

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Mauro Buemo Pozzobom

**ESTUDO EXPERIMENTAL DE RECURSOS QUÂNTICOS USANDO
OS COMPUTADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Santa Maria, RS
2021

Mauro Buemo Pozzobom

**ESTUDO EXPERIMENTAL DE RECURSOS QUÂNTICOS USANDO OS
COMPUTADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Física**.

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS
2021

Pozzobom, Mauro Buemo
ESTUDO EXPERIMENTAL DE RECURSOS QUÂNTICOS USANDO OS
COMPUTADORES QUÂNTICOS DA IBM / Mauro Buemo Pozzobom.-
2021.

152 p.; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2021

1. Computador Quântico 2. Recursos Quânticos 3. Relações
de Complementaridade 4. Estados Bell-diagonal 5. Estados
de Werner I. Maziero, Jonas II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2021

Todos os direitos autorais reservados a Mauro Buemo Pozzobom. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

Endereço: Rua Visconde de Pelotas, n. 1942, apto 403

End. Eletr.: mbpozzobom@gmail.com

Mauro Buemo Pozzobom

**ESTUDO EXPERIMENTAL DE RECURSOS QUÂNTICOS USANDO OS
COMPUTADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Física**.

Aprovado em 26 de fevereiro de 2021:

Jonas Maziero, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Marcelo Silva Sarandy, Dr. (UFF)

Lucas Chibebe Céleri, Dr. (UFG)

Eleonir João Calegari, Dr. (UFSM)

Paulo Cesar Piquini, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2021

NUP: 23081.016969/2021-88		Prioridade: Normal
Homologação de ata de banca de defesa de pós-graduação 134.332 - Bancas examinadoras: indicação e atuação		
COMPONENTE		
Ordem	Descrição	Nome do arquivo
1	Ata de defesa de dissertação/tese (134.332)	Ata de defesa Mauro preenchida Jonas.pdf
Assinaturas		
01/03/2021 10:23:38 JONAS MAZIERO (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR) 02.32.00.00.0.0 - DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFSC		
01/03/2021 11:11:24 Lucas Chibebe Céleri (Pessoa Física) Usuário Externo (183.***.***.**)		
01/03/2021 11:25:05 Marcelo Silva Sarandy (Pessoa Física) Usuário Externo (069.***.***.**)		
01/03/2021 14:58:57 PAULO CESAR PIQUINI (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR) 01.09.03.00.0.0 - COORDENADORIA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - CIC		
02/03/2021 13:50:34 ELEONIR JOAO CALEGARI (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR) 02.32.00.00.0.0 - DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFSC		
08/03/2021 16:10:29 ROGERIO JOSE BAIERLE (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR) 02.32.00.00.0.0 - DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFSC		
<p style="text-align: center;">  </p>		
Código Verificador: 548195		
Código CRC: e2d70ce0		
Consulte em: https://portal.ufsm.br/documentos/publico/autenticacao/assinaturas.html		

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, meu pai, Victor Hugo Aita Pozzobom, minha mãe, Matilde Buemo Pozzobom, minha irmã, Tânia Buemo Pozzobom e minha querida e amada esposa, Tatiele Lamarque Pozzobom.

AGRADECIMENTOS

Ao término desta tese, se faz por dever agradecer a todos os que me ajudaram nesta caminhada e desculpar-me por todos que esqueci de mencionar.

A Deus, que sempre me protegeu, principalmente nas horas mais difíceis, garantindo a saúde necessária para que eu pudesse superar as dificuldades e alcançar os objetivos.

À minha digníssima família, que deu-me como alicerce os valores necessários para construção de um bom caráter. Agradeço ao meu pai, seu Victor, e à minha mãe, dona Matilde, a dedicação que tiveram na minha criação. Se não fosse pelo suor do trabalho deles, nunca poderia ter estudado. À minha querida irmã, Tânia, agradeço por ter compartilhado os momentos mais belos de sua infância comigo. Hoje segue a passos largos na carreira de oficial da Força Aérea Brasileira, quanto orgulho!

Agradeço à minha querida e amada esposa, Tatiele, que sempre esteve me apoiando em todos os momentos, desde a graduação até agora. Compartilhamos os melhores momentos e também os menos bons, porque do seu lado não há tempo ruim, demonstrando o verdadeiro sentido do amor. Você estará sempre em meu coração.

Ao professor Dr. Jonas Maziero, que me apoiou como orientador no mestrado e no doutorado, dedicando, muitas vezes, inclusive, seu tempo de descanso e lazer para ajudar-me com os mais diversos assuntos que estudamos a fim de realizar este trabalho. Agradeço pela amizade que temos de longa data e pela condução exemplar nos estudos realizados em nosso grupo, sempre guiando nosso caminho através do exemplo, mostrando-se um verdadeiro líder.

Ao Exército Brasileiro, no qual servi por oito anos e pude desenvolver e aprimorar muitos atributos importantes para exercer qualquer atividade. E também porque esse trabalho me possibilitou condições para continuar estudando.

A todos os meus amigos e colegas, principalmente os do Laboratório de Teoria da Matéria Condensada e do Grupo de Informação Quântica e Fenômenos Emergentes, tanto os da pós-graduação como os da iniciação científica, que nunca hesitaram em me ajudar em qualquer tipo de atividade, evidenciando, assim, uma característica muito importante para quem trabalha em grupo, o companheirismo.

Agradeço à International Business Machines (IBM), por disponibilizar, para pesquisadores do mundo todo, seus equipamentos mais modernos relacionados à computação quântica para o desenvolvimento da ciência e tecnologia.

Agradeço a todos os professores e funcionários que estiveram presentes na minha formação acadêmica, desde a minha infância até agora, ao Programa de Pós-graduação em Física e à UFSM, onde tive a oportunidade de aprofundar meus co-

nhcimentos, bem como, a todas as entidades públicas onde estudei durante toda a minha vida.

Finalmente, agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), processo 88882.427897/2019-01, que custeou o presente trabalho nesses quatro anos de estudo.

RESUMO

ESTUDO EXPERIMENTAL DE RECURSOS QUÂNTICOS USANDO OS COMPUTADORES QUÂNTICOS DA IBM

AUTOR: Mauro Buemo Pozzobom

ORIENTADOR: Jonas Maziero

Estados Bell-diagonais são de extrema importância para a compreensão da dinâmica e das aplicações de alguns recursos quânticos. Propriedades quânticas como *steering*, emaranhamento e coerência, dentre outras, podem ser usadas como recursos em computação quântica. Devido a isso, julgamos necessário o entendimento sobre a preparação desses estados. Nós criamos um circuito quântico ajustável, que implementamos no computador quântico da *International Business Machines* (IBM). Esses computadores são uma excelente possibilidade para realizar experimentos como este. Implementamos o circuito em três diferentes chips quânticos que estão disponíveis na plataforma *on-line*. Como exemplo, medimos a não localidade, *steering*, emaranhamento, discórdia e coerência não local para estados de Werner, que são um tipo especial dos estados Bell-diagonal. Comparamos os resultados teóricos com os dados experimentais. Notamos o efeito prejudicial que o ruído pode provocar nos circuitos quânticos, trazendo efeitos indesejáveis de decoerência para o sistema. Modelamos de maneira simples o ruído através de dois canais quânticos, *amplitude damping* e *phase damping*. Tentamos verificar a relação direta entre medidas de discórdia e emaranhamento, assim como observar experimentalmente a mudança súbita para a discórdia. Mesmo realizando esses testes em diversos chips quânticos, não foi possível fazer tal verificação com grande clareza. Por outro lado, é conhecida a grande importância do Princípio da Complementaridade de Bohr para a Mecânica Quântica. No entanto, a busca por quantificadores para medir característica de onda ou de partícula, em um sistema quântico, sempre foi muito grande. Recentemente um formalismo foi desenvolvido a partir de propriedades básicas da matriz densidade ($\rho \geq 0, \text{Tr}\rho = 1$). Utilizamos o computador quântico da IBM para verificar as relações de complementaridade baseadas nessas propriedades. Calculamos coerência quântica, previsibilidade e correlações quânticas para uma classe particular de estados quânticos de um q-bit e também para estados quânticos aleatórios de um, dois e três q-bits. Notamos que, para ambos os casos, a interação do sistema com ambiente, e a consequente criação de correlação, gera diminuição na soma da coerência quântica e previsibilidade, mas que é compensada pelo aumento das correlações quânticas entre sistema e ambiente.

Palavras-chave: Estados Bell-diagonal. Estados de Werner. Computador Quântico.

Recursos Quânticos. Relações de Complementaridade.

ABSTRACT

EXPERIMENTAL STUDY OF QUANTUM RESOURCES USING IBM QUANTUM COMPUTERS

AUTHOR: Mauro Buemo Pozzobom

ADVISOR: Jonas Maziero

Bell-diagonal states are extremely important for understanding the dynamics and applications of some quantum resources. Quantum properties such as steering, entanglement, and coherence, among others, can be used as resources in quantum computing. Because of this, we believe it is necessary to understand the preparation of these states. We create an adjustable quantum circuit, which we implement on the International Business Machines (IBM) quantum computer. These computers are an excellent possibility for carrying out experiments like this. We implement the circuit on three different quantum chips that are available on the online platform. As an example, we measure non-locality, steering, entanglement, discord and non-local coherence for Werner states, which are a special type of the Bell-diagonal. We compare the theoretical results with the experimental data. We note the harmful effect that noise can have on quantum circuits, bringing undesirable decoherence effects to the system. We model noise in a simple way, using two quantum channels, amplitude damping and phase damping. We investigate the direct relationship between measures of discord and entanglement, as well as the sudden change of discord. But, even carrying out these tests on several quantum chips, it was not possible to carry out such verification with great clarity. On the other hand, the great importance of Bohr's Complementarity Principle for Quantum Mechanics is well known. However, the search for quantifiers to measure wave or particle characteristics, in a quantum system, has always been very intense. Recently, a formalism was developed based on basic properties of the density matrix ($\rho \geq 0, \text{Tr}\rho = 1$). We use the IBM quantum computer to check the complementarity relationships based on these properties. We calculate quantum coherence, predictability and quantum correlations for a particular class of quantum states of one qubit and also for random quantum states of one, two and three qubits. We note that for both cases, the interaction of the system with the environment, and the consequent creation of correlation, generates a decrease in the sum of quantum coherence and predictability but which is compensated by the increase in quantum correlations between system and environment.

Keywords: Bell-diagonal States. Werner States. Quantum Computer. Quantum Resources. Complementarity Relations.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 2.1 – Exemplo de uma sequência de Cauchy. Os termos da sequência estão representados pelo marcador “x” (azul), enquanto que as linhas tracejadas (vermelho) auxiliam na visualização da aproximação dos pontos.</p> <p>Figura 2.2 – Mera ilustração da representação e um espaço vetorial composto por dois outros espaços.</p> <p>Figura 2.3 – Comportamento do emaranhamento para o estado $\psi_p\rangle = \sqrt{p} 00\rangle + \sqrt{1-p} 11\rangle$, calculado a partir da entropia, onde \sqrt{p} é a amplitude de probabilidade de encontrarmos o estado em $00\rangle$ ou $11\rangle$.</p> <p>Figura 2.4 – Um estado $\psi\rangle$ na esfera de Bloch pode representar qualquer sistema de dois níveis. Os ângulos θ e ϕ estão entre $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O estado de um q-bit em função dos ângulos $\psi\rangle = \cos(\theta/2) 0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) 1\rangle$.</p> <p>Figura 2.5 – O item (a) representa o circuito LC, o item (b) mostra as linhas de energia para esse circuito e notamos um espaçamento equidistante entre elas. Já no item (c), temos o circuito onde o capacitor foi substituído pela junção de Josephson (quadro laranja), o que pode ser visto no gráfico da energia como a introdução de uma não equidade entre os espaçamentos dos níveis de energia.</p> <p>Figura 2.6 – Figura representa o chip quântico de 5 q-bits. As partes do circuito são: Q_j são os próprios q-bits, R_j representa ressonadores individuais para controle e leitura, por fim os q-bits são acoplados através dos ressonadores de guia de onda coplanares, mostrados por B_j. ..</p> <p>Figura 2.7 – Imagem do terminal de composição de circuitos do IBMQE, onde cada uma das etapas representa um passo no processo de teleportação. Na caixa 1, temos a criação dos estados de Bell. Em 2, mudamos da base de Bell para base computacional. Por fim, no 3, temos a representação da atuação dos bits clássicos.</p> <p>Figura 2.8 – Gráfico da fidelidade de teleportação de um estado $\psi\rangle$ em função do ângulo θ, que modifica o estado preparado. A fidelidade mostra quão bem o estado foi teletransportado.</p> <p>Figura 3.1 – Circuito quântico para gerar estados Bell-diagonal em um computador quântico. As portas R geram estados em superposição. As $CNOT$ são usadas para copiar o estado a e b para os q-bits c e d. A porta Hadamard H, juntamente com a última $CNOT$, troca da base computacional para a base de Bell.</p> <p>Figura 3.2 – Na parte a) da figura, podemos ver a representação esquemática da conexão entre os q-bits para o ibmqx2. Em b), temos cada uma das partes do circuito, onde R_j representa ressonadores individuais para controle e leitura, Q_j são os próprios q-bits. Por fim, os q-bits são acoplados através dos ressonadores de guia de onda coplanares, mostrados por B_j.</p> <p>Figura 3.3 – Representação na base computacional das partes real e imaginária das matrizes densidade preparadas experimentalmente, correspondentes aos estados de Werner com cinco valores diferentes de w. .</p>	<p>31</p> <p>32</p> <p>42</p> <p>48</p> <p>50</p> <p>51</p> <p>59</p> <p>61</p> <p>64</p> <p>70</p> <p>72</p>
---	---

Figura 3.4 – Gráfico do comportamento da não localidade teórica N e experimental N_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.	73
Figura 3.5 – Gráfico do comportamento do <i>steering</i> teórico S e experimental S_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.	73
Figura 3.6 – Gráfico do emaranhamento teórico E e experimental E_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.	74
Figura 3.7 – Gráfico da discórdia quântica teórica D e experimental D_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.	75
Figura 3.8 – Gráfico da coerência não local teórica C e experimental C_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.	75
Figura 3.9 – Todas as correlações que foram calculadas para o ibmqx2. Os pontos marcados com “x” preto representam a fidelidade F entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local C está mostrado na cor cinza. Discórdia D no gráfico na cor rosa. Emaranhamento E é apresentado em azul, <i>steering</i> S na cor vermelha e não localidade N em ciano.	76
Figura 3.10 – Na parte a) da figura, podemos ver a representação esquemática da conexão entre os q-bits para o ibmqx4. Em b), os componentes representados por R_j , Q_j e B_j cumprem a mesma função que na Figura 3.2.	77
Figura 3.11 – Representação da base computacional das partes real e imaginária das matrizes densidade preparadas experimentalmente, correspondentes aos estados de Werner com cinco valores diferentes de w , agora para o ibmqx4.	78
Figura 3.12 – Representação de todas as correlações que foram calculadas para o ibmqx4. Os pontos marcados com “x” preto representam a fidelidade F entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor cinza; discórdia, D , na cor rosa; enquanto o emaranhamento, E , é apresentado em azul; <i>Steering</i> , S , na cor vermelha e não-localidade, N , em ciano.	79
Figura 3.13 – Representação esquemática da ligação entres os q-bits do ibmq Melbourne.	80
Figura 3.14 – Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o ibmq Melbourne. O marcador “x” preto representa a fidelidade entre o estado teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor cinza; discórdia, D , no gráfico na cor rosa; emaranhamento, E , é apresentado em azul; <i>steering</i> , S , na cor vermelha e não localidade, N , em ciano. Utilizamos aqui os q-bits q[4], q[5], q[9] e q[10].	81
Figura 3.15 – Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o ibmq Melbourne na segunda versão. O marcador “x” preto representa a fidelidade entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor	

	cinza; discórdia, D , no gráfico na cor rosa; emaranhamento, E , é apresentado em azul; <i>steering</i> , S , na cor vermelha e não-localidade, N , em ciano. Utilizamos aqui os q-bits $q[2]$, $q[3]$, $q[11]$ e $q[12]$	82
Figura 3.16	– Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o ibmq Melbourne em terceira versão. Os resultados apresentados aqui são para os mesmos parâmetros da figura anterior.	83
Figura 3.17	– As funções indicadas pelo subscrito “e” representam os estados preparados experimentalmente, enquanto as com subscrito “d” são as que indicam teoricamente as correlações quânticas do estado de Werner (Equação 3.48) com um dos q-bits evoluído sob a composição dos canais <i>amplitude damping</i> e <i>phase damping</i>	86
Figura 3.18	– As imagens apresentadas aqui são semelhantes às da Figura 3.17, mas para valores maiores de <i>amplitude damping</i> e <i>phase damping</i>	87
Figura 3.19	– As funções indicadas pelo subscrito “e” representam os estados preparados experimentalmente, enquanto as com subscrito “d” são as funções que indicam teoricamente as correlações quânticas do estado de Werner (Equação 3.48) com um dos q-bits evoluído sob a composição dos canais <i>amplitude damping</i> e <i>phase damping</i> . Para o $ibmqx4$ os valores foram de $a = p = 0,48$	88
Figura 3.20	– Aqui temos as mesmas correlações mostradas na Figura 3.19, no entanto, para o ibmq Melbourne, os valores foram de $a = p = 0,45$ para os canais de <i>amplitude damping</i> e <i>phase damping</i>	89
Figura 4.1	– Correlações em função do tempo parametrizado p para o estado inicial $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sobre ação local do canal <i>phase damping</i> . A discórdia D (linha verde contínua), o emaranhamento E (linha magenta pontilhada), ambas para à norma de Hilbert-Schmidt. Os pontos representam as mesmas correlações, para os estados preparados experimentalmente.	96
Figura 4.2	– Correlações em função do tempo parametrizado p para estado inicial $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sobre ação local do canal <i>phase damping</i> . A discórdia D_{nt} (linha verde contínua), o emaranhamento E_{nt} (linha magenta pontilhada) ambos para a norma do traço. Os pontos representam as mesmas correlações para os estados preparados experimentalmente.	97
Figura 4.3	– Discórdia, D , em função do emaranhamento, E , para estados iniciais $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sob ação local do canal <i>phase damping</i> . A norma de Hilbert-Schmidt aparece na cor azul, enquanto a cor vermelha representa a norma do traço.	97
Figura 4.4	– Mudança súbita da discórdia D em função do tempo parametrizado p para o chip quântico Vigo. As linhas contínuas são os valores teóricos, discórdia (verde), correlação clássica (magenta), informação mútua (azul), enquanto os pontos são os valores experimentais.	98
Figura 4.5	– Mudança súbita da discórdia D em função do tempo p , teste no simulador <i>ibmq_simulator</i> . As linhas contínuas são os valores teóricos, discórdia (verde), correlação clássica (magenta), informação mútua (azul), enquanto os pontos são os valores experimentais.	99
Figura 5.1	– Distribuição espacial dos q-bits nos dois chips. Em (a) temos o chip London, enquanto em (b) está a configuração do chip Yorktown.	108

Figura 5.2 – Circuito quântico usado para preparar estados de dois q-bits referente à Equação 5.23.	110
Figura 5.3 – Coerência $C_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.6. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.	111
Figura 5.4 – Previsibilidade $P_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.10. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são os valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.	112
Figura 5.5 – Correlação quântica $W_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.13. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.	112
Figura 5.6 – Gráfico de $C_{l_1} + P_{l_1}$ ("•" azul) representa as relações de complementaridade incompletas da Equação 5.17 e $C_{l_1} + P_{l_1} + W_{l_1}$ ("△" ciano) para a RCC, Equação 5.2. A linha contínua ("—" vermelha) é o valor teórico.	113
Figura 5.7 – Exemplos de circuitos gerados aleatoriamente para dois (a), três (b) e quatro (c) qubits.	115
Figura 5.8 – Coerência $C_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) indica os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) refere-se aos valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$	117
Figura 5.9 – Previsibilidade $P_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) representa os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) indica os valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$	117
Figura 5.10 – Correlação quântica $W_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) representa os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) indica os valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$	118
Figura 5.11 – O marcador "x" (vermelho) e "△" (ciano) representa os pontos teóricos para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$ e $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A)$, respectivamente, enquanto o símbolo "•" (azul) e "x" (verde) indicam os pontos experimentais para a mesma soma.	118
Figura A.1 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlação quântica (c), para media de Wigner-Yanase. Em (d), temos o marcador "•" azul para $C_{wy} + P_{wy}$ e o marcador "△" ciano para $C_{wy} + P_{wy} + W_{wy}$	133
Figura A.2 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b), correlação quântica (c), para medida de Hilbert-Schmidt. Em (d), o marcador "•" azul é a soma $C_{hs} + P_{hs}$, enquanto o símbolo "△" ciano $C_{hs} + P_{hs} + W_{hs}$	134

- Figura A.3 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlação quântica (c), para entropia relativa. Em (d), temos o marcador “●” azul para a soma de $C_{re} + P_{re}$ e o símbolo “△” ciano $C_{re} + P_{re} + W_{re}$ 135
- Figura A.4 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), de Wigner-Yanase para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{wy} + P_{wy}$ (“●” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{wy} + P_{wy} + W_{wy}$ (“★” verde experimental, “△” ciano teórico). 136
- Figura A.5 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), de Hilbert-Schmidt para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{hs} + P_{hs}$ (“●” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{hs} + P_{hs} + W_{hs}$ (“★” verde experimental, “△” ciano teórico). 137
- Figura A.6 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), da entropia relativa para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{re} + P_{re}$ (“●” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{re} + P_{re} + W_{re}$ (“★” verde experimental, “△” ciano teórico). 138

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Média dos parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown, com o qual os experimentos foram realizados. A temperatura do chip quântico durante os experimentos era $T = 0,0159K$	70
Tabela 3.2 – Parâmetros de calibração do chip quântico Tenerife, com o qual foram realizados os experimentos. A temperatura para este experimento foi de $T = 0,021K$. Os tempos T_1 e T_2 não estavam disponíveis neste experimento.....	77
Tabela 3.3 – Parâmetros de calibração do chip quântico ibmq Melbourne para o primeiro experimento em 31/10/2018. T_1 e T_2 são, respectivamente, o tempo de relaxação e o tempo de coerência. A frequência é de ressonância, depois erro de porta simples, erro da porta de múltiplos q-bits somente para os q-bit que compartilham a porta <i>CNOT</i>	80
Tabela 3.4 – Parâmetros de calibração do chip quântico ibmq Melbourne para o segundo experimento em 08/09/2018 (os valores entre parênteses são do terceiro experimento, calibração em 09/11/2018). Os parâmetros desta tabela são os mesmos da Tabela 3.3.	82
Tabela 4.1 – Parâmetros de calibração do chip quântico Vigo.....	98
Tabela 5.1 – Parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparação dos estado da equação 5.23.	111
Tabela 5.2 – Parâmetros de calibração do chip quântico London usado para preparação de estados aleatórios de um q-bit ($d = 2$).	115
Tabela 5.3 – Parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparar estados aleatórios de dois q-bits ($d = 4$).	116
Tabela 5.4 – Média dos parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparar estados de três q-bits ($d = 8$).	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CIQ</i>	Ciência da Informação Quântica
<i>IBM</i>	International Business Machines
<i>IBMQE</i>	International Business Machines Quantum Experience
<i>MC</i>	Mecânica Clássica
<i>MQ</i>	Mecânica Quântica
<i>RCC</i>	Relações de Complementaridade Completas

LISTA DE SÍMBOLOS

- † Adjunta de uma matriz (transposta conjugada)
- ⊗ Produto tensorial
- $|x\rangle$ Notação de Dirac para vetores
- Composição entre operadores

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	TÓPICOS IMPORTANTES DE MECÂNICA QUÂNTICA	29
2.1	REPRESENTAÇÃO DE DIRAC	29
2.2	POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA	33
2.3	DECOMPOSIÇÃO DE SCHMIDT	37
2.4	CORRELAÇÕES QUÂNTICAS	38
2.4.1	Não Localidade	38
2.4.2	Dirigibilidade Quântica (<i>Steering</i>)	40
2.4.3	Emaranhamento	41
2.4.4	Discórdia	44
2.4.5	Coerência Não Local	46
2.5	COMPUTADOR QUÂNTICO DA IBM	47
2.5.1	Bit	47
2.5.2	Bit quântico (q-bit)	47
2.5.3	Os Q-bits no IBMQE	49
2.5.4	Portas lógicas	52
2.5.5	Possibilidades de uso dos processadores da IBMQE	58
2.5.6	Exemplo: Teleportação quântica no IBMQE	59
3	GERANDO ESTADOS BELL-DIAGONAL AJUSTÁVEIS NOS PROCES- SADORES QUÂNTICOS DA IBM	63
3.1	CIRCUITO GERADOR DE UM ESTADO BELL-DIAGONAL	64
3.2	IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL DO CIRCUITO NO IBMQE	68
3.2.1	IBM Q 5 Yorktown (ibmqx2)	69
3.2.2	IBM Q 5 Tenerife (ibmqx4)	76
3.2.3	IBM Q 16 Melbourne (ibmq_16_melbourne)	79
3.3	COMPARAÇÃO DO EXPERIMENTO COM A TEORIA SOB EFEITO DE RÚIDO	83
3.3.1	Coposição dos Operadores de Kraus	83
3.4	DISCUSSÃO FINAL	88
4	VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO DIRETA ENTRE DISCÓRDIA E EMA- RANHAMENTO UTILIZANDO O COMPUTADOR QUÂNTICO DA IBM	91
4.1	RELAÇÃO DIRETA ENTRE DISCÓRDIA E EMARANHAMENTO	91
4.1.1	Relações entre discórdia e emaranhamento para estados Bell-diagonal evoluindo sob o canal <i>phase damping</i>	92
4.2	IMPLEMENTAÇÃO NO IBMQE	95
4.3	DISCUSSÃO FINAL	99
5	VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE RELAÇÕES DE COMPLEMEN- TARIDADE BASEADAS EM PROPRIEDADES DA MATRIZ DE DENSI- DADE	101
5.1	RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE	101
5.2	CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL	107
5.2.1	Estados de um q-bit	108
5.2.2	Estados aleatórios de um, dois e três q-bits	110
5.3	DISCUSSÃO FINAL	119
6	CONCLUSÃO	121

	REFERÊNCIAS	123
	APÊNDICE A – GRÁFICOS DO CAPÍTULO 5	133
	ANEXO A – CÓDIGOS PARA IMPLEMENTAÇÃO	139
A.1	ESTADOS	139
A.2	RECONSTRUÇÃO DO ESTADO.....	141
A.3	CÁLCULO DAS CORRELAÇÕES	143
A.4	CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS DE WERNER	145
A.5	CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS DE UM Q-BIT	147
A.6	CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS ALEATÓRIOS	149

1 INTRODUÇÃO

O início da Mecânica Quântica está ligado ao início do século XX, com o estudo de Max Planck (1901) sobre a teoria eletromagnética da radiação, que mais tarde, juntamente com a colaboração de Albert Einstein (1905) e Niels Bohr (1913), tornaram-se a base da teoria quântica, avançando continuamente por um caminho sem volta com outros grandes nomes da ciência, como os de Broglie, Heisenberg, Born, Dirac, Schrödinger e tantos outros. Paralelo a estas descobertas, a teoria da comunicação e a teoria da computação avançavam, em meados do século XX, com estudos de Claude Shannon (1948, 1949) e Alan Turing (1937, 1938), respectivamente, ocasionando a possibilidade de um grande salto no desenvolvimento da ciência e tecnologia.

Com a alta demanda computacional do final dos anos 1970, provocada pela necessidade de simular experimentos cada vez mais complexos, Richard Feynman (1982) propôs a ideia da computação quântica. Com essa possibilidade, sistemas quânticos muito complexos e difíceis de serem tratados em computadores clássicos seriam simulados com muito mais eficiência em computadores quânticos. Na década de 1980, David Deutsch (1985) idealizou a máquina de Turing quântica, capaz de modelar os efeitos de um computador quântico. Esse conceito mostrou a possibilidade de um poder computacional maior, quando comparado com computadores clássicos (DEUTSCH; JOZSA, 1992). Lov Grover (1996) desenvolveu o algoritmo para pesquisa em uma lista desordenada, que tem vantagens significativas em relação a um algoritmo de busca tradicional e Peter Shor (1997), trabalhando com fatoração de números primos, mas ainda longe de uma possibilidade de implementação em um computador quântico real, devido às restrições de ordem técnica. Com a prosperidade da tecnologia para a construção de dispositivos cada vez mais sofisticados, foram aos poucos vislumbrando a possibilidade de construção de um computador quântico. Na virada do milênio, começaram a surgir os primeiros protótipos de um computador quântico com a *D-Wave The Quantum Computing Company*. Depois a mesma empresa lançou em 2011 o que é considerado o primeiro computador quântico comercial.

Em 2016 a *International Business Machines* (IBM) disponibilizou uma plataforma interativa livre para qualquer pessoa testar suas habilidades em um computador quântico real, o *IBM Quantum Experience* (IBM QUANTUM, 2016). Essa foi uma grande oportunidade para pesquisadores, estudantes e indústria poderem realizar experimentos, pesquisa e o mais importante: aprender na prática quais são as vantagens e desvantagens de usar um computador quântico. Hoje já é de conhecimento da comunidade científica a existência de outros computadores quânticos ao redor do mundo, com grande investimento de outras gigantes do ramo da computação. Como a Microsoft, investindo em qubits topológicos (KITAEV, 2003) para seus computadores,

enquanto a Google, por outro lado, com o computador Sycamore, atingiu a supremacia quântica usando q-bits supercondutores (ARUTE et al., 2019). Devemos destacar, também, que um grupo de trabalho para desenvolver algo tão sofisticado não é formada por apenas um tipo de profissional, mas por uma equipe multidisciplinar que abrange muitas áreas.

Propriedades quânticas como coerência quântica (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), não localidade (BELL, 1966), *steering* (SCHRÖDINGER, 1935), emaranhamento (WERNER, 1989; HORODECKI et al., 2009) e discórdia (OLLIVIER; ZUREK, 2001) foram identificadas como recursos que podem ser usados em computação quântica (LIU; HU; LLOYD, 2017; SHI et al., 2017; BRUNNER et al., 2014; BRANCIARD et al., 2012). Neste trabalho, buscamos entender alguns aspectos dessas correlações quânticas quando implementamos um circuito no computador quântico da IBM. Escolhemos este computador, tendo em vista que ele é de uso livre e tem como um dos objetivos principais, segundo seus desenvolvedores, fornecer a possibilidade da pesquisa em computação quântica para muitas pessoas ao redor do mundo.

Dada a dificuldade de quantificar as correlações citadas anteriormente (GHARIBIAN, 2008; HUANG, 2014), optamos por trabalhar com os estados Bell-diagonal, que são amplamente utilizados para melhor entendimento de alguns desses recursos (HORODECKI; HORODECKI, 1996; LANG; CAVES, 2010; QUAN et al., 2016; QIN et al., 2012; KAY, 2012; WANG et al., 2014; MAZIERO et al., 2009), já que para esses estados temos a possibilidade de comparar os resultados obtidos no experimento com resultados teóricos bem estabelecidos. O circuito que desenvolvemos é capaz de criar estados Bell-diagonal ajustáveis, em particular trabalhamos com os estados de Werner.

O circuito que desenvolvemos (POZZOBOM; MAZIERO, 2019) é composto de 4 q-bits, sendo 2 q-bits para inicialização da operação e 2 q-bits auxiliares. Além das portas lógicas quânticas *Hadamard* e *CNOT*, foi utilizada uma porta unitária U , onde podemos controlar alguns parâmetros para gerar estados de superposição. Contudo, faz-se necessário ainda ter a capacidade de realização de medidas, que também está disponível no IBMQE, para que possamos fazer a reconstrução do estado que estamos estudando. Preparamos experimentalmente os estados de Werner, que são um subconjunto dos estados Bell-diagonal. Comparamos os dados experimentais com a teoria e analisamos os detalhes do processo de decoerência no sistema físico, melhor entendendo, assim, o efeito prejudicial que o ruído pode ter em protocolos quânticos realizados nesse sistema.

Relacionar duas grandezas físicas muitas vezes é objeto de estudo em diversas áreas. Como discórdia e emaranhamento são duas correlações quânticas de destaque, utilizamos nosso circuito para tentar verificar a relação direta entre elas, usando como base medidas geométricas (FELDMAN; MAZIERO; AUQUANET, 2017). No en-

tanto, nesses experimentos os resultados não acompanharam, com grande clareza, os resultados teóricos.

Por outro lado, sabemos da importância do Princípio da Complementaridade de Bohr para a MQ. Estudos recentes propuseram relações de complementaridade baseadas nas propriedades da matriz densidade que caracteriza o estado (BASSO; MAZIERO, 2020a, 2020b). Utilizamos o computador quântico da IBM para realizar testes experimentais dessas relações de complementaridade para uma classe particular de estados de um q-bit, e também para estados aleatórios de um, dois e três q-bits (POZZOBOM; BASSO; MAZIERO, 2021). Observamos como é o comportamento de cada uma das correlações quânticas calculadas e também qual o efeito da interação do sistema com o seu entorno.

No Capítulo 2, fazemos uma pequena revisão de alguns aspectos importantes da MQ para o trabalho. Também abordamos tópicos relacionados ao computador quântico da IBM, como tipos de portas que podem ser utilizadas para montagem do circuito, e quais as maneiras por meio das quais podemos montar nosso circuito. Abordamos ainda um pouco sobre a constituição dos q-bits que fazem parte do computador da IBM. No Capítulo 3, apresentamos o circuito que desenvolvemos para criar estados Bell-diagonal ajustáveis, mostrando os resultados obtidos no estudo das correlações para três diferentes processadores da IBMQE. No Capítulo 4, utilizamos os processadores da IBMQE para testar a relação direta entre discórdia e emaranhamento. Por fim, no Capítulo 5, testamos diversas relações de complementaridade baseadas em propriedades da matriz densidade para estados particulares de um q-bit e também para estados aleatórios de um, dois e três q-bits.

2 TÓPICOS IMPORTANTES DE MECÂNICA QUÂNTICA

Para o estudo apresentado neste trabalho, é importante revisar alguns tópicos de mecânica quântica (MQ), desde operações elementares entre vetores, passando pelos postulados da MQ, e também relembando algumas de suas principais correlações.

2.1 REPRESENTAÇÃO DE DIRAC

Um pouco diferente do que estamos acostumados, para representar um vetor, usamos a representação de Dirac, que é largamente empregada para definir as operações com vetores em MQ (NIELSEN; CHUANG, 2010; VEDRAL, 2006; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Neste trabalho, usamos a notação de “bras” e “kets”. Considerando um espaço vetorial complexo, que tem dimensão específica de acordo com o sistema físico com que estamos trabalhando, o estado de um sistema físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo. Chamamos este de vetor de “ket” e o denotamos por $|z\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, com sua dimensão $d = 1 \cdots n$. Adotamos aqui, que o ket contém todas as informações sobre o estado do sistema físico. A soma de dois kets também é um ket,

$$|z\rangle + |w\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (2.1)$$

Podemos multiplicar um ket $|z\rangle$ por um número complexo¹ α , e $|z\rangle$ continua sendo um ket,

$$\alpha|z\rangle = \alpha \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (2.2)$$

Devemos considerar, ainda, o elemento nulo tanto para a soma ($|\emptyset\rangle$), $|z\rangle + |\emptyset\rangle = |z\rangle \forall |z\rangle \in \mathbb{C}^n$, quanto para a multiplicação (\emptyset), $\emptyset|z\rangle = |\emptyset\rangle, \forall |z\rangle \in \mathbb{C}^n$.

¹Um número complexo $\alpha = a + ib$, possui duas partes: a parte $Real(\alpha) = a$ e parte $Imag(\alpha) = b$. O módulo de α é dado por $|\alpha| = \sqrt{\alpha\alpha^*}$, $\alpha\alpha^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. O número $\alpha^* = a - ib$ é chamado de complexo conjugado.

Um observável, como, por exemplo, a direção de magnetização, pode ser representado por um operador A , que, em geral, atua no *ket* pela esquerda, $A \cdot (|z\rangle) = A|z\rangle$. Existem vetores particulares $|\zeta_1\rangle, |\zeta_2\rangle, \dots$, que, quando lhe aplicamos o operador A , o resultado é o mesmo vetor, diferenciado, apenas, por um fator de multiplicação,

$$A|\zeta_1\rangle = \zeta_1|\zeta_1\rangle, A|\zeta_2\rangle = \zeta_2|\zeta_2\rangle, \dots \quad (2.3)$$

Esses vetores particulares $|\zeta_1\rangle, |\zeta_2\rangle, \dots$, são chamados de autovetores e os números que os multiplicam $(\zeta_1, \zeta_2, \dots)$, é o conjunto de autovalores do operador A .

É postulado que, para cada *ket* $|z\rangle$, existe uma contrapartida chamada de “*bra*”, e representamos por, $\langle z| = |z\rangle^\dagger = [z_1^* \ \dots \ z_n^*]$. O espaço dos *bras* é gerado por um conjunto de autovetores $\{\langle \zeta_1|, \langle \zeta_2|, \dots\}$, que corresponde a autovetores $\{|\zeta_1\rangle, |\zeta_2\rangle, \dots\}$. Para melhor entender essa descrição, podemos imaginar o espaço dos *bras* como um tipo imagem do espaço dos *kets*.

O produto interno para \mathbb{C}^n entre um *bra* e um *ket* é definido como:

$$(|z\rangle, |w\rangle) \equiv |z\rangle^\dagger |w\rangle = \langle z|w\rangle \quad (2.4)$$

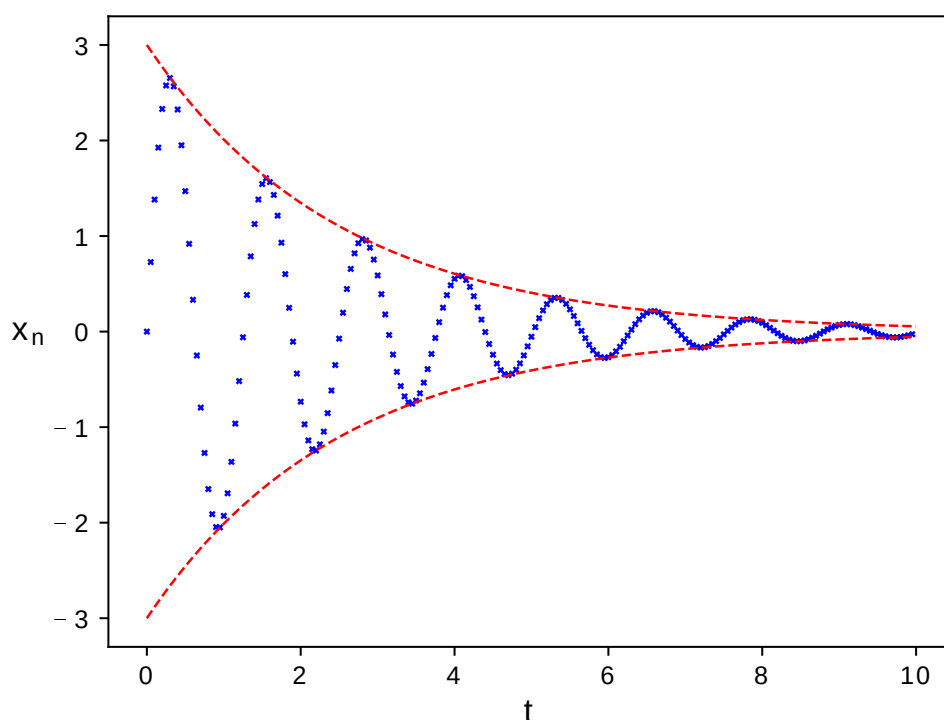
$$\langle z|w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j^* w_j, \quad (2.5)$$

isto é, o produto entre o complexo conjugado transposto de $|z\rangle$ e $|w\rangle$. Algumas propriedades do produto interno são bem importantes, como a linearidade no segundo argumento $(|z\rangle, \sum_j \alpha_j |w_j\rangle) = \sum_j \alpha_j \langle z|w_j\rangle$. Se tomamos o conjugado de um produto interno, isso altera a ordem de aplicação desse produto $(|z\rangle, |w_j\rangle) = (|w_j\rangle, |z\rangle)^*$, bem como $(|z\rangle, |z\rangle) \geq 0$, mas com a igualdade se e somente se $|z\rangle = |\emptyset\rangle$. Espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço complexo completo \mathbb{C}^n munido de produto interno, e mais algumas características descritas logo abaixo. Um espaço métrico M é dito *completo*, se qualquer sequência de Cauchy no espaço M converge (SANTOS, 2017; LIMA, 2017).

Uma sequência numérica é definida como uma função real, com elementos pertencentes ao conjuntos dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. A cada n está associado um número real x_n . O valor que a sequência x assume quando $n \in \mathbb{N}$ é representado por x_n , que é chamado de *n-ésimo termo* da sequência. As representações de uma sequência podem ser: $(x_1, x_1, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou ainda (x_n) . Não podemos confundir com a representação do conjunto de valores da sequência, chamado também de conjunto de *termos* da sequência $\{x_1, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$. Por exemplo, a sequência $(1, 2, 4, 8, \dots)$ pode ser representada na forma $(2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ ou ainda pela expressão $x_n = 2^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência de Cauchy é uma sequência que torna os seus termos, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, arbitrariamente mais próximos uns dos outros, conforme a sequência avança

Figura 2.1 – Exemplo de uma sequência de Cauchy. Os termos da sequência estão representados pelo marcador “x” (azul), enquanto que as linhas tracejadas (vermelho) auxiliam na visualização da aproximação dos pontos.



pelo conjunto \mathbb{N} . Mostramos, na Figura 2.1, um exemplo de uma sequência de Cauchy representada pela expressão $x_n = \sin(5t)3e^{(-0,4t)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, com $t = n/20$. Os pontos azuis representam os termos da sequência, enquanto as linhas vermelhas ajudam na visualização da aproximação dos pontos.

Considerando um espaço vetorial complexo V que contenha o elemento 0, um conjunto $|z\rangle$, $|w\rangle$ e $|q\rangle \in V$ e também os números complexos α e β , as seguintes propriedades são válidas (VEDRAL, 2006):

$$|z\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |z\rangle, \quad (2.6)$$

$$(|z\rangle + |w\rangle) + |q\rangle = |z\rangle + (|w\rangle + |q\rangle), \quad (2.7)$$

$$0 + |z\rangle = |z\rangle, \quad (2.8)$$

$$|z\rangle - |z\rangle = 0, \quad (2.9)$$

$$\alpha(\beta|z\rangle) = (\alpha\beta)|z\rangle, \quad (2.10)$$

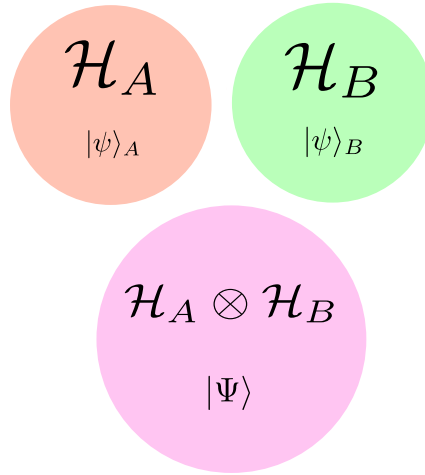
$$(\alpha + \beta)|z\rangle = \alpha|z\rangle + \beta|z\rangle, \quad (2.11)$$

$$\alpha(|z\rangle + |w\rangle) = \alpha|z\rangle + \alpha|w\rangle, \quad (2.12)$$

$$1|z\rangle = |z\rangle. \quad (2.13)$$

Para que $|z\rangle$ e $|w\rangle$ sejam ortogonais, o produto interno entre eles deve ser:

Figura 2.2 – Mera ilustração da representação e um espaço vetorial composto por dois outros espaços.



