UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Lisiane Daniela Böck

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV

Santa Maria, RS

2020

Lisiane Daniela Böck

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, do Centro de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Santa Maria, RS

2020

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001

Böck, Lisiane Daniela
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV / Lisiane Daniela Böck.- 2020.
81 p.; 30 cm

Orientador: Juliano Damião Bittencourt de Godoi
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2020

1. Expoente crítico de Sobolev 2. Problema elíptico linear 3. Problema elíptico não linear I. de Godoi, Juliano Damião Bittencourt II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, LISIANE DANIELA BöCK, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Lisiane Daniela Böck

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, do Centro de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 27 de março de 2020:

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)- Videoconferência
(Presidente/Orientador)

Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)- Videoconferência

Alisson Darós Santos, Dr. (Unipampa)- Videoconferência

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que de alguma forma contribuíram na concretização deste trabalho. E em especial, agradeço:

- à Deus, por sempre ter me dado forças para continuar, independente das dificuldades;
- aos meus pais, Janete e Arnido, por sempre me apoiarem a lutar pelos meus sonhos;
- ao meu namorado Alexandre e à minha gata Sissi por tornarem os meus dias mais leves;
- às amigas Fabíola e Juliana e aos amigos Marcelo e Elard, por sempre estarem dispostos a me ajudar e incentivar;
- ao meu orientador, Juliano, pela paciência e disposição em auxiliar no desenvolvimento deste trabalho e por todo o apoio durante os últimos anos;
- aos professores da banca, Maurício, Alisson e Celene, pelas contribuições ao meu trabalho;
- aos professores do Curso de Pós-Graduação em Matemática, com os quais tive a oportunidade de estudar, por contribuirem com seu conhecimento para a minha formação;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), pelo apoio financeiro dado durante o curso.

RESUMO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV

AUTORA: Lisiane Daniela Böck

ORIENTADOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Este trabalho apresenta um estudo sobre a existência ou não de solução para o seguinte problema elíptico com expoente crítico de Sobolev

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e f adequada.

Palavras-chave: Expoente crítico de Sobolev. Problema elíptico linear. Problema elíptico não linear.

ABSTRACT

EXISTENCE OF SOLUTION FOR AN ELLIPTICAL PROBLEM INVOLVING THE CRITICAL EXPOENT OF SOBOLEV

AUTHOR: Lisiane Daniela Böck

ADVISOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

This work presents a study on the existence or not of a solution for the following elliptical problem with Sobolev's critical exponent

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a limited domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ and f adequate.

Key words: Critical exponent of Sobolev. Linear elliptical problem. Nonlinear elliptical problem.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclideano n-dimensional;
- $\|\cdot\|$ denota a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$;
- $\|\cdot\|_E$ denota a norma em um espaço de Banach E;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; $\|u\|_p < \infty\}$;
- $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, norma no espaço $L^p(\Omega)$;
- $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω;
- $\Omega \setminus \{0\} = \{x \in \Omega;\ x \neq 0\}$;
- B^c, para $B \subset X$, indicará o conjunto complementar de B em relação a X;
- $B(a; r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r;
- $B_r = B(0; r)$;
- S_r denota a esfera de centro na origem e raio r;
- q.t.p. significa "em quase todo ponto";
- $E^* = \{f : E \to \mathbb{R};\ f$ é funcional linear contínuo$\}$;
- $C^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ é uma vez continuamente diferenciável $\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ é infinitamente continuamente diferenciável$\}$;
- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de u em relação a $i-$ésima variável;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, o gradiente de u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, o laplaciano de u;

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;
- $\to$ denota convergência forte;
- supp$f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}}$;
- $C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ é contínua e supp$f \subset \Omega$ é compacto$\}$;
- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists f \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u\varphi' dx = -\int_\Omega f\varphi dx,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$;
- $\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega |\partial_i u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega); u = 0$ sobre $\partial\Omega\}$;
- $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$;
- $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, para $1 \leq p < n$, o expoente crítico de Sobolev;
- $f = o(g)$ quando $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- $f = O(g)$ quando $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq C$, para algum $C > 0$;
- δ_{ij} denota o delta de Kronecker;
- $u^+ =$ max$\{u, 0\}$ e $u^- =$ max$\{-u, 0\}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar resultados que garantam a existência de solução para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, $n \geq 3$ e $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e tem ordem inferior a t^{2^*-1}, isto é, $f = o(t^{2^*-1})$, quando $t \to \infty$. Um caso particular desse problema é quando $f(x,u) = \lambda u$, onde λ é um parâmetro real. As soluções desse problema correspondem a pontos críticos do funcional $\Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*} - F(x,u)\right]dx,$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt,$ para $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$.

De acordo com Brezis (2011), a imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta. Logo, o funcional Ψ não satisfaz a condição (PS), assim a procura de pontos críticos por métodos variacionais padrões se torna inviável. Além disso, se f é identicamente nula e Ω é um domínio estrelado, então Pohozaev (1965) garante que esse problema não possui solução. Dessa forma, algumas condições devem ser colocadas sobre a perturbação f para que o problema possua solução.

O problema em questão foi inicialmente proposto por Brezis e Nirenberg (1983). Eles tiveram como motivação o fato de que ele se assemelha a alguns problemas variacionais da Geometria e da Física, onde ocorre falta de compacidade. Um exemplo que teve destaque é o Problema de Yamabe, proposto por Yamabe (1960), mas existem muitos outros exemplos (JACOBS, 1970, UHLENBECK, 1982).

No capítulo 2, trabalharemos os casos de existência e não existência de solução para o seguinte problema elíptico linear

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado, com $0 \in \Omega$ e $\partial\Omega$ de classe C^∞. Na seção 2.1, trataremos os casos de não existência de solução para (P_1) se $n \geq 3$, quando $\lambda \geq \lambda_1$ ou $\lambda \leq 0$ e Ω é estrelado em relação a origem de $\mathbb{R}^n$, e se $n = 3$, quando $\Omega = B(0;1)$ e $0 < \lambda < \dfrac{\lambda_1}{4}$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta$. E, na seção 2.2, os casos de existência de solução se $n \geq 4$, quando $0 < \lambda < \lambda_1$, e se $n = 3$, quando $\Omega = B(0;1)$ e $\dfrac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$. Vale ressaltar que para a prova desses resultados os argumentos utilizados por Brezis e Nirenberg (1983) foram inspirados no trabalho de Aubin (1976b).

No capítulo 3, buscaremos a existência de solução para o caso em que o problema apresenta uma perturbação não linear,

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e tem ordem inferior a t^{2^*-1}. Na seção 3.1, abordaremos os casos de existência de solução para o problema (P_2), para isso utilizaremos um resultado que é uma variação do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz sem a condição (PS). Na subseção 3.1.1, mostraremos uma condição suficiente para a validade do Teorema de existência de solução. Já, nas demais subseções, apresentaremos separadamente os casos $n \geq 5$, $n = 4$ e $n = 3$.

Salientamos que este trabalho tem como base o artigo de Brezis e Nirenberg (1983), onde os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em sua maioria. Por se tratar de uma aplicação relevante para o estudo dos metódos variacionais, esse artigo inspirou trabalhos interessantes na área de Equações Diferenciais Parciais tais como Colorado e Ortega (2019). Para tornar o trabalho mais compreensível, utilizamos uma série de resultados que estão listados no Apêndice.

2 PROBLEMA ELÍPTICO LINEAR

Neste capítulo, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R},\ n \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado, com $0 \in \Omega$ e $\partial\Omega$ é de classe C^∞. Estamos interessados em saber para quais valores de λ o problema (P_1) possui ou não solução. Iniciaremos o estudo dos casos em que (P_1) não possui solução e, posteriormente, os casos em que (P_1) admite solução.

2.1 NÃO EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA (P_1)

A análise de existência ou não de solução do problema (P_1) necessitará de um melhor entendimento sobre o primeiro autovalor do laplaciano. Dessa forma, iniciamos nosso estudo garantindo a sua existência através do seguinte lema.

Lema 2.1.1. Seja $n \geq 3$. Então exite $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \{\|\nabla u\|_2^2; \|u\|_2 = 1\} = \|\nabla \overline{u}\|_2^2. \tag{2.1}$$

Além disso, $\overline{u}$ é de classe C^1 e satisfaz

$$-\Delta \overline{u} = \lambda_1 \overline{u}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Consideremos os funcionais $J, G : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad G(u) = \int_\Omega u^2 dx,$$

e o conjunto $H = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_2 = 1\}$.
Utilizando ideias similares às do exemplo 0.0.1 do Apêndice, vê-se que J e G estão bem definidos e são de classe C^1. Com isso, passamos à prova de (2.1).

Em virtude de $J(u) \geq 0$, para todo $u \in H$, J é limitado inferiomente. Logo, existe

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H} J(u).$$

Por isso e pela definição de ínfimo, garantimos a existência de uma sequência $(u_j) \subset H$ tal que $J(u_j) \to \lambda_1$ e $J(u_j) > \lambda_1$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Pela Proposição 0.0.11, as normas $\| \cdot \|_{H_0^1}$ e $\|\nabla \cdot \|_2$ são equivalentes. Neste caso, podemos considerar esta última norma como uma norma do espaço $H_0^1(\Omega)$. Sem perda de generalidade, a denotaremos por $\| \cdot \|_{H_0^1}$. Assim,

$$J(u_j) = \|\nabla u_j\|_2^2 = \|u_j\|_{H_0^1}^2.$$

Disso e do fato de $J(u_j) \to \lambda_1$, segue que $\|u_j\|_{H_0^1}^2 \to \lambda_1$. Logo, $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Combinando isso ao fato de $H_0^1(\Omega)$ ser um espaço reflexivo temos, pela Proposição 0.0.8, que existe $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ de modo que, ao longo de uma subsequência,

$$u_j \rightharpoonup \overline{u} \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Agora, pela Proposição 0.0.12, $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. Consequentemente, existe $\widehat{u} \in L^2(\Omega)$ tal que, ao longo de uma subsequência,

$$u_j \to \widehat{u} \text{ em } L^2(\Omega).$$

Afirmação 1. $\overline{u}(x) = \widehat{u}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Com efeito, consideremos $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$. Devido a continuidade de φ, à Proposição 0.0.10 (Desigualdade de Poincaré) e à Proposição 0.0.11 temos que

$$|\varphi(u)| \leq c\|u\|_2 \leq \overline{c}\|\nabla u\|_2 \leq \overline{c}\|u\|_{H_0^1}, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, φ é contínua em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^*$. Dessa forma, pela definição de convergência fraca,

$$u_j \rightharpoonup \overline{u} \text{ em } H_0^1(\Omega) \ \Rightarrow \varphi(u_j) \to \varphi(\overline{u}).$$

Já, da continuidade de φ,

$$u_j \to \widehat{u} \text{ em } L^2(\Omega) \;\Rightarrow \varphi(u_j) \to \varphi(\widehat{u}).$$

Por conseguinte, $\varphi(\overline{u}) = \varphi(\widehat{u})$. E como $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$ é arbitrária,

$$\varphi(\overline{u}) = \varphi(\widehat{u}), \; \forall \, \varphi \in (L^2(\Omega))^*.$$

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach obtemos

$$\|\overline{u} - \widehat{u}\|_2 = \sup_{\substack{\varphi \in (L^2(\Omega))^* \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(\overline{u} - \widehat{u})| = 0.$$

Portanto, $\overline{u}(x) = \widehat{u}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, o que garante a validade da afirmação em questão.

Voltando à prova do lema, notemos que a validade da Afirmação 1 nos garante que $u_j \to \overline{u}$ em $L^2(\Omega)$, o que implica em $\|u_j\|_2 \to \|\overline{u}\|_2$. Mas, $\|u_j\|_2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|\overline{u}\|_2 = 1$ e assim $\overline{u} \in H$. Ainda, pela Proposição 0.0.7, como $u_j \rightharpoonup \overline{u}$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|\overline{u}\|_{H_0^1} \leq \liminf \|u_j\|_{H_0^1}.$$

Disso, da definição de ínfimo e da definição de limite, decorre que

$$\lambda_1 \leq J(\overline{u}) = \|\overline{u}\|^2_{H_0^1} \leq (\liminf \|u_j\|_{H_0^1})^2 = (\liminf J(u_j)^{\frac{1}{2}})^2 = \lambda_1. \tag{2.3}$$

Assim, $\lambda_1 \leq J(\overline{u}) \leq \lambda_1$ e daí segue que $J(\overline{u}) = \lambda_1$, isto é,

$$\|\nabla \overline{u}\|_2^2 = \|\overline{u}\|^2_{H_0^1} = \lambda_1,$$

o que garante a validade de (2.1).

Agora, em virtude de $H_0^1(\Omega)$ ser um espaço de Banach, J e G serem de classe C^1 e $\overline{u}$ ser um ponto crítico de J restrito a H, onde

$$\begin{aligned} H &= \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_2 = 1\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_2^2 = \|\overline{u}\|_2^2\} \\ &= \left\{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega \overline{u}^2 dx\right\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega); G(u) = G(\overline{u})\} \\ &= G^{-1}(G(\overline{u})), \end{aligned}$$

podemos utilizar a Proposição 0.0.16 (Multiplicador de Lagrange). Notemos que ao tomarmos $v = \overline{u} \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$G'(\overline{u}) \cdot \overline{u} = 2 \int_\Omega \overline{u}^2 dx = 2\|\overline{u}\|_2^2 = 2 \neq 0.$$

Consequentemente, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(\overline{u}) \cdot v = kG'(\overline{u}) \cdot v, \ \forall \, v \in H_0^1(\Omega).$$

De outro modo,

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla v dx = k \int_\Omega \overline{u} v dx, \ \forall \, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Considerando $v = \overline{u}$ na equação acima, encontramos $k = \|\nabla \overline{u}\|_2^2 = \lambda_1$. Dessa forma, resolvemos no sentido fraco o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} = \lambda_1 \overline{u} & \text{em } \Omega \\ \overline{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $f = \lambda_1 \overline{u}$ temos que $f \in H_0^1(\Omega)$, pois $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Devido a $\partial\Omega$ ser de classe C^∞ temos, pela Proposição 0.0.19, que $\overline{u} \in H^3(\Omega)$ e assim $f \in H^3(\Omega)$. Utilizando o mesmo argumento, podemos provar que $\overline{u} \in H^5(\Omega)$. Prosseguindo deste modo, concluímos que $\overline{u} \in H^l(\Omega)$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Disso e da Desigualdade geral de Sobolev garantimos que $\overline{u} \in H^\infty(\overline{\Omega})$.

Por outro lado, observamos que

$$\nabla(v \nabla \overline{u}) = \nabla v \cdot \nabla \overline{u} + v \nabla(\nabla \overline{u}) = \nabla v \cdot \nabla \overline{u} + v \Delta \overline{u}, \ \forall \, v \in H_0^1(\Omega).$$

Equivalentemente, $\nabla\overline{u}\cdot\nabla v = \text{div}(v\nabla\overline{u}) - v\Delta\overline{u}$. Integrando sobre Ω ambos os membros dessa igualdade, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla v dx = \int_\Omega \text{div}(v\nabla\overline{u})dx - \int_\Omega v\Delta\overline{u}dx.$$

Por isso e por (2.4), segue que

$$\int_\Omega \text{div}(v\nabla\overline{u})dx = \int_\Omega v\Delta\overline{u}dx + \lambda_1\int_\Omega \overline{u}vdx,\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega),$$

Disso e da Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), vemos que

$$-\int_\Omega v\Delta\overline{u}dx = \lambda_1\int_\Omega \overline{u}vdx,\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega(-\Delta\overline{u} - \lambda_1\overline{u})vdx = 0,\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $-\Delta\overline{u} = \lambda_1\overline{u}$ em Ω.

Finalmente, observamos que a função $\overline{u}$ pode ser considerada positiva. De fato, devido a (2.3) e ao fato de $\nabla|\overline{u}| = \pm\nabla\overline{u}$, temos que $J(|\overline{u}|) = \lambda_1$. Logo, podemos utilizar $|\overline{u}|$ ao invés de $\overline{u}$ na prova do lema em questão, ou seja, podemos supor $\overline{u}\geq 0$. Ainda, pela Proposição 0.0.22 (Princípio do Máximo Forte), decorre que $\overline{u} > 0$ em Ω, o que finaliza a prova do lema. □

O próximo lema será utilizado para provarmos os resultados de não existência de solução para (P_1).

