpendicularidade "⊥", já a Equipe C mencionou que as retas são concorrentes e apenas em sua justificativa comentou sobre o ângulo reto formado pelos elementos mencionados. Quanto aos argumentos

[56] Localizada na p. 45.

apresentados, todas as equipes indicaram o ângulo de 90° e a interseção e/ou a coplanaridade das retas, o que garante que estas são concorrentes e perpendiculares.

Apresenta-se a seguir (Quadro 63) as justificativas fornecidas pelos licenciandos referentes a posição entre as retas HD e FG.

Quadro 63 – Resolução das equipes para o item 2-c da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posições relativas entre as retas HD e FG</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipe A</td><td colspan="2">Equipe B</td><td colspan="2">Equipe C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{HD} \perp \overleftrightarrow{FG}$, pois estão em faces opostas, mas em direções diferentes.</td><td colspan="2">Reversas (ortogonais), pois não existe um plano que as contém.</td><td colspan="2">Reversas (ortogonais), são retas paralelas que não se interceptam mas forma um ângulo de 90°.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

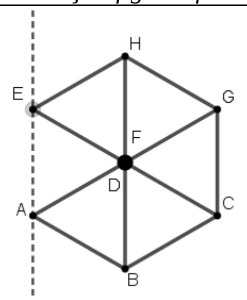
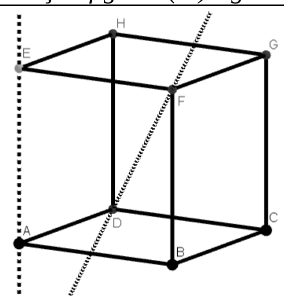
As equipes observaram que as retas HD e FG são ortogonais, o que leva a identificar que, assim como nos itens anteriores desta atividade, foi necessário utilizar outra perspectiva da representação figural além da apresentada pelo enunciado da questão. Pois recorrendo a figura inicial, verifica-se que as retas seriam concorrentes, fato que não ocorre, pois os pontos D e F não são coincidentes.

Apenas a Equipe A utilizou o símbolo para ortogonalidade "$\perp$", mas cabe destacar que estes participantes discutiram essa ideia com a pesquisadora. Já as outras equipes apenas mencionaram que as retas são reversas/ortogonais. Na tentativa por justificar a posição entre as retas, a Equipe A mencionou que estas estão em faces opostas, logo não possuem pontos em comum e que HD e FG possuem direções diferentes, o que não garante que as retas formam um ângulo reto, pode-se afirmar apenas que elas não são paralelas entre si. A Equipe B somente apontou que as retas não são coplanares, logo são reversas, mas, como a Equipe A, o caso da ortogonalidade também não foi argumentado.

A Equipe C indicou em sua justificativa que as retas HD e FG são paralelas pelo motivo de não se interceptarem, mas que estas formam um ângulo reto. Destaca-se que não há como ocorrer o caso mencionado. A equipe na busca por fundamentar que as retas não possuem ponto em comum apresentou apenas o resultado de quando se está na dimensão 2, pois ao se abordar o tridimensional há a possibilidade destas serem reversas, caso que foi afirmado pela equipe.

No Quadro 64 estão apresentados os argumentos mobilizados pelos participantes para justificar a posição entre as retas AE e DF.

Quadro 64 – Resolução das equipes para o item 2-d da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posições relativas entre as retas AE e DF</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><th colspan="2">Equipe A</th><th colspan="2">Equipe B</th><th colspan="2">Equipe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DF}$, pois estão em faces opostas, mas em sentidos diferentes.</td><td colspan="2">Reversas, análogo a 2-c.</td><td colspan="2">Paralelas, estão em plano distintos e não formam ângulo de 90°.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

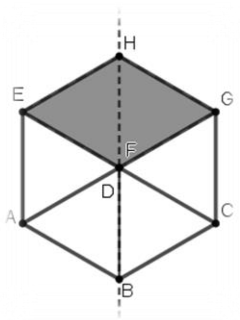
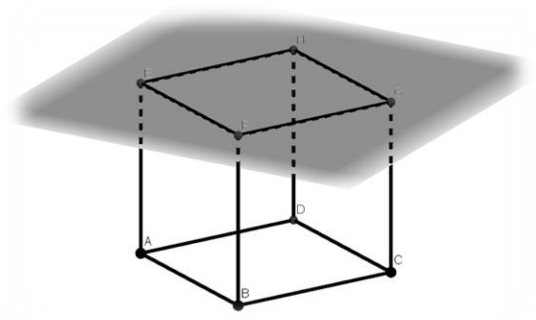
A partir da representação figural fornecida pelo enunciado da atividade os pontos D e F estão sobrepostos, podendo levar ao entendimento de que são pontos coincidentes. Esta representação pode ter influenciado a Equipe C a pensar que as retas mencionadas fossem paralelas, assim como, motivar a argumentação da Equipe A, que classificou estas como ortogonais, tendo em vista a simbologia utilizada.

A Equipe B identificou de forma correta a posição entre as retas AE e DF, reversas. No entanto, para se obter esta compreensão a partir de uma representação figural, era necessário realizar a mudança de perspectiva da figura apresentada no enunciado. Assim, pode-se determinar que as apreensões perceptiva e discursiva foram mobilizadas por todas as equipes, mas como somente a Equipe B reconheceu a posição correta, pode-se afirmar que esta utilizou da apreensão operatória de posição, rotacionando o objeto de modo a verificar a relação entre as retas.

Analisando a justificativa da Equipe A verifica-se que esta obteve dificuldade em visualizar as retas AE e DF, pois além da classificação da posição entre as retas estar equivocada, mencionou que estas estão em face opostas do cubo, sendo que a reta DF não pertencem a nenhuma face do objeto. Já a Equipe C informou que as retas citadas seriam paralelas, porém, argumentou que estas estariam em planos distintos, sendo que pela Definição 1[57], retas paralelas estão contidas em um mesmo plano.

O Quadro 65 expõe os argumentos dos licenciandos quanto a posição relativa entre a reta HD e o plano EFG.

Quadro 65 – Resolução das equipes para o item 2-e da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posições relativas entre a reta HD e o plano formado pelos pontos E, F e G</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipe A</td><td colspan="2">Equipe B</td><td colspan="2">Equipe C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{HD} \perp \alpha$, secante, pois apenas um ponto da reta intercepta o plano.</td><td colspan="2">Secante ao plano.</td><td colspan="2">Reta secante ao plano, intercepta o plano.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do item *2-e*, os acadêmicos começam a se questionar sobre a posição dos pontos D e F, em relação a qual viria primeiro na representação dada no enunciado. A partir deste caso, pode-se afirmar que os participantes não reconhecem uma ordem para a nomeação dos vértices do cubo. Após deixar que estes discutissem sobre a organização dos pontos foi exposto pela pesquisadora a ordem adotada, que é a mesma utilizada pelas obras de nível superior e livros didáticos.

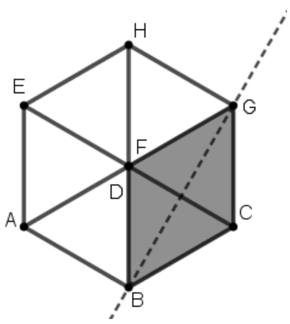
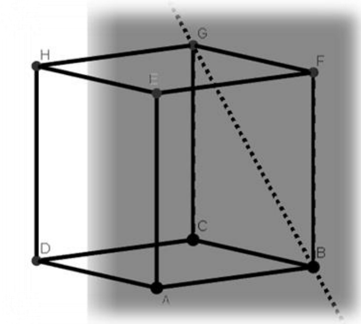
[57] Localizada na p. 45.

A representação figural exposta no enunciado da atividade gera a possibilidade de apontar que a reta HD esta contida no plano EFG. Sendo assim, para classificar de forma correta o posicionamento dos elementos, é necessário mudar a perspectiva da representação figural e então identificar que apenas um ponto da reta HD pertence ao plano EFG.

A Equipe A ainda foi além na classificação, indicando que os elementos mencionados são perpendiculares entre sim, por meio da simbologia matemática “$\perp$”. No entanto, apenas argumentou sobre o fato da reta e o plano serem secantes pelo motivo da reta interceptar o plano em apenas um ponto. A Equipe B somente expôs que a reta e plano são secante e a Equipe C explanou que a reta intercepta o plano, sem informar o elemento no qual ocorre tal intersecção.

As justificativas elaboradas pelas equipes quanto a posição relativa entre a reta BG e o plano CGF estão descritas no Quadro 66.

Quadro 66 – Resolução das equipes para o item 2-f da Tarefa II

<table>
<tr><td colspan="6">Posições relativas entre a reta BG e o plano formado pelos pontos C, G e F</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipe A</td><td colspan="2">Equipe B</td><td colspan="2">Equipe C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overleftrightarrow{BG} \subset \alpha$, pois todos os pontos de $\overleftrightarrow{BG}$ estão contidos no plano.</td><td colspan="2">$\overline{BG} \subset CGP$, pois os pontos B e G que estão na reta estão no plano também.</td><td colspan="2">Secante ao plano, a reta intercepta o plano.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

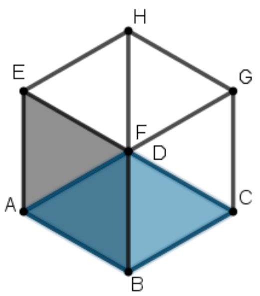
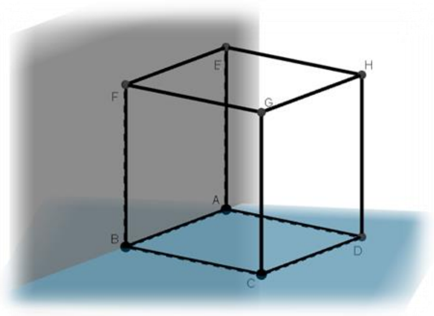
Na tentativa de classificar a posição da reta BG e o plano CGF, por meio da representação figural expressa no enunciado da atividade, pode surgir a ideia de que somente uma parte da reta esta contida no plano, caso este seja limitado pelos segmentos que determinam a face BCGF. Entretanto, um plano é infinito, bem como uma reta, sendo assim, ou a reta está totalmente contida no plano ou estes possuem apenas um, ou nenhum, ponto em comum.

Para uma melhor compreensão da posição entre a reta e o plano é necessário mudar a perspectiva do cubo para que se possa reconhecer que a reta BG está contida no plano CGF, assim como classificaram as Equipes A e B com o auxílio da simbologia de contido “$\subset$”. A Equipe A mencionou que todos os pontos da reta estão contidos no plano. Já a Equipe B utilizou o resultado do Postulado 6[58] que se dois pontos da reta fazem parte do plano então a reta esta contida no plano.

A Equipe C se equivocou ao classificar a reta e o plano como secantes. Este caso pode ter sido influenciado pela representação figural exposta no enunciado, por aspectos conceituais e/ou pela forma de nomear a reta e o plano, pois ambos fazem referência a letra G, tendo assim um ponto em comum que pode ter sido a interseção avaliada pela equipe.

No Quadro 67 estão dispostos os argumentos utilizados pelos participantes ao buscar definir a posição relativa entre os planos ABF e BCD.

Quadro 67 – Resolução das equipes para o item 2-g da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posição relativa entre os planos formados pelos pontos A, B, F e B, C, D</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipe A</td><td colspan="2">Equipe B</td><td colspan="2">Equipe C</td></tr>
<tr><td colspan="2">Secantes, pois os planos se interceptam em uma única reta.</td><td colspan="2">Secantes, pois forma um ângulo reto, e sua interseção é uma reta $\overline{AB}$.</td><td colspan="2">Secantes, os planos se interceptam.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Utilizando a representação figural apresentada no enunciado da atividade 2 para classificar a posição relativas entre os planos ABF e BCD estes se sobrepõem, logo seriam coincidentes. Mas, ao mudar a perspectiva do objeto verifica-se que cada plano contém faces distintas do cubo. Assim, já determina-se que estes não são coincidentes. Restando apenas a

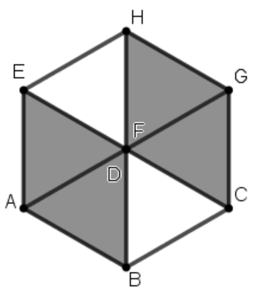
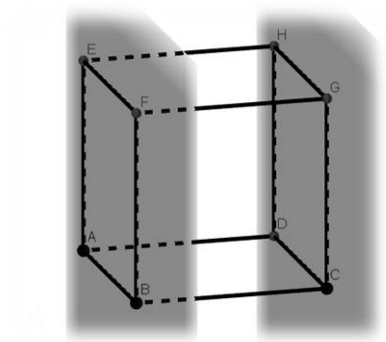
[58] Localizada na p. 43.

possibilidade de serem paralelos, secantes e/ou perpendiculares. As equipes o classificaram como secantes, o que leva a pensar que estas mobilizaram a apreensão operatória de posição.

Os participantes justificaram sua classificação afirmando que há interseção entre os planos e as Equipes A e B ainda apontaram que está gera uma reta. Destaca-se que a descrição realizada pela Equipe B, que ao argumentar sobre a posição dos planos, informou que estes são secantes pelo fato de gerar um ângulo reto. Ressalta-se que para dois planos sejam secantes é necessário e suficiente haver interseção entre eles, sem nenhuma restrição ao ângulo formado entre esses elementos.

Quanto à posição relativa entre os planos ABE e CDH, as justificativas apresentadas pelas equipes estão expostas no Quadro 68.