$\langle z|w\rangle = 0$, que implica em $\langle w|z\rangle = 0$. A norma de $|z\rangle$ é $\| |z\rangle \| = \sqrt{\langle z|z\rangle}$ e $|z\rangle$ é dito unitário quando $\| |z\rangle \| = 1$. Um conjunto de *kets* $|z_j\rangle$ é ortonormal se $\langle z_j|z_k\rangle = \delta_{jk}$, $\forall j, k$ e a normalização de um *ket* qualquer $|z\rangle$ é definido como sendo $|\tilde{z}\rangle \equiv \frac{|z\rangle}{\| |z\rangle \|}$.

Dado um espaço de Hilbert \mathcal{H} , um conjunto $\{|\zeta_j\rangle\}$ é um conjunto de vetores tal que $|z\rangle \in \mathcal{H}$. Podemos então escrever o *ket* da seguinte forma,

$$|z\rangle = \sum_j c_j |\zeta_j\rangle, \quad (2.14)$$

em que c_j são coeficientes complexos.

Produto tensorial é representado pelo símbolo “ \otimes ”, e pode ocorrer tanto entre vetores quanto matrizes. É a maneira que representamos a composição de dois ou mais espaços vetoriais quando temos sistemas de muitas partes, $\mathcal{H}_{a,b} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, ilustrado na Figura 2.2. Se considerarmos as bases $|a_j\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|b_k\rangle \in \mathcal{H}_b$, podemos escrever $|\Psi_{j,k}\rangle = |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle$ onde $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{a,b} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Qualquer vetor do espaço $\mathcal{H}_{a,b}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $|\Phi\rangle = \sum_{j,k} c_{j,k} |\Psi_{j,k}\rangle = \sum_{j,k} c_{j,k} |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle$, onde $c_{j,k} \in \mathbb{C}$. A dimensão de $\dim \mathcal{H}_{a,b} = \dim \mathcal{H}_a \dim \mathcal{H}_b$. Efeito do produto

tensorial em vetores $|a\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$ e $|b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$,

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \\ a_1 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Temos algumas propriedades do produto tensorial, para $c \in \mathbb{C}$, $|\psi_a\rangle \in \mathcal{H}_a$ e

$|\phi_b\rangle \in \mathcal{H}_b$,

$$c(|\psi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle) = (c|\psi_a\rangle) \otimes |\phi_b\rangle = |\psi_a\rangle \otimes (c|\phi_b\rangle). \quad (2.16)$$

Para $|\psi\rangle, |\eta\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|\phi_b\rangle \in \mathcal{H}_b$,

$$(|\psi_a\rangle + |\eta_a\rangle) \otimes |\phi_b\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle + |\eta_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle. \quad (2.17)$$

Para $|\psi_a\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|\phi_b\rangle, |\zeta_b\rangle \in \mathcal{H}_b$,

$$|\psi_a\rangle \otimes (|\phi_b\rangle + |\zeta_b\rangle) = |\psi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle + |\psi_a\rangle \otimes |\zeta_b\rangle. \quad (2.18)$$

2.2 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

Na mecânica quântica, seguimos alguns postulados. A partir deles podemos fazer previsões sobre experimentos, calcular as consequências teóricas e práticas e com isso verificar a sua validade. Se os resultados teóricos baseados nos postulados não descrevem corretamente o experimento, é um sinal de que devemos revisá-los.

O primeiro postulado é chamado de postulado dos estados, ao qual associamos um sistema físico a um espaço de Hilbert “ \mathcal{H} ”. Esse espaço é complexo e tem o produto interno bem definido. Um vetor $|\psi_0\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |o_j\rangle$ descreve completamente um sistema físico que pertence a esse espaço. Cada configuração possível do sistema deve ser descrita usando um único vetor desse espaço. O postulado das medidas é o segundo, a partir do qual, para cada quantidade observável o_j , é associado um operador linear hermitiano $O = O^\dagger$ do espaço de Hilbert. Para o caso discreto, podemos escrever $O = \sum_{j=1}^n o_j |o_j\rangle\langle o_j|$, com $o_j \in \mathbb{R}$, que corresponde aos valores possíveis de um observável. Valores diferentes dos observáveis correspondem a configurações diferentes do sistema $\langle o_j | o_k \rangle = \delta_{jk}$. O terceiro postulado mostra como evolui no tempo um estado de um sistema quântico fechado. Essa evolução é descrita pela equação de Schrödinger $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle$, na qual H é o operador hermitiano denominado hamiltoniano. A ação de operadores unitários U_t que descrevem a evolução temporal de sistemas quânticos é $|\psi\rangle = U_t |\psi_0\rangle$. Nesse caso a parte mais difícil é encontrar o U_t . Para sistemas nos quais o hamiltoniano é independente do tempo, temos U_t na forma de $U_t = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$.

Preparar experimentalmente um estado quântico individual para realizar medidas sobre ele é uma tarefa bem difícil. O que geralmente ocorre é a existência de incerteza sobre para qual estado o sistema foi preparado. Vamos considerar que obtemos acesso a sistema físico quântico com várias cópias idênticas, preparadas em um conjunto de estados puros $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\}$, com probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$,

onde as probabilidades satisfazem $0 \leq p_j \leq 1$ e $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Esses estados não necessitam ser autovetores de observáveis compatíveis. São considerados compatíveis os observáveis que compartilham a mesma base de autovetores, por exemplo, dois operadores hermitianos A e B , se eles comutarem $[A, B] = 0$, logo $A = \sum_j a_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ e $B = \sum_j b_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Agora se A e B forem incompatíveis, $[A, B] \neq 0$, eles não compartilham a mesma base de autovetores, então $A = \sum_j a_j |a_j\rangle\langle a_j|$ e $B = \sum_j b_j |b_j\rangle\langle b_j|$, logo vai existir pelo menos um $|a_j\rangle$ escrito como combinação linear de $|b_k\rangle$, $|a_j\rangle = \sum_k c_k |b_k\rangle$, com a soma tendo dois ou mais termos não nulos. Aqui $|c_k|^2$ é a frequência relativa com que o valor de $|b_k\rangle$ será obtido quando medirmos B .

Devemos, então, buscar por um objeto matemático que nos ajude a encontrar a expressão para a probabilidade de medir o valor b_k de um observável B desse sistema. Olhando para a regra de Born, sabemos calcular a probabilidade para os valores b_k no subconjunto de sistemas preparados no estado $|\psi_j\rangle$, que é:

$$\Pr(b_k|\vec{\psi}_j) = |\langle\psi_j|b_k\rangle|^2. \quad (2.19)$$

Logo, nosso problema, que é calcular a probabilidade de medir b_k considerando todo o conjunto de valores, pode ser calculado como a média dessas probabilidades, levando em consideração as probabilidades de preparação p_j :

$$\begin{aligned} \Pr[b_k|\{p_j, \vec{\psi}_j\}] &= \sum_{j=1}^m \Pr(b_k|\vec{\psi}_j)p_j \\ &= \sum_{j=1}^m |\langle b_k|\psi_j\rangle|^2 p_j \\ &= \sum_{j=1}^m \langle b_k|\psi_j\rangle\langle\psi_j|b_k\rangle p_j \\ &= \langle b_k|\left(\sum_{j=1}^m p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)|b_k\rangle \\ \Pr(b_k|\rho) &= \langle b_k|\rho|b_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde

$$\rho \equiv \sum_{j=1}^m p_j |a_j\rangle\langle a_j|, \quad (2.21)$$

é definido como *operador densidade* no espaço de Hilbert “ \mathcal{H} ”. Ele descreve completamente o estado do sistema como uma mistura estatística dos estados do conjunto completo (MAZIERO, 2015). O operador densidade é positivo semi-definido, $\rho \geq 0$, ou seja, tem autovalores não negativos. Para qualquer $|\xi\rangle \in \mathcal{H}$, devemos ter que

$\langle \xi | \rho | \xi \rangle \geq 0$, logo temos

$$\langle \xi | \rho | \xi \rangle = \langle \xi | \left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right) | \xi \rangle = \sum_j p_j \langle \xi | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \xi \rangle = \sum_j p_j |\langle \xi | \psi_j \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.22)$$

O chamado *traço* de uma matriz A é definido como a soma dos elementos da diagonal principal da matriz, $\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^d a_{jj}$. O traço de ρ é $\text{Tr}(\rho) = \sum_j \langle \psi_j | \rho | \psi_j \rangle$. O traço é invariante perante a mudança de base de representação. O traço do operador densidade é geralmente normalizado para que tenha valor igual a 1, $\text{Tr}(\rho) = 1$, tendo em vista a normalização das probabilidades $\sum_j p_j = 1$. Assim:

$$\text{Tr}(\rho) = \text{Tr} \left(\sum_j p_j |\psi\rangle \langle \psi| \right) = \sum_j p_j \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_j p_j = 1. \quad (2.23)$$

O operador densidade deve ser hermitiano, ou seja, $\rho = \rho^\dagger$. As regras da MQ podem ser aplicadas no formalismo do operador densidade. A evolução temporal para um sistema fechado em termos do operador densidade é $\rho(t) = U(t)\rho(0)U(t)^\dagger$, considerando inicialmente o tempo $t = 0$ na Equação 2.21 e com $U(t)U(t)^\dagger = U(t)^\dagger U(t) = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é o operador densidade. Outra característica é que, para estados puros, o operador densidade satisfaz a propriedade da idempotência, ou seja, $\rho = \rho^2$ e tem como consequência $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Podemos escrever na forma espectral $\rho = \sum_j \alpha_j |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j|$, onde α_j são autovalores reais que têm valor $0 \leq \alpha_j \leq 1$, relativos a seus autovetores $|\alpha_j\rangle$. Se considerarmos um estado misto qualquer na forma espectral $\rho^2 = \sum_j \alpha_j^2 |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j|$, naturalmente $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ devido a $0 \leq \alpha_j \leq 1$. Então o valor de $\text{Tr}(\rho^2)$ pode ser usado como uma medida de pureza do estado do sistema quântico.

Considerando-se uma variável que pode assumir um conjunto de valores de $\{a_j\}_{j=1}^d$ com probabilidades respectivas de $\{\text{Pr}(a_j)\}_{j=1}^d$, o valor médio é definido com

$$\langle A \rangle = \sum_{j=1}^d a_j \text{Pr}(a_j). \quad (2.24)$$

A probabilidade é dada pela regra de Born

$$\text{Pr}(a_j | \vec{\psi}) = |\langle a_j | \psi \rangle|^2, \quad (2.25)$$

então o valor médio de um observável A é:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \sum_{j=1}^d a_j \Pr(a_j | \vec{\psi}_j) \\
&= \sum_{j=1}^d a_j |\langle a_j | \psi \rangle|^2 \\
&= \sum_{j=1}^d a_j \langle a_j | \psi \rangle \langle \psi | a_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^d a_j \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \sum_{j=1}^d a_j | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle \\
\langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Teorema da decomposição espectral, se a ação de um operador A em um autovetor $|a_j\rangle$ resulta em um autovalor a_j , ou seja, $A|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$, temos então:

$$\langle a_j | A | a_j \rangle = \langle a_j | a_j | a_j \rangle = a_j \underbrace{\langle a_j | a_j \rangle}_{\delta_{jk}}. \tag{2.27}$$

Usando a relação de completeza para uma base ortonormal, $\mathbb{I} = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j|$,

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{I} A \mathbb{I} \\
&= \sum_j |a_j\rangle \langle a_j| A \sum_k |a_k\rangle \langle a_k| \\
&= \sum_j \sum_k |a_j\rangle \langle a_j| A |a_k\rangle \langle a_k| \\
&= \sum_j \sum_k \underbrace{\langle a_j | A | a_k \rangle}_{a_j \delta_{jk}} |a_j\rangle \langle a_k| \\
A &= \sum_j a_j |a_j\rangle \langle a_j|
\end{aligned} \tag{2.28}$$

é a representação espectral de A .

Função traço parcial é utilizada quando temos espaço composto $\mathcal{H}_{a,b} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Ela é um mapa que leva:

$$\text{Tr}_b : L(\mathcal{H}_{a,b}) \rightarrow L(\mathcal{H}_a),$$

onde $L(\mathcal{H})$ é o conjunto de operadores lineares no espaço vetorial \mathcal{H} . Se temos que

$|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|\eta\rangle, |\zeta\rangle \in \mathcal{H}_b$,

$$\text{Tr}_b(|\psi\rangle\langle\phi| \otimes |\eta\rangle\langle\zeta|) := |\psi\rangle\langle\phi| \text{Tr}(|\eta\rangle\langle\zeta|), \quad (2.29)$$

mas como $\text{Tr}(|\eta\rangle\langle\zeta|) = \langle\zeta|\eta\rangle = c$ e c é um número, então:

$$\text{Tr}_b(|\psi\rangle\langle\phi| \otimes |\eta\rangle\langle\zeta|) = c|\psi\rangle\langle\phi| \in L(\mathcal{H}_a). \quad (2.30)$$

2.3 DECOMPOSIÇÃO DE SCHMIDT

Assim como o traço parcial, a decomposição de Schmidt é uma ferramenta importante para estudar sistemas quânticos compostos (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Supomos que existam dois espaços \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B que possuem bases ortonormais $|s_j^a\rangle$ e $|s_j^b\rangle$. Qualquer $|\Psi\rangle$, um estado puro, formado pela composição dos espaços \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , pode ser escrito

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_j |s_j^a\rangle \otimes |s_j^b\rangle, \quad (2.31)$$

onde α_j são números reais não negativos que satisfazem a condição $\sum_j \alpha_j^2 = 1$, chamados de coeficientes de Schmidt. Agora, se tomamos a função traço parcial

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B (|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\ &= \text{Tr}_B \left(\sum_{j=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_j |s_j^a\rangle \otimes |s_j^b\rangle \sum_{k=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_k^* \langle s_k^a| \otimes \langle s_k^b| \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\min(d_a, d_b)} \sum_{k=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_j \alpha_k^* \text{Tr}_B (|s_j^a\rangle\langle s_k^a| \otimes |s_j^b\rangle\langle s_k^b|) \\ &= \sum_{j=1}^{\min(d_a, d_b)} \sum_{k=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_j \alpha_k^* |s_j^a\rangle\langle s_k^a| \text{Tr}_b (|s_j^b\rangle\langle s_k^b|) \\ \rho_A &= \sum_{j=1} \alpha_j^2 |s_j^a\rangle\langle s_j^a|, \end{aligned} \quad (2.32)$$

vemos que, se existir mais de um valor de α_j não nulo, o estado não é separável. O mesmo vale para ρ_B .

Denominado de emaranhamento por Schrödinger, esse fenômeno, que trata de características não-locais, só ocorre no universo quântico e não tem análogo clássico. Se um sistema é constituído de duas ou mais partes e podemos representá-las sepa-

radamente, dizemos que ele é não emaranhado, ou seja, separável. Do contrário, se não conseguimos representar as partes separadamente, o sistema é dito emaranhado.

Para misturas estatísticas de estados, utilizamos como medida de emaranhamento a negatividade, descrita de maneira sucinta abaixo, que utiliza o critério da separabilidade de Peres (1996).

2.4 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS

Correlação é um termo muito usado em estatística. Confere a ideia de um modelo probabilístico quando temos algum tipo de estatística envolvida, sem a necessidade de identificar uma observação individual, dentre um conjunto de dados observados. Sendo assim, se um sistema é formado por duas partes, e temos algum conhecimento sobre uma das partes, podemos fazer alguma previsão sobre a outra parte. A MQ tem como uma de suas partes mais contraintuitivas a natureza não local. Uma das possibilidades de utilização dessas características contraintuitivas é na teleportação, por exemplo, que utiliza o emaranhamento como aspecto primordial para acontecer. Nas próximas seções, vamos tratar um pouco de cada uma das correlações que foram medidas no experimento no computador quântico da IBM.

2.4.1 Não Localidade

Einstein, Podolsky e Rosen (1935) questionaram se a teoria das propriedades de um sistema físico com partes separadas espacialmente era completa. Uma teoria completa define que, para cada elemento de realidade física, existe uma contrapartida na teoria. A definição de realidade está ligada à previsibilidade de um sistema físico. Se, sem perturbar o sistema, pudermos prever com certeza (com probabilidade igual a um), o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a essa quantidade física.

Como exemplo, consideremos uma desigualdade de Bell famosa: a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) (CLAUSER et al., 1969). Alice e Bob recebem cada um uma partícula, A e B, que foram preparadas por Charles. Os laboratórios de Alice, Bob e Charles estão separados espacialmente. Alice e Bob podem escolher medir os observáveis A_1 , A_2 e B_1 , B_2 , respectivamente. Eles fazem isso e, como estão separados espacialmente, uma medida não pode interferir na outra. Essa afirmação está ligada à localidade de Einstein, que afirma que o valor de um observável medido no laboratório da Alice não depende da escolha do observável a ser

medido no laboratório de Bob e nem do valor obtido. Outra questão a ser considerada é o determinismo, que supõe que existem variáveis ocultas locais cujos valores (ou distribuição de probabilidades) determinariam qual valor será obtido na medida de qualquer observável do sistema. O valor dessas medidas pode assumir -1 ou +1. Se considerarmos a quantidade física

$$C := A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2), \quad (2.33)$$

isso acontece tanto para $B_1 = B_2$ e $B_1 = -B_2$. Se $A_1 = a_1, A_2 = a_2, B_1 = b_1$ e $B_2 = b_2$ são os valores possíveis dos observáveis, e $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ é a probabilidade conjunta desses valores, o valor médio do observável na Equação 2.33 é

$$\begin{aligned} \mu C &= \mu[A_1B_1 - A_1B_2 + A_2B_1 + A_2B_2] \\ &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)[a_1b_1 - a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2] \\ &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)a_1b_1 + \\ &\quad - \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)a_1b_2 + \\ &\quad + \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)a_2b_1 + \\ &\quad + \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)a_2b_2 \\ &= \mu[A_1B_1] - \mu[A_1B_2] + \mu[A_2B_1] + \mu[A_2B_2]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Combinando as duas equações anteriores, temos a desigualdade CHSH:

$$|\mu[A_1B_1] - \mu[A_1B_2] + \mu[A_2B_1] + \mu[A_2B_2]| \leq 2, \quad (2.35)$$

na qual $\mu(N)$ é o valor médio de N .

A não localidade, a primeira vista, é uma correlação que não pode ser explicada pela teoria de variáveis ocultas. Uma medida de não localidade baseada na desigualdade CHSH foi obtida analiticamente por Costa e Angelo (2016):

$$N(\rho) = \max \left(0, \frac{\sqrt{\|\vec{c}\|^2 - c_{\min}^2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right). \quad (2.36)$$

Essa medida que usamos vale para estados de dois q-bits, onde o c_{\min} é o valor mínimo entre as componentes do vetor correlação $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Usamos como componentes do vetor correlação os valores singulares da matriz correlação $C = (c_{jk}) = \text{Tr}(\rho\sigma_j \otimes \sigma_k)$ para $j, k = 1, 2, 3$, com σ_j sendo as matrizes de Pauli. Não

localidade é uma característica que está associada com a possibilidade de estados quânticos correlacionados serem definidos simultaneamente através de uma observação sobre um deles, mesmo que estejam separados espacialmente. Sendo assim, se o sistema físico tem correlações mais fortes que as correlações clássicas, é porque ele tem características não locais.

2.4.2 Dirigibilidade Quântica (*Steering*)

A dirigibilidade quântica foi proposta por Schrödinger (1935, 1936) para poder descrever a capacidade de um observador poder afetar o estado de um sistema muito distante por meio de medições locais bem adequadas. Ou seja: se consideramos um sistema emaranhado, compartilhado por dois laboratórios A e B , realizando medidas no laboratório A , podemos controlar remotamente o estado do laboratório B . Isso não pode acontecer se o estado compartilhado for somente classicamente correlacionado. O termo mais conhecido é *steering*, e assim trataremos no restante do texto.

Em uma visão mais moderna, *steering* corresponde à impossibilidade para caracterizar estados condicionais através de um modelo de estados ocultos. Devido à interpretação operacional atribuída ao *steering* (WISEMAN; JONES; DOHERTY, 2007; JONES; WISEMAN; DOHERTY, 2007), ele está estabelecido em um grau hierárquico entre o emaranhamento e a não localidade, o que possibilita inferir que nem todo estado emaranhado possui *steering* e nem todo estado que possui *steering* é não local. Usamos em nosso trabalho uma medida para quantificar o *steering* para um estado de dois q-bits proposta por Costa e Angelo (2016). No trabalho citado anteriormente, a medida de dirigibilidade de um determinado estado é a quantidade pela qual uma desigualdade de *steering* é violada ao máximo. Essa desigualdade, que foi o ponto de partida para a quantificação do *steering*, foi desenvolvida por Cavalcanti e colaboradores (2009). Essa estratégia é muito semelhante à usualmente empregada para quantificar a não localidade de Bell em estados bipartidos.

Para estados de dois q-bits, os autores Costa e Angelo (2016) obtiveram uma forma analítica para uma medida de *steering*, que é representada pela seguinte equação:

$$S(\rho) = \max \left(0, \frac{\|\vec{c}\| - 1}{\sqrt{3} - 1} \right), \quad (2.37)$$

em que \vec{c} representa os mesmos parâmetros da Equação 2.36. Estados com *steering* são mais vantajosos para algumas tarefas, como, por exemplo, processamento de informação quântica (BRANCIARD; GISIN, 2011).

2.4.3 Emaranhamento

Em MQ, os estados são representados por vetores em um espaço vetorial, chamado de espaço de Hilbert “ \mathcal{H} ”. Esse espaço vetorial é completo, sendo bem definidos em seu domínio o produto interno, o elemento nulo, o elemento inverso e os vetores, seguindo a notação de Dirac.

Temos um estado composto de duas partes, $|\psi\rangle_A$ e $|\psi\rangle_B$, que pertencem, respectivamente, a \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , e podem ser escritos nas bases $\{|a_j\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ e $\{|b_k\rangle\} \in \mathcal{H}_B$, com $j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_A$, e o análogo vale para k . Podemos representar um vetor nesse espaço composto como: $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Então:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \mathbb{I}_{AB}|\Psi\rangle \\ &= \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B |\Psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde \mathbb{I}_{AB} é a matriz identidade. Podemos escrever a matriz identidade na forma de uma relação de completeza. Assim,

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{j=1}^{d_A} |a_j\rangle\langle a_j| \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{d_B} |b_k\rangle\langle b_k| \right) |\Psi\rangle. \quad (2.39)$$

Usando uma das propriedade do produto tensorial, $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$,

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle (\langle a_j| \otimes \langle b_k| \Psi\rangle) = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} c_{jk} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle, \quad (2.40)$$

onde $c_{jk} = (\langle a_j| \otimes \langle b_k|) |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{ab}$ são os coeficientes complexos.

Um estado puro composto é dito separável se podemos escrevê-lo como a composição entre as duas partes através do produto tensorial:

$$|\Psi^{sep}\rangle := |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.41)$$

sendo que os critérios de separabilidade foram estabelecidos por Peres (1996). Nesse caso, se conhecemos bem as duas partes do sistema, conhecemos o estado composto como um todo. Relacionando com a entropia de von Neumann,

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho), \quad (2.42)$$

notamos que ela é zero tanto para o estado composto $|\Psi^{sep}\rangle$, quanto para as suas partes. Basta encontrarmos o operador densidade reduzido através do traço parcial $\text{Tr}_A |\Psi^{sep}\rangle\langle\Psi^{sep}| = |\psi_B\rangle\langle\psi_B| = \rho_B$ e a entropia $S_B = 0 = S_A$. Observamos que estados separáveis são pouco comuns em sistemas compostos (POPESCU; SHORT; WIN-

TER, 2006). Isso acontece porque dificilmente tratamos um ente quântico isolado, mas sim um sistema composto entre o ente quântico, interagindo com o ambiente, que, em geral, cria correlações entre eles.

Agora, para estados puros mais gerais, da forma

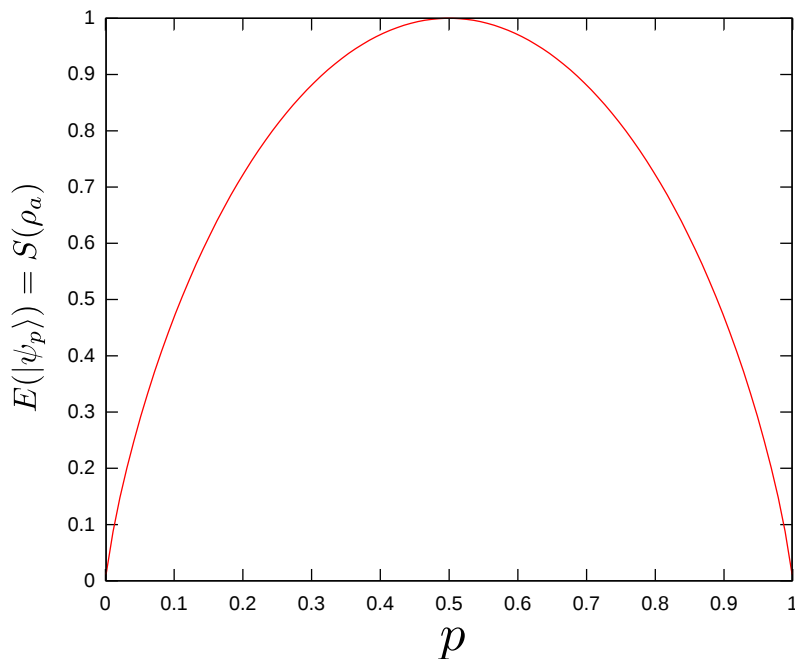
$$|\Psi\rangle = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} c_{jk} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle, \quad (2.43)$$

normalmente não é possível decompor esse estado geral em um produto tensorial, no qual cada parte pertence a um subespaço. Por exemplo, para o estado

$$|\Psi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.44)$$

temos então que $S(|\Psi_+^{AB}\rangle) = 0$. Calculamos a entropia das partes para o estado $|\Psi_+^{AB}\rangle$ e notamos que ela é máxima, $S_A = S_B = 1$. Conseguimos descrever bem o sistema como um todo, mas não conhecemos o estado de suas partes, o que é contraintuitivo do ponto de vista da mecânica clássica (MC). Na realidade a não separabilidade de um estado composto implica a existência de emaranhamento. Um exemplo mais geral seria o estado $|\psi_p\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$, cujo emaranhamento está mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Comportamento do emaranhamento para o estado $|\psi_p\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$, calculado a partir da entropia, onde \sqrt{p} é a amplitude de probabilidade de encontrarmos o estado em $|00\rangle$ ou $|11\rangle$.



A negatividade (ŻYCZKOWSKI et al., 1998; VIDAL; WERNER, 2002) é uma das possibilidades de quantificar o emaranhamento e baseia-se no estudo da transposta parcial de um operador densidade. Consideramos que uma matriz M é positiva semidefinida². A transposta, $\mathbb{T}(|j\rangle\langle k|) = |k\rangle\langle j|$, é um mapa linear e positivo, logo a transposta $\mathbb{T}(M)$ também será positiva semidefinida.

Então, se temos que ρ_{AB}^{sep} , é um operador densidade formado pela composição de ρ_j^A e ρ_j^B que são positivos semidefinidos, logo ρ_{AB}^{sep} também é positivo e pode ser escrito como:

$$\rho_{AB}^{sep} = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B. \quad (2.45)$$

Definimos a transposta parcial como:

$$\mathbb{T}_A(\rho_{AB}^{sep}) := \mathbb{T} \otimes \mathbb{I}(\rho_{AB}^{sep}) \text{ e } \mathbb{T}_B(\rho_{AB}^{sep}) := \mathbb{I} \otimes \mathbb{T}(\rho_{AB}^{sep}). \quad (2.46)$$

Quando aplicamos a esse operador densidade separável,

$$\mathbb{T}_B(\rho_{AB}^{sep}) = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \mathbb{T}(\rho_j^B), \quad (2.47)$$

notamos que $\mathbb{T}_B(\rho_{AB}^{sep})$ continua sendo um operador positivo semidefinido, e o análogo vale para $\mathbb{T}_A(\rho_{AB}^{sep})$.

Agora, se ρ_{AB} não for separável, por exemplo,

$$\rho_{AB} = |\Phi_+^{AB}\rangle\langle\Phi_+^{AB}| \quad (2.48)$$

com $|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, quando aplicamos a transposta parcial

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_B(\rho_{AB}) &= \mathbb{T}_B[(|\Phi_+^{AB}\rangle\langle\Phi_+^{AB}|)] \\ &= \mathbb{T} \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{T}|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{T}|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{T}|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{T}|1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|), \end{aligned} \quad (2.49)$$

chegamos a uma nova matriz. Se calcularmos os autovalores dessa matriz, encontramos, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Notamos, assim, que existe um autovalor negativo. Então, a nova matriz falha em ser positiva semidefinida. Essa característica é usada como uma medida de emaranhamento. Quanto maior o valor da soma dos módulos dos autova-

²Nesse caso, todos os seus autovalores serão maiores ou iguais a zero. Usamos a notação $M \geq 0$.

lores negativos da matriz transposta parcial de ρ_{AB} , mais emaranhado consideramos o sistema. O emaranhamento dado pela negatividade é definido como:

$$E_n(\rho_{AB}) := \frac{1}{2}(\|\mathbf{T}_b(\rho_{AB})\|_{\text{Tr}} - 1), \quad (2.50)$$

onde $\|M\|_{\text{Tr}} := \text{Tr}\sqrt{M^\dagger M}$ é a norma do traço. Essa medida de emaranhamento só é válida para sistemas bipartidos com dimensão máxima de $d = 6 = 2 \otimes 3 = 3 \otimes 2$.

Uma outra maneira de calcular o emaranhamento é chamada de *concurrence* (WOOTTERS, 1998) e é calculada pela seguinte equação:

$$E(\rho) = \max \left(0, 2 \sqrt{\lambda_{\max} - \sum_{j=0}^3 \sqrt{\lambda_j}} \right), \quad (2.51)$$

onde λ_j são autovalores de $\rho\sigma_2 \otimes \sigma_2\rho^*\sigma_2 \otimes \sigma_2$, com ρ^* sendo o complexo conjugado de ρ quando representamos na base computacional. λ_{\max} é o maior autovalor entre os conjunto de autovalores λ_j .

2.4.4 Discórdia

Discórdia é um tipo de correlação quântica mais geral que o emaranhamento e foi proposta por Ollivier e Zurek (2001), tendo como base a informação mútua. Ela corresponde à quantidade mínima de correlação que é destruída quando se faz medidas locais não seletivas, sendo definida da seguinte forma:

$$D(\rho_{ab}) = I(\rho_{ab}) - C(\rho_{ab}). \quad (2.52)$$

Na Equação 2.52, $I(\rho_{ab})$ é a informação mútua quântica de um sistema de duas partes, A e B . Este sistema é representado por um operador densidade

$$\rho_{ab} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_b + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j^a \otimes \sigma_j^b \right), \quad (2.53)$$

onde \mathbb{I} é o operador identidade, σ_j são os operadores de Pauli atuando nos subespaços A e B . Nesse caso c_j é um número real, $0 \leq |c_j| \leq 1$, com $j = 1, 2, 3$. A informação mútua é calculada por

$$I(\rho_{ab}) = S(\rho_a) + S(\rho_b) - S(\rho_{ab}), \quad (2.54)$$

em que $\rho_a = \text{Tr}_b(\rho_{ab})$ e $\rho_b = \text{Tr}_a(\rho_{ab})$.

A informação mútua representa as correlações totais do sistema, englobando

as correlações de natureza clássica e de natureza quântica. A entropia de von Neumann $S(\rho_x) = -\text{Tr}(\rho_x \log_2 \rho_x)$ é a equação matemática que quantifica a incerteza quântica sobre o estado do sistema físico, representado por um operador densidade ρ_x .

A correlação clássica é

$$C(\rho_{ab}) = \max_{\{\Pi_k^b\}} [S(\rho_a) - S(\rho_{ab}|\{\Pi_k^b\})]. \quad (2.55)$$

Neste caso a entropia relativa do subsistema A , tomando como base o conhecimento do estado do subsistema B , é $S(\rho_{ab}|\{\Pi_k^b\}) = \sum_j a_j S(\rho_a^j)$, com $\rho_a^j = \text{Tr}_b[(\mathbb{I}_a \otimes \Pi_j^b) \rho_{ab} (\mathbb{I}_a \otimes \Pi_j^b)] / a_j$ sendo o operador densidade medido reduzido e $a_j = \text{Tr}_{ab}[\rho_{ab} (\mathbb{I}_a \otimes \Pi_j^b)]$ a probabilidade do sistema estar em um estado j depois da medida, onde $\{\Pi_k^b\}$ é o conjunto completo de medidas projetivas sobre o subsistema B e índice k e remonta a cada uma dessas medidas.

A equação que calcula a correlação clássica envolve uma maximização de um conjunto de medidas projetivas. Logo, obtemos informação do subsistema A depois de $\{\Pi_k^b\}$ medidas no subsistema B . Para esta abordagem da discórdia, utilizamos medidas projetivas ao invés das medidas de POVM (sigla em inglês para *Positive Operator-Valued Measure*), como foi usado na definição original de correlação clássica (ENDERSON; VEDRAL, 2001). Fazemos essa análise, tendo em vista que Hamieh *et al.* (2004) mostraram que, para estados de dois q-bits, as medidas POVM que levam ao máximo da Equação 2.55 são medidas projetivas.

Uma rápida análise sobre POVM pode ser encontrada em (NIELSEN; CHUANG, 2010), que consideram o estado de um sistema quântico representado por $|\psi\rangle$. As medidas sobre esse sistema quântico são descritas por um conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$, onde o índice m representa os possíveis resultados das medidas. Então a probabilidade de que o resultado m ocorra é dada por:

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (2.56)$$

Os operadores de medida satisfazem a relação de completudeza $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}$, considerando, assim, que a soma das probabilidades dos possíveis resultados é igual a 1, ou seja, $\sum_m p(m) = 1$. É definido

$$E_m \equiv M_m^\dagger M_m, \quad (2.57)$$

onde E_m é um operador positivo semidefinido para todo m tal que $\sum_m E_m = \mathbb{I}$ e $p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle$. Desse modo, o conjunto de operadores E_m é suficiente para determinar as probabilidades dos diferentes resultados de medição. Os operadores E_m são conhecidos como *elementos POVM* associados a uma medida, enquanto o conjunto completo $\{E_m\}$ é conhecido como *POVM*.

A discórdia quântica é definida como a diferença entre duas medidas de informação classicamente equivalentes e indica a presença de correlações devido à não comutatividade de operadores quânticos. Se não sabemos o resultado dessas medições, existe uma quantidade mínima de correlações quânticas que serão destruídas. Essa quantidade que foi destruída é chamada de discórdia.

2.4.5 Coerência Não Local

A coerência quântica é um aspecto fundamental em sistemas quânticos, que muitas vezes é quebrado devido à interação do sistema com o ambiente. Embora essas ideias sobre coerência quântica sejam abordadas há bastante tempo (FEYNMAN; SANDS, 1965; WOLF; MANDEL, 1995), a capacidade de quantificar essa correlação como um recurso foi abordada recentemente (ÅBERG, 2014; BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014; LEVI; MINTERT, 2014).

Nós começamos com estados incoerentes, que são os chamados estados livres, ou seja, são matrizes densidade que são diagonais em uma base de referência $|j\rangle$, por exemplo,

$$\iota = \sum_{j=1}^d \iota_j |j\rangle\langle j|, \quad (2.58)$$

em que ι_j é a distribuição de probabilidade e $d = \dim \mathcal{H}$ é a dimensão de um espaço de Hilbert do sistema. Usamos f para denotar um conjunto de todas as matrizes densidade do tipo 2.58 e a coerência quântica dada pela norma- l_1 definida da seguinte forma:

$$C(\rho) := \min_{\iota \in f} \|\rho - \iota\|_{l_1} = \sum_{j \neq k} |\langle j|\rho|k\rangle|, \quad (2.59)$$

onde a norma- l_1 de um operador M é $\|M\|_{l_1} := \sum_{jk} |\langle j|M|k\rangle|$. Essa coerência monótona satisfaz as propriedades necessárias. Por exemplo, é zero se e somente se ρ for um estado incoerente, e não aumenta sob mistura ou operações incoerentes. Para mais detalhes, consultar (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014).

Utilizamos para medir a coerência não local (POZZOBOM; MAZIERO, 2017), que é simplesmente a superposição no espaço de estados, definida pela seguinte equação:

$$C_{nl}(\rho_{AB}) := C(\rho_{AB}) - C_l(\rho_{AB}), \quad (2.60)$$

na qual $C_l(\rho_{AB}) = C(\rho_A) + C(\rho_B)$ é a coerência local que está relacionada com a coerência das partes, nesse caso A e B , onde $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ e $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$. A função $C(\rho_{AB})$ é a coerência total do sistema.

2.5 COMPUTADOR QUÂNTICO DA IBM

Nos últimos anos, os supercondutores passaram de dispositivos físicos promissores para componentes de processadores quânticos úteis e escaláveis. Nesta seção, serão apresentados como são compostos os q-bits que estão disponíveis na plataforma interativa da IBM, chamada de *IBM Quantum Experience* (IBMQE). Será realizada uma introdução sobre as portas lógicas que são utilizadas no IBMQE. Também faremos um breve comentário de como foi realizada a reconstrução dos estados, para posterior verificação dos preparados no IBMQE.

2.5.1 Bit

Para a comunicação clássica, a unidade básica para a transmissão e armazenamento de informação é o *bit*, *binary digit*. Nele uma entidade física pode estar em uma configuração, de duas possíveis. Assim, por exemplo, um interruptor elétrico pode estar desligado ou ligado. Seja qual for a entidade física, poderemos interpretar essa configuração como 0 para uma das possibilidades e 1 para outra.

Um computador clássico, por exemplo, transforma todas as informações inseridas pelo teclado em uma combinação de vários bits para formar um texto. Matematicamente, os dois bits clássicos são representados por 0 e 1.

2.5.2 Bit quântico (q-bit)

O bit quântico, chamado de *qubit*³ (SCHUMACHER, 1995) é o análogo quântico para o bit como unidade de transmissão de informação quântica. No entanto, ele pode ser escrito matematicamente como uma combinação linear da gama de possibilidades que pode assumir. Matematicamente, os bits quânticos podem ser representados por um vetor na base computacional, podendo assumir dois estados,

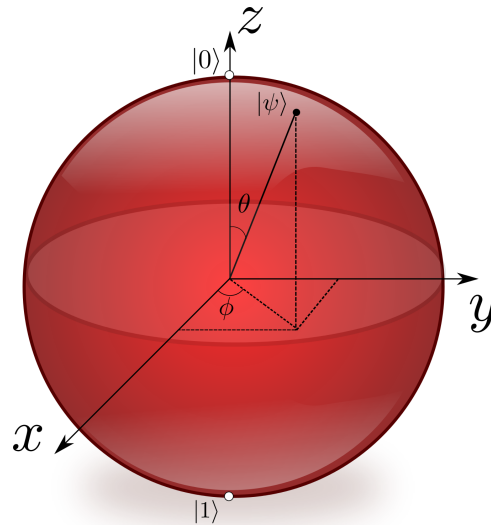
$$|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou ainda pela combinação linear desses vetores

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (2.61)$$

³A terminologia mais usada na língua portuguesa é q-bit.

Figura 2.4 – Um estado $|\psi\rangle$ na esfera de Bloch pode representar qualquer sistema de dois níveis. Os ângulos θ e ϕ estão entre $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O estado de um q-bit em função dos ângulos $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle$.



Fonte: Adaptado de Wilde (2013).

Essa capacidade de poder estar em um estado de superposição é o que o diferencia dos bits clássicos. O q-bit é um sistema de dois níveis, mas, nesse caso, podemos dizer que a entidade física está em um estado no qual as duas configurações são possíveis, ou seja, está em superposição de estados.

Na Equação 2.61, α e β são amplitudes de probabilidade do estado do q-bit. Esses coeficientes pertencem ao espaço complexo \mathbb{C} . Quando fazemos uma medida no q-bit, obtemos $|0\rangle$ com probabilidade α ou obtemos $|1\rangle$ com probabilidade β , sendo a soma das probabilidades $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, para um estado normalizado para tamanho 1. Para estados puros, a representação geométrica é a casca esférica da esfera de Bloch. Veja na Figura 2.4. A representação geométrica para um estado geral qualquer de um q-bit é:

$$\rho = 2^{-1}(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.62)$$

em que $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ são as componentes do vetor e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar qualquer sistema de dois níveis como um vetor nessa esfera⁴.

⁴As componentes desse vetor na esfera de Bloch são $r_1 = r \sin \theta \cos \phi$, $r_2 = r \sin \theta \sin \phi$ e $r_3 = r \cos \theta$, para $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

2.5.3 Os Q-bits no IBMQE

Computadores quânticos saltaram em desenvolvimento nos últimos anos, com capacidade experimental de dois a três para dezenas de q-bits. O que era esperado, a confirmação da supremacia quântica (WENDIN, 2017) para a década de 2020, com conjunto entre cinquenta e cem q-bits aconteceu ainda em 2019 (ARUTE et al., 2019). A supremacia quântica está relacionada com a capacidade de um computador quântico realizar uma tarefa que não acreditamos que possa ser desempenhada eficientemente por um computador clássico. Na supremacia quântica, estamos buscando vantagem super-polinomial do algoritmo quântico com relação ao melhor algoritmo clássico conhecido para a tarefa.

Esta comprovação da supremacia quântica ainda merece algumas ressalvas, como, por exemplo, a resolução de um problema muito específico. Ademais, existem algumas controvérsias por parte de grupos concorrentes (IBM QUANTUM, 2019c). Esse tipo de disputa no campo da ciência se mostra, na maioria das vezes, salutar para o avanço tecnológico. Entretanto, o que está de fato bem estabelecido hoje é a integração de computadores quânticos e clássicos, nos proporcionando a capacidade de estudar muitos aspectos da MQ, como emaranhamento, discórdia, não localidade, entre outras. Isso pode se estender para sistemas mais complexos, como simulações em outras áreas da Física, Química, engenharia dos materiais, entre outras.

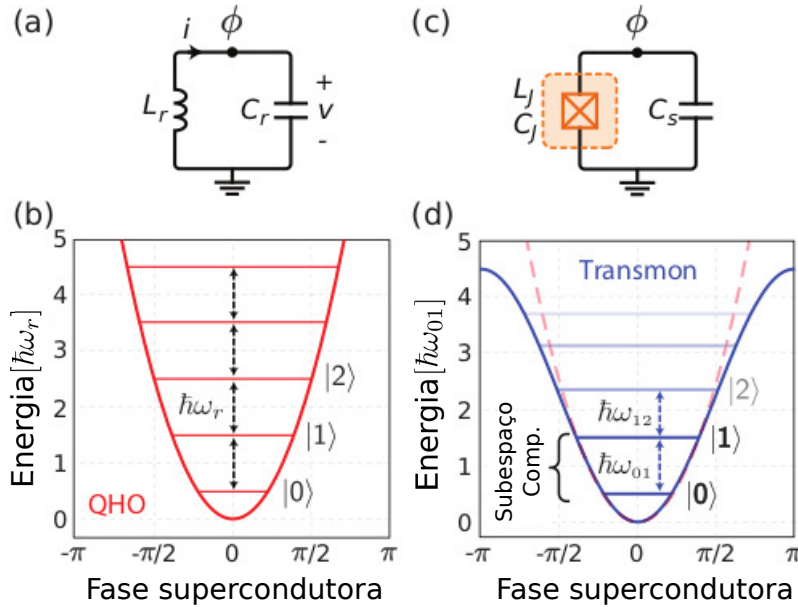
Os q-bits dos chips da IBMQE são chamados q-bits de estado sólido, construídos a partir de materiais supercondutores. Os primeiros q-bits supercondutores foram propostos com base nas caixas de pares de Cooper (NAKAMURA; PASHKIN; TSAI, 1999). Para esse caso, o tempo de coerência⁵ era muito pequeno, na casa dos nanossegundos, o que comprometia muito a eficiência dos dispositivos, impossibilitando a preparação e a medida de estados quânticos de forma adequada.