Lema 2.1.2. **(Identidade de Pohozaev)**. Sejam $n\geq 3$ e $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ uma solução de (P_1). Então, sendo $v(x)$ o vetor normal à $\partial\Omega$ em x, a função u satisfaz a igualdade

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x\cdot v(x)ds = \lambda\int_\Omega u^2dx.$$

Demonstração. Por hipótese, u satisfaz $-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $\nabla u\cdot x$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u(\nabla u\cdot x)dx = \int_\Omega u^{2^*-1}(\nabla u\cdot x)dx + \lambda\int_\Omega u(\nabla u\cdot x)dx. \tag{2.5}$$

Mas, $\Delta u(\nabla u\cdot x) = \text{div}[(\nabla u\cdot x)\nabla u] - \nabla(\nabla u\cdot x)\cdot\nabla u$. Por isso e pela Proposição 0.0.15

(Teorema da Divergência), concluímos que

$$\int_\Omega \Delta u(\nabla u \cdot x)dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)(\nabla u \cdot v(x))ds - \int_\Omega \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u dx. \tag{2.6}$$

Combinando essa equação com (2.5), obtemos

$$\int_\Omega \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)(\nabla u \cdot v(x))ds = \int_\Omega u^{2^*-1}(\nabla u \cdot x)dx + \lambda \int_\Omega u(\nabla u \cdot x)dx. \tag{2.7}$$

Agora, considerando $\gamma : [-1, 1] \to \partial\Omega$ de classe C^1, com $\gamma(0) = x$. Devido a $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $(u \circ \gamma)(t) = 0$, para todo $t \in [-1, 1]$. Deste modo, $(u \circ \gamma)'(t) = 0$, para todo $t \in [-1, 1]$. Em particular,

$$0 = (u \circ \gamma)'(0) = \nabla u(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla u(x) \cdot \gamma'(0).$$

Consequentemente, $\nabla u(x)$ é ortogonal ao espaço tangente $T_x\partial\Omega$. Disso e da definição de $v(x)$, garantimos a existência de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(x) = \alpha v(x),\ \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Como $|v(x)| = 1$, $\nabla u(x) = \pm|\nabla u(x)|v(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)(\nabla u \cdot v(x))ds &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (v(x) \cdot x)(v(x) \cdot v(x))ds \\ &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (v(x) \cdot x)ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla u \cdot x)\cdot \nabla u &= \nabla\bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg)\nabla u \\
&= \Bigg(\sum_{i=1}^{n}\bigg[\delta_{1i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}\bigg], \ldots, \sum_{i=1}^{n}\bigg[\delta_{ni}\frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}\bigg]\Bigg)\nabla u \\
&= |\nabla u|^2 + x_1\bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_1}\bigg) + \cdots + x_n\bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_n}\bigg) \\
&= |\nabla u|^2 + x_1\bigg(\frac{|\nabla u|^2}{2}\bigg)_{x_1} + \cdots + x_n\bigg(\frac{|\nabla u|^2}{2}\bigg)_{x_n} \\
&= |\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j\bigg(\frac{|\nabla u|^2}{2}\bigg)_{x_j} \\
&= |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\nabla(|\nabla u|^2)\cdot x.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \nabla(\nabla u\cdot x)\cdot\nabla u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(|\nabla u|^2)\cdot x dx.$$

Por isso e por $\text{div}(|\nabla u|^2 x) = \nabla(|\nabla u|^2)\cdot x + |\nabla u|^2 \cdot n$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla(\nabla u\cdot x)\cdot\nabla u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \text{div}(|\nabla u|^2 x) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\cdot n dx.$$

Da Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), decorre que

$$\int_\Omega \nabla(\nabla u\cdot x)\cdot\nabla u dx = \Big(1-\frac{n}{2}\Big)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 (x\cdot v(x))ds. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) e (2.8) em (2.7), vemos que

$$\begin{aligned}
\Big(1-\frac{n}{2}\Big)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x\cdot v(x))ds &= \int_\Omega u^{2^*-1}(\nabla u\cdot x)dx + \lambda\int_\Omega u(\nabla u\cdot x)dx \\
&= \frac{1}{2^*}\int_\Omega \nabla(u^{2^*})\cdot x dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \nabla(u^2)\cdot x dx.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

No entanto, div$(u^{2^*}x) = \nabla(u^{2^*}) \cdot x + nu^{2^*}$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla(u^{2^*}) \cdot x dx = \int_\Omega \text{div}(u^{2^*}x) dx - n \int_\Omega u^{2^*} dx.$$

Utilizando a Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), garantimos que

$$\int_\Omega \nabla(u^{2^*}) \cdot x dx = -n \int_\Omega u^{2^*} dx. \tag{2.11}$$

Agora, notando que div$(u^2 \cdot x) = \nabla(u^2) \cdot x + nu^2$, segue, da Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), que

$$\int_\Omega \nabla(u^2) \cdot x dx = -n \int_\Omega u^2 dx. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), temos

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot v(x)) ds = -\frac{n}{2^*} \int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{\lambda n}{2} \int_\Omega u^2 dx. \tag{2.13}$$

Por hipótese, u satisfaz $-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}$. Logo,

$$-u\Delta u = u^{2^*} + \lambda u^2.$$

Consequentemente,

$$-\int_\Omega u \Delta u dx = \int_\Omega u^{2^*} dx + \int_\Omega \lambda u^2 dx. \tag{2.14}$$

Agora, notando que div$(u\nabla u) = u\Delta u + \nabla u \cdot \nabla u$, segue, da Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = -\int_\Omega u \Delta u dx. \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega u^{2^*} dx + \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Disso e de (2.13), concluímos que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left[\int_\Omega u^{2^*} dx + \int_\Omega \lambda u^2 dx \right] - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot v(x)) ds \\ = -\frac{n}{2^*} \int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{\lambda n}{2} \int_\Omega u^2 dx. \end{aligned}$$

Finalmente, do fato de $1-\dfrac{n}{2}=-\dfrac{n}{2^*}$, decorre que

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x\cdot v(x))ds=\lambda\int_\Omega u^2dx.$$

$\square$

No que segue, utilizando os Lemas 2.1.1 e 2.1.2, provaremos que não existe solução para (P_1), quando $\lambda\geq\lambda_1$ ou $\lambda\leq 0$ e Ω é estrelado em relação à origem de $\mathbb{R}^n$. Porém, antes, necessitamos da seguinte definição.

Definição 2.1.1. Dizemos que um conjunto aberto Ω é estrelado em relação à origem se, para cada $x\in\overline{\Omega}$, o segmento de reta $[0,x]=\{tx;0\leq t\leq 1\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.

Teorema 2.1.1. Seja $n\geq 3$. Se $\lambda\geq\lambda_1$ ou $\lambda\leq 0$ e Ω é estrelado em relação à origem de $\mathbb{R}^n$, então o problema (P_1) não possui solução.

Demonstração. Seja φ_1 uma autofunção de $-\Delta$ associada ao autovalor λ_1, com $\varphi_1>0$ em Ω. Suponha $\lambda\geq\lambda_1$ e que exista uma solução u de (P_1). Neste caso, por $\lambda_1>0$, $\lambda>0$. Além disso, $-\Delta u=\lambda u+u^{2^*-1}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por φ_1 e integrando sobre Ω, obtemos

$$-\int_\Omega\varphi_1\Delta udx=\int_\Omega\varphi_1u^{2^*-1}dx+\lambda\int_\Omega u\varphi_1dx. \tag{2.16}$$

Em virtude de div$(\varphi_1\nabla u)=\varphi_1\Delta u+\nabla u\cdot\nabla\varphi_1$, segue, da Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência), que

$$-\int_\Omega\varphi_1\Delta udx=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi_1dx. \tag{2.17}$$

Substituindo (2.17) em (2.16), vemos que

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi_1dx=\int_\Omega\varphi_1u^{2^*-1}dx+\lambda\int_\Omega u\varphi_1dx. \tag{2.18}$$

Por outro lado, φ_1 satisfaz $-\Delta\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$. Dessa forma,

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi_1dx=\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1dx. \tag{2.19}$$

Como $\text{div}(u\nabla\varphi_1) = u\Delta\varphi_1 + \nabla\varphi_1 \cdot \nabla u$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 dx = -\int_\Omega u\Delta\varphi_1 dx. \tag{2.20}$$

Combinando (2.20) e (2.19), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx. \tag{2.21}$$

Finalmente, substituindo (2.21) em (2.18), temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 u^{2^*-1} dx + \lambda \int_\Omega u\varphi_1 dx.$$

Do fato de u e φ_1 serem positivas em Ω, segue que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 u^{2^*-1} dx + \lambda \int_\Omega u\varphi_1 dx > \lambda \int_\Omega u\varphi_1 dx.$$

Assim,

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 dx > 0.$$

Logo, $\lambda_1 > \lambda$, o que contraria a hipótese de $\lambda \geq \lambda_1$. Portanto não existe solução para (P_1), quando $\lambda \geq \lambda_1$.

Agora, suponhamos que Ω seja estrelado em relação à origem, que $\lambda \leq 0$ e que exista uma solução u para (P_1). Disso e do Lema 2.1.2 (Identidade de Pohozaev), segue que

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot v(x)) ds = \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Como Ω é estrelado e $0 \in \text{int}(\Omega)$, segue que existe $\Omega' \subset \partial\Omega$ tal que $|\Omega'| > 0$ e $(x \cdot v(x)) > 0$, para todo $x \in \Omega'$. Disso e do Lema 0.0.2 (Lema de Hopf), decorre que $\nabla u(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Consequentemente, por $\lambda \leq 0$,

$$0 \geq \lambda \int_\Omega u^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot v(x)) ds > 0,$$

o que é um aburdo. Portanto, não existe solução para (P_1), quando Ω é estrelado em relação à origem e $\lambda \leq 0$. $\square$

A seguir, veremos um resultado de não existência de solução para o problema (P_1), quando $n = 3$, $\Omega = B_1$ e $0 < \lambda \leq \dfrac{\lambda_1}{4}$. Neste caso, o problema (P_1) é o seguinte

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \lambda u & \text{em } B_1 \\ u > 0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Teorema 2.1.2. Sejam $n = 3$ e $\Omega = B_1$. Se $\lambda \leq \dfrac{\lambda_1}{4}$, então o problema (P_1) não possui solução.

Demonstração. Suponha que exista u solução de (P_1). Como $\Omega = B_1$, utilizando um argumento similar ao da Observação 0.0.1, podemos reescrever o problema (P_1) da seguinte forma

$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{2}{r}v' = v^5 + \lambda v, & \text{se } r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{$P_{1'}$}$$

Considerando $\psi[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(r) = \text{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}} r)$, temos que ψ satisfaz o Lema 0.0.1, ou seja, vale a seguinte igualdade

$$\int_0^1 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) v^2 r^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^1 v^6 (r\psi - r^2\psi')dr + \frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2}. \tag{2.22}$$

Além disso, pela Observação 0.0.1, sabemos que $\lambda_1 = \pi^2$. Dessa forma, por $0 < \lambda \leq \dfrac{\pi^2}{4}$, temos que $0 < (4\lambda)^{\frac{1}{2}} \leq \pi$. Consequentemente,

$$\psi(1) = \text{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}}) \geq 0. \tag{2.23}$$

Ainda, da definição de ψ segue que

$$\frac{\psi'''}{4} + \lambda\psi' = \frac{-4\lambda(4\lambda)^{\frac{1}{2}}\cos((4\lambda)^{\frac{1}{2}} r)}{4} + \lambda(4\lambda)^{\frac{1}{2}}\cos((4\lambda)^{\frac{1}{2}} r) = 0.$$

Disso, de (2.23) e de (2.22), decorre que

$$\int_0^1 v^6 (r\psi - r^2\psi')dr \leq 0. \tag{2.24}$$

Por outro lado, a função $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, dada por $g(\theta) = \text{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)$, é crescente, já que $g'(\theta) = cos(\theta) + \theta\text{sen}(\theta) > 0$, para todo $\theta \in (0,\pi)$. Assim, como $g(0) = 0$, temos que

$g(\theta) > 0$, para todo $\theta \in (0, \pi)$. Logo,

$$r\psi - r^2\psi' = r[\text{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}}r) - (4\lambda)^{\frac{1}{2}}r\cos((4\lambda)^{\frac{1}{2}}r)] > 0, \ \forall\, r \in (0,1).$$

Com isso, concluímos que

$$\int_0^1 v^6(r\psi - r^2\psi')dr > 0,$$

o que é uma contradição com (2.24). Portanto, o problema $(P_{1'})$ não possui solução. $\square$

2.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA (P_1)

Na seção anterior, vimos alguns casos em que o problema (P_1) não possui solução. No que segue, nos preocuparemos em analisar separadamente os casos $n \geq 4$ e $n = 3$ para provar que, sob certas condições, o problema (P_1) possui solução.

Antes de darmos continuidade aos resultados de existência, ressaltamos que Del Pino e Dolbeault (2003) estabeleceram, para $1 < p < n$, a Desigualdade Ótima de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_r \leq \mathscr{A}(p,q,n)\|\nabla u\|_p^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta}, \tag{2.25}$$

para todo $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, sendo esse espaço o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, mediante a norma $\|\nabla u\|_p + \|u\|_q$, onde $p \leq q \leq \dfrac{p(n-1)}{n-p}$, $r = \dfrac{p(q-1)}{p-1}$, $\theta = \dfrac{n(q-p)}{(np-(n-p)q)(q-1)}$ e

$$\mathscr{A}(p,q,n) = \left(\frac{q-p}{p\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^{\theta}\left(\frac{pq}{n(q-p)}\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\frac{np-q(n-p)}{pq}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\Gamma\big(\frac{q(p-1)}{q-p}\big)\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)}{\Gamma\big(\frac{p-1}{p}\cdot\frac{np-q(n-p)}{q-p}\big)\Gamma\big(\frac{n(p-1)}{p}+1\big)}\right).$$

Além disso, as funções extremais para (2.25), isto é, funções não nulas em $D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ que fazem com que (2.25) se torne uma igualdade, são dadas por

$$u(x) = \alpha\omega(\beta(x - x_0)),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\omega(x) = \big(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\big)^{-\frac{p-1}{q-p}}$.

Para o caso no qual $q = \dfrac{(n-1)}{(n-p)}p$, obtemos, de (2.25), a Desigualdade Ótima de Sobolev, a saber,

$$\|u\|_{p^*} \leq \mathscr{A}(p,n)\|\nabla u\|_p, \ \forall\, u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.26}$$

Vale ressaltar que a Desigualdade Ótima de Sobolev foi estudada de modo independente por Aubin (1976a) e Talenti (1976). No que segue, necessitaremos apenas da desigualdade (2.26), quando $p = 2$.

2.2.1 Caso $n \geq 4$

Nesta subseção, mostraremos a existência de solução para o problema (P_1), quando $n \geq 4$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, sendo $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$. Dessa caracterização, decorre que

$$\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Como $0 < \lambda < \lambda_1$,

$$0 \leq (\lambda - \lambda_1)\|u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2, \ \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

o que garante que o conjunto $\{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 ; \|u\|_{2^*} = 1\}$ é limitado inferiormente, quando $0 < \lambda < \lambda_1$. Com isso, podemos definir

$$S_\lambda = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 ; \|u\|_{2^*} = 1\}.$$

Para provarmos o primeiro resultado de existência de solução, precisaremos da próxima proposição.

Proposição 2.2.1. Se $n \geq 4$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, então $S_\lambda < \mathscr{A}(2, n)^{-2}$.

Demonstração. Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, consideremos

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}, \tag{2.27}$$

e tomemos, para $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se } |x| > 2\delta \text{ e } x \in \Omega \\ 1 \quad , & \text{se } |x| < \delta \text{ e } x \in \Omega. \end{cases}$$

A seguir, analisaremos $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno.