Quadro 68 – Resolução das equipes para o item 2-h da Tarefa II

<table>
<tr><th colspan="6">Posição relativa entre os planos formados pelos pontos A, B, E e C, D, H</th></tr>
<tr><td colspan="3">Representação figural fornecida</td><td colspan="3">Representação figural (re)organizada</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Justificativas das equipes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equipe A</td><td colspan="2">Equipe B</td><td colspan="2">Equipe C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha//\beta$, pois não há pontos em comum entre os planos.</td><td colspan="2">Paralelos, pois a interseção é vazia.</td><td colspan="2">Paralelos, são planos paralelos, não se interceptam.</td></tr>
</table>

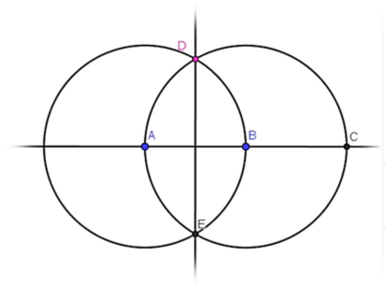
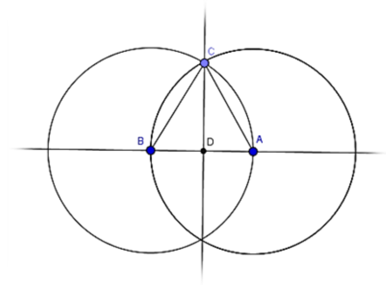
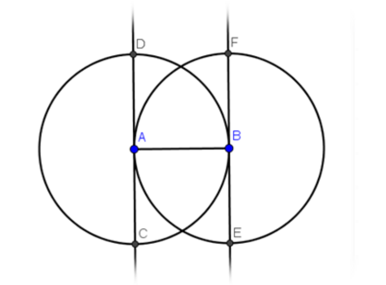
Fonte: Dados da pesquisa.

Questionados sobre a posição existente entre os planos ABE e CDH os participantes os classificaram como paralelos entre si. Logo, identifica-se que houve uma mudança de perspectiva para que houvesse este reconhecimento, pois se os planos fossem demarcados na representação figural apresentada no enunciado da atividade, estes seriam coincidente, ou, se demarcadas apenas as faces contidas nos planos, estes teriam um ponto em comum (caso impossível de ocorrer entre planos). Apenas a Equipe A utilizou a simbologia de paralelismo "//". As justificativas expostas foram semelhantes, baseando-se na ideia de não haver pontos em comum entre os planos citados. Assim, pode-se compreender que o resultado do Teorema 10[59] foi mobilizado.

Após finalizar a atividade 2, a pesquisadora questionou os participantes sobre a facilidade/dificuldade em visualizar os entes geométricos solicitados durante a atividade na representação figural fornecida. As equipes mencionaram que não era mais difícil de visualizar do que em uma representação usual do cubo, mas que era mais "chato", pois o reconhecimento das posições obtidas não era tão explícito e este requeria uma análise mais rigorosa. Ao verificar os protocolos dos participantes, percebeu-se alguns erros de classificação quanto as posições solicitadas, isto pode ter sido ocasionado pela representação figural dada.

Na atividade 3 os participantes realizaram a construção de um cubo no *software* GeoGebra 3D e a descrição dos passos adotados para a mesma no protocolo de registro. As equipes optaram por começar a construção definindo o comprimento da aresta do cubo a partir de uma de suas faces. Para isto, ao se tratar de uma figura plana, na Janela de Visualização 2D disponibilizada pelo GeoGebra, as Equipes A e B construíram primeiro um triângulo equilátero por meio segmentos, circunferências e interseções e estabeleceram que a altura deste triângulo seria o lado da face do cubo. No Quadro 69 apresenta-se a construção realizada pelas equipes.

Quadro 69 – Construção das equipes referente ao lado do quadrado

| **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|
|  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

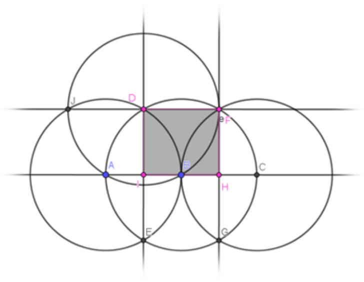
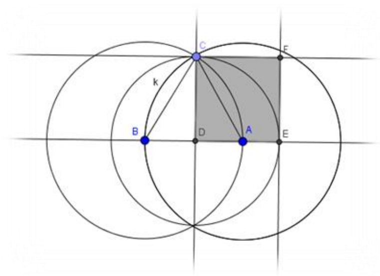
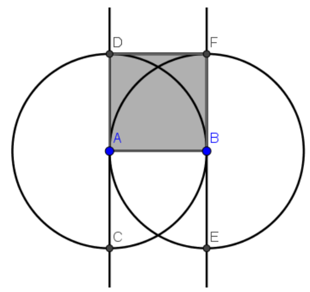
A Equipe C, em um primeiro momento, buscou iniciar a construção da face do cubo na janela de visualização 3D, encontrando algumas dificuldades optou por recorrer ao 2D. Os

[59] Localizada na p. 47.

participantes desta equipe utilizaram dos mesmos recursos que as Equipes A e B, mas definiram o comprimento da aresta do cubo como sendo o raio da circunferência utilizada.

Assim, a partir da definição do comprimento do lado os acadêmicos finalizaram a construção de uma das faces do objeto (Quadro 70), por meio de circunferências tendo como raio o comprimento definido anteriormente para o lado. Desta forma, a partir das construções apresentadas para uma das faces do cubo, entende-se que os participantes compreendem que ao menos uma das faces é um quadrado e que este possui lados congruentes, paralelos dois a dois e por consequência ângulos retos.

Quadro 70 – Construção das equipes referente ao quadrado[60]

| Equipe A | Equipe B | Equipe C |
|---|---|---|
|  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

Construída a primeira face do cubo, os licenciandos partiram para a janela de visualização 3D. Cabe destacar que todos os elementos contido na janela de visualização 2D são representados de forma automática na outra janela. A próxima etapa realizada pelos participantes teve o intuito de organizar as outras faces do cubo. Assim, estes construíram retas perpendiculares à face já existente, em que estas interceptassem os vértices do quadrado. Todas as equipes realizaram este procedimento com o auxílio da ferramenta “Reta perpendicular”, selecionando cada um dos vértices e o plano xOy, plano em que foi construída a primeira face.

As Equipes A e B ainda criaram os planos perpendiculares a face do cubo já organizada, em que a interseção entre o plano e a face era o lado do quadrado. A Equipe A também determinou a reta que passa por uma das diagonais do quadrado. Sublinha-se que estas construções não foram determinantes para a organização final do cubo.

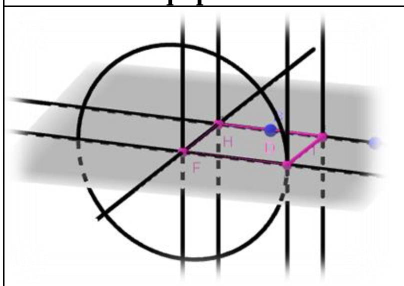
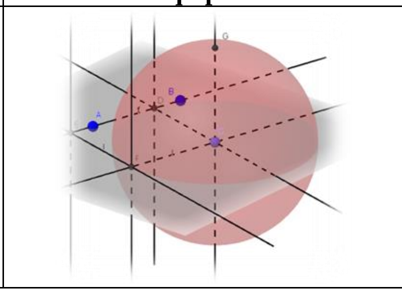
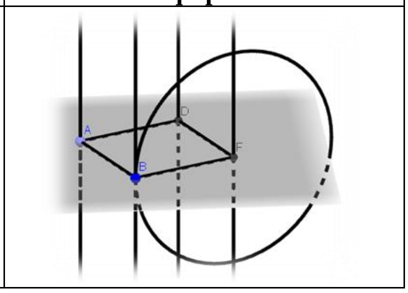
[60] Os quadrados foram demarcados pela pesquisadora.

Na sequência, os participantes se preocuparam em definir a “altura” do cubo de modo que esta tivesse o mesmo comprimento da aresta da face já criada e que, posteriormente, ao movimentar o objeto, este preservasse suas características. Esta foi a etapa da atividade que demandou mais tempo e diálogo entre os licenciandos.

As Equipes A e C utilizaram uma ideia análoga a construção da primeira face, ou seja, mobilizaram circunferências com raio de medida igual ao lado do quadrado já formado e suas interseções com as retas perpendiculares a face. Para tanto, a Equipe C empregou a ferramenta “Círculo dados eixo e um de seus pontos” disponibilizada pelo *software* ao se trabalhar na janela de visualização 3D, assim selecionando cada uma das retas/segmentos pertencentes aos lados do quadrado e um de seus vértices. Sublinha-se que para realização desta etapa a equipe precisou do auxílio da pesquisadora na manipulação da ferramenta selecionada.

A Equipe A não conseguiu fazer o uso da mesma ferramenta utilizada pela Equipe C de forma correta. Entretanto, não solicitou ajuda a pesquisadora e optou por construir as circunferências por meio do campo de entrada, no qual inseriu o comando “Círculo( <Ponto>, <Raio>, <Direção> )”. Sendo assim, as Equipes A e C definiram que a “altura” do cubo são os segmentos em que um de seus extremos é o vértice da primeira face criada e o outro é o ponto de interseção entre a circunferência e a reta perpendicular ao quadrado contido no plano xOy. No Quadro 71 estão apresentadas as construções que visam determinar o lado das arestas laterais do cubo.

Quadro 71 – Construção das equipes referente a altura do quadrado

| **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|
|  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

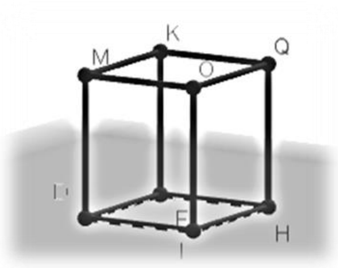
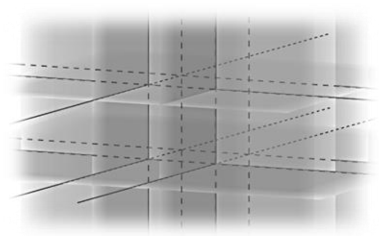
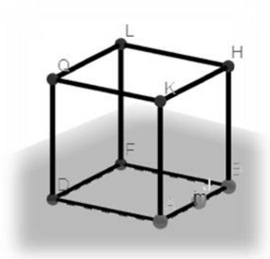
A Equipe B utilizou a ferramenta “Esfera dados centro e um de seus pontos” para determinar o lado das faces perpendiculares ao quadrado já organizado. Os participantes construíram uma esfera, tendo como centro e um de seus pontos dois vértices da face inicial.

Desta forma, estabeleceram que um dos pontos de interseção entre a esfera e a reta perpendicular ao quadrado que contém o centro da esfera é uma das extremidades do segmento que determina o comprimento da aresta do cubo juntamente com o ponto central do objeto criado.

A partir da estruturação das arestas que determinam a “altura” do cubo, as equipes construíram retas paralelas e/ou perpendiculares de modo a elaborar a face superior do objeto. Destaca-se que a organização final realizada pelas equipes respeitou as propriedades do cubo, isto é, ao manipular a representação figural dinâmica do sólido construído, este não perde suas características.

A representação elaborada pelas equipes está disposta no Quadro 72. Evidencia-se que a Equipe A e C destacaram arestas e vértices contidos no cubo, já a Equipe C destacou os planos que contém cada uma das faces do sólido, assim como, as retas que contém cada uma das arestas do objeto. É necessário mencionar que faltou a demarcação dos polígonos, ou seja, as faces do cubo, compreendendo que estas não são formadas apenas por segmentos de reta, pois também possuem uma área interna.

Quadro 72 – Construção das equipes referente ao cubo

| **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|
|   |  |   |

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto à descrição da construção realizada pelas equipes, esta foi verificada juntamente com a descrição de construção fornecida pelo *software* GeoGebra (Apêndice H). Sublinha-se que nenhuma das equipes recorreu ao “Protocolo de Construção”, ferramenta disponibilizada pelo *software*, para elaborar sua descrição. A Equipe A foi a que apresentou de maneira mais coesa sua construção, elencando elementos de forma nomeada, ferramentas e processos utilizados. As Equipes B e C, provavelmente, na tentativa de descrever de modo mais sucinto a construção do objeto, apontaram apenas, em parte, as ações realizadas sem citar a denominação dos elementos, o que dificulta a compreensão dos procedimentos adotados.

Como já mencionado na análise da atividade 2 da Tarefa I, a descrição de um objeto deve possibilitar seu entendimento apenas por meio da representação em língua natural fornecida. No entanto, caso fosse adotada alguma das descrições apresentadas pelos participantes de modo a reproduzi-la, dificilmente se conseguiria representar um cubo seguindo apenas as instruções relatadas. À vista disso, tem-se que o objetivo da atividade foi atingido em parte, pois a representação figural dinâmica foi executada de forma correta mantendo as propriedades do cubo, já a representação em língua natural requerida não foi realizada de forma adequada.

Na atividade 4, os participantes deveriam interpretar seus roteiros de construção referentes ao cubo da atividade anterior, evidenciando o que haviam priorizado no momento de definir a ação, isto é, com o que se preocuparam para manter as propriedades do sólido. As explicações apresentadas pelas equipes estão dispostas no Quadro 73.

Quadro 73 – Resolução das equipes para a atividade 3 da Tarefa II

| **Participantes** | **Interpretação da construção** |
|---|---|
| **Equipe A** | Levamos em conta, inicialmente, as retas perpendiculares para em seguida marcar os pontos e definir o tamanho da aresta do cubo. Isso foi levado em conta tanto no 2D quanto no 3D. |
| **Equipe B** | Criar dois pontos no plano, traçar uma reta pelos dois pontos. Utilizar o compasso para criar um triângulo equilátero. A partir dos pontos iniciais, utilizando a reta traçamos o ponto médio dos pontos e o terceiro vértice ao triângulo equilátero.<br>Repetindo o processo obtemos o quadrado no 3D.<br>Usando a esfera com centro em um ponto do quadrado e o raio vai ser o lado do quadrado.<br>Traçamos retas paralelas ao plano, fazemos o plano fechar o cubo. |
| **Equipe C** | Primeiro tentamos fazer no espaço e depois com dicas vimos que primeiramente tínhamos que formar um segmento e depois teríamos que usar o compasso. Logo depois com dicas de novo levamos ele ao 3D. |

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A, ao interpretar seu roteiro, mencionou somente a preocupação com as retas perpendiculares e com o comprimento da aresta do cubo. Se as retas perpendiculares criadas forem organizadas de três a três, de modo a conter todas as arestas do cubo, não é necessário verificar o paralelismo que ocorre entre algumas arestas específicas. Como a equipe relatou o cuidado para manter as arestas do cubo com o mesmo comprimento esta ação também garante que as faces são congruentes. Assim, é possível perceber que priorizando de forma correta apenas duas características é viável organizar um cubo.

