UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fabíola Cristiane Forsch

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL FRACIONÁRIA

Santa Maria, RS
2019

Fabíola Cristiane Forsch

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL FRACIONÁRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestra em Matemática.**

ORIENTADORA: Profa. Dra. Taísa Junges Miotto

COORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Luís Miotto

Santa Maria, RS
2019

Forsch, Fabíola Cristiane
Existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária / Fabíola Cristiane Forsch.- 2019.
69 p.; 30 cm

Orientadora: Taísa Junges Miotto
Coorientador: Márcio Luís Miotto
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. Cálculo fracionário 2. Equação diferencial fracionária 3. Derivada fracionária de Caputo 4. Grau topológico de Leray-Schauder I. Miotto, Taísa Junges II. Miotto, Márcio Luís III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Fabíola Cristiane Forsch

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL FRACIONÁRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestra em Matemática.**

Aprovada em 06 de Novembro de 2019:

Taísa Junges Miotto

Taísa Junges Miotto, Dra.(UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Claudete Webler

Claudete Matilde Webler Martins, Dra.(UEM)

Celene Buriol

Celene Buriol, Dra.(UFSM)

Santa Maria, RS
2019

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que de alguma forma contribuíram na concretização deste trabalho. E em especial, agradeço:

- a Deus, por ter me dado forças para seguir sempre em frente, independente das dificuldades que surgiram;

- aos meus pais, Edmar Elimar Forsch e Marilene Carmem da Silva Forsch, por todo o apoio, por sempre acreditarem que eu conseguiria concluir mais esta etapa e por darem o melhor de si para que eu conseguisse concluir os meus estudos e realizar os meus sonhos;

- ao meu namorado Lucas Carvalho por todo o incentivo, por todos os momentos que esteve ao meu lado, independente das circunstâncias. Por sempre acreditar que eu seria capaz de concluir este trabalho e por nunca me deixar desistir. Sem o seu apoio incondicional, eu não teria conseguido;

- ao meu irmão, Fabiano Luís Forsch, por acreditar no meu potencial e por sempre demonstrar admiração pelo meu esforço e pelas conquistas que alcancei;

- à amiga Lisiane Daniela Böck e ao amigo Marcelo Luiz Bertó, pelas palavras de conforto e de incentivo durante o curso, e por acreditarem que eu seria capaz de concluir este trabalho;

- aos meus orientadores, Taísa Junges Miotto e Márcio Luís Miotto, por todos os ensinamentos, pelo incentivo, pelos conselhos, por toda a ajuda para que a concretização deste trabalho fosse possível e por todo o apoio que me deram no decorrer de todo o mestrado;

- às professoras da banca, Celene Buriol, Claudete Matilde Webler Martins e Fernanda Somavilla pelas contribuições feitas ao meu trabalho.

- aos docentes do Curso de Pós-Graduação em Matemática, com os quais tive a oportunidade de estudar, por contribuirem com seu conhecimento para a minha formação;

- à Capes, pelo apoio financeiro dado durante o curso.

Se não puder se destacar pelo talento,
vença pelo esforço.
(Dave Weinbaum)

RESUMO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL FRACIONÁRIA

AUTORA: Fabíola Cristiane Forsch
ORIENTADORA: Taísa Junges Miotto
COORIENTADOR: Márcio Luís Miotto

Este trabalho tem por objetivo apresentar resultados que garantem a existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária com condições de contorno antiperiódicas. A equação diferencial fracionária considerada em tal problema, é dada em termos da derivada fracionária de Caputo. Para garantirmos a validade dos resultados, fazemos uso da teoria do grau topológico de Leray-Schauder, e de teoremas do ponto fixo, a saber, o Teorema do ponto fixo de Altman e o Teorema do ponto fixo de Schauder, que são também demonstrados, com o auxílio de propriedades provenientes do grau topológico de Leray-Schauder.

Palavras-chave: Equação diferencial fracionária. Derivada fracionária de Caputo. Grau topológico de Leray-Schauder. Teorema do ponto fixo de Altman. Teorema do ponto fixo de Schauder.

ABSTRACT

EXISTENCE OF SOLUTION FOR A PROBLEM INVOLVING A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

AUTHOR: Fabíola Cristiane Forsch
ADVISOR: Taísa Junges Miotto
CO-ADVISOR: Márcio Luís Miotto

This paper aims to present results that guarantee the existence of solution to a problem involving a fractional differential equation with antiperiodic boundary conditions. The fractional differential equation considered in such a problem is given in terms of the Caputo fractional derivative. To ensure the validity of the results, we make use of the theory of Leray-Schauder topological degree, and fixed point theorems, namely Altman's fixed point theorem and Schauder's fixed point theorem, which are also demonstrated with the aid of properties from the Leray-Schauder topological degree.

Keywords: Fractional differential equation. Caputo fractional derivative. Leray-Schauder topological degree. Altman's fixed point theorem. Schauder's fixed point theorem.

Lista de símbolos

No decorrer desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ representa o conjuntos dos números naturais;

$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ representa o conjuntos do números inteiros negativos;

$\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;

$\mathbb{R}^+$ representa o conjunto dos números reais positivos;

$\mathbb{R}^-$ representa o conjunto dos números reais negativos;

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n\}$ representa o espaço euclidiano n dimensional;

$|\cdot|$ denota o módulo de um número real;

$\|\cdot\|_e$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;

$\|\cdot\|_E$ denota a norma em um espaço de Banach E;

$\|u\| = \max\limits_{t\in[0,T]} |u(t)|$, onde $u \in C[0, T]$;

$int(A)$ representa o interior do conjunto A;

$\overline{A}$ representa o fecho do conjunto A;

∂A representa a fronteira do conjunto A;

$B(x_0; r)$ representa a bola aberta centrada em x_0 e raio $r > 0$;

$B[x_0; r] = \overline{B(x_0; r)}$;

$B(0; R) = \{u \in C[0, T]; \max\limits_{t\in[0,T]} |u(t)| < R\}$;

$B[0; R] = \overline{B(0; R)}$;

$[z_1, z_2, \ldots, z_k]$ denota o subespaço gerado por $z_1, z_2, \ldots, z_k$;

$\rho_X(x, A) = inf\{\|x - a\|_X; a \in A\}$;

$\mathcal{F}(A, Y) = \{f : A \to Y; f \text{ é função}\}$

$C(A, Y) = \{f : A \to Y;\ f \text{ é contínua}\}$

$C^k(A, Y) = \{f : A \to Y;\ f \text{ é } k\text{−vezes continuamente diferenciável em } A\}$;

$\overline{C}^k(A, Y) = C^k(A, Y) \cap C(\overline{A}, Y)$;

$C(A) = C(A, \mathbb{R})$;

$C^k(A) = C^k(A, \mathbb{R})$;

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad \text{representa a função sinal;}$$

$d(f, \Omega, y)$ significa grau topológico de Brouwer de uma terna (f, Ω, y);

$D(f, \Omega, y)$ significa grau topológico de Leray-Schauder de uma terna (f, Ω, y);

$\sup\limits_{x \in A} \|h(x)\|_E$ representa o supremo do número $\|h(x)\|_E$ no conjunto A;

$[x]$ denota a parte inteira do número real x;

$L^1(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R}; \int\limits_a^b |f(t)|dt < \infty \right\}$;

$f \circ g$ representa a composição entre f e g;

$f^{(k)}(0^+) = \left. \dfrac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t=0^+} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{d^k}{dt^k} f(t)$;

Sumário

1 Introdução

O cálculo de ordem arbitrária, popularmente conhecido como cálculo fracionário, teve sua origem, segundo (CAMARGO, 2009), em 30 de setembro de 1695, por meio de uma troca de correspondências entre L'Hôspital e Leibniz, na qual L'Hôspital questionou qual seria o significado de uma derivada de ordem meio. Leibniz assegurou que $D^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx : x}$ e afirmou que isto é aparentemente um paradoxo do qual um dia seriam obtidas consequências importantes. A partir disto, outros brilhantes matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, se interessaram pelo estudo do cálculo fracionário.

Apesar do cálculo fracionário, ter surgido praticamente na mesma época que o cálculo clássico, inicialmente seu desenvolvimento não foi tão intenso. Mas o estudo na área, foi aumentando gradativamente e a partir do século XX, surgiram diversas publicações sobre o assunto. Além disso, por um longo tempo, o desenvolvimento do cálculo fracionário deu-se estritamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas. Mas, ainda segundo (CAMARGO, 2009), "[...] nas últimas décadas diversos autores mostraram que a modelagem feita por meio do cálculo fracionário oferece uma descrição mais precisa dos fenômenos naturais do que o cálculo usual [...]". Destacamos ainda (OLIVEIRA, 2010) e (OLIVEIRA, 2018) os quais fazem um apanhado histórico bastante detalhado e completo sobre o assunto, e ainda, o último, apresenta uma pesquisa detalhada sobre o que se tem no Brasil, e no mundo, sobre o cálculo fracionário, incluindo eventos e materias sobre o assunto. Ainda, vale ressatar que em (OLIVEIRA, 2019) é possível encontrar uma cronologia do cálculo fracionário desde seu surgimento em 1695, até o ano de 2015.

O cálculo fracionário tem sido utilizado na discussão de problemas de diversas áreas da ciência. É possível encontrar aplicações desta teoria na matemática, física, engenharia, química, biologia, aeorodinâmica, e em muitas outras áreas. Segundo (AHMAD; NIETO, 2010), isto se deve principalmente ao fato de que as derivadas fracionárias fornecem uma excelente ferramenta para a descrição de propriedades hereditárias de vários materiais e processos, e que esta é a principal vantagem do uso de equações diferencias fracionárias quando comparadas a modelos de ordem inteira. Podemos destacar alguns trabalhos, como (PODLUBNY, 1999), que em seu livro, traz um capítulo só com aplicações do cálculo fracionário, em áreas como biologia, circuítos elétricos, teoria de controle e viscoelasticidade. Este último elemento de estudo é muito comum em aplicações do cálculo fracionário, e pode ser ainda encontrado em trabalhos como (DEBNATH, 2003), (OLIVEIRA, 2018) e (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015). (DEBNATH, 2003), além de algumas linhas de estudo já citadas, traz aplicações também em eletroquímica e eletromagnetismo. Destacamos também, o artigo de (WANG; XU; LI, 2009) que fala de aplicações em mecânica quântica, e (DAVID; LINARES; PALLONE, 2011), que trazem algumas aplicações na equação de difusão, engenharia de alimentos, robótica e teoria de controle. Citamos ainda, (CAMARGO, 2009), que estuda modelos bem conhecidos do cálculo clássico, mas com a abordagem fracionária, a saber, a equação do Telégrafo Fracionária, Sistema de Lotka-Volterra Fracionário e Equação de Langevin Fracionária e outros trabalhos que abordam o estudo do oscilador harmônico fracionário, como por exemplo, (OLIVEIRA, 2018), (OLIVEIRA, 2014) e (TEODORO, 2014).

Devido a grande variedade de aplicações existentes no campo do cálculo fracionário, as equações diferenciais fracionárias têm aparecido cada vez mais em diversas áreas de pesquisa, e métodos para resolvê-las ou ao menos resultados para garantir a existência de soluções das mesmas, vem sendo estudados e desenvolvidos. No entanto, segundo (AHMAD; NIETO, 2010), quando se trata de problemas de valor de contorno envolvendo equações diferenciais fracionárias não lineares, há ainda muitos aspectos para serem explorados.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar condições sobre a função f, que garantem a existência de solução para o seguinte problema, o qual envolve uma equação diferencial fracionária com condições de contorno anti-periódicas

$$\begin{cases} D_*^q u(t) = f(t, u(t)), \text{ para } t \in (0, T) \\ u(0) = -u(T), \ u'(0) = -u'(T), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $T > 0$, $q \in (1, 2]$ e D_*^q denota a derivada fracionária de ordem q, na definção de Caputo.

Para apresentarmos resultados que garantem a existência de solução para tal problema, faremos uso da teoria do grau topológico em espaços de dimensão infinita, mais conhecido por grau topológico de Leray-Schauder e de teoremas do ponto fixo, a saber, o Teorema do ponto fixo de Altman e o Teorema do ponto fixo de Schauder. Tal teoria, para completude de nosso trabalho será apresentada, ao menos no que se refere aos seus resultados principais, e os teoremas do ponto fixo mencionados serão justificados com o auxílio de propriedades do grau topológico de Leray-Schauder.

Para atingirmos o objetivo desejado, nosso trabalho está dividido em três capítulos, organizados da seguinte maneira:

No Capítulo 2, falaremos da teoria do grau topológico de Leray-Schauder. Este por sua vez, está dividido em três seções, as quais abordam a construção do grau topológico, as suas propriedades e dois teoremas do ponto fixo, já mencionados anteriormente.

No Capítulo 3, descreveremos um pouco da teoria do cálculo fracionário, tal capítulo é dividido em seis seções. Nas três primeiras, falaremos de funções consideradas especiais dentro da teoria do cálculo fracionário, a saber a função gama, a função beta, e a função de Mittag-Leffler, de um e dois parâmetros. As duas seções seguintes são dedicadas ao estudo de operadores integrais e diferenciais fracionários. Vale destacar que não existe uma definição única para estes operadores, pois existem na realidade diversas abordagens. Mencionamos que em (TEODORO, 2019), é possível encontrar um estudo, relativo aos critérios que um operador deve satisfazer para ser considerado uma derivada fracionária e diversas formulações para este conceito. No entanto, vale destacar que para atender nossos propósitos, nos restringimos ao estudo da integral fracionária de Riemann-Liouville e as derivadas fracionárias, nas formulações de Riemann-Liouville e Caputo. Por fim, na última seção deste capítulo, falaremos brevemente sobre as equações diferenciais fracionárias, e utilizaremos o método da transformada de Laplace, para resolver algumas equações diferenciais ordinárias fracionárias lineares com coeficientes constantes.

O Capítulo 4 é baseado no artigo de (AHMAD; NIETO, 2010) e apresenta três condições sobre f que garantem a existência de solução para o problema (1.1). Apresentamos ainda exemplos que satisfazem tais condições.

Por fim, apresentamos a conclusão deste trabalho, as referências utilizadas e três apêndices. O primeiro relativo ao grau topológico em dimensão finita, mais conhecido por grau topológico de Brouwer, com o intuito de auxiliar o estudo do Capítulo 2. No segundo apêndice, veremos o conceito de transformada de Laplace e alguns de seus principais resultados, visto que é a metodologia que utilizamos para resolvermos algumas equações diferenciais fracionárias no Capítulo 3. E por último, trazemos alguns resultados auxiliares, que foram de fundamental importância no desenvolvimento do Capítulo 4.

2 Grau topológico de Leray-Schauder

O grau topológico é uma ferramenta muito útil quando queremos investigar equações da forma $f(x) = y$, afim de obtermos respostas significativas quanto à existência de soluções para tal equação, onde $f : X \to X$ é uma aplicação dada e X é um espaço vetorial normado, que pode ser de dimensão finita ou infinita, e $y \in X$ é um ponto dado. Além disso, é considerado um subconjunto $\Omega \subset X$, onde as soluções de tal equação são procuradas. A partir disto, formamos ternas da forma (f, Ω, y) e consideramos o grau topológico como sendo uma função que associa a cada uma destas ternas um número inteiro, e então, utilizando as propriedades desta função, é possível garantirmos se existem soluções para a equação da forma $f(x) = y$.

O grau topológico, considerado para funções definidas em espaços vetoriais de dimensão finita, é chamado de grau topológico de Brouwer. No Apêndice A, são apresentadas a definição e algumas propriedades do mesmo, que servirão de base para, neste capítulo, definirmos o grau topológico considerado para funções em espaços vetoriais de dimensão infinita, em particular espaços de Banach, conhecido como grau topológico de Leray-Schauder.

Inicialmente, faremos a construção do grau, abordando conceitos e resultados necessários para obtermos sua definição. Posteriormente, vamos apresentar e demonstrar suas principais propriedades, e por fim, vamos enunciar e provar dois teoremas de ponto fixo, a saber o Teorema do ponto fixo de Schauder e o Teorema do ponto fixo de Altman, utilizando a teoria do grau topológico de Leray-Schauder.

Ressaltamos que (GABERT, 2015), (PEIXOTO, 2014) e (FONSECA; GANGBO, 1995), foram referências de extrema relevância para o desenvolvimento deste capítulo.

2.1 Construção do grau

Ressaltamos que não é possível definirmos o grau em dimensão infinita para aplicações que sejam somente contínuas como é feito para o grau topológico de Brouwer, veja Apêndice A. Indicamos (GABERT, 2015), onde é possível encontrar um exemplo que justifica tal afirmação. Desta forma, com o intuito de contornar este problema, de modo a estendermos o grau topológico, que já está definido em um primeiro momento em dimensão finita, para dimensão infinita, consideramos perturbações compactas da identidade, isto é, aplicações da forma $I - T$, onde T é uma aplicação compacta, conceito este, bem como outros que se fazem necessário formalizar.

Nas definições a seguir, consideremos E e F espaços de Banach, ou seja, espaços vetoriais normados completos.