(i) Análise de $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$:

Temos que, para cada $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varepsilon + |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} - (n-2)x_i\varphi(\varepsilon + |x|^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}^2 \\ &= |\nabla \varphi|^2(\varepsilon + |x|^2)^{2-n} - 2(n-2)\varphi(\varepsilon + |x|^2)^{1-n}(x \cdot \nabla\varphi) + (n-2)^2\frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla \varphi|^2(\varepsilon + |x|^2)^{2-n}dx - 2(n-2)\int_\Omega \varphi(\varepsilon + |x|^2)^{1-n}(x \cdot \nabla\varphi)dx \\ &\quad + (n-2)^2\int_\Omega \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

A partir deste momento, estimaremos cada uma das integrais do lado direito dessa igualdade, separadamente. Iniciaremos com a terceira parcela.

$$\int_\Omega \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}dx \leq \int_\Omega \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}dx = \varepsilon^{1-n}\int_\Omega \frac{|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x|^2}{(1 + |\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x|^2)^n}dx.$$

Por isso, pela Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis) e pelo fato da função $x \mapsto \dfrac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}$ ser integrável sobre $\mathbb{R}^n$ (veja exemplo 0.0.2),

$$\int_\Omega \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}dx \leq \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n}dx \leq \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n}dx.$$

onde $\Omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. E assim,

$$(n-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx \leq (n-2)^2\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx. \tag{2.29}$$

Agora, passaremos a estimar a segunda parcela do lado direito da igualdade (2.28).
Visto que $n \geq 4$, $(\varepsilon+|x|^2)^{1-n} \leq (|x|^2)^{1-n} = |x|^{2-2n}$ em $B_\delta^{\complement} \cap \Omega$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \varphi(\varepsilon+|x|^2)^{1-n}(\nabla\varphi(x)\cdot x)dx \right| &\leq \int_\Omega |\varphi(x)|(\varepsilon+|x|^2)^{1-n}|x\cdot\nabla\varphi|dx \\ &\leq C_3 \int_{B_\delta^{\complement}\cap\Omega} (\varepsilon+|x|^2)^{1-n}|x|dx \\ &\leq C_3 \int_{B_\delta^{\complement}\cap\Omega} \frac{1}{|x|^{2n-3}}dx < \infty, \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde C_3 é uma constante. Analogamente, prova-se que a primeira parcela do lado direito de (2.28) satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2(\varepsilon+|x|^2)^{2-n}dx < \infty.$$

Por essa análise, concluímos que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq (n-2)^2\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx + C_4, \tag{2.31}$$

onde $C_4 > 0$ é uma constante que não depende de ε.
(ii) Análise de $\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2$:
Ora,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx &= \int_\Omega \frac{|\varphi|^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx \\ &= \int_{B_\delta\cap\Omega} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx + \int_{B_\delta^{\complement}\cap\Omega} \frac{|\varphi(x)|^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx \\ &\geq \int_{B_\delta\cap\Omega} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}dx = \varepsilon^{-n}\int_{B_\delta} \frac{1}{(1+|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x|^2)^n}dx. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Disso e da Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx &\geq \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\int_{B_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}\cap\Omega}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx.\\ &= \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx - \int_{B^{\complement}_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}\cap\Omega}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\right). \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Tal separação é possível, já que as duas últimas integrais são finitas. Para provar isso, utilizamos a a Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea) e a Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis). Com efeito,

$$\int_{B^{\complement}_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}\cap\Omega}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx = \int_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}^{\infty}\int_{S_r}\frac{1}{(1+r^2)^n}dsdr \leq C\int_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}^{\infty} r^{-n-1}dr \leq C\varepsilon^{\frac{n}{2}},$$

onde $C>0$ é uma constante. Disso e da igualdade (2.33), segue que

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx \geq \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right). \qquad (2.34)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $x\mapsto x^{\frac{2}{2^*}}$, obtemos uma constante $C_5>0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_5\varepsilon^{\frac{n}{2}}.$$

Disso e da desigualdade (2.34), concluímos que

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|^2_{2^*} &= \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \geq \left(\varepsilon^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}}\\ &= \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_5\varepsilon > 0. \qquad (2.35)\end{aligned}$$

(iii) Análise de $\|u_\varepsilon\|^2_2$:

Pela definição de u_ε e pela Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B_\delta\cap\Omega}\frac{1}{(\varepsilon+|x|)^{n-2}}dx + \int_{B^{\complement}_\delta\cap\Omega}\frac{|\varphi|^2}{(\varepsilon+|x|)^{n-2}}dx\\ &\geq \int_{B_\delta\cap\Omega}\frac{1}{(\varepsilon+|x|)^{n-2}}dx\\ &= \varepsilon^{2-\frac{n}{2}}\int_{B_{\delta\varepsilon^{-1}\backslash 2}\cap\Omega}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx. \qquad (2.36)\end{aligned}$$

A partir deste momento, vamos separar esta análise em dois casos. Inicialmente, consideramos o caso $n = 4$.

Da desigualdade (2.36) e da Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea), decorre que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx &\geq \int_{B_{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \cap \Omega} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx = \overline{C} \int_0^{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \\
&= \overline{C} \Big[\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr + \int_1^{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \Big] \\
&\geq C_6 + \overline{C} \int_1^{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{r^3}{4r^4} dr = C_6 + \frac{\overline{C}}{4} \int_1^{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{1}{r} dr \\
&= C_7 - C_8 \ln(\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde $\overline{C}, C_6, C_7$ e C_8 são constantes positivas.

Agora, quando $n > 4$, temos, por (2.36), que

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx \geq \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx - \int_{B^{\complement}_{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \cap \Omega} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx \Big].$$

No entanto, pela Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea),

$$\int_{B^{\complement}_{\delta\varepsilon^{-1\backslash 2}} \cap \Omega} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx = \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \int_{S_r} \frac{1}{(1+r^2)^{n-2}} ds dr \leq C \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{3-n} = C_9 \varepsilon^{\frac{n}{2}-2},$$

onde C e C_9 são constantes positivas. Logo,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx \geq \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx - C_9 \varepsilon^{\frac{n}{2}-2} \Big] = \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx - C_9.$$

Agora, voltamos nossa atenção para $Q_\lambda(u_\varepsilon)$. Substituindo (2.31) e (2.35) em (2.27), encontramos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{(n-2)^2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n} dx + C_4 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} - C_5 \varepsilon}.$$

No entanto, sabemos que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é uma função extremal para a Desigualdade Ótima de Sobolev, ou seja, h satisfaz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} = \mathscr{A}(2,n)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 dx.$$

Mas,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = (2-n)x_i(1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Assim,

$$|\nabla h|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}^2 = (2-n)^2|x|^2(1+|x|^2)^{-n}.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}(2,n)^{-2} = \frac{(2-n)^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|}{(1+|x|^2)^n} dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} := \frac{a}{b}.$$

Para tornar as contas mais simples, vamos considerar

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}} dx = d.$$

Novamente, dividiremos nossa análise em dois casos. Para n = 4, temos

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(2,n)^{-2} &\leq \frac{a\varepsilon^{-1} + C_4 - \lambda(C_7 - C_8 \ln(\varepsilon))}{b\varepsilon^{-1} - C_5\varepsilon} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{bC_4 - \lambda bC_7 + \lambda bC_8 ln(\varepsilon) + aC_5\varepsilon}{b^2\varepsilon^{-1} - bC_5\varepsilon} \\ &= \varepsilon \frac{(C_4 - \lambda C_7)b + \lambda bC_8 ln(\varepsilon) + aC_5\varepsilon}{b^2 - bC_5\varepsilon^2} < 0, \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, para $n > 4$, temos

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(2,n)^{-2} &\leq \frac{a\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + C_4 - \lambda(d\varepsilon^{2-\frac{n}{2}} - C_9)}{b\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} - C_5\varepsilon} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{bC_4 + \lambda bC_9 + aC_5\varepsilon - \lambda bd\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}}{b^2\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} - bC_5\varepsilon} \\ &= \varepsilon \frac{(bC_4\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} + \lambda bC_9\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} + aC_5\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} - \lambda bd)}{b^2 - bC_5\varepsilon^{\frac{n}{2}}} < 0, \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, em ambos os casos, encontramos $Q_\lambda(u_\varepsilon) < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$, para ε suficientemente pequeno. Consequentemente, da definição de S_λ decorre que $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$. $\square$

Fazendo uso da Proposição 2.2.1, provaremos um caso no qual o problema (P_1) tem solução, quando $n \geq 4$.

Teorema 2.2.1. Se $n \geq 4$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, então o problema (P_1) possui solução.

Demonstração. Sejam $\mathscr{H} = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_{2^*} = 1\}$ e $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Visto que $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, temos para cada $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$J(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \geq \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 \geq 0. \tag{2.37}$$

Com isso, J é limitado inferiormente e assim $S_\lambda = \inf\limits_{u \in \mathscr{H}} J(u)$ está bem definido. Da definição de S_λ, existe $(u_k) \subset \mathscr{H}$ tal que $J(u_k) \to S_\lambda$ e $S_\lambda < J(u_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(J(u_k))$ é limitada em $\mathbb{R}$. Ainda, da desigualdade (2.37)

$$C \geq |J(u_k)| \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u_k\|_2^2, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Por isso e pelo espaço $H_0^1(\Omega)$ ser reflexivo temos, pela Proposição 0.0.8, que, ao longo de uma subsequência,

$$u_k \rightharpoonup u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos as medidas $\nu_k = |u_k|^{2^*} dx$ e $\mu_k = |\nabla u_k|^2 dx$. Essas medidas são limitadas em $\mathscr{M}(\Omega)$, pois

$$\|\nu_k\| = \sup_{u \in \mathscr{C}_0(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\nu_k \cdot u|}{\|u\|_\infty} \leq \int_\Omega |u_k|^{2^*} dx = \|u_k\|_{2^*}^{2^*} < C_1$$

e

$$\|\mu_k\| = \sup_{u \in \mathscr{C}_0(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mu_k \cdot u|}{\|u\|_\infty} \leq \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx = \|\nabla u_k\|_2^2 < C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Assim, pela Proposição 0.0.1, temos que $\nu_k \rightharpoonup \nu$ e $\mu_k \rightharpoonup \mu$ ao longo de subsequências, sendo ν e μ medidas limitadas em Ω. Logo, pela Proposição 0.0.2 (Concentração de Compacidade), existem um conjunto no máximo enumerável $\mathscr{J}$, uma família de pontos $\{x_j; j \in \mathscr{J}\} \subset \overline{\Omega}$ e famílias de números positivos $\{\nu_j; j \in \mathscr{J}\}$, $\{\mu_j; j \in \mathscr{J}\}$, de modo que

(i) $\nu = |u_0|^{2^*}dx + \sum\limits_{j\in\mathscr{J}} \nu_j \delta_{x_j}$;

(ii) $\mu \geq |\nabla u_0|^2 dx + \sum\limits_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \delta_{x_j}$;

(iii) $\mathscr{A}(2,n)^{-2}(\nu_j)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_j, \forall j \in \mathscr{J}$.

Neste caso, δ_{x_j} representa a medida de Dirac.

Do fato de $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ ser limitada e de $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ temos que $u_k \to u_0$ em $L^2(\Omega)$ ao longo de uma subsequência. Portanto, $\|u_k\|_2^2 \to \|u_0\|_2^2$. Disso, de (iii) e do fato de $\lambda > 0$, decorre que

$$
\begin{aligned}
J(u_0) &\leq \liminf \|\nabla u_k\|_2^2 - \lambda \|u_0\|_2^2 - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf \|\nabla u_k\|_2^2 - \lambda \limsup \|u_k\|_2^2 - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf \|\nabla u_k\|_2^2 + \lambda \liminf(-\|u_k\|_2^2) - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&\leq \liminf(\|\nabla u_k\|_2^2 - \lambda \|u_k\|_2^2) - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf J(u_k) - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&= S_\lambda - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \\
&\leq S_\lambda - \mathscr{A}(2,n)^{-2} \sum_{j\in\mathscr{J}} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}.
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

Por outro lado, integrando (i), obtemos

$$
\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \sum_{j\in\mathscr{J}} \nu_j = 1, \tag{2.39}
$$

o que implica em $\sum\limits_{j\in\mathscr{J}} \nu_j \leq 1$ e $\displaystyle\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \leq 1$.

Afirmamos que $\mathscr{J} = \varnothing$. De fato, suponhamos $\mathscr{J} \neq \varnothing$. Da Proposição 2.2.1, sabemos que $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$. Logo, devido à desigualdade (2.38),

$$
J(u_0) < S_\lambda \Big(1 - \sum_{j\in\mathscr{J}} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}\Big).
$$

Em virtude de $\nu_j \leq \sum\limits_{j\in\mathscr{J}} \nu_j \leq 1$, de $\dfrac{2}{2^*} < 1$ e de $n \geq 4$, segue que $\nu_j \leq \nu_j^{\frac{2}{2^*}}$, para todo $j \in \mathscr{J}$.

Disso e de (2.39), concluímos que

$$J(u_0) < S_\lambda\bigg(1-\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j^{\frac{2}{2^*}}\bigg) \le S_\lambda\bigg(1-\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j\bigg) = S_\lambda\int_\Omega |u_0|^{2^*}dx \le S_\lambda\bigg(\int_\Omega |u_0|^{2^*}dx\bigg)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Portanto,

$$0 \le J(u_0) < S_\lambda\|u_0\|_{2^*}^{2^*} \le S_\lambda\|u_0\|_{2^*}^2.$$

Se $\|u_0\|_{2^*} = 0$, chegamos a uma contradição e se $\|u_0\|_{2^*} \neq 0$, temos uma nova contradição, pois teríamos

$$J\bigg(\frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}}\bigg) < S_\lambda = \inf_{u\in\mathscr{H}} J(u), \text{ com } \frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}} \in \mathscr{H}.$$

Consequentemente, $\mathscr{J} = \varnothing$. Por isso e por (2.39), concluímos que $\|u_0\|_{2^*} = 1$. Logo, $u_0 \in \mathscr{H}$. Além disso, da desigualdade (2.38), decorre que

$$J(u_0) \le \inf_{u\in\mathscr{H}} J(u).$$

Disso e da definição de ínfimo, temos que $J(u_0) = S_\lambda$.

Considerando o funcional $G : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$G(u) = \int_\Omega |u|^{2^*}dx,$$

sabemos que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach e que J e G são de classe C^1. Ainda, u_0 é um ponto de mínimo de J restrito a $\mathscr{H} = G^{-1}(G(u_0))$. Com isso, podemos aplicar a Proposição 0.0.16 (Multiplicador de Lagrange). Já que a primeira possibilidade de tal proposição não é verdadeira para $v = u_0$, garantimos a existência de $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0)\cdot v = kG'(u_0)\cdot v, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$2\int_\Omega \nabla u_0\cdot\nabla v dx - 2\lambda\int_\Omega u_0 v dx = 2^*k\int_\Omega u_0^{2^*-1}v dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Ao tomarmos $\overline{u} = mu_0$, onde m satisfaz $\dfrac{m^{2-2^*}2^*k}{2} = 1$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla v dx - \lambda\int_\Omega \overline{u} v dx = \int_\Omega \overline{u}^{2^*-1}v dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.40}$$

Portanto, $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (P_1). Além do mais, como podemos considerar $u_0 \geq 0$, segue que $\overline{u} \geq 0$. Utilizando resultados de regularidade clássicos, vemos que $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$. Assim, pela Proposição 0.0.15 (Teorema da Divergência) e por (2.40),

$$\int_\Omega -\Delta \overline{u} v dx = \int_\Omega (\lambda \overline{u} + \overline{u}^{2^*-1}) v dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, $-\Delta \overline{u} = \lambda \overline{u} + \overline{u}^{2^*-1}$, $\overline{u} \geq 0$ e $\overline{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Ainda, pela Proposição 0.0.22 (Princípio do Máximo Forte), segue que $\overline{u} > 0$ em Ω. Isso mostra que (P_1) possui solução. □

2.2.2 Caso $n = 3$

Nesta subseção, provaremos que o problema (P_1) possui solução quando $n = 3$ e $\dfrac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$. Primeiramente, provaremos um resultado auxiliar, semelhante ao que foi usado na subseção anterior, porém consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ como sendo a bola de centro 0 e raio 1, isto é, $\Omega = B_1$.

Proposição 2.2.2. Se $n = 3$ e $\dfrac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$, então $S_\lambda < \mathscr{A}(2,3)^{-2}$.