Um passo mais importante foi a realização experimental de q-bits integrados a ressonadores de micro-ondas coplanares supercondutores (WALLRAFF et al., 2004; MAJER et al., 2007). Logo a seguir, tem-se possibilidade de realizar sistemas de múltiplos q-bits potencialmente escaláveis com tempos de coerência mais longos e úteis (KOCH et al., 2007). Avançando um pouco mais com dispositivos incorporando uma dimensão 3D, o tempo de coerência se aproxima da casa dos $100\mu s$ (PAIK et al., 2011), o que ainda é baixo para produção de computadores em larga escala, mas já possível para construção de computadores quânticos em ambientes bem controlados, possibilitando, assim, a realização de testes e estudos mais detalhados sobre suas propriedades.

Esse q-bits são baseados em um circuito que transmite uma certa corrente em um circuito LC simples, no qual o L é o indutor e o C é o capacitor, como vemos na

⁵Tempo de coerência é o tempo em que o dispositivo mantém as características quânticas, como coerência.

Figura 2.5 – O item (a) representa o circuito LC, o item (b) mostra as linhas de energia para esse circuito e notamos um espaçamento equidistante entre elas. Já no item (c), temos o circuito onde o capacitor foi substituído pela junção de Josephson (quadro laranja), o que pode ser visto no gráfico da energia como a introdução de uma não equidade entre os espaçamentos dos níveis de energia.



Fonte: Adaptado de Krantz *et al.* (2019).

figura 2.5(a). Na referência (KRANTZ et al., 2019), os autores definem o fluxo reduzido $\phi := \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}$ e a carga reduzida $n := \frac{Q}{2e}$. Então, o hamiltoniano do oscilador harmônico quântico é,

$$H = 4E_c n^2 + \frac{1}{2} E_L \phi^2, \quad (2.63)$$

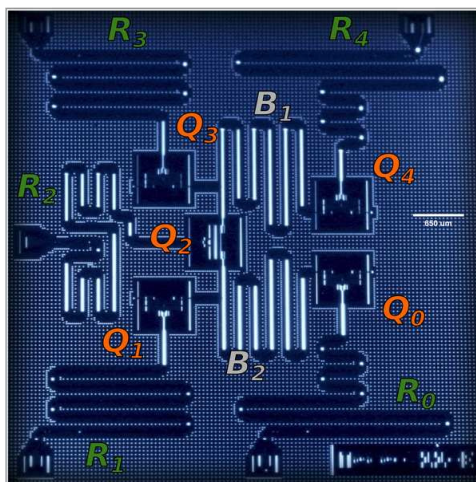
onde $E_c = \frac{e^2}{2C}$ é a energia de carga para adicionar cada elétron no par de Cooper, $E_L = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}$ é a energia indutiva no circuito e $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ é o fluxo magnético no supercondutor. O primeiro termo da Equação 2.63 é associado à energia cinética, enquanto o segundo é associado à energia potencial. Como podemos ver na Figura 2.5(b), existe uma equidistância entre as linhas de energia desse circuito. Isso torna muito difícil a distinção entre elas, impossibilitando, assim, a utilização desse circuito como um q-bit.

Para contornar esse problema, foi adicionado ao circuito um junção de Josephson no lugar do indutor, Figura 2.5(c) (quadro laranja), denominados qubits transmon. O hamiltoniano muda e devemos considerar as duas relações de Josephson $I_J = I_c \sin(\phi)$ e $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}$, que resulta em um novo hamiltoniano

$$H = 4E_c n^2 - E_J \cos(\phi), \quad (2.64)$$

onde $E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$, com $C_\Sigma = C_s + C_J$, sendo a capacitância total, que é a capacitância de Josephson mais a capacitância de derivação do capacitor da junção. A energia de

Figura 2.6 – Figura representa o chip quântico de 5 q-bits. As partes do circuito são: Q_j são os próprios q-bits, R_j representa ressonadores individuais para controle e leitura, por fim os q-bits são acoplados através dos ressonadores de guia de onda coplanares, mostrados por B_j .



Fonte: Adaptado de IBM Quantum (2017a).

Josephson é $E_J = \frac{I_c I_0}{2\pi}$, onde I_c é a corrente crítica da junção de Josephson. Agora temos um dos termos do hamiltoniano que depende de uma função cosseno. Com essa mudança, introduzimos uma não linearidade de espaçamento entre os níveis de energia do circuito, Figura 2.5(d).

A substituição do indutor pela junção de Josephson torna o espectro de energia não linear, fazendo do circuito um oscilador anarmônico, dando, assim, a possibilidade de distinção entre os níveis de energia. Isso faz com que o circuito comporte-se como um átomo artificial. Podemos usar os dois níveis mais baixos de energia para atribuir valores de $|0\rangle$ e $|1\rangle$, estando esse átomo artificial no seu estado fundamental ou no estado excitado, ou ainda em uma superposição desses estados. Para poder identificar o estado do q-bit como $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, é observada a variação dos níveis de energia entre eles. Preferencialmente, os dispositivos são construídos para que $E_J \gg E_c$, tendo em vista que, se $E_J \leq E_c$, os q-bits se tornam extremamente sensíveis ao ruído de carga, o que diminui muito o tempo de coerência.

A Figura 2.6 mostra os principais componentes de um dos chips de 5 q-bits da IBMQE. Os q-bits transmon estão organizados em um chip de silício, no qual Q_j representa os cinco q-bits. Eles são constituídos por junções de Josephson, como mostrado esquematicamente na Figura 2.5(c). Capacitores fornecem superposição de estados de carga. Além disso, precisamos controlar e fazer medidas nesses q-bits. Isso é operacionalizado pelo acoplamento de um ressonador individual R_j a cada um dos q-bits. O circuito é projetado de tal forma que a frequência do ressonador R_j depende do estado do q-bit. Quando investigamos a frequência do ressonador,

podemos determinar o estado do q-bit, e depois disso podemos controlá-lo. Para realizar a medida, são aplicados sinais de micro-ondas para cada sistema e é medida a resposta. Portas de dois q-bits são necessárias para criar correlações entre os q-bits e são possíveis somente entre q-bits vizinhos, conectados por um ressonador de guia de onda coplanar, mostrado na Figura 2.6 por B_j . O dispositivo da IBMQE usa a interação de ressonância cruzada como base para a porta *CNOT*. As conexões entre os q-bits individuais e o sistema de controle clássico são feitas por ressonadores de guia de onda.

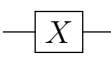
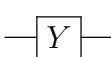
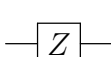
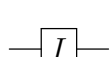
Além das partes físicas dos dispositivos apresentados anteriormente, a IBM desenvolveu uma métrica chamada de “volume quântico”. Esse é responsável por, através de um único número, medir a capacidade de desempenho de um computador quântico (CROSS et al., 2019). Ele sofre influência dos erros de portas, erros de medição e conectividade entre q-bits vizinhos. Essa métrica leva em consideração, além dos erros citados anteriormente, a largura do circuito (número de q-bits usados) e a profundidade do circuito (número de intervalos de tempo que o circuito pode operar portas lógicas antes que ocorra decoerência nos q-bits). O volume quântico pode ser melhorado com q-bits cada vez melhor controlados e altamente coerentes, melhorias na eficiência do compilador e na calibração de portas de dois q-bits. Quanto maior for o valor do volume quântico, maior a capacidade do dispositivo. O protocolo do volume quântico detecta qual o maior circuito quadrado, quando a largura é igual à profundidade, que pode ser executado em um determinado dispositivo quântico. Recentemente, os pesquisadores da IBM conseguiram que um dos seus dispositivos alcançasse um volume quântico igual a 64 (JURCEVIC et al., 2020). A meta da IBM é, pelo menos, dobrar o volume quântico anualmente. Para o nosso trabalho, não consideramos o volume quântico, tendo em vista que a coleta da maioria dos dados experimentais aconteceu antes da implementação dessa quantidade.

2.5.4 Portas lógicas

As portas lógicas são elementos utilizados para realizar alguma tarefa específica em um circuito. Essas portas alteram o estado inicial do q-bit. No computador da IBMQE, são realizadas através de pulsos de micro-ondas cuidadosamente calibrados com as frequências de transmissão do q-bit. A diferente combinação entre as portas é capaz de gerar o circuito com que estamos interessados em trabalhar. Para desenvolver um circuito no IBMQE, devemos considerar que o computador está configurado na base computacional padrão. Além disso, os q-bits de entrada sempre estão no estado $|0\rangle$.

Começamos com as Portas de Pauli, que, como o nome sugere, são represen-

tadas pelas matrizes de Pauli. A porta identidade não aplica mudança no circuito, ela garante que nada seja aplicado ao q-bit em uma unidade de tempo da porta.

Nome	Circuito	Matriz
Pauli- X		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$
Pauli- Y		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$
Pauli- Z		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$
I		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

A ação de cada porta mostrada acima é a seguinte. O *bit flip* é gerado pela porta X ,

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle,$$

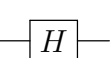
A ação da porta Y ,

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle,$$

gera a *bit fase flip*. Por fim, a porta Z , para essa base, não altera o q-bit,


$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) |0\rangle = |0\rangle.$$

A porta Hadamard “ H ” e a controlada-NOT “ $CNOT$ ” merecem atenção, tendo em vista que a primeira, quando aplicada a um q-bit, é capaz de criar superposição de dois estados,

Nome	Circuito	Matriz
Hadamard		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$

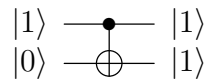
$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

Já a $CNOT_{1 \rightarrow 2}$ foi a primeira porta implementada no IMBQE que atua em dois q-bits. Ela é capaz de gerar emaranhamento entre eles. O efeito desta porta é aplicar X no q-bit controlado se o q-bit de controle estiver no estado $|1\rangle$,

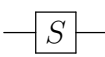
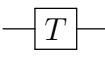
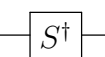
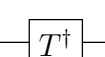
Nome	Circuito	Matriz
$CNOT_{1 \rightarrow 2}$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Exemplo:

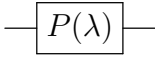
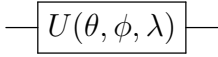
$$\begin{aligned} CNOT_{1 \rightarrow 2}(|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) &= (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes X) (|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) \\ &= |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2. \end{aligned}$$




Temos também as portas de fase S e S^\dagger . Essas portas têm propriedade de mapear $X \rightarrow Y$, $Z \rightarrow Z$ e $X \rightarrow -Y$, respectivamente. A porta de fase T adiciona uma rotação em torno de Z de $\frac{\pi}{4}$, assim como sua adjunta T^\dagger .

Nome	Circuito	Matriz
Fase S		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$
Fase T		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$
Fase S^\dagger		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$
Fase T^\dagger		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

A porta $P(\lambda)$ é a antiga $U_1(\lambda)$ e tem somente um parâmetro de ajuste. Ela aplica uma fase $e^{i\lambda}$ no estado $|1\rangle$. Para certos valores de λ , ela é equivalente a outras portas. Por exemplo, $P(\pi) = \text{Pauli} - Z$, $P(\pi/2) = S$ e $P(\pi/4) = T$. A porta U é a antiga porta $U_3(\theta, \phi, \lambda)$, onde temos a possibilidade de três parâmetros para criar estado de superposição de um q-bit.

Nome	Circuito	Matriz
$P(\lambda)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{bmatrix},$
$U(\theta, \phi, \lambda)$		$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\phi+\lambda)}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$

Depois que implementamos nosso circuito, devemos ter a capacidade de avaliar o seu desempenho. Para fazer isso, realizamos medidas. Essa imagem () representa, no circuito, o processo de medidas, em que são obtidos os valores de saída do circuito.

Para realizar as medidas, utilizamos a regra de Born $\Pr(o_j|\psi) = |\langle\psi|o_j\rangle|^2$, na qual os observáveis são descritos por operadores hermitianos $O = O^\dagger$. Este operador $O = \sum_j o_j|o_j\rangle\langle o_j|$, com $o_j \in \mathbb{R}$ e $\langle o_j|o_k\rangle = \delta_{jk}$ e ainda com $\sum_j |o_j\rangle\langle o_j| = \mathbb{I}$. No IBMQE todas as medidas estão disponíveis na base Z , mas nem sempre é esse resultado que nos interessa. Então devemos fazer alguma operação no circuito para que possamos ter o resultado desejado.

Supomos que nossa máquina só seja capaz de medir o $O = \sum_j o_j|o_j\rangle\langle o_j|$, mas queremos medir $A = \sum_j a_j|a_j\rangle\langle a_j|$. Nesse caso, devemos realizar uma operação U de tal modo que $|a_j\rangle = U|o_j\rangle$. Podemos, então, olhar para a regra de Born,

$$\begin{aligned} \Pr(a_j|\psi) &= |(\langle\psi|, |a_j\rangle)|^2 \\ &= |(\langle\psi|, U|o_j\rangle)|^2 \\ &= |(U^\dagger|\psi\rangle, |o_j\rangle)|^2 \\ &= |(\langle\psi'|, |o_j\rangle)|^2 \\ &= \Pr(o_j|\psi'). \end{aligned} \tag{2.65}$$

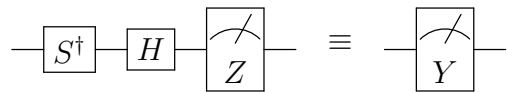
Neste caso, Z pode ser medido diretamente. No entanto, para medir X e Y , devemos atentar para a mudança descrita acima. Para X , temos $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, que é igual a $|+\rangle = H|0\rangle$ e $|-\rangle = H|1\rangle$, bastando, assim, aplicar a porta Hadamard antes da medida,

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{\text{Z}} \text{---} \equiv \text{---} \boxed{\text{X}} \text{---}$$

Para Y , temos $|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ e $|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$, que é igual a $|y_+\rangle =$

$$S|+\rangle = SH|0\rangle \text{ e } |y_-\rangle = S|-\rangle = SH|1\rangle,$$

$$\begin{aligned} \Pr(y_+, |\psi\rangle) &= |(\langle\psi|, |y_+\rangle)|^2 \\ &= |(\langle\psi|, SH|0\rangle)|^2 \\ &= |(\langle SH|, |\psi\rangle)|^2 \\ &= |(\langle HS|, |\psi\rangle)|^2 \\ &= \Pr(0, |\psi'\rangle) \\ |\psi'\rangle &= HS^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.66}$$



A porta Toffoli é conhecida também como *CNOT* dupla. Possui dois q-bits de controle e um q-bit alvo. Ela aplica uma negação no q-bit alvo somente quando os dois q-bits de controle estão no estado $|1\rangle$.

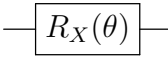
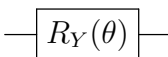
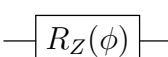
Nome	Circuito	Matriz
Toffoli		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$CCX([q0], [q1], [q2]) = |0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes CX.$$

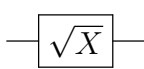
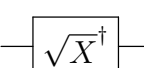
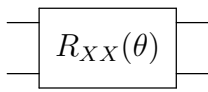
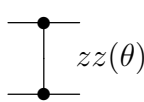
A porta *SWAP* é uma porta equivalente a uma troca de estado dos q-bits, $|a, b\rangle \rightarrow |b, a\rangle$,

Nome	Circuito	Matriz
SWAP		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

As portas R_X , R_Y , R_Z correspondem a rotações no estado do q-bit em torno dos seus eixos, sendo esse limitado pelo valor do ângulo.


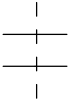
Nome	Circuito	Matriz
Rx		$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$
Ry		$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$
Rz		$\begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{bmatrix}.$

Temos ainda mais algumas portas de fase. A \sqrt{X} , se aplicada duas vezes consecutivas, produz a porta Pauli- X . A porta \sqrt{X}^\dagger é o inverso da anterior, se aplicada duas vezes consecutivas, também produz a porta Pauli- X . Ambas podem produzir superposição.

Nome	Circuito	Matriz
\sqrt{X}		$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix},$
\sqrt{X}^\dagger		$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix},$
RXX		$\begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & -i \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) & -i \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & -i \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ -i \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix},$
RZZ		$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}.$

A porta conhecida como porta de Mølmer-Sørensen implementa $R_{XX}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}X \otimes X)$, enquanto a porta $R_{ZZ}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}Z \otimes Z)$ troca os q-bits em que atua de maneira simétrica. Ambas possuem somente um parâmetro, que por padrão é $\frac{\pi}{2}$.

Temos ainda elementos modificadores não unitários, a porta que tem a forma $\text{---}|0\rangle\text{---}$, quando aplicada, reinicia o estado do q-bit a partir do ponto que é colocado, independente do estado inicial. O modificador de controle $\text{---}\bullet\text{---}$ pode atribuir a uma porta original a possibilidade de controlar um q-bit alvo. Quando o q-bit de controle

está no estado $|1\rangle$, os q-bits alvos sofrem a evolução unitária escolhida. O caso no qual não ocorre evolução no q-bit alvo é devido ao controle estar no estado $|0\rangle$. Se o q-bit de controle estiver em um estado de superposição, a operação segue a linearidade no q-bit alvo. Existe a possibilidade de implementar portas quânticas no circuito através de uma condicional  que depende do estado de um registrador clássico. Por fim, a barreira  tem o função de otimizar a compilação e melhorar a visualização do circuito.

Devido ao avanço nos processadores e na compilação dos circuitos, existem algumas portas que já fizeram parte da composição dos circuitos e que hoje já estão fora de utilização. São elas: *CSWAP*, *U1*, *U2*, *U3*, *CU1*, *CU3*, *CH*, *CY*, *CZ*, *CRx*, *CRy*, *CRz*.

2.5.5 Possibilidades de uso dos processadores da IBMQE

A IBMQE disponibilizou o primeiro de seus dispositivos no ano de 2016. Foi o primeiro do mundo a permitir acesso a pesquisadores, estudantes, profissionais da indústria, entre outros interessados em MQ, no formato remoto e gratuito. Desde então, a IBMQE vem aumentando a variedade de dispositivos e também os tipos de acesso a cada um deles. Hoje a IBMQE conta com sistemas abertos ao público em geral e também com sistema *premium*. Por acreditar que os supercondutores possuem uma tecnologia bem desenvolvida na questão de controle e eficiência, embasa toda a construção dos seus dispositivos quânticos nesse tipo de material.

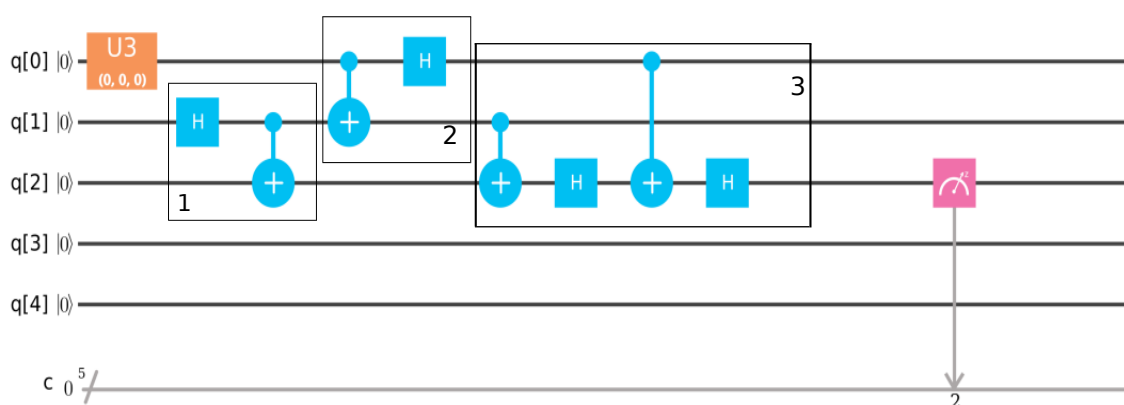
Os chamados *backend* são uma interface para um sistema quântico real ou simulador quântico clássico que usamos para executar nossos circuitos. Os simuladores podem ser de uso local, instalado no computador pessoal, ou na rede pela plataforma remota. Esses dispositivos oferecem a possibilidade de observar um arquivo que contém todas as suas configurações para executar os circuitos quânticos, contando com informações detalhadas de cada q-bit e informação de ruído obtidos através da calibração. Os *backend* são apresentados com nomes que começam por *ibmq_** e possuem os seguintes dispositivos em operação. Para contas tipo *premium*: Manhattan 65 qubits; Montreal, Dublin, Paris, Toronto, Sydney, Kolkata, Mumbai 27 qubits; Casablanca 7 q-bits; Bogota, Rome 5 qubits. Para contas abertas ao público em geral: Melbourne 15 qubits; Santiago, Athens, Belem, Quito, Lima, Yorktown (qx2) 5 qubits; Armonk 1 q-bit. O *ibmq_qasm_simulator* é onde os circuitos devem ser testados antes da implementação no chip real. Ainda possuem dispositivos que já não estão mais em operação. São eles: Almaden, Singapore, Johannesburg 20 qubits; Essex, Burlington, London, Ourense, Vigo, Valencia, 5 q-bits. A perspectiva para os

próximos três anos é um aumento gradativo no número de q-bits, chegando a mais de uma centena no final do corrente ano, para, no final de do ano de 2023, atingir a marca de mais de mil q-bits em um único computador quântico (IBM QUANTUM, 2020).

2.5.6 Exemplo: Teleportação quântica no IBMQE

A Figura 2.7 mostra a imagem da tela do compositor do IBMQE e representa cada uma das etapas para o processo de teleportação. Inicialmente, os q-bits de q[0] ao q[4] estão no estado $|0\rangle$. A porta $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ é utilizada para preparação do estado a ser teletransportado. Ela depende de três parâmetros. Para esse caso, variamos somente o parâmetro θ . As portas lógicas da caixa número 1 criam estados de Bell. A caixa 2 faz a mudança de base de Bell para a base computacional. A caixa número 3 faz o papel da comunicação clássica e a última porta do circuito faz a medida na base computacional.

Figura 2.7 – Imagem do terminal de composição de circuitos do IBMQE, onde cada uma das etapas representa um passo no processo de teleportação. Na caixa 1, temos a criação dos estados de Bell. Em 2, mudamos da base de Bell para base computacional. Por fim, no 3, temos a representação da atuação dos bits clássicos.



Podemos descrever o circuito apresentado na Figura 2.7 aplicando a porta U_3 . No q-bit q[0] subscrito a temos:

$$U_3|0\rangle_a = |\psi\rangle = c_0|0\rangle_a + c_1|1\rangle_a, \quad (2.67)$$

depois, usando a porta Hadamard H no q[1] subscrito b :

$$H|0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b + |1\rangle_b), \quad (2.68)$$

e a $CNOT_{b \rightarrow c}$, onde o subscrito c representa o q[2],

$$CNOT_{b \rightarrow c} = |0\rangle\langle 0|_b \otimes \mathbb{I}_c + |1\rangle\langle 1|_b \otimes X_c. \quad (2.69)$$

Essas duas operações descritas acima estão representadas abaixo:

$$\begin{aligned} |\tau_1\rangle &= (U_3 \otimes H \otimes \mathbb{I}) (|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b \otimes |0\rangle_c) \\ &= (c_0|0\rangle_a + c_1|1\rangle_a) \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b + |1\rangle_b) \right] \otimes |0\rangle_c, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} |\tau_2\rangle &= CNOT_{b \rightarrow c} |\tau_1\rangle \\ &= (c_0|0\rangle_a + c_1|1\rangle_a) \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b|0\rangle_c + |1\rangle_b|1\rangle_c) \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Passando para a base computacional:

$$\begin{aligned} |\tau_3\rangle &= (CNOT_{0 \rightarrow 1} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) |\tau_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0|0\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c + c_0|0\rangle_a|1\rangle_b|1\rangle_c + c_1|1\rangle_a|1\rangle_b|0\rangle_c + c_1|1\rangle_a|0\rangle_b|1\rangle_c), \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} |\tau_4\rangle &= (H \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) |\tau_3\rangle \\ &= \frac{1}{2} [c_0 (|0\rangle_a + |1\rangle_a) |0\rangle_b|0\rangle_c + c_0 (|0\rangle_a + |1\rangle_a) |1\rangle_b|1\rangle_c \\ &\quad + c_1 (|0\rangle_a - |1\rangle_a) |1\rangle_b|0\rangle_c + c_1 (|0\rangle_a - |1\rangle_a) |0\rangle_b|1\rangle_c] \\ &= \frac{1}{2} [c_0|0\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c + c_0|1\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c + c_0|0\rangle_a|1\rangle_b|1\rangle_c + c_0|1\rangle_a|1\rangle_b|1\rangle_c \\ &\quad + c_1|0\rangle_a|1\rangle_b|0\rangle_c - c_1|1\rangle_a|1\rangle_b|0\rangle_c + c_1|0\rangle_a|0\rangle_b|1\rangle_c - c_1|1\rangle_a|0\rangle_b|1\rangle_c] \\ &= \frac{1}{2} [|00\rangle_{ab} (c_0|0\rangle_c + c_1|1\rangle_c) + |10\rangle_{ab} (c_0|1\rangle_c + c_1|0\rangle_c) + \\ &\quad + |01\rangle_{ab} (c_0|0\rangle_c - c_1|1\rangle_c) + |11\rangle_{ab} (c_0|1\rangle_c - c_1|0\rangle_c)]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

O papel dos bits clássicos é:

$$\begin{aligned} |\tau\rangle_5 &= CNOT_{b \rightarrow c} |\tau\rangle_4 \\ &= \frac{1}{2} |00\rangle_{ab} |\psi\rangle + |01\rangle_{ab} \underbrace{XX}_{XX} |\psi\rangle + |10\rangle_{ab} Z |\psi\rangle + |11\rangle_{ab} \underbrace{XX}_{XX} Z |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Recordando as propriedades das matrizes de Pauli $\sigma_j^2 = \mathbb{I}$ e que

$$\begin{aligned} XHZ &= \frac{1}{\sqrt{2}}X(X+Z)Z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{XX}Z + X\underbrace{ZZ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z) = H, \end{aligned} \quad (2.75)$$

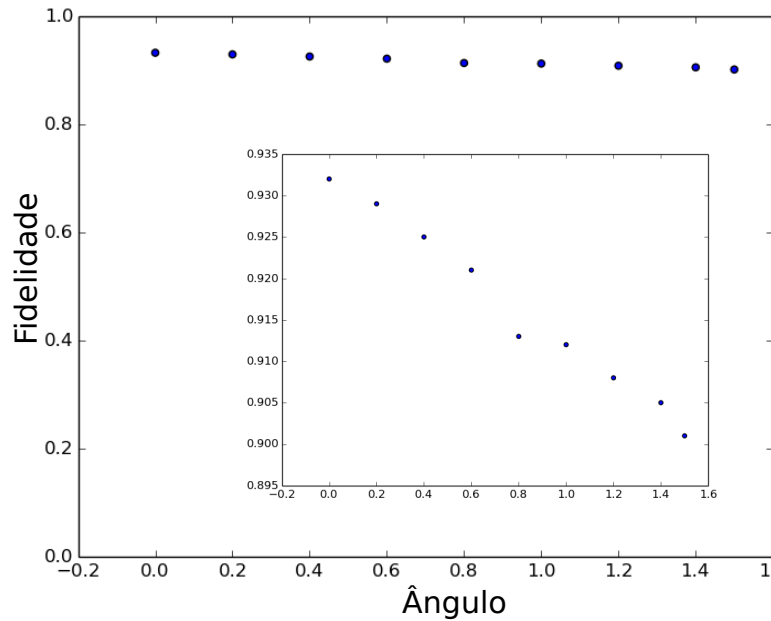
teremos

$$\begin{aligned} |\tau\rangle_6 &= CNOT_{a \rightarrow c}|\tau\rangle_5 \\ &= \frac{1}{2}|00\rangle_{ab}H|\psi\rangle + |01\rangle_{ab}H|\psi\rangle + |10\rangle_{ab}\underbrace{XHZ}|\psi\rangle + |11\rangle_{ab}\underbrace{XHZ}|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} |\tau\rangle_7 &= H|\tau\rangle_6 \\ &= \frac{1}{2}|00\rangle_{ab}\underbrace{HH}|\psi\rangle + |01\rangle_{ab}\underbrace{HH}|\psi\rangle + |10\rangle_{ab}\underbrace{HH}|\psi\rangle + |11\rangle_{ab}\underbrace{HH}|\psi\rangle \\ &= |+\rangle|+\rangle|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

Figura 2.8 – Gráfico da fidelidade de teleportação de um estado $|\psi\rangle$ em função do ângulo θ , que modifica o estado preparado. A fidelidade mostra quão bem o estado foi teletransportado.



Na Figura 2.8, está mostrada a fidelidade do estado preparado com o estado teletransportado em função do ângulo θ . Notamos que, à medida que vamos aumentando

o valor de θ , essa fidelidade vai diminuindo. Na inserção do gráfico, temos os mesmos pontos em uma escala diferente, por meio da qual podemos notar melhor o decréscimo do valor da fidelidade.

Este experimento foi realizado com a intenção de adquirir familiaridades com o funcionamento do circuito. Dentre elas, tempo para o experimento rodar e retornar com os dados, formato que retorna o resultado, quantidade de experimentos possíveis de implementação ao mesmo tempo, observação se os resultados se aproximam do valor teórico.

No próximo capítulo, apresentamos o circuito que foi desenvolvido para geração de estados Bell-diagonal no computador quântico da IBM.

3 GERANDO ESTADOS BELL-DIAGONAL AJUSTÁVEIS NOS PROCESSADORES QUÂNTICOS DA IBM

Com o avanço da ciência em todas as áreas do conhecimento, a demanda computacional cresce a cada dia. A necessidade por mais segurança, por maior capacidade de fazer cálculos e a busca por avanços na área de inteligência artificial são exemplos de que a computação clássica está sendo cada vez mais levada ao limite. Atividades como simulações quânticas para criação de novos materiais, fatoração de números muito grandes, entre outras, são muito difíceis ou demandam muito tempo e/ou capacidade computacional extremamente elevados. Uma alternativa promissora que pode ajudar na resolução desses problemas muito difíceis é a computação quântica.

Mesmo que, com os atuais processadores quânticos, não possamos solucionar problemas de grande complexidade, é de fundamental importância estudar as propriedades quânticas que os diferenciam de um computador clássico. São elas: não localidade, *steering*, emaranhamento, discórdia e coerência. Para observá-las usamos um conjunto de estados de dois q-bits, os chamados estados Bell-diagonal. Esses estados têm papel central no estudo de funções que quantificam recursos citados anteriormente.

Estados Bell-diagonal são muito importantes para a mecânica quântica, tendo em vista que podem representar estados maximamente ou parcialmente emaranhados. Por esse motivo, em geral, não podemos escrevê-los como uma mistura estatística de produtos tensoriais de dois vetores pertencentes a espaços vetoriais diferentes. Eles ainda envolvem uma base que é de fundamental importância para a computação quântica, a base de Bell:

$$|\beta_{00}\rangle = |\Phi_+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.1)$$

$$|\beta_{01}\rangle = |\Psi_+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.2)$$

$$|\beta_{10}\rangle = |\Phi_-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.3)$$

$$|\beta_{11}\rangle = |\Psi_-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.4)$$

Estados Bell-diagonal de dois q-bits têm papel central para o desenvolvimento da compreensão da geometria, da dinâmica e das aplicações de alguns recursos

quânticos, e podem ser escritos como

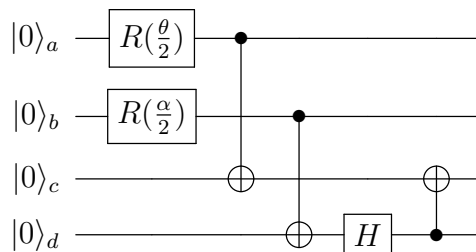
$$\rho^{bd} = \sum_{j,k=0}^1 p_{jk} |\beta_{jk}\rangle \langle \beta_{jk}|, \quad (3.5)$$

onde $|\beta_{jk}\rangle$ são os estados de Bell escritos anteriormente e p_{jk} é uma distribuição de probabilidade. Os resultados deste capítulo em colaboração com os demais autores estão publicados no artigo “*Preparing tunable Bell-diagonal states on a quantum computer*”, na revista *Quantum Information Processing* 18, 142, de 29 de março de 2019 e no arXiv: <https://arxiv.org/abs/1808.10533>.

3.1 CIRCUITO GERADOR DE UM ESTADO BELL-DIAGONAL

Nesta seção apresentamos um circuito que gera estados Bell-diagonal ajustáveis no computador quântico da IBM. Com base nele, podemos utilizar qualquer um dos computadores disponíveis, exceto o *ibmq_armonk* de um q-bit, bastando apenas escolher de maneira adequada os q-bits que vamos utilizar. Na Figura 3.1, está o circuito que cria estados Bell-diagonal. As linhas contínuas horizontais representam os q-bits, as duas portas R geram estados de superposição. As $CNOT$ s são as portas que utilizamos para correlacionar dois q-bits. A porta Hadamard H , juntamente com a última $CNOT$, faz a mudança da base computacional para a base de Bell. Para a implementação do circuito quântico da Figura 3.1 nos computadores da IBMQE, nós usamos $R(\frac{x}{2}) = U_3(x, 0, 0)$.

Figura 3.1 – Circuito quântico para gerar estados Bell-diagonal em um computador quântico. As portas R geram estados em superposição. As $CNOT$ são usadas para copiar o estado a e b para os q-bits c e d . A porta Hadamard H , juntamente com a última $CNOT$, troca da base computacional para a base de Bell.



Essa classe de estados de 2 q-bits, ρ_{bd} , tem a seguinte purificação para 4 q-bits:

$$|\tau\rangle_{abcd} = \sum_{j,k=0}^1 \sqrt{p_{jk}} |j\rangle_a \otimes |k\rangle_b \otimes |\beta_{jk}\rangle_{cd}. \quad (3.6)$$

Ou seja, nós obtemos como estado reduzido o estado Bell-diagonal. Com Tr_{ab} sendo a função traço parcial, (POZZOBOM; MAZIERO, 2019), teremos

$$\begin{aligned}
\rho^{bd} &= \text{Tr}_{ab} (|\tau\rangle\langle\tau|_{abcd}) \\
&= \text{Tr}_{ab} \left[\left(\sum_{j,k=0}^1 \sqrt{p_{jk}} |j\rangle_a \otimes |k\rangle_b \otimes |\beta_{jk}\rangle_{cd} \right) \left(\sum_{l,m=0}^1 \sqrt{p_{lm}} \langle l|_a \otimes \langle m|_b \otimes \langle\beta_{lm}|_{cd} \right) \right] \\
&= \text{Tr}_{ab} \left[\sum_{j,k,l,m=0}^1 \sqrt{p_{jk}} \sqrt{p_{lm}} |j\rangle\langle l|_a \otimes |k\rangle\langle m|_b \otimes |\beta_{jk}\rangle\langle\beta_{lm}|_{cd} \right] \\
&= \sum_{j,k,l,m=0}^1 \sqrt{p_{jk}} \sqrt{p_{lm}} \text{Tr}_a |j\rangle\langle l|_a \otimes \text{Tr}_b |k\rangle\langle m|_b \otimes |\beta_{jk}\rangle\langle\beta_{lm}|_{cd} \\
&= \sum_{j,k,l,m=0}^1 \sqrt{p_{jk}} \sqrt{p_{lm}} \delta_{jl} \otimes \delta_{km} \otimes |\beta_{jk}\rangle\langle\beta_{lm}|_{cd} \\
&= \sum_{j,k=0}^1 p_{jk} |\beta_{jk}\rangle\langle\beta_{jk}|_{cd}, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

com $\sum_{j,k=0}^1 p_{jk} = 1$.

Agora podemos calcular como o circuito Figura 3.1 gera os estados Bell-diagonal. Começamos usando a porta

$$U_3(\theta, \lambda, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i(\lambda+\phi)} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Considerando $\phi = \lambda = 0$, nós temos:

$$\begin{aligned}
U_3(\theta, 0, 0) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\
&= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle\langle 0| - \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle\langle 1| + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle 0| + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle 1|, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

e aplicando

$$\begin{aligned}
U_3|0\rangle &= \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle\langle 0| - \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle\langle 1| + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle 0| + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle 1| \right) |0\rangle \\
&= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

de forma similar para $U_3|1\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |0\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle$.

Com as portas lógicas mostradas na Seção 2.5.4, começamos a realizar as operações representadas na Figura 3.1. Com todos os q-bits no estado $|0\rangle$, aplicamos

U_3 nos dois primeiros,

$$\begin{aligned}
|\tau_1\rangle &= (U_3(\theta, 0, 0) \otimes U_3(\alpha, 0, 0) \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\
&= \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \otimes \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle + \sin \frac{\alpha}{2} |1\rangle \right) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\
&\quad + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Usando a porta $CNOT_{j \rightarrow k} = |0\rangle\langle 0|_j \otimes \mathbb{I}_k + |1\rangle\langle 1|_j \otimes X_k$, para os q-bits indicados na Figura 3.1, $CNOT_{a \rightarrow c} = |0\rangle\langle 0|_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes \mathbb{I}_d + |1\rangle\langle 1|_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes X_c \otimes \mathbb{I}_d$, $CNOT_{b \rightarrow d} = \mathbb{I}_a \otimes |0\rangle\langle 0|_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes \mathbb{I}_d + \mathbb{I}_a \otimes |1\rangle\langle 1|_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes X_d$, temos, então,

$$\begin{aligned}
|\tau_2\rangle &= (|0\rangle\langle 0|_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes \mathbb{I}_d + |1\rangle\langle 1|_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes X_c \otimes \mathbb{I}_d) |\tau_1\rangle \\
&= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\
&\quad + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\tau_3\rangle &= (\mathbb{I}_a \otimes |0\rangle\langle 0|_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes \mathbb{I}_d + \mathbb{I}_a \otimes |1\rangle\langle 1|_b \otimes \mathbb{I}_c \otimes X_d) |\tau_2\rangle \\
&= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle) \\
&\quad + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Agora devemos passar da base computacional para a base de Bell, utilizando, para fazer isso $CNOT_{c \rightarrow d}$ e H :

$$\begin{aligned}
|\tau_4\rangle &= (\mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes CNOT_{c \rightarrow d} \otimes \mathbb{I}_d) (\mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes H_c \otimes \mathbb{I}_d) |\tau_3\rangle \\
&= (\mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_b \otimes CNOT_{c \rightarrow d} \otimes \mathbb{I}_d) \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes 2^{\frac{-1}{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \right] \right. \\
&\quad + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left[|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes 2^{\frac{-1}{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle \right] \\
&\quad + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes 2^{\frac{-1}{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle \right] \\
&\quad \left. + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left[|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes 2^{\frac{-1}{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \right] \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\tau_4\rangle = & \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes 2^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \right] \\
& + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left[|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes 2^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \right] \\
& + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes 2^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \right] \\
& + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left[|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes 2^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) \right]. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Notamos que a base de Bell aparece naturalmente:

$$\begin{aligned}
|\tau_4\rangle = & \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\Phi_+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\Psi_+\rangle \\
& + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\Phi_-\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\Psi_-\rangle. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Chegamos, então, em:

$$\begin{aligned}
\rho_{cd} = & \text{Tr}_{12} (|\tau_4\rangle\langle\tau_4|) \\
= & \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \\
& + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \\
= & p_{00} |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| + p_{01} |\beta_{01}\rangle\langle\beta_{01}| + p_{10} |\beta_{10}\rangle\langle\beta_{10}| + p_{11} |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| \\
= & \rho^{bd}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

com

$$p_{00} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}, p_{01} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}, p_{10} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}, p_{11} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{3.18}$$

Para encontrar os valores de θ e α , devemos lembrar da relação $\cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos x + 1)$ e $\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \cos x)$. Então, fazendo,

$$\begin{aligned}
p_{00} + p_{01} = & \frac{1}{4} (\cos \theta + 1) (\cos \alpha + 1) + \frac{1}{4} (\cos \theta + 1) (1 - \cos \alpha) \\
= & \frac{1}{4} (\cos \theta \cos \alpha + \cos \theta + \cos \alpha + 1 + \cos \theta - \cos \theta \cos \alpha + 1 - \cos \alpha) \\
= & \frac{1}{2} (\cos \theta + 1) \\
= & \cos^2 \frac{\theta}{2}, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

chegamos em

$$\theta = 2 \arccos \sqrt{p_{00} + p_{01}}. \tag{3.20}$$

Adotamos o mesmo procedimento para encontrar o valor de

$$\alpha = 2 \arccos \sqrt{p_{00} + p_{10}}. \quad (3.21)$$

Para calcular as correlações quânticas, nós começamos estudando os estados marginais maximamente mistos, $\rho_{3m} = 2^{-2}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{j,k=1}^3 c'_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k)$, que, na forma normal, pode ser escrita como

$$\rho_n = 2^{-2} \left(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{j=1}^3 c_{jj} \sigma_j \otimes \sigma_j \right), \quad (3.22)$$

via transformação unitária local. Podemos escrever na forma de matriz:

$$\rho^{bd} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

com $c_{jj} = c_j$. Os estados ρ_n são diagonais na base de Bell, possuindo os seguintes pares de autovalores e autovetores,

$$p_{00} = \frac{1}{4} (1 + c_1 - c_2 + c_3), |\beta_{00}\rangle, \quad (3.24)$$

$$p_{01} = \frac{1}{4} (1 + c_1 + c_2 - c_3), |\beta_{01}\rangle, \quad (3.25)$$

$$p_{10} = \frac{1}{4} (1 - c_1 + c_2 + c_3), |\beta_{10}\rangle, \quad (3.26)$$

$$p_{11} = \frac{1}{4} (1 - c_1 - c_2 - c_3), |\beta_{11}\rangle. \quad (3.27)$$

3.2 IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL DO CIRCUITO NO IBMQE

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos em três processadores quânticos da IBM: o *IBM Q 5 Yorktown* (ibmqx2), com cinco q-bits, o *IBM Q 5 Tenerife* (ibmqx4), também com cinco q-bits, e o *IBM Q 16 Melbourne* (ibmq_16_melbourne), com quinze q-bits. Dentre eles, o IBM Q 5 Yorktown deixou de operar na metade de 2018, voltando a ficar ativo no início de 2019. Os circuitos devem ser sempre testados antes da implementação. Isso é feito através do *IBM Q QASM 32 Simulator*, que simula um chip quântico com 32 q-bits e não tem restrições quanto à colocação da porta *CNOT*. As restrições citadas aqui referem-se aos chips reais. Elas são impostas

devido à impossibilidade de implementação de modo direto da porta *CNOT*, quando não existe conectividade direta entre os q-bits. Para contornar esse problema, utiliza-se uma ou várias portas *SWAP*, mas que, por sua vez, aumenta a profundidade do circuito.