Dizemos que $T : M \subset E \to F$ é uma **aplicação compacta** [1] se

i) T é contínua;

ii) $\overline{T(A)}$ é compacto para todo $A \subseteq M$, limitado.

Dizemos que $f : E \to F$ é uma **aplicação própria** em $N \subset E$ se $f^{-1}(K) \cap N$ é compacto em E, para todo K, subconjunto compacto de F.

Além disso, a aplicação $f : E \to F$ é dita **fechada**, se $f(G)$ é um conjunto fechado em F para todo G fechado em E.

E ainda, a aplicação $T : M \subset E \to F$ é uma **aplicação de posto finito**, se T é contínua e $T(M)$ está contido em um subespaço de F de dimensão finita.

Para construirmos o grau topológico de Leray Schauder, precisamos impor algumas condições sobre as ternas que mencionamos na introdução deste capítulo. Neste sentido, se Ω é um subconjunto aberto e limitado de um espaço de Banach E e a função $f : \overline{\Omega} \to E$ é da forma $f(x) = x - T(x)$, sendo $T : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação compacta e $y \in E \backslash f(\partial\Omega)$, então dizemos que (f, Ω, y) é uma **terna admissível** para o grau topológico de Leray-Schauder.

Dada uma terna admissível, para garantirmos que $\rho_E(y, f(\partial\Omega)) > 0$, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.1. Sejam E um espaço de Banach, $\Omega \subset E$ um conjunto aberto e limitado e $T : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação compacta. Então a função $f : \overline{\Omega} \to E$ definida por $f(x) = x - T(x)$, possui as seguintes propriedades:

i) f é uma aplicação própria em $\overline{\Omega}$;

ii) f é uma aplicação fechada.

Demonstração. i) Seja $K \subset E$ um conjunto compacto. Mostremos que $f^{-1}(K) \cap \overline{\Omega} = f^{-1}(K)$ é compacto. Suponhamos que $f^{-1}(K) \neq \emptyset$ e consideremos uma

[1] Autores europeus denominam esta aplicação de *completamente contínua*. Se $\overline{T(M)}$ for compacto em F, esses autores chamam T de *compacta*. Se M for limitado, as denominações coincidem.

sequência $(x_n) \subset f^{-1}(K)$. Portanto, $(f(x_n)) \subset K$ e como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_m}) \subset (x_n)$ tal que $\lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = z \in K$. Além disso, como T é uma aplicação compacta, segue que $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto.
Notemos agora que $(T(x_{n_m})) \subset \overline{T(\overline{\Omega})}$. Consequentemente, existe uma subsequência $(x_{n_{m_l}}) \subset (x_{n_m})$ tal que $\lim_{l\to\infty} T(x_{n_{m_l}}) = w \in \overline{T(\overline{\Omega})} \subset E$. Sendo $f = I - T$, isto é, $I = f + T$, segue que

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{m_l}} = \lim_{l\to\infty} f(x_{n_{m_l}}) + \lim_{l\to\infty} T(x_{n_{m_l}}) = z + w.$$

Como f é contínua, obtemos que

$$f(z+w) = f(\lim_{l\to\infty} x_{n_{m_l}}) = \lim_{l\to\infty} f(x_{n_{m_l}}) = z \in K.$$

Logo, $z + w \in f^{-1}(K)$. Assim, concluímos que $f^{-1}(K)$ é compacto.
ii) Seja $F \subset \overline{\Omega}$ fechado, mostremos que $f(F)$ é fechado. Para isso, seja $y \in \overline{f(F)}$, então, existe uma sequência $(y_n) \subset f(F)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, vamos mostrar que $y \in f(F)$. Consideremos $K = \{y_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ que é um conjunto compacto em E, mas pelo item *i)*, temos que f é uma aplicação própria em $\overline{\Omega}$, então, segue que $f^{-1}(K)$ é compacto, e como F é fechado, obtemos que $f^{-1}(K) \cap F$ é compacto. Além disso, $y_n \in f(F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então, segue que $y_n = f(z_n)$ com $z_n \in F$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ainda, $z_n \in f^{-1}(K)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(z_n) \subset f^{-1}(K) \cap F$. Disto e pela compacidade de $f^{-1}(K) \cap F$, segue que existe uma subsequência $(z_{n_m}) \subset (z_n)$ que converge para algum $z \in f^{-1}(K) \cap F$. Como f é contínua, $\lim_{m\to\infty} f(z_{n_m}) = f(z)$. Mas $f(z_{n_m})$ é uma subsequência de (y_n), portanto, $\lim_{m\to\infty} f(z_{n_m}) = y$. Logo, pela unicidade do limite, $f(z) = y$, e como $z \in F$, temos que $y \in f(F)$ e assim, concluímos que $f(F)$ é fechado. □

Observação 2.1. Por meio do item *ii*) do lema anterior, temos que $f(\partial\Omega)$ é um conjunto fechado. Portanto, se (f, Ω, y) é uma terna admissível para o grau topológico de Leray-Schauder, então $\rho_E(y, f(\partial\Omega)) = R$, onde R é uma constante positiva, visto que $y \notin f(\partial\Omega)$.

Os resultados a seguir garantem que dada uma terna admíssivel (f, Ω, y), para o grau topológico de Leray-Schauder, onde $f = I - T$, é possível aproximar T por uma aplicação de posto finito, de modo que o grau de Leray-Schauder de (f, Ω, y) possa ser dado por meio do grau topológico de Brouwer.

Lema 2.2. Sejam E, F espaços de Banach munidos, respectivamente, das normas $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$. Suponha que $M \subset E$ é um conjunto limitado e $T : M \to F$ é um aplicação compacta. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $T_\varepsilon : M \to F$ de posto finito tal que $\|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_F < \varepsilon$, para todo $x \in M$.

Demonstração. Como T é uma aplicação compacta e M é limitado, temos que $\overline{T(M)}$ é compacto. Assim, fixado $\varepsilon > 0$ e considerando $\{B(z;\varepsilon); z \in \overline{T(M)}\}$ uma cobertura por abertos de $\overline{T(M)}$, segue que existem $z_1, \ldots, z_k \in \overline{T(M)}$ tais que $\{B(z_i;\varepsilon); 1 \leq i \leq k\}$ ainda seja cobertura de $\overline{T(M)}$. Para cada $1 \leq i \leq k$, seja $m_i(\cdot,\varepsilon) : M \to \mathbb{R}$, dada por $m_i(x,\varepsilon) = \max\{0, \varepsilon - \|T(x) - z_i\|_F\}$ e consideremos

$$\theta_i(x,\varepsilon) = \frac{m_i(x,\varepsilon)}{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j(x,\varepsilon)}.$$

Mostremos que $\theta_i(\cdot,\varepsilon) : M \to \mathbb{R}$ está bem definida e é contínua para cada $i = 1, \ldots, k$. Com efeito, dado $x \in M$, temos que $T(x) \in B(z_j;\varepsilon)$ para algum $j = 1, \ldots, k$. Logo, $\|T(x) - z_j\|_F < \varepsilon$ para algum $j = 1, \ldots, k$, isto é, $\varepsilon - \|T(x) - z_j\|_F > 0$, e portanto, $m_j(x,\varepsilon) > 0$, para algum $j = 1, \ldots, k$. Assim, $\sum\limits_{j=1}^{k} m_j(x,\varepsilon) > 0$ e então, θ_i está bem definida para cada $i = 1, \ldots, k$.

Além disso, como

$$\begin{aligned} m_i(x,\varepsilon) &= \max\{0, \varepsilon - \|T(x) - z_i\|_F\} \\ &= \frac{\varepsilon - \|T(x) - z_i\|_F}{2} + \frac{|\varepsilon - \|T(x) - z_i\|_F|}{2}, \end{aligned}$$

temos que m_i é contínua, e portanto, θ_i é contínua, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Agora, consideremos $T_\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon) z_i$, para cada $x \in M$. Notemos que independente de $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j(x)} = 1. \tag{2.1}$$

Além disso, T_ε é contínua, pois θ_i é contínua, para cada $i = 1, \ldots, k$. E ainda, para cada $x \in M$, temos que $T_\varepsilon(x)$ é uma combinação linear convexa dos z_i. Portanto, $T_\varepsilon(x) \in [z_1, z_2, \ldots, z_k]$, para todo $x \in M$. Logo, $T_\varepsilon(M) \subset [z_1, z_2, \ldots, z_k]$, ou seja, T_ε é uma aplicação de posto finito.

Notemos que, por (2.1),

$$T(x) - T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon) T(x) - \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon) z_i = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon)(T(x) - z_i),$$

e com isso, obtemos que

$$\|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x,\varepsilon)\|T(x) - z_i\|_F < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.1. Sejam (f, Ω, y) uma terna admissível, com $f = I - T$ e $R = \rho_E(y, f(\partial\Omega))$. Para cada $\varepsilon \in (0, R)$, existe uma aplicação $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E$ de posto finito, satisfazendo $\|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_E < \varepsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Se considerarmos $S_\varepsilon = [T_\varepsilon(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap S_\varepsilon$ e f_ε a restrição de $I - T_\varepsilon$ a $\overline{\Omega_\varepsilon}$, então $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y)$ está bem definido e independe de $\varepsilon \in (0, R)$.

Demonstração. A primeira parte deste resultado segue diretamente do Lema 2.2. Resta-nos mostrar que $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y)$ está bem definido e independe de $\varepsilon \in (0, R)$. Primeiramente, destacamos que f_ε é contínua em $\overline{\Omega_\varepsilon}$, pois T_ε é contínua. Notemos que Ω_ε é um subconjunto aberto e limitado de S_ε e além disso, $f_\varepsilon(\overline{\Omega_\varepsilon}) \subset S_\varepsilon$. De fato, se $x \in \overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega \cap S_\varepsilon} \subset \overline{\Omega} \cap \overline{S_\varepsilon}$, então, $x \in \overline{\Omega}$ e $x \in \overline{S_\varepsilon} = S_\varepsilon$. Logo, $f_\varepsilon(x) = (I - T_\varepsilon)(x) = x - T_\varepsilon(x) \in S_\varepsilon$. Afirmamos que se $\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon$ denota a fronteira de Ω_ε em S_ε, então $\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon \subset \partial\Omega$. Com efeito, se $x \in \partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon$, então toda bola aberta $B(x;\delta)$ contém pontos de Ω_ε e pontos de fora de Ω_ε. Por existir $x_0 \in B(x;\delta)$ tal que $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap S_\varepsilon$, segue que $x_0 \in \Omega$. Além disso, existe $x_1 \in B(x;\delta)$ tal que $x_1 \in S_\varepsilon \backslash \Omega_\varepsilon$, assim concluímos que $x_1 \notin \Omega$. Portanto, $B(x;\delta)$ possui pontos que estão em Ω e pontos que não estão em Ω. Consequentemente, $x \in \partial\Omega$. Logo, $\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon \subset \partial\Omega$.

Finalmente, $y \notin f_\varepsilon(\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon)$, pois caso contrário, existiria $x \in \partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon$ tal que $f_\varepsilon(x) = y$, e ainda, como $f_\varepsilon(x) = x - T_\varepsilon(x)$ e $f(x) = x - T(x)$, obteríamos que

$$\|y - f(x)\|_E = \|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_E = \|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_E < \varepsilon < R.$$

Assim, teríamos exibido $x \in \partial\Omega$ tal que $\|y - f(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega))$, mas isto é um absurdo, já que $\rho_E(y, f(\partial\Omega)) = inf\{\|y - f(x)\|_E; x \in \partial\Omega\}$. Logo, $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y)$ está bem definido, para todo $\varepsilon \in (0, R)$.

Por fim, mostremos que $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y)$ não depende da escolha de $\varepsilon \in (0, R)$. Para isso, consideremos $\varepsilon' \in (0, R)$ e $T_{\varepsilon'} : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação de posto finito que satisfaz $\|T(x) - T_{\varepsilon'}(x)\|_E < \varepsilon'$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Ainda, sejam $S_{\varepsilon'} = [T_{\varepsilon'}(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$, $\Omega_{\varepsilon'} = \Omega \cap S_{\varepsilon'}$ e $f_{\varepsilon'}$ a restrição de $I - T_{\varepsilon'}$ a $\overline{\Omega_{\varepsilon'}}$. Agora, vamos considerar $S = S_\varepsilon + S_{\varepsilon'}$, $\hat{\Omega} = \Omega \cap S$ e $\hat{f}_j$ a restrição de $I - T_j$ a $\overline{\hat{\Omega}}$, para $j \in \{\varepsilon, \varepsilon'\}$.

Devido a Proposição A.3 do Apêndice A, temos que

$$d(\hat{f}_\varepsilon, \hat{\Omega}, y) = d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y) \quad \text{e} \quad d(\hat{f}_{\varepsilon'}, \hat{\Omega}, y) = d(f_{\varepsilon'}, \Omega_{\varepsilon'}, y). \tag{2.2}$$

Agora se considerarmos $h : [0,1] \times \overline{\hat{\Omega}} \to S$ definida por $h(t,x) = t\hat{f}_\varepsilon(x) + (1-t)\hat{f}_{\varepsilon'}(x)$, temos para qualquer $x \in \overline{\hat{\Omega}}$ e $t \in [0,1]$, que

$$\|h(t,x) - f(x)\|_E \leq t\|\hat{f}_\varepsilon(x) - f(x)\|_E + (1-t)\|\hat{f}_{\varepsilon'}(x) - f(x)\|_E.$$

Mas como $f(x) = x - T(x)$ e $\hat{f}_j(x) = x - T_j(x)$, para $j \in \{\varepsilon, \varepsilon'\}$, e $\varepsilon, \varepsilon' \in (0, R)$, obtemos que

$$\|h(t,x) - f(x)\|_E \leq t\|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_E + (1-t)\|T(x) - T_{\varepsilon'}(x)\|_E < R.$$

Agora, para qualquer $(t,x) \in [0,1] \times \partial\hat{\Omega}$, temos $\|f(x) - y\|_E \geq R$ e $\|h(t,x) - f(x)\|_E < R$, e então,

$$\|h(t,x) - y\|_E \geq \|f(x) - y\|_E - \|h(t,x) - f(x)\|_E > R - R = 0.$$

Assim, obtemos que $h(t,x) \neq y$, independente de $(t,x) \in [0,1] \times \partial\hat{\Omega}$. Decorre da Propriedade (d6) do Apêndice A que $d(h(t,\cdot), \hat{\Omega}, y)$ independe de $t \in [0,1]$. Em particular, $d(h(0,\cdot), \hat{\Omega}, y) = d(h(1,\cdot), \hat{\Omega}, y)$, isto é, $d(\hat{f}_{\varepsilon'}, \hat{\Omega}, y) = d(\hat{f}_\varepsilon, \hat{\Omega}, y)$. Disto e de (2.2), segue que $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y) = d(f_{\varepsilon'}, \Omega_{\varepsilon'}, y)$ e assim, concluímos que $d(f_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, y)$ independe da escolha de $\varepsilon \in (0, R)$. $\square$

A partir do resultado obtido na Proposição 2.1, podemos definir o grau topológico de Leray-Schauder da seguinte forma:

Definição 2.1. Sejam (f, Ω, y) uma terna admissível com $f = I - T$ e $\hat{T} : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação de posto finito, tal que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|\hat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega)).$$

Seja $\hat{S}$ um subespaço de dimensão finita de E, contendo $\hat{T}(\overline{\Omega})$ e y. Então definimos o **grau topológico de Leray-Schauder** de (f, Ω, y) por

$$D(f, \Omega, y) = d(\hat{f}, \hat{\Omega}, y),$$

onde $\hat{f} = (I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}$ e $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$.

2.2 Propriedades do grau

Agora, serão apresentadas e demonstradas algumas propriedades do grau topológico de Leray-Schauder.

Proposição 2.2. As seguintes propriedades são válidas:

(D1) (Normalização): Sejam E um espaço de Banach, $I : E \to E$ a aplicação identidade e Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Então, para todo $y \in \Omega$,

$$D(I, \Omega, y) = 1.$$

(D2) (Translação): Se (f, Ω, y) é uma terna admissível, então $(f - y, \Omega, 0)$ é admissível e

$$D(f, \Omega, y) = D(f - y, \Omega, 0).$$

(D3) (Aditividade): Seja (f, Ω, y) uma terna admissível. Se $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, então (f, Ω_1, y) e (f, Ω_2, y) são admissíveis e

$$D(f, \Omega, y) = D(f, \Omega_1, y) + D(f, \Omega_2, y).$$

(D4) (Excisão): Seja (f, Ω, y) uma terna admissível e considere um conjunto compacto $K \subseteq \overline{\Omega}$ tal que $y \notin f(K)$. Então, $(f, \Omega \backslash K, y)$ é admissível e

$$D(f, \Omega, y) = D(f, \Omega \backslash K, y).$$

(D5) (Continuidade em relação à aplicação T): Seja (f, Ω, y) uma terna admissível. Então, sendo $f = I - T$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda aplicação compacta $P : \overline{\Omega} \to E$ com $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|P(x) - T(x)\|_E < \varepsilon$, a terna $(I - P, \Omega, y)$ é admissível e

$$D(I - P, \Omega, y) = D(I - T, \Omega, y).$$

(D6) (Invariância homotópica): Sejam E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$ um conjunto aberto e limitado. Considere $y \in E$ e uma aplicação compacta $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to E$ tais que $x - H(t, x) \neq y$ para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $x \in \partial\Omega$, isto é, $y \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$. Então, $D(I - H(t, \cdot), \Omega, y)$ independe de $t \in [0, 1]$.

