UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rafael Lima Oliveira

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DE UM MODELO DE VIGA NÃO LINEAR EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Santa Maria, RS
2017

Rafael Lima Oliveira

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DE UM MODELO DE VIGA NÃO LINEAR EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Celene Buriol

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lima Oliveira, Rafael
ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DE UM MODELO DE VIGA NÃO LINEAR EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA / Rafael Lima Oliveira.- 2017.
67 p.; 30 cm

Orientadora: Celene Buriol
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2017

1. Estabilização uniforme de um modelo de viga não linear I. Buriol, Celene II. Título.

Rafael Lima Oliveira

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DE UM MODELO DE VIGA NÃO LINEAR EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 16 de Fevereiro de 2017

Celene Buriol

Celene Buriol, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Juliano Damiao Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)

Leonardo Prange Bonorino

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, RS
2017

DEDICATÓRIA

A Deus, meus pais, minha companheira e minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me sustentou e vem me sustentando até aqui.

Aos meus pais, Sérgio e Vera pela paciência durante todo este tempo e pelo incansável apoio depositado em mim, sou eternamente grato e jamais poderei esquecer e retribuir.

À minha companheira e amiga Bruna, por tudo que estamos vivendo.

Aos amigos da sala 1213, pelas boas risadas.

Aos professores Juliano e Márcio pela dedicação e ótimas aulas, à professora Celene, pela ótima orientação deste trabalho.

A banca examinadora pelas contribuições.

A Capes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo a vida valer cada vez mais a pena.

Vida saudável e longa a todos. Deus vôs abençõe.

A persistência é o caminho do êxito.

(Charles Chaplin)

RESUMO

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DE UM MODELO DE VIGA NÃO LINEAR EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

AUTOR: Rafael Lima Oliveira

ORIENTADORA: Celene Buriol

Essa dissertação consiste no estudo do modelo de evolução dado por

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = H(t)z_{xx} - k(x)H(t) - \theta_{xxt}, \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

com condições de fronteira e iniciais dadas por

$$\begin{aligned} z(0,t) = 0, z(L,t) = 0 \\ z_{xx}(0,t) = 0, z_{xx}(L,t) = 0 \\ z(x,0) = z_0, z_t(x,0) = z_1 \\ \theta(x,0) = \theta_0, \theta_t(x,0) = \theta_1, \end{aligned}$$

onde em (1), $z = z(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$, para $x \in (0,L)$ e $t \geq 0$, são funções reais e

$$H(t) = \left(\int_0^L (z_x^2 + 2k(x)z)dx \right) \frac{\mu}{2L}.$$

O modelo (1) descreve a versão unidimensional do limite de um sistema de equações não lineares de Marguerre-Vlasov sujeito à efeitos térmicos modelados pela lei de Cattaneo. Em dimensão dois este sistema é aceito como um modelo dinâmico que modela as vibrações de cascas rasas e, em dimensão um, modela à deformação de uma viga. O objetivo deste trabalho é mostrar a existência e unicidade de solução para o modelo (1). E o principal resultado é o decaimento exponencial da energia total associada ao modelo. No estudo é usado fortemente Teoria de Semigrupos, Espaços de Sobolev, Teoria das Distribuições, dentre outros resultados de Análise Funcional.

Palavras-chave: Comportamento assíntótico, Modelo termoelástico, Lei de Cattaneo.

ABSTRACT

UNIFORM STABILIZATION OF A NON-LINEAR BEAM MODEL IN HYPERBOLIC THERMOELASTICITY

AUTHOR: Rafael Lima Oliveira
ADVISOR: Celene Buriol

In this dissertation we study the evolution model given by

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = H(t)z_{xx} - k(x)H(t) - \theta_{xxt}, \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

with boundary conditions and initials given by

$$\begin{aligned} z(0,t) = 0, z(L,t) = 0 \\ z_{xx}(0,t) = 0, z_{xx}(L,t) = 0 \\ z(x,0) = z_0, z_t(x,0) = z_1 \\ \theta(x,0) = \theta_0, \theta_t(x,0) = \theta_1, \end{aligned}$$

where in (2), $z = z(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$, for $x \in (0,L)$ and $t \geq 0$ they are real functions and

$$H(t) = \left(\int_0^L (z_x^2 + 2k(x)z)dx \right) \frac{\mu}{2L}.$$

The model (2) describes the one-dimensional limit version of the Marguerre-Vlasov system of nonlinear equations subjected to the thermal effects modeled by Cattaneo's law. In dimension two this system is accepted as a dynamic model that models the vibrations of shallow shells, and, in dimension one, this system models the deformation of a beam. The objective of this dissertation is to show the existence and uniqueness of the soluction for the model (2). The main result is the exponential decay of the total energy associated to the model. In study is strongly used Semigroup Theory, Sobolev Spaces, Distribution Theory, among other results of Functional Analysis.

Keywords: Asymptotic behavior, Cattaneo's law, Thermoelastic model.

Sumário

INTRODUÇÃO **10**

1 Preliminares **13**

1.1 Espaço das Distribuições 16

1.1.1 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ 16

1.1.2 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$ 17

1.2 Espaços de Sobolev 18

1.3 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares 21

1.3.1 Semigrupos de classe C_0 gerados por operadores dissipativos 23

1.3.2 Problema Semi linear Abstrato 24

1.3.3 Operadores Elípticos 24

2 Existência e Unicidade de Solução Para o Modelo (9) **26**

2.1 Existência de Solução 26

2.1.1 Operador Dissipativo 27

2.1.2 Operador Maximal 30

2.1.3 Não Linearidade Localmente Lipschitz 34

3 Estabilidade da Solução **54**

3.1 Lemas preliminares 54

3.2 Resultado Principal 63

CONCLUSÃO **64**

INTRODUÇÃO

Atualmente, aparecem na literatura vários artigos indicando a importância de se estudar modelos com parâmetros que se aproximam de limites específicos. Por exemplo, Menzala e Zuazua (2000), provaram que um modelo de placas de Timoshenko é obtido através do limite de um modelo de Von Kármám.

Para cascas rasas em dimensão um, Menzala e Zuazua (2001), provaram que o modelo é dado pelo limite singular de um modelo de Marguerre-Vlasov, mais precisamente, os autores consideraram o modelo

$$\begin{cases} \epsilon u_{tt} = \frac{2}{1-\mu}[u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + k_1(x)w]_x - \epsilon^{\alpha} u_t, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = [f(u,w)]_x - g(u,w), \end{cases} \tag{3}$$

onde

$$f(u,w) = \frac{2}{1-\mu}[w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + k_1(x))w]$$

e

$$g(u,w) = \frac{2k_1(x)}{1-\mu}[u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + k_1(x)w].$$

Em (3), $x \in (0, L)$ e $t \geq 0$. As funções $u = u^{\epsilon}(x,t)$ e $w = w^{\epsilon}(x,t)$ representam respectivamente os deslocamentos longitudinal e transversal da viga no ponto x no instante t, μ é uma constante positiva, $0 < \mu < 1$ e $k_1 = k_1(x)$ representa a curvatura da viga no ponto x.