Os acadêmicos da Equipe B em suas interpretações reorganizaram a escrita referente a descrição do cubo da atividade 3. A Equipe C mencionou sua dificuldade inicial, em que buscou começar a construção do cubo na janela de visualização 3D do *software*, e citou algumas das ferramentas utilizadas (segmento e compasso) sem identificar qual a finalidade.

### 5.2.3 Tarefa III

No terceiro encontro ocorreu o desenvolvimento das atividades organizadas para a Tarefa III. Estas foram realizadas por cinco acadêmicos, isto é, as Equipes B e C ficaram desfalcadas, cada uma com um integrante a menos.

A atividade 1 está relacionada com a exploração do material manipulável (Figura 13, Seção 5.1), o qual cada participante da pesquisa recebeu as quatro peças do objeto e a cada equipe foi entregue a primeira parte da atividade (item *1-a*). Nesta etapa, os acadêmicos manipularam as peças com o objetivo de organizar o cubo. Um dos integrantes da Equipe A realizou a organização do objeto de forma bastante rápida e ao finalizar a disposição do cubo mencionou que já havia tido contato com este material em eventos da área. Os outros participantes demandaram um pouco mais de tempo para finalizar a disposição das peças. Primeiramente, utilizaram o método de tentativa e erro, após estes buscaram relações para obter a composição do cubo.

No item *1-a* foi solicitado a menção das estratégias utilizadas para a estruturação do objeto. As respostas dos participantes estão dispostas no Quadro 74.

Quadro 74 – Resolução das equipes para o item 1-a da Tarefa III

| Participantes | Descrição das estratégias realizadas para montar o cubo |
|---|---|
| **Equipe A** | Inicialmente encaixamos duas peças a fim de formar um lado do cubo. E depois viramos as peças para ter o outro lado, ou seja, refletimos. |
| **Equipe B** | Primeiro fiz um lado do quadrado com duas peças depois análogo para o outro. |
| **Equipe C** | Observamos a posição de duas peças que seria possível encaixa-las, então formou-se o primeiro lado do cubo. E consequentemente a metade do cubo. Logo após por tentativas rotacionou-se as peças a fim de que elas se encaixassem para formar a outra metade do cubo. |

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A ao mencionar “lado do cubo” refere-se à aresta deste objeto, tendo em vista as ações realizadas por estes acadêmicos, em que definiram uma das arestas e após tentaram buscar por outra congruente. A ação de refletir foi utilizada após os participantes encaixarem duas peças de forma correta. Estes utilizaram as outras duas com o mesmo encaixe sendo que estas sofreram uma rotação de 180º em relação ao plano base, neste caso, a mesa utilizada para apoiar as peças.

A Equipe B optou por determinar qual seria a face do cubo, isto foi observado durante a execução da organização do objeto. Nesta equipe ocorreu um equívoco na nomenclatura dos elementos do cubo, isto é, utilizou-se o termo “lado” para se referir à face do cubo. Apesar de não mencionar a reflexão ou rotação das peças foi este o passo realizado para compor o sólido solicitado.

Identificando que as peças eram prismas, a Equipe C, procurou estruturar o cubo a partir do comprimento de suas arestas, que foram tomadas a partir da altura do prisma. Após unir duas peças que formaram outras duas arestas deste sólido geométrico, reconheceram que aquelas também formavam a metade do cubo. Por meio de tentativas e erros buscaram os encaixes das outras duas peças.

No segundo momento da atividade, o item *1-a* foi recolhido dos participantes e após entregue o item *1-b*. Neste menciona-se algumas relações que poderiam ter sido utilizadas para a composição do cubo por meio das peças e solicitado aos licenciados que os ordenassem por prioridade, sendo (1) mais importante e (4) menos importante (Quadro 75), isto é, posteriormente ao contato com o material, deveriam identificar qual era a melhor estratégia ao se organizar as peças.

Quadro 75 – Resolução das equipes para o item 1-b da Tarefa III

| **Participantes** | **Equipe A** | **Equipe B** | **Equipe C** |
|---|---|---|---|
| **Medidas dos ângulos** | **4** | **1** | **3** |
| **Medida das arestas** | **3** | **3** | **1** |
| **Simetria das peças** | **1** | **2** | **2** |
| **Reflexão** | **2** | **-** | **-** |

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando os dados apresentados no Quadro 75, a Equipe A mencionou que a simetria existente entre as peças e a atividade de reflexão (citada pelos integrantes da equipe na categoria “Outros”) são as mais importantes para a conclusão da organização do cubo. Destaca-se que esta equipe não considerou como prioridade a primeira composição realizada, a aresta do objeto.

A Equipe B demarcou que a medida dos ângulos seria o mais relevante ao se elaborar o cubo, não condizendo com a sua estratégia, na qual construiu primeiramente a face do sólido. Ou esta informação apenas foi omitida na descrição do uso das estratégicas no item *1-a*, pois para organizar as faces é necessário se deter aos ângulos e/ou arestas. A Equipe C referiu-se a medida das arestas, bem como a simetria das peças, estratégias mencionadas por estes participantes no item anterior.

O movimento realizado na atividade 1 desta tarefa foi o de compor o cubo a partir de objetos 3D. Logo, foi necessário a partir de dados objetos buscar nestes perceber as possíveis características/propriedades para se organizar um cubo. A atividade 2 apresenta este mesmo movimento, apenas de forma inversa, isto é, parte-se de um cubo e secciona-o em diferentes partes de mesmo tamanho. O enunciado da atividade descreve no registro em língua natural um paralelepípedo reto que possui a medida de suas arestas iguais, logo este é um cubo, e informa as posições dos planos que dividem este objeto em diferentes partes que resultam em cubos menores. Estes dois movimentos estão relacionados a apreensão operatória mereológica, que aborda uma figura inicial que sofre um processo de divisão em partes de mesma dimensão.

O item *2-a* da atividade solicita a representação figural do cubo demarcado pelas secções existentes, bem como a nomeação dos planos das faces e das secções. Neste momento, os licenciandos reconheceram que o objeto inicial seria o cubo, porém não conseguiram identificar onde iriam ocorrer os "cortes" realizados pelos planos mencionados. Assim, pode-se dizer que os acadêmicos apresentaram dificuldades na organização mental do objeto que foi descrito.

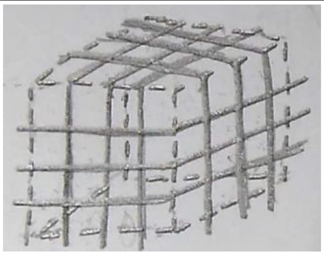
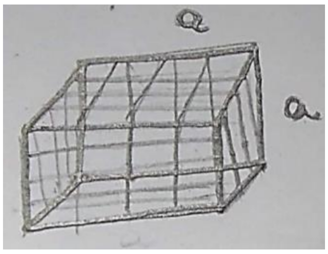
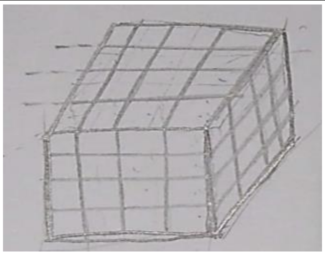
Prevendo este obstáculo, optou-se em recorrer ao Material Dourado[61], considerando que este possibilita uma organização concreta do cubo e suas partições, tendo em vista que as divisões realizadas no objeto inicial são cubos de menor unidade. Assim, foram disponibilizadas aos participantes as peças do material que representam uma unidade, no intuito que as equipes os organizassem e reconhecessem as subdivisões do objeto descrito.

Destaca-se que as equipes construíram o cubo com o registro material e o utilizaram para a resolução dos outros itens da atividade. A partir desta organização, os licenciandos verificaram as relações entre os planos e o cubo de modo a elaborarem sua representação figural exposta no Quadro 76. Salienta-se estas foram representadas semelhante a forma usual do cubo e que os sujeitos demarcaram as repartições mencionadas no enunciado, mas não nomearam os planos que realizam esta ação. A necessidade do uso do material manipulável

[61] Material manipulável geralmente utilizado para relações aritméticas, composto por peças que representam unidade, centena, dezena e milhar, em que a unidade é representada por um cubo.

revelou a complexidade na descrição em língua natural das secções realizadas no objeto a partir de posições relativas entre planos e o cubo.

Quadro 76 – Resolução das equipes para o item 2-a da Tarefa III

| Equipe A | Equipe B | Equipe C |
|---|---|---|
|  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

O item *2-b* solicita a descrição das relações existentes entre os planos que seccionam o objeto inicial (Quadro 77). A Equipe A mencionou nove planos paralelos três a três e ao mesmo tempo perpendiculares três a três, estas duas condições são suficientes para descrever o fato ocorrido entre estes elementos. Caso citassem apenas a primeira condição, a disposição dos planos poderia ser realizada na dimensão 2D, é a segunda condição que impõe o tridimensional na organização da posição entre os planos.

Quadro 77 – Resolução das equipes para o item 2-b da Tarefa III

| Participantes | Identificação e descrição dos planos das seções do cubo |
|---|---|
| **Equipe A** | 9 plano paralelos 3 a 3 e perpendiculares 3 a 3. |
| **Equipe B** | Não realizou a atividade. |
| **Equipe C** | Cortou-se a primeira face com 3 cortes originando 3 planos paralelos entre si. Após foram feitos mais 3 cortes paralelos entre si na face perpendicular a primeira cortada, originando mais 3 planos. Finalmente foram feitos mais 3 cortes na terceira face. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Já a Equipe C relatou esta atividade a partir do processo de organização dos recortes do objeto, mencionando-os por meio dos planos das secções e as faces do cubo. Os “cortes” realizados nas faces são indicados como paralelos entre si, mas não é citado que estes são paralelos ao lado do quadrado que forma a face mencionada a cada momento. Logo, a descrição realizada gera outros recortes no objeto, diferentes dos que foram estabelecidos no enunciado. Como o item *1-b* solicita a posição relativa entre os planos que formam as secções, esta descrição não está equivocada. Se atendo apenas aos planos indicados, a equipe deveria mencionar que a “terceira face” é paralela a primeira e perpendicular a segunda descrita gerando os nove planos evidenciados. A Equipe B não realizou este item da atividade 2. Esta situação, assim como em outros momentos, pode ter sido ocasionada pelo participante estar sozinho na realização da Tarefa III.

Tendo em vista que houveram partições no cubo, no item *1-c*, os participantes mencionaram a quantidade de peças que compõem o objeto inicial e suas características (Quadro 78). As equipes identificaram o número correto de partes que o sólido geométrico descrito foi dividido. Como estas organizaram a representação do cubo e suas partições com o auxílio do material manipulável, foi possível obter esta informação contabilizando as unidades cúbicas que utilizaram para construir o cubo. Ou, bem como, sabendo que haviam três partições por aresta e que estas tinham a mesma distância entre si e entre as extremidades, gerando, assim, quatro unidades congruentes, e tendo que as arestas possuem o mesmo comprimento, empregando a ideia de volume (4·4·4), resultaria nas 64 peças que compõem o cubo inicial.

Quadro 78 – Resolução das equipes para o item 2-c da Tarefa III

| **Participantes** | **Quantidade de partes do sólido** | **Características das partes do sólido** |
|---|---|---|
| **Equipe A** | Ficou dividido em 64 partes | - medida da aresta é igual para todas as partes<br>- todos os ângulos são 90°<br>-todas as partes possuem faces paralelas 2 a 2 |
| **Equipe B** | 64 partes ficou dividido o sólido | Não respondeu ao questionamento. |
| **Equipe C** | 64 partes | Áreas iguais, volumes iguais |

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto às características mencionadas para as partes do sólido, a Equipe A referiu-se as arestas congruentes, aos ângulos retos e as faces paralelas combinadas duas a duas e a Equipe C citou aspectos métricos, isto é, área e volume. Ambas informações estão corretas, porém percebe-se que a Equipe A descreveu propriedades de um cubo, logo constata-se que os participantes identificaram o formato das peças.

O enunciado da atividade 2 informa que o objeto está coberto com papel, nos itens de *1-d* a *1-g*, questiona-se quanto as faces cobertas das peças que compõem o cubo. O Quadro 79 expõe a característica das peças, as quantidades informadas pelos licenciados, bem como os argumentos mobilizados para tal ocorrência.

Quadro 79 – Resolução das equipes para o item 2-d, 2-e, 2-f e 2-g da Tarefa III

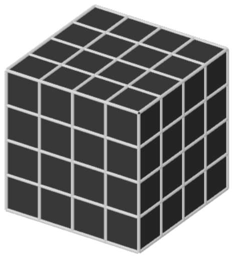
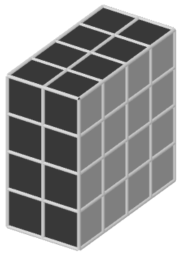
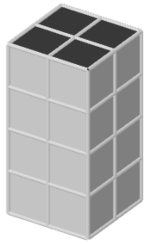
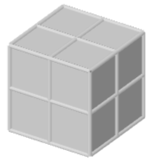
| Participantes / Peças do cubo | Equipe A | Equipe B | Equipe C |
|---|---|---|---|
| **Não possuem nenhuma face coberta** | 8, retiramos 2 faces paralelas, depois as 2 colunas restantes perpendiculares a elas e por último as faces restantes da base. | 4 partes | 8, pois encontram-se no centro. |
| **Possuem apenas uma face coberta** | 24, os cubos centrais de cada face, pois somente uma das faces esta fora do cubo. | Não respondeu ao questionamento. | 24, as únicas do centro de cada face. |
| **Possuem exatamente apenas duas faces cobertas** | 12, as peças centrais de cada aresta, pois como estão no centro da coluna/linha 4 de suas faces estão no interior do cubo. | Não respondeu ao questionamento. | 22, são as que estão nas laterais. |
| **Possuem três faces cobertas** | 8, as peças da extremidades das linhas/colunas, pois somente 3 faces estão voltadas para o centro do cubo. | Não respondeu ao questionamento. | 8, pois são os cantos. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação às peças que não possuem nenhuma de suas faces cobertas com o papel, os participantes das Equipes A e C mencionaram a quantidade oito. É possível notar que a Equipe C, diante da resposta fornecida, interpretou de forma correta o posicionamento das peças. No entanto, na justificativa apresentada apenas mencionou que estas estão dispostas no centro do sólido, o que não explica de uma forma direta a quantidade de peças que possuem tal característica.