(D7) (Invariância local): Se T é uma aplicação compacta e $f = I - T$, então $D(f, \Omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $E \backslash f(\partial\Omega)$.

(D8) (Existência de Solução): Seja (f, Ω, y) uma terna admissível. Se $D(f, \Omega, y) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$, isto é, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(D9) (Propriedade do bordo): Sejam (f, Ω, y) e (g, Ω, y) duas ternas admissíveis tais que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$. Então,

$$D(f, \Omega, y) = D(g, \Omega, y).$$

Demonstração. [2] **(D1)** Suponhamos que $y \neq 0$ e consideremos $\hat{S} = [y]$, $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$, $\hat{T} \equiv 0$ e $\hat{f} = I|_{\overline{\hat{\Omega}}}$. Como $y \in \Omega$ e $y \in \hat{S}$, segue que $y \in \hat{\Omega}$. Pela Definição 2.1 e por (d1), temos que $D(I, \Omega, y) = d(\hat{f}, \hat{\Omega}, y) = 1$. Se $y = 0$, consideremos $\hat{S} = \{0\}$, assim $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S} = \{0\}$ e a terna $(I|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, 0)$ é admissível, pois $\partial\hat{\Omega} = \partial\{0\} = \emptyset$, onde a fronteira é relativa ao espaço nulo. Daí, podemos similarmente concluir que $D(I, \Omega, 0) = d(I|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, 0) = 1$.

(D2) Como $f(x) = x - T(x)$ com T uma aplicação compacta, segue que $f(x) - y = x - \tilde{T}(x)$, com $\tilde{T}$ compacta. De fato, como $T(x) = x - f(x)$ é compacta, obtemos que $\tilde{T}(x) = x - f(x) + y$ também é compacta. Além disso, se $x \in \partial\Omega$, temos por hipótese que $f(x) \neq y$, ou seja, $f(x) - y \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Logo, $(f - y, \Omega, 0)$ é uma terna admissível. Agora consideremos $\hat{T} : \hat{\Omega} \to E$ uma aplicação de posto finito tal que para todo $x \in \overline{\Omega}$, $\|\hat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega))$. Tomemos $\hat{S} = [\hat{T}(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$ e $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$. Pela Definição 2.1, temos que

$$D(f, \Omega, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y). \tag{2.3}$$

Agora notemos que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|(\hat{T} + y)(x) - (T + y)(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega)) = \rho_E(0, (f - y)(\partial\Omega))$$

e a imagem da aplicação $\hat{T} + y$ tem dimensão finita. Assim, usando novamente a Definição 2.1, temos que

$$D(f - y, \Omega, 0) = d((I - \hat{T} - y)|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, 0).$$

Mas pela propriedade (d2), segue que

$$d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) = d((I - \hat{T} - y)|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, 0).$$

Logo, comparando as igualdades acima e (2.3), obtemos $D(f, \Omega, y) = D(f - y, \Omega, 0)$.

(D3) Notemos que $\partial\Omega_1 \subset \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Logo, se $x \in \partial\Omega_1$, temos, por hipótese que $f(x) \neq y$ e assim, $y \notin f(\partial\Omega_1)$. Além disso, como T é compacta em $\overline{\Omega}$, temos que T é

[2] Quando utilizarmos na demonstração alguma propriedade denotada por $(d\cdot)$, estamos nos referindo as propriedades do grau topológico de Brouwer, encontradas no Apêndice A.

compacta em $\overline{\Omega_1}$. E ainda, Ω_1 é limitado, pois está contido em Ω que é limitado e é aberto, por hipótese. Portanto, a terna (f, Ω_1, y) é admissível. Afirmações análogas valem para Ω_2, assim podemos concluir que a terna (f, Ω_2, y) é também admissível.

Consideremos uma aplicação de posto finito $\hat{T} : \overline{\Omega} \to E$ tal que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|\hat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega)) \quad \text{e} \quad \|\hat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega_i)), \quad i = 1, 2,$$

onde $T = I - f$. Considerando $\hat{S} = [\hat{T}(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$, $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$, $\hat{\Omega}_1 = \Omega_1 \cap \hat{S}$ e $\hat{\Omega}_2 = \Omega_2 \cap \hat{S}$ e usando a Definição 2.1, temos que

$$D(f, \Omega, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) \quad \text{e} \quad D(f, \Omega_i, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}_i}}, \hat{\Omega}_i, y), \quad i = 1, 2.$$

Além disso, por meio da propriedade (d3), obtemos que

$$d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}_1}}, \hat{\Omega}_1, y) + d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}_2}}, \hat{\Omega}_2, y),$$

donde segue que $D(f, \Omega, y) = D(f, \Omega_1, y) + D(f, \Omega_2, y)$.

(D4) Notemos que $\partial(\Omega \backslash K) \subset \partial\Omega \cup K$. E por hipótese, temos que $y \notin f(\partial\Omega)$ e $y \notin f(K)$. Logo, $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(K)$, isto é, $y \notin f(\partial\Omega \cup K)$. Portanto, $y \notin f(\partial(\Omega \backslash K))$, e consequentemente, $(f, \Omega \backslash K, y)$ é uma terna admissível. Consideremos $\hat{T} : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação de posto finito tal que $\|\hat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega))$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, em que $T = I - f$. Sejam $\hat{S} = [\hat{T}(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$, $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$ e $\hat{\Omega}_K = (\Omega \backslash K) \cap \hat{S}$. Assim, pela Definição 2.1, temos que

$$D(f, \Omega, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) \quad \text{e} \quad D(f, \Omega \backslash K, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}_K}}, \hat{\Omega}_K, y).$$

Agora devido a propriedade (d4), segue que $d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega} \backslash (K \cap \hat{S}), y)$. Mas pelo fato que $\hat{\Omega}_K = (\Omega \backslash K) \cap \hat{S} = (\Omega \cap \hat{S}) \backslash (K \cap \hat{S}) = \hat{\Omega} \backslash (K \cap \hat{S})$, temos que

$$d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}_K}}, \hat{\Omega}_K, y) = d((I - \hat{T})|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega} \backslash (K \cap \hat{S}), y).$$

Assim, comparando as igualdades obtidas, temos que $D(f, \Omega, y) = D(f, \Omega \backslash K, y)$.

(D5) Consideremos $\varepsilon = \rho_E(y, f(\partial\Omega))$ e fixemos $P : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação compacta tal que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|P(x) - T(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mostremos que (g, Ω, y) é uma terna admissível, onde $g = I - P$. Para isso, basta provarmos que $y \notin g(\partial\Omega)$. Seja $x \in \partial\Omega$, e então, como $f(x) = x - T(x)$ e $g(x) = x - P(x)$, temos que

$$\begin{aligned}\|y-g(x)\|_E &\geq \|y-f(x)\|_E - \|f(x)-g(x)\|_E \\ &= \|y-f(x)\|_E - \|P(x)-T(x)\|_E.\end{aligned}$$

Como $\|P(x)-T(x)\|_E \leq \sup_{x\in\partial\Omega} \|P(x)-T(x)\|_E$, segue que

$$\|y-g(x)\|_E \geq \|y-f(x)\|_E - \sup_{x\in\partial\Omega}\|P(x)-T(x)\|_E > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Logo, $y \neq g(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$. Assim, concluímos que $y \notin g(\partial\Omega)$.

Consideremos $T_1, P_1 : \overline{\Omega} \to E$ duas aplicações de posto finito tais que, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|T(x)-T_1(x)\|_E < \varepsilon, \qquad \|P(x)-P_1(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$

e sejam $f_1 = I - T_1$, $g_1 = I - P_1$, $\hat{S} = [T_1(\overline{\Omega}) \cup P_1(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$, $\hat{\Omega} = \Omega \cap \hat{S}$. Utilizando a Definição 2.1, temos que

$$D(f,\Omega,y) = d(f_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y) \quad \text{e} \quad D(g,\Omega,y) = d(g_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}, \hat{\Omega}, y).$$

Consideremos a aplicação $h : [0,1]\times\overline{\hat{\Omega}} \to \hat{S}$ dada por $h(t,x) = tf_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x) + (1-t)g_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x)$ e $y : [0,1] \to \hat{S}$ dada por $y(t) = y$. Temos que $y \notin h(t,\partial\hat{\Omega})$ para todo $t \in [0,1]$. De fato, seja $(t,x) \in [0,1]\times\partial\hat{\Omega}$, então

$$\begin{aligned}\|h(t,x)-f(x)\|_E &\leq t\|f_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x)-f(x)\|_E + (1-t)\|g_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x)-f(x)\|_E \\ &\leq t\|f_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x)-f(x)\|_E + (1-t)\Big[\|g_1|_{\overline{\hat{\Omega}}}(x)-g(x)\|_E + \|g(x)-f(x)\|_E\Big].\end{aligned}$$

Como $f = I-T$, $g = I-P$, $f_1 = I-T_1$ e $g_1 = I-P_1$, obtemos para todo $(t,x) \in [0,1]\times\partial\hat{\Omega}$ que

$$\|h(t,x)-f(x)\|_E < t\varepsilon + (1-t)\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right] = \varepsilon.$$

Mas como $\varepsilon = \inf_{x\in\partial\Omega}\|y-f(x)\|_E$, temos que $\|y-f(x)\|_E \geq \varepsilon$, para todo $x \in \partial\Omega$, e como $\partial\hat{\Omega} \subset \partial\Omega$, devemos ter $h(t,x) \neq y$, para todo $(t,x) \in [0,1]\times\partial\hat{\Omega}$. Portanto, $y \notin h([0,1]\times\partial\hat{\Omega})$. Logo, por (d6), temos que $d(h(0,\cdot),\hat{\Omega},y) = d(h(1,\cdot),\hat{\Omega},y)$, isto é, $d(f_1|_{\overline{\hat{\Omega}}},\hat{\Omega},y) = d(g_1|_{\overline{\hat{\Omega}}},\hat{\Omega},y)$, e assim, $D(f,\Omega,y) = D(g,\Omega,y)$.

(D6) Vamos definir uma função $g : [0,1] \to \mathbb{Z}$ dada por $g(t) = D(I-H(t,\cdot),\Omega,y)$. Sendo H compacta em $[0,1]\times\overline{\Omega}$, temos pelo propriedade (D5), que sempre existe uma vizinhança de H, tal que para toda aplicação compacta P em $[0,1]\times\overline{\Omega}$, desta vizinhança, $D(I-H(t,\cdot),\Omega,y) = D(I-P(t,\cdot),\Omega,y)$, ou seja, o grau é localmente constante, isto é, g é localmente constante. Mas toda função $f : I \to \mathbb{R}$ localmente constante em um intervalo I, é constante. Em particular, g é constante, e portanto, g é contínua. Além disso, $[0,1]$ é conexo, portanto $g([0,1])$ também é conexo, mas $g([0,1]) \subseteq \mathbb{Z}$. Logo, $g([0,1])$ deve se constituir de um único valor. Assim, concluímos que $D(I - H(t,\cdot),\Omega,y)$ independe de $t \in [0,1]$.

(D7) Seja $f(x) = x - T(x)$, onde T é uma aplicação compacta em $\overline{\Omega}$. Consideremos C uma componente conexa de $E\backslash f(\partial\Omega)$ e $g : C \to \mathbb{Z}$ dada por $g(y) = D(f,\Omega,y)$. Assim, precisamos mostrar que g é contínua no conexo C, pois então, teremos que $g(C)$ é conexo, e como $g(C) \subset \mathbb{Z}$, obteremos que $g(C)$ será constituído de um único valor, isto é, g será constante no conjunto conexo C.

Seja $y \in C$ qualquer e $R = \rho_E(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Para cada $w \in C$, consideremos a aplicação $f_w : \overline{\Omega} \to E$ por $f_w(x) = f(x) - (w-y)$. Notemos que f_w pode ser escrita como $f_w = I - T_w$ em que $T_w = T + (w-y)$ é uma aplicação compacta em $\overline{\Omega}$. Pela Propriedade (D2), temos que

$$D(f,\Omega,w) = D(f-(w-y),\Omega,y) = D(f_w,\Omega,y).$$

Assim, se $w \in C$ e $\|y-w\|_E < R$, então, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|T(x) - T_w(x)\|_E = \|y-w\|_E < R = \rho_E(y, f(\partial\Omega)),$$

e assim $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x)-T_w(x)\|_E < \rho_E(y, f(\partial\Omega))$. Portanto, pela Propriedade (D5), segue que

$$D(f_w,\Omega,y) = D(f,\Omega,y),$$

e consequentemente, temos que $D(f,\Omega,y) = D(f,\Omega,w)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ e $y \in C$ qualquer, temos que existe $\delta = R = \rho_E(y, f(\partial\Omega)) > 0$ tal que se $w \in C$ com $\|y-w\|_E < \delta$, então $|g(y) - g(w)| = |D(f,\Omega,y) - D(f,\Omega,w)| = 0 < \varepsilon$. Consequentemente, $g : C \to \mathbb{Z}$ é contínua. Assim, podemos concluir que g é constante em C, e com isto, $D(f,\Omega,\cdot)$ é constante em cada componente de $E\backslash f(\partial\Omega)$.

(D8) Seja $T = I - f$. Para cada $n > \dfrac{1}{\rho_E(y, f(\partial\Omega))}$, existe, pelo Lema 2.2, $\hat{T}_n : \overline{\Omega} \to E$ de posto finito, tal que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|\hat{T}_n(x) - T(x)\|_E < \frac{1}{n}.$$

Consideremos $\hat{S}_n = [T_n(\overline{\Omega}) \cup \{y\}]$ e $\hat{\Omega}_n = \Omega \cap \hat{S}_n$, segue pela Definição 2.1 que

$$D(f,\Omega,y) = d((I - \hat{T}_n)|_{\overline{\hat{\Omega}_n}}, \hat{\Omega}_n, y).$$

Então, pela hipótese, temos que $d((I-\hat{T}_n)|_{\overline{\hat{\Omega}_n}}, \hat{\Omega}_n, y) \neq 0$, para cada n. Logo, pela propriedade (d8), para cada n, existe $x_n \in \hat{\Omega}_n$ tal que $(I-\hat{T}_n)(x_n) = y$, isto é, $x_n - \hat{T}_n(x_n) = y$. Como T é uma aplicação compacta, $\overline{T(\Omega)}$ é compacto e pelo fato que $(x_n) \subset \Omega$, $(T(x_n)) \subset \overline{T(\Omega)}$, e portanto, $T(x_n)$ possui subsequência $(T(x_{n_k}))$ que converge para um $z \in \overline{T(\Omega)}$. Notemos que

$$\|\hat{T}_n(x_{n_k}) - z\|_E \leq \|\hat{T}_n(x_{n_k}) - T(x_{n_k})\|_E + \|T(x_{n_k}) - z\|_E < \frac{1}{n} + L,$$

onde $L > 0$. Logo, $(\hat{T}_n(x_{n_k}))$ converge para z, quando $k \to \infty$. Portanto, $x_{n_k} = \hat{T}_n(x_{n_k}) + y$ converge para $z + y \in \overline{\Omega}$, quando $k \to \infty$. Pela continuidade de f, temos que

$$f(z+y) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - T(x_{n_k})) = z + y - z = y.$$

Como $y \notin f(\partial\Omega)$, segue que $z + y \in \Omega$. Portanto, existe $x = z + y \in \Omega$ tal que $f(x) = y$.
(D9) Sejam $T : \overline{\Omega} \to E$ e $S : \overline{\Omega} \to E$ aplicações compactas tais que $f = I - T$ e $g = I - S$. Consideremos a aplicação compacta $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ dada por $H(t,x) = tT(x) + (1-t)S(x)$. Por hipótese, para $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$, temos que $H(t,x) = tT(x) + (1-t)T(x) = T(x)$. Portanto, para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$, $x - H(t,x) = f(x) \neq y$. Consequentemente, pela propriedade (D6), temos que $D(I - H(t,\cdot), \Omega, y)$ independe de $t \in [0,1]$. Em particular, concluímos que $D(I - H(0,\cdot), \Omega, y) = D(I - H(1,\cdot), \Omega, y)$, isto é, $D(f, \Omega, y) = D(g, \Omega, y)$. □

2.3 Teoremas do ponto fixo

Nesta seção, vamos apresentar os teoremas do ponto fixo de Altman e Schauder, visto que estes serão elementos fundamentais para demonstrarmos resultados que garantem a existência de solução para o problema mencionado na introdução deste trabalho. Para demonstrarmos os teoremas de ponto fixo em questão, utilizaremos como ferramenta o grau topológico de Leray-Schauder, definido anteriormente.

Teorema 2.1. (Teorema do ponto fixo de Schauder) Sejam X um espaço de Banach e $G \subset X$ um conjunto fechado, limitado e convexo contendo a origem em seu interior e seja $\Psi : G \to G$ uma aplicação compacta. Então Ψ possui um ponto fixo.