Considerando condições de fronteira específicos e dados iniciais adequados os autores provaram que quando $\epsilon \to 0$ as componentes w^{ϵ} da solução do modelo (3) convergem para a solução z da equação

$$z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = h(t)z_{xx} - k_1(x)h(t), \tag{4}$$

onde

$$h(t) = \frac{1}{1-\mu}\left[\frac{1}{L}\int_0^L [z_x^2 + 2k_1(x)z]dx\right].$$

Neste trabalho, consideramos o limite (4) com efeitos térmicos. No que diz respeito aos efeitos térmicos, à teoria clássica de Fourier para a propagação do calor apresenta uma controvérsia pois admite propagação térmica com velocidade infinita, o qual não é o mais adequado para representar vários fenômonos físicos (mais detalhes em Chandrasekharaiah (1986)). Para contornar essa questão, uma alternativa é substituir a equação do calor parabólica (modelada pela lei de Fourier) por uma equação do transporte do calor que seja hiperbólica, o que pressupõe velocidade finita de propagação. Neste sentido, escolhemos a lei de Cattaneo, ver Cattaneo (1948), para representar a condução do calor no lugar da lei de Fourier.

A seguir daremos uma ideia da construção do modelo de Cattaneo: É sabido da lei de Fourier que o vetor fluxo do calor $\overrightarrow{q}$ é proporcional ao gradiente da temperatura. Sendo assim, seja $\theta = \theta(p,t)$ (temperatura em p, no instante t), portanto

$$\overrightarrow{q} + k\nabla\theta = 0 \tag{5}$$

onde $k > 0$ representa a condutividade térmica. Se usarmos a lei de Fourier, teremos

$$\rho c\theta_t + div\overrightarrow{q} = 0 \tag{6}$$

onde $\rho > 0$ é a densidade de massa e $c > 0$ denota o calor específico por unidade de massa.

Substituindo (5) em (6) temos

$$\theta_t - \left(\frac{k}{\rho c}\right)\triangle\theta = 0,$$

que é a equação clássica do calor.

Se considerarmos a lei de Cattaneo, usaremos no lugar de (5) a equação

$$\alpha\overrightarrow{q_t} + \overrightarrow{q} + k\nabla\theta = 0 \tag{7}$$

onde $\alpha > 0$ é uma propriedade termodinâmica do material.

Derivando (6) em relação a t e (7) em relação a x e substituindo uma na outra obtemos

$$\alpha\theta_{tt} + \theta_t - \frac{k}{\rho c}\triangle\theta = 0 \tag{8}$$

que é uma equação do tipo hiperbólica e com isso temos velocidade finita de propagação $\left(\frac{k}{\rho c\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Levando em conta a discussão acima, consideramos o modelo

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = H(t)z_{xx} - k(x)H(t) - \theta_{xxt}, \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

onde $z = z(x,t), H(t) = \frac{\mu(1-\mu)}{2}h(t)$ e $k(x) = k_1(x)$ são definidos em (4), θ, α e $\lambda = \frac{k}{\rho c}$ são obtidos de (8). Complementamos o modelo (9) com condições de fronteira

$$z(0,t) = z(L,t) = z_{xx}(0,t) = z_{xx}(L,t) = 0, \forall\ t \geq 0,$$

e condições iniciais

$$z(x,0) = z_0; z_t(x,0) = z_1, \theta(x,0) = \theta_0.\theta_t = \theta_1, \forall\ x \in (0,L).$$

Este trabalho é organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, introduzimos as notações, principais definições, proposições e teoremas da Teoria das Distribuições, Espaços de Sobolev e de Semigrupos de Operadores Lineares. No capítulo 2 é feita a transformação do sistema (9) para a forma matricial, obtendo-se um problema abstrato possibilitando a utilização da teoria de semigrupos para mostrar a existência de solução. No final do capítulo é feita a unicidade de solução para o sistema (9). Para a unicidade de solução usamos a identidade de Gronwall. No capítulo 3 é provado o decaimento exponencial da energia total associada ao sistema (9). Para isso, utilizaremos um funcional de Lyapunov adequado que é obtido através da perturbação da energia. Na conclusão apresentamos algumas possibilidades para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresenta-se os conceitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Definição 1.1 *Dado um espaço vetorial H sobre o corpo K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), uma função $\| \, . \, \| : H \to [0, +\infty)$ é chamada de norma se, satisfaz*

i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall \, x \in H$;

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \, \alpha \in K \quad e \, \forall \, x \in H$;

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall \, x, y \in H$.

Definição 1.2 *Seja H um espaço vetorial normado. Diz-se que H é completo, se toda sequência de Cauchy em H é convergente. Um espaço vetorial normado completo é chamado espaço de Banach.*

Definição 1.3 *Seja H um espaço vetorial sobre o corpo K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em H é uma aplicação $\langle \, . \, , \, . \, \rangle_H : H \times H \to K$ que satisfaz as seguintes propriedades, $\forall \, x, y, z \in H$ e $\alpha \in K$:*

i) $\langle x + y, z \rangle_H = \langle x, z \rangle_H + \langle y, z \rangle_H$;

ii) $\langle \alpha x, y \rangle_H = \alpha \langle x, y \rangle_H$;

iii) $\langle x, y \rangle_H = \overline{\langle y, x \rangle}_H$;

iv) $\langle x, x \rangle_H \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.4 *Seja H um espaço vetorial com produto interno dado por $\langle \, . \, , \, . \, \rangle_H$ e norma induzida pelo produto interno dado por $\| \, . \, \|_H = \langle \, . \, , \, . \, \rangle_H^{1/2}$. Dizemos que H é um espaço de Hilbert se H é completo com a norma $\| \, . \, \|_H$.*

Definição 1.5 *Seja H um espaço vetorial real. Uma aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é chamada forma bilinear se satisfaz, $\forall\ u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H$ e $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$,*

i) $a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$;

ii) $a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2)$.

Definição 1.6 *Seja H um espaço normado e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que*

i) a é contínua, se existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall\ u, v \in H;$$

ii) a é coerciva, se existe constante $C_2 > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq C_2 \|u\|_H^2, \quad \forall\ u \in H.$$

Teorema 1.1 ***(Lax-Milgram)*** *Seja H um espaço de Hilbert real e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre H. Se $f \in H'$, onde H' denota o dual de H, então existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall\ v \in H.$$

Demonstração: Encontra-se em Kreyszig (1978). ∎

Definição 1.7 *Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Representa-se por $L^p(\Omega)$ a classe de equivalência de todas as funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é integrável, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \ \text{ é } \ \textit{mensurável} \ \text{ e} \int_\Omega |u|^p\ dx < \infty \right\}.$$

Lema 1.1 *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Além disso, a função*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$, no qual, com esta norma, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Escontra-se em Brezis (1984, p.57) ∎

Lema 1.2 *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\ dx, \quad \forall\ u, v \in L^2(\Omega),$$

e, a respectiva norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\ u \in L^2(\Omega).$$

Demonstração: Encontra-se em Brezis (1984, p.78). ■

Proposição 1.1 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam a e b números reais não negativos. Se $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Para $p = q = 2$ tem-se, também, com $\gamma > 0$, a desigualdade

$$ab \leq \frac{\gamma a^2}{2} + \frac{b^2}{2\gamma}.$$

O resultado é obtido tomando $\sqrt{\gamma}a$ e $\dfrac{b}{\sqrt{\gamma}}$ no lugar, respectivamente, de a e b na desigualdade de Young.