Demonstração. Seja, para cada $u \in H_0^1(B_1) \setminus \{0\}$,

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_6^2}, \tag{2.41}$$

E, consideremos, para $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon : B_1 \to \mathbb{R}$, definida por

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\varphi(r) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} r\right)$ e $r = |x|$. A ideia para a prova dessa proposição consistirá na análise de $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

(i) Análise de $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$:

Temos, para $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(r) = \varphi'(r)(\varepsilon + r^2)^{-\frac{1}{2}} - \varphi(r) x_i (\varepsilon + r^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Dessa forma,

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 = \frac{\varphi'(r)^2}{(\varepsilon + r^2)} - 2\frac{\varphi'(r)\varphi(r)r}{(\varepsilon + r^2)^2} + \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}.$$

Integrando ambos os membros dessa última igualdade sobre B_1 e utilizando a Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis), ao tomarmos $\int_{S_r} ds = r^2 \int_{S_1} ds = r^2\omega$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dr &= \int_{B_1} \frac{\varphi'(r)^2}{(\varepsilon + r^2)} dx - 2\int_{B_1} \frac{\varphi'(r)\varphi(r)r}{(\varepsilon + r^2)^2} dx + \int_{B_1} \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dx \\
&= \int_0^1 \int_{S_r} \frac{\varphi'(r)^2}{(\varepsilon + r^2)} dsdr - 2\int_0^1 \int_{S_r} \frac{\varphi'(r)\varphi(r)r}{(\varepsilon + r^2)^2} dsdr + \int_0^1 \int_{S_r} \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dsdr \\
&= \omega\Bigg[\int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr - 2\int_0^1 \frac{\varphi'(r)\varphi(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr + \int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr\Bigg].
\end{aligned}$$

No entanto, ao utilizarmos integração por partes, vemos que

$$2\int_0^1 \frac{\varphi'(r)\varphi(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr = -\Bigg[\int_0^1 \varphi(r)^2 \bigg(\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\bigg) dr\Bigg].$$

Substituindo isso na igualdade anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \omega\Bigg[\int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + \int_0^1 \varphi(r)^2 \bigg(\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{3r^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\bigg) dr\Bigg] \\
&= \omega\int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + 3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\
&\leq \omega\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + 3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Ainda, pela Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr &\leq \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \varepsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds \\
&\leq \varepsilon^{\frac{-3}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (2.43) em (2.42), obtemos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dr \leq \omega\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + 3\omega\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds. \qquad (2.44)$$

(ii) Análise de $\|u_\varepsilon\|_6^2$:

Pela definição de u_ε e pela Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea), temos

$$\begin{aligned}\int_{B_1}|u_\varepsilon|dx &= \int_0^1\int_{S_r}\frac{\varphi(r)^6}{(\varepsilon+r^2)^3}dsdr\\ &= \omega\int_0^1\frac{(\varphi(r)^6-1)r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}dr+\omega\int_0^1\frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}dr\\ &:= I_1+I_2.\end{aligned}$$

Agora, pela definição de φ, existe $C>0$ tal que

$$\left|\frac{\varphi(r)^6-1}{r^2}\right|<C,\ \forall\, r\in(0,1].$$

Assim, utilizando a Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis), obtemos

$$|I_1|\le\omega C\int_0^1\frac{r^4}{(\varepsilon+r^2)^3}dr=\omega C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{s^4}{(1+s^2)^3}ds\le C_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainda,

$$I_2=\omega\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{s}{(1+s^2)^3}ds\ge\omega\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty\frac{s}{(1+s^2)^3}ds-C_2.$$

Portanto, existe $C_3>0$ tal que

$$\int_{B_1}|u_\varepsilon|^6dx\ge\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\left[\int_0^\infty\frac{s}{(1+s^2)^3}ds-C_3\varepsilon\right].$$

Por isso e pelo Teorema do Valor Médio aplicado à função $x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$, obtemos uma constante $\overline{C}>0$, de modo que

$$\|u_\varepsilon\|_6^2=\left(\int_{B_1}|u_\varepsilon|^6dx\right)^{\frac{1}{3}}\ge\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left(\omega\int_0^\infty\frac{s^2}{(1+s^2)^3}ds\right)^{\frac{1}{3}}-\overline{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{2.45}$$

(iii) Análise de $\|u_\varepsilon\|_2^2$:

Pela definição de u_ε, pela Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea) e pela Proposição 0.0.18

(Mudança de Variáveis), temos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{B_1} |u_\varepsilon|^2 dx = \omega \int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^2}{\varepsilon + r^2} dr \\ &= \omega \int_0^1 \varphi(r)^2 dr + \omega \int_0^1 \varphi(r)^2 \left(\frac{r^2}{\varepsilon + r^2} - 1 \right) dr \\ &= \omega \int_0^1 \varphi(r)^2 dr - \omega \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\varphi(s\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2}{1+s^2} ds \\ &\geq \omega \int_0^1 \varphi(r)^2 dr - \widehat{C} \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $\widehat{C} > 0$ é uma constante.

Agora, substituindo (2.44), (2.45) e (2.46) em (2.41), encontramos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{\omega \displaystyle\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + 3\omega \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds - \lambda \omega \int_0^1 \varphi(r)^2 dr + \lambda \widehat{C} \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left(\omega \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds \right)^{\frac{1}{3}} - \overline{C} \varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.47}$$

Sabemos que $h : B_1 \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}}$, é uma função extremal para a Desigualdade de Sobolev. Consequentemente,

$$\mathscr{A}(2,3)^{-2} = \frac{\|\nabla h\|_2^2}{\|h\|_6^2},$$

onde

$$\|h\|_6^2 = \left(\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Além disso, como

$$\int_0^\infty \frac{s^4}{(1+s^2)^3} ds = 3\frac{\pi}{16} = 3 \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds,$$

temos

$$\|\nabla h\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^3} dx = \omega \int_0^\infty \frac{s^4}{(1+s^2)^3} ds = 3\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds.$$

Logo,

$$\mathscr{A}(2,3)^{-2} = \frac{3\omega \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds}{\left(\omega \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds \right)^{\frac{1}{3}}} := \frac{a}{b}.$$

Ainda, pelas definições de φ e de λ_1, sabemos que

$$\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr - \lambda \int_0^1 \varphi(r)^2 dr = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 (1-\varphi(r)^2)dr - \lambda \int_0^1 \varphi(r)^2 dr = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\lambda}{2} < 0.$$

Assim, ao considerarmos

$$d = \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr - \lambda \int_0^1 \varphi(r)^2 dr < 0,$$

podemos reescrever (2.47) como

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{\omega d + a\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \lambda \widehat{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{b\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \overline{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Deste modo, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(2,3)^{-2} &\leq \frac{\omega d + a\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \lambda \widehat{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{b\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \overline{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{\omega d b + \lambda \widehat{C} b\varepsilon^{\frac{1}{2}} + a\overline{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{b\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \overline{C}\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < 0, \end{aligned}$$

Portanto, $S_\lambda < \mathscr{A}(2,3)^{-2}$. □

Teorema 2.2.2. Se $n = 3$, $\Omega = B_1$ e $\dfrac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$, então o problema (P_1) possui solução.

Demonstração. A demonstração deste Teorema é análoga à demonstração do Teorema 2.2.1. A diferença é que aqui deve ser usada a Proposição 2.2.2 ao invés da Proposição 2.2.1. Por este motivo, omitiremos tal prova. □

3 PROBLEMA ELÍPTICO NÃO LINEAR

Neste capítulo, provaremos alguns resultados que garantem a existência de solução para o seguinte poblema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_2)$$

onde $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ cumpre as seguintes condições:

$(f.1)$ $f(x,0) = 0$, para todo $x \in \Omega$;

$(f.2)$ Para cada $M > 0$, $\sup\{|f(x,t)|; (x,t) \in \Omega \times [0,M]\} < \infty$;

$(f.3)$ f satisfaz as condições de Carathéodory, isto é, $f(\cdot,t)$ é mensurável sobre Ω, para cada $t \in [0,\infty)$ fixado e $f(x,\cdot)$ é contínua em $[0,\infty)$, para quase todo $x \in \Omega$;

$(f.4)$ $f(x,t)$ é uma perturbação de ordem inferior a t^{2^*-1}, isto é, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t^{2^*-1}} = 0$.

Vê-se que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com $n \geq 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,t) = \lambda t$, satisfaz $(f.1) - (f.4)$. Com isso, o problema (P_1), dado no Capítulo 2, é um caso particular do problema (P_2).

Ressaltamos que soluções do problema (P_2) correspondem a pontos críticos do funcional $\Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*} - F(x,u)\right] dx, \tag{3.1}$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt,$ para $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$.

Além das condições acima apresentadas, dependendo da dimensão, faremos uso de hipóteses adicionais.

3.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA (P_2)

Nesta seção, assumiremos que

$$f(x,t) = a(x)t + g(x,t), \tag{3.2}$$

$$a \in L^\infty(\Omega), \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(x,t)}{t} = 0, \text{ uniformemente em } \Omega \tag{3.4}$$

e

$$\lim_{t\to \infty} \frac{g(x,t)}{t^{2^*-1}} = 0, \text{ uniformemente em } \Omega. \tag{3.5}$$

Também assumiremos que o operador $-\Delta - a(x)$ possui um autovalor positivo, digamos α. De outro modo, suporemos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\int_\Omega [|\nabla u|^2 - au^2]dx \geq \alpha \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Devido à Proposição 0.0.10 (Desigualdade de Poincaré), existe $\alpha' > 0$ tal que

$$\int_\Omega [|\nabla u|^2 - au^2]dx \geq \alpha' \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Como estamos em busca de soluções positivas de (P_2), os valores de $f(x,t)$, para $t < 0$ são irrelevantes. Em virtude da condição $(f.1)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0]$. Deste modo, podemos considerar

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt, \ \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Para a demonstração do teorema que garante a existência de solução do problema (P_2) se tornar menos extensa, faremos uso de alguns resultados preliminares. Iniciaremos provando o seguinte lema.

Lema 3.1.1. Assuma a validade de (3.2)-(3.5). Então existe uma constante $\mu \geq 0$, suficientemente grande, de modo que

$$-f(x,t) \leq \mu t + t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Por (3.2), para $x \in \Omega$ e $t \geq 0$,

$$|f(x,t)| = |a(x)t + g(x,t)| \leq |a(x)|t + |g(x,t)|.$$

Por (3.3), $a \in L^\infty(\Omega)$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$|a(x)| \leq C, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Com isso,

$$|f(x,t)| \leq Ct + |g(x,t)|, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } \forall\, t \geq 0. \tag{3.8}$$

Por (3.4), $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(x,t)}{t} = 0$ uniformemente em Ω. Equivalentemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$,

$$0 < t < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(x,t)}{t}\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |g(x,t)| < \varepsilon t. \tag{3.9}$$

Já, por (3.5), $\lim\limits_{t \to \infty} \left|\dfrac{g(x,t)}{t^{2^*-1}}\right| = 0$, uniformemente em Ω. De outro modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$t > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(x,t)}{t^{2^*-1}}\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |g(x,t)| < \varepsilon t^{2^*-1}. \tag{3.10}$$

Considerando $\varepsilon = 1$ em (3.9) e (3.10), podemos considerar $\delta < 1 < M$, sem perda de generalidade. Deste modo, temos alguns casos a analisar. Caso $t \in (0,\delta)$, temos, por (3.9), que $|g(x,t)| < t$, para todo $x \in \Omega$. Logo, por (3.8),

$$-f(x,t) \leq |f(x,t)| \leq Ct + t \leq (C+1)t + t^{2^*}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Caso $t \in (M,\infty)$, devido a (3.10), $|g(x,t)| < t^{2^*-1}$, para todo $x \in \Omega$. Por conseguinte, dado que $1 < M < t$,

$$-f(x,t) \leq |f(x,t)| \leq Ct + t^{2^*-1} \leq Ct + t^{2^*}M \leq MCt + t^{2^*}, \;\forall\, x \in \Omega.$$

Caso $t \in [\delta, M]$, temos, por $(f.2)$, que existe $k > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq k, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } \forall\, t \in [\delta, M].$$

Se $\delta \leq t \leq 1$, então $|g(x,t)| \leq \dfrac{k}{\delta}t$, e se $1 \leq t \leq M$, então $|g(x,t)| \leq kt$, independente de $x \in \Omega$.

Finalmente, ao considerarmos $\mu = \max\left\{\frac{k}{\delta} + C, k + C, C + 1, MC\right\}$, teremos

$$-f(x,t) \leq \mu t + t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } \forall\, t \geq 0.$$

$\square$

Para prosseguirmos, provaremos outro lema que requer a seguinte variação do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz sem a condição (PS).

Teorema 3.1.1. Sejam E um espaço de Banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Suponha que existam uma vizinhança U de 0 em E e uma constante ρ, tais que

$$\phi(u) \geq \rho, \;\; \forall\, u \in \partial U \tag{3.11}$$

e

$$\phi(0) < \rho \text{ e } \phi(v) < \rho, \text{ para algum } v \notin U. \tag{3.12}$$

Seja

$$c = \inf_{P \in \mathscr{P}} \max_{w \in P} \phi(w) \geq \rho, \tag{3.13}$$

onde $\mathscr{P}$ denota a classe de todos os caminhos contínuos de 0 até v. Então, existe uma sequência $(u_j) \subset E$ tal que

$$\phi(u_j) \to c \text{ e } \phi'(u_j) \to 0 \text{ em } E^*. \tag{3.14}$$

A demonstração desse teorema é análoga à do teorema original, que pode ser encontrada em Willem (1996), aqui a omitiremos. A seguir, veremos o lema que será utilizado na prova do teorema de existência de solução.

Lema 3.1.2. Assuma a validade de (3.2)-(3.6) e suponha que exista $v_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}. \tag{3.15}$$

Então, o problema

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^{2^*-1} + f(x,u^+) + \mu u^+ \text{ em } (H_0^1(\Omega))^*, \tag{3.16}$$

possui ao menos uma solução fraca.

Demonstração. Provaremos inicialmente que o funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado a este problema, a saber,

$$\phi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*} - F(x,u^+) - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2\right]dx,$$

cumpre as hipóteses do Teorema 3.1.1. Vale ressaltar que ϕ está bem definida e é de classe C^1.

Verificação de (3.11). Por (3.4) e (3.5), temos que dado $\varepsilon > 0$, existem δ e $M > 0$, com $\delta < M$, tais que

$$0 < t < \delta \Rightarrow |g(x,t)| < \varepsilon t, \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e

$$t > M \Rightarrow |g(x,t)| < \varepsilon t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Caso $t \in [\delta, M]$, utilizando argumentos semelhantes aos dados no lema anterior, garantimos a existência de $k > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq k, \text{q.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, t \in [\delta, M].$$

Com isso, se $t \in [0, \delta)$, então

$$g(x,t) \leq |g(x,t)| \leq \varepsilon t, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Se $t \in (M, \infty)$, então

$$g(x,t) \leq |g(x,t)| \leq \varepsilon t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

E se $t \in [\delta, M]$, então $\frac{1}{M} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\delta}$. Logo, $\frac{k}{t^{2^*-1}} \leq \frac{k}{\delta^{2^*-1}}$. Ao tomarmos $C_1 = \frac{k}{\delta^{2^*-1}}$, concluímos que

$$g(x,t) \leq |g(x,t)| \leq k \leq C_1 t^{2^*-1}, \ \forall\, (x,t) \in \Omega \times [\delta, M].$$

Deste modo, ao considerarmos $C_2 = \max\{\varepsilon, C_1\}$, temos

$$g(x,t) \leq \varepsilon t + C_2 t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, t \geq 0.$$

Disso, decorre que

$$f(x,t) \leq a(x)t + \varepsilon t + C_2 t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, t \geq 0.$$

Por conseguinte, para quase todo ponto $x \in \Omega$ e qualquer $u \geq 0$,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt \leq \int_0^u [a(x)t + \varepsilon t + C_2 t^{2^*-1}]dt = \frac{a(x)}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{C_2}{2^*}u^{2^*}.$$

Diante disso, vemos que

$$\phi(u) \geq \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} - \frac{a(x)}{2}(u^+)^2 - \frac{\varepsilon}{2}(u^+)^2 - \frac{C_2+1}{2^*}(u^+)^{2^*} - \frac{\mu}{2}(u^+)^2 + \frac{\mu}{2}u^2\right]dx.$$

Mas, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega (|\nabla u^+|^2 + |\nabla u^-|^2)dx$. Consequentemente,

$$\phi(u) \geq \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u^+|^2}{2} - \frac{a(x)}{2}(u^+)^2 - \frac{\varepsilon}{2}(u^+)^2 - \frac{C_2}{2^*}(u^+)^{2^*} + \frac{|\nabla u^-|^2}{2} - \frac{\mu}{2}(u^+)^2 + \frac{\mu}{2}u^2\right]dx.$$

Por (3.7), obtemos

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u^+|^2 - a(x)(u^+)^2\right]dx \geq \frac{\alpha'}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx, \text{ com } \alpha' > 0.$$

Ainda, devido a $\displaystyle\int u^2 dx = \int (u^+)^2 dx + \int (u^-)^2 dx$ e a (3.7), existe $\beta > 0$, de modo que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u^-|^2}{2} - \frac{\mu}{2}(u^+)^2 + \frac{\mu}{2}u^2\right]dx \\ &\geq \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u^-|^2}{2} - \frac{\mu}{2}(u^-)^2\right]dx \\ &\geq \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx. \end{aligned}$$

Considerando $m = \min\left\{\frac{\alpha'}{2}, \frac{\beta}{2}\right\}$, obtemos

$$I_1 + I_2 \geq m \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Combinando esta igualdade com a desigualdade (3.17), concluímos que

$$\phi(u) \geq m \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{C_2 + 1}{2^*} \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Pelo Proposição 0.0.12, existem constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$\|u\|_2 \leq k_1 \|u\|_{H_0^1} \text{ e } \|u\|_{2^*} \leq k_2 \|u\|_{H_0^1}, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma,

$$\phi(u) \geq \left(m - \frac{k_1 \varepsilon}{2}\right) \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{k_2(C_2+1)}{2^*} \|u\|_{H_0^1}^{2^*}, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, ao tomarmos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \dfrac{2m}{k_1}$, $m - \dfrac{k_1\varepsilon}{2} > 0$. Como $2 < 2^*$, existe $k > 0$ tal que $2^* = 2 + k$. Considerando $0 < r < \dfrac{\left(m - \frac{k_1\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{k}}}{\left(\frac{k_2(C_2+1)}{2^*}\right)^{\frac{1}{k}}}$, vemos que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é tal que $\|u\|_{H_0^1} = 1$, então

$$\phi(u) = \left(m - \frac{k_1\varepsilon}{2}\right) r^2 - \frac{k_2(C_2+1)}{2^*} r^{2^*} = r^2 \left[\left(m - \frac{k_1\varepsilon}{2}\right) - \frac{k_2(C_2+1)}{2^*} r^k\right] > 0.$$

Assim, ao considerarmos $U = B(0; r)$ em $H_0^1(\Omega)$, existe $\rho > 0$, de modo que

$$\phi(u) = r^2 \left[\left(m - \frac{k_1\varepsilon}{2}\right) - \frac{k_2(C_2+1)}{2^*} r^k\right] \geq \rho > 0, \ \forall\, u \in \partial U,$$

o que garante a validade de (3.11).