Demonstração. Seja $\Omega = int(G)$. Primeiramente, mostremos que se $x \in G$ e $0 \leq t < 1$, então $tx \in \Omega$. Por hipótese, $0 \in \Omega$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0;\varepsilon) \subset G$. Notemos que

$B(tx; (1-t)\varepsilon) \subset G$. De fato, seja $y \in B(tx; (1-t)\varepsilon)$. Então, $y = tx + (1-t)\varepsilon \cdot u$ para algum $u \in X$ tal que $\|u\|_X < 1$, e como $t \in [0, 1)$, $\varepsilon u \in G$ e $x \in G$, segue que $y \in G$, já que G é convexo. Logo, $tx \in int(G) = \Omega$.

Agora, ressaltamos que se $\Psi(x) = x$, para algum $x \in \partial\Omega$, então a demonstração está concluída. Assim, podemos assumir que $\Psi(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Consideremos $H : [0, 1]\times\overline{\Omega} \to X$ dada por $H(t, x) = t\Psi(x)$. Temos que H é uma aplicação compacta, pois Ψ é compacta. Além disso, $x - H(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. De fato, se $x - H(t, x) = 0$ para algum $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$, então $x = t\Psi(x)$, e como assumimos que Ψ não possui pontos fixos em $\partial\Omega$, devemos ter $t \neq 1$, isto é, $t \in [0, 1)$. Como $\Psi(x) \in G$, segue pela afirmação demonstrada anteriormente, que $x \in \Omega$ e assim, $x \in \partial\Omega \cap \Omega$, mas isto é uma contradição, pois Ω é aberto. Assim, utilizando a propriedade (D6), segue que $D(H(t, \cdot), \Omega, 0)$, independe de $t \in [0, 1]$, então em particular, $D(H(0, \cdot), \Omega, 0) = D(H(1, \cdot), \Omega, 0)$, ou seja, $D(I - \Psi, \Omega, 0) = D(I, \Omega, 0)$. Ainda, como $0 \in \Omega$, por (D1), temos que $D(I, \Omega, 0) = 1$. Logo, $D(I - \Psi, \Omega, 0) \neq 0$, e portanto, pela Propriedade (D8), temos que existe $x \in \Omega$ tal que $(I - \Psi)(x) = 0$, ou seja, $\Psi(x) = x$.

$\square$

A seguir, apresentamos um outro resultado que garante a existência de ponto fixo. Para justificarmos tal resultado, nos baseamos em (GRANAS, 1962).

Teorema 2.2. (Teorema do ponto fixo de Altman) Seja Ω um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach E com $0 \in \Omega$ e $\Psi : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação compacta. Se $\|\Psi(u) - u\|_E^2 \geq \|\Psi(u)\|_E^2 - \|u\|_E^2$, para todo $u \in \partial\Omega$, então Ψ tem um ponto fixo em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Caso Ψ possua algum ponto fixo na fronteira de Ω, a demonstração está concluída. Desta forma, vamos supor que Ψ não possui nenhum ponto fixo em $\partial\Omega$. Se considerarmos $H : [0, 1]\times\overline{\Omega} \to E$ dada por $H(t, u) = t\Psi(u)$, temos que H é uma aplicação compacta, pois Ψ o é. Mostremos que para cada $(t, u) \in [0, 1] \times \partial\Omega$, $I(u) - H(t, u) \neq 0$, o que equivale a mostrar que $u \neq t\Psi(u)$.

Suponhamos que $u_0 = t_0\Psi(u_0)$ para algum $(t_0, u_0) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Então, se tal igualdade vale para $t_0 = 0$, então temos $u_0 = 0$, o que é um absurdo, pois $u_0 \in \partial\Omega$, e por hipótese, $0 \in \Omega$ e Ω é aberto. Se a igualdade é válida para $t_0 = 1$, então obtemos $u_0 = \Psi(u_0)$, o que significa que u_0 é um ponto fixo de Ψ, mas isto é uma contradição, pois $u_0 \in \partial\Omega$ e estamos supondo que Ψ não possui pontos fixos na $\partial\Omega$. Finalmente, se a igualdade vale para algum $t_0 \in (0,1)$, então $\|\Psi(u_0)\|_E = \left\|\frac{1}{t_0}u_0\right\|_E = \frac{1}{t_0}\|u_0\|_E$. Logo,

$$\|\Psi(u_0) - u_0\|_E^2 = \|(1-t_0)\Psi(u_0)\|_E^2 = (1-t_0)^2 \cdot \frac{1}{{t_0}^2}\|u_0\|_E^2.$$

Mas por outro lado,

$$\|\Psi(u_0)\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 = \left(\frac{1-{t_0}^2}{{t_0}^2}\right)\|u_0\|_E^2.$$

Assim, utilizando a hipótese, temos,

$$(1-t_0)^2 \cdot \frac{1}{{t_0}^2}\|u_0\|_E^2 \geq \left(\frac{1-{t_0}^2}{{t_0}^2}\right)\|u_0\|_E^2,$$

de onde por $u_0 \in \partial\Omega$ e $0 \in \Omega$, obtemos que ${t_0}^2 \geq t_0$, o que é uma contradição, pois $t_0 \in (0,1)$. Logo, $u \neq t\Psi(u)$, para todo $(t,u) \in [0,1] \times \partial\Omega$ e consequentemente, $0 \notin (I - H(t,\cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$. Assim, por (D6), concluímos que $D(I - H(t,\cdot),\Omega,0)$ independe de $t \in [0,1]$, em particular, $D(I,\Omega,0) = D(I-\Psi,\Omega,0)$. Mas como $0 \in \Omega$, segue por (D1) que $D(I,\Omega,0) = 1$, logo, $D(I-\Psi,\Omega,0) \neq 0$, e portanto, por (D8), existe $u \in \Omega$ tal que $(I-\Psi)(u) = 0$, de onde concluímos que $\Psi(u) = u$. $\square$

3 Cálculo fracionário

Neste capítulo, exploraremos alguns tópicos referentes à teoria do cálculo de ordem não inteira, conhecido popularmente por cálculo fracionário. Nosso objetivo consiste em formular os conceitos necessários para compreendermos e analisarmos o problema citado na introdução deste trabalho, e construirmos ferramentas que nos auxiliem na realização desta tarefa.

Iniciamos com o estudo de algumas funções, que são consideradas por muitos autores como funções "especiais", devido ao fato de aparecerem constantemente na teoria do cálculo fracionário. A primeira delas é a função gama, também conhecida como função de Euler de segunda espécie, a qual é uma função que além de generalizar o conceito de fatorial, é fundamental na teoria do cálculo fracionário, pois alguns dos conceitos e propriedades desta teoria, são explicitados em termos desta função. Veremos também, a função beta, a qual é ainda denominada de função de Euler de primeira espécie. Esta, pode ser relacionada com a função gama por meio de um expressão, que por sua vez, será útil para justificarmos algumas propriedades da integral fracionária. Apresentamos ainda, a função de Mittag-Leffler, de um e dois parâmetros, a qual tem relevância, haja visto que aparece naturalmente como solução de equações diferenciais fracionárias.

Posteriormente, teremos por objetivo um estudo preliminar dos operadores integrais e diferenciais fracionários. Apresentaremos o conceito da integral fracionária de Riemann-Liouville, o qual se faz necessário, para definirmos as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo. Abordaremos a derivada de Riemann-Liouville, devido ao fato desta ser a abordagem mais consolidada dentro da teoria do cálculo fracionário. Já a derivada de Caputo, será estudada por ser mais conveniente para abordar certos problemas envolvendo equações diferenciais fracionárias. Além disso, veremos que há uma expressão que relaciona estas derivadas fracionárias, e que a derivada de Caputo possui algumas vantagens em relação à de Riemann-Liouville, o que faz com que muitos autores prefiram utilizar a derivada de Caputo em problemas aplicados.

Por fim, trataremos brevemente sobre as equações diferencias fracionárias envolvendo a derivada de Caputo, em particular, equações diferencias fracionárias com coeficientes constantes, a fim de exemplificar que o método da transformada de Laplace, em alguns casos, pode ser eficaz para explicitar uma solução para estas equações.

Vale ressaltar que além de algumas das referências relacionadas ao cálculo fracionário, já mencionadas na introdução deste trabalho, e outras que serão citadas no decorrer deste presente capítulo, (BONI, 2017), (GRIGOLETTO, 2014), (ISHTEVA, 2005), (MAINARDI; GORENFLO, 2000), (NETO, 1996) e (SIMONÁRIO, 2011), foram também importantes para desenvolvê-lo.

3.1 A função gama

A função gama é uma ferramenta essencial na teoria do cálculo fracionário. Esta função é utilizada para exibir conceitos e algumas propriedades de tal teoria. Neste sentido, dedicamos esta seção, para apresentarmos a sua definição e alguns fatos relevantes sobre a mesma.

A **função gama** é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{3.1}$$

para $z \in \mathbb{R}^+$.

Mostremos que a função gama está bem definida para todo $z \in \mathbb{R}^+$, isto é, a integral imprópria que a define, converge. De fato, como $\lim\limits_{t\to\infty} t^{z-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, independente do valor de z, existe um número $\beta > 0$, tal que se $t \geq \beta$, então $t^{z-1}e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$.
Logo,

$$\int_\beta^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_\beta^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt = 2e^{\frac{-\beta}{2}}.$$

Mas, pelo fato que $e^{-t} \leq 1$, segue que para todo $z \in \mathbb{R}^+$, que

$$\int_0^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_0^\beta t^{z-1} dt = \frac{\beta^z}{z},$$

o que juntamente com a estimativa anterior, justifica que $\Gamma(z)$ é um valor real.

Notemos que, pela definição da função gama, temos que $\Gamma(1) = 1$.

A seguir, apresentamos uma propriedade importante da função gama que é a fórmula de redução.

Observação 3.1. $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, para todo $z \in \mathbb{R}^+$.

De fato, para cada $z \in \mathbb{R}^+$, pelo método de integração por partes, temos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \lim_{b \to \infty} \left[b^z(-e^{-b}) + z \int_0^{b} e^{-t} t^{z-1} dt \right] = z \cdot \Gamma(z).$$

Decorre da Observação 3.1, que $\Gamma(z+1) = z!$, para cada $z \in \mathbb{N}$, pois aplicando-a repetidas vezes, temos

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) = z \cdot (z-1) \cdot \Gamma(z-1) = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \dots 1 \cdot \Gamma(1) = z!,$$

onde na última igualdade, utilizamos o fato que $\Gamma(1) = 1$.

Utilizando a Observação 3.1, podemos estender o domínio da função gama para o conjunto $\mathbb{R} \backslash (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$, a saber, para cada $z > -n$ e $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \tag{3.2}$$

onde $(z)_n$ é dado por $(z)_n = z(z+1)(z+2) \dots (z+(n-1))$.

Por meio da expressão (3.2), notamos que a função gama está definida em toda a reta real, exceto no zero e nos inteiros negativos, que são pólos simples da função gama. Vale destacar, que nestes pontos, a função gama é representada pela fórmula assintótica:

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \left[1 + O(z+k) \right], \text{ quando } z \to -k, \text{ com } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

onde a igualdade $f(z) = O(g(z))$, $z \to a$, significa que $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < M < \infty$ quando $|z-a| < \varepsilon$.

Observação 3.2. Considerando $n = 1$ em (3.2), concluímos que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, para todo $z \in \mathbb{R} \backslash (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$.

Decorre da Observação 3.2, que se $z \in \mathbb{R}^- \backslash (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$, então $sgn(\Gamma(z)) = (-1)^{[|z|]+1}$. De fato, se $z \in (-1, 0)$, então pela Observação 3.2 e o fato que $\Gamma(z+1) > 0$ e $z < 0$, segue que $\Gamma(z) < 0$. Similarmente, se $z \in (-2, -1)$, então $\Gamma(z) > 0$. Indutivamente, concluímos que se $z \in (-n-1, -n)$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $sgn(\Gamma(z)) = (-1)^{[|z|]+1}$.

A fim de determinar o valor da função gama em outros valores reais, vamos verificar agora que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Com efeito, pela definição, segue que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$. Fazendo $u = \sqrt{t}$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} du. \tag{3.3}$$

Denotando $I = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2} du$, segue que

$$I^2 = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2} du \cdot \int\limits_{0}^{\infty} e^{-v^2} dv = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv.$$

Fazendo uma mudança de variável para coordenadas polares, temos que $I^2 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdr \right) d\theta$. Considerando $w = -r^2$, obtemos

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{w} dw = \frac{1}{2}.$$

Logo, $I^2 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$, e portanto, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Substituindo esta informação em (3.3), obtemos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Com esta informação, e utilizando a expressão (3.2), podemos calcular o valor da função gama para qualquer valor fracionário positivo de denominador igual a 2, como por exemplo,

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$,
e assim, sucessivamente. De um modo geral, temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi},$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Similarmente, é possível calcularmos o valor da função gama para qualquer valor fracionário negativo de denominador igual a 2, como por exemplo,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)_1} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2} + 2)}{\left(-\frac{3}{2}\right)_2} = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{5}{2} + 3)}{\left(-\frac{5}{2}\right)_3} = -\frac{8}{15}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi},$$

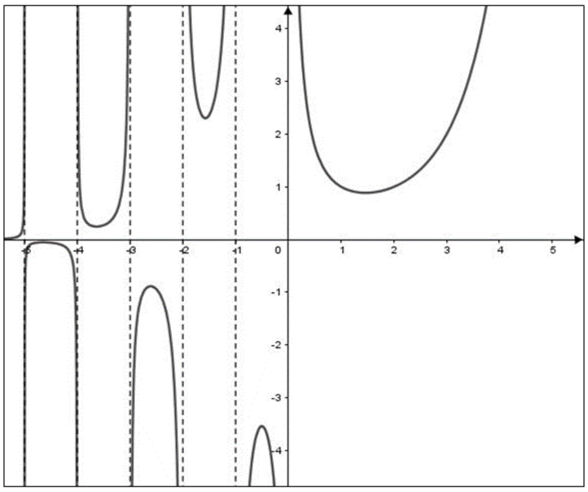
e assim, sucessivamente. De um modo geral, temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Graficamente, a função gama é representada conforme a Figura 1.

Figura 1 - Função gama



Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 A função beta

A **função beta** é definida por uma integral que depende de dois parâmetros. Neste sentido, definimos a **função beta** de m e n como sendo uma função $B : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx. \tag{3.4}$$

A função beta satisfaz a propriedade simétrica, isto é,

$$B(m,n) = B(n,m). \tag{3.5}$$

De fato, fazendo uma mudança de variável em (3.4) com $1-x=u$, obtemos

$$B(m,n) = -\int_1^0 (1-u)^{m-1}u^{n-1}du = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}du = B(n,m).$$

A função beta e a função gama estão relacionadas através da seguinte expressão:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{3.6}$$

Para demonstrarmos a expressão (3.6), vamos considerar a função auxiliar $h : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(m,n,t) = \int_0^t \tau^{m-1}(t-\tau)^{n-1}d\tau = t^{m-1} * t^{n-1},$$

onde a segunda igualdade é dada pela relação (B.2).

Em particular, para $t = 1$, obtemos

$$h(m,n,1) = \int_0^1 \tau^{m-1}(1-\tau)^{n-1}d\tau = B(m,n).$$

Além disso, pela Proposição B.3 e pelo fato que $\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, para $p > -1$, temos

$$\mathcal{L}\{t^{m-1} * t^{n-1}\} = \mathcal{L}\{t^{m-1}\} \cdot \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{\Gamma(m)}{s^m} \cdot \frac{\Gamma(n)}{s^n}.$$

Com isto, obtemos

$$t^{m-1} * t^{n-1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)}{s^m} \cdot \frac{\Gamma(n)}{s^n}\right\} = \Gamma(m)\Gamma(n)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{m+n}}\right\} = \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}.$$

Logo, $h(m,n,t) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)t^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)}$ e portanto, $B(m,n) = h(m,n,1) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

3.3 A função de Mittag-Leffler

Segundo (TEODORO, 2014), em 1903, Mittag-Leffler introduziu uma função, como sendo uma possível generalização da função exponencial, que ficou conhecida por função de Mittag-Leffler, em homenagem a ele. Tal função, depende de apenas um parâmetro, conforme vemos a seguir.

A **função de Mittag-Leffler de um parâmetro** é dada por

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \tag{3.7}$$

onde $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}$.

Ainda, de acordo com (TEODORO, 2014), em 1905, Wiman propôs e estudou uma generalização da função de Mittag Leffler de um parâmetro, introduzindo o que chamamos de função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, conforme é dado a seguir.

A **função de Mittag-Leffler de dois parâmetros** é dada por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \tag{3.8}$$

com $\alpha, \beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$.