Demonstração: Encontra-se em Medeiros (2008, p. 85). ■

Proposição 1.2 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Encontra-se em Medeiros (2008, p. 86). ■

Proposição 1.3 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se $u, v \in L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$, então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Encontra-se em Medeiros (2008, p. 86). ■

Nos capítulos seguintes, utilizaremos a notação $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ para representar o produto interno em $L^2(\Omega)$ e $\|\ .\ \|$ quando se tratar da norma de uma função em $L^2(\Omega)$.

1.1 Espaço das Distribuições

Definição 1.8 *Dada uma função contínua $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ o conjunto dado por*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega;\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω, com suporte compacto em Ω.

Definição 1.9 *Chama-se de multi-índice qualquer n-upla em $\mathbb{N}^n$, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é multi-índice, se $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, 3, ..., n$. Define-se $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.*

Definição 1.10 *Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e α um multi-índice. Define-se*

$$\boldsymbol{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Assim, o número $|\alpha|$ representa a ordem de derivação, enquanto que cada coordenada α_j representa a quantidade de derivadas na direção de x_j que serão calculadas. Por exemplo, se $\alpha = (0, 0, 0, ..., 0)$, o operador derivação será igual ao operador identidade, isto é, $\mathbf{D}^0 u = u$, para toda função u.

1.1.1 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Consideramos o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que

$$supp(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_v) \subset K, \quad \forall\ v \in \mathbb{N}; \tag{1.1}$$

ii)

$$\mathbf{D}^\alpha \varphi_v \to \mathbf{D}^\alpha \varphi \text{ uniformemente em } \Omega \text{ para cada multi-índice } \alpha, \text{ quando } v \to +\infty. \tag{1.2}$$

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida em (1.1) e (1.2), será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes.

Definição 1.11 *Seja* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *um funcional linear. Se* T *for contínua, então dizemos que* T *é uma distribuição escalar. Desta maneira, adota-se o seguinte:*

$$\begin{aligned} T: \ \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, no qual é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e denominado espaço das distribuições escalares sobre Ω.

1.1.2 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.12 *Diz-se que uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável em* Ω *quando* u *é integrável a Lebesgue em todo compacto* $K \subset \Omega$*. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por* $L^1_{loc}(\Omega)$*, isto é,*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u| dx < +\infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$*.*

Definição 1.13 *A sequência de distribuição escalares* $(T_v)_{v\in\mathbb{N}}$ *converge para a distribuição escalar* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *quando*

$$\langle T_v, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \text{ em } \mathbb{R}, \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observação 1.1 *Com esta noção de convergência,* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad \text{para} \ \ 1 \leqslant p < +\infty. \tag{1.3}$$

Mais detalhes sobre (1.3) *encontra-se em Medeiros (2000, p. 14).*

Definição 1.14 *Dada uma distribuição* T *sobre* Ω *e dado um multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, define-se a derivada distribucional de ordem* α *de* T *como sendo a distribuição*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^\alpha T: \ \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle \boldsymbol{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \boldsymbol{D}^\alpha \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Lema 1.3 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Considere a forma linear* T_u *definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *como*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Então* $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e se verifica que* $T_u = 0 \Leftrightarrow u = 0$*, quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: Encontra-se em Cavalcanti (2009). ∎

1.2 Espaços de Sobolev

Definição 1.15 *Defina-se por* $W^{m,p}(\Omega)$, *com* $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leqslant p < +\infty$, *o espaço vetorial de todas as funções* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que,* $\forall\ |\alpha| \leq m$, $\boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *sendo* $\boldsymbol{D}^\alpha u$ *a derivada de* u *no sentido das distribuições, isto é*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha \textit{ multi-índice, tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Uma propriedade importante dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$ é que eles se tornam espaços normados com a seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathbf{D}^\alpha u\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty. \tag{1.4}$$

Proposição 1.4 *Os espaços* $W^{m,p}(\Omega)$ *munido da norma* (1.4) *são espaços de Banach.*

Demonstração: Encontra-se em Medeiros (2000, p. 24). ■

Observação 1.2 *No caso particular, em que* $p = 2$, *o espaço* $W^{m,2}(\Omega)$ *que é um espaço de Hilbert, o qual é denotado por* $H^m(\Omega)$.

Definição 1.16 *O espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *é definido como sendo o fecho de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.17 *O dual topológico do espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *é representado por* $W^{-m,q}$ *onde* $1 \leqslant p < +\infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Observação 1.3 *Quando* $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ *é denotado por* $H_0^m(\Omega)$, *e seu dual é denotado por* $H^{-m}(\Omega)$.

Observação 1.4 *Dos teoremas de imersão, tem-se que:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega); \tag{1.5}$$

e portanto

$$\langle f, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \langle f, u \rangle_{L^2}, \quad \forall\ f \in L^2(\Omega), \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Mais detalhes sobre os teoremas de imersão encontra-se em Medeiros (2000, s. 2.3).

Proposição 1.5 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado em alguma direção* x_i *de* $\mathbb{R}^n$. *Então, existe uma constante* $C_\Omega > 0$ *tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Encontra-se em Cavalcanti (2009). ■

Nos resultados a seguir, $\Omega = (0, L)$ é um intervalo da reta.