A justificativa dada pela Equipe A foi elaborada conforme as ações realizadas com o material dourado como indica a organização apresentada no Quadro 80. Neste foram realizadas algumas alterações quanto à escrita dos participantes de modo a ficar claro os processos realizados. A Equipe B citou a quantidade quatro e não argumentou sobre este fato. Sendo assim, não foi possível verificar de que forma foi pensada esta quantidade, bem como o processo utilizado.

Quadro 80 – Representação figural do item 2-d para a resolução apresentada pela Equipe A

| Retiramos 2 faces paralelas | Depois as 2 colunas restantes “paralelas” a elas (de cada face) | Por último as faces restantes das “bases” | 8 peças |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto às peças que possuem apenas uma de suas faces cobertas, a Equipe A explicou que estas fazem parte do centro da face do objeto descrito no enunciado da atividade, isto é, não pertencem às bordas do cubo inicial. Este argumento também foi utilizado pela Equipe C. A Equipe A, ainda, mencionou que são estas peças, pois possuem somente uma de suas faces “fora do cubo” inicial.

Para as peças que possuem apenas duas faces cobertas com o papel, os participantes da Equipe A mencionaram que seriam 12 ao total com essa característica. O raciocínio é pertinente, a ideia transmitida é de que estas são peças em que uma de suas arestas está sobre o centro da aresta do objeto inicial. A Equipe B não respondeu a este questionamento. A Equipe C indicou 22 peças, esta mencionou que as peças estão contidas nas laterais, contudo, não apresentou outros argumentos, deixando em dúvida se as laterais seriam algumas faces específicas ou as arestas do cubo descrito inicialmente.

A Equipe C mencionou que os “cantos” do objeto inicial são as peças que possuem três de suas faces cobertas com papel, contabilizando oito destas. A Equipe A também obteve esta quantidade. Porém durante sua argumentação indicou que estas seriam as “[...] extremidades das linhas/colunas [...]” (Excerto Equipe A). Para que esta informação seja correta é necessário compreender que o termo “linhas/colunas” refere-se a organização das peças que possuem, ao menos, uma aresta sobre a aresta do cubo inicial.

Durante a atividade 2 não explora-se diretamente a desconstrução dimensional pois as ações realizadas são a partir de objetos 3D. Entretanto, durante as justificações das ocorrências de tais situações, percebeu-se a mobilização de diferentes dimensões, 0D a 3D.

## 5.3 INTERPRETAÇÕES DOS RESULTADOS DO BLOCO DE TAREFAS

Esta etapa da Análise de Conteúdo é destinada a realização de sínteses que envolvem os elementos da teoria dos RRS. Mais do que a realização correta da atividade, busca-se evidenciar representações, apreensões figurais e desconstruções dimensionais mobilizadas pelos acadêmicos ao recorrer às soluções das tarefas.

Deste modo, optou-se pela organização de quadros específicos para cada elemento da teoria, no qual se demarcou o que foi mobilizado em cada uma das atividades[62] desenvolvidas com os licenciandos. Salienta-se que os movimentos realizados foram comuns as equipes, sendo assim, não se aplica a distinção destes nos quadros.

Como destacado no início deste capítulo as tarefas tem o intuito maior de explorar a visualização em Geometria, em detrimento de aspectos métricos. Conforme Duval (1999, p.12, tradução nossa), “[...] a visualização consiste em entender diretamente toda a configuração das relações e discriminar o que é relevante [...]” na figura para se solucionar um determinado problema. Desta maneira, enfatizou-se as representações figurais e discursivas que as caracterizam.

Logo, ao investigar as representações e transformações cognitivas mobilizadas e/ou produzidas pelos participantes (Quadro 81), a maioria destas são representações figurais e em língua natural.

Quadro 81 – Representações mobilizadas pelas equipes nas tarefas

| **Representação(s) mobilizada (s)** | **Tarefa I** | | | | | | **Tarefa II** | | | | | | | | | | | | | | **Tarefa III** | | | | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *1-a* | *1-b* | *2* | *2-a* | *3* | *1-a* | *1-b* | *1-c* | *1-d* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | *2-h* | *3* | *4* | *1* | *1-a* | *1-b* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | |
| **F** | | | x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| **LN** | | x | | | | x | | | | | | | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | 4 |
| **F→LN** | | | | x | x | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | x | x | x | x | x | x | 16 |
| **F→N** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | x | 5 |
| **FD→LN** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | 1 |
| **LN e F→F** | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| **LN e F→LN** | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| **LN→F** | x | | | x | x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | 4 |
| **LN→FD** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | 1 |
| **M** | x | x | x | x | x | x | | | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | 16 |

Fonte: Dados da pesquisa.

[62] Apenas a atividade 4 da Tarefa I não foi elencada nos quadros-resumo pois trata de um questionamento pessoal, o qual não ocorre atividade matemática.

Desta forma, de acordo com os dados expostos no Quadro 81, ocorreram tratamentos na representação em língua natural e figural, distribuídos entre as atividades 1 e 3 da Tarefa I, atividade 4 da Tarefa II e atividade 1 da Tarefa III. Nestas a transformação cognitiva se manteve em um mesmo registro, nas quais se abordavam justificativas e/ou interpretações de ações e/ou objetos, bem como diferentes pontos de vista sobre o cubo.

Quanto às conversões, apenas uma das transformações cognitivas envolve a representação numérica, a qual é recorrida para informar a quantidade de peças em que um sólido geométrico foi seccionado. Ressalta-se que algumas atividades possibilitaram explorar esse tipo de transformação cognitiva, a partir da coordenação de diferentes representações em sentidos distintos, isto é, a realização de conversões inversas. Duval (2011) afirma que é este tipo de atividade que contribui para a compreensão do objeto matemático em suas diferentes formas. Estas ocorrem entre duas combinações de representações, a língua natural ora com o figural, ora com o figural dinâmico, por exemplo, nas atividades 1 e 2 da Tarefa I; 1, 2 e 3 da Tarefa II; 2 da Tarefa III. Nestas verificou-se que os participantes, na maioria das ações, conseguiram solucionar as questões de forma correta, evidenciando sua compreensão e conhecimento sobre o tema explorado.

Em conformidade com Duval (2005, p. 30, tradução nossa), o qual menciona que “A geometria requer o uso de um vocabulário técnico relativamente pesado”, constatou-se que os participantes encontraram dificuldades em alguns momentos ao explorar a representação em língua natural. Ao descrever um objeto solicitado ou ao elaborar uma justificativa, os acadêmicos, na maior parte das vezes, o realizavam de forma sucinta. Assim, a falta de elementos na argumentação gera apenas parte das resoluções, não suprindo todas as condições necessárias e suficientes, como a realização da atividade 2 da Tarefa I e atividade 3 da Tarefa II, em que as descrições fornecidas não geram um cubo.

Ainda, sobre esta representação, destaca-se que os participantes recorreram em diferentes momentos a resultados da GEP para argumentar questionamentos realizados, por exemplo, sobre a colinearidade, coplanaridade e posição relativa entre elementos geométricos nas atividades 1 e 2 da Tarefa II. Este fato demonstra que os licenciandos reconhecem e são capazes de aplicar estes em distintas situações. Quanto à simbologia matemática, esta não foi tão utilizada nas resoluções das atividades, mas quando mobilizada, não ocorreram equívocos quanto a seus significados.

Rommevaux (1988) declara que a habilidade de ver no espaço está relacionada ao discernimento de planos em uma representação não tridimensional, isto é, tratar de figuras 3D a partir de representações 2D. Desse modo, tendo em vista o desempenho dos participantes nas atividades que exploram este tipo de situação (atividade 2 da Tarefa I; atividade 1 e 2 da Tarefa II; atividade 2 da Tarefa III), constatou-se que estes mobilizaram esta habilidade quando necessário. Tendo como exemplo a atividade 2 da Tarefa II, na qual a representação figural fornecida não era usual, e mesmo assim os licenciandos apresentaram um bom desempenho em suas resoluções.

No entanto, em certos momentos, os acadêmicos demonstraram dificuldades nessa mobilização, mais especificamente quando a reta ou plano em questão não estava explícito na representação fornecida e a atividade solicitava uma representação de forma figural. Destaca-se que as atividades em que mais ocorreram estas situações foram nas quais os acadêmicos não tinham acesso a nenhum tipo de registro material (atividade 1 e 2 da Tarefa II). Logo, pode-se declarar que o obstáculo percebido foi o da realização da rotação do objeto de forma mental, buscando obter uma perspectiva diferente da apresentada pela representação figural inicial da atividade. Assim, uma estratégia para isto, em outros momentos, foi o uso de diferentes materiais didáticos, como os materiais manipuláveis e o *software* de Geometria Dinâmica.

Desta maneira, evidencia-se, mais uma vez, a contribuição do registro material (denominado como M) no desenvolvimento das atividades. Os acadêmicos recorreram diferentes vezes aos objetos disponibilizados (quando possível), ou seja, cubo organizado com canudos, material dourado e as peças em formatos de prisma.

O registro figural dinâmico apesar de ter sido disponibilizado em apenas na atividade 3 da Tarefa II, mesmo não sendo objetivo da pesquisa verificar se os participantes conseguiriam manipular este recurso, estes demonstraram segurança e conhecimento sobre o manuseio do *software* e de suas ferramentas. Gravina (2015, p. 243) entende que uma figura dinâmica é “[...] uma coleção de ‘desenhos em movimento’ que respeita um certo procedimento de construção”. Posto isto, e verificando que a construção realizada pelos acadêmicos ao serem manipuladas não se deformam, é possível constatar que estes compreendem as relações existentes entre os elementos do cubo, bem como as propriedades que devem ser mantidas no objeto.

Porém ao serem questionados sobre os passos realizados para construir o objeto, mais uma vez, por buscarem ser sucintos em suas descrições, faltaram descrever algumas especificações. Novak (2018, p.122), evidenciou este mesmo resultado, ao constatar que há “[...] uma grande dificuldade significativa dos alunos em descrever instruções de construção para a figura geométrica que tinham acabado de obter no GeoGebra”.

Destaca-se que as apreensões figurais são mobilizadas em atividades que possuem alguma representação figural, construção e/ou descrição de um objeto. Assim, as atividades privilegiaram a ocorrência destes elementos, tendo em vista que, de acordo com Duval (2004, p. 164, tradução nossa), “Não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar”. No Quadro 68, apresenta-se as apreensões figurais promovidas durante a realização das tarefas.

Quadro 82 – Apreensões figurais mobilizadas pelas equipes nas tarefas

| **Apreensão mobilizada** | | **Tarefa I** | | | | | | **Tarefa II** | | | | | | | | | | | | | | **Tarefa III** | | | | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *1* | *1-a* | *1-b* | *2* | *2-a* | *3* | *1-a* | *1-b* | *1-c* | *1-d* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | *2-h* | *3* | *4* | *1* | *1-a* | *1-b* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | |
| **P** | | x | x | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | x | x | x | x | x | x | 27 |
| **D** | | x | x | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | x | x | x | x | x | x | 28 |
| **O** | **P** | | | x | | x | x | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | x | x | x | | x | x | x | x | x | x | 22 |
| | **M** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | x | x | x | x | x | 6 |
| | **Ó** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| **S** | | x | x | | x | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | x | | | | | | | 5 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Como já dito anteriormente, as representações em língua natural e figural foram as mais enfatizadas, assim, as apreensões discursiva e perceptiva, de certa forma, foram as que receberam maior destaque. Esta situação ocorre pois a apreensão discursiva é mobilizada quando há a articulação entre as representações em língua natural e figural. E a apreensão perceptiva é o primeiro reconhecimento das formas sobre uma representação figural, podendo esta “[...] ter um papel facilitador ou inbidor sobre a compreensão do problema colocado” (DUVAL, 2012a, p. 136). Como houve a solicitação de construção e descrição de um cubo no desenvolvimento das tarefas foi neste momento que a apreensão sequencial foi identificada (atividades 1 e 2 da Tarefa I; 3 da Tarefa II; 2 da Tarefa III).

Os dados expostos no Quadro 82 revelam que apenas a apreensão operatória ótica não foi requerida de forma evidente. Isto se justifica pelo fato de que não houve a necessidade explícita em aumentar/reduzir um dado objeto.

Quanto à apreensão operatória posicional, esta se deu em diferentes momentos. Visto que as representações figurais 3D são apresentadas em perspectiva, diante de alguns questionamentos, se fez necessário rotacionar estas de modo a visualizar por outro ângulo de melhor visão o elemento solicitado pela atividade. Como mencionado em uma situação anterior, os licenciandos demonstraram dificuldades em mobilizar esta apreensão de forma mental. Nestes casos os recursos didáticos, como materiais manipuláveis e *software* de Geometria Dinâmica, são sugeridos.

Duval compreende que, “As operações mereológicas de reconfiguração se apoiam sobre a percepção” (DUVAL, 2011, p. 92), logo é necessário perceber primeiro as relações existentes, para então realizar as partições ou junções solicitadas. Desta forma, esta apreensão está sempre acompanhada de outra(s). Como é o caso das atividades da Tarefa III, em que ocorrem situações de modificações homogêneas e estritamente homogêneas, nas quais as divisões foram realizadas fisicamente por meio de peças manipuláveis. Em um dos casos, os acadêmicos, mesmo com o auxílio do material dourado que representava o objeto da atividade, apresentaram problemas na conclusão de alguns questionamentos.

Percebe-se que a apreensão perceptiva está presente na maioria das atividades que possuem representação figural como ponto de partida. Esta gera o primeiro contato com o objeto, ou seja, provoca uma visão comum ao objeto. Conforme Duval (2011, p. 93), “A desconstrução dimensional se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outra unidades figurais”. Por este motivo o autor declara a complexidade de se organizar e solucionar tarefas que exigem a desconstrução dimensional. O Quadro 83 expõe as atividades que possibilitam esta ação.