Verificação de (3.12). Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, com $u \geq 0$ temos que

$$\lim_{t \to \infty} \phi(tu) = -\infty.$$

De fato, por (3.3) e (3.5), existem constantes positivas M, K e C tais que

$$|a(x)| \leq C, \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

$$t > M \Rightarrow |g(x,t)| < \varepsilon t^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

e

$$0 \leq t \leq M \Rightarrow |g(x,t)| \leq K, \; \forall \, x \in \Omega.$$

Deste modo,

$$-f(x,t) \leq Ct + \varepsilon t^{2^*-1} + K, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \; \forall \, t \geq 0.$$

E assim, para quase todo $x \in \Omega$ e qualquer $u \geq 0$,

$$-F(x,u) = -\int_0^u f(x,t)dt \leq \frac{C}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{2^*}u^{2^*} + Ku.$$

Donde segue, para $t \geq 0$ e $\varepsilon < 1$, que

$$\phi(tu) \leq \int_\Omega \left[\frac{t|\nabla u|^2}{2} + \frac{t^2\mu}{2}u^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}(u^+)^{2^*} + \frac{t^{2^*}}{2^*}(u^+)^{2^*} + \frac{t^2C}{2}(u^+)^2 + tK(u^+) - \frac{t^2\mu}{2}(u^+)^2 \right] dx$$

$$= \int_\Omega \sigma(t,u)dx.$$

Em virtude de $2^* > 2$ e $2^* > 1$, segue que $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t,u) = -\infty$. Logo, pela desigualdade anterior, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(tu) = -\infty$. Assim, existem vários $v's$ que satisfazem a condição (3.12). No entanto, para propósitos posteriores, necessitamos de um v especial, da forma $v = v_0 t_0$, onde v_0 é dado como em (3.30), isto é, $v_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ é positiva e tal que

$$\sup_{t\geq 0} \phi(tv_0) < \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n},$$

e $t_0 > 0$ é grande o suficiente de modo que $v \notin B(0;r)$ e $\phi(v) \leq 0$.

Avaliemos, agora, o nível minimax, ou seja, a condição (3.13). Dado que $c = \inf\limits_{P\in\mathscr{P}} \max\limits_{w\in P} \phi(w)$, onde $\mathscr{P}$ é a classe de todos os caminhos de 0 até v_0,

$$c \leq \sup_{t\geq 0} \phi(tv_0) < \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}. \tag{3.17}$$

Dessa forma, tendo verificado as hipóteses do Teorema 3.1.1, obtemos uma sequência $(u_j) \subset$

$H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi(u_j) \to c$ e $\phi'(u_j) \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))^*$. De outro modo,

$$\int_\Omega \left[\frac{|\nabla u_j|^2}{2} + \frac{\mu}{2}u_j^2 - \frac{1}{2^*}(u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) - \frac{\mu}{2}(u_j^+)^2\right]dx = c + o(1), \tag{3.18}$$

e

$$-\Delta u_j + \mu u_j - (u_j^+)^{2^*-1} - f(x, u_j^+) - \mu u_j^+ = \xi_j, \tag{3.19}$$

onde $\xi_j \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))^*$.

Afirmação 1. A sequência (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|u_j\|_{H_0^1} \leq C, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, multiplicando (3.19) por $\dfrac{1}{2}u_j$ obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 + \frac{\mu}{2}u_j^2 - \frac{1}{2}(u_j^+)^{2^*} - \frac{1}{2}f(x, u_j^+)u_j^+ - \frac{\mu}{2}(u_j^+)^2\right]dx = \frac{1}{2}(\xi_j \cdot u_j). \tag{3.20}$$

Fazendo a diferença entre (3.18) e (3.20), temos

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)(u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) + \frac{1}{2}f(x, u_j^+)u_j^+\right]dx = c + o(1) - \frac{1}{2}(\xi_j \cdot u_j).$$

Por isso, por $\xi_j \in (H_0^1(\Omega))^*$ e por $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{n}$,

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{n}(u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) + \frac{1}{2}f(x, u_j^+)u_j^+\right]dx \leq c + o(1) + \|\xi_j\|_{(H_0^1)^*}\|u_j\|_{H_0^1}.$$

De outro modo,

$$\frac{1}{n}\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx \leq \int_\Omega \left[F(x, u_j^+) - \frac{1}{2}f(x, u_j^+)u_j^+\right]dx + c + o(1) + \|\xi_j\|_{(H_0^1)^*}\|u_j\|_{H_0^1}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, de (3.5), dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \varepsilon t^{2^*-1} + C, \ \text{ q.t.p } x \in \Omega, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.22}$$

Consequentemente, existe $D>0$ de modo que

$$|F(x,u)| \leq \frac{\varepsilon}{2^*}u^{2^*}+D, \text{ q.t.p } x\in\Omega, \ \forall\, u\geq 0. \tag{3.23}$$

Combinando (3.22) e (3.23) com a igualdade (3.21), obtemos uma constante $C_1>0$, de forma que

$$\frac{1}{n}\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx \leq \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2^*}(u_j^+)^{2^*}-\frac{\varepsilon}{2}(u_j^+)^{2^*}\right]dx+o(1)+\|\xi_j\|_{(H_0^1)^*}\|u_j\|_{H_0^1}+C_1.$$

Como $(\xi_j)\subset (H_0^1(\Omega))^*$ é convergente, (ξ_j) é limitada em $(H_0^1(\Omega))^*$, ou seja, existe $C_2>0$ tal que $\|\xi_j\|_{(H_0^1)^*}\leq C_2$, para todo $j\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\frac{1+\varepsilon}{n}\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx \leq o(1)+C_2\|u_j\|_{H_0^1}+C_1.$$

Considerando $K_1=\max\left\{\dfrac{C_2 n}{1+\varepsilon},\dfrac{C_1 n}{1+\varepsilon}\right\}$, obtemos

$$\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx \leq o(1)+K_1\|u_j\|_{H_0^1}+K_1. \tag{3.24}$$

De (3.18), temos

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_j\|^2_{H_0^1}+\frac{\mu}{2}\int_\Omega [u_j^2-(u_j^+)^2]dx = c+o(1)+\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx+\int_\Omega F(x,u_j^+)dx.$$

Disso, de (3.23) e (3.24), decorre que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_j\|^2_{H_0^1} &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_j\|^2_{H_0^1}+\frac{\mu}{2}\int_\Omega [u_j^2-(u_j^+)^2]\\
&\leq c+o(1)+\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}+\int_\Omega\left[\frac{\varepsilon}{2^*}(u_j^+)^{2^*}+D\right]\\
&\leq C_4+C_5\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}+o(1)\\
&\leq K_2\|u_j\|_{H_0^1}+K_2,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $C_4,\ C_5$ e K_2 são constantes positivas.

Caso $(u_j)\subset H_0^1(\Omega)$ não seja limitada, $\|u_j\|_{H_0^1}\to\infty$, quando $j\to\infty$, ao longo de uma subsequência. Suponhamos, sem perda de generalidade, $\|u_j\|_{H_0^1}\to\infty$, quando $j\to\infty$. Por isso e por (3.25), para $u_j \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{2}\|u_j\|_{H_0^1} \leq \frac{K_2}{\|u_j\|_{H_0^1}} + K_2,$$

o que é um absurdo, já que $\|u_j\|_{H_0^1} \to \infty$ e $\dfrac{K_2}{\|u_j\|_{H_0^1}} + K_2 \to K_2$, quando $j \to \infty$. Portanto, a sequência $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ deve ser limitada. Assim, vale a afirmação em questão.

Em virtude da validade da Afirmação 1, $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Assim, por $H_0^1(\Omega)$ ser reflexivo temos, pela Proposição 0.0.8, que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, ao longo de uma subsequência,

$$u_j \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Por isso e pela Proposição 0.0.12 temos, ao longo de uma subsequência, que

$$u_j \to u \text{ em } L^q, \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Disso, decorre que

$$u_j \to u \ \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Afirmação 2. A sequência $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfaz o seguinte:

$$(u_j^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1} \ \text{ em } \ (L^{2^*}(\Omega))^* \tag{3.26}$$

e

$$f(x, u_j^+) \rightharpoonup f(x, u^+) \ \text{ em } \ (L^{2^*}(\Omega))^*. \tag{3.27}$$

Com efeito, provaremos que (3.26) ocorre. A prova de (3.27) é análoga e por isso a omitiremos. Demonstrar (3.26) é equivalente a provar que

$$\int_\Omega (u_j^+)^{2^*-1} \varphi dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} \varphi dx, \ \forall\, \varphi \in L^{2^*}(\Omega). \tag{3.28}$$

Para garantirmos a validade de (3.28), utilizaremos a Proposição 0.0.6 (Convergência de Vitali).

E para tal, consideremos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $h_j, h : \Omega \to \mathbb{R}$, definidas por

$$h_j(x) = (u_j^+)^{2^*-1}(x)\varphi(x) \ \text{ e } \ h(x) = (u^+)^{2^*-1}(x)\varphi(x).$$

Como $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, $h_j(x) \to h(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, h_j é integrável. Isso decorre da Proposição 0.0.4 (Desigualdade de Hölder), pois

$$\left| \int_\Omega h_j dx \right| \leq \int_\Omega |u_j^+|^{2^*-1}|\varphi| dx \leq \left(\int_\Omega (u_j^+)^{2^*} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_\Omega \varphi^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} < \infty,$$

já que $u_j \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$, $\varphi \in L^{2^*}(\Omega)$. Ainda, devido à imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$ e à limitação de $\|u_j\|_{H_0^1}$, existe $C > 0$ tal que $\|u_j^+\|_{2^*}^{2^*-1} \leq C$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\left| \int_A h_j dx \right| \leq \|u_j\|_{2^*}^{2^*-1} \left(\int_A \varphi^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left(\int_A \varphi^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}, \ \forall\, j \in \mathbb{N}, \tag{3.29}$$

e para cada $A \subset \Omega$.

Finalmente, devido a $\varphi \in L^{2^*}(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$A \subset \Omega \ \text{ e } \ |A| < \delta \Rightarrow \left| \left(\int_A \varphi^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \right| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Disso e de (3.29), concluímos que

$$A \subset \Omega \ \text{ e } \ |A| < \delta \Rightarrow \left| \int_A h_j dx \right| < \varepsilon, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Portanto a Proposição 0.0.6 se aplica e daí segue a validade da Afirmação 2.

Finalmente, fazendo $j \to \infty$ em (3.19), obtemos

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^{2^*-1} + f(x, u^+) + \mu u^+, \ \text{em } (H_0^1(\Omega))^*.$$

$\square$

Teorema 3.1.2. Assuma a validade de (3.2)-(3.6) e suponha que existe $v_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \Psi(t v_0) < \frac{1}{n} \mathscr{A}(2, n)^{-n}. \tag{3.30}$$

Então o problema (P_2) possui solução.

Demonstração. Do Lema 3.1.2 temos que

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^{2^*-1} + f(x, u^+) + \mu u^+, \text{ em } (H_0^1(\Omega))^*. \tag{3.31}$$

Por isso e pelo Lema 3.1.1, concluímos que

$$-\Delta u + \mu u \geq (u^+)^{2^*-1} - (u^+)^{2^*-1} - \mu u^+ + \mu u^+ = 0.$$

Logo, a Proposição 0.0.21 (Princípio do Máximo Fraco) nos garante que $u \geq 0$ em Ω. Disso e de (3.31), segue que

$$-\Delta u + \mu u = u^{2^*-1} + f(x, u) + \mu u, \text{ em } (H_0^1(\Omega))^*,$$

ou seja, u satisfaz a equação

$$-\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u).$$

Para finalizarmos a demonstração do teorema em questão, basta-nos mostrar que u não é identicamente nula. Dessa forma, através da Proposição 0.0.22 (Princípio do Máximo Forte), concluímos que $u > 0$ em Ω.

Suponha que $u \equiv 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, $u_j \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Ainda, por (3.22) e (3.23), decorre que dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega f(x, u_j^+) u_j^+ dx \right| \leq \varepsilon \int_\Omega (u_j^+)^{2^*} dx + C \int_\Omega u_j^+ dx$$

e

$$\left| \int_\Omega F(x, u_j^+) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^*} \int_\Omega (u_j^+)^{2^*} dx + C \int_\Omega u_j.$$

Como (u_j) é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$, segue que ao fazermos $j \to \infty$,

$$\int_\Omega f(x, u_j^+) u_j^+ dx \to 0 \tag{3.32}$$

e

$$\int_\Omega F(x, u_j^+) dx \to 0. \tag{3.33}$$

Devido à $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ ser limitada, $(\|u_j\|_{H_0^1}) \subset \mathbb{R}$ também é limitada. Com isto, podemos extrair uma subsequência de (u_j), que denotaremos da mesma forma, por simplicidade, de modo que

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 \to l, \tag{3.34}$$

onde $l \in \mathbb{R}$ é não negativo.

Ao fazermos $j \to \infty$ em (3.18) e (3.20), temos

$$\int (u_j^+)^{2^*} \to l \tag{3.35}$$

e

$$\frac{l}{2} - \frac{l}{2^*} = c.$$

Por conseguinte, $l = nc$.

Ainda, pela Desiguladade Ótima de Sobolev,

$$\|\nabla u_j\|_2^2 \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2}\|u_j\|_{2^*}^2 \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2}\|u_j^+\|_{2^*}^2 = \mathscr{A}(2,n)^{-2}\left(\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Disso, de (3.34) e de (3.35) decorre que

$$l \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2} l^{\frac{2}{2^*}}.$$

Por isso e pelo fato de $l = nc$, concluímos que

$$c \geq \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n},$$

o que é um absurdo, pois, por (3.17), $c < \dfrac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}$. Portanto u não é identicamente nula em $H_0^1(\Omega)$ e daí segue a validade do teorema em questão. $\square$

A próxima observação garante que o Teorema 3.1.2 é uma generalização do Teorema 2.2.1 do Capítulo 2.

Observação 3.1.1. Quando $f(x,t) = \lambda t$, a condição (3.6) corresponde a $\lambda < \lambda_1$ enquanto que (3.30) é equivalente a $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$.

De fato, temos pela caracterização de f, $a(x) = \lambda$. Logo, por (3.6),

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq (\alpha + \lambda) \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Por isso e pela Proposição 0.0.10 (Desigualdade de Poincaré),

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \geq (\alpha + \lambda) \int_\Omega u^2, \quad \forall \, u \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, $\lambda_1 \geq \alpha + \lambda$, e assim $\lambda_1 > \lambda$, já que $\alpha > 0$.

Agora, por (3.1),

$$\begin{aligned}
\Psi(tv_0) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla(tv_0)|^2 - \frac{1}{2^*}|tv_0|^{2^*} - \lambda\frac{1}{2}|tv_0|^2\right] \\
&= \int_\Omega \left[\frac{t^2}{2}|\nabla v_0|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}|v_0|^{2^*} - \lambda\frac{t^2}{2}|v_0|^2\right] \\
&= \frac{t^2}{2}(\|\nabla v_0\|_2^2 - \lambda\|v_0\|_2^2) - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v_0\|_{2^*}^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}t^2 A - \frac{t^{2^*}}{2^*}B,
\end{aligned}$$

onde $A = \|\nabla v_0\|_2^2 - \lambda\|v_0\|_2^2 > 0$, para $\lambda < \lambda_1$, e $B = \|v_0\|_{2^*}^{2^*} > 0$.