Lema 1.4 *O operador* $\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *é limitado.*

Demonstração: Deve-se mostrar que existe $M > 0$ tal que:

$$\left\| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f \right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq M\|f\|, \forall\ f \in L^2(\Omega).$$

Considera-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} u - u_{xx} = f, \\ u(0) = 0, u(L) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Observemos que se $\|u\| = 0$ a desigualdade torna-se válida. Nota-se que $u = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} f \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Além disso, multiplicando (1.6) por u, integrando em $(0, L)$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_0^L u^2 dx - \int_0^L u_{xx} u dx = \int_0^L f u dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L u^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx = \int_0^L f u dx \leq \|f\|\|u\|,$$

logo,

$$\|u\|^2 + \|u_x\|^2 \leq \|f\|\|u\|,$$

segue daí e do fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, ver Brezis (1984, p. 174), que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|\|u\| \leq M_1\|f\|\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

onde $M_1 > 0$ é tal que

$$\|u\| \leq M_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{H^1} \leq M_1\|f\|. \tag{1.7}$$

No entanto, de $u_{xx} = u - f$, implica

$$\|u_{xx}\| \leq \|f\| + \|u\|,$$

logo de (1.7) segue que

$$\|u_{xx}\| \leq \|f\| + M_1\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\| + M_1^2\|f\| \leq M\|f\|$$

onde $M = 1 + M_1^2$.
Portanto,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \|u_{xx}\| \leq M\|f\|, \tag{1.8}$$

onde (1.8) segue do fato de $\frac{-\partial^2}{\partial x^2} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ser uma isometria (veja Medeiros (2000)), e portanto,

$$\left\| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq M\|f\|.$$

■

Lema 1.5 *O operador* $\frac{\partial}{\partial x}\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *é limitado.*

Demonstração: Deve-se mostrar que existe $M > 0$ tal que:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \right\|_{H^1(\Omega)} \leq M\|f\|, \forall f \in L^2(\Omega).$$

Considera-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} u - u_{xx} = f, \\ u(0) = 0, u(L) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Nota-se que $u = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Logo, $u_x \in H^1(\Omega)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{H^1}^2 = \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 &\leq M_1\|f\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \\ &\leq M_1\|f\|^2 + M_2\|f\|^2 \\ &\leq M_3\|f\|^2, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|u_x\|_{H^1(\Omega)} \leq M\|f\|.$$

Portanto,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} f \right\|_{H^1(\Omega)} \leq M\|f\|.$$

■

Lema 1.6 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Seja $F : [0,T] \to [0,+\infty)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0,T]$.*

i) Se F satisfaz a desigualdade diferencial

$$F'(t) \leq G(t) + H(t)F(t), \text{ quase sempre em } [0,T],$$

onde $G(t)$ e $H(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0,T]$, então

$$F(t) \leq e^{\int_0^t H(s)ds}\left[F(0) + \int_0^t G(s)ds\right],$$

para $0 \leq t \leq T$.

ii) Em particular, se $F'(t) \leq H(t)F(t)$ em $[0,T]$ e $F(0) = 0$, então

$$F(t) = 0 \ \forall \ t \in [0,T].$$

Demonstração: i) Visto que $F'(t) \leq G(t)+H(t)F(t)$, multiplica-se por $e^{-\int_0^s H(r)dr}$ ambos os lados desta expressão, e assim, rearranjando os termos tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(F(t)e^{-\int_0^t H(r)dr}\right) &= \left(F'(t) - H(t)F(t)\right)e^{-\int_0^t H(r)dr} \\ &\leq G(t)e^{-\int_0^t H(r)dr}, \text{ para } 0 \leq t \leq T \text{ quase sempre.} \end{aligned}$$

Integrando-se de 0 a t, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}\left(F(s)e^{-\int_0^s H(r)dr}\right)ds &\leq \int_0^t G(s)e^{-\int_0^s H(r)dr}ds \\ F(t)e^{-\int_0^t H(r)dr} - F(0)e^{-\int_0^0 H(r)dr} &\leq \int_0^t G(s)e^{-\int_0^s H(r)dr}ds \\ F(t) &\leq e^{\int_0^t H(r)dr}\left[F(0) + \int_0^t G(s)e^{-\int_0^s H(r)dr}ds\right], \end{aligned}$$

ou ainda,

$$F(t) \leq e^{\int_0^t H(r)dr}\left[F(0) + \int_0^t G(s)ds\right].$$

ii) Tendo em vista que F é uma função não negativa, ao utilizarmos o resultado (i), segue (ii). ■

1.3 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Apresenta-se, nesta seção, o conteúdo necessário para o entendimento do próximo capítulo.

Definição 1.18 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*
i) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*
ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definição 1.19 *Uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X, é chamado semigrupo fortemente contínuo se além de (i) e (ii) da definição (1.18), é satisfeita a condição de que $\forall\ (x,t) \in X \times [0,+\infty)$, $(x,t) \to T(t)x \in X$, é contínua em cada ponto.*

Definição 1.20 *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X,\ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\ x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Observação 1.5 *Chama-se de semigrupo de classe C_0 a um semigrupo fortemente contínuo.*

Teorema 1.2 *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração: Encontra-se em Pazy (1983, p. 2). ■

Teorema 1.3 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ são semigrupos uniformemente contínuos e*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - I}{t},$$

então $T(t) = S(t),\ \forall\ t \geq 0$.

Demonstração: Encontra-se em Pazy (1983) ou Gomes (2012). ■

O teorema a seguir dá uma resposta quanto à possibilidade de se resolver o problema abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = AU(t) \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Teorema 1.4 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 e A é o seu gerador infinitesimal, então:*

i) $\forall\ x \in X$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x; \tag{1.11}$$

ii) $\forall\ x \in X$, $\int_0^t T(s)x\ ds \in \mathcal{D}(A)$ *e*

$$A\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x; \tag{1.12}$$

iii) Se $x \in \mathcal{D}(A)$, *então* $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\ t \geq 0$, *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.13}$$

Em particular, a função $u = T(t)x$ *satisfaz* $\frac{d}{dt}u = Au$.

Demonstração: Encontra-se em Pazy (1983, p. 12). ■

Definição 1.21 *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é chamado de semigrupo de contrações, se*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1,\ \forall\ t \geq 0.$$

Definição 1.22 *Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert X, se diz dissipativo se, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$Re\,\langle Ax, x\rangle_X \leq 0.$$

1.3.1 Semigrupos de classe C_0 gerados por operadores dissipativos

Os semigrupos de classe C_0 gerados por operadores dissipativos são essenciais para se provar a existência de solução para um problema do tipo descrito em (1.10).

No que segue, apresenta-se o teorema de Lumer-Phillips, resultado fundamental para a conclusão do trabalho no capítulo seguinte.

Teorema 1.5 ***(Lumer-Phillips)*** *Seja A um operador linear num espaço de Hilbert X com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X. Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X (dito maximal), isto é $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X.*

Demonstração: Encontra-se em Pazy (1983, p. 15). ■

1.3.2 Problema Semi linear Abstrato

Considera-se o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = F(u(t)); t > 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.14}$$

onde $-A$ (com domínio $\mathcal{D}(A)$) é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach H, F é uma aplicação não linear e u_0 é um valor inicial dado.

A partir de algumas considerações adequadas sobre F, podem-se obter resultados de existência de solução para o problema de valor inicial (1.14). Mais detalhes podem ser consultados em Pazy (1983) ou Gomes (2012).

Para obter solução global para o modelo (9) considera-se o caso em que

$$F : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$$

é localmente lipschitz contínua de acordo com a definição abaixo.