Observação 3.3. A função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial, pois quando tomamos $\alpha = 1$ em (3.7), temos

$$E_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Observação 3.4. Se tomarmos $\beta = 1$ em (3.8), obtemos (3.7), isto é, $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

Uma forma bastante útil da função de Mittag-Leffler no contexto das equações diferenciais fracionárias, é quando consideramos $z = -\lambda t^\alpha$ em (3.7) e em (3.8), onde $t \in \mathbb{R}$, com $t > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, temos

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{3.9}$$

e

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \tag{3.10}$$

Observação 3.5. $E_\alpha(0) = 1$. De fato, por (3.9), temos que

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = 1 - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{\lambda^3 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots$$

Assim, se considerarmos $t = 0$ nesta expressão, temos que $E_\alpha(0) = 1$.

É possível obtermos uma relação das funções cosseno e seno com a função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente, conforme podemos ver na observação a seguir.

Observação 3.6. Considerando $\alpha = 2$ e $\lambda = 1$ em (3.9), temos que

$$E_2(-t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = cos(t).$$

Logo, $E_2(-t^2) = cos(t)$.
Além disso, considerando $\alpha = \beta = 2$ e $\lambda = 1$ em (3.10), obtemos

$$E_{2,2}(-t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{sen(t)}{t}.$$

Logo, $tE_{2,2}(-t^2) = sen(t)$.

Agora, vamos relacionar a função de Mittag-Leffler com a transformada de Laplace inversa de determinadas funções, uma vez que as expressões obtidas, serão úteis quando trabalharmos com as equações diferenciais fracionárias. Para isso, vamos utilizar basicamente a linearidade da transformada de Laplace (veja Apêndice B) e o fato que $\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, para $p > -1$.

i) $\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} = \dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}$, isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}\right\} = E_\alpha(-\lambda t^\alpha). \tag{3.11}$$

De fato,

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\mathcal{L}\{t^{\alpha n}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{s^{\alpha n+1}}.$$

Mas $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{s^{\alpha n+1}}$ é uma série geométrica de razão $\left(\frac{-\lambda}{s^\alpha}\right)$. Neste caso, se $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$, então tal série converge e sua soma é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{s^{\alpha n+1}} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}$. Logo, $\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} = \dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}$, para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$.

ii) $\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}$, isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}\right\} = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha). \tag{3.12}$$

De fato,

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\mathcal{L}\{t^{\alpha n+\beta-1}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{s^{\alpha n+\beta}}.$$

Notemos que novamente temos uma série geométrica de razão $\left(\frac{-\lambda}{s^\alpha}\right)$. Neste caso, a soma da série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{s^{\alpha n+\beta}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}$. Logo, $\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}$, para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$.

3.4 A integral fracionária

Nesta seção, iremos definir e apresentar algumas propriedades da integral fracionária de Riemann-Liouville. Tal construção, será essencial para o estudo posterior das derivadas fracionárias, visto que a definição e algumas propriedades justificadas aqui, serão utilizadas para apresentar definições e propriedades de derivadas fracionárias posteriormente. Antes de darmos a definição de integral fracionária, iniciamos com uma breve discussão, conforme é feito em (MILLER; ROOS, 1993), a respeito da existência de uma determinada integral de Riemann do cálculo clássico, a qual nos auxiliará na identificação da classe de funções para a qual a integral fracionária de Riemann-Liouville pode ser definida.

Seja b um número positivo. Por resultados do cálculo clássico, sabemos que se f for contínua em $[0, b]$ e $\alpha \geq 1$, então a integral de Riemann

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

existe para todo $t \in [0, b]$. Ainda, há condições mais gerais para que tal integral convirja, como por exemplo que f seja contínua em $(0, b]$ e tenha um comportamento similar a t^λ, quando $\lambda \in (-1, 0)$ em uma vizinhança da origem e/ou se $\alpha \in (0, 1)$, pois nestas situações, tal integral existe como uma integral imprópria. Vale ressaltar, que ainda por resultados do cálculo clássico, de um modo mais geral, para garantirmos a convergência da integral em $[0, b]$ quando $\alpha \geq 1$, podemos exigir apenas que f seja contínua por partes neste intervalo.

Com base nestes argumentos e considerando a **classe $\boldsymbol{C}$** como sendo a classe das funções que são contínuas por partes em $(0, \infty)$ e integráveis em $[0, T]$, para todo $T > 0$, temos que a **integral fracionária de Riemann-Liouville**, de ordem α, em $t > 0$ é definida como

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{3.13}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Em relação à esta definição, como já havíamos mencionado, se $\alpha \in (0, 1)$, (3.13) é uma integral imprópria. Logo, a hipótese de que f é contínua por partes em $(0, \infty)$ é considerada para que a integral fracionária esteja definida quando considerarmos f como sendo uma função que tenha comportamento similar a $ln(t)$ ou t^μ, com $\mu \in (-1, 0)$, em uma vizinhança da origem.

A expressão (3.13) é uma generalização da fórmula de Cauchy para determinar a $n-$ésima primitiva de uma função, veja o Teorema de Cauchy para Integrais Repetidas em (OLIVEIRA, 2014). A fórmula de Cauchy, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{3.14}$$

Ainda, definimos a integral fracionária de ordem 0 como sendo $J^0 f(t) = f(t)$.

Observação 3.7. Alguns autores, como (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993) definem a integral fracionária de um modo mais geral, considerando a definição de integral fracionária à esquerda e à direita e exigem condições mais gerais sobre f para que a integral fracionária esteja bem definida, a saber que $f \in L^1(a,b)$, ou seja, que a integral exista no sentido de Lebesgue. No entanto, para atender nossos propósitos a versão dada em (3.13) é suficiente. Tal versão é também utilizada por autores como (MILLER; ROOS, 1993) e (GORENFLO; MAINARDI, 2000). Além disso, nosso intuito é trabalhar com integrais de Riemann, por isso precisamos somente que o produto $(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)$ seja integrável à Riemann no intervalo $[0,\infty)$, então considerarmos funções de classe C é suficiente.

A integral fracionária de Riemann-Liouville satisfaz a seguinte propriedade, conhecida como propriedade de semigrupo: se $\alpha, \beta \geq 0$, então

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}. \tag{3.15}$$

De fato, utilizando (3.13), temos que

$$\begin{aligned}(J^\alpha \circ J^\beta)f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1}f(\xi)d\xi\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_0^\tau (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}f(\xi)d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\xi)\int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Considerando ξ e t fixos e uma mudança de variável com $\tau = \xi + s(t-\xi)$, temos que

$$\int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}d\tau = (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds.$$

Assim, pela expressão acima e pela relação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}(J^\alpha \circ J^\beta)f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)d\xi \\ &= J^{\alpha+\beta}f(t),\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade, foram utilizadas as relações (3.4) e (3.6). Logo, $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta \geq 0$.

A propriedade que acabamos de justificar implica na propriedade comutativa, isto é, $J^\alpha \circ J^\beta = J^\beta \circ J^\alpha$. De fato, para cada $\alpha, \beta \geq 0$,

$$(J^\alpha \circ J^\beta)f(t) = J^{\alpha+\beta}f(t) = J^{\beta+\alpha}f(t) = (J^\beta \circ J^\alpha)f(t).$$

Temos por objetivo agora determinar uma regra de integração fracionária para um monômio. Seja $f_\mu(t) = t^\mu$, com $\mu > -1$ e $t > 0$. Utilizando a relação (3.13) e considerando $u = \dfrac{\tau}{t}$, obtemos que

$$\begin{aligned} J^\alpha f_\mu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\mu d\tau \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\mu (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}, \end{aligned}$$

onde na penúltima e na última igualdade, foram utilizadas as relações (3.4) e (3.6), respectivamente. Logo, para cada $\mu > -1$, $t > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$, temos

$$J^\alpha f_\mu(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} f_{\alpha+\mu}(t). \tag{3.17}$$

A integral fracionária $J^\alpha f(t)$, para cada função f na classe C, também pode ser expressa como a convolução (vide B.2) de uma função específica com f. Tal função específica é a função de Gel'fand-Shilov, $\phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a qual é definida para cada $\alpha > 0$, como

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

De fato, para $t > 0$, temos

$$(\phi_\alpha * f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = J^\alpha f(t).$$

Com a possibilidade de escrever $J^\alpha f(t)$ deste modo, fica mais fácil de determinar a transformada de Laplace da integral de ordem fracionária de uma função f, onde f é uma função de classe C, e também, uma função de ordem exponencial. De fato, pela Proposição B.3, obtemos para $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $t > 0$ que

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s^\alpha}, \tag{3.18}$$

onde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

3.5 A derivada fracionária

Como já mencionamos na introdução deste capítulo, abordaremos aqui as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e a de Caputo. No entanto, antes de apresentarmos tais definições e algumas de suas propriedades, vamos justificar que o operador de derivação de ordem $n \in \mathbb{N}$ é inverso à esquerda do operador de integração de ordem $n \in \mathbb{N}$, mas não é inverso a direita. Esta observação será importante, pois as expressões obtidas serão utilizadas no decorrer desta seção.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o operador J^n, definido em (3.14), e o operador D^n, como sendo a $n-$ésima derivada de uma função, e então, verifiquemos primeiramente que D^n é inverso à esquerda de J^n, isto é, $(D^n \circ J^n)f(t) = f(t)$, para $f \in C(0, \infty)$. Para isso, notemos que devido ao Teorema de Leibniz para diferenciação de uma integral, veja (OLIVEIRA, 2014), temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} k(t,\tau)d\tau = k(t,h(t))\frac{dh}{dt}(t) - k(t,g(t))\frac{dg}{dt}(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial k}{\partial t}(t,\tau)d\tau. \tag{3.19}$$

Derivando n vezes a integral (3.14) e utilizando a relação acima, temos

$$\begin{aligned} (D^n \circ J^n)f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t-\tau)^{n-1}]f(\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau = f(t), \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo.
Desta forma, temos que

$$(D^n \circ J^n)f(t) = f(t). \tag{3.20}$$

Entretanto, como mencionamos anteriormente, D^n não é o inverso à direita de J^n, isto é, $(J^n \circ D^n)f(t) \neq f(t)$, para $f \in C^n(0, \infty)$. De fato, como

$$(J^n \circ D^n)f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau,$$

segue por integração por partes que

$$\begin{aligned}(J^n \circ D^n)f(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\left[-t^{n-1}f^{(n-1)}(0^+) + (n-1)\int_0^t (t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau\right] \\ &= -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0^+) + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Similarmente, utilizando integração por partes, temos

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau = -t^{n-2}f^{(n-2)}(0^+) + (n-2)\int_0^t (t-\tau)^{n-3}f^{(n-2)}(\tau)d\tau,$$

e após $(n-1)$ integrações, concluímos que

$$(J^n \circ D^n)f(t) = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0^+) - \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(0^+) - \cdots + \int_0^t (t-\tau)^0 f'(\tau)d\tau.$$

Agora, escrevendo a expressão acima de uma forma mais simplificada, obtemos, para todo $t > 0$,

$$(J^n \circ D^n)f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0^+) \tag{3.21}$$

e então, com esta expressão, garantimos que, em geral, $(J^n \circ D^n)f(t) \neq f(t)$.

Neste momento, iremos definir e apresentar algumas propriedades básicas da derivada fracionária de Riemann-Liouville. Apesar desta abordagem ser bastante conhecida na teoria do cálculo fracionário, veremos que ela apresenta algumas desvantagens, como, por exemplo, o fato de que a derivada de Riemann-Liouville de uma função constante não é zero e que a sua transformada de Laplace envolve condições iniciais fracionárias. Isto faz com que esta abordagem não seja muito eficaz para ser utilizada em aplicações.

Conforme (MILLER; ROOS, 1993), podemos considerar $\mathcal{C}$ como sendo uma subclasse de C, definido na seção anterior, de modo que se $f \in \mathcal{C}$, então f possui a integral fracionária e a derivada fracionária, de qualquer ordem.

Definição 3.1. [1] A **derivada fracionária** de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+$, **conforme Riemann-Liouville**, para $f \in \mathcal{C}$ e $t > 0$, é definida como sendo

$$D^\alpha f(t) = (D^m \circ J^{m-\alpha})f(t), \tag{3.22}$$

onde $m \in \mathbb{N}$ é escolhido, de modo que, $\alpha \in (m-1, m]$.

[1] Alguns autores, como (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) trazem uma abordagem mais geral para a derivada fracionária de Riemann-Liouville, considerando as definições de tal derivada fracionária, à esquerda e a direita, e também, apresentam uma condição mais geral sobre f, para que as mesmas estejam definidas.

Observação 3.8. Por (3.22), no caso em que $\alpha = m$, a derivada fracionária de Riemann-Liouville coincide com a derivada clássica. Por outro lado, se α é um número real positivo não inteiro com $\alpha \in (m-1, m)$, obtemos que

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right]. \tag{3.23}$$

Para o caso em que $\alpha = 0$, consideramos que $D^0 = I$, onde I é o operador identidade.

Observação 3.9. Assim como ocorre para derivadas e integrais de ordem inteira, a derivada fracionária de Riemann-Liouville é inversa à esquerda da integral fracionária de Riemann-Liouville. De fato, utilizando a definição de derivada fracionária dada em (3.22), temos:

$$(D^{\alpha} \circ J^{\alpha})f(t) = [(D^m \circ J^{m-\alpha}) \circ J^{\alpha}]f(t) = (D^m \circ J^{m-\alpha+\alpha})f(t) = (D^m \circ J^m)f(t) = f(t),$$

onde na segunda e na última igualdade, utilizamos respectivamente, (3.15) e (3.20).

De forma análoga à integral fracionária, é possível encontrarmos uma regra para a derivada fracionária de um monômio. Para verificarmos isso, consideremos $f_{\mu}(t) = t^{\mu}$, onde $\mu > -1$ e $t > 0$. Por (3.22), temos que $D^{\alpha} f_{\mu}(t) = (D^m \circ J^{m-\alpha}) f_{\mu}(t)$, e assim por (3.17), temos

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f_{\mu}(t) &= D^m \left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+m-\alpha)} t^{\mu+m-\alpha}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m+\mu-\alpha+1)} \frac{d^m}{dt^m} t^{m+\mu-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}, \end{aligned}$$

se $\alpha - \mu \notin \mathbb{N}$ e $\mu > -1$. Logo, para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $t > 0$, $\mu > -1$, se $\alpha - \mu \notin \mathbb{N}$, obtemos

$$D^{\alpha} f_{\mu}(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} f_{\mu-\alpha}(t). \tag{3.24}$$

Observação 3.10. Diferentemente da derivada de ordem inteira, a derivada fracionária de uma função constante, na definição de Riemann-Liouville, não é nula.
De fato, consideremos $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ e C uma constante arbitrária não nula, por (3.24), para $t > 0$, temos

$$D^{\alpha} C = D^{\alpha}(C f_0(t)) = C(D^{\alpha} f_0(t)) = C \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

o que mostra que $D^{\alpha} C \neq 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$.

Assim como para a derivada usual de uma função, também é possível calcular a transformada de Laplace da derivada fracionária de uma função, na representação de Riemann-Liouville. Pela Proposição B.2, segue que

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^m \mathcal{L}\{J^{m-\alpha} f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left(\frac{d^k}{dt^k}[J^{m-\alpha} f(t)] \right|_{t=0^+}.$$

Já por (3.18), se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, temos que $\mathcal{L}\{J^{m-\alpha} f(t)\} = \dfrac{F(s)}{s^{m-\alpha}}$, e assim

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left(\frac{d^k}{dt^k}[J^{m-\alpha} f(t)] \right|_{t=0^+}. \tag{3.25}$$

Agora pretendemos apresentar a definição da derivada fracionária de Caputo e também algumas propriedades provenientes desta abordagem.

De acordo com (OLIVEIRA, 2010), para evitar os inconvenientes da derivada fracionária de Riemann-Liouville, em 1969, Michele Caputo, em seu livro Elasticità e Dissipazione, propôs uma nova definição para a derivada de ordem arbitrária, bastante semelhante à definição de Riemann-Liouville, porém com uma inversão na ordem dos operadores de integração e derivação, conforme podemos ver na definição a seguir.

Definição 3.2. [2] A **derivada fracionária** de ordem α, com $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de uma função $f \in \mathcal{C}$, **conforme Caputo**, é definida para $\alpha \in (m-1, m]$, com $m \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, por

$$D_*^\alpha f(t) = (J^{m-\alpha} \circ D^m) f(t), \tag{3.26}$$

onde $\mathcal{C}$ é uma subclasse de C, de modo que para as funções f desta subclasse, $D^m f(t) \in C$.

Quando $\alpha = m \in \mathbb{N}$, a derivada fracionária de Caputo coincide com a derivada clássica. Já quando $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, temos para $\alpha \in (m-1, m)$ que

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \left(\frac{d^m}{d\tau^m} f(\tau) \right) d\tau. \tag{3.27}$$

Observação 3.11. A expressão (3.27) é mais restrita que (3.23), pois exige que f seja uma função de classe C^m e ainda, que a sua derivada de ordem m seja integrável.

Observação 3.12. Conforme (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006), temos que se $f \in C^m(0, \infty)$, então a derivada fracionária de Caputo, $D_*^\alpha f(t)$, é contínua em $(0, \infty)$.

[2] Destacamos novamente, que em (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006), é possível encontrar uma definição mais geral para a derivada fracionária segundo Caputo, considerando as derivadas à direita e à esquerda, e uma condição geral que garante a existência destas derivadas.