3.2.1 IBM Q 5 Yorktown (ibmqx2)

Para realizar nosso experimento, usamos o *ibmqx2*, que é composto de 5 q-bits. Os experimentos foram realizados com os parâmetros de calibração e com as taxas de decoerência mostrados na Tabela 3.1, que apresenta os seguintes elementos. A frequência é uma característica própria do q-bit a partir da qual são controladas as entradas e as medidas. O tempo $T1$ é o tempo de relaxação, tempo de decaimento de um estado excitado $|1\rangle$, para o estado fundamental $|0\rangle$. O tempo $T2$ é o tempo de coerência, inclui erro de fase e também do decaimento de energia. Erro de porta está associado ao quanto preciso é o controle dos parâmetros da porta lógica quando ela é implementada. Erros de leitura são erros na medida do q-bit. Erros de portas múltiplas, são erros que podem acontecer quando implementamos portas que atuam em dois ou mais q-bits. Com base na conectividade dos q-bits, conforme mostrado na Figura 3.2, escolhemos a seguinte configuração para implementação do circuito da Figura 3.1:

$$a \rightarrow Q1, b \rightarrow Q3, c \rightarrow Q2, d \rightarrow Q4. \quad (3.28)$$

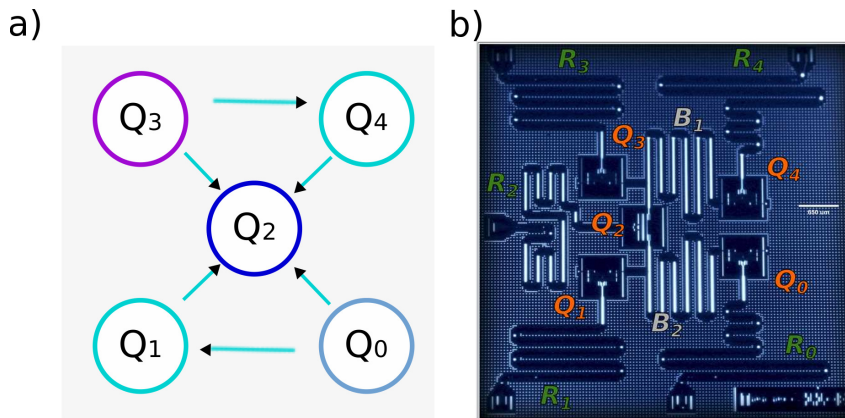
Para encontrarmos os valores da Tabela 3.1, tomamos o cuidado de sempre fazer uma rodada completa de medidas, com os mesmos dados de calibração. Dentro de cada uma das rodadas, devemos alterar o circuito algumas vezes, tendo em vista a realização das medidas em diferentes direções (XX, XY, XZ, YX, YY, YZ, ZZ, ZX, ZY,). Os dados são obtidos da plataforma da IBMQE em arquivos tipo *.dat* ou *.csv*, totalizando 8192 “*shots*”, que é o máximo que pode ser realizado. O termo *shots* é usado para representar o número de execuções que é realizado com o experimento. Como o estado de um q-bit em superposição pode ser $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ aleatoriamente, devemos repetir a medição várias vezes para determinar a probabilidade do q-bit estar em um ou em outro estado. Então, depois de 7 rodadas completas, calculamos a média dos valores de cada uma das diferentes variáveis das calibrações. Aprimoramos os gráficos, colocando uma barra de erro, que é de aspecto importante para que possamos fazer uma análise mais criteriosa dos nossos resultados.

Com essa configuração, preparamos estados Bell-diagonal, em particular os

Tabela 3.1 – Média dos parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown, com o qual os experimentos foram realizados. A temperatura do chip quântico durante os experimentos era $T = 0,0159K$.

Média parâmetros ibmqx2	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
Frequência (GHz)	5.29	5.23	5.02	5.29	5.08
T1 (μs)	50.81	59.80	64.93	56.37	56.81
T2 (μs)	45.89	39.70	63.14	31.60	32.32
Erro de porta (10^{-3})	2.82	1.83	4.65	4.36	2.54
Erro de leitura (10^{-2})	4.16	1.89	1.93	2.87	4.61
Erro de portas múltiplas (10^{-2})	$CX_{0,1}$	$CX_{1,2}$		$CX_{3,2}$	$CX_{4,2}$
	4.15	3.81		7.09	3.84
	$CX_{0,2}$			$CX_{3,4}$	
	4.42			5.28	

Figura 3.2 – Na parte *a*) da figura, podemos ver a representação esquemática da conexão entre os q-bits para o ibmqx2. Em *b*), temos cada uma das partes do circuito, onde R_j representa ressonadores individuais para controle e leitura, Q_j são os próprios q-bits. Por fim, os q-bits são acoplados através dos ressonadores de guia de onda coplanares, mostrados por B_j .



Fonte: Adaptado de IBM Quantum (2017a).

estados de Werner (WERNER, 1989),

$$\rho_w = (1 - w) \frac{\sigma_0 \otimes \sigma_0}{4} + w |\beta_{11}\rangle \langle \beta_{11}|, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \rho_{2qb} &= \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^3 s_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k \\ &= \frac{1}{4} \left(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{j=0}^3 s_{j0} \sigma_j \otimes \sigma_0 + \sigma_0 \otimes \sum_{k=0}^3 s_{0k} \sigma_k + \sum_{j,k=0}^3 s_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

com valores $w \in [0, 1]$. Observamos que ρ_w é equivalente a ρ_n se $c_1 = c_2 = c_3 = -w$. Para reconstruir experimentalmente os estados preparados, consideramos estados

gerais de dois q-bits escritos na forma:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^3 c_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k, \quad (3.31)$$

com $c_{jk} = \langle \sigma_j \otimes \sigma_k \rangle_{\rho}$. Todas essas médias podem ser obtidas a partir das distribuições de probabilidade conjuntas das medidas de σ_j e σ_k . Logo

$$p_{j\pm, k\pm} := \text{Prob}(\sigma_j = \pm 1, \sigma_k = \pm 1). \quad (3.32)$$

Então, para $j, k = 1, 2, 3$, temos:

$$c_{j,k} = p_{j+,k+} + p_{j-,k-} - p_{j+,k-} - p_{j-,k+}. \quad (3.33)$$

Usando as distribuição de probabilidade marginal

$$p_{j\pm} = p_{j\pm, k+} + p_{j\pm, k-} \text{ e } p_{k\pm} = p_{j+, k\pm} + p_{j-, k\pm}, \quad (3.34)$$

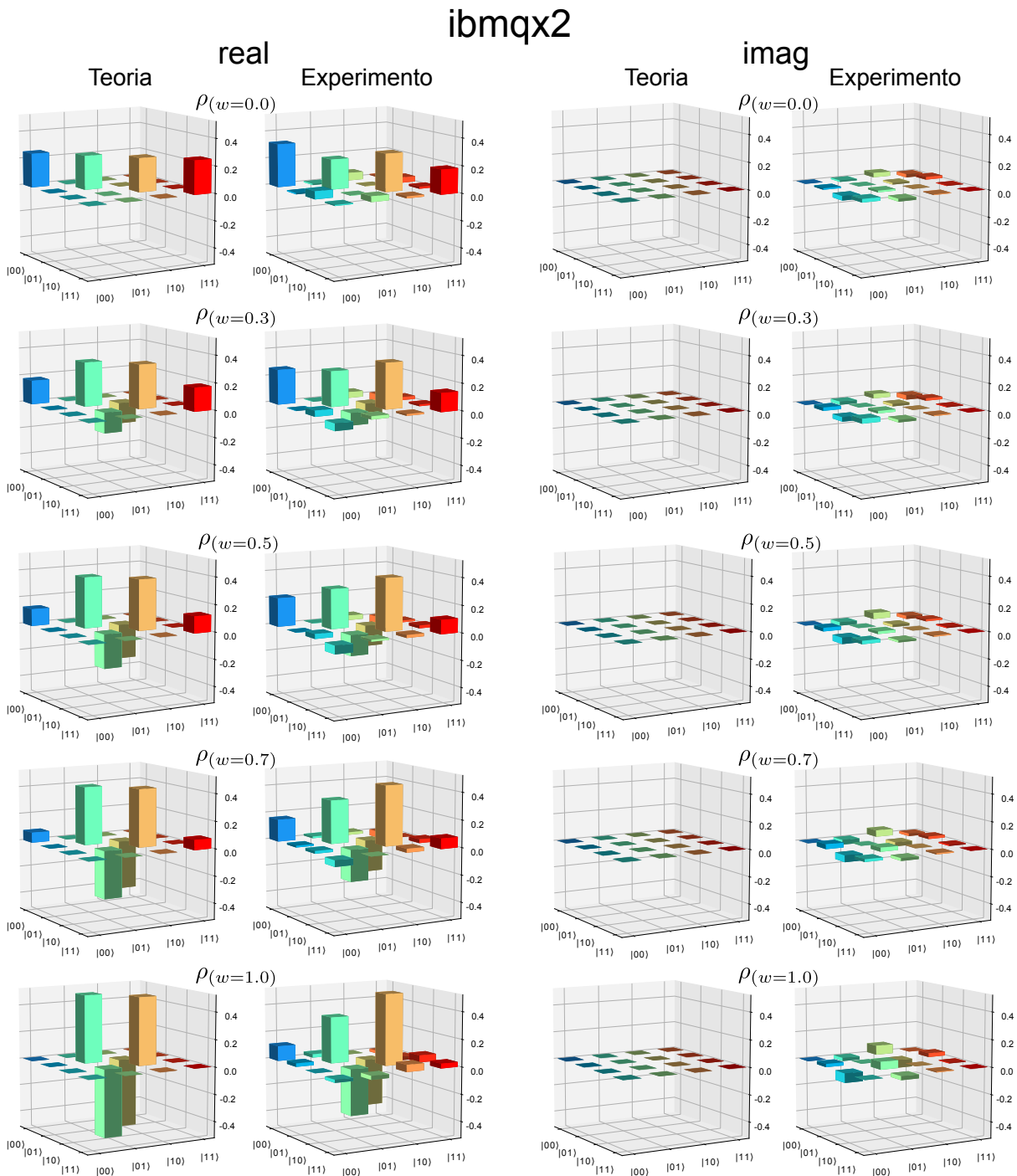
nós calculamos

$$c_{j0} = p_{j+} - p_{j-} \text{ e } c_{0k} = p_{k+} - p_{k-}, \quad (3.35)$$

para $j, k = 1, 2, 3$. Finalmente, porque $\text{Tr}(\rho) = 1$, nós temos $c_{00} = 1$. Medidas de Z fazem parte das operações prontas do `ibmqx2`. Para medir X , nós primeiro devemos aplicar a porta Hadamard H e então medir Z . Para medir Y , nós aplicamos primeiro a porta S^\dagger , depois a porta Hadamard H e por fim a medida em Z , como mostrado na Seção 2.5.4. Com esses procedimentos de medição, as distribuições de probabilidade $p_{j\pm, k\pm}$ foram estimadas com o circuito rodando 8192 *shots*, que é o máximo disponível.

Na Figura 3.3, está mostrada a representação da base computacional das matrizes densidade reconstruídas, do estado de Werner, para cinco valores de w .

Figura 3.3 – Representação na base computacional das partes real e imaginária das matrizes densidade preparadas experimentalmente, correspondentes aos estados de Werner com cinco valores diferentes de w .



Na Figura 3.4, apresentamos os resultados para a não localidade calculada a partir da Equação 2.36. Notamos que essa correlação aparece muito sutilmente para os estados preparados experimentalmente. O desempenho do *steering* é mostrado na Figura 3.5, calculado com base na Equação 2.37. Podemos observar aqui que temos

o aparecimento um pouco mais destacado do *steering* em relação à não localidade, mas ainda assim discreto.

Figura 3.4 – Gráfico do comportamento da não localidade teórica N e experimental N_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.

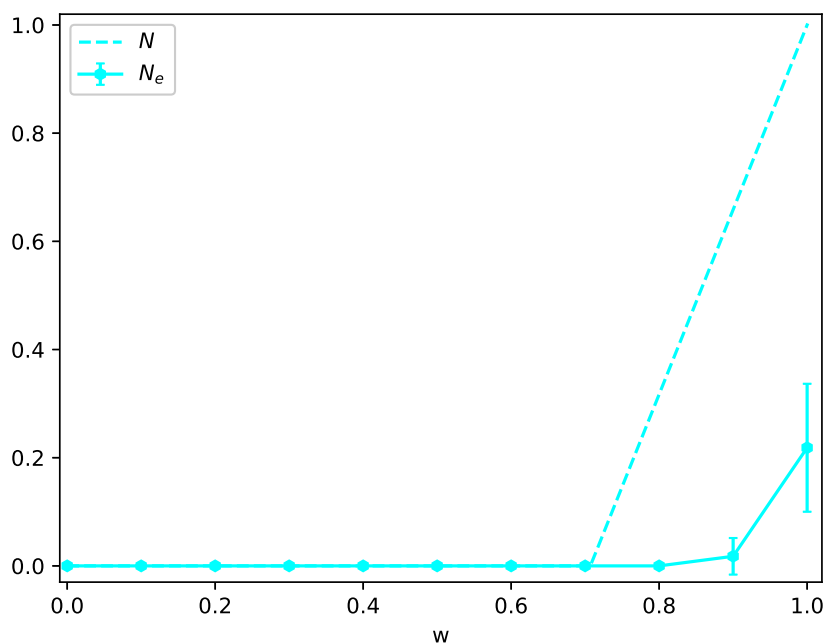
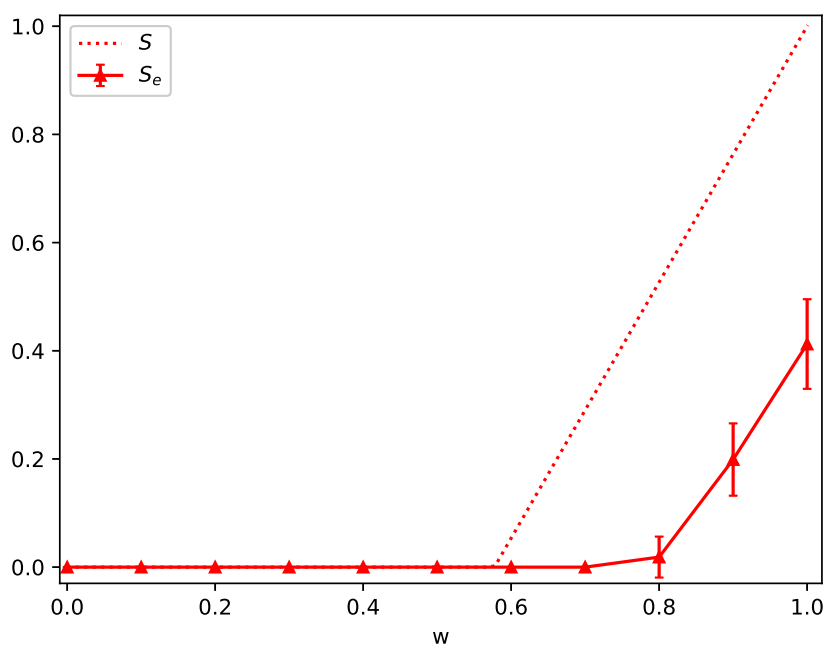
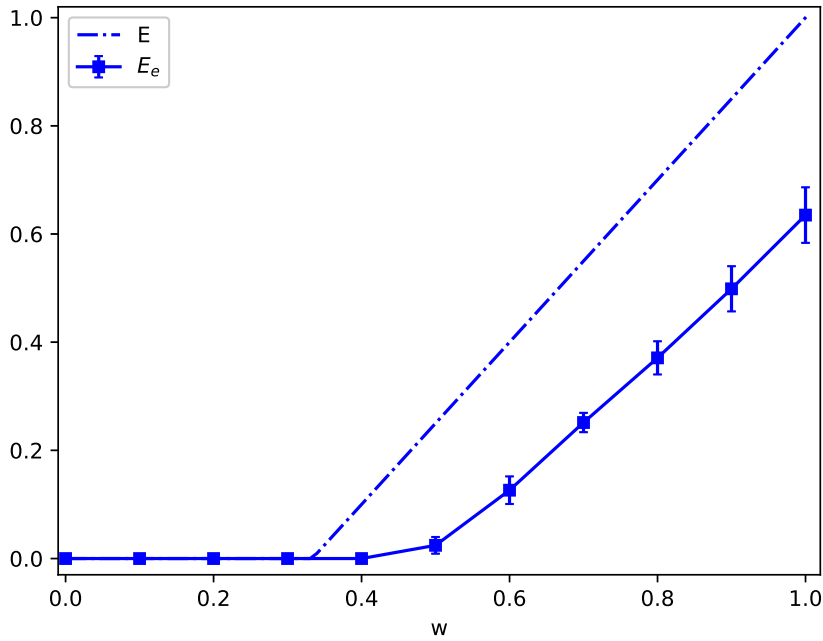


Figura 3.5 – Gráfico do comportamento do *steering* teórico S e experimental S_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.



O Emaranhamento está mostrado na Figura 3.6 e foi calculado pela Equação 2.50. Como podemos observar, temos uma diminuição dos valores experimentais se comparados aos valores teóricos, mas se mantém com uma boa proporcionalidade. Para a discórdia quântica, temos os resultados apresentados na Figura 3.7, calculada pela Equação 2.52. Aqui também contamos com uma boa quantidade dessa correlação, como apresentado nos resultados experimentais.

Figura 3.6 – Gráfico do emaranhamento teórico E e experimental E_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.

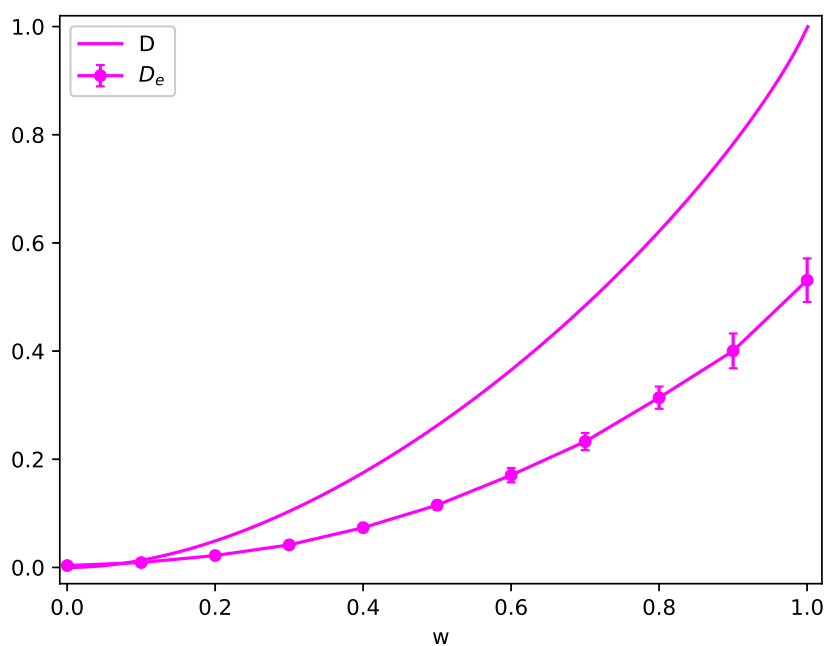


A coerência não local é calculada pela Equação 2.60, e os resultados estão apresentados na Figura 3.8. Temos uma boa quantidade dessa correlação mantida ao longo do experimento. Por fim, na Figura 3.9, apresentamos um gráfico com todas as correlações juntas. Acrescentamos ainda o cálculo da fidelidade, dado pela seguinte expressão:

$$F(\rho_w, \rho_w^{exp}) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_w} \rho_w^{exp} \sqrt{\rho_w}}. \quad (3.36)$$

Mesmo que a fidelidade de preparação, mostrada na Figura 3.9, tenha, em geral, valores bem próximos do valor máximo 1, notamos que o ruído ambiental e as imperfeições quânticas do computador têm efeitos prejudiciais significativos nas propriedades quânticas dos estados preparados. Esse fato indica que nem sempre a fidelidade da preparação do estado é uma propriedade confiável para garantir que as demais propriedades quânticas irão se manter em alta. Observamos aqui uma diminuição no valor de todas as correlações, calculadas a partir do estado preparado experimentalmente. Isso era esperado, tendo em vista a dificuldade de se construir dispositivos com esse

Figura 3.7 – Gráfico da discórdia quântica teórica D e experimental D_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.



grau de sensibilidade. No entanto, as correlações seguem as características das curvas teóricas, mostrando, assim, a manutenção da hierarquia entre as correlações.

Figura 3.8 – Gráfico da coerência não local teórica C e experimental C_e para estados de Werner, da Equação 3.29, no ibmqx2.

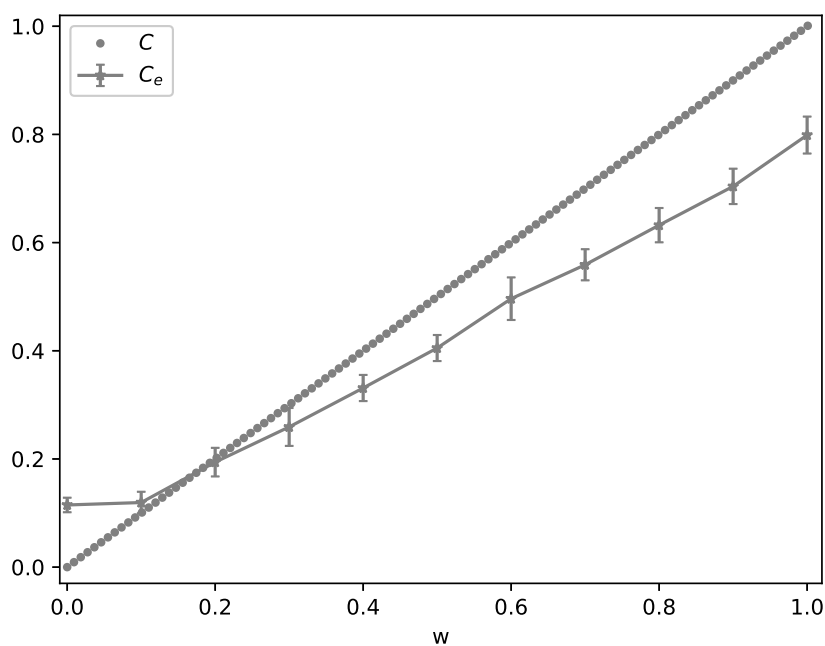
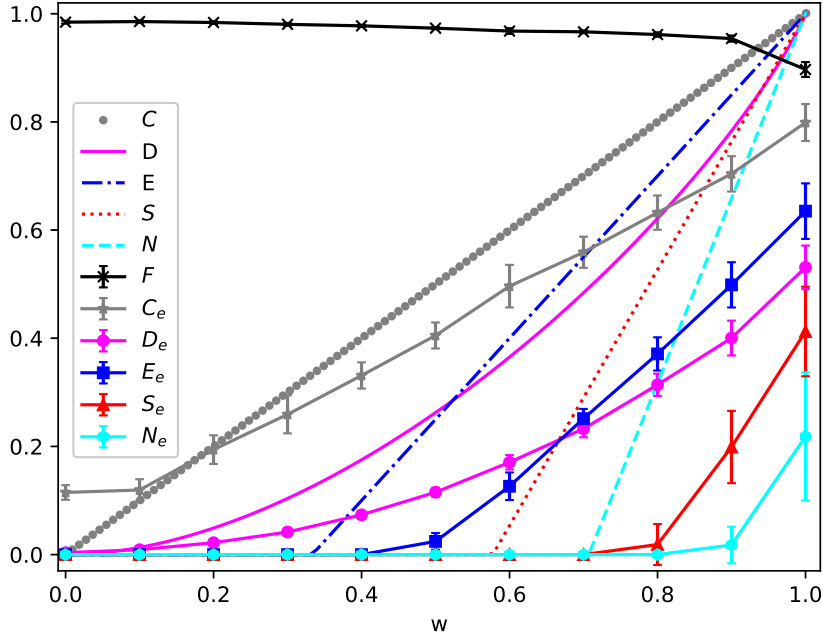


Figura 3.9 – Todas as correlações que foram calculadas para o ibmqx2. Os pontos marcados com “x” preto representam a fidelidade F entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscripto “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local C está mostrado na cor cinza. Discórdia D no gráfico na cor rosa. Emaranhamento E é apresentado em azul, *steering* S na cor vermelha e não localidade N em ciano.



3.2.2 IBM Q 5 Tenerife (ibmqx4)

Nesta subseção, são apresentados os resultados com mesma configuração do experimento anterior, com a diferença de que aqui usamos outro chip quântico, o ibmqx4, que atualmente encontra-se fora de operação. Embora os resultados estejam apresentados depois, os experimentos nesse computador foram os primeiros a serem realizados. Isso aconteceu devido ao fato de este computador ser mais novo, tendo, assim, uma fila de espera menor para realizar os experimentos. Com base na conectividade dos q-bits, mostrado na Figura 3.10, e das taxas de decoerência, vistas na Tabela 3.2, escolhemos a seguinte configuração para implementação do circuito da Figura 3.1:

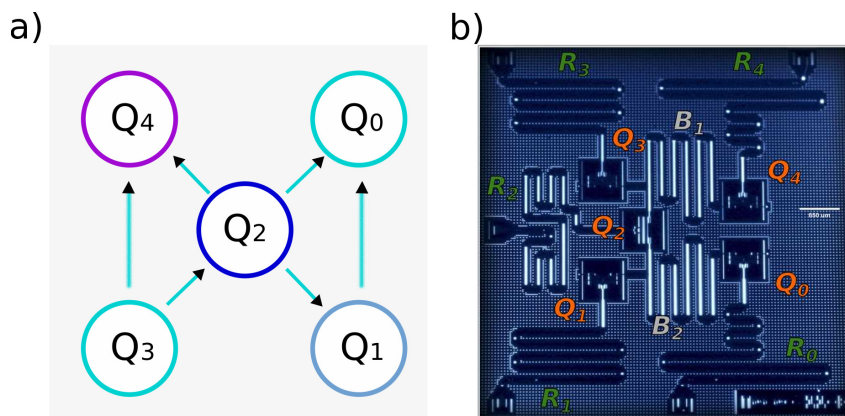
$$a \rightarrow Q1, b \rightarrow Q3, c \rightarrow Q0, d \rightarrow Q2.$$

Na Figura 3.11, é mostrada a representação na base computacional das matrizes densidade reconstruídas do estado de Werner para cinco valores de w .

Tabela 3.2 – Parâmetros de calibração do chip quântico Tenerife, com o qual foram realizados os experimentos. A temperatura para este experimento foi de $T = 0,021\text{K}$. Os tempos T_1 e T_2 não estavam disponíveis neste experimento.

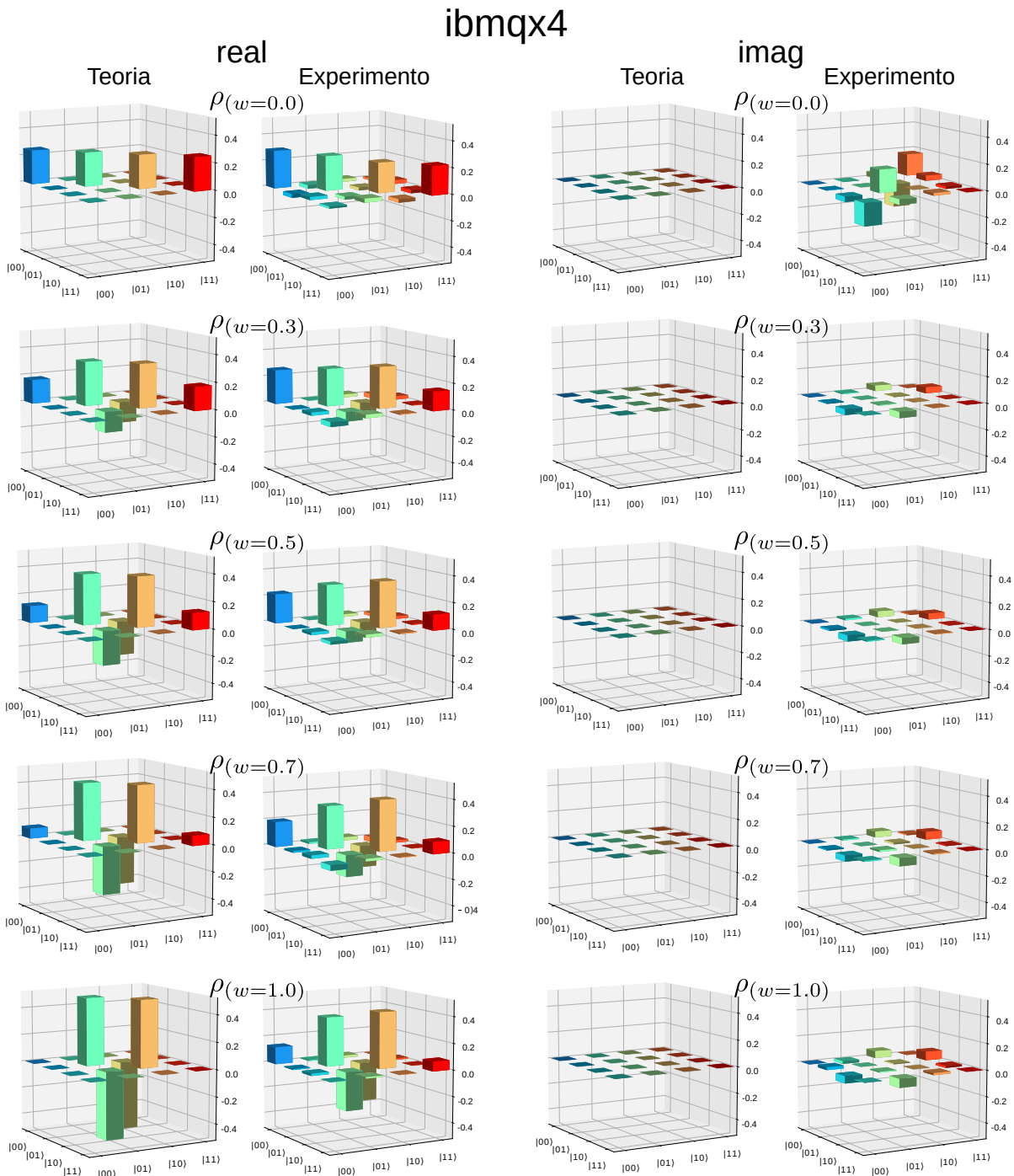
Parâmetros ibmqx4	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
Erro de porta (10^{-3})	0.94	0.52	1.37	1.97	1.97
Erro de leitura (10^{-2})	4.70	4.30	2.20	6.20	7.80
Erro de portas múltiplas (10^{-2})		$CX_{1,0}$ 1.42	$CX_{2,0}$ 2.37	$CX_{3,2}$ 2.34	
			$CX_{2,1}$ 2.28	$CX_{3,4}$ 2.74	
			$CX_{2,4}$ 2.91		

Figura 3.10 – Na parte a) da figura, podemos ver a representação esquemática da conexão entre os q-bits para o ibmqx4. Em b), os componentes representados por R_j , Q_j e B_j cumprem a mesma função que na Figura 3.2.



Fonte: Adaptado de IBM Quantum (2017a).

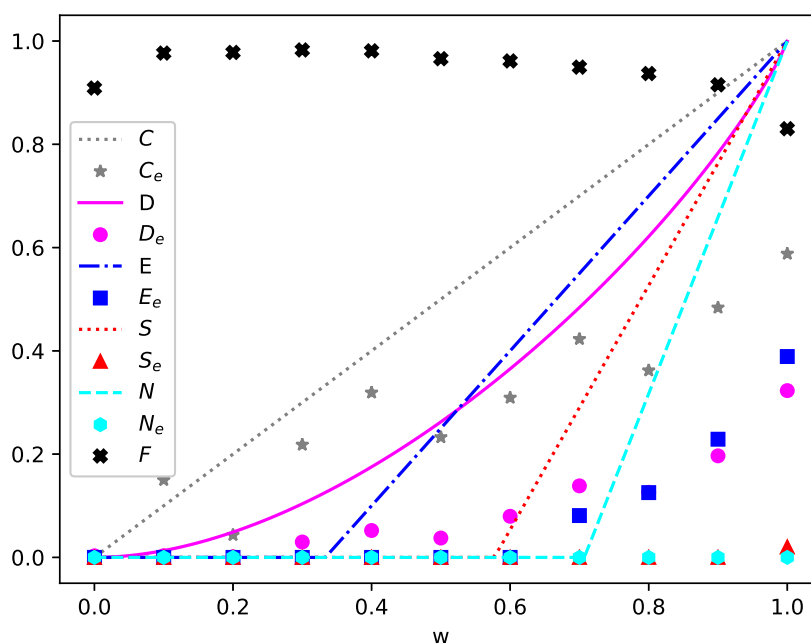
Figura 3.11 – Representação da base computacional das partes real e imaginária das matrizes densidade preparadas experimentalmente, correspondentes aos estados de Werner com cinco valores diferentes de w , agora para o ibmqx4.



Notamos que esses resultados, mostrados na Figura 3.12, não eram suficientemente satisfatórios e fomos buscar as possíveis causas para isso. Percebemos que os erros que são próprios dos q-bits e os erros de leituras, bem como a temperatura de trabalho, mostrados da Tabela 3.2, eram maiores para essa máquina do que

para o `ibmqx2`, bem como os tempos de relaxação eram menores, sendo, assim, uma fonte maior de erro. Identificando esses fatores, buscou-se outra máquina, no caso o `ibmqx2`. Os resultados para o `ibmqx2`, mostrados na seção anterior, foram melhores que com o `ibmqx4`, como esperado. Por esse motivo, para esse chip, foi realizada somente uma rodada de medidas, não tendo barras de erro para esses dados.

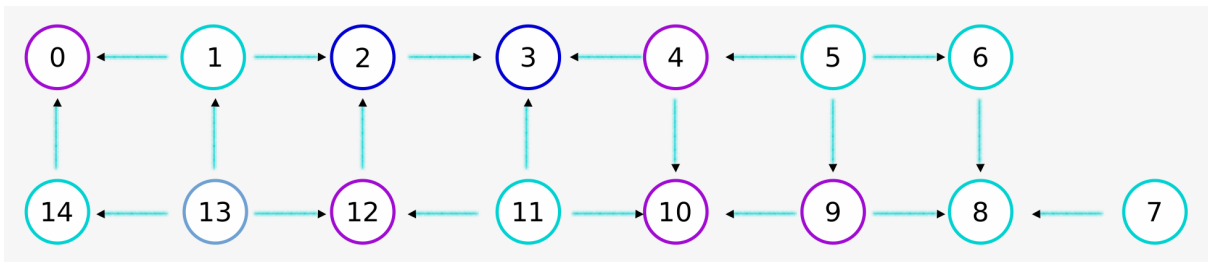
Figura 3.12 – Representação de todas as correlações que foram calculadas para o `ibmqx4`. Os pontos marcados com “x” preto representam a fidelidade F entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscripto “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor cinza; discórdia, D , na cor rosa; enquanto o emaranhamento, E , é apresentado em azul; *Steering*, S , na cor vermelha e não-localidade, N , em ciano.



3.2.3 IBM Q 16 Melbourne (`ibmq_16_melbourne`)

Como mais uma forma de realização experimental no IBMQE, utilizamos o `ibmq` Melbourne que possui 15 q-bits e somente é acessível através da plataforma Qiskit (IBM QUANTUM, 2017b). A plataforma Qiskit é de código aberto e está sendo desenvolvida pela IBM em linguagem Python. Somente por ela que podemos acessar os computadores com número de q-bits maior que cinco. O circuito é escrito em um programa Python e executado *on-line* através do terminal de comando. É de fundamental importância aprender essa ferramenta para que possamos utilizar computadores com maior número de q-bits.

Figura 3.13 – Representação esquemática da ligação entres os q-bits do ibmq Melbourne.



Fonte: Adaptado de IBM Quantum (2017a).

Tabela 3.3 – Parâmetros de calibração do chip quântico ibmq Melbourne para o primeiro experimento em 31/10/2018. T_1 e T_2 são, respectivamente, o tempo de relaxação e o tempo de coerência. A frequência é de ressonância, depois erro de porta simples, erro da porta de múltiplos q-bits somente para os q-bit que compartilham a porta *CNOT*.

Parâmetros ibmq 16	Q4	Q5	Q9	Q10
Frequência (GHz)	5,03	5,07	4,96	4,94
T_1 (μ s)	64,90	25,90	47,00	64,40
T_2 (μ s)	31,00	27,80	87,00	87,00
E. de porta (10^{-3})	2,72	2,91	11,19	1,73
E. P. Multi. (10^{-2})	$CX_{4,10}$ 3,58	$CX_{5,4}$ 4,21		$CX_{9,10}$ 4,26

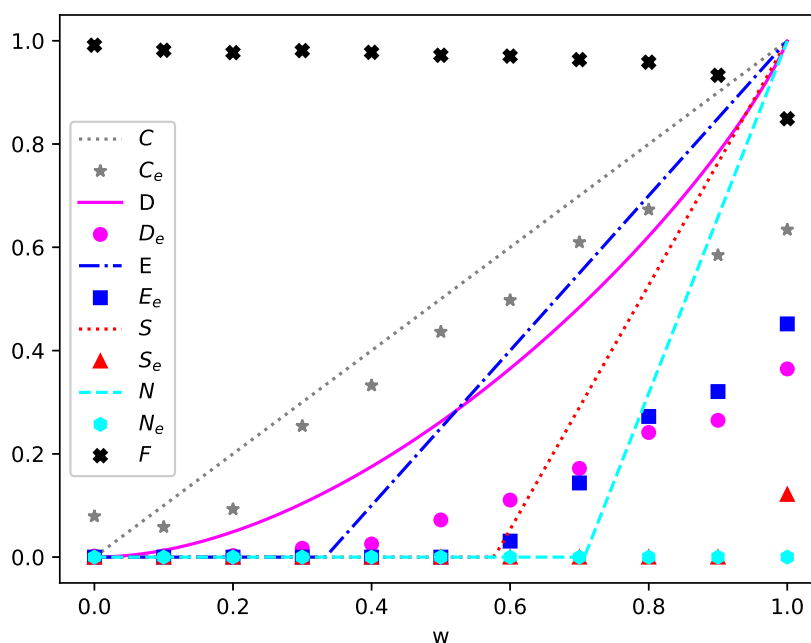
Uma limitação de qualquer umas das plataformas, seja o compositor de circuito ou o Qiskit, é a quantidade limitada de créditos que os usuários possuem. Para cada tipo de usuário, existe uma quantidade de créditos, que, à medida que os experimentos são enviados para a execução, vão diminuindo. Quando o resultado retorna, esses créditos são novamente liberados e o usuário pode repetir o processo. Entende-se que é uma medida de cautela por parte da IBM, evitando, assim, uma sobrecarga no sistema e o envio descontrolado de experimentos para serem realizados. Isso condiciona o usuário a testar seus programas no simulador, evitando, desse modo, que programas com algum tipo de erro sejam rodados no computador real.

Para esta máquina, nós realizamos o experimento três vezes, a primeira usando os q-bits q[4], q[5], q[9] e q[10]. Na figura 3.13, temos a representação esquemática da ligação entre os q-bits, em que as setas representam a capacidade de utilização da porta *CNOT*. Com base nessa conectividade e na Tabela 3.3, onde estão os dados de calibração, escolhemos a seguinte configuração para implementação do circuito da Figura 3.1:

$$a \rightarrow Q9, b \rightarrow Q5, c \rightarrow Q10, d \rightarrow Q4.$$

Na Figura 3.14, podemos observar todas as correlações que foram calculadas. As funções indicadas pelo subscrito “e” foram calculadas com base no estado preparado experimentalmente, enquanto as sem subscrito são as funções calculadas teoricamente. Observamos que as correlações foram menores aqui, comparadas ao `ibmqx2`, e maiores que para o `ibmqx4`.

Figura 3.14 – Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o `ibmq Melbourne`. O marcador “x” preto representa a fidelidade entre o estado teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor cinza; discórdia, D , no gráfico na cor rosa; emaranhamento, E , é apresentado em azul; *steering*, S , na cor vermelha e não localidade, N , em ciano. Utilizamos aqui os q-bits `q[4]`, `q[5]`, `q[9]` e `q[10]`.



Para o mesmo computador, repetimos o experimento, mas com outros q-bits, sendo eles o `q[2]`, `q[3]`, `q[11]` e `q[12]`. Temos novamente os dados de calibração na Tabela 3.4, na qual os dados entre parênteses são para a segunda rodada. A configuração para implementação do circuito da Figura 3.1 é a seguinte:

$$a \rightarrow Q_{11}, b \rightarrow Q_{12}, c \rightarrow Q_3, d \rightarrow Q_2.$$

Nas Figuras 3.15 e 3.16, temos representadas todas as correlações para esses dois experimentos. Notamos aqui que o valor das correlações é menor que no primeiro experimento realizado na mesma máquina e temos diferentes resultados mesmo para configurações iguais dos q-bits. Este fato se dá devido à variação nos dados de calibração que ocorrem quase todos os dias. Isso nos mostra que, para os experimen-

Tabela 3.4 – Parâmetros de calibração do chip quântico ibmq Melbourne para o segundo experimento em 08/09/2018 (os valores entre parênteses são do terceiro experimento, calibração em 09/11/2018). Os parâmetros desta tabela são os mesmos da Tabela 3.3.

Parâmetros ibmq 16	Q2	Q3	Q11	Q12
Frequência (GHz)	5,03(5,03)	4,90(4,90)	5,00(5,00)	4,76(4,76)
T1 (μ s)	70,70(52,30)	54,30(70,00)	71,60(61,90)	67,10(60,70)
T2 (μ s)	117,50(96,90)	97,40(84,60)	96,50(118,30)	73,40(81,30)
E. de porta (10^{-3})	2,93(3,77)	1,85(1,52)	1,68(1,36)	3,73(3,32)
E. P. Multi. (10^{-2})	$CX2_3$ 4,64(4,07)		$CX11_3$ 4,03(4,42)	$CX12_2$ 10,21(7,37)

tos serem realizados com maior precisão, além, é claro, de serem realizados com a mesma máquina e com os mesmo q-bits, devemos procurar usar a mesma calibração. Isso implica conseguir coletar os dados em um intervalo curto de tempo, o que às vezes não é possível, pela quantidade de experimentos na fila, ou mesmo pela grande quantidade de dados a serem coletados.

Na próxima seção, mostramos como modelamos de forma simples o ruído que interferiu para a destruição das correlações ao longo dos experimentos.

Figura 3.15 – Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o ibmq Melbourne na segunda versão. O marcador “x” preto representa a fidelidade entre os estados teórico e experimental. As funções indicadas na legenda pelo subscrito “e” são para o estado preparado experimentalmente. Coerência não local, C , está mostrada na cor cinza; discórdia, D , no gráfico na cor rosa; emaranhamento, E , é apresentado em azul; *steering*, S , na cor vermelha e não-localidade, N , em ciano. Utilizamos aqui os q-bits q[2], q[3], q[11] e q[12].

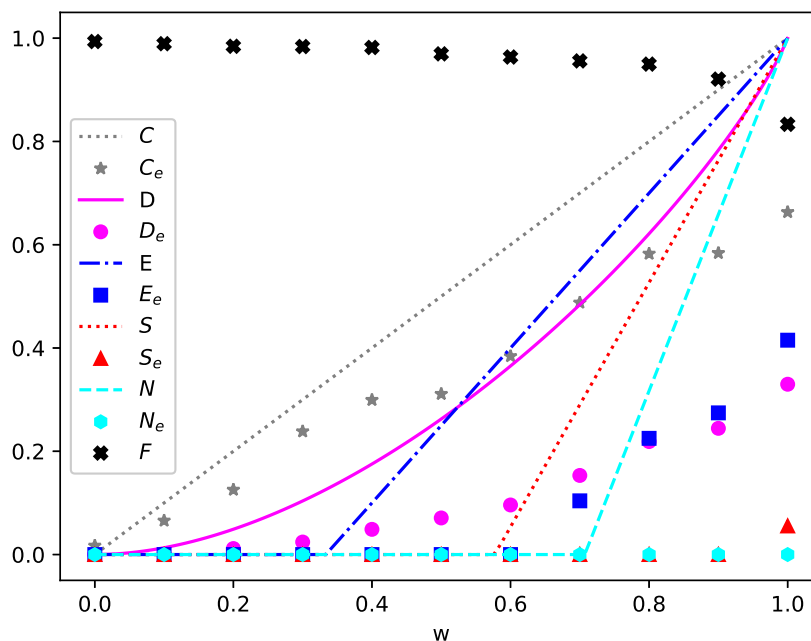
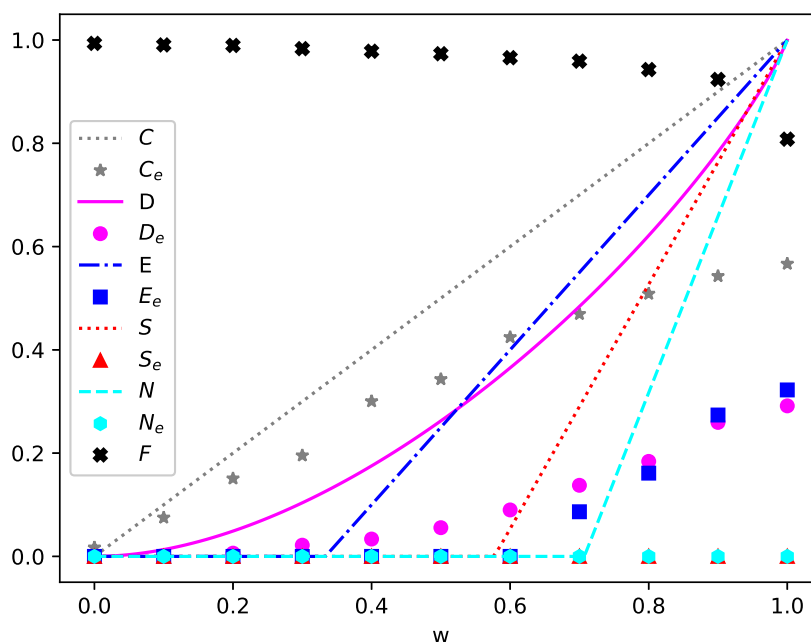


Figura 3.16 – Gráfico de todas as correlações que foram calculadas para o ibmq Melbourne em terceira versão. Os resultados apresentados aqui são para os mesmos parâmetros da figura anterior.