Definição 1.23 *Seja H um espaço vetorial normado. Dizemos que $F : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ é localmente Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, se para cada constante positiva M existe uma constante positiva $L_M = L(M)$ tal que*

$$\begin{cases} \|F(u) - F(v)\|_H + \|A(F(u) - F(v))\|_H \leq L_M(\|u - v\|_H + \|Au - Av\|_H), \forall\, u, v \in \mathcal{D}(A), \\ \text{tal que } \|u\|_H + \|Au\|_H \leq M \text{ e } \|v\|_H + \|Av\|_H \leq M. \end{cases} \tag{1.15}$$

Com as considerações anteriores temos que vale o seguinte resultado.

Teorema 1.6 *Seja $F : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ satisfazendo* (1.15)*. Para todo $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, existe um $T_{max} \leq +\infty$ e uma única solução u de* (1.14) *tal que*

$$u \in C^1([0, T_{max}); H) \cap C([0, T_{max}); \mathcal{D}(A)).$$

Além disso temos que valem as seguintes alternativas:
a) $T_{max} = +\infty$ ou
b) $T_{max} < +\infty$ e $\lim\limits_{t \to T_{max}} (\|u(t)\|_H + \|Au(t)\|_H) = +\infty$.

Demonstração: Encontra-se em Pazy (1983, seção 6.1). ∎

1.3.3 Operadores Elípticos

Definição 1.24 *Um operador diferencial de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$, da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u; x \in \Omega,$$

é chamado operador elíptico se existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x)\xi^{2\alpha} \geq C|\xi|^{2m},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 1.7 *(Teorema da Regularidade Elíptica) Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

Demonstração: Encontra-se em Agmon (1964). ■

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Para o Modelo (9)

Neste capítulo será estudada a existência e unicidade de solução para o modelo (9). Com esse objetivo será feito uma reformulação do problema (9) conforme (1.14) para em seguida, usar a teoria de semigrupos.

2.1 Existência de Solução

Considere o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

onde $\Omega = (0, L)$.

Em $\mathcal{H}$ definimos o seguinte produto interno

$$\left\langle U, \widehat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L z_{xx}\widehat{z}_{xx}dx + \int_0^L v_x\widehat{v}_x dx + \lambda \int_0^L \theta_x\widehat{\theta}_x dx + \alpha \int_0^L w\widehat{w}dx + \int_0^L v\widehat{v}dx,$$

para $U = (z, v, \theta, w)^T$ e $\widehat{U} = (\widehat{z}, \widehat{v}, \widehat{\theta}, \widehat{w})^T$, com a seguinte norma induzida $\|.\|_{\mathcal{H}}$ dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \|\, (z, v, \theta, w)^T \,\|_{\mathcal{H}} = \|z_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v\|^2 + \lambda\|\theta_x\|^2 + \alpha\|w\|^2.$$

Considerando $v = z_t$ e $w = \theta_t$ o modelo (9) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} z_t = v \\ v_t = -\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} - \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx} + \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} H(t)z_{xx} - \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} k(x)H(t) \\ \theta_t = w \\ w_t = \frac{-1}{\alpha}w + \frac{\lambda}{\alpha}\theta_{xx} + \frac{1}{\alpha}v_{xx} \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = AU + N(U); \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

$$A=\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & 0 & -\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \alpha^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \lambda\alpha^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha^{-1} \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

e

$$N(U)=\begin{pmatrix} 0 \\ H(t)\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}(z_{xx}-k(x)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Operador Dissipativo

Para mostrar que o operador A, definido acima, é dissipativo, deve-se mostrar que $\langle AU, U\rangle \leqslant 0$. O operador A definido acima é dado por

$$A:\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{H}\to\mathcal{H},$$

onde

$$\mathcal{D}(A)=\left\{\,(z,v,\theta,w)^T\in\mathcal{H};\ w,\ z_{xx}\in H_0^1(\Omega)\ \text{ e } v,\theta\in H^2(\Omega)\,\right\}.$$

Sendo assim, dado $U=(z,v,\theta,w)^T\in\mathcal{D}(A)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} v \\ -\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} - \left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx} \\ w \\ \alpha^{-1}v_{xx}+\lambda\alpha^{-1}\theta_{xx}-\alpha^{-1}w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ v \\ \theta \\ w \end{bmatrix}\right) \\
&= \int_0^L v_{xx}z_{xx}dx + \int_0^L v_x \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} - \left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}\right]dx \\
&+ \int_0^L v\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} - \left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}\right]dx + \lambda\int_0^L w_x\theta_x dx \\
&+ \alpha\int_0^L w\left[\alpha^{-1}v_{xx}+\lambda\alpha^{-1}\theta_{xx}-\alpha^{-1}w\right]dx \\
&= \int_0^L v_{xx}z_{xx}dx + \int_0^L v_x \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right]dx \\
&+ \int_0^L v_x \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}\right]dx + \int_0^L v\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right]dx \quad \bigstar \\
&+ \int_0^L v\left[-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}\right]dx + \lambda\int_0^L w_x\theta_x dx + \int_0^L w v_{xx}dx \\
&+ \lambda\int_0^L w\theta_{xx}dx - \int_0^L w^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $\theta\in H_0^1(\Omega)$ e $\theta w_{xx}=(\theta w_x)_x-\theta_x w_x$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L \theta w_{xx}dx &= \int_0^L (\theta w_x)_x\, dx - \int_0^L \theta_x w_x dx \\
&= \underbrace{\theta(L,t)}_{=0} w_x(L,t) - \underbrace{\theta(0,t)}_{=0} w_x(0,t) - \int_0^L \theta_x w_x dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\lambda\int_0^L \theta w_{xx}dx = -\lambda\int_0^L \theta_x w_x dx.$$

De forma análoga é possível concluir que

$$\lambda\int_0^L \theta_{xx} w dx = -\lambda\int_0^L \theta_x w_x dx. \tag{2.2}$$

Nota-se ainda que

$$\int_0^L v_{xx}z_{xx}dx = \int_0^L v z_{xxxx}dx. \tag{2.3}$$

De fato,

$$v z_{xxxx} = (v z_{xxx})_x - v_x z_{xxx}.$$

Logo, integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L v z_{xxxx} dx &= \int_0^L (v z_{xxx})_x dx - \int_0^L v_x z_{xxx} dx \\
&= \underbrace{v(L,t)}_{=0} z_{xxx}(L,t) - \underbrace{v(0,t)}_{=0} z_{xxx}(0,t)_{=0} - \int_0^L v_x z_{xxx} dx \\
\Rightarrow \int_0^L v z_{xxxx} dx &= -\int_0^L v_x z_{xxx} dx.
\end{aligned}$$

De forma análoga, usando $z_{xx}(0,t) = z_{xx}(L,t)$ conclui-se que

$$\int_0^L v_x z_{xxx} dx = -\int_0^L v_{xx} z_{xx} dx.$$

Utilizando as duas últimas identidades mostra-se (2.3).
Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^L v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right] dx &= \int_0^L v\left(I - I + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right] dx \\
&= \int_0^L v\left(I - \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right)\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right] dx \\
&= -\int_0^L v\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right] dx \\
&+ \int_0^L v\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} dx \\
&= -\int_0^L v z_{xxxx} dx + \int_0^L v\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} dx.
\end{aligned}$$