Observação 3.13. Para a definição de Caputo, assim como para derivadas de ordem inteira, a derivada de ordem α, com $\alpha \in (m-1, m]$, de uma função constante, é nula.

De fato, seja $f(t) = C$, para todo $t \in (0, \infty)$, onde C é uma constante qualquer. Então utilizando (3.27), temos que

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{d\tau^m}(C) d\tau = 0.$$

Comparando a observação anterior e a Observação 3.10, vemos que, apesar da derivada fracionária de Caputo ter certa semelhança com a derivada fracionária de Riemann-Liouville, de maneira geral, para $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, elas não coincidem. No entanto, conforme veremos na sequência, há uma expressão que relaciona essas derivadas, e por meio desta, é possível ver que há uma situação em que tais derivadas podem coincidir.

Para obtermos a expressão mencionada, primeiramente aplicamos J^α em (3.26), e sendo $\alpha \in (m-1, m)$, obtemos

$$(J^\alpha \circ D_*^\alpha) f(t) = [J^\alpha \circ (J^{m-\alpha} \circ D^m)] f(t) = (J^m \circ D^m) f(t),$$

onde na segunda igualdade, utilizamos (3.15). Já por (3.21) e pela expressão anterior, segue que

$$(J^\alpha \circ D_*^\alpha) f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+).$$

Aplicando D^α na expressão acima, utilizando a Observação 3.9 e que $\Gamma(k+1) = k!$, temos

$$D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(k+1)} (D^\alpha t^k) f^{(k)}(0^+) \right).$$

Utilizando (3.24) na expressão acima, temos para $\alpha \in (m-1, m)$ e $t > 0$ que

$$D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \right). \tag{3.28}$$

Assim, obtemos que, (3.28) é a relação de conexão entre as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville.

Observação 3.14. Analisando a relação (3.28), vemos que as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville coincidem, para $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, onde $\alpha \in (m-1, m)$, se, e somente se, $f^{(k)}(0^+) = 0$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Vamos determinar agora, a derivada fracionária de Caputo de um monômio. Seja $f_\mu(t) = t^\mu$, com $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pela relação (3.28), temos que para $\alpha \in (m-1, m)$,

$$D_*^\alpha t^\mu = D^\alpha t^\mu - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{d^k}{dt^k} t^\mu \Big|_{t=0^+} \right).$$

Notemos que se $\mu \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, então

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{d^k}{dt^k} t^\mu \Big|_{t=0^+} \right) = \frac{t^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} \Gamma(\mu+1),$$

pois no segundo membro do somatório, o único termo não nulo ocorre quando $\mu = k$. Assim pelas igualdades acima e a relação (3.24), temos que

$$D_*^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha} - \frac{t^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} \Gamma(\mu+1) = 0.$$

Por outro lado, se $\mu > m-1$, temos que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{d^k}{dt^k} t^\mu \Big|_{t=0^+} \right) = 0,$$

e com isso, obtemos que

$$D_*^\alpha t^\mu = D^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}.$$

Consequentemente, podemos concluir que

$$D_*^\alpha f_\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mu \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \\ \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}, & \text{para } \mu > m-1. \end{cases}$$

Por fim, vamos obter a transformada de Laplace da derivada fracionária na definição de Caputo. Fixado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $m \in \mathbb{N}$, onde $\alpha \in (m-1, m]$, pela relação (3.26) e denotando $D^m f(t) = h(t)$, temos que

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{(J^{m-\alpha} \circ D^m) f(t)\} = \mathcal{L}\{J^{m-\alpha} h(t)\}.$$

Então, usando (3.18), obtemos que

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \frac{H(s)}{s^{m-\alpha}}, \tag{3.29}$$

onde $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$.

Mas se considerarmos $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, pela Proposição B.2, temos que

$$\mathcal{L}\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0^+).$$

Substituindo esta última expressão em (3.29), concluímos que

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+). \tag{3.30}$$

Observação 3.15. Comparando o resultado obtido em (3.30) com a transformada de Laplace de $D^{\alpha}f(t)$ obtida em (3.25), é possível notar que na forma de Caputo a expressão é mais simples, já que não é preciso calcular a $k-$ésima derivada de $J^{m-\alpha}f(t)$ para $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ como em (3.25).

3.6 Equações diferenciais fracionárias

Nesta seção, discutiremos brevemente sobre equações diferenciais fracionárias. Aqui, utilizaremos o método da transformada de Laplace para resolvê-las. Consideraremos equações diferenciais em termos da derivada de Caputo, uma vez que como mencionado na Observação 3.15, a mesma apresenta uma expressão mais simples para a sua transformada de Laplace. Além disso, segundo (COSTA, 2011), já que a transformada de Laplace é uma técnica bastante utilizada em problemas aplicados, muitos autores preferem utilizar a derivada de Caputo, pois a transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville, por exemplo, depende de condições iniciais fracionárias, enquanto que por outro lado, as condições iniciais envolvidas na transformada de Laplace da derivada de Caputo são as de ordem inteira, o que faz com que esta última seja mais conveniente.

Vale destacar ainda que aqui nos restringiremos a casos mais particulares de equações diferenciais fracionárias envolvendo a derivada fracionária de Caputo, a saber, equações diferenciais ordinárias fracionárias lineares com coeficientes constantes, pois nosso objetivo é apenas familiarizar o leitor com este contexto e explicitar um método para resolvê-las, o qual será utilizado mais adiante para justificar um resultado que será essencial para demonstrarmos resultados de existência de solução para o problema citado na introdução deste trabalho. Mas, ressaltamos que referências como (DIETHELM, 2010) e (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) apresentam um estudo bastante amplo sobre as equações diferenciais fracionárias, trazendo uma abordagem teórica com resultados de existência e unicidade de soluções destas. Além disso, (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) apresentam outros métodos de resolução de equações diferenciais fracionárias, e abordam equações com outras derivadas fracionárias, além de Caputo, inclusive, apresentam ainda um estudo sobre as equações diferenciais parciais fracionárias.

Consideremos a seguinte equação diferencial fracionária linear não homogênea

$$D_*^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) = f(t), \tag{3.31}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (m-1, m]$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Aplicando a transformada de Laplace em (3.31) e considerando $u^{(k)}(0^+) = b_k$, $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, obtemos

$$s^\alpha U(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} b_k - \lambda U(s) = F(s).$$

Assim, isolando $U(s)$ obtemos que

$$U(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda} b_k + \frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda},$$

e aplicando a transformada de Laplace inversa segue que

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda}\right\}.$$

Utilizando (3.12) e (B.3), segue da relação acima que

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) + f(t) * [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)],$$

e assim, pela relação (B.2), obtemos que a solução da equação (3.31), com $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b_k = u^{(k)}(0^+)$, é

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda \tau^\alpha) f(t-\tau) d\tau.$$

Em particular, se considerarmos em (3.31) a equação diferencial fracionária linear homogênea

$$D_*^\alpha u(t) - \lambda u(t) = 0, \tag{3.32}$$

onde $\alpha \in (m-1, m]$ com $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, de maneira similar, obtemos que a solução de (3.32) é dada por

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha),$$

onde $b_k = u^{(k)}(0^+)$, com $k \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$.

Agora, apresentamos um exemplo particular de uma equação diferencial fracionária linear não homogênea envolvendo duas derivadas de ordem fracionária. Consideremos

$$D_*^\alpha u(t) + D_*^\beta u(t) = f(t), \tag{3.33}$$

onde $0 < \beta \leq 1 < \alpha \leq 2$. Aplicando a transformada de Laplace em (3.33) e denotando $u(0^+) = b_0$, $u'(0^+) = b_1$, $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, temos que

$$s^\alpha U(s) - s^{\alpha-1} b_0 - s^{\alpha-2} b_1 + s^\beta U(s) - s^{\beta-1} b_0 = F(s),$$

e assim isolando $U(s)$, obtemos que

$$U(s) = b_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + s^\beta} + b_0 \frac{s^{\beta-1}}{s^\alpha + s^\beta} + b_1 \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + s^\beta} + \frac{F(s)}{s^\alpha + s^\beta}.$$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por $s^{-\beta}$, resulta que

$$U(s) = b_0 \frac{s^{\alpha-\beta-1}}{s^{\alpha-\beta}+1} + b_0 \frac{s^{-1}}{s^{\alpha-\beta}+1} + b_1 \frac{s^{\alpha-\beta-2}}{s^{\alpha-\beta}+1} + F(s) \cdot \frac{s^{-\beta}}{s^{\alpha-\beta}+1},$$

aplicando a transformada de Laplace inversa e utilizando (B.3), obtemos que

$$\begin{aligned} u(t) &= b_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta-1}}{s^{\alpha-\beta}+1}\right\} + b_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-1}}{s^{\alpha-\beta}+1}\right\} + b_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta-2}}{s^{\alpha-\beta}+1}\right\} \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-\beta}}{s^{\alpha-\beta}+1}\right\}. \end{aligned}$$

Assim por (3.11), (3.12) e (B.2), concluímos que a solução de (3.33) é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= b_0[E_{\alpha-\beta}(-t^{\alpha-\beta}) + t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(-t^{\alpha-\beta})] + b_1 t E_{\alpha-\beta,2}(-t^{\alpha-\beta}) \\ &\quad + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta,\alpha}(-\tau^{\alpha-\beta}) f(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

a qual envolve as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

Destacamos que em casos mais gerais, por exemplo

$$D_*^\alpha u(t) + \mu D_*^\beta u(t) + \lambda u(t) = f(t),$$

com $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ e $0 < \beta \leq 1 < \alpha \leq 2$, a solução é obtida seguindo os mesmos passos, mas é um pouco mais complexa, pois envolve uma função de Mittag-Leffler de três parâmetros, conforme justificado em (OLIVEIRA, 2014), ou ainda em (ZAKARIYA et al., 2018). Este último, descreve ainda tal solução em termos de uma outra função especial, a saber, da função Wright generalizada.

Mencionamos ainda que na Seção 5.3 de (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006), os autores obtiveram, além de soluções como as obtidas nesta seção para casos mais particulares envolvendo a função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, outras soluções para casos mais gerais. Por exemplo, eles consideraram equações envolvendo mais de duas derivadas fracionárias e a própria função, tanto para o caso homogêneo, como para o não homogêneo, e nestes casos, as soluções são explicitadas em termos da função Wright generalizada.

4 Existência de solução para o problema

Nesta seção, apresentamos resultados relacionados à existência de solução da seguinte equação diferencial ordinária de ordem fracionária, com condições de contorno anti-periódicas,

$$\begin{cases} D_*^q u(t) = f(t, u(t)), \text{ para } t \in (0, T) \\ u(0) = -u(T), \ u'(0) = -u'(T), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $q \in (1, 2]$, $T > 0$ e $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O problema em questão e os resultados apresentados neste capítulo são baseados no artigo de (AHMAD; NIETO, 2010), e teremos por objetivo determinar condições sobre $f \in \mathcal{F}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, de modo que o problema (4.1) possua ao menos uma solução.

Com este intuito, consideremos para cada $T > 0$ e $q \in (1, 2]$, a função de Green dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} -\dfrac{(T-s)^{q-1}}{2\Gamma(q)} + \dfrac{(T-2t)}{4\Gamma(q-1)}(T-s)^{q-2}, & \text{se } \ 0 \le t \le s < T \\ \\ \dfrac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - \dfrac{(T-s)^{q-1}}{2\Gamma(q)} + \dfrac{(T-2t)}{4\Gamma(q-1)}(T-s)^{q-2}, & \text{se } \ 0 \le s < t \le T. \end{cases} \tag{4.2}$$

O resultado a seguir, garante que existe uma solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária não homogênea, a qual pode ser expressa em termos da função de Green dada por (4.2). Para encontrarmos tal solução, utilizaremos a metodologia da transformada de Laplace.

Lema 4.1. Seja $T > 0$, $q \in (1, 2]$ e $h \in C[0, T]$ qualquer. Então o problema

$$\begin{cases} D_*^q u(t) = h(t), \text{ para } t \in (0, T) \\ u(0) = -u(T), \ u'(0) = -u'(T), \end{cases} \tag{4.3}$$

possui uma solução $u \in C[0, T]$. Além disso, a solução u pode ser expressa em termos da função de Green dada por (4.2), isto é,

$$u(t) = \int_0^T G(t, s) h(s) ds.$$

Demonstração. Aplicando a transformada de Laplace na equação em (4.3) e denotando $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ e $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$, obtemos para cada $s > 0$ que

$$U(s) = u(0^+)s^{-1} + u'(0^+)s^{-2} + H(s)s^{-q}.$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa e utilizando as condições de contorno anti-periódicas dadas em (4.3), obtemos que

$$u(t) = -u(T) - u'(T)t + \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-q}\right\},$$

e ainda usando que $\mathcal{L}\{t^p\} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, para $p > -1$ e a relação (B.2), concluímos para cada $t \in [0, T]$ que

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h(s)ds - u(T) - u'(T)t. \tag{4.4}$$

Derivando a expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t-s)^{q-1} h(s)ds \right) - u'(T) \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[(t-s)^{q-1} h(s) \right] ds - u'(T), \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade utilizamos a expressão (3.19). Assim,

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} h(s)ds - u'(T). \tag{4.5}$$

Vamos determinar o valor das constantes $u(T)$ e $u'(T)$. Notemos que por (4.4), temos que

$$u(T) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^T (T-s)^{q-1} h(s)ds - u'(T)T \right],$$

e devido a relação (4.5), obtemos que

$$u'(T) = \frac{1}{2\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} h(s)ds,$$

donde segue que

$$u(T) = \frac{1}{2\Gamma(q)} \int_0^T (T-s)^{q-1} h(s)ds - \frac{T}{4\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} h(s)ds.$$

Assim, pela relação (4.4) e as igualdades acima, temos que a solução do problema (4.3) satisfaz, para cada $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)ds - \frac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}h(s)ds \\ &\quad + \frac{(T-2t)}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-s)^{q-2}h(s)ds \\ &= \int_0^T G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, $u(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds$, para cada $t \in [0,T]$, onde $G(t,s)$ é dada por (4.2). □

Agora, vamos considerar uma aplicação $\Psi : C[0,T] \to \mathcal{F}([0,T],\mathbb{R})$ dada por $\Psi(u) \doteq \Psi_u$, onde para todo $t \in [0,T]$,

$$\Psi_u(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds \tag{4.6}$$

e $G(t,s)$ é definida por (4.2).

Decorre do Lema C.1 que se f é contínua, então $\Psi : C[0,T] \to C[0,T]$. Ainda, pelo Lema 4.1, temos que u é uma solução do problema (4.1) se, e somente se, $u = \Psi(u)$. Assim, para provarmos a existência de ao menos uma solução $u \in C[0,T]$, para o problema (4.1), precisamos determinar condições sobre a função f, de modo que a aplicação Ψ admita ponto fixo.

Neste sentido, apresentamos três condições sobre tal função f. O primeiro resultado exige certa restrição do crescimento com relação a segunda variável, a saber:

$(H1)$ $\quad |f(t,y)| \leq \frac{\kappa}{T^q}|y| + M,$

para cada $(t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ *e certas constantes* $M > 0$ *e* $0 \leq \kappa < \frac{4\Gamma(q+1)}{6+q}$.

Teorema 4.1. Suponha que $f : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz a hipótese $(H1)$. Então o problema de valor de contorno anti-periódico (4.1) possui ao menos uma solução.

Demonstração. Precisamos provar a existência de pelo menos uma função $u \in C[0,T]$ que seja ponto fixo da aplicação Ψ definida em (4.6). Faremos isso através da teoria do grau topológico de Leray-Schauder. Para tanto, notemos inicialmente que por (4.2), a expressão (4.6) é equivalente a

$$\begin{aligned}\Psi_u(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}f(s,u(s))ds - \frac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}f(s,u(s))ds \\ &+\frac{T-2t}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-s)^{q-2}f(s,u(s))ds. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora consideremos a constante

$$R_1 = \frac{MT^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)-\kappa(6+q)} \tag{4.8}$$

a qual é positiva, devido às hipóteses sobre κ e M.

Primeiramente, mostremos que $\Psi : B[0;R] \to C[0,T]$ satisfaz a seguinte propriedade,

$$u \neq \lambda\Psi(u), \text{ para toda } u \in \partial B(0;R) \text{ e para todo } \lambda \in [0,1], \tag{4.9}$$

independente de $R > R_1$.