Quadro 83 – Desconstruções dimensionais mobilizadas pelas equipes nas tarefas

| **Dimensão mobilizada** | **Tarefa I** | | | | | | **Tarefa II** | | | | | | | | | | | | | | **Tarefa III** | | | | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *1-a* | *1-b* | *2* | *2-a* | *x3* | *1-a* | *1-b* | *1-c* | *1-d* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | *2-h* | *3* | *4* | *1* | *1-a* | *1-b* | *2-a* | *2-b* | *2-c* | *2-d* | *2-e* | *2-f* | *2-g* | |
| **3D** | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | 24 |
| **2D** | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | 24 |
| **1D** | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | 24 |
| **0D** | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | 22 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre os dados apresentados, destaca-se que apenas seis questionamentos não proporcionam uma desconstrução dimensional (nD→(n-1)D), pois estes estão relacionados à construção de figura/objeto, assim as unidades figurais são exploradas de forma inversa, do 0D a 3D.

Considerando que este tratamento figural está diretamente relacionado a atividade discursiva, pois é esta que apresenta as propriedades do objeto, Duval (2005,p. 20, tradução nossa) afirma que, é a ação de “reconhecer as unidades figurativas de menor dimensão que se manifesta a ‘maneira matemática de ver’ uma figura geométrica”. Desta forma, pode-se mencionar que, nas atividades que expõem uma representação figural, este tipo de operação foi mobilizada pelos acadêmicos, independente da resolução final da questão. Por exemplo, a atividade 1 da Tarefa II, a qual necessitava da desconstrução dimensional do 3D a 0D por meio de conceitos/conteúdos de colinearidade e coplanaridade entre pontos.

Ao tratar da terceira dimensão, Duval (2003, p.45) menciona que “[...] ir de 3D a 2D (por exemplo, considerar planos de secção de um sólido) [...] representa não apenas uma ginástica mental, mas visual, que às vezes pode levar anos e requer, em qualquer caso, aprendizado específico”. Assim, enfatiza-se a importância de se explorar esse tipo de atividade durante qualquer nível de ensino. Por fim, compreende-se que os licenciandos estimularam a ação de ver em Geometria.

# 6 PONDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa está ancorada na importância do desenvolvimento da Geometria, em especial, a Geometria Espacial de Posição, em seus diferentes níveis de ensino, tendo como auxílio o aporte teórico dos registros de representação semiótica. Desta forma, a investigação teve como questão norteadora: *Quais contribuições de um estudo de conceitos da Geometria Espacial de Posição, apoiado em tratamentos figurais, de acordo com Duval, na formação inicial de professores de Matemática?*

Este questionamento influenciou o decorrer deste estudo. Mesmo se referindo a tratamentos figurais que estão relacionados a apreensão operatória e a desconstrução dimensional se fez necessário investigar outros elementos da teoria, como as transformações cognitivas e as demais apreensões, pelo simples fato destes elementos estarem interligados. Pois, por exemplo, não há desconstrução dimensional sem a representação figural que deve ser apresentada por meio de uma legenda (registro em língua natural). Assim, justifica-se a essencialidade de investigar-se sobre estes elementos.

Na busca por solucionar a questão estabelecida pensou-se na realização de atividades referentes a conceitos/conteúdos que delimitam a pesquisa no campo da Geometria com licenciandos em Matemática, no intuito de observar a mobilização de aspectos da teoria dos RRS. Diante deste pensamento, investigou-se, primeiramente, as obras que obtiveram maior ênfase em PCC de cursos de Matemática Licenciatura a respeito de componentes curriculares que abordassem a Geometria Espacial.

A partir das análises destas obras constatou-se a necessidade de uma reorganização e construção das atividades apresentadas com a finalidade de explorar conceitos/conteúdos da Geometria Espacial de Posição, que pouco se mostravam presentes. Bem como, inserir a possibilidade de mobilização dos principais tipos de registro em Geometria, figural e língua natural, diferentes tipo de apreensões figurais e a desconstrução dimensional, pois da forma com que as questões estavam dispostas nas obras, na maioria das vezes, não era possível. Com isso, optou-se por acrescentar mais itens as questões e adotar diferentes recursos didáticos.

Evidencia-se que as representações figurais de objetos tridimensionais nas obras analisadas eram raras. Este dado é preocupante visto que, conforme Duval (2005), os estudantes precisam mobilizar a desconstrução dimensional, pois esta é um pré-requisito para a compreensão das propriedades de um objeto geométrico. Esta informação reafirma a ideia do pesquisador, o qual menciona que a “[...] fratura na forma de dizer e ver [...] não é realmente considerada no ensino de matemática” (DUVAL, 2011, p. 99).

Tendo em vista que “[...] as figuras são permeadas de elementos teóricos e a desconstrução dimensional não se mostra como algo intrínseco ou natural aos aprendizes e sim, uma operação cognitiva a ser desenvolvida” (SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019, p.326), as atividades foram organizadas de modo que os acadêmicos obtivessem diferentes representações figurais, assim como, distintas descrições de um mesmo objeto. Considerando que “[...] aprender a visualizar em matemática não é tão fácil e bem sucedido como é para objetos físicos e ambiente real” (DUVAL, 1999, p.13, tradução nossa) optou por também explorar materiais didáticos e o registro figural dinâmico.

Evidencia-se que o grupo de participantes desta pesquisa, licenciandos em Matemática, demonstraram envolvimento nas atividades propostas e que a organização da turma em duplas e trio gerou a discussão entre os sujeitos como esperado. Destaca-se que estes manifestaram maior interesse pelas questões que envolveram o registro material (construção do cubo com canudos, organização do cubo com material dourado e com os prismas), registro figural dinâmico e a representação não usual do cubo (atividade 2 da Tarefa II). Isto é, por atividades que, na maioria das vezes, não é abordada em salas de aula da Educação Básica. Estes comentaram que o *software* de Geometria Dinâmica poderia ser mobilizado em mais atividades além da disponibilizada (atividade 3 da Tarefa III). Desta maneira, expõe-se, mais uma vez, a contribuição deste recurso, agora pela observação dos estudantes.

A realização das atividades organizadas permitiu constatar que os acadêmicos foram retirados da sua zona de conforto em diferentes momentos, ora por representações distintas do cubo, ora por descrições que exigiam recorrer a resultados da GEP. Este movimento fez com que os licenciandos mobilizassem diferentes tipos de transformações cognitivas e as distintas apreensões figurais. Estes aspectos da teoria dos RRS contribuíram para o movimento de desconstrução dimensional, isto é, observar as diferentes unidades figurais contidas em um objeto com a intenção de solucionar o problema proposto. O qual está diretamente relacionado a “[...] evolução cognitiva para o funcionamento espontâneo da visualização” (DUVAL, 2005, p. 23, tradução nossa).

À vista deste resultado pode-se afirmar que os tratamentos figurais são um meio que contribui na aprendizagem da visualização em Geometria, considerando as soluções apresentadas pelos acadêmicos na realização das atividades propostas. No entanto, compreendendo que um mesmo objeto matemático pode ser representado de diferentes formas e unidades figurais (DUVAL, 2004). Destaca-se que este bloco de tarefas não abrange todas as possibilidades de representação do cubo. Logo, diferentes atividades podem ser organizadas para complementar o bloco de estudos sobre este sólido e campo da Geometria.

Espera-se que está pesquisa contribua com a área da Educação Matemática, principalmente, nas discussões acerca da Geometria Espacial de Posição. Bem como, sobre mapeamento de pesquisas na área, que para este trabalho auxiliou na delimitação do tema e organização dos procedimentos da pesquisa; dados relevantes sobre cursos de Matemática Licenciatura no Brasil, que fez refletir sobre a pouca da discussão referente a GEP e a Educação Básica; análise de obras referentes a Geometria Espacial sob o olhar da teoria dos RRS, a qual mostrou a falta das representações figurais e por consequência a necessidade de visualizar em Geometria; e atividades que possibilitam o desenvolvimento da visualização dos estudantes, as quais, a partir de seu desenvolvimento, confirmaram que os tratamentos figurais contribuem na visualização no campo do Matemática estudado.

Este estudo apresenta a possibilidade de ampliar esta pesquisa para sólidos distintos explorando a GEP, assim como mobilizar a visualização em Geometria para outros conceitos/conteúdos deste campo da Matemática. Como estudos futuros cogita-se em realizar uma investigação, também no campo da GEP, agora aprofundando-se na linguagem matemática utilizada por alunos e professores da Educação Básica e licenciandos em Matemática se apropriando da teoria dos registros de representação semiótica aliando a visualização e a linguagem formal auxiliadas por softwares de Geometria Dinâmica.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. et al. Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>. Acesso em: abr. 2018.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, Recife, v. 11, n. 17, p. 61-70, 2004. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/06/CC20104840889.pdf>. Acesso em: mai. 2018.

ARCEGO, P. **Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, área de concentração em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

ARRUDA, P. C. **Estudo da versão 3D-Beta do GeoGebra em Geometria Espacial**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2014.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Perímetro e área de polígonos**: abordagem através de um ambiente dinâmico sob o olhar das representações semióticas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, área de concentração em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BARBOSA, L. S. **Investigando com o GeoGebra 3D:** O Método Axiomático em Atividades de Geometria Espacial e Esférica. 144 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2017.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BETTIN, A. D. H. **O GeoGebra 3D na construção da pirâmide a partir de seu tronco**: registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

BORBA, M.C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte, MG. Autêntica, 2003.

BORSOI, C. **Geogebra 3D no Ensino Médio**: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino De Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** ensino fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/ 2017.

_______. **Base Nacional Comum Curricular:** ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/ 2018.

_______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/ 2006.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 1° e 2° ciclos. Secretaria de Educação Fundamental Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 3° e 4° ciclos. Secretaria de Educação Fundamental Brasília: MEC/SEF, 1998.

_______. **PCN+ Ensino Médio** - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRITO, F. D. **O uso de softwares no ensino de geometria espacial de posição**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

CARVALHO, D. S. **Uma aplicação no ensino dos poliedros e corpos redondos para turmas do 3º ano do ensino médio usando dobraduras e softwares livres**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins. Palmas, 2013.

Carvalho, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CLEMENTE, J. C. et al. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em Educação Matemática. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, São João del-Rei, MG. **Anais**... São João del Rei, MG: UFSJ, 2015. Não paginado.

COLLET, J. I. **Apreensões mobilizadas por alunos do nível 2 do 11º pic/obmep em relação a áreas de figuras planas**. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática-Licenciatura) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos De Matemática Elementar:** geometria espacial. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>. Acesso em: mar. 2018.

_______. Décrire, visualiser ou raisonner : quels “apprentissages premiers” de l’activité mathématique ? **Anais de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strabour, v. 08, p. 13-62, 2003.

_______. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Concedida a FREITAS, de. J. L. M.; REZENDE, V. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/963/pdf_122>. Acesso em: mar. 2018.

_______. Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10, p. 5 - 53. IREM de Strasbourg, 2005.

_______. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1/33628>. Acesso em: mar. 2018.

_______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MériclesThadeu Moretti. **Revemat**: Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012b. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: mar. 2018.

_______. **Representation, Vision and Visualization**: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic issues for learning, 1999.

_______. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semiótcos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_______. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

_______. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. 1º ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FLORES, C. R., WAGNER, D. R., e BURATTO. I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/8008/6827>. Acesso em: mai. 2018

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte, MG, **Anais...** , p. 1-13, 1996. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/modulo_VIII/artigo.pdf.> Acesso em: abr. 2019.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**. v. 22, n. 2, p.465-487, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320160020012>. Acesso em: mai. 2019.

KIEFER, J. G. **Representações semióticas no estudo de área de figuras planas**: uma abordagem com o GeoGebra por meio de questões da OBMEP. Trabalho de conclusão de curso (graduação em Matemática-Licenciatura) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino de geometria em livros didáticos à Luz da Teoria das Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

KUMMER, T. Ações e operações de visualização, raciocínio e representação no processo de construções geométricas. In: SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D.(Org.). **Tecnologias da informação e comunicação na educação matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C (Org.). **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. v. 2. Editora SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C (Org.). **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. v. 4. Editora SBM, 2007.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2011.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

________. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas. São Paulo. Autores Associados. 2010.

________. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano III, n. 4, p. 3–13, 1995.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de geometrias não euclidianas de um grupo de professores de matemática da educação básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0369.pdf > Acesso

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MATOS, J. M., SERRAZINA, L. **Didáctica da matemática**. Universidade Aberta, Lisboa, 1996.

MILAUSKAS, G. A. Problemas de geometria criativos podem levar à resoluções criativas de problemas criativos. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2011.

MORAN, M. **As Apreensões em Geometria**: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORAN, M., FRANCO, V. S. Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 61-75, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.../31147> Acesso em: abr. 2017.

MUMBACH, M. **Formação inicial de professores de matemática**: conhecimentos de quem ensina geometria em práticas como componente curricular. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, área de concentração em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2018.

MURACA, F. S. **Educação Continuada do professor de Matemática**: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório–investigativas envolvendo Geometria Espacial de Posição. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

NOVAK, F. I. L. **O ambiente Dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval:** olhares, apreensões e desconstrução dimensional. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2018.

OLIVEIRA, R. G. de. **Geometria Espacial de Posição:** do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria Dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1, 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>. Acesso em: abr. 2018.

_______. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. **Anais**... Disponível em <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/ > Acesso em: jun. de 2018.

PEREIRA, M. G. B. **Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra) e do Geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros: um estudo com alunos do 4º ano**. 2012. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico) Instituto Politécnico de Lisboa Escola Superior de Educação, Lisboa, 2012.

POHL, V. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2011.

POLYA, G. **Como resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P., SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo**. Universidade Aberta, 2000.

RESENDE, A. L. C. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial de posição na EJA**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del-Rei, Minas Gerais, 2013.

RIO GRANDE DO SUL. **Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul**: Matemática / Secretaria de Estado da Educação. Porto Alegre, SE/DP, 2009.