De (2.3) conclui-se que

$$-\int_0^L v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right] dx = \int_0^L v_{xx} z_{xx} dx - \int_0^L v\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} dx. \quad (2.4)$$

De modo análogo conclui-se que

$$-\int_0^L v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}\right] dx = \int_0^L v_{xx} w dx - \int_0^L v\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx} dx. \quad (2.5)$$

Sejam

$$[p] = p(x,t) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx},$$

e

$$[q] = q(x,t) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx}.$$

Com essa notação temos que

$$\begin{aligned}
&- \int_0^L v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[p]\,dx - \int_0^L v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[q]\,dx - \int_0^L v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[p]\,dx - \int_0^L v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[q]\,dx\\
&= \int_0^L \left(-v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[p] - v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[p]\right)dx + \int_0^L \left(-v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[q] - v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[q]\right)dx\\
&= \int_0^L -\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial}{\partial x}[p]\right)dx + \int_0^L -\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial}{\partial x}[q]\right)dx\\
&= \underbrace{-v(L,t)}_{=0}\frac{\partial}{\partial x}[p](L,t) + \underbrace{v(0,t)}_{=0}\frac{\partial}{\partial x}\,[p]\,(0,t)\underbrace{-v(L,t)}_{=0}\frac{\partial}{\partial x}[q](L,t) + \underbrace{v(0,t)}_{=0}\frac{\partial}{\partial x}[q](0,t) = 0.
\end{aligned}$$

Desta maneira, conclui-se que

$$-\int_0^L v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[p]\,dx - \int_0^L v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[q]\,dx - \int_0^L v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[p]\,dx - \int_0^L v_x\frac{\partial}{\partial x}\,[q]\,dx = 0. \tag{2.6}$$

Utilizando-se das igualdades (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) e finalmente (2.6) substituidas nas espressões de ★ é possível concluir que

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^L w^2 dx \leqslant 0,$$

isto é, o operador A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

2.1.2 Operador Maximal

Para $\lambda_0 = 1$ no teorema (1.5) vamos mostrar que, dado $F = (f,g,h,i)^T \in \mathcal{H}$, existe $U = (z,v,\theta,w)^T \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(I - A)U = F. \tag{2.7}$$

Da equação (2.7) tem-se

$$\begin{bmatrix} z \\ v \\ \theta \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ -\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} - \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xx} \\ w \\ \alpha^{-1}v_{xx} + \lambda\alpha^{-1}\theta_{xx} - \alpha^{-1}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

De (2.8) conclui-se que

$$\begin{cases} z - v = f; \\ \theta - w = h; \\ \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v + z_{xxxx} + w_{xx} = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g; \\ \alpha w - v_{xx} - \lambda\theta_{xx} + w = \alpha i. \end{cases}$$

Como $v = z - f$ e $w = \theta - h$ segue que

$$\begin{cases} z_{xxxx} - z_{xx} + z + \theta_{xx} = f + g + h_{xx} - f_{xx} - g_{xx}; \\ -\lambda\theta_{xx} + (1+\alpha)\theta - z_{xx} = \alpha i - f_{xx} + (1+\alpha)h. \end{cases} \tag{2.9}$$

Portanto, resolver a equação (2.7) é equivalente a resolver o sistema (2.9). A seguir, obtêm-se de maneira formal os elementos necessários para fazer o uso do teorema de Lax-Milgram e, desta forma resolver o sistema (2.9). Para isso, multiplica-se a primeira equação de (2.9) por φ e a segunda por ψ, então integra-se em $(0, L)$, isto é,

$$\begin{cases} \int_0^L z_{xxxx}\varphi dx - \int_0^L z_{xx}\varphi dx + \int_0^L z\varphi dx + \int_0^L \theta_{xx}\varphi dx = \int_0^L (f + g + h_{xx} - f_{xx} - g_{xx})\varphi dx; \\ -\lambda \int_0^L \theta_{xx}\psi dx + (1+\alpha)\int_0^L \theta\psi dx - \int_0^L z_{xx}\psi dx = \int_0^L (\alpha i - f_{xx} + (1+\alpha)h)\psi dx. \end{cases} \tag{2.10}$$

Sendo assim, baseado nos cálculos acima, define-se a forma bilinear sobre o espaço de Hilbert $\mathbb{k} \times \mathbb{k}$, com $\mathbb{k} = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ e $\Omega = (0, L)$, pondo

$$a : \mathbb{k} \times \mathbb{k} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) &= \langle z_{xx}, \varphi_{xx}\rangle - \langle z_{xx}, \varphi\rangle + \langle z, \varphi\rangle + \langle \theta_{xx}, \varphi\rangle \\ &- \lambda\langle \theta_{xx}, \psi\rangle + (1+\alpha)\langle \theta, \psi\rangle - \langle z_{xx}, \psi\rangle, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) &= \langle z_{xx}, \varphi_{xx}\rangle - \langle z_{xx}, \varphi\rangle + \langle z, \varphi\rangle + \langle \theta, \varphi_{xx}\rangle \\ &+ \lambda\langle \theta_{x}, \psi_x\rangle + (1+\alpha)\langle \theta, \psi\rangle - \langle z_{xx}, \psi\rangle, \end{aligned}$$

e a forma linear

$$F : \mathbb{k} \to \mathbb{R},$$

dada por

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) &= \int_0^L (f+g)\varphi dx + \int_0^L h_{xx}\varphi dx - \int_0^L f_{xx}\varphi dx \\ &- \int_0^L g_{xx}\varphi dx + \alpha\int_0^L i\psi dx - \int_0^L f_{xx}\psi dx + (1+\alpha)\int_0^L h\psi dx. \end{aligned}$$

É visto que o sistema (2.10) pode ser escrito como

$$a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right).$$

Nota-se que $a(.,.)$ é contínua e coerciva. De fato,

$$\begin{aligned}
\left|a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right)\right| &= |\langle z_{xx}, \varphi_{xx}\rangle| + |\langle z_{xx}, \varphi\rangle| + |\langle z, \varphi\rangle| + |\langle \theta, \varphi_{xx}\rangle| \\
&+ |\lambda \langle \theta_x, \psi_x\rangle| + (1+\alpha)|\langle \theta, \psi\rangle| + |\langle z_{xx}, \psi\rangle| \\
&\leqslant \|z_{xx}\|\|\varphi_{xx}\| + \|z_{xx}\|\|\varphi\| + \|z\|\|\varphi\| + \|\theta\|\|\varphi_{xx}\| \\
&+ \lambda\|\theta_x\|\|\psi_x\| + (1+\alpha)\|\theta\|\|\psi\| + \|z_{xx}\|\|\psi\| \\
&\leqslant C\Big(\|z_{xx}\|\|\varphi_{xx}\| + \|z_{xx}\|\|\varphi\| + \|z\|\|\varphi\| + \|\theta\|\|\varphi_{xx}\| \\
&+ \|\theta_x\|\|\psi_x\| + \|\theta\|\|\psi\| + \|z_{xx}\|\|\psi\|\Big) \\
&\leqslant C\Big(\|z\| + \|z_{xx}\| + \|\theta\| + \|\theta_x\|\Big)\Big(\|\varphi\| + \|\varphi_{xx}\| + \|\psi\| + \|\psi_x\|\Big) \\
&= C\Big(\|z\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)}\Big)\Big(\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{1, (1+\alpha), \lambda\}$. Portanto, $a(.,.)$ é contínua.
Além disso, para todo $(z,\theta)^T \in \mathbb{k}$, tem-se, tomando $C_1 = \min\{1, (1+\alpha), \lambda\}$, que