Suponhamos o contrário, isto é, que $u = \lambda\Psi(u)$ para algum $\lambda \in [0,1]$ e para alguma $u \in C[0,T]$ com $\|u\| = R$, para algum $R > R_1$. Assim temos que para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}|u(t)| &= |(\lambda\Psi_u)(t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t |(t-s)^{q-1}||f(s,u(s))|ds + \frac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T |(T-s)^{q-1}||f(s,u(s))|ds \\ &+ \frac{|T-2t|}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T |(T-s)^{q-2}||f(s,u(s))|ds.\end{aligned}$$

Agora, se $s \in [0,T]$, segue pela hipótese que

$$|f(s,u(s))| \leq \frac{\kappa}{T^q}|u(s)| + M \leq \frac{\kappa}{T^q}R + M,$$

pois $\|u\| = R$ e assim, pelas desigualdades acima, segue para todo $t \in [0,T]$ que

$$\begin{aligned}|u(t)| &\leq \left(\frac{\kappa}{T^q}R+M\right)\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds + \frac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}ds \right.\\ &\left.+\frac{|T-2t|}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-s)^{q-2}ds\right] \\ &= -\frac{1}{q\Gamma(q)}\left(\frac{\kappa}{T^q}R+M\right)\left[(t-s)^q\Big|_{s=0}^{t} + \frac{1}{2}(T-s)^q\Big|_{s=0}^{T} + \frac{q}{4}|T-2t|(T-s)^{q-1}\Big|_{s=0}^{T}\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\frac{\kappa}{T^q}R+M\right)\left[t^q + \frac{T^q}{2} + \frac{q}{4}|T-2t|T^{q-1}\right].\end{aligned}$$

Agora se $t \in [0,T]$, então $|T-2t| \leq T$ e assim obtemos, para cada $t \in [0,T]$ que

$$|u(t)| \leq \left(\frac{\kappa}{T^q}R + M\right)\frac{T^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)}.$$

Pelo fato da desigualdade acima ser válida para todo $t \in [0,T]$, segue que

$$\|u\| \leq \left(\frac{\kappa}{T^q}R + M\right)\frac{T^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)}.$$

Mas $\|u\| = R$, donde pela desigualdade anterior, obtemos que

$$R \leq \left(\frac{\kappa}{T^q}R + M\right)\frac{T^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)},$$

e consequentemente, pela relação (4.8), $R \leq \frac{MT^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)-\kappa(6+q)} = R_1$, o que contradiz o fato que $R > R_1$ e portanto, a propriedade (4.9) é válida.

Fixemos $R > R_1$ qualquer e consideremos $H : [0,1] \times B[0;R] \to C[0;T]$, dada por $H(\lambda, u) = \lambda\Psi(u)$, a qual é compacta, pois Ψ é compacta (vide Lema C.2). Além disso, pela propriedade (4.9), segue que $u - H(\lambda, u) \neq 0$, para todo $\lambda \in [0,1]$ e para toda $u \in \partial B(0;R)$. Consequentemente, $0 \notin (I - H(\lambda,\cdot))(\partial B(0;R))$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Logo, decorre da propriedade (D6) do grau topológico de Leray-Schauder que $D(I - H(\lambda,\cdot), B(0;R), 0)$ independe de $\lambda \in [0,1]$. Em particular,

$$D(I-\Psi, B(0;R), 0) = D(I, B(0;R), 0).$$

Entretanto, devido a propriedade (D1) da teoria do grau, temos que $D(I, B(0;R), 0) = 1$, e consequentemente $D(I-\Psi, B(0;R), 0) = 1$. Assim, segue pela propriedade (D8) da teoria do grau que existe pelo menos uma $u \in B(0;R)$, tal que $(I-\Psi)(u) = 0$, isto é, u é ponto fixo da aplicação Ψ. Portanto, tal $u \in B(0;R)$ é solução do problema (4.1), o que conclui a justificativa do Teorema 4.1. □

Na sequência, apresentamos um exemplo de função f que satisfaz a hipótese $(H1)$.

Exemplo 4.1. Consideremos a função $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que para cada $t \in [0,T]$ e $y \in \mathbb{R}$, temos

$$f(t,y) = \frac{1}{4\pi} sen\left(\frac{2\pi y}{T^q}\right) + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Notemos que pelo fato que $|sen(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então considerando $\kappa = \frac{1}{2}$ e $M = 1$, obtemos

$$|f(t,y)| \leq \frac{\kappa}{T^q}|y| + M.$$

Basta mostrarmos que $\dfrac{1}{2} = \kappa < \dfrac{4\Gamma(q+1)}{6+q}$, independente de $q \in (1,2]$. Como $q \in (1,2]$, segue que $1 < \Gamma(q+1)$ e $6+q \leq 8 < 8\Gamma(q+1)$. Logo, $\dfrac{6+q}{2} < 4\Gamma(q+1)$, e portanto,

$$\frac{1}{2} = \kappa < \frac{4\Gamma(q+1)}{6+q}. \tag{4.10}$$

Assim, pelo Teorema 4.1, podemos concluir que o problema (4.1) com tal função f, possui ao menos uma solução.

Agora, temos por objetivo, apresentar outras condições sobre a função f que garantam que o problema (4.1) admita ao menos uma solução. Para tanto, consideremos:

$(H2)$ $\qquad |f(t,y)| \leq \dfrac{4\Gamma(q+1)M}{T^q(6+q)}$,

para alguma constante $M > 0$, independente de $(t,y) \in [0,T] \times [-M,M]$.

É importante destacar que há uma relação entre as hipóteses $(H1)$ e $(H2)$. Temos que a hipótese $(H2)$ é menos restritiva, devido a seguinte constatação.

Observação 4.1. Suponha que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição $(H1)$. Então, se considerarmos $0 < M_1 = M\frac{T^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)-\kappa(6+q)}$, segue que $|f(t,y)| \leq \frac{4\Gamma(q+1)M_1}{T^q(6+q)}$, para todo $(t,y) \in [0,T] \times [-M_1, M_1]$, ou seja, a hipótese $(H2)$ é válida.
De fato, para cada $(t,y) \in [0,T] \times [-M_1,M_1]$, temos pela validade de $(H1)$ que

$$\begin{aligned} |f(t,y)| &\leq \frac{\kappa}{T^q}|y| + M \\ &\leq \frac{\kappa}{T^q}M_1 + M_1\frac{(4\Gamma(q+1) - \kappa(6+q))}{T^q(6+q)} \\ &= \frac{4\Gamma(q+1)M_1}{T^q(6+q)}. \end{aligned}$$

Apresentamos a seguir um exemplo de função que satisfaz a condição $(H2)$, mas que não satisfaz $(H1)$.

Exemplo 4.2. Considere $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função não linear $f(t,y) = \frac{y^3}{3T^q} sen\left(\frac{2\pi t}{T^q}\right)$. Devido ao fato da função $|f|$ não ser menor que uma potência linear em y, a condição $(H1)$ não é satisfeita. Por outro lado, se $(t,y) \in [0,T] \times [-1,1]$, pela estimativa (4.10) segue que

$$|f(t,y)| \leq \frac{1}{3T^q} < \frac{1}{2T^q} < \frac{4\Gamma(q+1)}{T^q(6+q)}.$$

Ou seja, $(H2)$ é válida com $M = 1$.

Através da hipótese $(H2)$ imposta sobre f, fazendo uso do Teorema do ponto fixo de Altman, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. Suponha que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz a hipótese $(H2)$. Então o problema de valor de contorno anti-periódico (4.1) possui ao menos uma solução.

Demonstração. Consideremos $M > 0$ a constante definida em $(H2)$ e $\Omega = \left\{u \in C[0,T]; \max\limits_{t\in[0,T]} |u(t)| < M\right\}$ e $\Psi : \overline{\Omega} \to C[0,T]$, onde para cada $u \in \overline{\Omega}$, temos $\Psi(u) = \Psi_u$ e para todo $t \in [0,T]$, Ψ_u é dada por (4.7). Mostremos que a seguinte propriedade é satisfeita,

$$\|\Psi(u)\| \leq \|u\|, \text{ para todo } u \in \partial\Omega. \tag{4.11}$$

Notemos que por $(H2)$, se $u \in \overline{\Omega}$, pela relação (4.7), temos para cada $t \in [0,T]$ que

$$\begin{aligned}
|\Psi_u(t)| &\leq \frac{4\Gamma(q+1)M}{T^q(6+q)\Gamma(q)}\left[\int_0^t (t-s)^{q-1}ds + \frac{1}{2}\int_0^T (T-s)^{q-1}ds \right.\\
&\left. + \frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(q-1)}|T-2t|\int_0^T (T-s)^{q-2}ds\right]\\
&= \frac{4\Gamma(q+1)M}{T^q(6+q)\Gamma(q)}\left[\frac{t^q}{q} + \frac{T^q}{2q} + \frac{1}{4}|T-2t|T^{q-1}\right].
\end{aligned}$$

Agora se $t \in [0,T]$, então $|T-2t| \leq T$ e assim obtemos para cada $t \in [0,T]$ que

$$|\Psi_u(t)| \leq \frac{4\Gamma(q+1)M}{T^q(6+q)\Gamma(q)}\frac{T^q(6+q)}{4q} = M.$$

Portanto, obtemos que $\|\Psi(u)\| \leq M$, para todo $u \in \overline{\Omega}$. Mas, em particular, caso $u \in \partial\Omega$, então $\|u\| = M$, e pela desigualdade anterior, temos que para todo $u \in \partial\Omega$, $\|\Psi(u)\|^2 \leq \|u\|^2$ donde segue que $\|\Psi(u)-u\|^2 - \|\Psi(u)\|^2 + \|u\|^2 \geq 0$. Portanto, por esta estimativa, temos que se $u \in \partial\Omega$, então $\|\Psi(u)-u\|^2 \geq \|\Psi(u)\|^2 - \|u\|^2$.
Assim, concluímos pelo Teorema do ponto fixo de Altman que Ψ tem um ponto fixo em $\overline{\Omega}$, isto é, existe $u \in \overline{\Omega}$ tal que $\Psi(u) = u$ e consequentemente, $u \in \overline{\Omega}$ é solução do problema (4.1). □

Ainda com a intenção de apresentarmos condições que garantam que o problema (4.1) possui ao menos uma solução, apresentamos a seguir, uma condição sobre f_y.

$(H3)$ $\qquad f_y : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f_y(t,y)| \leq M$,

para todo $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, *onde* $0 \leq M < \dfrac{4\Gamma(q+1)}{T^q(6+q)}$.

Observação 4.2. Caso tivermos $y = y(t)$, para $t \in [0, T]$ e que $|f_y(t, y)| \leq M$, para todo $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, temos para todo $t \in [0, T]$ que $|f(t, y(t))| \leq M|y(t)| + |f(t, 0)|$. Além disso, se $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, segue que existe $\nu > 0$, onde $|f(t, 0)| \leq \nu$, para todo $t \in [0, T]$. Assim, caso $u \in C[0, T]$ e vale a hipótese $(H3)$, segue que para cada $t \in [0, T]$,

$$|f(t, u(t))| \leq M\|u\| + \nu. \tag{4.12}$$

Vejamos então, outro resultado a respeito da existência de solução para o problema (4.1).

Teorema 4.3. Suponha que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz a hipótese $(H3)$. Então o problema de valor de contorno anti-periódico (4.1) possui ao menos uma solução.

Demonstração. Basta mostrarmos que a aplicação $\Psi : C[0, T] \to C[0, T]$, definida por (4.7) possui um ponto fixo. Para tanto, vamos utilizar o Teorema do ponto fixo de Schauder. Consideremos

$$R > \frac{\nu T^q (6 + q)}{4\Gamma(q + 1) - MT^q (6 + q)}. \tag{4.13}$$

Temos que a aplicação $\Psi : B[0, R] \to C[0, T]$ é compacta (vide Lema C.2). Mostremos que $\Psi(B[0, R]) \subset B[0, R]$. Devido a validade de $(H3)$, decorre da Observação 4.2, que existem constantes $\nu > 0$ e $0 \leq M < \frac{4\Gamma(q+1)}{T^q(6+q)}$, tais que para cada $t \in [0, T]$ e $u \in B[0, R]$,

$$\begin{aligned}
|\Psi_u(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}(MR + \nu)\left[\int_0^t (t - s)^{q-1} ds + \frac{1}{2}\int_0^T (T - s)^{q-1} ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(q - 1)}|T - 2t| \int_0^T (T - s)^{q-2} ds\right] \\
&\leq (MR + \nu)\frac{T^q(6 + q)}{4\Gamma(q + 1)} \\
&< R,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi utilizada a estimativa (4.13). Portanto, para cada $u \in B[0, R]$, temos que $\Psi(u) \in B[0; R]$. Logo, temos a aplicação $\Psi : B[0; R] \to B[0; R]$ compacta, com $B[0; R] \subset C[0, T]$ sendo um fechado, limitado e convexo, portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Schauder, Ψ tem um ponto fixo, isto é, existe $u \in B[0; R]$ de modo que $\Psi(u) = u$ e consequentemente, u é uma solução do problema (4.1). $\square$

Para finalizarmos esta seção, apresentamos um exemplo, no qual a hipótese $(H3)$ é satisfeita.

Exemplo 4.3. Consideremos $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(t,y) = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}\dfrac{4\sqrt{3}}{27T^q} sen\left(\dfrac{2\pi t}{T^q}\right)$. Notemos que $f_y(t,y) = -\dfrac{16\sqrt{3}}{27T^q} sen\left(\dfrac{2\pi t}{T^q}\right)\dfrac{y}{(1+y^2)^2}$, para todo $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Assim, $|f_y(t,y)| \le \dfrac{16\sqrt{3}}{27T^q}\dfrac{|y|}{(1+y^2)^2}$, para todo $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Pelo fato que a função $g(y) = \dfrac{|y|}{(1+y^2)^2}$, $y \in \mathbb{R}$, assume o máximo se $|y| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, segue que $|f_y(t,y)| \le \dfrac{1}{3T^q}$, para todo $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Então, por (4.10), segue que a hipótese $(H3)$ é satisfeita com $M = \dfrac{2}{3}\dfrac{4\Gamma(q+1)}{T^q(6+q)}$.

5 Conclusão

Neste trabalho, estudamos resultados eficazes para garantir a existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária com condições de contorno anti-periódicas. Assim, como esse estudo, diversos outros, com propósitos similares, vem sendo constantemente desenvolvidos, e assim, modelos que utilizam o cálculo fracionário vem ganhando importância e destaque.

Ressaltamos que o desenvolvimento de resultados que garantem a existência de soluções para equações diferencias fracionárias é um elemento de grande relevância para a ciência, já que, conforme mencionado na introdução deste trabalho, uma ampla classe de aplicações pode ser explorada por meio da teoria do cálculo fracionário e que as equações diferenciais fracionárias, vem sendo cada vez mais utilizadas para descrever fenômenos em muitas disciplinas científicas.

Destacamos ainda, que para desenvolvermos este trabalho, em particular, além de um conhecimento sobre a teoria do cálculo fracionário, foi relevante o estudo da teoria do grau topológico de Leray-Schauder, que diretamente ou indiretamente, foi um elemento fundamental para garantirmos a validade dos resultados que asseguraram a existência de ao menos uma solução para o nosso problema, mostrando que esta ferramenta além de ser eficaz no estudo de equações diferenciais de ordem inteira, pode também ser útil para desenvolvermos resultados relativos à equações diferencias fracionárias.

Referências

AHMAD, B.; NIETO, J. J. **Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray–Schauder degree theory**. *Topological Methods in Nonlinear Analysis: Journal of the Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies*, v. 35, n. 2, p. 295–304, 2010.

ALIPRANTIS, C. D.; BURKINSHAW, O. ***Principles of Real Analysis***. San Diego: Academic Press, Inc, 1990.

BONI, M. D. T. M. ***Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações***. 73 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)–Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2017.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. ***Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno***. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

CAMARGO, R. F. ***Cálculo Fracionário e Aplicações***. 135 p. Tese (Doutorado em Matemática)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

COSTA, F. S. ***Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário aplicado***. 121 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

DAVID, S. A.; LINARES, J. L.; PALLONE, E. M. J. A. **Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 4, p. 4302–1–4302–7, 2011.

DEBNATH, L. **Recent applications of fractional calculus to science and engineering**. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, v. 2003, n. 54, p. 3413–3442, 2003.

DEIMLING, K. ***Nonlinear Functional Analysis***. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2010.

DIETHELM, K. ***The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type***. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. v. 2004.

FONSECA, I.; GANGBO, W. ***Degree Theory in Analysis and Applications***. New York: Oxford University Press, 1995.

GABERT, R. D. F. ***Teoria do grau topológico e sua aplicação em um problema elíptico ressonante superlinear.*** 118 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. **Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order.** *CISM Lecture Notes*, p. 223–276, 2000.

GRANAS, A. ***The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I)***. Warszawa, Poland: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1962. v. 30.

GRIGOLETTO, E. C. ***Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler.*** 138 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

ISHTEVA, M. K. ***Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator***. Master Thesis (Department of Mathematics)–Universität Karlsruhe (TH), Germany, 2005.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. ***Theory and Applications of Fractional Differential Equations***. Amsterdam: Elsevier, 2006. v. 204.

MAINARDI, F.; GORENFLO, R. **On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes**. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 118, p. 283–299, 2000.

MILLER, K. S.; ROOS, B. ***An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations***. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1993.

NETO, A. L. ***Funções de uma variável complexa***. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

OLIVEIRA, A. S. C. ***Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas***. 60 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

OLIVEIRA, D. S. ***Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler***. 105 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

OLIVEIRA, E. C. ***Solved Exercises in Fractional Calculus***. [S.l.]: Springer, 2019. v. 240.