3.3 COMPARAÇÃO DO EXPERIMENTO COM A TEORIA SOB EFEITO DE RUÍDO

Descrever a evolução de sistemas quânticos nem sempre é uma tarefa fácil. Para sistemas quânticos fechados, a evolução é descrita por operadores unitários, mas, na maioria dos casos, existe a interação do sistema com o ambiente. Uma das possibilidades é considerar sistema juntamente com o ambiente como um sistema fechado (MAZIERO, 2016). Com isso, chegamos ao formalismo de operações quânticas, que pode ser o caminho alternativo para representar sistemas quânticos que possuam algum tipo de interação com o ambiente (PRESKILL, 2018).

3.3.1 Composição dos Operadores de Kraus

Os operadores de Kraus são uma maneira enxuta para descrever a dinâmica de sistemas que sofrem ação do ambiente. No ambiente podem acontecer diversos tipos de interação. Para o nosso experimento, vamos supor dois tipos de ruído provindos do ambiente interagindo com o sistema. Para cada tipo de interação, consideramos

um conjunto de operadores de Kraus, em que esse conjunto atua em nosso sistema executando uma operação,

$$\epsilon(\rho) = \sum_j K_j \rho K_j^\dagger, \quad (3.37)$$

$$\epsilon'(\rho) = \sum_j K'_j \rho K'_j{}^\dagger, \quad (3.38)$$

lembrado que essa operação segue a condição de que $\sum_j K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$ e $\sum_j K'_j{}^\dagger K'_j = \mathbb{I}$. Agora, fazendo uma operação seguida da outra, podemos concatenar os operadores de Kraus. Considerando as duas operações

$$\epsilon(\epsilon'(\rho)) = \epsilon \circ \epsilon'(\rho) = \epsilon''(\rho) = \sum_j K''_j \rho K''_j{}^\dagger, \quad (3.39)$$

então:

$$\begin{aligned} \epsilon \circ \epsilon'(\rho) &= \epsilon \left(\sum_j K'_j \rho K'_j{}^\dagger \right) \\ &= \sum_k K_k \left(\sum_j K'_j \rho K'_j{}^\dagger \right) K_k^\dagger \\ &= \sum_{j,k} (K_k K'_j) \rho (K_k K'_j)^\dagger. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Podemos, então, inferir que

$$K''_j = K_k K'_l. \quad (3.41)$$

Devemos lembrar que a ordem que compomos os operadores Kraus pode influenciar no comportamento da evolução do estado quântico que sofre aquela determinada ação (PRESKILL, 2018), ou seja, $\epsilon \circ \epsilon' \neq \epsilon' \circ \epsilon$ pode apresentar resultados diferentes.

Os operadores de Kraus para o canal *amplitude damping* são:

$$K_0^a = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } K_1^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-a} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Esse canal representa a perda de energia do sistema quântico. Um exemplo que ilustra bem essa ideia é o fenômeno de emissão espontânea de um fóton. Se considerarmos um átomo de dois níveis (GALLAS, 1986; EJNISMAN; NUSSENZVEIG, 1997), ou sistemas parecidos (RECHER; TRAUZETTEL, 2010), interagindo com um campo eletromagnético, que, inicialmente, encontra-se com zero excitações, em um determinado momento, irá ocorrer a emissão espontânea devido à interação do sistema quântico com as flutuações quânticas desse campo.

Para o canal *phase damping* são

$$K_0^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \text{ e } K_1^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

O canal *phase damping* tem seu efeito evidenciado somente na MQ. Ele representa a perda de informação quântica sem que ocorra perda de energia. Nesse caso, os estados de energia do átomo se mantêm inalterados com o passar do tempo, mas acumulam uma fase (NIELSEN; CHUANG, 2010), que é proporcional ao tempo de interação com o ambiente.

Fazendo, então, a composição dos canais *amplitude damping* e *phase damping*, temos:

$$K_0(a, p) = K_0^p K_0^a = 0, \quad (3.44)$$

$$K_1(a, p) = K_0^p K_1^a = \sqrt{p(1-a)}|1\rangle\langle 1|, \quad (3.45)$$

$$K_2(a, p) = K_1^p K_0^a = \sqrt{a}|0\rangle\langle 1|, \quad (3.46)$$

$$K_3(a, p) = K_1^p K_1^a = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{(1-p)(1-a)}|1\rangle\langle 1|, \quad (3.47)$$

onde a e p são as probabilidades dos erros de *amplitude damping* e *phase damping* acontecerem durante a execução do circuito para geração dos estados Bell-diagonal. O estado de Werner com o efeito do ruído atuando é escrito da seguinte maneira:

$$\rho_w(a, p) = \sum_{j=0}^3 K_j(a, p) \otimes \mathbb{I} \rho_w K_j^\dagger(a, p) \otimes \mathbb{I}. \quad (3.48)$$

Definindo $q = 1 - a$ e $v = 1 - w$, podemos montar a matriz densidade, $\rho_w(a, p)$, para estados de Werner sob efeito do ruído

$$\rho_w(a, p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(aw + a + v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(aw - a - w - 1) & \frac{w}{2}\sqrt{q}\sqrt{-p+1} & 0 \\ 0 & -\frac{w}{2}\sqrt{q}\sqrt{-p+1} & -\frac{1}{4}(-q)(w+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(-q)(-v) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Na Figura 3.17, notamos que, à medida que nós aumentamos o valor dos erros associados ao *amplitude damping* e *phase damping*, as curvas teóricas aproximam-se do valor experimental, ficando praticamente no ajuste da curva para a coerência não local quando o valor é próximo de $a = p = 0,20$. Para as demais correlações esse valor se aproxima de $a = p = 0,25$. Logo a seguir, na Figura 3.18, temos outros gráficos com valores cada vez maiores de *amplitude damping* e *phase damping*. Embora simples, o modelo representa bem a suscetibilidade observada experimentalmente das correlações mais fortes em relação ao efeitos da interação com o ambiente.

Figura 3.17 – As funções indicadas pelo subscrito “e” representam os estados preparados experimentalmente, enquanto as com subscrito “d” são as que indicam teoricamente as correlações quânticas do estado de Werner (Equação 3.48) com um dos q-bits evoluído sob a composição dos canais *amplitude damping* e *phase damping*.

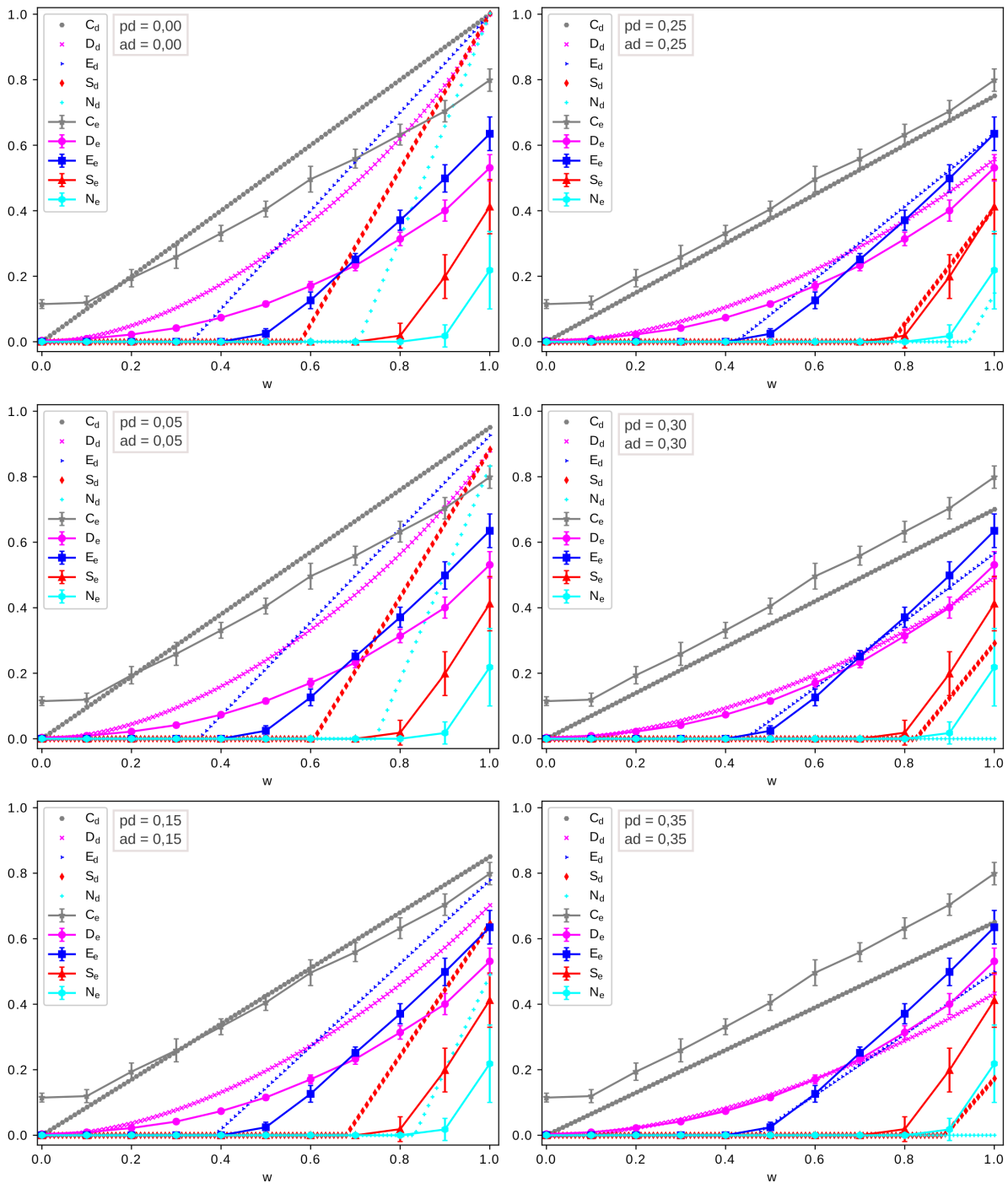
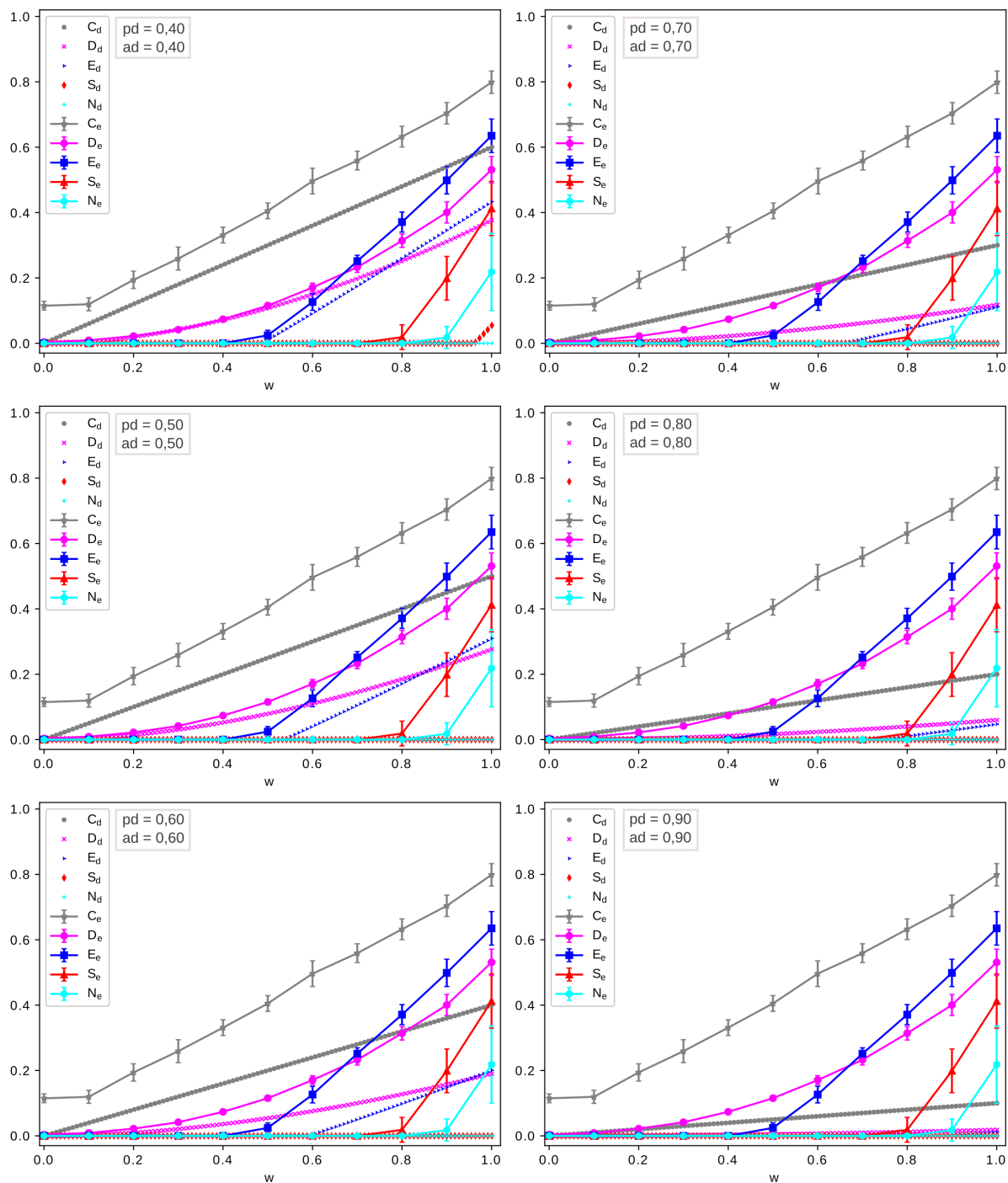
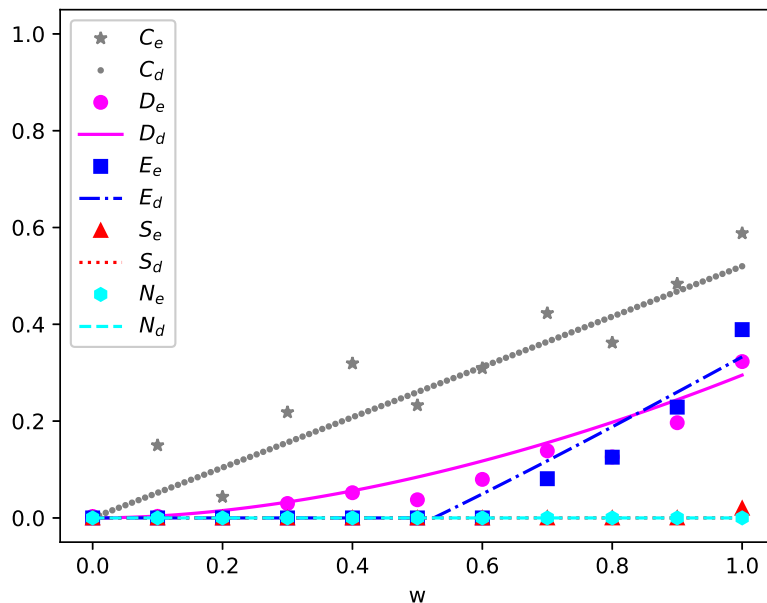


Figura 3.18 – As imagens apresentadas aqui são semelhantes às da Figura 3.17, mas para valores maiores de *amplitude damping* e *phase damping*.



A seguir, na Figura 3.19, mostramos a modelagem utilizada para o *ibmqx4*. Aqui foram utilizados os mesmos procedimentos em relação à introdução do ruído. No entanto, o erro observado que modela essa máquina é da ordem de 48%, consideravelmente maior que para o *ibmqx2*. A modelagem utilizada para o *ibmq Melbourne* para um dos experimentos realizados está apresentada na Figura 3.20. Vale observar que os resultados para os três diferentes experimentos realizados na mesma máquina ficaram com erros na faixa dos 45%, sendo, assim, ligeiramente melhor que o *ibmqx4*, mas bem acima do valor encontrado para o *ibmqx2*, que foi de 25%.

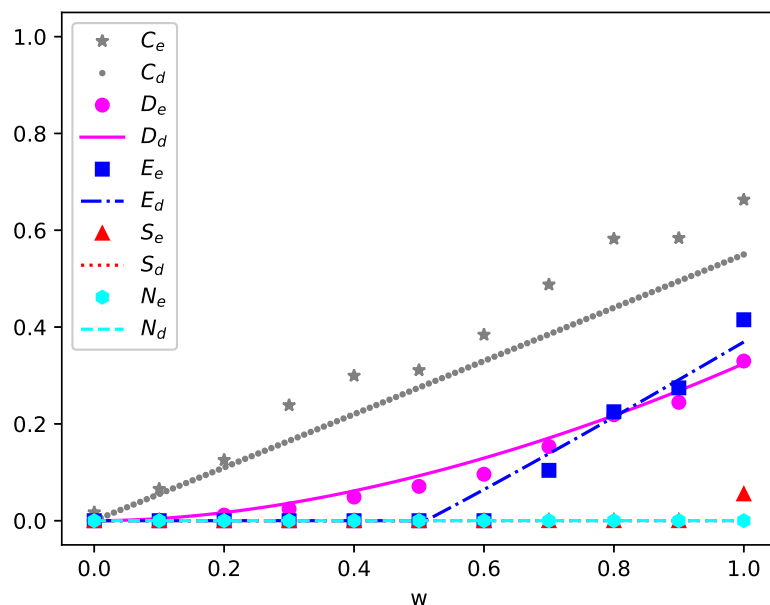
Figura 3.19 – As funções indicadas pelo subscrito “e” representam os estados preparados experimentalmente, enquanto as com subscrito “d” são as funções que indicam teoricamente as correlações quânticas do estado de Werner (Equação 3.48) com um dos q-bits evoluído sob a composição dos canais *amplitude damping* e *phase damping*. Para o *ibmqx4* os valores foram de $a = p = 0,48$.



3.4 DISCUSSÃO FINAL

Desenvolvemos um circuito para criação de estados Bell-diagonais ajustáveis. Implementamos esse circuito em três diferentes computadores quânticos disponíveis na plataforma da IBM. Como exemplo, geramos estados de Werner, que são um tipo particular dos estados Bell-diagonal e calculamos suas correlações quânticas. Observamos que o valor das correlações experimentais são menores que as teóricas, como era de se esperar. Acreditamos que isso aconteça devido a alguns fatores: ruído que existe em razão das imperfeições da máquina, erros associados à implementação das

Figura 3.20 – Aqui temos as mesmas correlações mostradas na Figura 3.19, no entanto, para o ibmq Melbourne, os valores foram de $a = p = 0,45$ para os canais de *amplitude damping* e *phase damping*.



portas, erros de leitura e ainda interação do sistema com o seu ambiente. Mesmo estando muito bem isolado, a temperaturas muito baixas, os eventos externos podem interferir no resultado.

Modelamos esse ruído de maneira simples, aplicando dois canais que simulam a interação do sistema com o ambiente, sendo eles o *amplitude damping* e o *phase damping*. Obtivemos bom resultado dessa modelagem. Verificamos, que, para o melhor resultado obtido, foi usado o ibmqx2 Yorktown, com o qual a probabilidade do erro acontecer está na faixa dos 25%. Embora o ruído e as imperfeições do hardware utilizado tenham tido um efeito prejudicial bastante forte nas correlações quânticas medidas, conseguimos verificar uma relação hierárquica para recursos quânticos dos estados produzidos: $N \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow D$ (COSTA; ANGELO, 2016). Esse tipo simples de modelagem do ruído indica que o acesso a computadores quânticos com taxas de ruído mais baixas permitirá que a aplicação de nosso circuito quântico produza até os tipos mais fortes de correlação quânticas.

Nós esperávamos que, utilizando o ibmq Melbourne, conseguiríamos resultados melhores, tendo em vista que ele usa uma plataforma programável, mais recente e com maior número de possibilidades para configurar o circuito com o Qiskit, mas isso não ocorreu. Investigando por que isso aconteceu, notamos que, além dos tempos de relaxação e de coerência, erros médios associados às portas de leitura têm influência sobre os resultados experimentais. Outro detalhe observado é que, para o mesmo chip, utilizando os mesmos q-bits, temos resultados diferentes, uma vez que, a

cada dia, é realizada uma nova calibração. A calibração altera o valor dos parâmetros do circuito, exceto a frequência de ressonância e a temperatura, tendo influência direta nos resultados. Esse trabalho está publicado no artigo (POZZOBOM; MAZIERO, 2019).

No trabalho de Gårding e seu colegas, observaram que nosso circuito não é capaz de gerar todos os estados Bell-diagonal possíveis (GÅRDING et al., 2020). Eles utilizaram parte do nosso circuito em conjunto com seus melhoramentos para implementar seu circuito no IBMQE. Propuseram também um circuito com apenas dois q-bits para criar todos os estado Bell-diagonal possíveis, o que na prática não é possível até o momento, devido às limitações técnicas do IBMQE. Mesmo com essa ressalva, para os estados quânticos com que trabalhamos aqui, nosso circuito é capaz de gerar os estados Bell-diagonal suficientes para o conjunto de correlações que estudamos.

4 VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO DIRETA ENTRE DISCÓRDIA E EMARANHAMENTO UTILIZANDO O COMPUTADOR QUÂNTICO DA IBM

A consolidação de conceitos na ciência, de modo geral, sempre passa por algum procedimento para quantificar as grandezas com as quais estamos trabalhando. Na MQ não foi diferente, surgindo algumas maneiras de quantificar os seus principais conceitos. Podemos destacar entre eles o emaranhamento e a discórdia. Como essas duas grandezas quânticas possuem características semelhantes, tentar relacioná-las é um caminho natural de estudo, mas nem sempre isso era feito da maneira mais adequada. Neste capítulo, tentamos verificar uma relação entre discórdia e emaranhamento que utiliza uma abordagem geométrica como forma de relacionar essas duas grandezas.

4.1 RELAÇÃO DIRETA ENTRE DISCÓRDIA E EMARANHAMENTO

Nem sempre existe uma relação direta entre as características quânticas. A partir do desenvolvimento dos quantificadores para medir as diferentes correlações quânticas, foi um estudo natural tentar relacioná-las. Muitas vezes isso era feito com medidas diferentes entre si, o que não garante uma boa comparação. Aqui o objetivo é tentar verificar uma relação direta entre discórdia e emaranhamento como descrito em (FELDMAN; MAZIERO; AUYUANET, 2017). No estudo citado anteriormente, foi realizada a comparação entre discórdia e emaranhamento para estados Bell-diagonal evoluindo sob efeito local do canal *phase damping* (e também para os canais de Pauli) com o mesmo tipo de medida, tanto para norma de Hilbert-Schmidt quanto com a norma do traço.

Para medir emaranhamento e discórdia, os autores optaram por uma abordagem geométrica a fim de deixar as duas medidas em condições de igualdade, possibilitando, assim, encontrar uma relação direta entre elas. Nesse caso, pode-se medir o quanto de emaranhamento ou de discórdia um operador densidade bipartido geral ρ possui, basicamente verificando-se a distância mínima de um estado que apresenta a correlação para o estado que não possui tal propriedade,

$$E(\rho) = \min_{\rho^{sep}} d(\rho, \rho^{sep}), \quad (4.1)$$

$$D(\rho) = \min_{\rho^{cc}} d(\rho, \rho^{cc}). \quad (4.2)$$

O conjunto de estados separáveis, ou seja, com emaranhamento zero é representado

por ρ^{sep} . Os estados clássicos ρ^{cc} são estados nos quais a discórdia é zero. Para fazer essas medidas de discórdia e emaranhamento, a partir de uma abordagem geométrica, dois casos particulares da distância da norma-p de Schatten foram usados. Ela é definida da seguinte forma: $\|A\|_p = \text{Tr} \left(\sqrt{A^\dagger A} \right)^p$. Quando $p = 1$, temos a norma do traço, que induz a uma distância

$$d_1(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_1 = \text{Tr} \sqrt{(\rho - \sigma)^2}, \quad (4.3)$$

e, para $p = 2$, temos a norma de Hilbert-Schmidt, que induz a uma distância

$$d_2(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_2^2 = \text{Tr}((\rho - \sigma)^2). \quad (4.4)$$

4.1.1 Relações entre discórdia e emaranhamento para estados Bell-diagonal evoluindo sob o canal *phase damping*

A classe de estados Bell-diagonal é equivalente, em unidades locais, a estados de dois q-bits maximamente misturados, os quais podem ser escritos da seguinte forma:

$$\rho = 2^{-2}(\mathbb{I}_4 + \vec{r} \cdot \vec{\Sigma}), \quad (4.5)$$

onde \mathbb{I}_n representa o operador identidade $n \times n$ e definimos ainda $\vec{\Sigma} = \sigma_1 \otimes \sigma_1 \hat{i} + \sigma_2 \otimes \sigma_2 \hat{j} + \sigma_3 \otimes \sigma_3 \hat{k}$ e $\vec{r} = r_1 \hat{i} + r_2 \hat{j} + r_3 \hat{k}$. O vetor \vec{r} é denominado vetor de correlação porque $r_j = \text{Tr}(\rho \sigma_j \otimes \sigma_j)$. O conjunto $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ representa a base ortonormal usual para \mathbb{R}^3 e σ_j são as matrizes de Pauli.

Para estudar o sistema de dois q-bits ab preparado no estado ρ , cada parte do sistema interage com seu próprio ambiente local independente. Logo, o sistema completo é $\rho \otimes |E_0^a\rangle\langle E_0^a| \otimes |E_0^b\rangle\langle E_0^b|$. Podemos considerar, neste caso, a evolução do sistema completo como um sistema fechado $U_a \otimes U_b (\rho \otimes |E_0^a\rangle\langle E_0^a| \otimes |E_0^b\rangle\langle E_0^b|) U_a^\dagger \otimes U_b^\dagger$, com U_s sendo a transformação unitária em $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_{E_s}$, para $s = a, b$. O traço parcial leva ao estado evoluído do sistema bipartido (NIELSEN; CHUANG, 2010):

$$\rho_t = \sum_{m,n} K_m^a \otimes K_n^b \rho K_m^{a\dagger} \otimes K_n^{b\dagger}, \quad (4.6)$$

com os elementos da matriz dos operadores de Kraus sendo

$$\langle s_j | K_m^s | s_k \rangle = (\langle s_j | \otimes \langle E_m^s |) U_s (| s_k \rangle \otimes | E_0^s \rangle), \quad (4.7)$$

com $|s_j\rangle$ e $|E_m^s\rangle$ são bases ortonormais de \mathcal{H}_s e \mathcal{H}_{E_s} . Usando esse fato, pode-se obter

as relações dinâmicas entre discórdia e emaranhamento, considerando dois q-bits preparados em um estado Bell-diagonal interagindo localmente com o canal *phase damping*.

O canal *phase damping* representa uma das principais fontes de perda das propriedades quânticas do sistema (decoerência), mas sem que ocorram trocas de energia entre sistema e ambiente. Temos os seguintes operadores de Kraus para esse canal $K_0^{pd} = \sqrt{1-p_s}\mathbb{I}_2$, $K_1^{pd} = \sqrt{p_s}|s_0\rangle\langle s_0|$ e $K_2^{pd} = \sqrt{p_s}|s_1\rangle\langle s_1|$. Aqui p_s é a probabilidade para uma mudança no estado do ambiente, que está condicionada ao estado do sistema. Para essa abordagem, devemos considerar os ambientes simétricos, $p_a = p_b \equiv p$. Substituindo esses operadores de Kraus, na Equação 4.6, obtemos o vetor correlação evoluído:

$$\vec{r}_{pd}(p) = r_1(1-p)^2\hat{i} + r_2(1-p)^2\hat{j} + r_3\hat{k}. \quad (4.8)$$

Considerando a norma de Hilbert-Schmidt para o cálculo da discórdia, nós usamos a medida geométrica introduzida por (DAKIĆ; VEDRAL; BRUKNER, 2010),

$$D(\rho) = \min_{\delta} \|\rho - \delta\|_2, \quad (4.9)$$

com o mínimo assumido sobre o conjunto dos estados com zero discórdia δ . Porém, para o caso no qual os estados são Bell-diagonal, os únicos estados em que a discórdia é zero estão sobre os eixos cartesianos (LANG; CAVES, 2010). Então, a discórdia é determinada pela distância euclidiana do ponto $(|r_1(p)|, |r_2(p)|, |r_3(p)|)$ ao seu eixo mais próximo. Considerando isso, define-se discórdia como:

$$D(p) = \min[D_1(p), D_2(p), D_3(p)], \quad (4.10)$$

onde

$$D_i(p) = r_j(p)^2 + r_k(p)^2, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (4.11)$$

com $i \neq j \neq k$.

Dependendo do valor inicial do vetor correlação, a discórdia pode apresentar um padrão de “mudança súbita” durante a evolução do sistema. Isso acontece porque, ao longo da evolução, o valor da discórdia $D(p)$, que comanda o comportamento dinâmico, pode mudar entre as diferentes funções $D_1(p)$, $D_2(p)$ e $D_3(p)$.

Para o cálculo do emaranhamento, usamos (WANG; SCHIRMER, 2009). Para matrizes hermitianas que pertencem à mesma classe de traço, a distância de Hilbert-Schmidt entre elas é igual à distância euclidiana entre os seus vetores de correlação correspondentes: $\|\rho - \zeta\|_2 = \|\vec{r} - \vec{z}\|_2$.

Para relacionar com discórdia, o emaranhamento é definido como

$$E(\rho) = \min_{\rho^{sep}} \|\rho - \rho^{sep}\|_2. \quad (4.12)$$

Para o caso de aplicar o canal *phase damping*, temos a seguinte expressão:

$$E(\rho) = \frac{(|r_1|(1-p)^2 + |r_2|(1-p)^2 + |r_3| - 1)^2}{3}. \quad (4.13)$$

Dependendo das condições iniciais do sistema, temos três diferentes possibilidades: a primeira, quando o estado inicial é dado por $|r_1|, |r_2|, < |r_3|$, a discórdia é comandada por $D_3(p)$ para todo p . No segundo caso, onde $|r_2|, |r_3|, < |r_1|$ ($|r_1| \neq 0$), a discórdia apresenta uma mudança súbita para $p_{13} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_1|}}$. No começo quem comanda é $D_1(p)$ para $p \leq p_{13}$, e depois passa para $D_3(p)$ onde $p \geq p_{13}$. O terceiro caso é similar ao segundo. Se $|r_1|, |r_3|, < |r_2|$ ($|r_2| \neq 0$), a discórdia inicial é comandada por $D_2(p)$ e passa para $D_3(p)$ para $p \geq p_{23}$, onde $p_{23} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_2|}}$.

O emaranhamento sofre uma morte súbita para $p_{MS} = 1 - \sqrt{\frac{1-|r_3|}{|r_1|+|r_2|}}$. Podemos expressar a discórdia para $p \in [0, p_{MS}]$ como função do emaranhamento a partir dos parâmetros p e $|r_3|$. Caso (1) quando $D(p) = D_1(p)$ ou $D_2(p)$, temos que $D(p) = D_i(p)$ com

$$D_i(p) = |r_j|^2 \left(\frac{\sqrt{3E(p)} - |r_3| + 1}{|r_1| + |r_2|} \right)^2 + |r_3|^2, \quad (4.14)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$. No caso (2) $D(p) = D_3(p)$,

$$D(p) = (|r_1|^2 + |r_2|^2) \left(\frac{\sqrt{3E(p)} - |r_3| + 1}{|r_1| + |r_2|} \right)^2. \quad (4.15)$$

Uma vez que conseguimos modelar de maneira aproximada os efeitos da decoerência através dos canais e *phase damping* para uma família de estados Bell-diagonal, gostaríamos de observar experimentalmente o que está apresentado na parte teórica da Figura 4.3, para condições iniciais $|r_3| < |r_2| < |r_1|$.

Para o calcular o emaranhamento e a discórdia através da norma do traço, usamos

$$E_{nt}(\rho) = \min_{\rho^{sep}} \|\rho - \rho^{sep}\|_1, \quad (4.16)$$

$$D_{nt}(\rho) = \min_{\rho^{cc}} \|\rho - \rho^{cc}\|_1. \quad (4.17)$$

A expressão para calcular a discórdia pela norma Schatten-1 para estados Bell-diagonal

é conhecida (PAULA et al., 2014):

$$D_{nt} = \text{int}\{|r_1|, |r_2|, |r_3|\}, \quad (4.18)$$

onde “int” é o valor intermediário. O emaranhamento, para esse caso, é quantificado pela *concurrence*

$$E_{nt}(p) = C(p) = \frac{1}{2} \max\{|r_2 \pm r_1|(1-p)^2 - |1 \pm r_3|\}, \quad (4.19)$$

colocando em ordem os coeficientes $|r_i|$ para escrever as relações entre discórdia e emaranhamento para a norma do traço. Para o caso onde $|r_i| < |r_j| < |r_3|$ com $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, a evolução da discórdia é expressa por $D_{nt} = |r_j(p)|$. Juntando as Equações 4.18 e 4.19:

$$D_{nt}(p) = \frac{2C(p) + |1 \pm r_3|}{|r_2 \pm r_1|} |r_j|, \forall p \in [0, p_{MS1}], \quad (4.20)$$

onde p_{MS1} é a morte súbita do emaranhamento quando, para esse caso, $p_{MS1} = 1 - \sqrt{\frac{|1 \pm r_3|}{|r_2 \pm r_1|}}$. No segundo caso $|r_1| < |r_3| < |r_2|$, a mudança súbita da discórdia aparece em $p_I = 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_2|}}$; no começo é igual a $|r_3|$ para $p \leq p_I$ e torna-se igual a $|r_2|$ para $p \geq p_I$. Notamos que $p_I = p_{23}$, em que p_{23} é o tempo para a mudança súbita da discórdia geométrica calculada usando a norma de Hilbert-Schmidt. Para o terceiro caso, no qual $|r_3| < |r_2| < |r_1|$, a discórdia exibe mudança súbita para p_I e ainda para $p_{II} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_1|}}$ nessas condições iniciais em que $p_I \leq p_{II}$. Para $p < p_I$ a discórdia é expressa por $D = |r_2(p)|$, para $p_I \leq p < p_{II}$ a discórdia é expressa por $D = |r_3|$ e para $p_{II} \leq p$

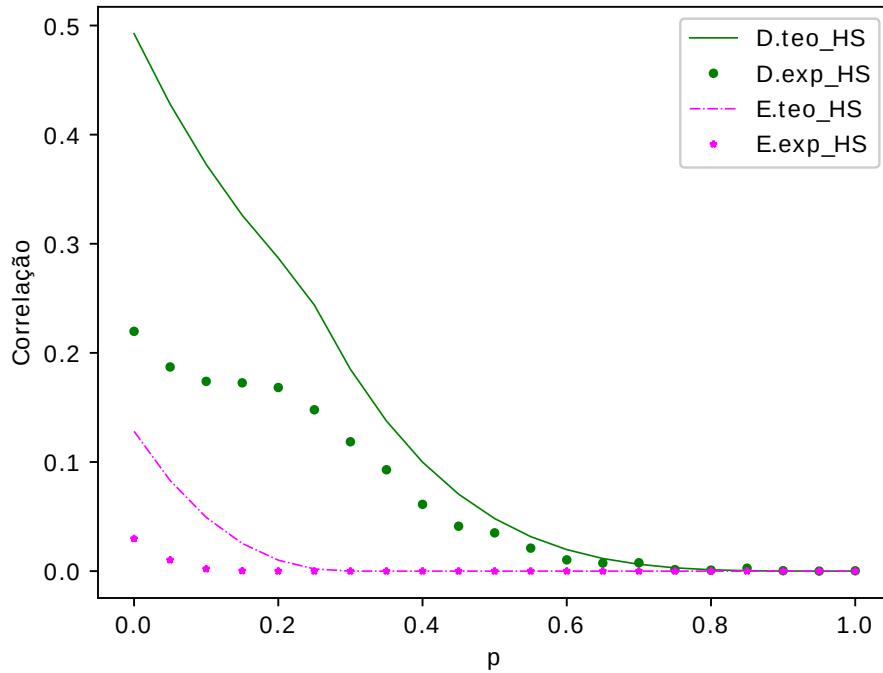
$$D_{nt}(p) = |r_1(p)| = \frac{2C(p) + |1 \pm r_3|}{|r_2 \pm r_1|} |r_1|. \quad (4.21)$$

Note que $p_{II} = p_{13}$, em que p_{13} é o momento para a mudança súbita da discórdia geométrica baseada na norma de Hilbert-Schmidt.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO NO IBMQE

Para testar a relação apresentada anteriormente, utilizamos o circuito da Figura 3.1, que gera estados Bell-diagonal ajustáveis. Utilizamos para esse teste os chip quântico Yorktown. Nas Figura 4.1 e 4.2, temos o gráfico das correlações consideradas (discórdia e emaranhamento) em função do tempo parametrizado “ p ”. Nesse tempo p , que representa a ação do canal *phase damping*, quando $p = 0$, não ocorreu a ação, enquanto que, quando $p = 1$, a ação do canal é máxima. O estado inicial é

Figura 4.1 – Correlações em função do tempo parametrizado p para o estado inicial $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sobre ação local do canal *phase damping*. A discórdia D (linha verde contínua), o emaranhamento E (linha magenta pontilhada), ambas para à norma de Hilbert-Schmidt. Os pontos representam as mesmas correlações, para os estados preparados experimentalmente.



o mesmo para ambos os gráficos, com valores de $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$ ($|r_3| < |r_2| < |r_1|$). Para a Figura 4.1, os valores obtidos são relativos à norma de Hilbert-Schmidt, enquanto que, para a Figura 4.2, os valores obtidos são para a norma do traço, sendo que a discórdia está na cor verde e o emaranhamento em rosa. Na Figura 4.3, o gráfico representa a relação direta entre discórdia e emaranhamento. A cor azul indica a norma de Hilbert-Schmidt e a cor vermelha é utilizada para a norma do traço. Para ambos os casos, as linhas representam os valores teóricos enquanto os pontos representam os valores experimentais.

Uma outra tentativa de verificação, usando os computadores quânticos da IBM, foi observar a mudança súbita da discórdia. Para esse caso, implementamos os testes no chip Vigo e também no simulador (*ibmq_simulator*). O estado inicial adotado para o teste foi $r_1 = 1,00$, $r_2 = -0,60$, $r_3 = 0,60$ ($|r_2|, |r_3| < |r_1|$). Os valores de calibração para o *ibmq* Vigo estão na Tabela 4.1. Na Figura 4.4, as linhas contínuas representam os valores teóricos para discórdia (verde), correlação clássica (magenta), e informação mútua (azul). A informação mútua e a correlação clássica foram citadas na Seção 2.4.4. Tentamos observar a mudança súbita da discórdia, mas, para este teste experimental, não chegamos a um resultado conclusivo. Esse teste também foi realizado em outros chips, Yorktown, Tenerife, Melbourne e Ourense, mas, apresenta-

Figura 4.2 – Correlações em função do tempo parametrizado p para estado inicial $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sobre ação local do canal *phase damping*. A discórdia D_{nt} (linha verde contínua), o emaranhamento E_{nt} (linha magenta pontilhada) ambos para a norma do traço. Os pontos representam as mesmas correlações para os estados preparados experimentalmente.

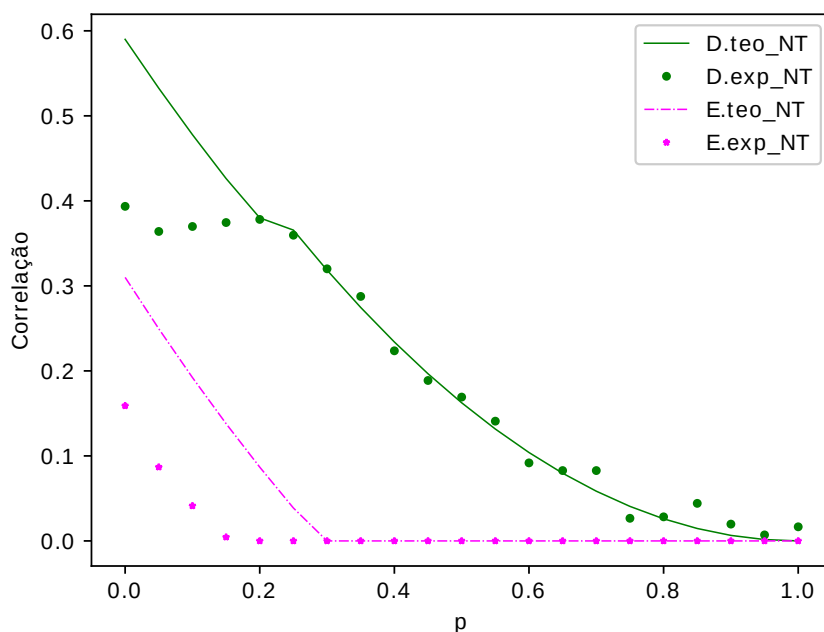


Figura 4.3 – Discórdia, D , em função do emaranhamento, E , para estados iniciais $r_1 = 0,65$, $r_2 = 0,59$, $r_3 = -0,38$, evoluindo sob ação local do canal *phase damping*. A norma de Hilbert-Schmidt aparece na cor azul, enquanto a cor vermelha representa a norma do traço.

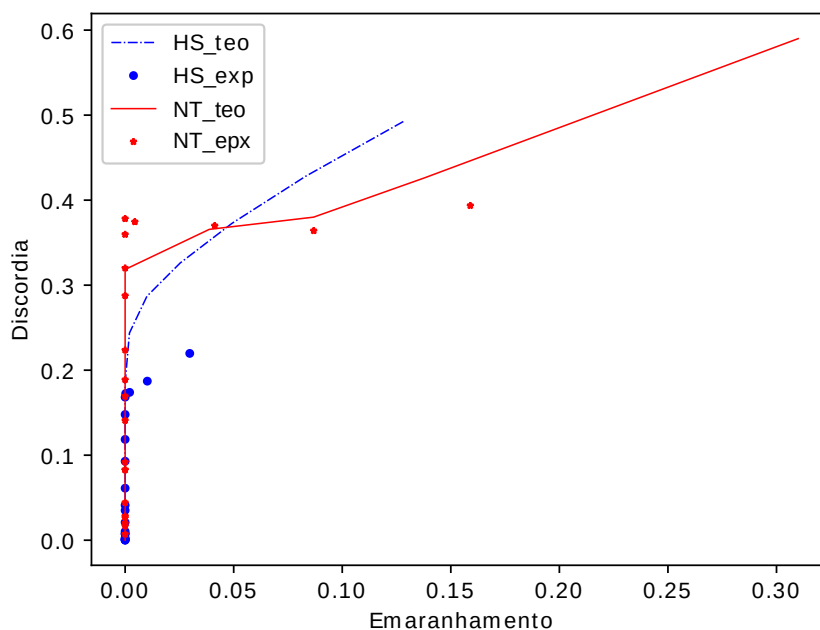
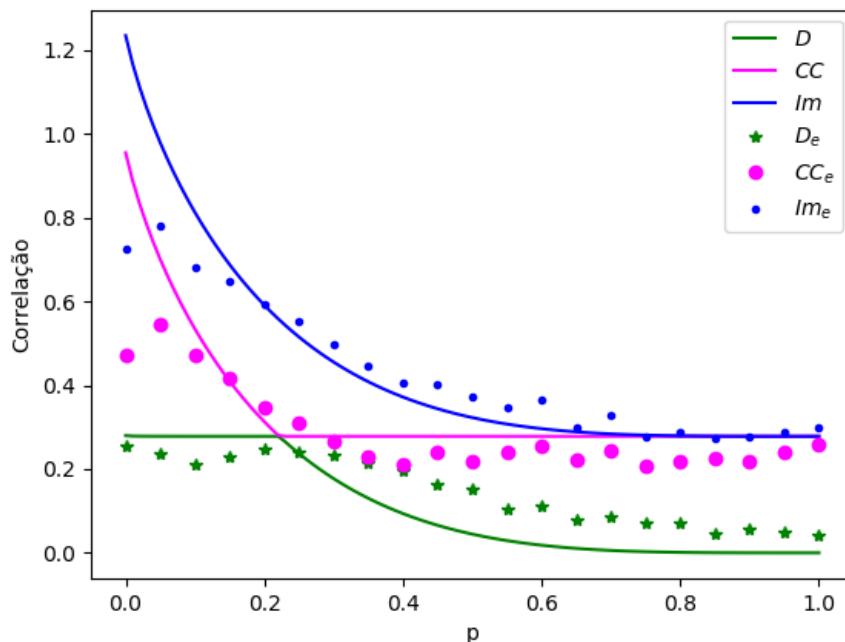


Tabela 4.1 – Parâmetros de calibração do chip quântico Vigo.