$$\begin{aligned}
a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}\right) &= \langle z_{xx}, z_{xx}\rangle - \langle z_{xx}, z\rangle + \langle z, z\rangle + \langle \theta, z_{xx}\rangle \\
&+ \lambda\langle \theta_x, \theta_x\rangle + (1+\alpha)\langle \theta, \theta\rangle - \langle z_{xx}, \theta\rangle \\
&= \|z_{xx}\|^2 + \|z_x\|^2 + \|z\|^2 + \lambda\|\theta_x\|^2 + (1+\alpha)\|\theta\|^2 \\
&\geqslant C_1\Big(\|z_{xx}\|^2 + \|z_x\|^2 + \|z\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta\|^2\Big) \\
&= C_1\Big(\|z\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \|\theta\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

isto é, $a(.,.)$ é coerciva.
Para a forma linear F tem-se que, para todo $(\varphi,\psi)^T \in \mathbb{k}$,

$$\begin{aligned}
\left|F\left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right)\right| &\leqslant \left|\int_0^L (f+g)\varphi dx\right| + \left|\int_0^L h_{xx}\varphi dx\right| + \left|\int_0^L f_{xx}\varphi dx\right| \\
&+ \left|\int_0^L g_{xx}\varphi dx\right| + \alpha\left|\int_0^L i\psi dx\right| + \left|\int_0^L f_{xx}\psi dx\right| + (1+\alpha)\left|\int_0^L h\psi dx\right| \\
&\leqslant \|f+g\|\|\varphi\| + \|h_{xx}\|\|\varphi\| + \|f_{xx}\|\|\varphi\| \\
&+ \|g_{xx}\|\|\varphi\| + \alpha\|i\|\|\psi\| + \|f_{xx}\|\|\psi\| + (1+\alpha)\|h\|\|\psi\| \\
&= \Big(\|f+g\| + \|h_{xx}\| + \|f_{xx}\| + \|g_{xx}\|\Big)\|\varphi\| + \Big(\alpha\|i\| + \|f_{xx}\| + (1+\alpha)\|h\|\Big)\|\psi\| \\
&\leqslant C_2\|\varphi\| + C_2\|\psi\| \leqslant C_2\Big(\|\varphi\| + \|\psi\|\Big),
\end{aligned}$$

onde $C_2 = max\{\|f+g\| + \|h_{xx}\| + \|f_{xx}\| + \|g_{xx}\|, \alpha\|i\| + \|f_{xx}\| + (1+\alpha)\|h\|\}$.
Desta maneira, tem-se que F é contínua e portanto $F \in \mathbb{k}'$, onde $\mathbb{k}'$ é o dual de $\mathbb{k}$.

Como $a(.,.)$ é contínua, coerciva e $F \in \mathbb{k}'$, o teorema de Lax-Milgram garante que existe único $(z,\theta)^T \in \mathbb{k}$ que é solução de

$$a\left(\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right), \quad \forall \quad (\varphi,\psi)^T \in \mathbb{k}. \tag{2.11}$$

Tomando $\varphi = 0$ em (2.11) temos

$$\lambda \langle \theta_x, \psi_x \rangle + (1+\alpha) \langle \theta, \psi \rangle - \langle z_{xx}, \psi \rangle = \alpha \langle i, \psi \rangle - \langle f_{xx}, \psi \rangle + (1+\alpha) \langle h, \psi \rangle, \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, tomando $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ obtemos

$$-\lambda\theta_{xx} + (1+\alpha)\theta - z_{xx} = \alpha i - f_{xx} + (1+\alpha)h, \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Logo θ é solução da equação

$$\lambda\theta_{xx} = (1+\alpha)\theta - z_{xx} - \alpha i + f_{xx} - (1+\alpha)h \in L^2(\Omega),$$

e segue do Teorema (1.7) que $\theta \in H^2(\Omega)$ e, consequentemente, $\theta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Agora, fazendo $\psi = 0$ em (2.11) temos que z satisfaz a equação

$$z_{xxxx} = z_{xx} - z - \theta_{xx} + f + g + h_{xx} - f_{xx} - g_{xx}, \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Como

$$z_{xx} - z - \theta_{xx} + f + g + h_{xx} - f_{xx} - g_{xx} \in H^{-1}(\Omega),$$

então, por regularidade elíptica, teorema (1.7),

$$z_{xx} \in H_0^1(\Omega).$$

De (2.8) temos que

$$v = z - f \Rightarrow v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

e

$$w = \theta - h \Rightarrow w \in H_0^1(\Omega).$$

Isso conclui a prova de que

$$U = (z, v, \theta, w)^T \in \mathcal{D}(A),$$

provando que o operador A é maximal.

Das subseções (2.1.1) e (2.1.2) temos que o operador A é maximal dissipativo.

Além disso, observemos que $\mathcal{D}(A)$ é denso em H, pois

$$(C_0^\infty(\Omega))^4 = C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$$

e como $(C_0^\infty(\Omega))^4$ é denso em $\mathcal{H}$, (ver Cavalcanti (2009)) segue que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.

De acordo com o exposto acima, segue a validade do seguinte teorema.

Teorema 2.1 *A parte linear de* (2.1), $\frac{d}{dt}U = AU$, *com A definido anteriormente, é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre $\mathcal{H}$.*

A seguir, consideraremos a parte não linear de (2.1).