OLIVEIRA, H. S. ***Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária***. 122 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

PEIXOTO, A. L. C. ***A construção do grau topológico e sua aplicação a um sistema diferencial não linear com condiçções de contorno***. 98 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PODLUBNY, I. ***Fractional Differential Equations***. San Diego: Academic Press, 1999. v. 198.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. **Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 3, p. 3305–1–3305–12, 2015.

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. ***Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications***. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

SIMONÁRIO, P. S. ***Introdução ao estudo de derivadas fracionárias e equações diferenciais***. 61 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física Bacharelado)–Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

TEODORO, G. S. ***Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler***. 80 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

TEODORO, G. S. ***Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade***. 182 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

WANG, S.; XU, M.; LI, X. **Green's function of time fractional diffusion equation and its applications in fractional quantum mechanics**. *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, v. 10, p. 1081–1086, 2009.

ZAKARIYA, Y. F. et al. **Analytical Solutions to Fractional Fluid Flow and Oscillatory Process Models.** *Fractal and Fractional*, v. 2, n. 18, 2018.

APÊNDICE A – GRAU TOPOLÓGICO DE BROUWER

O objetivo deste Apêndice é apresentar brevemente o grau topológico de Brouwer, isto é, o grau em dimensão finita, com a intenção de trazer um resultado e algumas propriedades que são essenciais no desenvolvimento da teoria do grau topológico de Leray-Schauder.

Para chegarmos em tal resultado e nas propriedades em questão, iniciamos com algumas definições para o grau topológico de Brouwer, para uma função definida em um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, e para isso, utilizamos a abordagem apresentada em (DEIMLING, 2010). Em tal referência é possível encontrar os resultados utilizados para chegar nestas definições. Depois, apresentamos algumas propriedades, ainda em $\mathbb{R}^n$, com base naquelas que se encontram em (GABERT, 2015) ou em (PEIXOTO, 2014). Por fim, indicamos os resultados que tornam possível a generalização do grau topológico de Brouwer para um espaço vetorial real de dimensão finita.

Para definirmos o grau topológico de Brouwer em ternas (f, Ω, y), precisamos impor algumas restrições. Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, uma função $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $y \in R^n \backslash f(\partial\Omega)$. Então (f, Ω, y) é dita uma **terna admissível** para o grau topológico de Brouwer.

Neste momento, apresentamos a definição do grau topológico de Brouwer, que por sua vez, será feita em três etapas. Na primeira, o grau será definido para valores regulares de $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, ou seja, valores que não são imagem de nenhum ponto crítico de f. Já na segunda etapa, a definição será dada para qualquer valor de $f \in \overline{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Finalmente, na terceira etapa, o conceito de grau será considerado para qualquer valor de $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, vejamos.

Caso (f, Ω, y) seja uma terna admissível, tal que $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e y um valor regular de f, então consideramos

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Omega} sgn\ (J_f(x)), & \text{se } f^{-1}(y) \cap \Omega \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(y) \cap \Omega = \emptyset, \end{cases}$$

em que $J_f(x)$ é o determinante da matriz jacobiana de f em x. Já no caso em que y seja um valor qualquer de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$, mas com $f \in \overline{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, consideramos $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^1)$, onde y^1 é um valor regular de f, tal que $\|y^1 - y\|_e < \rho_e(y, f(\partial\Omega))$.

Apresentamos a seguir, a definição do grau topológico de Brouwer para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, f uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e y um valor qualquer de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

Definição A.1. Se (f, Ω, y) é uma terna admissível, então definimos $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$, sendo $g \in \overline{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - f(x)\|_e < \rho_e(y, f(\partial\Omega))$.

A seguir, apresentamos propriedades clássicas do grau topológico de Brouwer, cujas justificativas podem ser encontradas em (DEIMLING, 2010), (GABERT, 2015) ou em (PEIXOTO, 2014).

Proposição A.1. As seguintes propriedades são válidas:

(d1) (Normalização:) Se $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, então para todo $y \in \Omega$,

$$d(I, \Omega, y) = 1.$$

(d2) (Translação:) Caso (f, Ω, y) é uma terna admissível, então $(f - y, \Omega, 0)$ é uma terna admissível e

$$d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0).$$

(d3) (Aditividade:) Se (f, Ω, y) é uma terna admissível e $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

(d4) (Excisão:) Caso (f, Ω, y) é uma terna admissível e $K \subseteq \overline{\Omega}$ é um conjunto compacto, onde $y \notin f(K)$. Então,

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \backslash K, y).$$

(d5) (Continuidade em relação à função f:) Para cada (f, Ω, y) terna admissível, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda função contínua $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ com $\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - f(x)\|_e < \varepsilon$, a terna (g, Ω, y) é admissível e

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

(d6) (Invariância Homotópica:) Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas tais que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. Então, $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t))$ não depende de t.

(d7) (Invariância local:) Se $f \in C(\overline{\Omega})$, então $d(f, \Omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

(d8) (Existência de Solução:) Se (f, Ω, y) é uma terna admissível e $d(f, \Omega, y) \neq 0$, então $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(d9) (Propriedade do bordo:) Se (f, Ω, y) e (g, Ω, y) são ternas admissíveis, então se $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$,

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

Para generalizarmos o grau topológico de Brouwer, inicialmente definido em $\mathbb{R}^n$, para espaços vetorias reais normados de dimensão finita, necessitamos estender o conceito de terna admissível e de grau topológico de Brouwer para aplicações de classe C^1, em um subconjunto de um espaço vetorial V.

Se V é um espaço vetorial real normado de dimensão finita e $\Omega \subset V$ um conjunto aberto e limitado, dizemos que (f, Ω, y) é uma **terna admissível** para o grau topológico de Brouwer, se $f : \overline{\Omega} \to V$ é uma aplicação contínua e $y \in V \backslash f(\partial\Omega)$. Já se (f, Ω, y) é uma terna admissível com $f \in \overline{C}^1(\Omega, V)$ e y um valor regular de f, o grau topológico de Brouwer de (f, Ω, y) é dado por

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \,\in\, f^{-1}(y) \cap \Omega} sgn\ (J_f(x)),$$

se $f^{-1}(y) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $d(f, \Omega, y) = 0$, caso contrário. Onde $J_f(x)$ é o determinante da matriz que representa $f(x)$ em qualquer base de V fixada.

A proposição a seguir, mostra a invariância do grau topológico por isomorfismos de um espaço vetorial V em $\mathbb{R}^n$.

Proposição A.2. Sejam (f, Ω, y) uma terna admissível com $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, y um valor regular de f em Ω e $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Se $\Omega' = \phi(\Omega)$, $\hat{y} = \phi(y)$ e $\psi = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(\psi, \Omega', \hat{y}).$$

O resultado anterior permite generalizar a definição de grau topológico de Brouwer para uma terna admissível (f, Ω, y) em um espaço vetorial real normado de dimensão finita. A mesma construção feita para obter a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^n$, pode ser estendida para espaços vetoriais reais de dimensão finita.

O resultado a seguir, será importante na construção do grau topológico de Leray-Schauder, haja visto que tal resultado garante que podemos associar o grau das ternas (f, Ω, y), com o grau de ternas que possuem restrições de f a um subespaço W de V. Sua justificativa pode ser obtida em (GABERT, 2015).

Proposição A.3. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e W um subespaço de V. Sejam $\Omega \subset V$ um conjunto aberto e limitado, uma aplicação contínua $T : \overline{\Omega} \to W$ e consideremos $f : \overline{\Omega} \to V$ dada por $f(x) = x - T(x)$. Caso $y \in W \backslash f(\partial\Omega)$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(f|_{\overline{\Omega} \cap W}, \Omega \cap W, y).$$

APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste Apêndice, trazemos alguns resultados sobre a transformada de Laplace, visto que tal técnica por vezes foi utilizada em nosso trabalho. Os resultados aqui apresentados foram baseados em (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Para cada função f definida em $(0, \infty)$, consideramos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \tag{B.1}$$

a qual é chamada de **transformada de Laplace de *f***, desde que a integral convirja. Ressaltamos que é comum usar a notação $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Destacamos ainda, pela linearidade do operador integração, que a transformada de Laplace é um operador linear.

Indicamos que nem toda função possui transformada de Laplace e assim, é comum nos perguntarmos quais condições uma função f deve satisfazer para que tenha transformada de Laplace. A seguir, veremos certas condições sobre a função f que são suficientes para garantir a existência da transformada de Laplace.

Dizemos que uma função f é **contínua por partes** em $[\alpha, \beta]$, se f é contínua em $[\alpha, \beta]$, exceto possivelmente em uma quantidade finita de pontos, digamos $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [\alpha, \beta]$, de modo que exista $\lim\limits_{t \to t_j^-} f(t)$ e $\lim\limits_{t \to t_j^+} f(t)$, para cada $0 \leq j \leq n$. Já, dizemos que uma função f é de **ordem exponencial**, se existem constantes reais K, a e M com $K, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, quando $t \geq M$. De posse destes conceitos, pode-se justificar o seguinte resultado a cerca da existência da $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Proposição B.1. Se f é uma função contínua por partes em $(0, A)$, para qualquer A positivo, e de ordem exponencial para $t \geq M$, então sua transformada de Laplace existe para todo $s > a$.

Agora, veremos como determinar a transformada de Laplace da $n-$ésima derivada de uma função.

Proposição B.2. Suponha que as funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas, $f^{(n)}$ é contínua por partes em qualquer intervalo $(0, A)$ e existem constantes K, a e M tais que

$|f^{(n)}(t)| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, então $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0^+) - \cdots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

Dadas duas funções f e g, definidas em $(0, \infty)$, consideramos a **convolução** entre elas, denotada por $f * g$, por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau. \tag{B.2}$$

Destacamos que $(f * g)(t) = (g * f)(t)$. Além disso, para calcularmos a transformada de Laplace da convolução entre duas funções, podemos calcular o produto entre as transformadas de Laplace de cada uma delas, pois vale o seguinte resultado

Proposição B.3. Se $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}$ existem, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Vale destacar que é possível realizar o processo inverso da transformada de Laplace, ou seja, dada uma $F(s)$ é possível encontrar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, o que significa encontrar a **transformada de Laplace inversa** da função $F(s)$, e essa transformada inversa é denotada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Segue da Proposição B.3 que se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, a transformada inversa de Laplace do produto de funções $F(s) \cdot G(s)$ é a convolução entre $f(t)$ e $g(t)$, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t). \tag{B.3}$$

APÊNDICE C – RESULTADOS AUXILIARES

Neste Apêndice, trazemos alguns resultados auxiliares que foram usados no Capítulo 4. O lema a seguir foi essencial para a demonstração de resultados de tal capítulo.

Lema C.1. Suponha que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Então a aplicação $\Psi : C[0,T] \to \mathcal{F}([0,T],\mathbb{R})$ definida por $\Psi(u) \doteq \Psi_u$, onde para cada $t \in [0,T]$,

$$\Psi_u(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds \tag{C.1}$$

e $G(t,s)$ é dada por (4.2), é tal que $\Psi(u) \in C[0,T]$.

Demonstração. Decorre da relação (4.2) que para cada $u \in C[0,T]$ e $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned}\Psi_u(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}f(s,u(s))ds - \frac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}f(s,u(s))ds \\ &\quad + \frac{(T-2t)}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-s)^{q-2}f(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

Fixada $u \in C[0,T]$ e $t_0 \in [0,T]$ qualquer, basta mostrarmos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, onde para $t \in [0,T]$ com $|t - t_0| < \delta$, tem-se que $|\Psi_u(t) - \Psi_u(t_0)| < \varepsilon$.
Segue que para cada $t, t_0 \in [0,T]$, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(q)|\Psi_u(t) - \Psi_u(t_0)| &= \Bigg| \int_0^t (t-s)^{q-1}f(s,u(s))ds - \int_0^{t_0} (t_0-s)^{q-1}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{(q-1)}{2}(t-t_0)\int_0^T (T-s)^{q-2}f(s,u(s))ds \Bigg| \\ &= \Bigg| \int_0^t \left[(t-s)^{q-1} - (t_0-s)^{q-1}\right] f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (t_0-s)^{q-1}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{(q-1)}{2}(t-t_0)\int_0^T (T-s)^{q-2}f(s,u(s))ds \Bigg|\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\int_0^T |(t-s)^{q-1} - (t_0-s)^{q-1}|ds + C|t-t_0|^q$$
$$+\frac{C}{2}T^{q-1}|t-t_0|, \tag{C.2}$$

onde C é de modo que $|f(s,u(s))| \leq C$, para todo $s \in [0,T]$. Assim, fixado $\varepsilon > 0$ qualquer, independente de $t, t_0 \in [0,T]$, pelo fato de $h(z) = z^{q-1}$ ser uniformemente contínua em $[0,T]$, existe $\delta > 0$ de modo que se $|t-t_0| < \delta$, então $|h(t-s) - h(t_0-s)| < \varepsilon\Gamma(q)(3CT)^{-1}$, para todo $s \in [0,T]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 < \delta < \min\{[\varepsilon\Gamma(q)(3C)^{-1}]^{\frac{1}{q}}, 2\varepsilon\Gamma(q)T^{1-q}(3C)^{-1}\}$. Assim, pela estimativa (C.2), segue que independente de $t, t_0 \in [0,T]$, se $|t-t_0| < \delta$, então $|\Psi_u(t) - \Psi_u(t_0)| < \varepsilon$, ou seja, $\Psi(u) \in C[0,T]$. □

Acabamos de justificar que sob certas hipóteses a aplicação Ψ definida por (C.1) é um operador sobre $C[0,T]$. A seguir, justificamos que tal aplicação restrita sobre $B[0;R]$ é compacta. No entanto, para isso, vamos precisar do seguinte resultado, cuja justificativa pode ser encontrada em (ALIPRANTIS; BURKINSHAW, 1990).

Teorema C.1. (Ascoli-Arzelá) Sejam X um espaço topológico compacto e S um subconjunto de $C(X)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:
i) S é um subconjunto compacto de $C(X)$;
ii) S é fechado, limitado e equicontínuo.

Lema C.2. Sejam $T > 0$, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $\Psi : C[0,T] \to C[0,T]$, onde para cada $t \in [0,T]$

$$\Psi(u)(t) = \Psi_u(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds,$$

onde $G(t,s)$ é dada por (4.2). Então, para cada $R > 0$, $\Psi : B[0;R] \to C[0,T]$ é uma aplicação compacta.

Demonstração. Fixado $R > 0$ qualquer, temos que Ψ é uma aplicação contínua, pois caso tivermos $u \in B[0;R] \subset C[0,T]$ qualquer e se $(u_n) \subset B[0;R]$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$, segue pelo fato de f ser contínua, que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Psi(u_n) - \Psi(u)\| = 0$, ou seja, Ψ é contínua em $u \in B[0;R]$.
Agora, basta mostrarmos que $\overline{\Psi(A)} \subset C[0,T]$ é compacto, para todo $A \subset B[0;R]$, que devido ao Teorema de Ascoli-Arzelá é equivalente a garantir que o conjunto $\overline{\Psi(A)}$ é fechado, limitado e equicontínuo. Mas claramente $\overline{\Psi(A)}$ é fechado, por definição.

Mostremos agora que $\overline{\Psi(A)}$ é limitado. Como A é limitado, existe $K > 0$ tal que $|u(t)| \leq K$, para cada $t \in [0, T]$, independente de $u \in A$, e pelo fato que f é contínua, existe $C > 0$ de modo que $|f(t, y)| \leq C$, para todo $(t, y) \in [0, T] \times [-K, K]$. Assim, $|f(s, u(s))| \leq C$, independente de $s \in [0, T]$ e $u \in A$. Ainda, através da relação (4.2), obtemos a seguinte estimativa

$$\int_0^T |G(t,s)| ds \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q)} + \frac{1}{4\Gamma(q-1)} \right) T^q,$$

independente de $t \in [0, T]$. Assim, pelas estimativas anteriores, temos que

$$|\Psi_u(t)| = \left| \int_0^T G(t,s) f(s, u(s)) ds \right| \leq C \left(\frac{2}{\Gamma(q)} + \frac{1}{4\Gamma(q-1)} \right) T^q,$$

independente de $t \in [0, T]$ e $u \in A$, donde segue que $\Psi(A)$ é limitado e consequentemente, $\overline{\Psi(A)}$ é limitado.

Para concluirmos o nosso resultado, basta mostrarmos que $\Psi(A)$ é equicontínuo, pois neste caso, $\overline{\Psi(A)}$ será equicontínuo. Recordemos que existe $K > 0$ onde $\|u\| \leq K$, independente de $u \in A$, e por $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ser contínua, existe $C > 0$ de modo que $|f(t, y)| \leq C$, para cada $(t, y) \in [0, T] \times [-K, K]$ e assim para qualquer $u \in A$ e $s \in [0, T]$, temos que $|f(s, u(s))| \leq C$. Como na relação (C.2) da demonstração do Lema C.1, dado $\varepsilon > 0$, $t, t_0 \in [0, T]$ e se $|t - t_0| < \delta$, independente de $u \in A$, temos que $|\Psi_u(t) - \Psi_u(t_0)| < \varepsilon$, ou seja, $\Psi(A)$ é equicontínuo. $\square$