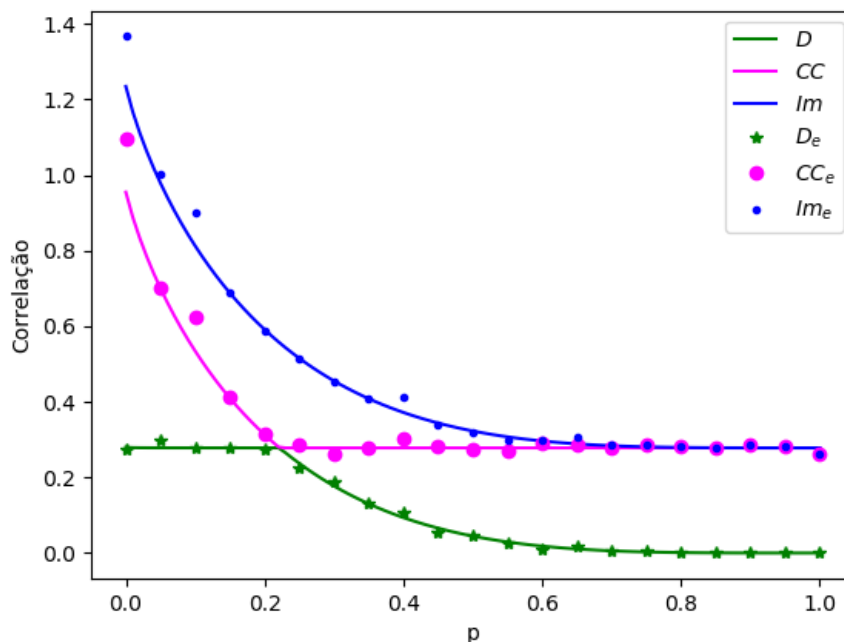
Parâmetros Vigo	Q0	Q1	Q3	Q4
Frequência (GHz)	4,80	4,94	4,81	4,74
T1 (μs)	90,64	102,09	94,12	154,32
T2 (μs)	18,39	112,78	66,01	50,32
Erro de porta (10^{-3})	0,63	0,70	1,14	1,55
Erro de leitura (10^{-2})	6,00	1,40	2,10	1,90
E. de portas múltiplas (10^{-3})	$CX_{0,1}$ 8,095	$CX_{1,3}$ 9,963		$CX_{4,3}$ 9,914

Figura 4.4 – Mudança súbita da discórdia D em função do tempo parametrizado p para o chip quântico Vigo. As linhas contínuas são os valores teóricos, discórdia (verde), correlação clássica (magenta), informação mútua (azul), enquanto os pontos são os valores experimentais.



ram resultados piores que o chip Vigo. Tentamos, então, simular esse experimento no simulador da IBMQE. Na Figura 4.5, apresentamos o resultado da mudança súbita da discórdia com valores experimentais a partir do simulador. Os valores teóricos estão representados pelas linhas, enquanto os valores experimentais aparecem com pontos. Podemos notar aqui que os resultados experimentais praticamente coincidem com os valores teóricos, o que é um bom indício de que o nosso circuito está reproduzindo os resultados de acordo com o esperado e que a decorência causada pelas interações do sistema com ambiente tem papel preponderante na destruição das correlações observadas.

Figura 4.5 – Mudança súbita da discórdia D em função do tempo p , teste no simulador *ibmq_simulator*. As linhas contínuas são os valores teóricos, discórdia (verde), correlação clássica (magenta), informação mútua (azul), enquanto os pontos são os valores experimentais.



4.3 DISCUSSÃO FINAL

Neste capítulo, tentamos verificar a relação direta entre discórdia e emaranhamento para uma família de estado Bell-diagonal sob o efeito do canal *phase damping* e também observar o padrão de mudança súbita da discórdia. Para ambos os casos, podemos notar que nossos resultados experimentais são razoáveis, mas não com a precisão que gostaríamos. Os pontos experimentais acompanham a inclinação das curvas teóricas. No entanto, os valores experimentais são menores quando comparados com os teóricos. Essa queda praticamente pela metade das correlações pode ser ocasionada por alguns fatores. Entre eles, destacam-se imperfeições técnicas do computador, erros de portas e de leitura e também a interação do sistema com o ambiente, os quais, mesmo que os dispositivos sejam extremamente protegidos, ainda podem ocorrer. Essas interações causam a decoerência das correlações que trabalhamos, diminuindo, assim, a precisão experimental desses resultados. Outro fator que poderia ajudar na visualização dos resultados é o aumento do número de pontos experimentais. Tentamos fazer isso e não conseguimos, devido à grande demanda operacional dos chips na época.

5 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE BASEADAS EM PROPRIEDADES DA MATRIZ DE DENSIDADE

O princípio da complementaridade de Bohr foi um marco no desenvolvimento da Mecânica Quântica (MQ). Ele afirma que, em um determinado aparato experimental, um ente quântico não pode ser, ao mesmo tempo, classificado como onda e partícula. Entretanto, com a melhora dos equipamentos experimentais, notou-se que as características de onda e partículas podem ser observadas de maneira parcial. Relações de complementaridade foram propostas para tentar medir o quão forte são as manifestações das características de onda ou de partícula. Recentemente, foram propostos quantificadores para aspectos ondulatórios e corpuscular a partir das propriedades básicas das matrizes densidades ($\rho \geq 1, \text{Tr}(\rho) = 1$).

Neste capítulo usamos os computadores quânticos da *International Business Machines* (IBM) para realizar testes experimentais dessas relações de complementaridade aplicadas a uma classe particular de estados quânticos de um q-bit e também para estados aleatórios de um, dois e três q-bits. Os resultados apresentados neste capítulo, escrito em colaboração com os demais autores, estão publicados no artigo “*Experimental tests of the density matrix’s property-based complementarity relations*”, na revista *Physical Review A* 103, 022212, de 16 fevereiro 2021 e no arXiv <https://arxiv.org/abs/2011.00723>.

5.1 RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE

O aspecto de dualidade onda-partícula tem papel central no desenvolvimento da MQ. Geralmente, essa característica é observada de forma qualitativa pelo Princípio da Complementaridade de Bohr (BOHR, 1928). Esse princípio afirma que a caracterização completa de um ente quântico não pode ser feita considerando-se apenas uma configuração experimental. Somente o conjunto total de fenômenos envolvidos no experimento pode esgotar as informações a respeito do ente quântico. Por exemplo, no experimento do interferômetro de Mach-Zehnder, quando observamos a formação das franjas de interferência, temos a característica ondulatória. Já o aspecto corpuscular fica evidente quando possuímos a informação de qual caminho é seguido no interior do interferômetro. Esses dois fenômenos, mesmo apresentando resultados diferentes, não se anulam entre si, mas, se complementam para fazer uma descrição completa do ente quântico. Em princípio, o conhecimento completo do caminho seguido por uma partícula ao longo de um experimento do tipo Mach-Zehnder implica o

desaparecimento do padrão das franjas de interferência e vice-versa.

Considerando a necessidade de quantificar as propriedades de onda-partícula, Wootters e Zurek (1979) estudaram esses fenômenos usando interferômetros que obtêm informações incompletas de qual direção o ente quântico seguia. Para isso, introduziram no interferômetro um dispositivo de detecção de caminho e obtiveram uma visibilidade do padrão de franjas de interferência parcial. Depois, este trabalho foi estendido por Englert (1996), que derivou uma relação de complementaridade onda-partícula. Uma outra maneira de fazer medidas parciais para conhecimentos de ondas e partículas foi proposta por Greenberger e Yasin (1988) sem a utilização de detectores de caminho. Eles utilizaram um interferômetro de nêutrons com dois feixes, com intensidade não sendo necessariamente a mesma. Definiram ali uma medida de informação de caminho chamada de previsibilidade. Neste sentido, se o sistema quântico que passa pelo divisor de feixes tem diferentes probabilidades de ser refletido nos dois caminhos, tem-se algumas informações de caminho sobre o sistema quântico. Esse entendimento do experimento levou a uma tipo diferente de relação onda-partícula:

$$P^2 + V^2 \leq 1, \quad (5.1)$$

onde P é previsibilidade relacionada ao caminho e V é a visibilidade relacionada ao padrão de interferência. Na Equação 5.1, podemos notar que, mesmo que possamos ter informação sobre a natureza do ente quântico, onda ou partícula, quanto mais informação relativa a uma delas o sistema fornece, menos ele fornece sobre a outra. Os autores Auccaise *et al.* (2012), mostraram que é possível medir ambos os aspectos do sistema com o mesmo aparato experimental, usando um processador molecular de informação quântica e técnicas de ressonância magnética nuclear.

O avanço dos experimentos possibilitou que muitos pesquisadores progredissem no sentido da quantificação da dualidade onda-partícula. Condições mínimas e razoáveis para considerar medidas de visibilidade e previsibilidade foram estabelecidas (DÜRR, 2001; ENGLERT *et al.*, 2008), que estenderam essas medidas para d -dimensões discretas. Com o progresso do campo da Ciência da Informação Quântica, foi sugerido que a coerência quântica (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) é uma boa generalização para medidas de visibilidade (BERA *et al.*, 2015; BAGAN *et al.*, 2016; QURESHI, 2019; MISHRA; VENUGOPALAN; QURESHI, 2019). Muitas abordagens foram feitas para quantificar as propriedades onda-partícula de um sistema quântico (ANGELO; RIBEIRO, 2015; COLES, 2016; BAGAN *et al.*, 2018; ROY; QURESHI, 2019; BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020). Vale ressaltar que (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) mostraram que a norma- l_1 e a entropia relativa são medidas de coerência genuínas. No entanto, como mostrado em (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020), todas as medidas de coerência quântica, in-

cluindo a coerência de Wigner-Yanase (YU, 2017), são válidas para a visibilidade. Com isso, podemos esperar que, para cada medida de coerência, exista uma medida fiel de visibilidade correspondente.

Como foi apontado por Qian *et al.* (2020), as relações de complementaridade tipo a Equação 5.1 não prevêem realmente uma troca balanceada entre P e V , uma vez que a desigualdade permite uma diminuição de P e V ao mesmo tempo, ou um aumento de ambos. Ela ainda permite que o caso extremo $P = V = 0$ ocorra (nem onda nem partícula), enquanto que, em uma configuração experimental, ainda temos um ente quântico em mãos. No entanto, esse ente quântico não pode ser nada. Assim, deve estar faltando algo na Equação 5.1. Como foi notado por Jakob e Bergou (2010), essa falta de conhecimento sobre o sistema é devida a outra característica quântica intrigante, o emaranhamento (BRUß, 2002; HORODECKI *et al.*, 2009), ou, mais geralmente, a correlações quânticas (BASSO; MAZIERO, 2020a). Isso implica que as informações estão sendo compartilhadas com outro sistema e esse tipo de correlação quântica pode ser vista como responsável pela perda de pureza de cada subsistema de tal forma que, para estados puros maximamente emaranhados, não é possível obter informações sobre propriedades locais dos subsistemas. Logo, para caracterizar totalmente o ente quântico, não é suficiente considerar somente seu aspecto onda-partícula, devemos também levar em conta suas correlações com outros sistemas.

A primeira confirmação experimental das relações de complementaridade completas (RCC) foi realizada por Qian *et al.* (2020), usando estados de fóton único. Já Schwaller, Dupertuis e Javerzac-Galy (2020) verificaram, com os q-bits supercondutores da IBMQE, a ligação existente entre o emaranhamento e a quantidade de dualidade onda-partícula para um estado quântico bipartido particular. Mais recentemente, Amico e Dittel (2020) apresentaram uma arquitetura para investigar a dualidade onda-partícula em um interferômetro de d -caminhos em um computador quântico envolvendo apenas $2 \log_2(d)$ q-bits e desenvolveram um esquema de medição que permite a extração eficiente de quantificadores de visibilidades de interferência e distinguibilidade. Por último, conforme mostrado por Basso e Maziero (2020a, 2020b), se considerarmos o ente quântico como parte de um sistema quântico puro multipartido, para cada par de medidas de coerência e previsibilidade que quantificam as propriedades locais de um ente quântico, existe uma medida de correlação quântica correspondente que completa uma dada relação de complementaridade.

Nós consideramos um estado puro descrito por $|\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_n} \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ com dimensão $d = d_{A_1 A_2 \dots A_n}$. Para cada subsistema A_m , consideramos um base ortonormal local no espaço de Hilbert \mathcal{H}_m como $\{|j\rangle_{A_m}\}_{j=0}^{d_{A_m}-1}$, com $m = 1, \dots, n$. O subsistema $A := A_1$ é representado por um operador densidade reduzido $\rho_A = \text{Tr}_{A_2 \dots A_n}(|\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_n} \langle \Psi|)$ (BERGOU; HILLERY, 2013). Agora, começando da pureza do

estado global $|\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_n}$, foi mostrado (BASSO; MAZIERO, 2020a, 2020b) que a caracterização completa de um subsistema A pode ser expressa pelas seguintes RCC:

$$P_{l_1}(\rho_A) + C_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1, \quad (5.2)$$

$$P_{hs}(\rho_A) + C_{wy}(\rho_A) + W_{wy}(\rho_A) = \frac{(d_A - 1)}{d_A}, \quad (5.3)$$

$$P_{hs}(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + S_l(\rho_A) = \frac{(d_A - 1)}{d_A}, \quad (5.4)$$

$$P_{vn}(\rho_A) + C_{re}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = \log_2 d_A. \quad (5.5)$$

Como mencionado anteriormente, as medidas de coerência quântica são uma boa generalização para as medidas de visibilidade quântica e são calculadas pelas seguintes equações:

$$C_{l_1}(\rho_A) := \min_{\iota} \|\rho_A - \iota\|_{l_1} = \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}^A|, \quad (5.6)$$

$$C_{wy}(\rho_A) := \sum_j I_{wy}(\rho_A, |j\rangle\langle j|) = \sum_{j \neq k} |\langle j | \sqrt{\rho_A} | k \rangle|^2, \quad (5.7)$$

$$C_{hs}(\rho_A) := \min_{\iota \in I} \|\rho_A - \iota\|_{hs}^2 = \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}^A|^2, \quad (5.8)$$

$$C_{re}(\rho_A) := \min_{\iota \in I} S_{vn}(\rho_A || \iota) = S_{vn}(\rho_{A \text{diag}}) - S_{vn}(\rho_A). \quad (5.9)$$

Neste caso, temos que I é o conjunto de todos os estados incoerentes. A norma de Hilbert-Schmidt da matriz $M \in \mathbb{C}^{d \times d}$ é definida com $\|M\|_{hs} := \sqrt{\sum_{j,k} |M_{jk}|^2}$, enquanto que a norma- l_1 é dada por $\|M\|_{l_1} := \sum_{j,k} |M_{jk}|$. A informação enviesada de Wigner-Yanase é $I_{wy}(\rho, |j\rangle\langle j|) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, |j\rangle\langle j|]^2)$, a entropia relativa é $S_{vn}(\rho_A || \iota) := \text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A - \rho_A \log_2 \rho_\iota)$ e $\rho_{A \text{diag}}$ é a parte diagonal de ρ_A .

As medidas da previsibilidade para as RCC são:

$$P_{l_1}(\rho_A) := d_A - 1 - \sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{jj}^A \rho_{kk}^A}, \quad (5.10)$$

$$P_{hs}(\rho_A) := \sum_j (\rho_{jj}^A)^2 - \frac{1}{d_A}, \quad (5.11)$$

$$P_{vn}(\rho_A) := \log_2 d_A + \sum_j \rho_{jj}^A \log_2 \rho_{jj}^A. \quad (5.12)$$

A parte que completa as relações de complementaridade são as correlações quânticas dadas pelas equações seguintes:

$$W_{l_1}(\rho_A) := \sum_{j \neq k} \left(\sqrt{\rho_{jj}^A \rho_{kk}^A} - |\rho_{jk}^A| \right), \quad (5.13)$$

$$W_{wy}(\rho_A) := \sum_j \left(\langle j | \sqrt{\rho_A} | j \rangle^2 - \langle j | \rho_A | j \rangle^2 \right), \quad (5.14)$$

$$S_l(\rho_A) := 1 - \text{Tr} \rho_A^2 = 1 - \sum_{j,k} |\rho_{jk}^A|^2, \quad (5.15)$$

$$S_{vn}(\rho_A) := -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A), \quad (5.16)$$

em que $\{|j\rangle\}_{j=0}^{d_A-1} \equiv \{|j\rangle_{A_1}\}_{j=0}^{d_A-1}$ e $\rho_{jk}^A = \langle j | \rho_A | j \rangle$.

Podemos ressaltar que a Equação 5.4 é uma generalização da relação de complementaridade obtida por Jakob e Bergou (2006, 2007) para sistemas quânticos puros bipartidos. Além disso, em (HIESMAYR; HUBER, 2008), os autores exploraram a relação de pureza mista do ente quântico para obter uma relação de complementaridade completa equivalente à Equação 5.4. Observamos também que, se o subsistema A não está correlacionado com o restante dos subsistemas, então A é puro e todas as medidas de correlação desaparecem. Nesse caso, $C_{wy}(\rho_A) = C_{hs}(\rho_A)$ e as RCC nas Equações 5.3 e 5.4 tornam-se a mesma. Além disso, na referência (BASSO; MAZIERO, 2020b), é mostrado que as medidas de coerência quântica usadas aqui podem ser tomadas como medidas de incerteza quântica, enquanto as de correlações podem ser tomadas como medidas de incerteza clássica. Logo, as RCC das Equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 podem ser ajustadas como relações de complementaridade entre previsibilidade e incerteza, o que implica que as medidas de previsibilidade podem ser interpretadas como se estivessem medindo nossa capacidade de fazer uma estimativa correta sobre os resultados possíveis em uma base de referência. Ou seja, se nossa incerteza total sobre os resultados possíveis diminuir, nossa capacidade de fazer uma estimativa correta irá aumentar. Também podemos ver isso percebendo que as expressões para $P_{vn}(\rho_A)$ e $P_{hs}(\rho_A)$ podem ser obtidas a partir $P_\tau(\rho_A) = S_\tau^{\max} - S_\tau(\rho_{\text{diag}})$,

para $\tau = l, vn$ em que $S_\tau(\rho_{\text{diag}})$ mede nossa incerteza total sobre resultados possíveis. Vale a pena mencionar que, para $d = 2$, podemos escrever $P_{hs}(\rho) = \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22})^2$, que é similar à medida de previsibilidade usada nas referências (DÜRR, 2001; ENGLERT et al., 2008). Além disso, é possível notar que $P = (f(\rho_{11}) - f(\rho_{22}))^2$ é também é uma boa medida de previsibilidade, com f sendo qualquer função crescente monotônica das probabilidades ρ_{jj} , $j = 1, 2$. Portanto, para a $f(x) = \sqrt{x}$, a previsibilidade da norma- l_1 é a generalização da função bidimensional $P = (\sqrt{\rho_{11}} - \sqrt{\rho_{22}})^2$.

Por fim, notamos que todas essas medidas de previsibilidade, visibilidade e correlação quântica têm o mesmo significado físico, uma vez que atendem aos critérios estabelecidos pela literatura (DÜRR, 2001; ENGLERT et al., 2008). A afirmação anterior pode mudar se um experimento ou uma situação física que os distingue aparecer. Nesse caso, será necessário modificar ou adicionar alguns critérios para excluir algumas das medidas.

Logo a seguir estão as relações de complementaridade incompletas obtidas a partir das Equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 quando ignoramos as correlações do subsistema A com os outros subsistemas:

$$P_{l_1}(\rho_A) + C_{l_1}(\rho_A) \leq d_A - 1, \quad (5.17)$$

$$P_{hs}(\rho_A) + C_{wy}(\rho_A) \leq \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (5.18)$$

$$P_{hs}(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) \leq \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (5.19)$$

$$P_{vn}(\rho_A) + C_{re}(\rho_A) \leq \log_2 d_A, \quad (5.20)$$

já que $S_l(\rho_A), S_{vn}(\rho_A) \geq 0$ e $W_{l_1}(\rho_A), W_{wy}(\rho_A) \geq 0$. As relações de complementaridade incompletas também foram derivadas em (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020) a partir de propriedades básicas das matrizes densidade que descrevem o estado do subsistema. Outra característica das relações incompletas são os aspectos locais do ente quântico. Logo, essas relações estão intimamente ligadas à pureza do sistema. Por exemplo, a pureza do sistema quântico A pode ser quantificada por $\mathcal{P}_{hs}(\rho_A) = \text{Tr} \rho_A^2$ (JAEGER, 2007), então segue diretamente que $\mathcal{P}_{hs}(\rho_A) = P_{hs}(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + \frac{1}{d_A}$. Além disso, conforme observado em (GAMEL; JAMES, 2012), a pureza de von Neumann pode ser definida como $\mathcal{P}_{vn}(\rho_A) := \log_2 d_A - S_{vn}(\rho_A)$, o que implica em $\mathcal{P}_{vn}(\rho_A) = P_{vn}(\rho_A) + C_{re}(\rho_A)$. Portanto, podemos sugerir que

$$\mathcal{P}_\lambda(\rho_A) := M_\lambda(d_A) - W_\lambda(\rho_A), \quad (5.21)$$

como uma nova medida de pureza, na qual $M_\lambda(d_A) = d_A - 1, \frac{(d_A - 1)}{d_A}$ para $\lambda = l_1, wy$, respectivamente.

Notamos também que nenhum sistema está completamente isolado do seu ambiente. Essa interação entre sistema e ambiente faz com que eles se correlacionem, o que leva à transferência irreversível de informação do sistema para o ambiente. Tal processo é denominado decoerência, que resulta em uma dinâmica não unitária para o sistema, cujo efeito mais importante é o desaparecimento das relações de fase entre os subespaços do espaço de Hilbert total do sistema (ZUREK, 1982, 2003). Logo, a interação entre o subsistema A e o ambiente também introduz misturas, assim como no resto do sistema, o que implica medidas de $S_l(\rho_A)$, $S_{vn}(\rho_A)$, $W_{l_1}(\rho_A)$ e $W_{wy}(\rho_A)$ que podem ser vistas, em geral, como uma medida da mistura do subsistema A , uma vez que elas não distinguem as correlações quânticas do subsistema A do resto dos subsistemas das indesejáveis correlações do sistema com o ambiente.

5.2 CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL

A IMBQE é uma plataforma que está disponível para estudantes e pesquisadores do mundo todo para colocar em prática testes de propriedades quânticas através da implementação de circuitos em chips quânticos (IBM QUANTUM, 2016). Os chips quânticos disponíveis, para o público em geral, possuem cinco e quinze q-bits. Neste trabalho usamos os dois chips, com cinco q-bits, quânticos através da plataforma Qiskit (IBM QUANTUM, 2017b). Essa plataforma fornece um conjunto de ferramentas de código aberto para montar circuitos quânticos em um programa Python, o que facilita as alterações à medida que vamos avançando com os experimentos, e também possibilita a utilização dos chips com maior número de q-bits.

Começamos por um circuito que gera estados de uma classe particular de um q-bit, apresentados na Seção 5.2.1. Para este teste, usamos o chip Yorktown. Depois de obter esses resultados, partimos para circuitos aleatórios de um, dois e três q-bits, mostrado na Seção 5.2.2, que viessem a reforçar os resultados obtidos no primeiro teste. Para gerar os estados aleatórios, nós utilizamos a função *random_circuit(x,y)* do Qiskit, na qual x é o número de q-bits do circuito e y é a profundidade do circuito, ou seja, o número de portas sorteadas aleatoriamente e com a mesma probabilidade importadas de um conjunto de portas padrão onde estão todas as portas disponíveis (IBM QUANTUM, 2019b) e que foram apresentadas na Seção 2.5.4.

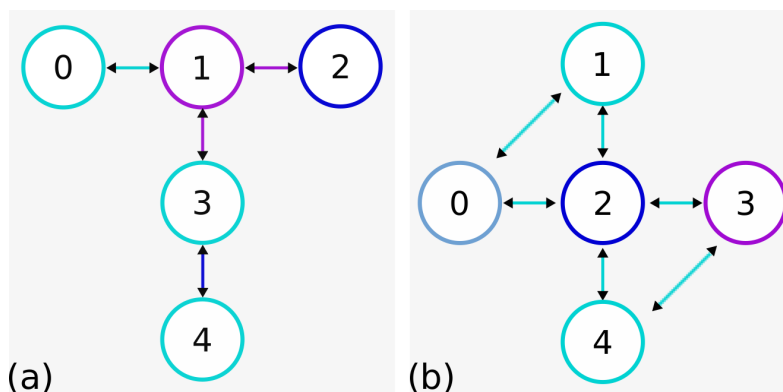
Nós utilizamos dois chips para realizar o experimento com estados aleatórios. O chip London possui cinco q-bits no total. Apresenta uma distribuição de seus q-bits em forma de “T”, como mostrado na Figura 5.1a. O chip Yorktown também possui

cinco q-bits e a disposição dos q-bits é em forma de “prisma”, exibida na Figura 5.1b.

A temperatura extremamente baixa, próxima do zero absoluto, é conseguida com um sofisticado sistema de refrigeração, chamado de refrigerador de diluição. O sistema de refrigeração usa uma mistura de dois isótopos de Hélio ${}^3\text{He}$ e ${}^4\text{He}$ como elementos principais. O dispositivo de resfriamento é de ciclo fechado e conta ainda com cabos coaxiais supercondutores, isoladores criogênicos e amplificadores quânticos para minimizar os efeitos de perda de energia. O processador quântico fica dentro de um escudo *Cryoperm* para evitar efeitos indesejados da radiação eletromagnética. Por fim, a câmara de mistura fornece as condições necessárias para reduzir a temperatura do processador para aproximadamente 15 mK (IBM QUANTUM, 2019a).

A tomografia de estados é feita no próprio circuito, usando uma função específica *state_tomography_circuits(qc,qr)*, em que *qc* aponta qual o circuito quântico e *qr* determina quais q-bits cujo estado deve ser estimado.

Figura 5.1 – Distribuição espacial dos q-bits nos dois chips. Em (a) temos o chip London, enquanto em (b) está a configuração do chip Yorktown.



Fonte: Adaptado de IBM Quantum (2017a).

5.2.1 Estados de um q-bit

Como as relações de complementaridade, representadas pela Equação 5.1, não conseguem capturar uma relação equilibrada entre P e V , porque a diminuição de um não significa o aumento do outro, podemos considerar o estado de um ente quântico como,

$$\rho_A = w|\psi\rangle_A\langle\psi| + \frac{1-w}{2}I_{2\times 2}, \quad (5.22)$$

em que $|\psi\rangle_A = \sqrt{x}|0\rangle_A + \sqrt{1-x}|1\rangle_A$, com $x, w \in [0, 1]$ e $I_{2\times 2}$ é o operador identidade.

Nós podemos considerar o estado do sistema A como resultado da interação com seu próprio ambiente modelado pelo canal *depolarizing* (NIELSEN; CHUANG, 2010), que descreve a interação do sistema com o seu entorno como uma mistura maximamente entrópica. Ao observar a Equação 5.22, vemos que, quando $w \rightarrow 0$, o estado de A se aproxima de um estado maximamente incoerente, implicando $P \rightarrow 0$ e $V \rightarrow 0$ para quaisquer medidas de previsibilidade e visibilidade.

Podemos sempre purificar ρ_A e considerá-lo como resultado do emaranhamento com outro sistema B , que pode representar os graus de liberdade do ambiente ou de outro q-bit auxiliar. Nossa purificação para o estado $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle_{AB} \langle \psi|$ é dado por:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & (-\sqrt{1-x}|0\rangle_A + \sqrt{x}|1\rangle_A) \otimes \sqrt{\frac{1-w}{2}}|0\rangle_B \\ & + (\sqrt{x}|0\rangle_A + \sqrt{1-x}|1\rangle_A) \otimes \sqrt{\frac{1+w}{2}}|1\rangle_B. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Esse estado puro pode ser preparado experimentalmente, usando a seguinte sequência de portas lógicas unitárias:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} = & C_Z(B \rightarrow A)C_X(B \rightarrow A)U^A(\alpha, 0, 0) \otimes U^B(\theta, 0, 0)|0, 0\rangle_{A,B} \\ = & \left(\cos \frac{\alpha}{2}|0\rangle_A + \sin \frac{\alpha}{2}|1\rangle_A \right) \otimes \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle_B + \left(\sin \frac{\alpha}{2}|0\rangle_A + \cos \frac{\alpha}{2}|1\rangle_A \right) \otimes \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle_B, \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde U está mostrado da Seção 2.5.4. $C_Z(B \rightarrow A)$ e $C_X(B \rightarrow A)$ são as portas controladas Z e X , respectivamente, com B sendo o q-bit de controle e A é o q-bit alvo (BARENCO et al., 1995). O circuito quântico para preparar o estado da Equação 5.22 é mostrado na Figura 5.2. Os ângulos α e θ e os parâmetros w e x são relacionados por

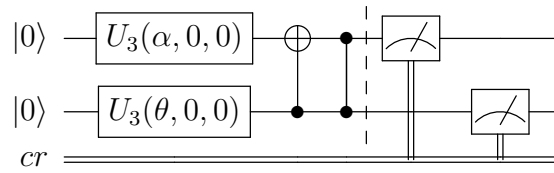
$$\alpha = 2 \arcsin(\sqrt{x}), \quad (5.25)$$

$$\theta = \arccos(-w), \quad (5.26)$$

com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Usando o circuito quântico da Figura 5.2 no chip Yorktown com os parâmetros de calibração que estão mostrados na Tabela 5.1 para preparar ρ_A , os gráficos das Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 compartilham de algumas características. As linhas contínuas (“—”, em vermelho) são os valores teóricos, os pontos (“•”, em azul) são os valores experimentais, as barras de erros (“_”, em verde) estão associadas ao desvio padrão para um conjunto de três experimentos. Os valores do eixo x estão relacionados ao valor do ângulo α da equação 5.25, enquanto os valores de w estão relacionados com

Figura 5.2 – Circuito quântico usado para preparar estados de dois q-bits referente à Equação 5.23.



o valor do ângulo θ na equação 5.26.

Nas Figuras 5.3 e 5.4, podemos observar o comportamento da coerência $C_{l_1}(\rho_A)$ e previsibilidade $P_{l_1}(\rho_A)$, respectivamente, com uma diminuição dos valores experimentais em relação aos valores teóricos. Na Figura 5.5, onde $W_{l_1}(\rho_A)$ representa as correlações quânticas, observamos que, em geral, os valores experimentais excedem os teóricos. Isso acontece pelo fato de o q-bit A não estar correlacionado apenas com o q-bit B , mas também com o ambiente, uma vez que, durante o processo de preparação do estado $|\Psi\rangle_{AB}$, ocorre o inevitável processo de decoerência. Portanto, podemos ver que as medidas de correlação não distinguem as correlações quânticas do subsistema A com o restante dos subsistemas das inevitáveis correlações do sistema com o ambiente.

Na Figura 5.6, apresentamos o comportamento de $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$ (“•”, azul) e também de $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A)$ (“Δ”, ciano) para valores experimentais. As linhas contínuas (“—”, vermelho) representam os valores teóricos para ambas as somas anteriores. Como comentado anteriormente os valores experimentais de $C_{l_1}(\rho_A)$ e $P_{l_1}(\rho_A)$ estão abaixo quando comparados com os valores teóricos, logo a soma deles naturalmente também fica menor. No entanto, quando observamos os valores de $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A)$, notamos que eles coincidem com os valores teóricos. Isso indica que a correção quântica criada devido à interação entre sistema e ambiente compensa a perda de coerência e previsibilidade. Com isso, observamos que as relações de complementaridade completas e incompletas, das Equações 5.2 e 5.17, respectivamente, são satisfeitas. Vale destacar, ainda, que a relação de complementaridade $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) \leq d_A - 1 = 1$ é satisfeita para todos os pontos experimentais.

Nós também calculamos essas medidas de coerência quântica, previsibilidade e correlação quânticas para as Equações 5.3, 5.4 e 5.5. Os resultados seguem a mesma dinâmica do exposto nesta Seção e estão apresentadas no Apêndice A.

5.2.2 Estados aleatórios de um, dois e três q-bits

A verdade absoluta em relação a um resultado experimental nem sempre é possível de se obter. Uma alternativa para melhorar a faixa de abrangência de um re-

Tabela 5.1 – Parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparação dos estado da equação 5.23.

Parâmetros Yorktown	Q0	Q1
Frequência (GHz)	5.28	5.25
T1 (μs)	52.62	59.03
T2 (μs)	22.88	26.51
Erro de porta (10^{-3})	1.81	1.02
Erro de leitura (10^{-2})	6.20	2.40
E. de portas múltiplas (10^{-2})	$CX_{0,1}$ 4.30	$CX_{1,0}$ 4.30

Figura 5.3 – Coerência $C_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.6. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.

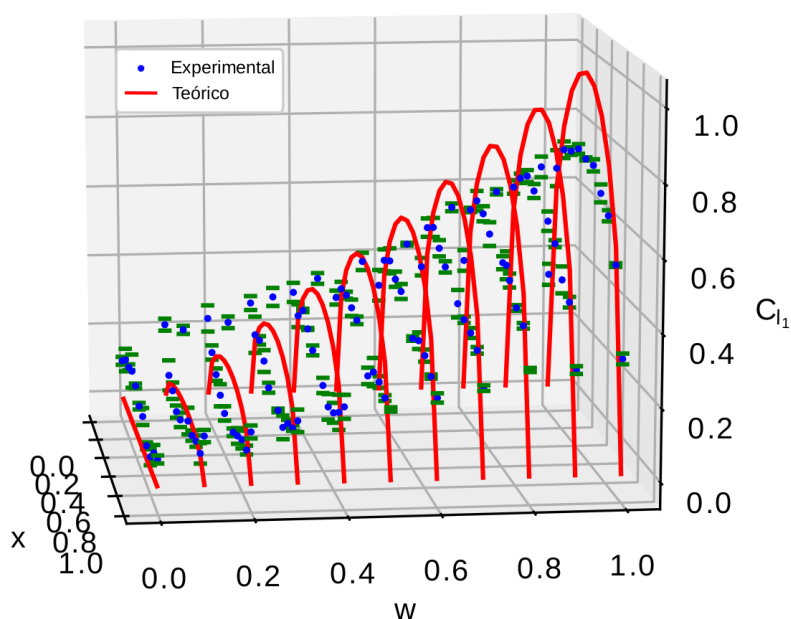


Figura 5.4 – Previsibilidade $P_{I_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.10. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são os valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.

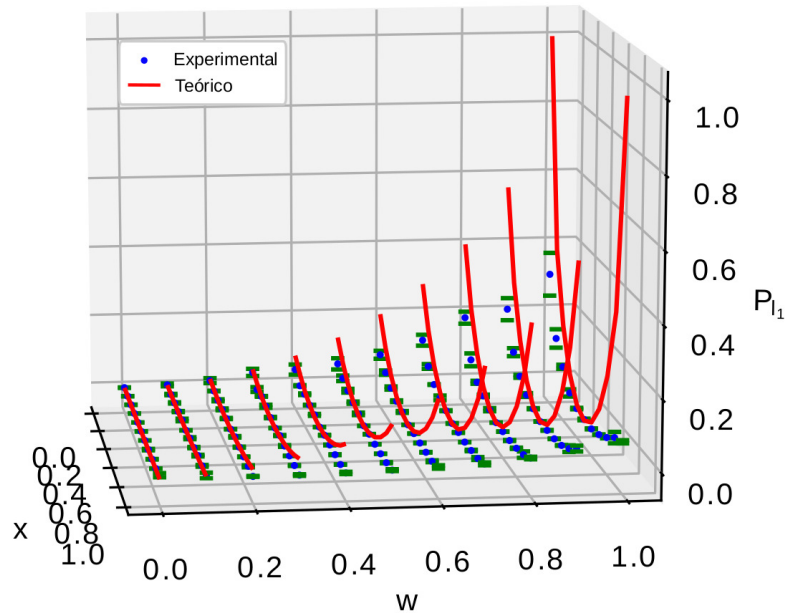


Figura 5.5 – Correlação quântica $W_{I_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.13. A linha contínua (vermelha) corresponde ao valor teórico, os pontos (azuis) são valores experimentais usando o circuito quântico da Figura 5.2. As barras de erros (verdes) são os desvios padrões para três repetições do experimento.

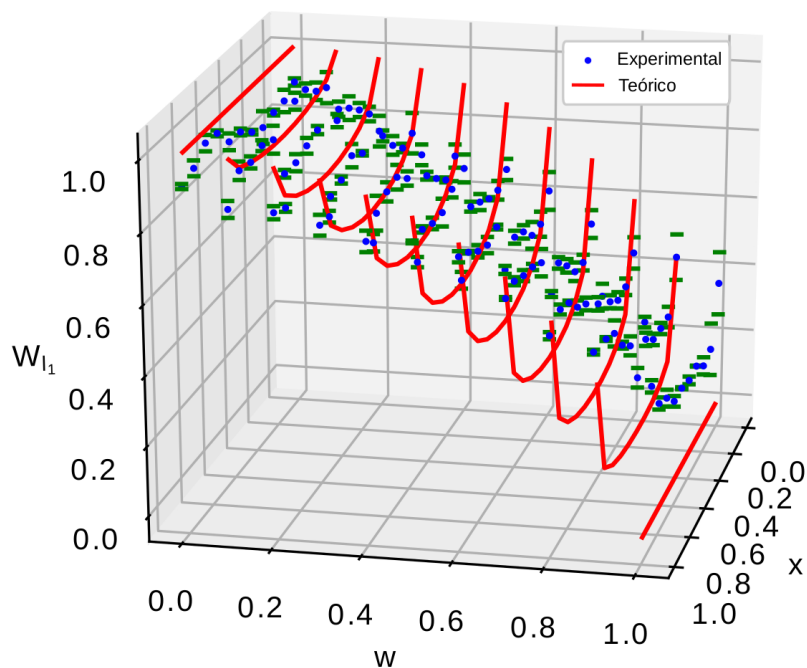
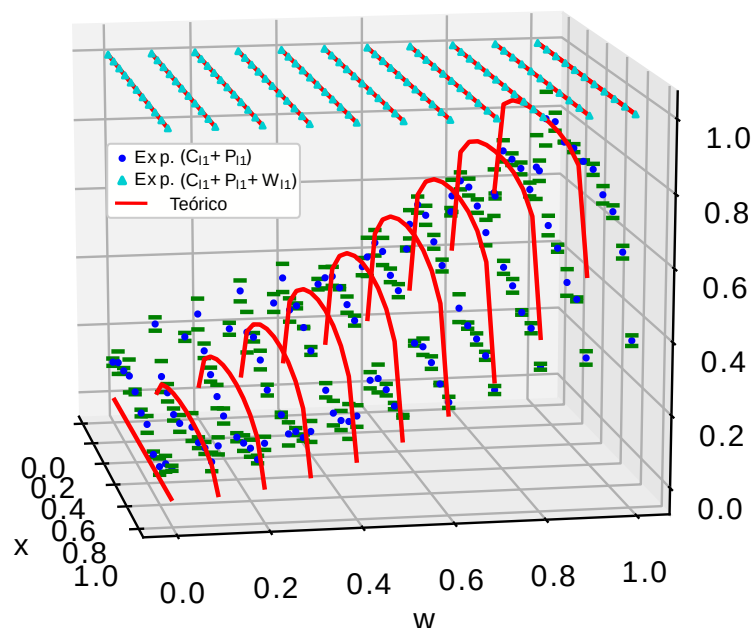


Figura 5.6 – Gráfico de $C_{l_1} + P_{l_1}$ ("•" azul) representa as relações de complementaridade incompletas da Equação 5.17 e $C_{l_1} + P_{l_1} + W_{l_1}$ ("△" ciano) para a RCC, Equação 5.2. A linha contínua ("—" vermelha) é o valor teórico.



sultado é usar estados aleatórios. A inclusão de estados aleatórios indica que as desigualdades das Equações 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20 são satisfeitas em geral, pelo menos para as dimensões consideradas nos testes experimentais. Nesta seção, apresentamos os resultados experimentais para a relação de complementaridade da Equação 5.2 para estados quânticos aleatórios de um, dois e três q-bits.

Nós usamos os computadores da IBMQE para preparar estados puros de $n + 1$ q-bits, $|\Psi_{n+1}\rangle$. Contudo, devido à existência de imperfeições nos computadores e também à interação com o ambiente que o rodeia, o estado realmente preparado é um estado misto ρ_{n+1} . A partir dessa matriz densidade, obtemos, via traço parcial, os estados mistos de n q-bits, $\rho_n = \text{Tr}_p \rho_{n+1}$, que usamos para verificar experimentalmente a relação de complementaridade.

Os testes dos circuitos aleatórios começaram com um de 2 q-bits, sorteando-se 10 portas lógicas aleatórias, repetindo-se 50 vezes. Logo, esse número de portas mostrou-se não praticável, tendo em vista a demora na obtenção dos resultados e também pelo número limitado de vezes que era gerado aleatoriamente o circuito. Então, optou-se por diminuir o número de portas e aumentar o número de vezes que executamos o circuito aleatório, passando, assim, para o circuito com 2 q-bits e sorteio de 5 portas lógicas, repetindo 100 vezes, ou seja, preparando 100 estados aleatórios. O estado inicial de cada q-bit é sempre o estado $|0\rangle$ e, para fazer o sorteio das portas, usamos a função $\text{random_circuit}(x,y)$, onde x é o número de q-bits que faz parte do circuito e y é o número de portas quânticas aplicadas ao circuito aleatoriamente.

As portas lógicas quânticas são sorteadas aleatoriamente a partir de um conjunto de portas quânticas do IBMQE (IBM QUANTUM, 2019b), com todas as portas tendo a mesma probabilidade de serem escolhidas. Esta primeira rodada foi realizada no chip London com o estado de 1 q-bit ($d = 2$), os valores de calibração encontram-se na Tabela 5.2.

Na Figura 5.7, temos um exemplo de cada um dos circuitos que foram implementados para gerar os estados aleatórios. Usamos estados quânticos aleatórios de um ($d = 2$), dois ($d = 4$) e três ($d = 8$) q-bits, Figuras 5.7a, 5.7b e 5.7c, respectivamente. A dimensão d é calculada por $d = 2^n$ com $n = 1, 2, 3$. Nesse caso n é o número de q-bits, considerados.