ROMMEVAUX, M. P. Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. **Annales de Ddactique et de Sciences Cognitives**, n. 6, p. 27-65, 1998.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SCHEIFER, C. **Design Metodológico para a Análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

SOARES, M. A. S.; FERNER, D. L.; MARIANI, R. C. P. Visualização em produções que exploram softwares: uma metanálise no campo da geometria. In: SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D.(Org.). **Tecnologias da informação e comunicação na educação matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018.

SOARES, M. A. S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica.** Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOUD, S. A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.1, p. 322-346, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101/pdf>. Acesso em: jun. 2019.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de geometria com professores da rede pública**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2016.

UFSM. **Projeto pedagógico de curso:** Curso de Matemática – Licenciatura (noturno). Santa Maria: MEC/UFSM, 2013.

VIANA, O. A. Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no ensino básico. **Revista Estudos em Avaliação Educacional**. São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871. set./dez. 2015. Disponível em : <http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/view/2835>. Acesso em: abr. 2018.

VIEIRA, W. Z. V. **Argumentação e prova**: uma experiência em Geometria Espacial no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

# APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

**Universidade Federal de Santa Maria**
**Centro de Ciências Naturais e Exatas**
**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física**

**UM POUCO SOBRE VOCÊ** Idade: _________

Gênero: □ Masculino □ Feminino Estado civil: □ Solteiro □ Casado □ Divorciado □ Outro

Tem filhos? □ Sim □ Não Quantos? _______________

**UM POUCO DA SUA FORMAÇÃO ESCOLAR**

**Ensino Médio:** Maior parte do tempo realizado em escola: □ Pública □ Particular

Se você estudou em escola pública, identifique o tipo de escola:

□ Federal □ Estadual □ Municipal

Ano de início:__________Ano de conclusão:____________

Cidade: ___________________________

Modalidade: □ Regular □ Exames Supletivos □ E.J.A. □ Magistério/Normal □ Técnico em: _____________ □ Outro. Qual? ______________________________________

**Ensino Fundamental:** Maior parte do tempo realizado em escola: □ Pública □ Particular

Se você estudou em escola pública, identifique o tipo de escola:

□ Federal □ Estadual □ Municipal

Ano de início:__________Ano de conclusão:____________

Cidade: ___________________________

Modalidade: □ Regular □ Exames Supletivos □ E.J.A. □ Outro. Qual? ___________________________

**UM POUCO SOBRE VOCÊ NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA UFSM**

Turno: □ Diurno □ Noturno

Ingressou no ano de: _______________ no □ 1º Semestre □ 2º Semestre

Tem previsão de concluir o curso no ano de: _______________ no □ 1º Semestre □ 2º Semestre

**UM POUCO SOBRE AS DISCIPLINAS QUE VOCÊ JÁ CURSOU NO CURSO DE MATEMÁTICA**

Você já cursou ou recebeu aproveitamento nas disciplinas:

**-Recursos Tecnol. no Ens. de Mat.. I (MTM1046)**?

□Não □Sim. No ano de _____no __ semestre

**-Recursos Tecnol. no Ens. de Mat. II (MTM1060)**?

□Não □Sim. No ano de ____ no __ semestre

**-Geometria Plana (MTM1053)**?

□Não □Sim. No ano de ____no __ semestre

**-Geometria Espacial (MTM1055)**?

□Não □Sim. No ano de ____no __ semestre

**-Educação Matemática I (MTM 1061)**?

□ Não □Sim . No ano de ___________ no __ semestre

**Na maior parte do tempo, com quem você estuda para as disciplinas que você cursa na graduação em Matemática:**

□Individualmente □ Em grupo. Com quem?_______________________________________

**Na maior parte do tempo, como você estuda para as disciplinas que você cursa na graduação em Matemática:**

( ) Resolvendo somente as atividades/listas/exercícios disponibilizados pelos professores.

( ) Resolvendo listas dadas pelo professor e outras atividades além das contidas nas listas.

( ) Assistindo vídeos na internet.

( ) Sanando dúvidas com monitores e professores.

( ) De outro modo.

Qual?________________________________________________________

**UM POUCO SOBRE SUA EXPERIÊNCIA NA DISCIPLINA GEOMETRIA ESPACIAL(MTM 1055)**

Você foi aprovado em Geometria Espacial? ( ) Não ( ) Sim. Em que ano/semestre?___________

Caso você tenha cursado Geometria Espacial e tenha sido reprovado informe o ano e o período em que isso ocorreu:

Ano/período________________ Ano/período_______________ Ano/período________________

Ano/período________________ Ano/período_______________ Ano/período________________

**Qual o material que você usou para estudar Geometria Espacial *(OBS: se necessário marque mais de uma alternativa)*?**

(    ) Livros.Qual(is)? □Carvalho□Lima□Lima; Carvalho; Wagner□Outro(s).

Qual(is):______________________________________________________________

(    ) Caderno com as anotações da aula.

(    ) Apostilas e materiais didáticos que obteve na internet.

(    ) Vídeos publicados na internet?

(    ) Outros. Quais?____________________________________________________________

(    ) Combinação dos itens anteriores. Quais itens?_________________________________

________________________________________________________________________________

## APÊNDICE B – TAREFA I

1) *Configurações de figuras com canudos*: Utilize uma linha e 12 canudos de mesmo tamanho para construir a quantidade de quadrados indicada abaixo. A seguir, esboce as construções no espaço indicado:

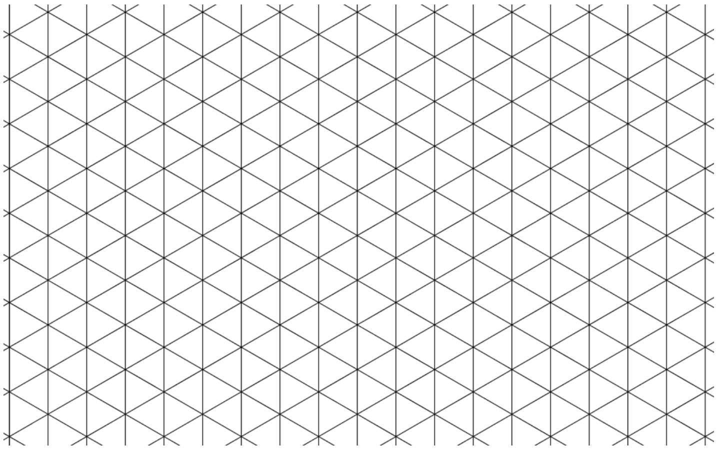
| TRÊS | QUATRO | CINCO |
|---|---|---|
| | | |

1-a) Pode-se afirmar que é possível construir mais de cinco quadrados com o mesmo material. Quantos quadrados você consegue construir? Justifique sua resposta.

1-b) Escolha três perspectivas da construção anterior e fotografe-a.

2) Desenhe um cubo utilizando a malha quadriculada, nomeie os vértices e descreva-o em relação aos planos que o compõem.

2-a) É possível desenhar um cubo utilizando a malha isométrica? Justifique.



3) Complete as descrições a partir da análise de um cubo e enumere em ordem decrescente de prioridade (1 mais importante e 4 menos importante) os itens que você considera relevante.

(    ) Um cubo tem ____ vértices, ____ arestas e ____ faces.

(    ) Nesse cubo, ____ arestas incidem em cada vértice e ____ faces incidem em cada vértice.

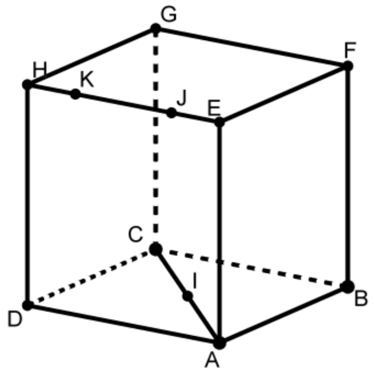
(    ) Cada aresta é paralela a ____ arestas, intercepta ____ arestas e é reversa com outras ____ arestas.

(    ) Cada face é paralela a ____ de suas faces e intercepta o plano de outras ____ faces.

4) Considere as opções a seguir e atribua um percentual para cada elemento que contribui na resolução da atividade 3. (Lembre-se de totalizar 100% em cada coluna)

| **Elemento** | **Atividade 2** | **Atividade 3** |
|---|---|---|
| Representação figural | | |
| Objeto manipulável | | |
| Imagem mental | | |
| Outro | | |

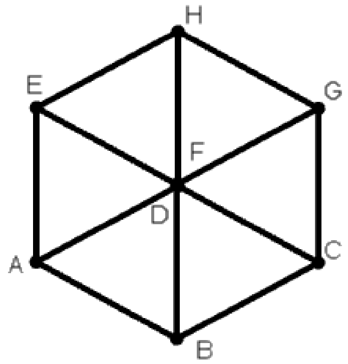
# APÊNDICE C – TAREFA II




1) Observe os pontos de A a K nos vértices, arestas e faces do cubo. Verifique se os pontos indicados em cada item são colineares e/ou coplanares.

Esboce uma representação figural e uma justificativa de acordo com o(s) item(s) que você marcou, identificando intersecções, caso necessário.

| | |
|---|---|
| 1-a) A e G<br>( ) colineares ( ) coplanares | 1-b) G, F e I<br>( ) colineares ( ) coplanares |
| 1-c) H, I, K e J<br>( ) colineares ( ) coplanares | 1-d) H, D, I e C<br>( ) colineares ( ) coplanares |




2) Analise a representação do cubo e identifique posições relativas entre os entes geométricos, justificando suas respostas com notação matemática pertinente:

| *Posições relativas entre duas retas: paralelas, concorrentes (perpendiculares) e reversas (ortogonais).* | |
|---|---|
| 2-a) Retas EF e DC: | 2-b) Retas AE e AD: |

| | |
|---|---|
| | |
| 2-c) Retas HD e FG: | 2-d) Retas AE e DF: |

| *Posições relativas entre reta e plano: reta contida no plano, reta secante ao plano e reta paralela ao plano.* | |
|---|---|
| 2-e) Reta HD e plano formado pelos pontos E, F, G: | 2-f) Reta BG e plano formado pelos pontos C, G, F: |

| *Posições relativas entre dois planos: coincidentes, secantes e paralelos.* | |
|---|---|
| 2-g)Planos formados pelos pontos A, B, F e B, C, D: | 2-h)Planos formados pelos pontos A, B, E e C, D, H: |

3) Construa um cubo no GeoGebra usando apenas as ferramentas: ponto, reta, plano, compasso.

Descreva os passos adotados na construção, mencionando relações entre os entes geométricos a partir da denominação disponibilizada pelo *software*.

Salve o arquivo na área de trabalho do *notebook* renomeando-o como “Tarefa2_Q3_Cubo”.

| **Ação** | **Objetivo** |
|---|---|
| Passo 1)<br><br>Passo 2)<br><br>Passo 3) | |

4) Interprete seu roteiro de construção do cubo no GeoGebra e exponha o que você levou em consideração para compor esse sólido.

## APÊNDICE D – TAREFA III

1) Organize as quatro peças de modo a formar um cubo.

1-a) Quais estratégias foram utilizadas para montar o cubo?

1-b) Enumere em ordem decrescente de prioridade (1 mais importante e 4 menos importante) os itens que você considerou relevante ao organizar as peças.

(    ) Medida dos ângulos.

(    ) Medida das arestas.

(    ) Simetria das peças.

(    ) Outro(s). Qual(is)?________________________________

2) Um paralelepípedo reto que possui a medida dos seus lados a está inteiramente coberto com papel. Para realizar uma divisão deste objeto, duas a duas faces perpendiculares entre si foram cortadas, cada uma, por três planos distintos que possuem a mesma distância entre si e as faces do sólido. Justifique suas respostas para as questões abaixo.

2-a) Desenhe este sólido, identificando os planos que contém as faces e os planos das secções.

2-b) Identifique e classifique os planos das secções em relação as suas posições relativas?

2-c) O sólido ficou dividido em quantas partes? Cite, pelo menos, três características de cada parte.

2-d) Quantas partes não possuem nenhuma face coberta com o papel? Por quê?

2-e) Quantas dessas partes possuem apenas uma face coberta com o papel? Por quê?

2-f) Quantas dessas partes possuem exatamente duas faces cobertas? Por quê?

2-g) Quantas dessas partes possuem três faces cobertas com o papel? Por quê?

# APÊNDICE E – DISSERTAÇÕES E TESES MAPEADAS

Quadro 84 – Organização das dissertações e teses mapeadas

| | Título da pesquisa | Autor |
|---|---|---|
| P1 | O GeoGebra 3D na construção da pirâmide a partir de seu tronco: registros de representação semiótica | Anne Desconsi Hasselmann Bettin |
| P2 | Conhecimento de professores polivalentes em geometria: contribuições da teoria dos registros de representação semiótica | Silvana Holanda Da Silva |
| P3 | Reconfiguração e matemágica: um caminho para a aprendizagem de geometria | Liza Santos De Oliveira |
| P4 | Design metodológico para análise de atividades de geometria segundo a teoria dos registros de representação semiótica | Carine Scheifer |
| P5 | AS APREENSÕES EM GEOMETRIA: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais | Mariana Moran |
| P6 | Registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruências de figuras geométricas planas | Leticia Dos Santos Fogaça |
| P7 | Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de registros de representação semiótica | Roberta Lied |
| P8 | Perímetro e área: uma engenharia didática utilizando o GeoGebra sob o olhar das representações semióticas | Paula Gabrieli Santos De Assumpção |
| P9 | Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano: uma experiência com professores da educação básica | Margarete Farias Medeiros |
| P10 | Possibilidades na conversão entre registros de Geometria Plana | Platão Goncalves Terra Neto |
| P11 | Área de figuras planas: uma proposta de ensino com modelagem matemática | Carlos Eduardo Petronilho Boiago |
| P12 | Demonstrações em geometria euclidiana: o uso da sequência didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática | Fernanda Aparecida Ferreira |
| P13 | Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular | José Fernando Possani |
| P14 | Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas | Gina Magali Horvath Miranda |
| P15 | Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada | Gilson Bispo De Jesus |
| P16 | Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demostrações geométricas | Maridete Brito Cunha |
| P17 | Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica | Amanda Barbosa Da Silva |
| P18 | Dificuldades de alunos do 1º ano de um curso de licenciatura em matemática na disciplina de construções geométricas | Edileni Garcia Juventino De Campos |
| P19 | Uma proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo e Perímetro de Circunferência | Gilberto Pereira Paulo |
| P20 | Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica | Camila Molina Palles |
| P21 | Um estudo sobre a articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de geometria com professores da rede pública | Eberson Paulo Trevisan |
| P22 | Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo por meio de truncaduras baseadas no renascimento | Talita Carvalho Silva De Almeida |
| P23 | Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço | Jesus Victoria Flores Salazar |
| P24 | Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática | Amarildo Aparecido Dos Santos |
| P25 | Estudo de sólidos geométricos e suas métricas utilizando o software Cabri 3D | Joselito Da Silva Bispo |
| P26 | Reflexões sobre o Ensino da Geometria em livros didáticos à luz da Teoria das Representações Semióticas segundo Raymond Duval | Gabriela Teixeira Kluppel |

| | | |
|---|---|---|
| P27 | GGBOOK: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas | Jorge Cassio Costa Nobriga |
| P28 | Geometrias Espacial e Plana: uma análise dos significados revelados por meio dos registros de representações semióticas | Zuleide Ferreira De Sousa |
| P29 | Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em geometria | Fábio Luiz Fontes Martins |
| P30 | Revisitando Euclides para o Estudo de Áreas: uma Proposta para as Licenciaturas | Marli Duffles Donato Moreira |
| P31 | Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. | Jacinto Ordem |

Fonte: Dados da pesquisa.