Derivando Ψ em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = tA - t^{2^*-1}B.$$

Devido a $2^* > 2$, $2^* - 1 > 1$. Logo,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow tA - t^{2^*-1}B = 0 \Rightarrow t(A - t^{2^*-2}B) = 0.$$

Com isso, $t = 0$ e $t = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ são os possíveis pontos críticos de Ψ. Ainda, por $2^* > 2$,

$\Psi(tv_0) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. E mais,

$$\begin{aligned}
\psi\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} v_0\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} A - \frac{1}{2^*}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} B \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}} - \frac{1}{2^*}\frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{n}{2}} > 0 = \Psi(0),
\end{aligned}$$

ou seja, $\Psi\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} v_0\right) > \Psi(0)$. Por conseguinte, $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} v_0$ é ponto de máximo de Ψ. De outro modo,

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_0) = \Psi\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} v_0\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Por isso e por (3.30),

$$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}.$$

No entanto, da definição de S_λ, decorre que $S_\lambda \leq \frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}$. Portanto, da desigualdade anterior segue que $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$.

Observação 3.1.2. Se u é solução do problema (P_2), então ou

$$\Psi(u) = c \tag{3.36}$$

ou

$$\Psi(u) \leq c - \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}. \tag{3.37}$$

De fato, se (u_j) é uma sequência como na prova do Teorema 3.1.2 então, pela continuidade de f na segunda variável, $f(x,u_j^+) \to f(x,u^+)$. Ainda, $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ e, devido à f ser de ordem inferior a t^{2^*-1}, dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$f(x,u_j^+)u_j^+ \leq \varepsilon |u_j^+|^{2^*} + C.$$

Em virtude de (u_j^+) ser limitada em $L^{2^*}(\Omega)$, existe h de modo que

$$f(x,u_j^+)u_j^+ \leq h(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Pela Proposição 0.0.5 (Convergência Dominada de Lebesgue),

$$\int_\Omega f(x,u_j^+)u_j^+dx \to \int_\Omega f(x,u^+)u^+dx \ \text{ e } \ \int_\Omega F(x,u_j^+)dx \to \int_\Omega F(x,u)dx. \tag{3.38}$$

Agora, se $v_j = u_j - u$, então

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2dx = \int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega |\nabla v_j|^2dx + o(1). \tag{3.39}$$

E, pela Proposição 0.0.13, decorre que

$$\int_\Omega (u_j^+)^{2^*}dx = \int_\Omega u^{2^*}dx + \int_\Omega (v_j^+)^{2^*}dx + o(1). \tag{3.40}$$

Combinando (3.18) e (3.20) com (3.38), (3.39) e (3.40), obtemos

$$\Psi(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_j|^2dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_j^+)^{2^*} = c + o(1) \tag{3.41}$$

e

$$\int_\Omega [|\nabla u|^2 - u^{2^*} - f(x,u)u]dx + \int_\Omega [|\nabla v_j|^2 - (v_j^+)^{2^*}]dx = o(1). \tag{3.42}$$

Mas, por u ser solução de (P_2),

$$\int_\Omega |\nabla u|^2dx = \int_\Omega [u^{2^*} + f(x,u)u]dx. \tag{3.43}$$

Consequentemente, ao combinarmos (3.42) e (3.43),

$$\Psi(u) + \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v_j|^2dx = c + o(1). \tag{3.44}$$

Utilizando (3.41) e (3.44), obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - F(x,u)\right]dx + \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v_j|^2dx = c + o(1), \tag{3.45}$$

Com isso, podemos assumir a existência de $K \geq 0$ tal que, ao longo de uma subsequência,

$$\int_\Omega |\nabla v_j|^2dx \to K \ \text{ e } \ \int_\Omega (v_j^+)^{2^*}dx \to K.$$

Mas, pela Desigualdade Ótima de Sobolev, sabemos que

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2}\|v_j^+\|_{2^*}^2.$$

Logo, ao fazermos $j \to \infty$,

$$K \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2}K^{\frac{2}{2^*}} \Rightarrow K^{1-\frac{2}{2^*}} \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2} \Rightarrow K^{\frac{2}{n}} \geq \mathscr{A}(2,n)^{-2} \Rightarrow K \geq \mathscr{A}(2,n)^{-n},$$

desde que $K > 0$.

Se $K = 0$, então por (3.45), $\Psi(u) = 0$, ou seja, vale (3.36). Se $K > 0$, então, novamente por (3.45),

$$\Psi(u) + \frac{1}{2}K = c.$$

Logo,

$$\Psi(u) = c - \frac{1}{n}K \leq c - \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n} < 0,$$

o que prova (3.37).

Vale ressaltar que, em alguns casos, a condição (3.37) não é satisfeita. Por exemplo, se assumirmos que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}f(x,t)t + \frac{1}{n}t^{2^*},\ \forall\, t \geq 0, \tag{3.46}$$

então, se u é solução de (P_2), vale (3.43). E assim,

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - F(x,u)\right]dx \\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}u^{2^*} + \frac{1}{2}f(x,u)u - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - F(x,u)\right]dx \\
&\geq \int_\Omega \left[\frac{1}{n}u^{2^*} + \frac{1}{2}f(x,u)u - \frac{1}{2}f(x,u)u - \frac{1}{n}u^{2^*}\right]dx = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, assumindo a condição (3.46), necessariamente teremos $\Psi(u) = 0$, quando u for solução de (P_2). Além disso, a função $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,t) = a(x)t + \mu t^q$, com $a \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \geq 0$ e $1 \leq q < 2^* - 1$, cumpre a condição (3.46). Finalmente, ao assumirmos (3.46), o argumento dado na prova de (3.36) e (3.37), garante que Ψ satisfaz a consição $(PS)_c$ para todo $c < \dfrac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}$.

3.1.1 Condição Fundamental

O problema (P_2) pode ser resolvido com o auxílio do Teorema 3.1.2. Para isso, necessitamos da validade da condição (3.30). Nesta subseção, apresentaremos uma proposição que oferece condições suficientes para que essa condição seja satisfeita.

Proposição 3.1.1. Suponha que f satisfaça (3.2)-(3.5). Além disso, suponha que exista uma função $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,t) \geq h(t) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0, \tag{3.47}$$

onde A é um subconjunto aberto e não vazio de Ω e H, dada por $H(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$, cumpra

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} H\left[\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right] s^{n-1} ds = \infty. \tag{3.48}$$

Então a condição (3.30) é satisfeita.

Demonstração. Inicialmente, lembramos que se f é dada por $f(x,t) = \lambda t$, então a condição (3.30) é equivalente a

$$\frac{\|\nabla v_0\|_2^2 - \lambda \|v_0\|_2^2}{\|v_0\|_{2^*}^2} < \mathscr{A}(2,n)^{-2}.$$

Com isso, podemos considerar v_0 de maneira similar ao que foi feito na Proposição 2.2.1. Suponhamos $0 \in A$ e seja $\varphi \in C^\infty(A)$, de modo que $\varphi(x) = 1$, para todo $x \in B_{r_0}$, com $r_0 > 0$. Sejam, ainda, para cada $\varepsilon > 0$,

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \tag{3.49}$$

e

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x)}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}}. \tag{3.50}$$

Mostraremos que v_ε satisfaz a condição (3.30), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Com cálculos similares aos das Proposições 2.2.1 e 2.2.2, garantimos a existência de $K = K(n)$ tal que

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*} = \frac{K}{\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}} + O(1), \text{ se } n \geq 3, \tag{3.51}$$

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \mathscr{A}(2,n)^{-2} + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}), \text{ se } n \geq 3 \tag{3.52}$$

e

$$\|v_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} O(\varepsilon) & \text{se } n \geq 5 \\ O(\varepsilon|\ln \varepsilon|) & \text{se } n = 4 \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) & \text{se } n = 3. \end{cases} \tag{3.53}$$

Agora, se $X_\varepsilon = \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2$, então, para cada $t \geq 0$,

$$\Psi(tv_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}X_\varepsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*} - \int_A F(x, tv_\varepsilon)dx.$$

Por isso e por $f(x, tv_\varepsilon) \geq 0$, $F(x, tv_\varepsilon) \geq 0$. Consequentemente,

$$\Psi(tv_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2}X_\varepsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*}.$$

E assim, $\lim\limits_{t\to\infty} \Psi(tv_\varepsilon) = -\infty$. Portanto, existe $t_\varepsilon \geq 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) = \Psi(t_\varepsilon v_\varepsilon).$$

Caso $t_\varepsilon = 0$, $\sup\limits_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) = 0$ e daí segue o resultado desejado. Seja então $t_\varepsilon > 0$. Diferenciando a função $t \mapsto \Psi(tv_\varepsilon)$ em $t = t_\varepsilon$, obtemos

$$t_\varepsilon X_\varepsilon - t_\varepsilon^{2^*-1} - \int_\Omega f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon dx = 0. \tag{3.54}$$

Como $f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon \geq 0$, $t_\varepsilon X_\varepsilon \geq 0$. O que implica em

$$t_\varepsilon \leq X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}. \tag{3.55}$$

Por conseguinte, a função $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2 X_\varepsilon - \dfrac{1}{2^*}t^{2^*}$ é crescente no intervalo $[0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}]$. Ainda, ao denotarmos $Y_\varepsilon = \sup_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) = \Psi(t_\varepsilon v_\varepsilon)$, obtemos por (3.55) e por (3.52),

$$\begin{aligned}
Y_\varepsilon &= \frac{1}{2}t_\varepsilon^2 X_\varepsilon - \frac{1}{2^*}t_\varepsilon^{2^*} - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}\Big)^2 X_\varepsilon - \frac{1}{2^*}\Big(X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}\Big)^{2^*} - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)X_\varepsilon^{\frac{2^*}{2^*-2}} - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \\
&= \frac{1}{n}X_\varepsilon^{\frac{n}{2}} - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \\
&= \frac{1}{n}(\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2)^{\frac{n}{2}} - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \\
&\leq \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n} + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Afirmação 1. Se $\varepsilon \to 0$, então $t_\varepsilon \to \mathscr{A}(2,n)^{\frac{-2}{2^*-2}}$.

De fato, de (3.54), decorre que

$$X_\varepsilon - t_\varepsilon^{2^*-2} - \int_\Omega \frac{f(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}dx = 0.$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\int_A \frac{f(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}dx \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \qquad (3.57)$$

Utilizando (3.2)-(3.5) vemos que, dado $\delta > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \delta t^{2^*-1} + Ct, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } \forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$\left|\int_A \frac{f(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}dx\right| \leq \delta t_\varepsilon^{2^*-2}\|v_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} + C\|v_\varepsilon\|_2^2 = \delta t_\varepsilon^{2^*-2} + C\|v_\varepsilon\|_2^2.$$

De (3.53), temos que $\|v_\varepsilon\|_2^2 \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Assim, dado $\gamma > 0$, basta tomar $\delta = \dfrac{\gamma}{t_\varepsilon^{2^*-2}}$ e teremos

$$\left|\int_A \frac{f(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}dx\right| < \gamma,$$

o que prova (3.57) e, consequentemente, prova a afirmação em questão.

Agora, de (3.49)-(3.51), temos que existe uma constante $T > 0$ tal que $t_\varepsilon v_\varepsilon = \dfrac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$.

Disso e de (3.47), temos

$$\int_A F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx \geq \int_{B_{r_0}} H\bigg(\frac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\bigg)dx. \tag{3.58}$$

Por isso e por (3.56), segue que

$$Y_\varepsilon \leq \frac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n} + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int_{B_{r_0}} H\bigg(\frac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\bigg)dx. \tag{3.59}$$

Deste modo, para concluirmos que $Y_\varepsilon < \dfrac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}$ e provar a validade da proposição, basta-nos mostrar que $O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) < \displaystyle\int_{B_{r_0}} H(t_\varepsilon v_\varepsilon)dx$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Ou seja, devemos provar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\int_{B_{r_0}} H\bigg(\frac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\bigg)dx = \infty. \tag{3.60}$$

Pela Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea) e pela Proposição 0.0.18 (Mudança de Variáveis), fazendo $r = \varepsilon^{1\backslash 2}s$ e considerando $\displaystyle\int_{S_r} ds = r^{n-1}\int_{S_1} ds = r^{n-1}\omega$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\int_{B_{r_0}} H\bigg(\frac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\bigg)dx &= \frac{\omega}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{r_0} H\bigg(\frac{T\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon+r^2)^{\frac{n-2}{2}}}\bigg)r^{n-1}dr \\
&= \omega\varepsilon\int_0^{r_0\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\Bigg[T\bigg(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\bigg)^{\frac{n-2}{2}}\Bigg]s^{n-1}ds.
\end{aligned}$$

Reescrevendo ε através de constantes apropriadas, vemos que (3.60) é equivalente a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{r_1\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\Bigg[T\bigg(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\bigg)^{\frac{n-2}{2}}\Bigg]s^{n-1}ds = \infty, \tag{3.61}$$

para alguma constante $r_1 > 0$. No caso em que $r_1 \geq 1$, temos que (3.61) é uma consequência de (3.48), pois pode ser reescrito da seguinte forma

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[\varepsilon\int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\Bigg[T\bigg(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\bigg)^{\frac{n-2}{2}}\Bigg]s^{n-1}ds + \varepsilon\int_{\varepsilon^{-1\backslash 2}}^{r_1\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\Bigg[T\bigg(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\bigg)^{\frac{n-2}{2}}\Bigg]s^{n-1}ds\Bigg] = \infty,$$

Por outro lado, se $0 < r_1 < 1$, considerando

$$Z_\varepsilon = \varepsilon\int_{r_1\varepsilon^{-1\backslash 2}}^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\Bigg[T\bigg(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\bigg)^{\frac{n-2}{2}}\Bigg]s^{n-1}ds,$$

e usando integração por partes, concluímos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|Z_\varepsilon| \leq \varepsilon C_1 H(C_1 \varepsilon^{\frac{n-2}{4}})\varepsilon^{-\frac{n}{2}}.$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que Z_ε é limitada. Dessa forma, se $0 < r_1 < 1$, também temos que (3.61) é uma consequência de (3.48).
Logo, (3.60) está verificada e assim $Y_\varepsilon < \dfrac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}$, ou seja, $\sup\limits_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) < \dfrac{1}{n}\mathscr{A}(2,n)^{-n}$. $\square$

Para utilizarmos o Teorema 3.1.2, devemos garantir a validade da condição (3.30). Com isso, basta-nos verificar que a hipótese (3.48) da Proposição 3.1.1 é satisfeita. Para isso, vamos tratar separadamente os casos $n \geq 5$, $n = 4$ e $n = 3$.

3.1.2 Caso $n \geq 5$

Nesta subseção, consideremos $n \geq 5$ e assumiremos as seguintes hipóteses adicionais

$$f(x,t) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0 \tag{3.62}$$

e

$$f(x,t) \geq \mu > 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \in I, \tag{3.63}$$

onde $A \subset \Omega$ é um conjunto aberto e não vazio, $I \subset (0,\infty)$ é um intervalo aberto e não vazio e $\mu > 0$ é uma constante.

Corolário 3.1.1. Assuma a validade de (3.2)-(3.6), (3.62) e (3.63). Então o problema (P_2) possui solução.

Demonstração. De (3.62) e (3.63), decorre que

$$f(x,t) \geq \mu\chi_I(t) = h(t) \text{ em } A,\ \forall\, t \geq 0,$$

onde χ_I é a função característica de I. Assim,

$$H(u) = \int_0^u h(t)dt \geq \mu \int_0^u dt = \mu u \geq \beta,\ \forall\, u \geq B,$$

onde $\beta, B > 0$ são constantes.

Pela Proposição 3.1.1, a condição (3.30) é válida. Consequentemente, pelo Teorema 3.1.2, (P_2) possuirá solução desde que condição (3.48) se verifique.

Verificação de (3.48). Ora,
$$H\left[\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right] \geq \beta,$$

quando $\dfrac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)} \geq B^{\frac{2}{n-2}}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Em particular, para todo $s \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$, onde $C > 0$, temos

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\left[\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right] s^{n-1} ds \geq \beta\varepsilon \int_0^{C\varepsilon^{-1\backslash 4}} s^{n-1} ds = C_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{4}},$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante. Portanto, como $n \geq 5$, ao fazermos $\varepsilon \to 0$, a condição (3.48) é satisfeita. $\square$

3.1.3 Caso $n = 4$

No que segue, assumiremos $n = 4$,

$$f(x,t) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0 \tag{3.64}$$

e uma das seguintes hipóteses

$$f(x,t) \geq \mu t, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \in [0, B] \tag{3.65}$$

ou

$$f(x,t) \geq \mu t, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \in [B, \infty), \tag{3.66}$$

onde $A \subset \Omega$ é um conjunto aberto e não vazio e $\mu, B > 0$ são constantes.