Logo depois, foi implementado o circuito que prepara estados de 2 q-bits ($d = 4$), sorteando aleatoriamente 4 portas lógicas para cada q-bit. Esse experimento foi realizado 150 vezes e o chip usado foi Yorktown, com todos os experimentos sendo realizados com a mesma calibração. Os valores de referência estão na Tabela 5.3.

Por fim, trabalhamos circuitos para gerar estados de 3 q-bits ($d = 8$), preparando 200 estados aleatórios e sorteando 4 portas lógicas aleatórias para cada q-bit. Para esse último chip, não foi possível coletar os dados experimentais em uma única calibração, devido ao aumento da quantidade de experimentos na plataforma da IBMQE e também porque circuitos maiores têm tempo de execução maiores. Como se trata de gerar estados aleatórios, acreditamos que isso não traga nenhum tipo de problema para a geração dos estados. Os dados de calibração desse último chip são uma média de três calibrações diferentes e estão apresentados na Tabela 5.4. Essas duas últimas rodadas para $d = 4$ e $d = 8$ foram realizadas no chip Yorktown, que tem uma disposição dos q-bits em forma de prisma, mostrada na Figura 5.1b. Todos os resultados são para 8192 *shots*.

Na Figura 5.8, apresentamos o resultado para a coerência quântica $C_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.6. Assim como na Figura 5.9, que mostra o resultado da previsibilidade $P_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.10, os valores experimentais são menores se comparados com os valores teóricos. Já para a Figura 5.10 a correlação quântica $W_{l_1}(\rho_A)$ calculada pela Equação 5.13 apresenta, em geral, valores experimentais maiores se comparados com os valores teóricos. Nesses gráficos citados acima, o marcador “x” (vermelho) representa os valores teóricos, enquanto o marcador “•” (azul) indica os valores experimentais. A barra horizontal “—” (azul claro) representa a soma de $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$.

Na Figura 5.11, apresentamos os resultado para a $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$ e $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão. Aqui novamente a interação do sistema com o ambiente cria correlação quântica entre eles e diminui a soma de coerência e previsibilidade. Entretanto, podemos notar que a soma de todos os termos da relação de complementaridade da equação 5.2 tanto para a parte teórica, marcador “ Δ ”

Tabela 5.2 – Parâmetros de calibração do chip quântico London usado para preparação de estados aleatórios de um q-bit ($d = 2$).

Parâmetros London	Q0	Q1
Frequência (GHz)	5.25	5.05
T1 (μ s)	46.94	63.30
T2 (μ s)	76.55	50.48
Erro de porta (10^{-4})	5.03	3.41
Erro de leitura (10^{-2})	2.50	3.50
E. de portas múltiplas (10^{-2})	$CX_{0,1}$ 1.00	$CX_{1,0}$ 1.00

(ciano), como a parte experimental, “ \star ” (verde), atingem o valor esperado.

Nós também fizemos os mesmos gráficos para as demais relações de complementaridade das Equações 5.3, 5.4 e 5.5. Esses são qualitativamente semelhantes aos mostrados nas Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 e estão apresentados no Apêndice A.

Figura 5.7 – Exemplos de circuitos gerados aleatoriamente para dois (a), três (b) e quatro (c) qubits.

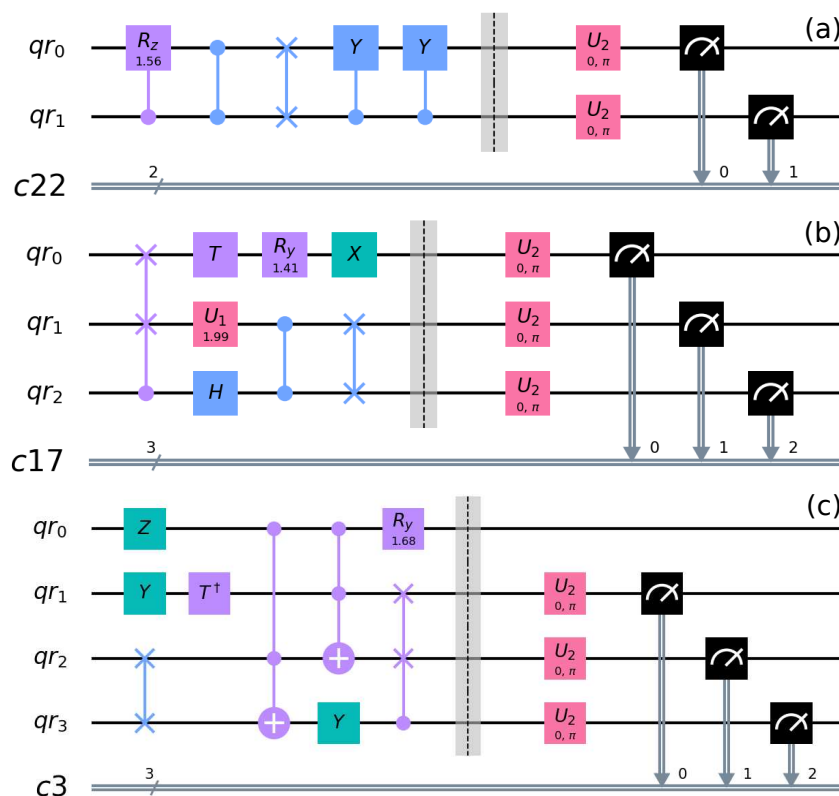


Tabela 5.3 – Parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparar estados aleatórios de dois q-bits ($d = 4$).

Parâmetros Yorktown	Q0	Q1	Q2
Frequência (GHz)	5.29	5.24	5.03
T1 (μs)	67.14	59.37	58.59
T2 (μs)	81.44	62.05	59.08
Erro de porta (10^{-4})	5.55	10.11	5.83
Erro de leitura (10^{-2})	1.50	1.55	2.35
E. de portas múltiplas (10^{-2})	$CX_{0,1}$ 1.57	$CX_{1,0}$ 1.57	$CX_{2,0}$ 1.55
	$CX_{0,2}$ 1.55	$CX_{1,2}$ 2.11	$CX_{2,2}$ 2.11

Tabela 5.4 – Média dos parâmetros de calibração do chip quântico Yorktown usado para preparar estados de três q-bits ($d = 8$).

Parâmetros Yorktown	Q0	Q1	Q2	Q3
Frequência (GHz)	5.29	5.24	5.03	5.29
T1 (μs)	66.06	58.76	52.60	52.40
T2 (μs)	26.82	26.12	74.31	36.36
Erro de porta (10^{-4})	13.22	12.62	6.54	5.81
Erro de leitura (10^{-2})	5.52	2.87	2.38	1.33
E. de portas múltiplas (10^{-2})	$CX_{0,1}$ 2.73	$CX_{1,0}$ 2.73	$CX_{2,0}$ 1.57	$CX_{3,2}$ 1.62
	$CX_{0,2}$ 1.57	$CX_{1,2}$ 2.11	$CX_{2,1}$ 2.11	$CX_{2,3}$ 1.62

Figura 5.8 – Coerência $C_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) indica os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) refere-se aos valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$.

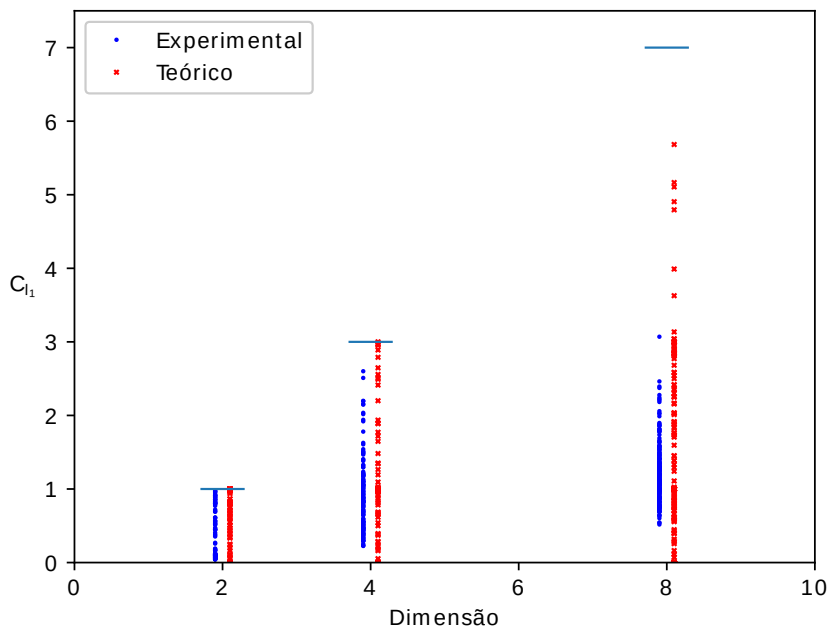


Figura 5.9 – Previsibilidade $P_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) representa os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) indica os valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$.

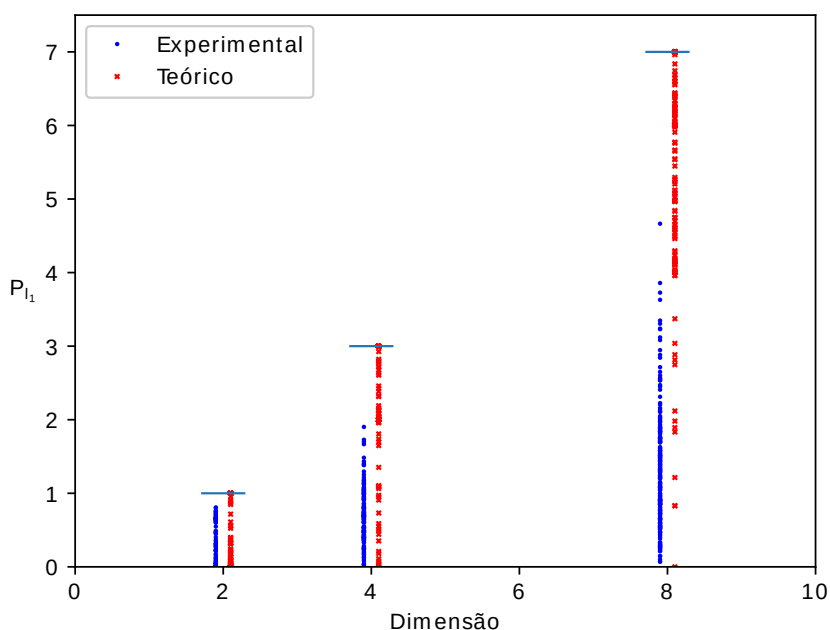


Figura 5.10 – Correlação quântica $W_{l_1}(\rho_A)$ em função da dimensão d . O marcador "x" (vermelho) representa os valores teóricos, enquanto o marcador "•" (azul) indica os valores experimentais. A barra horizontal representa $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1$, que é o limite superior para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$.

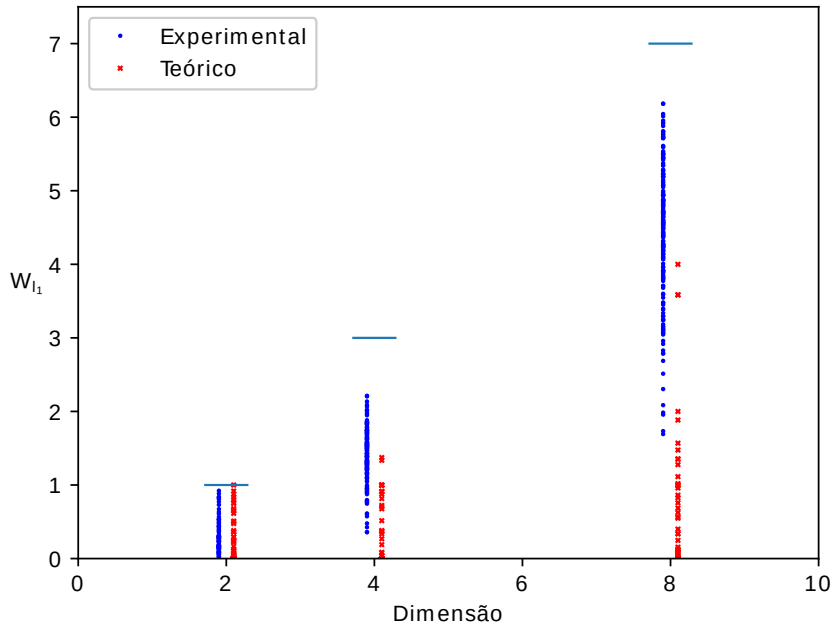
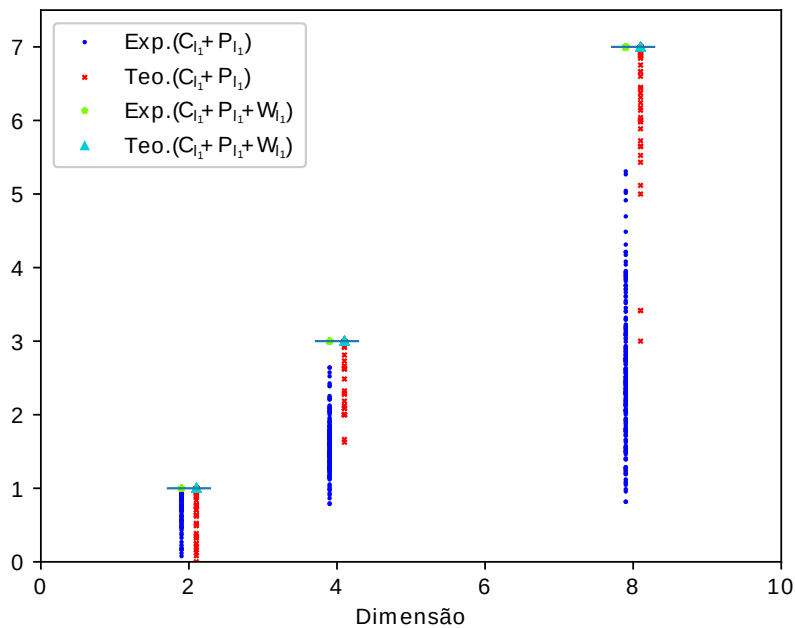


Figura 5.11 – O marcador "x" (vermelho) e "△" (ciano) representa os pontos teóricos para $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A)$ e $C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A)$, respectivamente, enquanto o símbolo "•" (azul) e "★" (verde) indicam os pontos experimentais para a mesma soma.



5.3 DISCUSSÃO FINAL

Neste capítulo, verificamos experimentalmente as relações de complementaridade baseadas nas propriedades fundamentais da matriz densidade, positividade e traço unitário. Utilizamos os computadores quânticos da IBMQE para realizar os experimentos. Os testes foram apresentados para uma classe particular de estados de um q-bit para destacar a importância de se considerar relações de complementaridade completas. Para uma melhor consistência dos resultados, testamos também essas relações para estados aleatórios de um, dois e três q-bits.

A inclusão da aleatoriedade para estes testes é, sem dúvida, uma boa maneira de garantir que as relações de complementaridade sejam satisfeitas em geral, pelo menos para as dimensões consideradas nestes experimentos. Outro fato que consideramos importante é que as relações de complementaridade que testamos foram obtidas recentemente (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020; BASSO; MAZIERO, 2020a, 2020b). Em ambas as circunstâncias, mostramos que a interação com ambiente e a consequente criação de correlação quântica entre sistema e ambiente diminui a soma da coerência e da previsibilidade, o que explica os valores experimentais geralmente mais baixos se comparados com as previsões teóricas. Em contrapartida os valores das medidas de correlação quântica são geralmente maiores quando comparados com os teóricos. Ainda assim, as relações de complementaridade completa e incompleta são sempre satisfeitas, devido ao fato de que os menores valores de coerência e previsibilidade são balanceados pelo maior valor da medida de correlação. Esses resultados estão apresentados no artigo (POZZOBOM; BASSO; MAZIERO, 2021).

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, desenvolvemos um circuito para gerar estados Bell-diagonal ajustáveis para implementação no computador quântico da IBM. Trabalhamos com este circuito para realizar algumas medidas de correlações quânticas, a fim de tentar verificar a relação direta entre discórdia e emaranhamento. Utilizamos ainda o IBMQE para gerar circuitos aleatórios para verificação de relações de complementaridade. No Capítulo 2, apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos empregados durante todo o desenvolvimento do trabalho. Abordamos, ainda, as principais características do computador quântico da IBM e mostramos um exemplo de sua utilização, bem como quais são as suas principais possibilidades de uso.

No Capítulo 3, apresentamos o circuito que desenvolvemos para criação de estados Bell-diagonal ajustáveis. Implementamos esse circuito em diferentes processadores quânticos da IBM para realizar medidas de diversas correlações quânticas. Comparamos, ainda, os resultados experimentais com os resultados teóricos para duas situações: sem o efeito de ruído e com efeito de ruído. Os resultados obtidos para esse circuito estão de acordo com os valores teóricos para todas as correlações medidas. No estudo do efeito do ruído, observamos que, quanto mais forte é a correlação quântica, mais ela é afetada. Com uma modelagem simples do ruído, podemos estimar qual seria o erro para os chips quânticos testados neste experimento.

A verificação da relação direta entre discórdia e emaranhamento foi proposta no Capítulo 4. Utilizamos o circuito que propomos para gerar estados Bell-diagonal ajustáveis. Nosso teste foi feito sob efeito do canal *phase damping*. Consideramos que os resultados obtidos são razoáveis, os pontos experimentais acompanham a inclinação das curvas teóricas. No entanto, a queda no valor das correlações, para este experimento, foi acentuada. Tentamos, ainda, observar o efeito da mudança súbita da discórdia, mas novamente o resultado experimental foi menor que o esperado. Essa tentativa foi realizada para vários chips quânticos, contudo esse fato se manteve. Por fim, foi realizado um experimento no simulador da IBMQE e os resultados experimentais foram muito próximos dos valores teóricos. Isso indica que nosso circuito está de acordo com o esperado, mas a interação do sistema com o ambiente contribuiu de forma significativa para a queda nos valores experimentais obtidos nos chips reais.

No Capítulo 5, verificamos experimentalmente as relações de complementaridade baseadas em propriedades da matriz densidade: positividade e traço unitário. Calculamos coerência quântica, previsibilidade e correlações quânticas para quatro diferentes relações de complementaridade. Realizamos esses cálculos para um estado particular de um q-bit, mas também para estados aleatórios de um, dois e três q-bits. Para todos os casos, observamos que a coerência quântica e a previsibilidade,

devido à inevitável interação do sistema com o ambiente, são afetadas, diminuindo, em geral, o valor experimental quando comparado à previsão teórica. Por outro lado, essa interação do sistema e ambiente, em geral, aumenta os valores experimentais das correlações quânticas quando comparados com os teóricos. Além disso, as relações de complementaridade completas e incompletas são sempre satisfeitas, porque os valores mais baixos de coerência e previsibilidade são equilibrados pelo maior valor da correlação.

REFERÊNCIAS

ÅBERG, J. Catalytic coherence. **Physical Review Letters**, v. 113, n. 15, out. 2014. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.150402>>.

AMICO, M.; DITTEL, C. Simulation of wave-particle duality in multipath interferometers on a quantum computer. **Physical Review A**, v. 102, n. 3, p. 032605, set. 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.032605>>.

ANGELO, R. M.; RIBEIRO, A. D. Wave-particle duality: An information-based approach. **Foundations of Physics**, v. 45, n. 11, p. 1407–1420, nov. 2015. ISSN 1572-9516. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10701-015-9913-6>>.

ARUTE, F. et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. **Nature**, v. 574, n. 7779, p. 505–510, out. 2019. ISSN 0028-0836, 1476-4687. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/s41586-019-1666-5>>.

AUCCAISE, R. et al. Experimental analysis of the quantum complementarity principle. **Physical Review A**, v. 85, n. 3, p. 032121, mar. 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.032121>>.

BAGAN, E. et al. Relations between coherence and path information. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 16, p. 160406, abr. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.160406>>.

_____. Duality games and operational duality relations. **Physical Review Letters**, v. 120, n. 5, p. 050402, jan. 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.050402>>.

BARENCO, A. et al. Elementary gates for quantum computation. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 52, n. 5, p. 3457–3467, nov. 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.3457>>.

BASSO, M. L. W.; CHRYSOSTHEMOS, D. S. S.; MAZIERO, J. Quantitative wave-particle duality relations from the density matrix properties. **Quantum Information Processing**, v. 19, n. 8, p. 254, jul. 2020. ISSN 1573-1332. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11128-020-02753-y>>.

BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Complete complementarity relations for multipartite pure states. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 53, n. 46, p. 465301, out. 2020. ISSN 1751-8121. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/abc361>>.

_____. An uncertainty view on complementarity and a complementarity view on uncertainty. **arXiv:2007.05053 [quant-ph]**, nov. 2020. ArXiv: 2007.05053. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2007.05053>>.

BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. Quantifying coherence. **Physical Review Letters**, v. 113, n. 14, set. 2014. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.140401>>.

BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 38, n. 3, p. 447–452, jul. 1966. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.38.447>>.

BERA, M. N. et al. Duality of quantum coherence and path distinguishability. **Physical Review A**, v. 92, n. 1, p. 012118, jul. 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.012118>>.

BERGOU, J. A.; HILLERY, M. **Introduction to the theory of quantum information processing**. New York: Springer-Verlag, 2013. (Graduate Texts in Physics). ISBN 978-1-4614-7091-5. Disponível em: <<https://www.springer.com/gp/book/9781461470915>>.

BOHR, N. On the constitution of atoms and molecules. **Philosophical Magazine**, v. 26, n. 151, p. 1–25, jul. 1913. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786441308634955>>.

_____. The quantum postulate and the recent development of atomic theory 1. **Nature**, v. 121, n. 3050, p. 580–590, abr. 1928. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/121580a0>>.

BRANCIARD, C. et al. One-sided device-independent quantum key distribution: security, feasibility, and the connection with steering. **Physical Review A**, v. 85, n. 1, jan. 2012. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.010301>>.

BRANCIARD, C.; GISIN, N. Quantifying the nonlocality of Greenberger-Horne-Zeilinger quantum correlations by a bounded communication simulation protocol. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 2, jul. 2011. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.020401>>.

BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. **Reviews of Modern Physics**, v. 86, n. 2, p. 419–478, abr. 2014. ISSN 0034-6861, 1539-0756. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419>>.

BRUB, D. Characterizing entanglement. **Journal of Mathematical Physics**, v. 43, n. 9, p. 4237–4251, ago. 2002. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1494474>>.

CAVALCANTI, E. G. et al. Experimental criteria for steering and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physical Review A**, v. 80, n. 3, set. 2009. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.032112>>.

CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. **Physical Review Letters**, v. 23, n. 15, p. 880–884, out. 1969. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.

COLES, P. J. Entropic framework for wave-particle duality in multipath interferometers. **Physical Review A**, v. 93, n. 6, p. 062111, jun. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.062111>>.

COSTA, A. C. S.; ANGELO, R. M. Quantification of Einstein-Podolsky-Rosen steering for two-qubit states. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 93, n. 2, p. 020103, fev. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.020103>>.

CROSS, A. W. et al. Validating quantum computers using randomized model circuits. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 100, p. 032328, Sep 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.032328>>.

DAKIĆ, B.; VEDRAL, V.; BRUKNER, Č. Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 19, nov. 2010. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.190502>>.

DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 400, n. 1818, p. 97–117, jul. 1985. ISSN 1364-5021, 1471-2946. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1985.0070>>.

DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, Royal Society, v. 439, n. 1907, p. 553–558, dez. 1992. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1992.0167>>.

DÜRR, S. Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers. **Physical Review A**, v. 64, n. 4, p. 042113, set. 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.042113>>.

EINSTEIN, A. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 132–148, 1905. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053220607>>.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 47, p. 4, maio 1935. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.777>>.

EJNISMAN, R.; NUSSENZVEIG, P. Átomo de Rydberg: estudos quânticos com átomos “quase-clássicos”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, p. 90, mar. 1997. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_90.pdf>.

ENGLERT, B.-G. Fringe visibility and which-way information: An inequality. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 11, p. 2154–2157, set. 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.2154>>.

ENGLERT, B.-G. et al. Wave-particle duality in multi-path interferometers: general concepts and three-path interferometers. **International Journal of Quantum Information**, v. 06, n. 01, p. 129–157, fev. 2008. ISSN 0219-7499. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219749908003220>>.

FELDMAN, V.; MAZIERO, J.; AUJUANET, A. Direct-dynamical entanglement-discord relations. **Quantum Information Processing**, v. 16, n. 5, maio 2017. ISSN 1570-0755, 1573-1332. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11128-017-1580-4>>.

FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 6, p. 467–488, jun. 1982. ISSN 1572-9575. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02650179>>.

FEYNMAN, R. P.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1965. v. 3.

GALLAS, J. A. C. Átomo de Rydberg. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 3, n. 1, p. 41, abr. 1986.

GAMEL, O.; JAMES, D. F. V. Measures of quantum state purity and classical degree of polarization. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 86, n. 3, p. 033830, set. 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.033830>>.

GÅRDING, E. R. et al. Bell diagonal and Werner state generation: entanglement, non-locality, steering and discord on the IBM quantum computer. **arXiv:1912.06105 [quant-ph]**, maio 2020. ArXiv: 1912.06105. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1912.06105>>.

GHARIBIAN, S. Strong NP-hardness of the quantum separability problem. **arXiv:0810.4507 [quant-ph]**, out. 2008. ArXiv: 0810.4507. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0810.4507>>.

GREENBERGER, D. M.; YASIN, A. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. **Physics Letters A**, v. 128, n. 8, p. 391–394, abr. 1988. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960188901144>>.

GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. **Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, p. 212–219, jul. 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/237814.237866>>.

HAMIEH, S.; KOBES, R.; ZARAKET, H. Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 70, n. 5, p. 052325, nov. 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.052325>>.

HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 34, n. 35, p. 6899–6905, ago. 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315>>.

HIESMAYR, B. C.; HUBER, M. Multipartite entanglement measure for all discrete systems. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 78, n. 1, p. 012342, jul. 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.012342>>.

HORODECKI, R.; HORODECKI, M. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. **Physical Review A**, v. 54, n. 3, p. 1838–1843, set. 1996. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.1838>>.

HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, n. 2, p. 865–942, jun. 2009. ISSN 0034-6861, 1539-0756. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>>.

HUANG, Y. Computing quantum discord is NP-complete. **New Journal of Physics**, v. 16, n. 3, p. 033027, mar. 2014. ISSN 1367-2630. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/16/3/033027>>.

IBM QUANTUM. **IBM Q**. 2016. [Online; acessado 20/02/2021]. Disponível em: <<https://quantum-computing.ibm.com/>>.

_____. **IBM Q backends information**. 2017. [Online; acessado 10/02/2021]. Disponível em: <<https://quantum-computing.ibm.com/services?systems=all>>.

_____. **IBM Q Qiskit**. 2017. [Online; acessado 20/01/2021]. Disponível em: <<https://qiskit.org/>>.

_____. **On “Inside a quantum computer”**. 2019. [Online; acessado 14/01/2020]. Disponível em: <<https://www.ibm.com/quantum-computing/learn/what-is-quantum-computing/>>.

_____. **On “Operations glossary”**. 2019. [Online; acessado 20/12/2020]. Disponível em: <<https://quantum-computing.ibm.com/docs/iqx/operations-glossary>>.

_____. **On “Quantum Supremacy”**. 2019. [Online; acessado 20/11/2019]. Disponível em: <<https://www.ibm.com/blogs/research/2019/10/on-quantum-supremacy/>>.

_____. **On “Inside a quantum computer”**. 2020. [Online; acessado 29/12/2020]. Disponível em: <<https://www.ibm.com/blogs/research/2020/09/ibm-quantum-roadmap/>>.

JAEGER, G. **Quantum Information: An Overview**. New York: Springer-Verlag, 2007. ISBN 978-0-387-35725-6. Disponível em: <<https://www.springer.com/gp/book/9780387357256>>.

JAKOB, M.; BERGOU, J. A. Generalized complementarity relations in composite quantum systems of arbitrary dimensions. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific Publishing Co., v. 20, n. 11n13, p. 1371–1381, maio 2006. ISSN 0217-9792. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0217979206033851>>.

_____. Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 76, n. 5, p. 052107, nov. 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.052107>>.

_____. Quantitative complementarity relations in bipartite systems: Entanglement as a physical reality. **Optics Communications**, v. 283, n. 5, p. 827–830, mar. 2010. ISSN 0030-4018. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401809010360>>.

JONES, S. J.; WISEMAN, H. M.; DOHERTY, A. C. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 76, n. 5, p. 052116, nov. 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.052116>>.

JURCEVIC, P. et al. Demonstration of quantum volume 64 on a superconducting quantum computing system. **arXiv:2008.08571 [quant-ph]**, set. 2020. ArXiv: 2008.08571. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2008.08571>>.

KAY, A. Using separable Bell-diagonal states to distribute entanglement. **Physical Review Letters**, v. 109, n. 8, ago. 2012. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.080503>>.

KITAEV, A. Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons. **Annals of Physics**, v. 303, n. 1, p. 2–30, jan. 2003. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491602000180>>.

KOCH, J. et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. **Physical Review A**, v. 76, n. 4, out. 2007. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042319>>.

KRANTZ, P. et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits. **Applied Physics Reviews**, v. 6, n. 2, p. 021318, jun. 2019. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5089550>>.

LANG, M. D.; CAVES, C. M. Quantum discord and the geometry of Bell-diagonal states. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 15, out. 2010. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.150501>>.

LEVI, F.; MINTERT, F. A quantitative theory of coherent delocalization. **New Journal of Physics**, v. 16, n. 3, p. 033007, mar. 2014. ISSN 1367-2630. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/16/i=3/a=033007?key=crossref.54737e8eae9a7771bf001124d95f2f85>>.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017. ISBN 978-85-244-0158-9.

LIU, Z.-W.; HU, X.; LLOYD, S. Resource destroying maps. **Physical Review Letters**, v. 118, n. 6, fev. 2017. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.060502>>.

MAJER, J. et al. Coupling superconducting qubits via a cavity bus. **Nature**, v. 449, n. 7161, p. 443–447, set. 2007. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature06184>>.

MAZIERO, J. Entendendo a entropia de von Neumann. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 1, p. 1314, mar. 2015. ISSN 1806-9126. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172015000101314&lng=pt&nrm=iso&tlng=en>.

_____. A representação de Kraus para a dinâmica de sistemas quânticos abertos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 2, jun. 2016. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172016000200414&lng=pt&tlng=pt>.

_____. **Programs for calculations**. 2017. [Online; acessado 22/12/2020]. Disponível em: <<https://github.com/jonasmaziero/libPyQ>>.

MAZIERO, J. et al. Classical and quantum correlations under decoherence. **Physical Review A**, v. 80, n. 4, out. 2009. ISSN 1050-2947, 1094-1622. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.044102>>.

MISHRA, S.; VENUGOPALAN, A.; QURESHI, T. Decoherence and visibility enhancement in multipath interference. **Physical Review A**, v. 100, n. 4, p. 042122, out. 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.042122>>.

NAKAMURA, Y.; PASHKIN, Y. A.; TSAI, J. S. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. **Nature**, v. 398, n. 6730, p. 786–788, abr. 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/19718>>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 1, dez. 2001. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.017901>>.

PAIK, H. et al. Observation of high coherence in Josephson junction qubits measured in a three-dimensional circuit QED architecture. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 24, dez. 2011. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.240501>>.

PAULA, F. M. et al. Overcoming ambiguities in classical and quantum correlation measures. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 108, n. 1, p. 10003, out. 2014. ISSN 0295-5075, 1286-4854. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/108/i=1/a=10003?key=crossref.4ca517889ce2d37d68a3c259b5f6ecaa>>.

PERES, A. Separability criterion for density matrices. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 8, p. 1413–1415, ago. 1996. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>>.

PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. **Annalen der Physik**, v. 4, p. 553–563, 1901. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19013090310>>.

POPESCU, S.; SHORT, A. J.; WINTER, A. Entanglement and the foundations of statistical mechanics. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 2, n. 11, p. 754–758, nov. 2006. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nphys444>>.

POZZOBOM, M. B.; BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Experimental tests of the density matrix's property-based complementarity relations. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 103, n. 2, p. 022212, fev. 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.022212>>.

POZZOBOM, M. B.; MAZIERO, J. Environment-induced quantum coherence spreading of a qubit. **Annals of Physics**, v. 377, p. 243–255, fev. 2017. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616303025>>.

_____. Preparing tunable Bell-diagonal states on a quantum computer. **Quantum Information Processing**, v. 18, n. 5, maio 2019. ISSN 1570-0755, 1573-1332. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11128-019-2264-z>>.

PRESKILL, J. **Quantum Information and Computation**. California Institute of Technology, 2018. Disponível em: <http://theory.caltech.edu/~preskill/ph219/chap3_15.pdf>.

QIAN, X.-F. et al. Turning off quantum duality. **Physical Review Research**, v. 2, n. 1, p. 012016, jan. 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.012016>>.

QIN, M. et al. The decoherence of quantum entanglement and teleportation in Bell-diagonal states. **Chinese Physics C**, v. 36, n. 4, p. 307–310, abr. 2012. ISSN 1674-1137. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-1137/36/i=4/a=003?key=crossref.33b1d507013acad04de18c38e427fa77>>.

QUAN, Q. et al. Steering Bell-diagonal states. **Scientific Reports**, v. 6, n. 1, abr. 2016. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/srep22025>>.

QURESHI, T. Coherence, interference and visibility. **Quanta**, v. 8, n. 1, p. 24–35, jun. 2019. ISSN 1314-7374. Disponível em: <<http://quanta.ws/ojs/index.php/quanta/article/view/87>>.

RECHER, P.; TRAUZETTEL, B. Quantum dots and spin qubits in graphene. **Nanotechnology**, IOP Publishing, v. 21, n. 30, p. 302001, jul. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0957-4484/21/30/302001>>.

ROY, P.; QURESHI, T. Path predictability and quantum coherence in multi-slit interference. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 94, n. 9, p. 095004, jul. 2019. ISSN 1402-4896. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab1cd4>>.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.

SANTOS, J. C. **Introdução à topologia**. 1. ed. Faculdade de Ciências Universidade do Porto, 2017. Disponível em: <<https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/Topologia.pdf>>.

SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 31, n. 4, p. 555–563, out. 1935. Disponível em: <http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0305004100013554>.

_____. Probability relations between separated systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 32, n. 3, p. 446–452, out. 1936. Disponível em: <http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0305004100019137>.

SCHUMACHER, B. Quantum coding. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 51, n. 4, p. 2738–2747, abr. 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2738>>.

SCHWALLER, N.; DUPERTUIS, M.-A.; JAVERZAC-GALY, C. Evidence of the quantum entanglement constraint on wave-particle duality using the IBM Q quantum computer. **arXiv:1912.02674 [quant-ph]**, fev. 2020. ArXiv: 1912.02674. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1912.02674>>.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, n. 3, p. 379–423, jul. 1948. ISSN 0005-8580.

_____. Communication theory of secrecy systems. **The Bell System Technical Journal**, v. 28, n. 4, p. 656–715, out. 1949. ISSN 0005-8580. Conference Name: The Bell System Technical Journal.

SHI, H.-L. et al. Coherence depletion in the Grover quantum search algorithm. **Physical Review A**, v. 95, n. 3, mar. 2017. ISSN 2469-9926, 2469-9934. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.032307>>.

SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM Journal on Computing**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 26, n. 5, p. 1484–1509, out. 1997. ISSN 0097-5397. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0097539795293172>>.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s2-42, n. 1, p. 230–265, 1937. ISSN 1460-244X. Disponível em: <<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.230>>.

_____. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. A correction. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s2-43, n. 1, p. 544–546, 1938. ISSN 1460-244X. Disponível em: <<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-43.6.544>>.

VEDRAL, V. **Introduction to Quantum Information Science**. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.

VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 65, n. 3, p. 032314, fev. 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032314>>.

WALLRAFF, A. et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. **Nature**, v. 431, n. 7005, p. 162–167, set. 2004. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature02851>>.

WANG, X.; SCHIRMER, S. G. Contractivity of the Hilbert-Schmidt distance under open-system dynamics. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 79, n. 5, p. 052326, maio 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.052326>>.

WANG, Y.-K. et al. Super-quantum correlation and geometry for Bell-diagonal states with weak measurements. **Quantum Information Processing**, v. 13, n. 2, p. 283–297, fev. 2014. ISSN 1570-0755, 1573-1332. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11128-013-0649-y>>.

WENDIN, G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. **Reports on Progress in Physics**, v. 80, n. 10, p. 106001, out. 2017. ISSN 0034-4885, 1361-6633. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0034-4885/80/i=10/a=106001?key=crossref.c62bd2db0f55f28063f06e8a7f7e3c02>>.

WERNER, R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. **Physical Review A**, v. 40, n. 8, p. 4277–4281, out. 1989. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277>>.

WILDE, M. M. **Quantum Information Theory**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 978-1-107-03425-9.

WISEMAN, H. M.; JONES, S. J.; DOHERTY, A. C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physical Review Letters**, Ameri-

can Physical Society, v. 98, n. 14, p. 140402, abr. 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.140402>>.

WOLF, E.; MANDEL, L. **Optical Coherence and Quantum Optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.

WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, mar. 1998. ISSN 0031-9007, 1079-7114. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>>.

WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr's principle. **Physical Review D**, v. 19, n. 2, p. 473–484, jan. 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.473>>.

YU, C.-s. Quantum coherence via skew information and its polygamy. **Physical Review A**, v. 95, n. 4, p. 042337, abr. 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.042337>>.

ZUREK, W. H. Environment-induced superselection rules. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 26, n. 8, p. 1862–1880, out. 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.26.1862>>.

_____. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 3, p. 715–775, maio 2003. ISSN 0034-6861, 1539-0756. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.715>>.

ŻYCZKOWSKI, K. et al. Volume of the set of separable states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 58, p. 883–892, ago. 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.883>>.

APÊNDICE A – GRÁFICOS DO CAPÍTULO 5

Aqui são apresentados os gráficos relativos às demais relações completas de complementaridade, calculadas com base nas Equações 5.3, 5.4 e 5.5. Nas Figuras A.1, A.2 e A.3, utilizamos os dados experimentais para a Subseção 5.2.1. As linhas contínuas (“—”, em vermelho) são os valores teóricos, os pontos (“•”, em azul) são os valores experimentais, as barras de erros (“_”, em verde) estão associadas ao desvio padrão para um conjunto de três experimentos. Os valores do eixo x , estão relacionados ao valor do ângulo α da equação 5.25, enquanto os valores de w , estão relacionados com o valor do ângulo θ da equação 5.26.

Figura A.1 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlação quântica (c), para media de Wigner-Yanase. Em (d), temos o marcador “•” azul para $C_{wy} + P_{wy}$ e o marcador “ Δ ” ciano para $C_{wy} + P_{wy} + W_{wy}$.

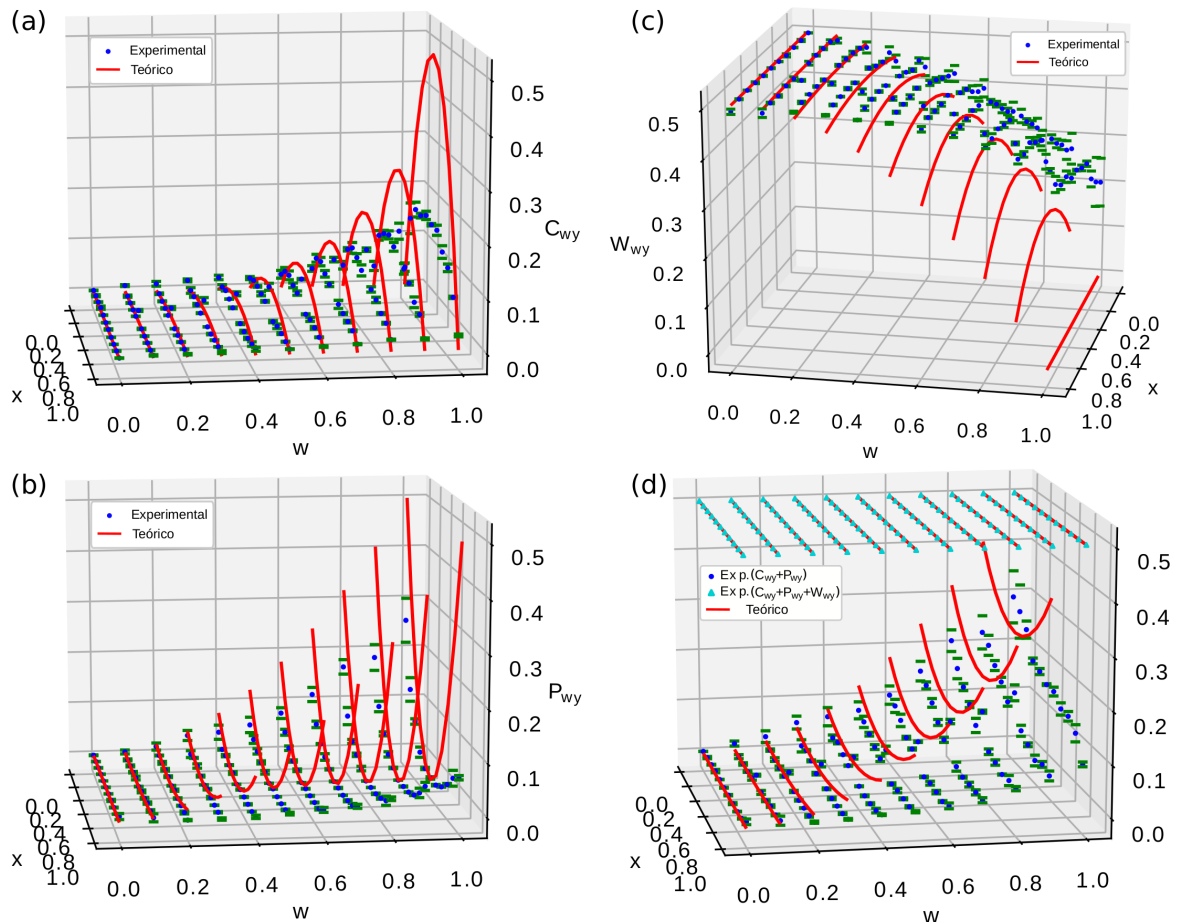


Figura A.2 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b), correlação quântica (c), para medida de Hilbert-Schmidt. Em (d), o marcador “●” azul é a soma $C_{hs} + P_{hs}$, enquanto o símbolo “△” ciano $C_{hs} + P_{hs} + W_{hs}$.