# APÊNDICE F – OBRAS MAPEADAS REFERENTE À ÁREA ESPECÍFICA DA MATEMÁTICA E/OU A SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

Quadro 85 – Obras comum aos componentes curriculares específicos da Matemática e os de ensino e aprendizagem relacionados a Geometria

| Nº | Obras | N° de citações | |
|---|---|---|---|
| | | **EG**[63] | **EeA**[64] |
| 01 | BARBOSA, R. M. **Conexões e educação matemática**: brincadeiras, explorações e ações. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. | 1 | 1 |
| 02 | BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com cabri-géomètre II**. São Carlos: EDUFSCAR, 2002. | 7 | 5 |
| 03 | BIANCHINI, E. **Matemática**. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2011. | 2 | 1 |
| 04 | BICUDO, I. **Os Elementos**. São Paulo: Ed. UNESP, 2009. | 1 | 1 |
| 05 | BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. | 2 | 1 |
| 06 | CARVALHO, B. A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969. | 31 | 1 |
| 07 | CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. | 67 | 5 |
| 08 | D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 14ª ed. Campinas: Papirus, 2007. | 1 | 9 |
| 09 | DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 1999. | 16 | 1 |
| 10 | DINIZ, M. I.; SMOLE, K. S. **O conceito de ângulo e o ensino de Geometria**. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2008. | 2 | 1 |
| 11 | DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10**: Geometria Espacial, posição e métrica. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2004. | 85 | 4 |
| 12 | DOWNES, M. **Geometria Moderna**, Parte I e II. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1971. | 6 | 1 |
| 13 | EVES, H.; DOMINGUES, Hygino. Introdução à História da Matemática. Campinas Ed. UNICAMP, 2004. | 5 | 1 |
| 14 | FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática**: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999. | 2 | 1 |
| 15 | FERREIRA, E. B. et al. **Geometria Dinâmica**: contribuições do Geogebra para a Matemática na educação básica. Curitiba: Editora Appris, 2013. | 2 | 1 |
| 16 | FETISSOV, A. **A demonstração em geometria**. São Paulo: Atual, 1994. | 2 | 1 |
| 17 | FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. (Org.); MARCHESI, A. et al. **Por trás da porta, que Matemática acontece**? Campinas, SP: Editora Graf. FE/Unicamp, 2001. | 1 | 5 |
| 18 | FONSECA, M. da C. F. R. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. | 1 | 3 |
| 19 | GARBI, G.G. A Rainha das **Ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2007. | 1 | 1 |
| 20 | GARBI, G. G. **C.Q.D.**: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Livraria da Física, 2010. | 3 | 2 |
| 21 | GIONGO, A. R. **Curso de Desenho Geométrico**. São Paulo: Nobel, 1984. | 9 | 1 |
| 22 | GONÇALVES JÚNIOR, O. **Matemática por assunto**: Geometria plana e espacial. São Paulo: Scipione, 1995. | 7 | 1 |
| 23 | HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. Ajuda GeoGebra, Manual Oficial da Versão 3.2, disponível em <http://www.geogebra.org>. | 2 | 2 |
| 24 | IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2010. | 6 | 1 |
| 25 | IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras**. 7ª ed., São Paulo: Scipione, 2002. | 1 | 4 |
| 26 | IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. São Paulo: Scipione, 2005. | 1 | 3 |
| 27 | ITACARAMBI, R. R.; BERTON, I. da C. B. **Geometria, brincadeiras e jogos**: 1º. Ciclo do ensino fundamental. São Paulo: Livraria de Física, 2008. | 2 | 1 |
| 28 | KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros**. Niterói: EDUFF, 1998. | 3 | 2 |

[63] Componentes curriculares de ensino e aprendizagem localizados.
[64] Componentes curriculares específicos da Matemática referente a conceitos/conteúdos de GE.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999. | 55 | 10 |
| 30 | LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. | 1 | 2 |
| 31 | LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: Graftex, 1991 | 53 | 5 |
| 32 | LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. | 5 | 2 |
| 33 | LIMA, E. L. et. al. **Temas e Problemas Elementares**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. | 3 | 3 |
| 34 | LIMA NETTO, S. **Construções geométricas**: exercícios e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2009. | 14 | 1 |
| 35 | LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando a geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. | 6 | 15 |
| 36 | LOPES, M. L. M. L.; NASSER, L. **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996. | 3 | 2 |
| 37 | LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. | 1 | 11 |
| 38 | MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001. | 1 | 1 |
| 39 | MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus,2003. | 1 | 5 |
| 40 | MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013. | 5 | 1 |
| 41 | POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1994. | 1 | 14 |
| 42 | RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. **Matematicativa**. 3ª ed. João Pessoa: EDUSP, 2004. | 1 | 7 |
| 43 | RÊGO, R. G. do; RÊGO R. M. do; VIEIRA, K. M. **Laboratório de Ensino De Geometria**. Campinas, SP: Editores Associados, 2012. | 2 | 3 |
| 44 | SMOLE, K. S. **Cadernos do Mathema**: Jogos de matemática de 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007. | 1 | 2 |
| 45 | SMOLE, K. S. **Ler e resolver problemas**. Porto Alegre: Art. Med, 2001. | 1 | 3 |
| 46 | TAHAN, M.; **Matemática Divertida e Curiosa**. 25ª edição. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008. | 2 | 1 |
| 47 | TINOCO, L. **Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, Projeto Fundão, 1999. | 7 | 2 |
| 48 | UNESCO. Educação para um futuro sustentável: uma visão transdisciplinar para ações compartilhadas. Brasília: Ed. IBAMA, 1999. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001106/110686porb.pdf>. | 3 | 1 |
| 49 | UFF – Universidade Federal Fluminense. Conteúdos Digitais. Disponível em:< http://www.uff.br/cdme/>. | 2 | 2 |
| 50 | WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. | 39 | 5 |

Fonte: Dados da pesquisa.

# APÊNDICE G – OBRAS MAPEADAS REFERENTES A OUTROS CONCEITOS/CONTEÚDOS

Quadro 86 – Revistas e obras referentes a outros conceitos/conteúdos

| **Obras** |
|---|
| BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Fortaleza: SBM, 1997. |
| BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. |
| BARBOSA, R. M. **Descobrindo Padrões em Mosaicos**. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1993. |
| CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C; WAGNER, E. **Trigonometria**: números complexos. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. |
| DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: Geometria Plana. São Paulo: Atual, 2005. |
| HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: Combinatória, Probabilidade. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013. |
| IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3**: Trigonometria. 9a ed. São Paulo: Atual, 2013. |
| IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 7**: Geometria Analítica. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005. |
| IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 2**: Logaritmos. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013. |
| IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1**: Conjuntos, Funções. 8ª ed. São Paulo:Atual, 2013. |
| JANOS, M. **Geometria fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. |
| REZENDE, E. Q. F.; BONTORIM, M. L. Q. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas: Editora Unicamp, 2008. |
| RODRIGUES, C. I.; REZENDE, E. Q. F. **Cabri-Géomètre e a geometria plana**. Campinas: Editora Unicamp, 1999. |
| **Revistas** |
| Educação Matemática em Revista. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/index > |
| Nova Escola (EDITORA ABRIL) |
| Revista do Professor de Matemática – RPM. Disponível em: < http://rpm.org.br/ > |
| Zetetiké. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/index > |

Fonte: Dados da pesquisa.

# APÊNDICE H – ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO DO CUBO ORGANIZADO PELAS EQUIPES NO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Quadro 87 – Roteiro de construção do cubo organizado no *software* GeoGebra pela Equipe A

| **Equipe A** | |
|---|---|
| **Ações** | **Descrição GeoGebra** |
| Passo 1: Indicar os pontos A e B e traçar uma reta.<br>Passo 2: Traçar uma circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$.<br>Pass3: Traçar uma circunferência de centro B e raio $\overline{AB}$ e marcar o ponto C de interseção com a reta AB.<br>Passo 4: Marcar os pontos D e E na interseção das circunferências.<br>Passo 5: Traçar a reta contendo os pontos D e E.<br>Passo 6: Traçar uma circunferência de centro C e raio $\overline{AB}$.<br>Passo 7: Marcar os pontos F e G interseção com a circunferência de centro B.<br>Passo 8: Traçar a reta RG e marcar o ponto H de interseção com a reta AB.<br>Passo 9: Marque o ponto I de interseção de $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.<br>Passo 10: Trace os segmentos DF, FH, HI e DI<br>Na janela de visualização 3D:<br>Passo 11: Com a ferramenta “reta perpendicular” clique no plano que contém o quadrado e nos pontos D, F, H e I.<br>Passo 12: Com a ferramenta “plano perpendicular” clique no ponto D e $\overline{DC}$, ponto F e $\overline{DC}$, ponto F e $\overline{FH}$, ponto H e $\overline{HF}$.<br>Passo 13: Coloque na caixa de entrada o comando “círculo (F, $\overline{FD}$, o)” sendo “o” o plano perpendicular a reta i. Marque o ponto K como $m \cap c_1$<br>Passo 14: “Círculo (D, $\overline{FD}$, o)” e marque o ponto M como $s \cap d_1$<br>Passo 15: “Círculo (I, $\overline{IH}$, t)” e marque o ponto O como $r \cap e_1$<br>Passo 16: “Círculo (H, $\overline{IH}$, t)” e marque o ponto Q como $q \cap f_1$<br>Passo 17: Crie os segmentos: IO, DM, FK, HQ, OQ, OM, MK e KQ. | Passo 1: Reta AB<br>Passo 2: Circunferência *c* com centro A e raio $\overline{AB}$.<br>Passo 3: Circunferência *d* com centro B e raio $\overline{AB}$.<br>Passo 4: Interseções entre *c* e *d* nomeadas como pontos D e E<br>Passo 5: Reta DE<br>Passo 6: Circunferência *e* com centro C e raio $\overline{AB}$<br>Passo 7: Interseções entre *d* e *e* nomeadas como pontos F e G<br>Passo 8: Reta FG<br>Passo 9: Interseção entre $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ nomeada como ponto H<br>Passo 10: Interseção entre $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ nomeada como ponto I<br>Passo 11: Reta DF<br>Passo 12: Segmento $\overline{DF}$, $\overline{FH}$, $\overline{HI}$, $\overline{ID}$.<br>Passo 13: Circunferência *p* com centro D e raio $\overline{DF}$.<br>Passo 14: Interseção entre *p* e $\overline{HI}$ nomeada como ponto J<br>Passo 15: Retas que contém o ponto F, ponto H, Passo ponto I e ponto D e são perpendicular ao plano XOY<br>Passo 16: Plano que contém o ponto D e plano que contém o ponto F e perpendiculares a reta $DF$<br>Passo 17: Plano que contém o ponto F e plano que contém o ponto H e perpendiculares a reta FG<br>Passo 18: Circunferência $d_1$ com centro D e raio $\overline{DF}$.<br>Passo 19: Interseções entre $d_1$ e reta perpendicular ao plano XOY que contém o ponto F, nomeadas como ponto K e ponto L.<br>Passo 20: Circunferência $e_1$ com centro I e raio $\overline{IH}$.<br>Passo 21: Interseções entre $e_1$ e reta perpendicular ao plano XOY que contém o ponto I, nomeadas como ponto O e ponto P.<br>Passo 22: Circunferência $f_1$ com centro H e raio $\overline{IH}$.<br>Passo 23: Interseções entre $f_1$ e reta perpendicular ao plano XOY que contém o ponto H, nomeadas como ponto Q e ponto R.<br>Passo 24: Segmentos $\overline{IO}$, $\overline{DM}$, $\overline{FK}$, $\overline{HQ}$, $\overline{QO}$, $\overline{OM}$, $\overline{MK}$ e $\overline{KQ}$ |