Corolário 3.1.2. Assuma a validade de (3.2)-(3.6), (3.64) e de uma dentre as hipóteses (3.65) e (3.66). Então o problema (P_2) possui solução.

Demonstração. Temos que

$$f(x,t) \geq \mu t \chi_I(t) = h(t), \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0,$$

onde $I = [0, B]$ ou $I = [B, \infty)$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$H(u) = \int_0^u h(t)dt = \frac{1}{2}\mu u^2, \;\; \forall\, u \in [0, B] \tag{3.67}$$

ou

$$H(u) = \int_B^u h(t)dt = \frac{1}{2}\mu(u^2 - B^2), \;\; \forall\, u \in [B, \infty). \tag{3.68}$$

Através da Proposição 3.1.1, garantimos a validade da condição (3.30). Com isso, se provarmos a condição (3.48), então, pelo Teorema 3.1.2, temos que (P_2) terá solução.

Verificação de (3.48) para o caso (3.67). Para ε pequeno, temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right) s^3 ds &\geq \frac{1}{2}\mu\varepsilon \int_{B^{-1\backslash 2}\varepsilon^{-1\backslash 4}}^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^3 ds \\
&= \frac{1}{2}\mu \int_{B^{-1\backslash 2}\varepsilon^{-1\backslash 4}}^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{s^3}{(1+s^2)^2} ds \\
&\geq \frac{1}{2}\mu \int_{B^{-1\backslash 2}\varepsilon^{-1\backslash 4}}^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{s^3}{4s^4} ds = \frac{1}{8}\mu \int_{B^{-1\backslash 2}\varepsilon^{-1\backslash 4}}^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} \frac{1}{s} ds \\
&= C_1 - C_2 1\mathrm{n}\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas. Portanto, ao fazermos $\varepsilon \to 0$, obtemos a validade da condição (3.48).

Verificação de (3.48) para o caso (3.68). Para ε pequeno temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right) s^3 ds &\geq \frac{1}{4}\mu\varepsilon \int_0^{B\varepsilon^{-1\backslash 4}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^3 ds \\
&= \frac{1}{4}\mu \left[\int_0^1 \frac{s^3}{(1+s^2)^2} ds + \int_1^{B\varepsilon^{-1\backslash 4}} \frac{s^3}{(1+s^2)^2} ds \right] \\
&\geq C_3 + \frac{1}{4}\mu \int_1^{B\varepsilon^{-1\backslash 4}} \frac{1}{s} ds \\
&= C_4 - C_5 1\mathrm{n}\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde C_4, C_5 são constantes positivas. Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que a condição (3.48) é satisfeita. $\square$

3.1.4 Caso $n = 3$

O caso $n = 3$ é mais delicado. No que segue, apresentaremos dois resultados, que dependerão das condições de $f(x, t)$ no infinito.

Para o primeiro resultado, assumiremos

$$f(x,t) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0 \tag{3.69}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t^3} = \infty, \quad \text{uniformemente em } A, \tag{3.70}$$

onde $A \subset \Omega$ é um conjunto aberto e não vazio.

Corolário 3.1.3. Assuma a validade de (3.2)-(3.6), (3.69) e (3.70). Então, o problema (P_2) possui solução.

Demonstração. Seja $h(t) = \inf_{x\in A} f(x,t)$, tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t^3} = \infty$. Assim, para todo $\mu > 0$, existe $B > 0$ tal que

$$H(t) \geq \mu t^4, \ \ \forall\, t \geq B.$$

Então, para ε suficientemente pequeno,

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\left[\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] s^2 ds \geq \mu\varepsilon \int_0^{D\varepsilon^{-1\backslash 4}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^2 ds,$$

onde $D > 0$ é uma constante. Utilizando integração por partes, concluímos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1\backslash 2}} H\left[\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] s^2 ds \geq \mu \int_0^{\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds = \infty.$$

Portanto, H satisfaz a condição (3.48). Consequentemente, pela Proposição 3.1.1, garantimos a validade da condição (3.30). Logo, pelo Teorema 3.1.2, (P_2) possui solução. $\square$

Para o segundo resultado será conveniente introduzirmos o parâmetro $\mu > 0$ e considerarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + a(x)u + \mu g(x,u) & \text{em } \ \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.71}$$

Assumiremos que

$$g(x,t) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \geq 0 \tag{3.72}$$

e

$$g(x,t) > 0,\ \text{q.t.p. } x \in A \text{ e } \forall\, t \in I, \tag{3.73}$$

onde $A \subset \Omega$ é um conjunto aberto e não vazio e $I \subset (0,\infty)$ é um intervalo aberto e não vazio.

Corolário 3.1.4. Assuma a validade de (3.3)-(3.6), (3.69) e (3.70). Então, existe $\mu_0 \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \mu_0$, o problema (3.71) possui solução.

Demonstração. Fixemos $v_0(x) = \phi(x)|x|^{-k}$, onde $0 < k < \dfrac{1}{2}$, $\phi \in C^\infty(A)$, $\phi(0) = 1$, $\|v_0\|_6 = 1$, e suponhamos que $0 \in A$. Assim, dado $\mu > 0$,

$$\Psi_\mu(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|u^2 - \frac{1}{6}u^6 - \frac{a(x)}{2}u^2 - \mu G(x,u)\right]dx,$$

onde $G(x,u) = \displaystyle\int_0^u g(x,t)dt$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\Psi_\mu(tv_0) &= \frac{1}{2}t^2\int_\Omega [|\nabla v_0|^2 - a(x)v_0^2]dx - \frac{1}{6}t^6 - \mu\int_\Omega G(x,tv_0)dx \\ &= \frac{1}{2}t^2T - \frac{1}{6}t^6 - \mu\int_\Omega G(x,tv_0)dx.\end{aligned}$$

Afirmação 1. $\lim\limits_{\mu\to\infty}\sup\limits_{t\geq 0}\Psi_\mu(tv_0) = 0.$

De fato, primeiramente notamos que $\lim\limits_{t\to\infty}\Psi_\mu(tv_0) = -\infty$ e que $\sup\limits_{t\geq 0}\Psi_\mu(tv_0)$ é atingido em algum t_μ tal que

$$\frac{\partial\Psi_\mu}{\partial t}(t_\mu) = t_\mu T - t_\mu^5 - \mu\int_\Omega g(x,t_\mu v_0)v_0 dx = 0. \tag{3.74}$$

Assim, $t_\mu T - t_\mu^5 \geq 0$ implica em $t_\mu \leq T^{\frac{1}{4}}$. Disso, segue que

$$\lim_{\mu\to\infty} t_\mu = 0. \tag{3.75}$$

Finalmente, observemos que

$$\sup_{t\geq 0}\Psi_\mu(tv_0) \leq \frac{1}{2}Tt_\mu^2 - \frac{1}{6}t_\mu^6.$$

Fazendo $\mu \to \infty$, na igualdade acima, temos, por (3.75), que a Afirmação 1 é verdadeira.

Pela validade da Afirmação 1, decorre que, para μ suficientemente grande, a condição (3.30) é satisfeita. Portanto, pelo Teorema 3.1.2, segue a validade do corolário em questão. $\square$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos resultados que serviram para garantir a existência ou não de solução para um problema elíptico envolvendo o expoente crítico de Sobolev. O expoente crítico em questão é o expoente limite para a imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, quando $p = 2$. Vale ressaltar que esse problema, proposto por Brezis e Nirenberg (1983), é uma aplicação relevante para o estudo dos métodos variacionais e assim tem potencial para ser explorado em casos mais gerais. Citamos como opção de continuação desse estudo o artigo de Colorado e Ortega (2019) onde é trabalhado o caso Laplaciano fracionário, que é um assunto que vem ganhando destaque atualmente.

REFERÊNCIAS

AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. **Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications**. J. Funct. Anal. 14, 1973, p. 349-381.

AUBIN, T. **Problémes isopérimétriques et espaces de Sobolev**. J. Diff. Geom. 11, 1976a, p. 573-589.

AUBIN, T. **Equations différentielles non linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire**. J. Math. Pures et Appl. 55, 1976b, p. 269-293.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Textos Universitários)

BREZIS, H.; NIRENBERG, L. **Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents**. Comunications on Pure and Applied Mathematics 36, 1983, p. 437-477.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

COLORADO, E. ; ORTEGA, A. **The Brezis–Nirenberg problem for the fractional Laplacian with mixed Dirichlet–Neumann boundary conditions**. Journal of Mathematical Analysis and Applications 473, 2019, p. 1002-1025.

DEL PINO, M.; DOLBEAULT, J. **The Optional Euclidean L^p-Sobolev Logarithmic Inequality**. Journal of Functional Analysis 197, 2003, nº 1, p. 151-161.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Sociaty, 2009. 19 v.

ISNARD, C. **Introdução à Medida e Integração**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

JACOBS, S. **An isoperimetric inequality for functions analytic in multiply connectea domains**. Report Mittag-Leffler Institut, 1970.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 2 v. (Projeto Euclides)

OQUENDO, H. P. **Sobolev:** notas de aula. Disponível em:<https://docs.ufpr.br/ higidio/Ensino /Sobolev.pdf>. Acesso em 20 de jan. de 2020.

POHOZAEV, S. I. **Eigenfunction of the equation $\nabla u + \lambda f(u) = 0$.** Soviet Math. Doklady 6, 1965, p. 1408-1411. (translate fron the Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR 165, 1965, p. 33-36)

RUDIN, W. **Functional Analysis**. 2nd. Ed., McGraw Hill International Editions, 1991.

SAMUAYS, M. A. **O Problema de Brezis-Nirenberg**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - UFPR, Curitiba, 2011.

TALENTI, G. **Best Constant in Sobolev Inequality**. Annali di Matematica pura ed Aplicata 110, 1976, nº1, p. 353-372.

UHLENBECK, K. K. **Variational problems for gauge fields**. Seminar on Differential Geometry, S. T. Yau, Editor, Princeton University Press, 1982, p. 455-464.

WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Boston: Birkhäuser, 1996.

YAMABE, H. **On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds**. Osaka Journal of Mathematics 12, 1960, nº 1, p. 21-37.

APÊNDICE A

Aqui apresentaremos alguns resultados que foram utilizados no decorrer do trabalho. Visto que alguns desses resultados são clássicos e que suas demonstrações envolvem outros conceitos, eles serão apenas enunciados e citaremos as referências onde podem ser encontrados.

Teoria da Medida

Iniciaremos apresentando alguns resultados relacionados à Teoria da Medida. Esses e outros resultados sobre essa teoria podem ser encontrados em Isnard (2013) e Rudin (1991). Defina o conjunto

$$B(\Omega;\mathbb{R}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua e limitada em } \Omega\},$$

e o subespaço

$$K(\Omega) = \{u \in B(\Omega;\mathbb{R}); \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacto}\}.$$

Assim, considerando $\mathscr{C}_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$ e μ uma medida finita em Ω, definimos o funcional linear contínuo $T : \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$T(u) = \mu \cdot u = \int_\Omega u(x)d\mu.$$

Agora, sendo $\mathscr{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas sobre Ω, definimos a norma de uma medida $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, por

$$\|\mu\| = \sup_{u\in\mathscr{C}_0(\Omega)} \frac{|\nu_n \cdot u|}{\|u\|_\infty}, \text{ onde } \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Definição 0.0.1. Dizemos que uma sequência de medidas $(\mu_n) \subset \mathscr{M}(\Omega)$ converge fracamente para a medida $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, e denotamos por $\mu \rightharpoonup \mu$, quando, para toda $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, tivermos

$$\mu_n \cdot u \to \mu \cdot u.$$

Proposição 0.0.1. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Toda sequência limitada em $\mathscr{M}(\Omega)$ possui subsequência fracamente convergente em $\mathscr{M}(\Omega)$;

(ii) Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\Omega)$, então (μ_n) é limitada e $\|\mu\| \leq \liminf \|\mu_n\|$.

Proposição 0.0.2. (Concentração de Compacidade) Sejam $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nu_n = |u_n|^{p^*}dx,\ \mu_n = |\nabla u_n|^p dx$ sequências de medida de modo que $\nu_n \rightharpoonup \nu$ e $\mu_n \rightharpoonup \mu$, onde ν e μ são medidas limitadas em Ω. Então existe um conjunto no máximo enumerável $\mathscr{J}$, uma família de pontos $\{x_j; j \in \mathscr{J}\} \subset \overline{\Omega}$ e famílias de números positivos $\{\nu_j; j \in \mathscr{J}\}$ e $\{\mu_j; j \in \mathscr{J}\}$ tais que

(i) $\nu = |u|^{P^*}dx + \sum\limits_{j \in \mathscr{J}} \nu_j \delta_{x_j}$;

(ii) $\mu \geq |\nabla u|^p dx + \sum\limits_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \delta_{x_j}$;

(iii) $\mathscr{A}(p,n)^{-p}(v_j)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_j$.

Neste caso, δ_{x_j} é a medida de Dirac, definida por

$$\delta_{x_j}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in E \\ 0 & \text{se } x_j \notin E, \end{cases}$$

a qual também é conhecida como medida atômica, sendo cada x_j um átomo.

Demonstração. Veja Samuays (2011, p. 24).

Proposição 0.0.3. Seja $p \in [1, \infty]$. Se $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ é tal que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, então existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que $u_{n_j} \to u$, q.t.p. $x \in \Omega$.

Demonstração. Veja Isnard (2013, p. 242).

Proposição 0.0.4. (Desigualdade de Hölder) Sejam q e $r \in [1, \infty]$ tais que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Se f e g são elementos de L^q, então fg é um elemento de L^1 e vale

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_q \|g\|_r.$$

Demonstração. Veja Isnard (2013, p. 220).

Proposição 0.0.5. (Convergência Dominada de Lebesgue) Sejam as funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mensuráveis, tais que

$$f_n \to f, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Se existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, \infty]$, tal que

$$g \geq |f_n| \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Então f_n e f são integráveis e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração. Veja Isnard (2013, p. 101).

Proposição 0.0.6. (Convergência de Vitali) Sejam as funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ integráveis, tais que

$$f_n \to f, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Então f é integrável e $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$ se, e somente se, $\left(\displaystyle\int_\Omega f_n dx\right)$ é uniformemente absolutamente contínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|A| < \delta \Rightarrow \left|\int_A f_n\right| < \varepsilon, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Veja Isnard (2013, p. 292).

Análise Funcional

Apresentaremos, a seguir, alguns resultados relacionados à Análise Funcional, que foram utilizados no decorrer do trabalho. Para um estudo mais aprofundado indicamos Brezis (2011) e Botelho, Pellegrino, Teixeira (2015).

Definição 0.0.2. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset E$ converge fracamente para $x \in E$, quando ela converge para x na topologia fraca. Denotaremos esse fato por $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 0.0.7. Sejam E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset E$ uma sequência. Então:

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, para toda $f \in E^*$;

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Demonstração. Veja Brezis (2011, p. 58).

Proposição 0.0.8. Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.

Demonstração. Veja Botelho, Pellegrino, Teixeira (2015, p. 164).

Definição 0.0.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $p \in [1, \infty)$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 0.0.4. Sejam Ω um aberto e $p \in [1, \infty]$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial normado

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial_i u \in L^p(\Omega),\ i = 0, 1, \dots n\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega |\partial_i u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, escreve-se $H^1(\Omega)$ em lugar de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposição 0.0.9. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja Brezis (2011, p. 264).

Definição 0.0.5. Sejam X, Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos $X \subset\subset Y$, se as seguintes condições são satisfeitas:
(i) $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, para todo $x \in X$;
(ii) Toda sequência limitada em X é pré-compacta em Y, ou seja, toda sequência limitada em X possui uma subsequência convergente em Y.

Proposição 0.0.10. (Desigualdade de Poincaré). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado, $\partial\Omega$ de classe C^1, $1 \leq p < n$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então existe uma constante $C = C(n, p, q, \Omega)$ tal que, para todo $q \in [1, p^*)$,

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p.$$

Demonstração. Veja Evans (2009, p. 275).

Proposição 0.0.11. (Normas equivalentes). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então, em $W_0^1(\Omega)$, temos

$$\|\cdot\|_{W_0^{1,p}} \sim \|\nabla \cdot\|_p.$$

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela Desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (C\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = \overline{C}\|\nabla u\|_p,$$

onde $\overline{C} > 0$ é uma constante. Por outro lado,

$$\|\nabla u\|_p \leq (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W_0^{1,p}}.$$

Logo, a proposição em questão é válida. $\square$

Proposição 0.0.12. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega$ de classe C^1. Se $1 \leq p < p^*$, então, para todo $q \in [1, p^*)$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$.