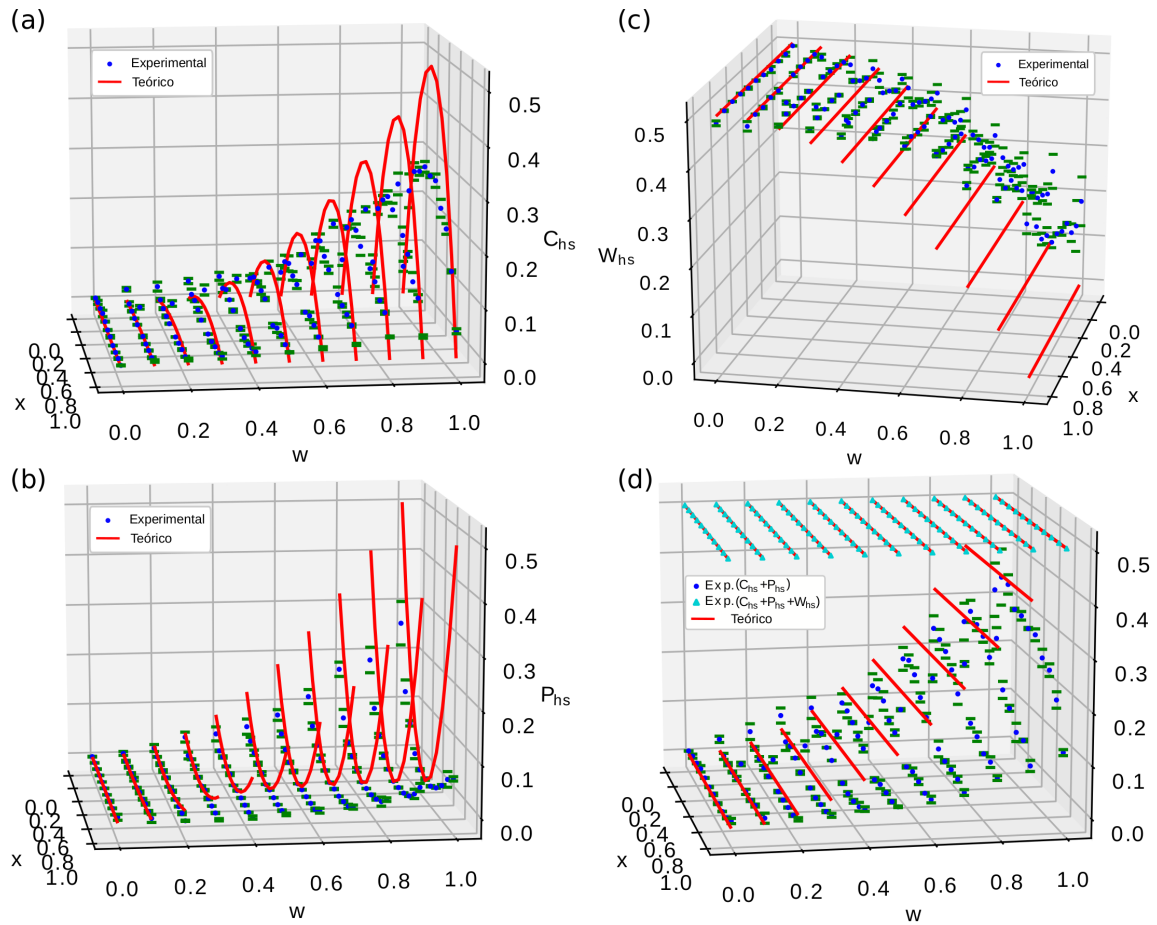
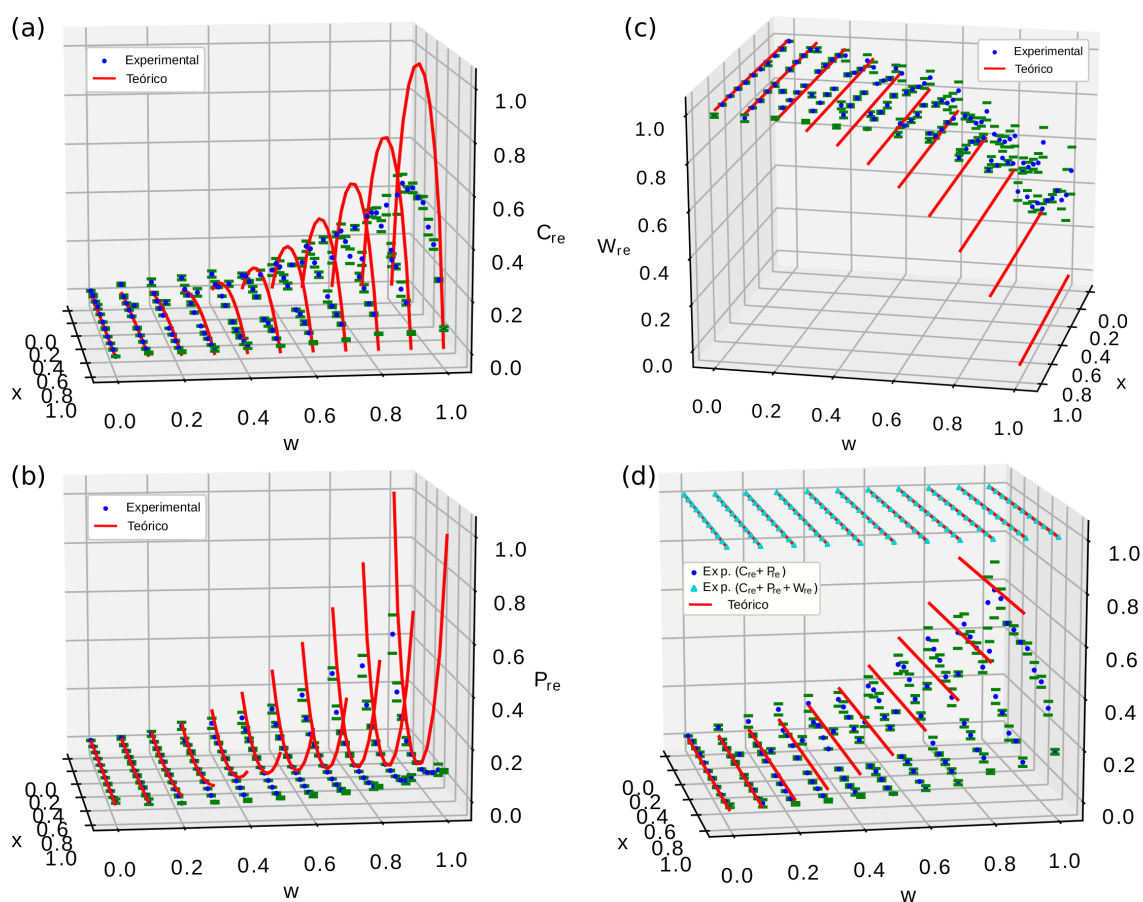


Figura A.3 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlação quântica (c), para entropia relativa. Em (d), temos o marcador “●” azul para a soma de $C_{re} + P_{re}$ e o símbolo “△” ciano $C_{re} + P_{re} + W_{re}$.



Nas Figuras A.4, A.5 e A.6, são apresentados os gráficos para os valores calculados dos estados aleatórios, da Subseção 5.2.2. O marcador “x” (vermelho) indica os pontos teóricos, enquanto o símbolo “•” (azul) representa os pontos experimentais. A barra horizontal “—” (azul claro) marca o limite máximo superior que cada uma das medidas pode atingir.

Figura A.4 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), de Wigner-Yanase para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{wy} + P_{wy}$ (“•” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{wy} + P_{wy} + W_{wy}$ (“*” verde experimental, “△” ciano teórico).

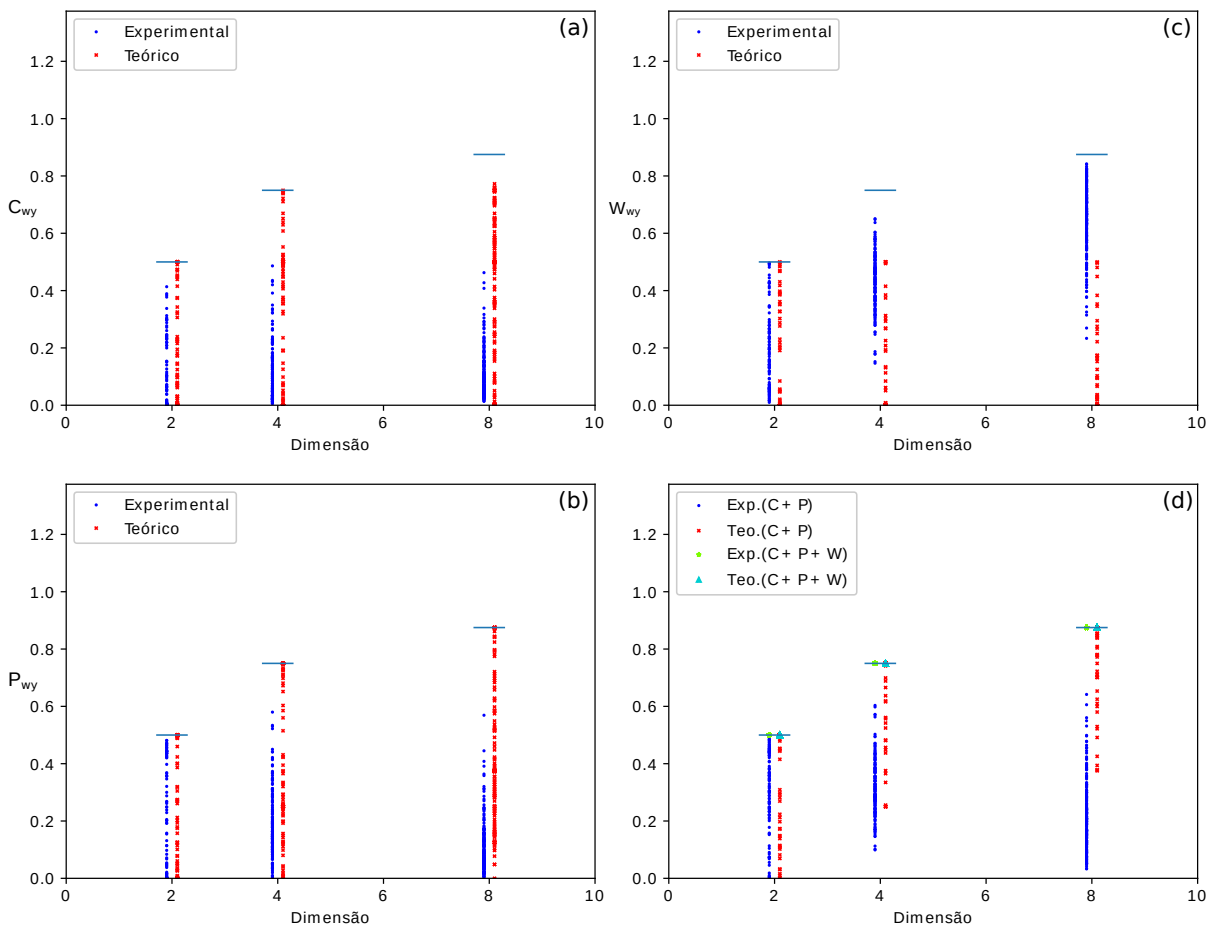


Figura A.5 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), de Hilbert-Schmidt para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{hs} + P_{hs}$ (“●” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{hs} + P_{hs} + W_{hs}$ (“★” verde experimental, “△” ciano teórico).

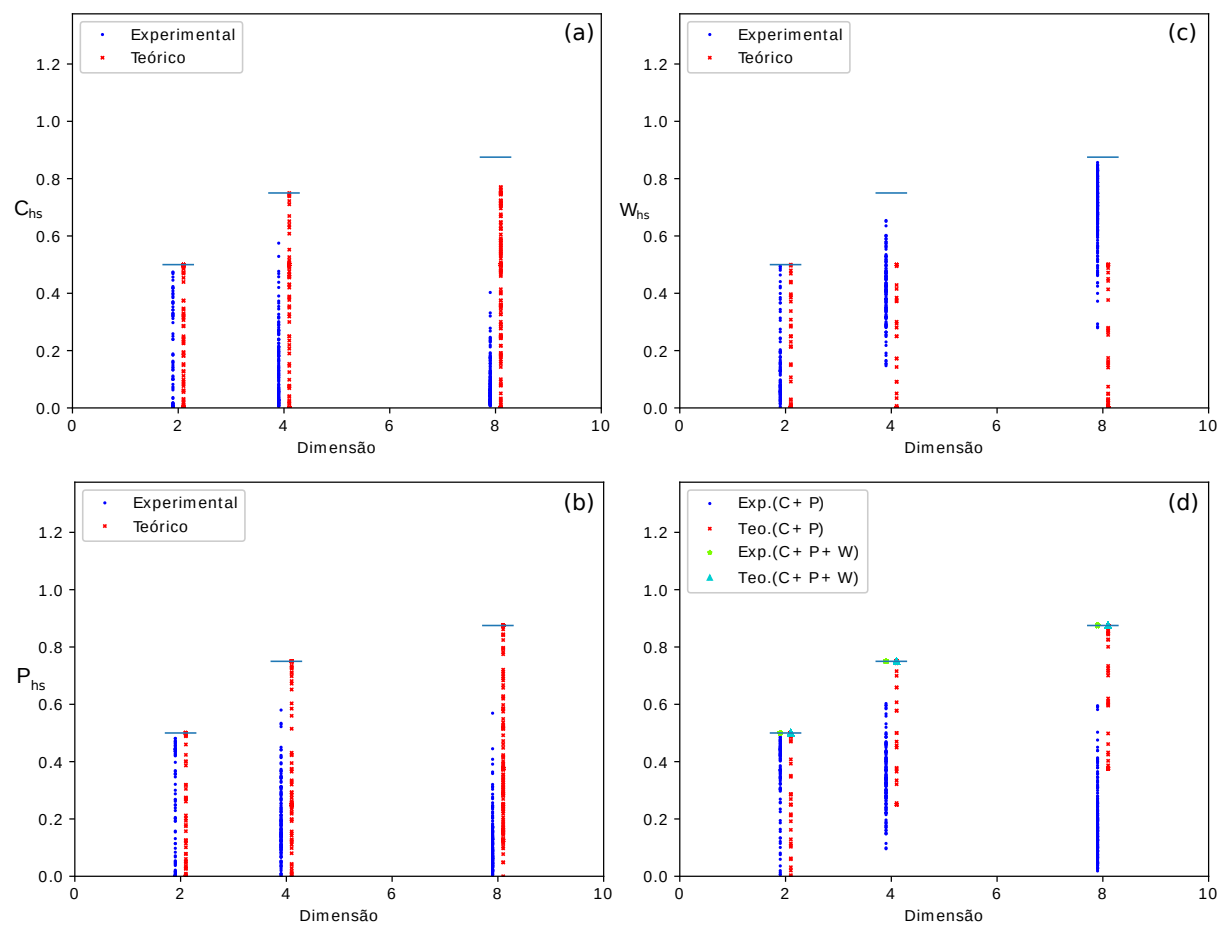
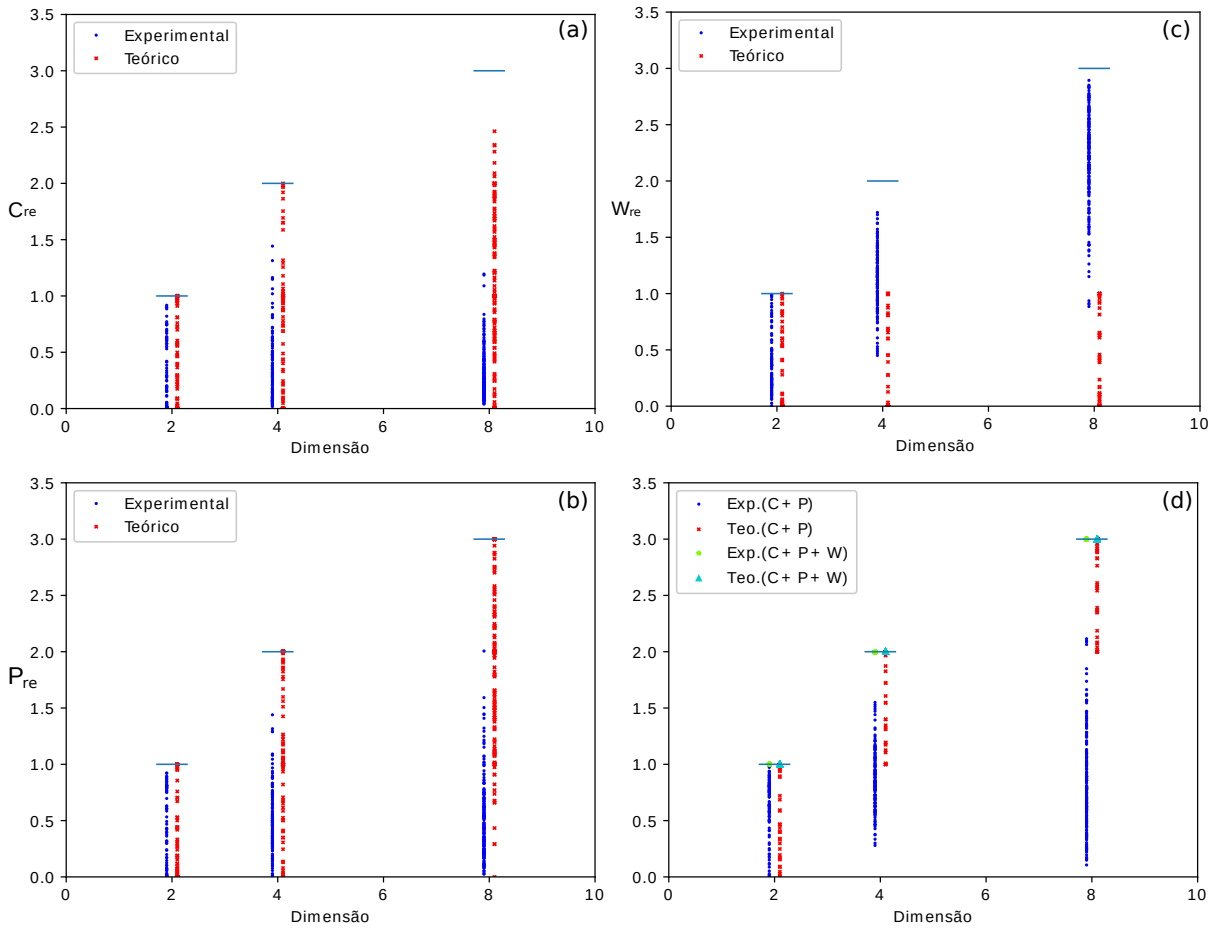


Figura A.6 – Gráficos para coerência (a), previsibilidade (b) e correlações quânticas (c), da entropia relativa para os circuitos aleatórios. Em (d), temos a soma de $C_{re} + P_{re}$ (“•” azul experimental, “x” vermelho teórico) e também $C_{re} + P_{re} + W_{re}$ (“*” verde experimental, “△” ciano teórico).



ANEXO A – CÓDIGOS PARA IMPLEMENTAÇÃO

Aqui estão listados alguns dos códigos utilizados na implementação dos cálculos teóricos e experimentais. Utilizamos a linguagem Python como preferencial. Estes códigos também estão disponíveis em (MAZIERO, 2017), juntamente com outros códigos auxiliares, que também foram necessários para realizar este trabalho.

A.1 ESTADOS

```
def werner(w):
    ''' Retorna um estado de Werner de dois qubits
    (1-w)id/4 + w*psi'''
    from numpy import array
    rho = array([[0.25*(1.0-w), 0.0, 0.0, 0.0],
                [0.0, 0.25*(1.0+w), 0.5*w, 0.0],
                [0.0, 0.5*w, 0.25*(1.0+w), 0.0],
                [0.0, 0.0, 0.0, 0.25*(1.0-w)]])
    return rho

def rho_bds(c1, c2, c3):
    ''' Retorna um estado de Bell-diagonal de dois qubits (BDS)'''
    from numpy import zeros, kron
    s0 = zeros((2, 2))
    s1 = zeros((2, 2))
    s2 = zeros((2, 2), dtype=complex)
    s3 = zeros((2, 2))
    s0[0][0] = 1.0
    s0[1][1] = 1.0
    s1[0][1] = 1.0
    s1[1][0] = 1.0
    s2[0][1] = - 1j
    s2[1][0] = 1j
    s3[0][0] = 1.0
    s3[1][1] = -1.0
    rho = zeros((4, 4), dtype=complex)
    rho = (kron(s0, s0) + c1*kron(s1, s1)
           + c2*kron(s2, s2) + c3*kron(s3, s3))/4.0
    return rho

def psi_1qb(theta, phi):
    ''' Retorna um estado generico de 1 qubit puro'''
    from numpy import zeros
```

```

psi = zeros(2, dtype=complex)
from math import sin, cos, exp
psi[0] = cos(theta/2.0)
psi[1] = (cos(phi) + sin(phi)*1j)*sin(theta/2.0)
return psi

def rho_1qb(r1, r2, r3):
    ''' Retorna um estado de mistura de 1 qubit generico'''
    from numpy import zeros
    s0 = zeros((2, 2))
    s1 = zeros((2, 2))
    s2 = zeros((2, 2), dtype=complex)
    s3 = zeros((2, 2))
    s0[0][0] = 1.0
    s0[1][1] = 1.0
    s1[0][1] = 1.0
    s1[1][0] = 1.0
    s2[0][1] = - 1j
    s2[1][0] = 1j
    s3[0][0] = 1.0
    s3[1][1] = -1.0
    rho = zeros((2, 2), dtype=complex)
    rho = (s0 + r1*s1 + r2*s2 + r3*s3)/2.0
    return rho

def rho_2qb(CM):
    ''' Retorna um estado de mistura de 2 qubits generico'''
    from numpy import zeros, kron
    s0 = zeros((2, 2))
    s1 = zeros((2, 2))
    s2 = zeros((2, 2), dtype=complex)
    s3 = zeros((2, 2))
    s0[0][0] = 1.0
    s0[1][1] = 1.0
    s1[0][1] = 1.0
    s1[1][0] = 1.0
    s2[0][1] = - 1j
    s2[1][0] = 1j
    s3[0][0] = 1.0
    s3[1][1] = -1.0
    rho = zeros((4, 4), dtype=complex)
    rho += CM[0][0]*kron(s0, s0) + CM[1][0]*kron(s1, s0)
    rho += CM[2][0]*kron(s2, s0) + CM[3][0]*kron(s3, s0)
    rho += CM[0][1]*kron(s0, s1) + CM[1][1]*kron(s1, s1)
    rho += CM[2][1]*kron(s2, s1) + CM[3][1]*kron(s3, s1)
    rho += CM[0][2]*kron(s0, s2) + CM[1][2]*kron(s1, s2)
    rho += CM[2][2]*kron(s2, s2) + CM[3][2]*kron(s3, s2)
    rho += CM[0][3]*kron(s0, s3) + CM[1][3]*kron(s1, s3)
    rho += CM[2][3]*kron(s2, s3) + CM[3][3]*kron(s3, s3)

```

```
rho = 0.25*rho
return rho
```

A.2 RECONSTRUÇÃO DO ESTADO

```
def tomo_2qb(path):
    from numpy import genfromtxt, zeros
    ns = 8192.0
    CM = zeros((4, 4))
    CM[0][0] = 1.0
    '''path = "usar_caminho/"'''
    fname = path + "XX.csv"
    pXX = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[1][1] = ((pXX[0][1] + pXX[3][1]) - (pXX[1][1] +
    pXX[2][1]))/ns
    CM[1][0] = ((pXX[0][1] + pXX[2][1]) - (pXX[1][1] +
    pXX[3][1]))/ns
    CM[0][1] = ((pXX[0][1] + pXX[1][1]) - (pXX[2][1] +
    pXX[3][1]))/ns
    fname = path + "XY.csv"
    pXY = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[1][2] = ((pXY[0][1] + pXY[3][1]) - (pXY[1][1] +
    pXY[2][1]))/ns
    fname = path + "XZ.csv"
    pXZ = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[1][3] = ((pXZ[0][1] + pXZ[3][1]) - (pXZ[1][1] +
    pXZ[2][1]))/ns
    fname = path + "YX.csv"
    pYX = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[2][1] = ((pYX[0][1] + pYX[3][1]) - (pYX[1][1] +
    pYX[2][1]))/ns
    fname = path + "YY.csv"
    pYY = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[2][2] = ((pYY[0][1] + pYY[3][1]) - (pYY[1][1] +
    pYY[2][1]))/ns
    CM[2][0] = ((pYY[0][1] + pYY[2][1]) - (pYY[1][1] +
    pYY[3][1]))/ns
    CM[0][2] = ((pYY[0][1] + pYY[1][1]) - (pYY[2][1] +
    pYY[3][1]))/ns
    fname = path + "YZ.csv"
    pYZ = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[2][3] = ((pYZ[0][1] + pYZ[3][1]) - (pYZ[1][1] +
    pYZ[2][1]))/ns
    fname = path + "ZX.csv"
    pZX = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
    CM[3][1] = ((pZX[0][1] + pZX[3][1]) - (pZX[1][1] +
    pZX[2][1]))/ns
    fname = path + "ZY.csv"
    pZY = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
```

```

CM[3][2] = ((pZY[0][1] + pZY[3][1]) - (pZY[1][1] +
pZY[2][1]))/ns
fname = path + "ZZ.csv"
pZZ = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
CM[3][3] = ((pZZ[0][1] + pZZ[3][1]) - (pZZ[1][1] +
pZZ[2][1]))/ns
CM[3][0] = ((pZZ[0][1] + pZZ[2][1]) - (pZZ[1][1] +
pZZ[3][1]))/ns
CM[0][3] = ((pZZ[0][1] + pZZ[1][1]) - (pZZ[2][1] +
pZZ[3][1]))/ns
from states import rho_2qb
rho = rho_2qb(CM)
return rho

```

```

def plot_rho2qb(rho):
    import numpy as np
    from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
    import matplotlib.pyplot as plt
    from matplotlib import cm
    result = [rho[0][0], rho[0][1], rho[0][2], rho[0][3],
              rho[1][0], rho[1][1], rho[1][2], rho[1][3],
              rho[2][0], rho[2][1], rho[2][2], rho[2][3],
              rho[3][0], rho[3][1], rho[3][2], rho[3][3]]
    result = np.array(result, dtype=np.float)
    fig = plt.figure(figsize=(5, 5), dpi=150)
    ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    xlabels = np.array([r'$|00\rangle$', r'$|01\rangle$',
r'$|10\rangle$', r'$|11\rangle$'])
    xpos = np.arange(xlabels.shape[0])
    ylabels = np.array([r'$|00\rangle$', r'$|01\rangle$',
r'$|10\rangle$', r'$|11\rangle$'])
    ypos = np.arange(ylabels.shape[0])
    xposM, yposM = np.meshgrid(xpos, ypos, copy=False)
    zpos = result
    dx = 0.5
    dy = 0.5
    dz = zpos
    ax1.w_xaxis.set_ticks(xpos + dx/2.0)
    ax1.w_xaxis.set_ticklabels(xlabels)
    ax1.w_yaxis.set_ticks(ypos + dy/2.0)
    ax1.w_yaxis.set_ticklabels(ylabels)
    values = np.linspace(0.2, 1.0, xposM.ravel().shape[0])
    colors = cm.rainbow(values)
    ax1.bar3d(xposM.ravel(), yposM.ravel(), dz*0, dx, dy, dz
color=colors)
    plt.show()

```

```

def tomo_1qb(path):
    from numpy import genfromtxt

```

```

ns = 8192.0
fname = path + "X.csv"
pX = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
r1 = (pX[0][1] - pX[1][1])/ns
fname = path + "Y.csv"
pY = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
r2 = (pY[0][1] - pY[1][1])/ns
fname = path + "Z.csv"
pZ = genfromtxt(fname, delimiter=",", skip_header=1)
r3 = (pZ[0][1] - pZ[1][1])/ns
#print(r1, r2, r3)
from states import rho_1qb
rho = rho_1qb(r1, r2, r3)
return rho

def plot_rho1qb(rho):
    import numpy as np
    from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
    import matplotlib.pyplot as plt
    from matplotlib import cm
    result = [rho[0][0], rho[0][1],
              rho[1][0], rho[1][1]]
    result = np.array(result, dtype=np.float)
    fig = plt.figure(figsize=(5, 5), dpi=150)
    ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    xlabels = np.array([r'$|0\rangle$', r'$|1\rangle$'])
    xpos = np.arange(xlabels.shape[0])
    ylabels = np.array([r'$|0\rangle$', r'$|1\rangle$'])
    ypos = np.arange(ylabels.shape[0])
    xposM, yposM = np.meshgrid(xpos, ypos, copy=False)
    zpos = result
    dx = 0.5
    dy = 0.5
    dz = zpos
    ax1.w_xaxis.set_ticks(xpos + dx/2.0)
    ax1.w_xaxis.set_ticklabels(xlabels)
    ax1.w_yaxis.set_ticks(ypos + dy/2.0)
    ax1.w_yaxis.set_ticklabels(ylabels)
    values = np.linspace(0.2, 1.0, xposM.ravel().shape[0])
    colors = cm.rainbow(values)
    ax1.bar3d(xposM.ravel(), yposM.ravel(), dz*0, dx, dy, dz,
              color=colors)
    plt.show()

```

A.3 CÁLCULO DAS CORRELAÇÕES

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

```

```

import scipy.linalg.lapack as lapack
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
import pTranspose as pT
import discord

'''Funcao para comparar o result experiment com resultado
teorico sem decoerencia'''
def werner():
    import tomography as tomo
    import coherence as coh
    import entanglement as ent
    from distances import fidelity_mm
    from states import Werner
    Ne = 11
    we = np.array([0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6,
                  0.7, 0.8, 0.9, 1.0])
    Ee = np.zeros(Ne)
    Cnle = np.zeros(Ne)
    Nle = np.zeros(Ne)
    Se = np.zeros(Ne)
    De = np.zeros(Ne)
    F = np.zeros(Ne)
    for j in range(0, Ne):
        sj = str(j)
        path1 = '/caminho/caminho/'
        path2 = 'caminho/dados_plot/'
        path = path1 + path2 + sj + '/'
        rhoe = tomo.tomo_2qb(path)
        Ee[j] = 2*ent.negativity(4,pT.pTransposeL(2,2,rhoe))
        Cnle[j] = coh.coh_n1(2, 2, rhoe)
        Nle[j] = ent.chsh(rhoe)
        Se[j] = ent.steering(rhoe)
        De[j] = discord.oz_2qb(rhoe)
        F[j] = fidelity_mm(4, Werner(j*0.1), rhoe)
    Nt = 100
    Et = np.zeros(Nt)
    Nlt = np.zeros(Nt)
    St = np.zeros(Nt)
    Cnlt = np.zeros(Nt)
    wt = np.zeros(Nt)
    Dt = np.zeros(Nt)
    dw = 1.01/Nt
    w = -dw
    for j in range(0, Nt):
        w = w + dw
        if w > 1.0:
            break
        rho = Werner(w)
        Et[j] = 2*ent.negativity(4,pT.pTransposeL(2,2,rho))
        Cnlt[j] = coh.coh_n1(2, 2, rho)

```



```

    Nlt[j] = ent.chsh(rho)
    St[j] = ent.steering(rho)
    Dt[j] = discord.oz_2qb(rho)
    wt[j] = w
plt.plot(wt, Cnlt, ':', label='$C$', color='gray')
plt.plot(we, Cnle, '*', label=r'$C_{e}$', color='gray')
plt.plot(wt, Dt, '-.', label='D', color='magenta')
plt.plot(we, De, 'o', label=r'$D_{e}$', color='magenta')
plt.plot(wt, Et, '-.', label='E', color='blue')
plt.plot(we, Ee, 's', label=r'$E_{e}$', color='blue')
plt.plot(wt, St, ':', label='$S$', color='red')
plt.plot(we, Se, '^', label=r'$S_{e}$', color='red')
plt.plot(wt, Nlt, '--', label='$N$', color='cyan')
plt.plot(we, Nle, 'h', label=r'$N_{e}$', color='cyan')
plt.plot(we, F, 'X', label=r'$F$', color='black')
plt.xlabel('w')
plt.legend(loc=6)
'''para poder trabalhar com duas plataformas'''
import platform
if platform.system() == 'Linux':
    plt.savefig('caminho/onde/salvar/nomearquivo.eps',
                format='eps', dpi=100)
else:
    plt.savefig('caminho/onde/salvar/nomearquivo.eps',
                format='eps', dpi=100)

plt.show()
werner()

```

A.4 CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS DE WERNER

```

'''Circuito estado de Werner para o ibmq_16_melbourne
montagem do circuito depende dos registers'''
from qiskit import ClassicalRegister, QuantumRegister,
QuantumCircuit
'''para executar necessita desses pacotes'''
from qiskit import execute, IBMQ
'''mostra qual computador esta menos ocupado'''
from qiskit.backends.ibmq import least_busy
'''possibilidade de plotar histograma'''
from qiskit.tools.visualization import plot_histogram
'''imprime o circuito na tela'''
from qiskit.tools.visualization import matplotlib_circuit_drawer
as circuit_drawer
'''coloca cor no circuito'''
from qiskit.tools.visualization import qx_color_scheme
'''chama o modulo matematica'''
from math import pi

```

```

'''configuracao do TOKEN e API'''
IBMQ.enable_account('MEU_API_TOKEN', url='https://...')

'''verifica qual backend esta mais liberdo'''
backend = least_busy(IBMQ.backends(simulator=False))
'''imprime na tela qual deles esta mais desocupado'''
print("The least busy backend is " + backend.name())
'''escolhe qual o backend que vamos rodar'''
backend = "ibmq_16_melbourne"
'''nr de vezes que repete o experimento (max de 8192)'''
shots_sim = 8192

'''configuracao do circuito
quantos qubits usamos no programa'''
qr = QuantumRegister(13)
'''quantos bits usamos no programa'''
cr = ClassicalRegister(13)
'''composicao do circuito o registro classico e quantico'''
qc = QuantumCircuit(qr, cr)

'''circuito quantico aplicacao porta U3'''
qc.u3(1.6709,0,0,qr[11])
qc.u3(1.6709,0,0,qr[12])
'''aplicacao CNOT'''
qc.cx(qr[11], qr[3])
qc.cx(qr[12], qr[2])
'''aplicacao Hadamard'''
qc.h(qr[2])
qc.cx(qr[2], qr[3])
'''medidas:
#devemos combinar essas portas para realizar
as medidas em outras base de X, Y.
qc.sdg(qr[2]) #quanto ativo junto com a seguinte mede na base Y
qc.h(qr[2]) #quanto ativo mede na base X
qc.sdg(qr[3]) #quanto ativo junto com a seguinte mede na base Y
qc.h(qr[3]) #quanto ativo mede na base X'''
qc.measure(qr[2], cr[2]) #realiza medidas na base Z(base padrao)
qc.measure(qr[3], cr[3]) #realiza medidas na base Z(base padrao)
'''imprime o circuito na tela'''
circuit_drawer(qc, style=qx_color_scheme())

'''abre arquivo de dados
Nome = open("nomedoarquivo", "w" escrever, "r" ler)'''
data = open("YY.dat", "w")

'''roda o programa'''
job_sim = execute(qc, backend, shots=shots_sim)
'''retorna os valores de saida do com o ("qubits"."contagem")'''
stats_sim = job_sim.result().get_counts()
'''imprime na tela os valores dos dados'''
print(stats_sim)

```

```

'''aqui manda escrever no arquivo'''
data.write(str(stats_sim))
'''manda escrever duas linhas
data.write(str('\n '))'''

'''faz o grafico de barras'''
from qiskit.tools.visualization import plot_histogram
plot_histogram(stats_sim)

```

A.5 CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS DE UM Q-BIT

```

import numpy as np
import time
from copy import deepcopy
from math import asin, acos, sqrt, pi

'''Importar classes Qiskit'''
import qiskit
from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit,
ClassicalRegister
from qiskit import execute, IBMQ, Aer
''' para calculo do ruido'''
from qiskit.providers.aer import noise
'''para monitorar o andamento do experimento'''
from qiskit.tools.monitor import job_monitor
''' para algumas visualizacoes'''
from qiskit.tools import visualization
from qiskit.visualization import plot_histogram,
plot_state_city, plot_state_hinton

'''funcoes tomografia'''
from qiskit.ignis.verification.tomography
import state_tomography_circuits, StateTomographyFitter
import qiskit.ignis.mitigation.measurement as mc

'''funcoes gerar o circuito aleatorio'''
from qiskit.circuit.random import random_circuit
from qiskit.compiler import transpile
'''mostra qual computador esta menos ocupado'''
from qiskit.providers.ibmq import least_busy
'''para colocar parametros que podem mudar'''
from qiskit.circuit import Parameter

'''configuracao do TOKEN e API.'''
provider = IBMQ.enable_account('MEU_API_TOKEN')

'''aqui verifica qual backend esta mais liberdo'''
backend = least_busy(provider.backends(simulator=False))

```

```

'''escreve na tela qual deles e o mais liberado'''
print("The least busy backend is " + backend.name())

'''ESCOLHER O BACKEND
rodar no simulado do pc'''
backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')
'''backend = Aer.get_backend('statevector_simulator')'''
'''rodar no processador da IBMQ'''
backend = provider.get_backend('ibmq_name')
'''nr de vezes que repete o experimento'''
shots_sim = 8192

'''esse parametro pode ser atribuido a variavel do programa'''
theta = Parameter('theta')
alpha = Parameter('alpha')

'''aqui devemos alterar o valor de x na mao variando
desde de 0.0 ate 1.0 de 0.1. o nr x e reponsavel
por alterar o angulo alpha'''
x = 1.0
alpha = 2.0*asin(sqrt(x))
for j in range(0, 11):
    print(j)
    w = j/10.0
    theta = acos(-w)

'''circuito quantico'''
qr = QuantumRegister(2, 'qr')
qc = QuantumCircuit(qr)
qc.u3(alpha, 0, 0, qr[0])
qc.u3(theta, 0, 0, qr[1])
qc.cx(qr[1], qr[0])
qc.cz(qr[1], qr[0])
''' visualiza os qc como esta escrito'''
print(qc)
'''visualiza os qc completo e decomposto
como e implementado no IBMQE'''
print(qc.decompose())

'''obtem o estado de saida ideal para o circuito'''
t = time.time()
job = execute(qc, Aer.get_backend('statevector_simulator'))
psi_qc = job.result().get_statevector(qc)
print(psi_qc)
''' resultado contagens'''
result = job.result().get_counts()
print(result)

''' gera o circuito e executa no backend que escolhemos simulador ou real
marca o tempo de execucao'''
t = time.time()

```

```

''' essa funcao "state_tomography_circuits" manda
o circuito e em qual qubits quero medir nesse caso
medindo em todos os qubits'''
    qst_qc = state_tomography_circuits(qc, qr)
''' visualiza os qc completo e decomposto'''
    print(qst_qc[0])
    print(qst_qc[0].decompose())
''' abre arquivo pra salvar os dados'''
    data1 = open("/path/psi_qc_dat/%i.dat" % j, "w")
    data2 = open("/path/rho_qc_dat/%i.dat" % j, "w")
''' executa no backend'''
    job = execute(qst_qc, backend=backend, shots=shots_sim)
''' contagens da execucao'''
    result = job.result().get_counts()
    print(result)
''' extrai dados da tomografia para que as contagens
sejam indexadas pela configuracao da medicao'''
    tomo_qc = StateTomographyFitter(job.result(), qst_qc)
    print('Time taken:', time.time() - t)
''' realiza ajuste da tomografia que gera uma matriz densidade'''
    rho_qc = tomo_qc.fit()
''' escreve rho completo'''
    print(rho_qc)
''' escreve os dados no arquivo'''
    data1.write(str(psi_qc)) ; data2.write(str(rho_qc))
    np.save("/path/psi_qc/%i" % j, psi_qc)
    np.save("/path/rho_qc/%i" % j, rho_qc)

''' ESCREVER NO ULTIMO ARQUIVO DO LOOP'''
    data1.flush() ; data2.flush()

''' monitorar o andamento do processo'''
    job_monitor(job)

'''IMPRIMEr O CIRCUITO
    impremi em um arquivo com opcao de formato e local'''
    qst_qc[0].decompose().draw(output='mpl',
                               filename='/path/name%i.png' % j)
    qc.decompose().draw(output='mpl',
                        filename='/path/name%i.png' % j)
    qst_qc[0].decompose().draw(output='mpl',
                               filename='/path/name%i.eps' % j)

```

A.6 CIRCUITO PARA PREPARAR ESTADOS ALEATÓRIOS

```

import numpy as np
import time
from copy import deepcopy

```

```

''' Importar classes Qiskit'''
import qiskit
from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit,
ClassicalRegister
from qiskit import execute, IBMQ, Aer
''' para calculo da fidelidade'''
from qiskit.quantum_info import state_fidelity
''' para calculo do ruido'''
from qiskit.providers.aer import noise
''' para monitorar o andamento do experimento'''
from qiskit.tools.monitor import job_monitor
''' para algumas visualizacoes'''
from qiskit.tools import visualization
from qiskit.visualization import plot_histogram,
plot_state_city, plot_state_hinton

''' funcao da tomografia'''
from qiskit.ignis.verification.tomography
import state_tomography_circuits, StateTomographyFitter
import qiskit.ignis.mitigation.measurement as mc

'''funcoes gerar o circuito aleatorio'''
from qiskit.circuit.random import random_circuit
from qiskit.compiler import transpile
'''mostra qual computador esta menos ocupado'''
from qiskit.providers.ibmq import least_busy

'''configuracao do TOKEN e API'''
provider = IBMQ.enable_account('MEU_API_TOKEN')

'''aqui verifica qual backend esta mais liberdo'''
backend = least_busy(provider.backends(simulator=False))
'''escreve na tela qual deles e o mais liberado'''
print("The least busy backend is " + backend.name())

'''escolha backend (rodar no simulado do pc ou da IBM)'''
backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')
'''backend = Aer.get_backend('statevector_simulator')'''
'''rodar no processador da IBMQ'''
backend = provider.get_backend('ibmq_name')
'''nr de vezes que repete o experimento'''
shots_sim = 8192

'''Criar um circuito de preparacao do estado construindo
sub_circuito e qc principal esse loop server para rodar
desde de zero ate n circuitos diferentes (0, n)'''
for j in range(0, 50):
    print(j)
'''usa x nr qubits, y nr portas no comando random_circuit(x,y)'''
    sub_qc = random_circuit(3, 4)
''' converte o sub_qc em porta e coloque_o em um lugar arbitrario

```

```

no circuito maior'''
    sub_inst = sub_qc.to_instruction()
''' visualiza sub_qc normal e descomposto'''
    print(sub_qc); print(sub_qc.decompose())
''' nr de qubits a ser tomografados'''
    qr = QuantumRegister(3, 'qr')
''' montagem do circuito como os qr'''
    qc = QuantumCircuit(qr)
''' chama sub_circ local desejado de acordo com o nr de qubits'''
    qc.append(sub_inst, [qr[0], qr[1], qr[2]])
''' visualiza os qc completo e descomposto'''
    print(qc.decompose())

''' obtem o estado de saida ideal para o circuito'''
    t = time.time()
    job = execute(qc, Aer.get_backend('statevector_simulator'))
    psi_qc = job.result().get_statevector(qc)
    print(psi_qc); print(np.around(psi_qc, 4))
''' resultado contagens'''
    result = job.result().get_counts()
    print(result)

''' marca o tempo de execucao'''
    t = time.time()
''' funcao "state_tomography_circuits" manda o circuito em
qual qubits medir nesse caso medindo em todos os qubits'''
    qst_qc = state_tomography_circuits(qc, qr)
'''visualiza os qc completo e descomposto'''
    print(qst_qc[0])
    print(qst_qc[0].decompose())
''' abre arquivo pra salvar os dados'''
    data1 = open("/path/name/%i.dat" % j, "w")
    data2 = open("/path/name/%i.dat" % j, "w")
''' executa no backend'''
    job = execute(qst_qc, backend=backend, shots=shots_sim)
''' contagens da execucao'''
    result = job.result().get_counts()
    print(result)
''' extrai dados da tomografia para que as contagens sejam
indexadas pela configuracao da medicao'''
    tomo_qc = StateTomographyFitter(job.result(), qst_qc)
    print('Time taken:', time.time() - t)
''' realiza ajuste da tomografia que gera uma matriz densidade'''
    rho_qc = tomo_qc.fit()
''' escreve rho completo'''
    print(rho_qc)
''' escreve os dados no arquivo'''
    data1.write(str(psi_qc))
    data2.write(str(rho_qc))
    np.save("/path/name/%i" % j, psi_qc)
    np.save("/path/name/%i" % j, rho_qc)

```

```
''' escreve no ultimo arquivo do loop'''
data1.flush() ; data2.flush()

''' imprimir em um arquivo com opcao de formato e local'''
sub_qc.decompose().draw(output='mpl',
                        filename='/path/name%i.png' % j)
qst_qc[0].decompose().draw(output='mpl',
                           filename='/path/name%i.png' % j)
qst_qc[0].decompose().draw(output='mpl',
                           filename='/path/name%i.eps' % j)
qst_qc_reduced[0].decompose().draw(output='mpl',
                                   filename='/path/name%i.png' % j)
qst_qc_reduced[0].decompose().draw(output='mpl',
                                   filename='/path/name%i.eps' % j)

''' monitorar o andamento do processo'''
job_monitor(job)
''' nr total de operacoes no circuito'''
print(sub_qc.size())
''' profundidade do circuito'''
print(sub_qc.depth())
''' nr de qubits do circuito'''
print(qc.width())
```