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 88 – Roteiro de construção do cubo organizado no *software* GeoGebra pela Equipe B

| **Equipe B** | |
|---|---|
| **Ações** | **Descrição GeoGebra** |
| Passo 1: Criar 2 pontos no plano xy, traçar uma reta pelos 2 pontos criados.<br>Passo 2: Utilizando o compasso criamos um triângulo equilátero a partir dos pontos iniciais.<br>Passo 3: Utilizando ainda o compasso traçamos o ponto médio dos pontos iniciais, utilizando a reta traçamos uma do ponto médio e o terceiro vértice do triângulo equilátero.<br>Passo 4: Repetindo o processo, conseguimos um quadrado.<br>Passo 5: No 3D clicamos na ferramenta esfera com centro em um ponto do quadrado e o raio vai ser o lado do quadrado.<br>Passo 6: Dai traçamos retas paralelas ao plano, fizemos os planos até fechar o cubo. | Passo 1: Reta AB<br>Passo 2: Circunferência *c* com centro A e raio $\overline{AB}$<br>Passo 3: Circunferência *d* com centro A e raio $\overline{BA}$<br>Passo 4: Circunferência *e* com centro B e raio $\overline{BA}$<br>Passo 5: Ponto C sobre a circunferência *e*<br>Passo 6: Segmento $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$<br>Passo 7: Reta *i* que contém o ponto C e é perpendicular a re AB<br>Passo 8: Interseção entre *f* e *i* nomeada como ponto D<br>Passo 9: Circunferência *k* com centro D e raio $\overline{DC}$<br>Passo 10: Interseção entre *k* e AB nomeada como ponto E<br>Passo 11: Reta *j* que contém o ponto C e é paralela a AB<br>Passo 12: Reta *l* que contém o ponto E e é paralela a AB<br>Passo 13: Interseção entre *j* e *l* nomeada como ponto F<br>Passo 14: Reta *m* que contém o ponto C e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 15: Reta *n* que contém o ponto F e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 16: Reta *p* que contém o ponto E e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 17: Reta *q* que contém o ponto D e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 18: Reta CE<br>Passo 19: Plano *a* que contém as retas *p* e *n*<br>Passo 20: Plano *b* que contém as retas *p* e *q*<br>Passo 21: Plano *o* que contém as retas *q* e *m*<br>Passo 22: Plano *s* que contém as retas *n* e *m*<br>Passo 23: Esfera que contém o ponto D e possuí como centro o ponto C<br>Passo 24: Interseção entre *m* e *u* nomeada como ponto G<br>Passo 25: Plano *v* que contém o ponto G e é paralelo ao plano xOy<br>Passo 26: Interseção entre *o* e *v* nomeada como reta *t*<br>Passo 27: Interseção entre *o* e *b* nomeada como reta $f_1$<br>Passo 28: Interseção entre *o* e o plano xOy nomeada como reta $g_1$<br>Passo 29: Interseção entre *s* e *o* nomeada como reta $h_1$<br>Passo 30: Interseção entre *o* e *v* nomeada como reta $i_1$<br>Passo 31: Interseção entre *b* e *a* nomeada como reta $j_1$<br>Passo 32: Interseção entre *v* e *a* nomeada como reta $k_1$<br>Passo 33: Interseção entre *b* e o plano xOy nomeada como reta $l_1$<br>Passo 34: Interseção entre *o* e *b* nomeada como reta $m_1$<br>Passo 35: Interseção entre *a* e o plano xOy nomeada como reta $n_1$<br>Passo 36: Interseção entre *s* e o plano xOy nomeada como reta $p_1$<br>Passo 37: Interseção entre *b* e *v* nomeada como reta $q_1$<br>Passo 38: Interseção entre *o* e *v* nomeada como reta $r_1$ |

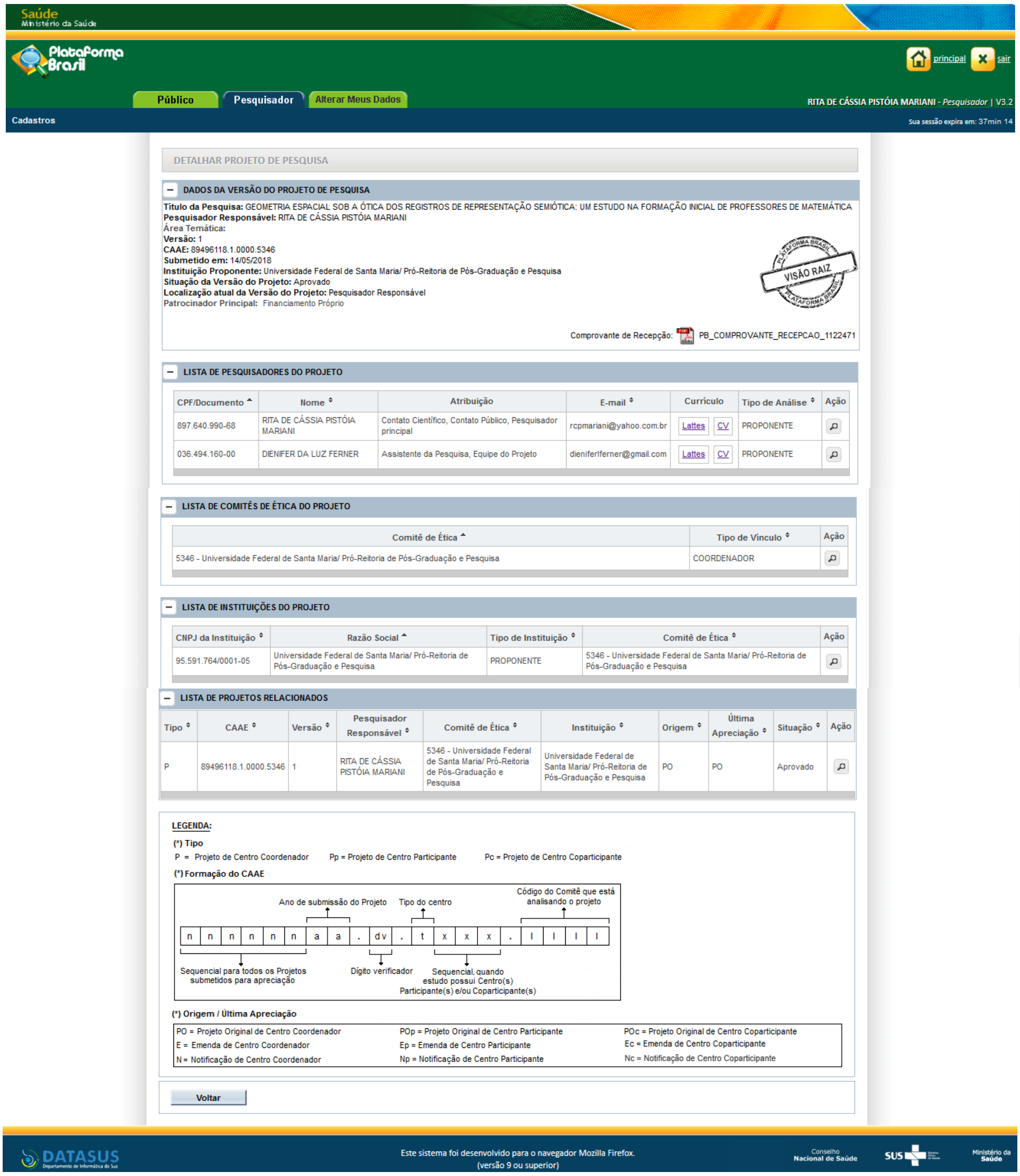
Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 89 – Roteiro de construção do cubo organizado no *software* GeoGebra pela Equipe C

| Equipe C | |
|---|---|
| **Ações** | **Descrição GeoGebra** |
| Passo 1: Foi criado o segmento AB, depois criamos dois círculos com a ferramenta compasso.<br>Passo 2: Depois traçamos duas retas perpendiculares ao ponto A e B.<br>Passo 3: Dai passamos par o 3D e criamos um ponto e depois retas paralelas, logo depois criamos um plano e usamos a ferramenta compasso para achar um círculo e consequentemente o raio.<br>Passo 4: Posteriormente foi criado um plano perpendicular ao plano já existente, então foi construído uma circunferência para poder determinar a altura do segmento perpendicular ao primeiro plano criado<br>Passo 5: E finalmente com a existência de dois planos foi possível ir determinando os outros segmentos paralelos dois a dois. | Passo 1: Segmento $\overline{AB}$<br>Passo 2: Circunferência *c* com centro B e raio $\overline{AB}$.<br>Passo 3: Circunferência *d* com centro A e raio $\overline{AB}$ e paralela ao plano xOy<br>Passo 4: Reta *g* que contém o ponto A e é perpendicular a $\overline{AB}$ e paralela ao plano xOy<br>Passo 5: Reta *h* que contém o ponto B e é perpendicular a $\overline{AB}$ e paralela ao plano xOy<br>Passo 6: Interseções entre *d* e *g* nomeadas como pontos C e D<br>Passo 7: Interseções entre *c* e *h* nomeadas como pontos E e F<br>Passo 8: Segmentos $\overline{DF}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{BA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{BF}$, $\overline{BF}$<br>Passo 9: Reta *s* que contém o ponto B e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 10: Reta *t* que contém o ponto A e é perpendicular ao plano xOy<br>Passo 11: Ponto G sobre a reta t<br>Passo 12: Reta *a* que contém o ponto F e é paralela a reta *t*<br>Passo 13: Reta *b* que contém o ponto F e é paralela a reta *s*<br>Passo 14: Ponto I sobre a reta *t*<br>Passo 15: Reta *e* que contém o ponto I e é paralela a reta *t*<br>Passo 17: Reta $f_1$ que contém o ponto D e é paralela a reta *s*<br>Passo 18: Ponto J sobre o segmento $\overline{BA}$<br>Passo 19: Circunferência $c_1$ que contem o ponto B e tem como eixo $\overline{DF}$<br>Passo 20: Interseções entre $c_1$ e *b* nomeadas como pontos L e M<br>Passo 21: Reta $h_1$ que contém o ponto D e é paralela a *b*<br>Passo 22: Reta $i_1$ que contém o ponto F e é paralela a *b*<br>Passo 23: Reta $j_1$ que contém o ponto D e é paralela a $h_1$<br>Passo 24: Reta $k_1$ que contém o ponto F e é paralela a $i_1$<br>Passo 25: Reta $l_1$ que contém o ponto F e é paralela a $k_1$<br>Passo 26: Reta $m_1$ que contém o ponto D e é paralela a *p*<br>Passo 27: Reta $n_1$ que contém o ponto L e é paralela a $k_1$<br>Passo 28: Reta $p_1$ que contém o ponto L e é paralela a $m_1$<br>Passo 29: Reta $g_1$ que contém o ponto L e é paralela a *r*<br>Passo 30: Interseção entre s e $g_1$ nomeada como ponto H<br>Passo 31: Reta $q_1$ que contém o ponto H e é paralela a $m_1$<br>Passo 32: Interseção entre *e* e $q_1$ nomeada como ponto K<br>Passo 33: Reta $r_1$ que contém o ponto K e é paralela a *n*<br>Passo 34: Segmento $\overline{AK}$<br>Passo 35: Ponto N sobre *e*, Pontos O e P sobre *t*<br>Passo 36: Segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{HK}$<br>Passo 37: Interseção entre $r_1$ e $f_1$ nomeado como ponto Q<br>Passo 38: Segmentos $\overline{BH}$, $\overline{LH}$, $\overline{QL}$, $\overline{QK}$, $\overline{DQ}$ e $\overline{LF}$ |

Fonte: Dados da pesquisa.

# ANEXO A - APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISAS COM SERES HUMANOS (CEP/UFSM)



Saúde Ministério da Saúde

Plataforma Brasil

principal sair

Público | Pesquisador | Alterar Meus Dados

RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI - *Pesquisador* | V3.2

Cadastros

Sua sessão expira em: 37min 14

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

**DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA**

**Título da Pesquisa:** GEOMETRIA ESPACIAL SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA
**Pesquisador Responsável:** RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI
Área Temática:
**Versão:** 1
**CAAE:** 89496118.1.0000.5346
**Submetido em:** 14/05/2018
**Instituição Proponente:** Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
**Situação da Versão do Projeto:** Aprovado
**Localização atual da Versão do Projeto:** Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

PLATAFORMA BRASIL VISÃO RAIZ PLATAFORMA BRASIL

Comprovante de Recepção: PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_1122471

**LISTA DE PESQUISADORES DO PROJETO**

| CPF/Documento | Nome | Atribuição | E-mail | Currículo | Tipo de Análise | Ação |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 897.640.990-68 | RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI | Contato Científico, Contato Público, Pesquisador principal | rcpmariani@yahoo.com.br | Lattes CV | PROPONENTE | |
| 036.494.160-00 | DIENIFER DA LUZ FERNER | Assistente da Pesquisa, Equipe do Projeto | dieniferlferner@gmail.com | Lattes CV | PROPONENTE | |

**LISTA DE COMITÊS DE ÉTICA DO PROJETO**

| Comitê de Ética | Tipo de Vínculo | Ação |
|---|---|---|
| 5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa | COORDENADOR | |

**LISTA DE INSTITUIÇÕES DO PROJETO**

| CNPJ da Instituição | Razão Social | Tipo de Instituição | Comitê de Ética | Ação |
|---|---|---|---|---|
| 95.591.764/0001-05 | Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa | PROPONENTE | 5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa | |

**LISTA DE PROJETOS RELACIONADOS**

| Tipo | CAAE | Versão | Pesquisador Responsável | Comitê de Ética | Instituição | Origem | Última Apreciação | Situação | Ação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 89496118.1.0000.5346 | 1 | RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI | 5346 - Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa | Universidade Federal de Santa Maria/ Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa | PO | PO | Aprovado | |

**LEGENDA:**

**(*) Tipo**

P = Projeto de Centro Coordenador Pp = Projeto de Centro Participante Pc = Projeto de Centro Coparticipante

**(*) Formação do CAAE**

Ano de submissão do Projeto | Tipo do centro | Código do Comitê que está analisando o projeto

n n n n n n a a . dv . t x x x . l l l l

Sequencial para todos os Projetos submetidos para apreciação | Digito verificador | Sequencial, quando estudo possui Centro(s) Participante(s) e/ou Coparticipante(s)

**(*) Origem / Última Apreciação**

| | | |
|---|---|---|
| PO = Projeto Original de Centro Coordenador | POp = Projeto Original de Centro Participante | POc = Projeto Original de Centro Coparticipante |
| E = Emenda de Centro Coordenador | Ep = Emenda de Centro Participante | Ec = Emenda de Centro Coparticipante |
| N = Notificação de Centro Coordenador | Np = Notificação de Centro Participante | Nc = Notificação de Centro Coparticipante |

Voltar

DATASUS Departamento de Informática do SUS

Este sistema foi desenvolvido para o navegador Mozilla Firefox. (versão 9 ou superior)

Conselho Nacional de Saúde SUS Ministério da Saúde