Demonstração. Veja Brezis (2011, p. 285).

Proposição 0.0.13. Se $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ é limitada, com $1 \leq p \leq \infty$ e $u_n \to u$, q.t.p. $x \in \Omega$, então:

(i) $u \in L^p(\Omega)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p$.

Técnicas Variacionais

No que segue, apresentaremos alguns resultados que envolvem Técnicas Variacionais. Além disso, provaremos um lema que foi fundamental na demonstração do teorema de não existência de solução para o caso $n = 3$. Para um estudo mais aprofundado desse assunto sugerimos Willem (1996) e Ambrosetti, Rabinowitz (1973).

Definição 0.0.6. Sejam X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto. Dizemos que o funcional $F : U \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gateaux em $a \in U$ se, para todo $h \in X$, existe $F'(a) \in X^*$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(a+th) - F(a) - F'(a)\cdot th}{t} = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(a+th)-F(a)}{t}=F'(a)\cdot h.$$

Dizemos que o funcional F tem derivada de Fréchet em $a\in U$ se existe $F'(a)\in X^*$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)-F'(a)\cdot h}{\|h\|}=0.$$

O funcional $F\in C^1(U)$ se a derivada de Fréchet de F existir e for contínua em U. Quando $F'(a)=0$, dizemos que a é um ponto crítico de F.

Proposição 0.0.14. Se $F:X\to\mathbb{R}$ tem derivada de Gateaux contínua em X, então F é diferenciável a Fréchet e $F\in C^1(X)$.

A seguir, exemplificaremos o resultado anterior com um funcional que foi muito útil no desenvolvimento deste trabalho.

Exemplo 0.0.1. Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aberto e o funcional $G:L^p(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por

$$G(u)=\int_\Omega |u|^p dx.$$

Então $G\in C^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $u,v\in L^p(\Omega)$. Provemos que existe a derivada de Gateaux $G'(u)$. Para isso, devemos garantir a existência do seguinte limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(u+tv)-G(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{t}dx.$$

Para cada $x\in\Omega$ fixado, seja $f_t(x)=\frac{1}{t}[|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda\in(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |f_t(x)| &= \frac{\big||u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p\big|}{|t|}\\ &= p|u(x)+\lambda tv(x)|^{p-1}|v(x)|\\ &\leq p(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}|v(x)|\\ &:= h(x), \end{aligned}\tag{0.1}$$

onde $h \in L^1(\Omega)$, $0 < |t| < 1$. Pela Proposição 0.0.4 (Desigualdade de Hölder),

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_t(x)dx &\leq p\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}|v(x)|dx \\ &\leq p\bigg[\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^p dx\bigg]^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, cada f_t é integrável. Além disso, para cada $x \in \Omega$,

$$f_t(x) = p|u(x) + \lambda t v(x)|^{p-1}v(x) \to p|u(x)|^{p-1}v(x), \text{ quando } t \to 0.$$

Por isso e por (0.1), podemos aplicar a Proposição 0.0.5 (Convergência Dominada de Lebesgue). Assim,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega f_t(x)dx = p\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx := G'(u)\cdot v.$$

Agora, provaremos a continuidade da derivada de Gateaux.

Sejam $(u_n) \in L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Assim, ao longo de uma subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Ainda, existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que, ao longo de uma subsequência,

$$|u(x)|,\ |u_n(x)| \leq g(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

No que segue, provaremos que $G'(u_n) \to G'(u)$ em $(L^p(\Omega))^*$. Para isso, seja $f(u) = p|u|^{p-2}u$. Assim,

$$|f(u)|^{\frac{p}{p-1}} = p^{\frac{p}{p-1}}|u|^p \in L^1(\Omega).$$

Em particular, $f(u) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} &= p^{\frac{p}{p-1}}\big||u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}\big|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq p^{\frac{p}{p-1}}(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}}p^{\frac{p}{p-1}}(|u_n|^p + |u|^{p-1})^{\frac{p}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}+1}p^{\frac{p}{p-1}}|g|^p \\ &:= h \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Por isso, ao utilizarmos a Proposição 0.0.5 (Convergência Dominada de Lebesgue), concluímos que

$$f(u_n) \to f(u) \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Com isso, para cada $v \in L^p(\Omega)$, aplicando a Proposição 0.0.4 (Desigualdade de Hölder), sendo $r \in [1, \infty]$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = 1$, obtemos

$$\big|G'(u_n) \cdot v - G'(u) \cdot v\big| \leq \int_\Omega \big|f(u_n) - f(u)\big||v|dx \leq \|f(u_n) - f(u)\|_r\|v\|_p.$$

Portanto,

$$\|G'(u_n) - G'(u)\|_{(L^p)^*} = \sup_{\|v\|_p=1} \big|G'(u_n) \cdot v - G'(u) \cdot v\big| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_r.$$

Mas, $\|f(u_n) - f(u)\|_r \to 0$. Logo, pelo Teorema do Sanduíche, $\|G'(u_n) - G'(u)\|_{(L^p)^*} \to 0$, ou seja, $G'(u_n) \to G'(u)$ em $(L^p(\Omega))^*$, e assim, G' é contínua. $\square$

Proposição 0.0.15. (Teorema da Divergência) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Se F é um campo vetorial diferenciável em Ω, então

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \overrightarrow{n} \, ds.$$

Proposição 0.0.16. (Multiplicador de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach e os funcionais $F, G : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se x_0 é um extremo de F restrito a $G^{-1}(G(x_0))$, então uma dentre as seguintes alternativas ocorre:

(a) $G'(x_0) \cdot v = 0$, para todo $v \in X$;

(b) existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $F'(x_0) \cdot v = \lambda G'(x_0) \cdot v$, para todo $v \in X$.

Proposição 0.0.17. (Fórmula de Coárea) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja contínua e integrável. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f(r)ds \right) dr.$$

Exemplo 0.0.2. A função $x \mapsto \dfrac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n}$ é integrável em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$. Com isso, existe $r_0 > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon \subset B_{r_0}$. Além disso,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx \leq \int_{B_{r_0}} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx.$$

No entanto, pela Proposição 0.0.17 (Fórmula da Coárea), temos que

$$\int_{B_{r_0}} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx = \int_0^{r_0} \left[\int_{S_r} \frac{r^2}{(1 + r^2)^n} ds \right] dr.$$

Considerando $\displaystyle\int_{S_r} ds = r^{n-1}\int_{S_1} ds = r^{n-1}C$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0}\left[\int_{S_r}\frac{r^2}{(1+r^2)^n}ds\right]dr &= C\int_0^{r_0}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr\\ &= C\left[\int_0^{r_1}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr+\int_{r_1}^{r_0}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr\right].\end{aligned}$$

Disso e do fato de $r^{2n}\leq(1+r^2)^n$, temos

$$\int_0^{r_0}\left[\int_{S_r}\frac{r^2}{(1+r^2)^n}ds\right]dr\leq CC_1+C\int_{r_1}^{r_0}r^{1-n}dr,$$

onde $C_1>0$ é constante. Assim,

$$\int_{B_{r_0}}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx\leq C_2+\frac{C}{(2-n)r^{n-2}},$$

sendo $C_2>0$ constante. Portanto, pelo fato de $n\geq 4$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx=\lim_{r_0\to\infty}\int_{B_{r_0}}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx\leq C_2<\infty.$$

□

Proposição 0.0.18. (Mudança de Variáveis) Sejam $U,V\subset\mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $h:U\to V$ um difeomorfismo de classe C_1, $\Omega\subset U$ um conjunto compacto e $f:h(\Omega)\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f\circ h:\Omega\to\mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_{h(\Omega)}f(y)dy=\int_\Omega f(h(x))\cdot|\text{det}.h'(x)|dx.$$

Demonstração. Veja Lima (2015, p. 385).

Proposição 0.0.19. Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado, m um número inteiro não negativo e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $f\in H^m(\Omega)$. Suponha que $\partial\Omega\in C^{m+2}$ e que $u\in H_0^1(\Omega)$ seja solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{em } \Omega\\ u=0 & \text{sobre } \partial\Omega.\end{cases}$$

Então $u\in H^{m+2}(\Omega)$.

Demonstração. Veja Evans (2009, p. 323).

Proposição 0.0.20. (Simetria Radial) Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então u é radial, isto é,

$$u(x) = v(r), \text{ com } r = |x|,$$

para alguma função estritamente decrescente $v : [0,1] \to [0,\infty)$.

Demonstração. Veja Evans (2009, p. 521).

Observação 0.0.1. Consideremos o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases} \tag{0.2}$$

em que $B_1 \subset \mathbb{R}^3$. Pela Proposição 0.0.20, soluções desse tipo de problema são radiais, isto é, $u(x) = v(r)$, com $r = |x|$. Em virtude de $u = 0$ sobre ∂B_1, segue que v satisfaz

$$v(1) = v'(0) = 0.$$

Agora, para $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right) = \frac{v'(|x|)}{|x|} + \left(v''(|x|) - \frac{v'(|x|)}{|x|}\right)\left(\frac{x_i}{|x|}\right)^2.$$

Consequentemente,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = v''(|x|) + \frac{2v'(|x|)}{|x|}.$$

Deste modo, podemos reescrever o problema (0.2) da seguinte forma

$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{2}{r}v' = \lambda v, & r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

E neste caso, $\lambda_1 = \pi^2$ é o primeiro autovalor positivo de (0.3) e assim, também é o primeiro autovalor de (0.2).

Vejamos, agora, o seguinte lema, que foi utilizado para a prova do teorema de não existência de solução para o caso $n = 3$.

Lema 0.0.1. Seja $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma solução para o problema

$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{2}{r}v' = v^5 + \lambda v, & r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \qquad (P_{1'})$$

Se $\lambda \leq \dfrac{\lambda_1}{4}$, então para cada $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, com $\psi(0) = 0$, temos

$$\int_0^1 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) v^2 r^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^1 v^6 (r\psi - r^2\psi')dr + \frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2}.$$

Demonstração. Notemos que

$$(r^2\psi(v')^2)' = 2r\psi(v')^2 + r^2\psi'(v')^2 + 2r^2\psi v'v''.$$

Logo,

$$\psi(1)(v'(1))^2 = 2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr + 2\int_0^1 r^2\psi v'v'' dr. \qquad (0.4)$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada em $(P_{1'})$ por $-2r^2\psi v'$ e integrando sobre $(0,1)$ obtemos

$$2\int_0^1 r^2\psi v'v'' dr = -2\lambda\int_0^1 r^2\psi v'v dr - 2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr - 4\int_0^1 r(v')^2\psi dr.$$

Substituindo essa igualdade na equação (0.4) concluímos que

$$\begin{aligned} \psi(1)(v'(1))^2 &= 2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr - 2\lambda\int_0^1 r^2\psi v'v dr \\ &\quad -2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr - 4\int_0^1 r(v')^2\psi dr. \end{aligned} \qquad (0.5)$$

Além disso,

$$0 = -\frac{1}{3}\int_0^1 (r^2\psi v^6)' dr = -\frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6 dr - \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6 dr - 2\int_0^1 r^2\psi v^5 v',$$

e

$$0=-\lambda\int_0^1(r^2\psi v^2)'dr=-\lambda\Big[2\int_0^1 r\psi v^2dr+\int_0^1 r^2\psi' v^2dr+2\int_0^1 r^2\psi vv'dr\Big].$$

Das igualdades acima temos, respectivamente, que

$$-2\int_0^1 r^2\psi v'v^5dr=\frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6dr+\frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6dr \tag{0.6}$$

e

$$-2\lambda\int_0^1 r^2\psi vv'dr=2\lambda\int_0^1 r\psi v^2dr+\lambda\int_0^1 r^2\psi' v^2dr. \tag{0.7}$$

Substituindo as igualdades (0.6) e (0.7) em (0.5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2} &= \int_0^1(v')^2\Big(\frac{r^2\psi'}{2}-r\psi\Big)dr+\frac{1}{6}\int_0^1 v^6(2r\psi+r^2\psi')dr\\ &\quad+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 v^2(2r\psi+r^2\psi')dr.\end{aligned} \tag{0.8}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1\Big[\Big(\frac{r^2\psi}{2}-r\psi\Big)vv'\Big]'dr\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 r^2\psi'' vv'dr-\int_0^1\psi vv'dr+\int_0^1(v')^2\Big(\frac{r^2\psi'}{2}-r\psi\Big)dr+\int_0^1 vv''\Big(\frac{r^2\psi'}{2}-r\psi\Big)dr.\end{aligned} \tag{0.9}$$

No entanto, como

$$0=\frac{1}{2}\int_0^1(r^2v^2\psi'')'dr=\int_0^1 rv^2\psi''dr+\int_0^1 r^2vv'\psi''dr+\frac{1}{2}\int_0^1 r^2v^2\psi'''dr,$$

segue que

$$\int_0^1 r^2vv'\psi''dr=-\int_0^1 rv^2\psi''dr-\frac{1}{2}\int_0^1 r^2v^2\psi'''dr. \tag{0.10}$$

Agora, em virtude de

$$0=\int_0^1(rv^2\psi')'=\int_0^1 v^2\psi'dr+2\int_0^1 rvv'\psi'dr+\int_0^1 rv^2\psi''dr$$

temos

$$\int_0^1 rv^2\psi''dr=-\int_0^1 v^2\psi'dr-2\int_0^1 rvv'\psi'dr. \tag{0.11}$$

Ainda, como
$$0=\int_0^1 (v^2\psi)'dr = 2\int_0^1 vv'\psi + \int_0^1 v^2\psi' dr,$$
vale
$$\int_0^1 v^2\psi' dr = -2\int_0^1 vv'\psi dr. \tag{0.12}$$
Substituindo (0.12) em (0.11) decorre que
$$\int_0^1 rv^2\psi'' dr = 2\int_0^1 vv'\psi dr - 2\int_0^1 rvv'\psi' dr. \tag{0.13}$$
Combinando (0.13) com (0.10), obtemos
$$\int_0^1 r^2vv'\psi'' dr = -2\int_0^1 vv'\psi dr + 2\int_0^1 rvv'\psi' dr - \int_0^1 r^2v^2\psi''' dr. \tag{0.14}$$
Multiplicando ambos os membros da equação dada em $(P_{1'})$ por $\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)v$ e integrando sobre $(0,1)$, encontramos
$$\begin{aligned}\int_0^1 vv''\left(r\psi - \frac{r^2\psi'}{2}\right)dr + \int_0^1 vv'(-r\psi' + 2\psi)dr &= \lambda\int_0^1 v^2\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)dr \\ &+ \int_0^1 v^6\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)dr.\end{aligned} \tag{0.15}$$
Assim, substituindo (0.14) e (0.15) em (0.9), temos
$$\int_0^1 (v')^2\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)dr = \frac{1}{4}\int_0^1 r^2v^2\psi''' dr + \lambda\int_0^1 v^2\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)dr + \int_0^1 v^6\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right)dr. \tag{0.16}$$
Finalmente, substituindo (0.16) em (0.8), obtemos
$$\int_0^1 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right)v^2r^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^1 v^6(r\psi - r^2\psi')dr + \frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2}.$$
Logo, o lema esta verificado. □

Princípios do Máximo

O Lema de Hopf e os princípios de máximo são propriedades relevantes dos operadores elípticos. Além disso, foram utilizados na demonstração de teoremas importantes deste trabalho. Esses resultados e também outros interessantes podem ser encontrados em Oquendo

(2019) e Brezis (2011). Aqui, consideraremos o operador L na forma não divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Lema 0.0.2. (Lema de Hopf) Sejam $c \equiv 0$ em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Suponha que $Lu \leq 0$ em Ω e que exista $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) > u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Além disso, suponha que $x_0 \in \partial B$, para alguma bola aberta $B \subset \Omega$. Então

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0,$$

onde v é o vetor unitário normal à B em x_0.
Se $c \geq 0$ em Ω, o resultado é válido desde que $u(x_0) \geq 0$.

Demonstração. Veja Oquendo (2019, p 48).

Proposição 0.0.21. (Princípio do Máximo Fraco) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω.

(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se $Lu \geq 0$ em Ω, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

Demonstração. Veja Oquendo (2019, p 48).

Proposição 0.0.22. (Princípio do Máximo Forte) Seja Ω um conjunto limitado, aberto e conexo do $\mathbb{R}^n$. Assuma que $c \geq 0$ em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo no interior de Ω, então u é constante.

(ii) Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo no interior de Ω, então u é constante.

Demonstração. Veja Oquendo (2019, p 49).