2.1.3 Não Linearidade Localmente Lipschitz

Objetivo dessa subseção é verificar que $N(U)$ é localmente Lipschitz, onde

$$\begin{aligned} N: \ \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ U &\mapsto N(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ H(t)\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}(z_{xx} - K(x)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para $U = (z, v, \theta, w) \in \mathcal{H}$. Sendo assim, considera-se $\mathcal{G} : \underbrace{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}_{\mathcal{Y}} \to L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{G}(z) = H(t)\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}(z_{xx} - K(x)), \tag{2.12}$$

onde

$$H(t) = \left(\int_0^L (z_x^2 + 2k(x)z)dx\right)\frac{\mu}{2L}.$$

A seguir mostraremos que $\mathcal{G}$ é localmente Lipschitz. Para isso, consideremos o operador $T(z) = H(t)(z_{xx} - k(x))$. Desta forma, $\mathcal{G}(z) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} T(z)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} T(z) &= \left(\int_0^L (z_x^2 + 2k(x)z)dx\right)\frac{\mu}{2L} z_{xx} - \left(\int_0^L (z_x^2 + 2k(x)z)dx\right)\frac{\mu}{2L} k(x) \\ &= c_0 z_{xx}\int_0^L z_x^2 dx + 2c_0 z_{xx}\int_0^L k(x)z dx - c_0 k(x)\int_0^L z_x^2 dx - 2c_0 k(x)\int_0^L k(x)z dx \\ &= P(z) + Q(z) + R(z) + S(z), \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $c_0 = \frac{\mu}{2L}$ e,

$$P(z) = c_0 z_{xx}\int_0^L z_x^2 dx = c_0\|z_x\|^2 z_{xx},$$

$$Q(z) = 2c_0 z_{xx}\int_0^L k(x)z dx,$$

$$R(z) = -c_0 k(x)\int_0^L z_x^2 dx = -c_0 k(x)\|z_x\|^2,$$

$$S(z) = -2c_0 k(x)\int_0^L k(x)z dx.$$

Vamos provar que as funções P, Q, R e S são localmente Lipschitz. Para isso, seja $C > 0$ uma constante de modo que $\|z\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C$ e $\|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C$, onde $z, \widehat{z} \in \mathcal{Y}$. Temos que

$$\begin{aligned} P: \ \mathcal{Y} &\to L^2(\Omega) \\ z &\mapsto P(z) = c_0\|z_x\|^2 z_{xx}. \end{aligned}$$

Logo para $z, \widehat{z} \in \mathcal{Y}$, obtemos

$$\begin{aligned} |P(z) - P(\widehat{z})| &= c_0\Big|\|z_x\|^2 z_{xx} - \|\widehat{z}_x\|^2\widehat{z}_{xx}\Big| \\ &= c_0\Big|\|z_x\|^2 z_{xx} - \|z_x\|^2\widehat{z}_{xx} + \|z_x\|^2\widehat{z}_{xx} - \|\widehat{z}_x\|^2\widehat{z}_{xx}\Big| \\ &= c_0\Big|\|z_x\|^2(z_{xx} - \widehat{z}_{xx}) + (\|z_x\|^2 - \|\widehat{z}_x\|^2)\widehat{z}_{xx}\Big| \\ &\leqslant c_0\left[\|z_x\|^2|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}| + \big|\|z_x\|^2 - \|\widehat{z}_x\|^2\big||\widehat{z}_{xx}|\right] \\ &\leqslant c_0\left[\|z\|^2_{\mathcal{Y}}|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}| + \big|\|z_x\|^2 - \|\widehat{z}_x\|^2\big||\widehat{z}_{xx}|\right] \\ &\leqslant c_0\left[C^2|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}| + \underbrace{\big|\|z_x\|^2 - \|\widehat{z}_x\|^2\big|}_{I}|\widehat{z}_{xx}|\right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} I = \big|\|z_x\|^2 - \|\widehat{z}_x\|^2\big| &= \left|\int_0^L |z_x|^2 dx - \int_0^L |\widehat{z}_x|^2 dx\right| \\ &= \left|\int_0^L [|z_x|^2 - |\widehat{z}_x|^2]dx\right| \\ &\leqslant \int_0^L \big||z_x|^2 - |\widehat{z}_x|^2\big|dx \\ &= \int_0^L \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(z - \widehat{z})\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}(z + \widehat{z})\right)\right| dx \\ &\leqslant \left\|\frac{\partial}{\partial x}(z - \widehat{z})\right\|\left\|\frac{\partial}{\partial x}(z + \widehat{z})\right\| \\ &\leqslant \|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\|z + \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leqslant (\|z\|_{\mathcal{Y}} + \|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}})\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leqslant 2C\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14), segue que

$$\begin{aligned} |P(z) - P(\widehat{z})|^2 &\leqslant c_0^2\left[C^2|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}| + 2C\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}|\widehat{z}_{xx}|\right]^2 \\ &= c_0^2\left[C^4|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}|^2 + 4C^3|z_{xx} - \widehat{z}_{xx}|\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}|\widehat{z}_{xx}| + 4C^2\|z - \widehat{z}\|^2_{\mathcal{Y}}|\widehat{z}_{xx}|^2\right] \\ &= c_0^2\left[C^4\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z - \widehat{z})\right|^2 + 4C^3\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z - \widehat{z})\right|\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}|\widehat{z}_{xx}| + 4C^2\|z - \widehat{z}\|^2_{\mathcal{Y}}|\widehat{z}_{xx}|^2\right], \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^L |P(z)-P(\widehat{z})|^2 dx &\leqslant c_0^2C^4\int_0^L \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right|^2 dx + 4c_0^2C^3\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\int_0^L \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right| |\widehat{z}_{xx}|dx \\
&+ 4c_0^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\int_0^L |\widehat{z}_{xx}|^2dx \\
&\leqslant c_0^2C^4\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right\|^2 + 4c_0^2C^3\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right\| \|\widehat{z}_{xx}\| \\
&+ 4c_0^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}_{xx}\|^2 \\
&\leqslant c_0^2C^4\,\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + 4c_0^2C^3\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}} + 4c_0^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \\
&\leqslant c_0^2C^4\,\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + 4c_0^2C^4\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + 4c_0^2C^4\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \\
&= 9c_0^2C^4\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \\
&\leqslant C_1\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2,
\end{aligned}$$

onde $C_1 \geq 9c_0^2C^4$.

Segue, da última desigualdade, que

$$\|P(z)-P(\widehat{z})\|^2 \leqslant C_1\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{2.16}$$

Consideremos, agora, a aplicação

$$\begin{aligned}
Q:\ \mathcal{Y} &\to L^2(\Omega) \\
z &\mapsto Q(z) = 2c_0z_{xx}\int_0^L k(x)zdx, \quad k(x)\in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Dados $z, \widehat{z} \in \mathcal{Y}$, têm-se que

$$\begin{aligned}
|Q(z)-Q(\widehat{z})| &= 2c_0\left|z_{xx}\int_0^L k(x)zdx - \widehat{z}_{xx}\int_0^L k(x)\widehat{z}dx\right| \\
&= 2c_0\left|z_{xx}\int_0^L k(x)zdx - \widehat{z}_{xx}\int_0^L k(x)zdx + \widehat{z}_{xx}\int_0^L k(x)zdx - \widehat{z}_{xx}\int_0^L k(x)\widehat{z}dx\right| \\
&= 2c_0\left|(z_{xx}-\widehat{z}_{xx})\int_0^L k(x)zdx + \widehat{z}_{xx}\int_0^L k(x)(z-\widehat{z})dx\right| \\
&\leqslant 2c_0\left(|z_{xx}-\widehat{z}_{xx}|\int_0^L |k(x)z|dx + |\widehat{z}_{xx}|\int_0^L |k(x)(z-\widehat{z})|dx\right) \\
&\leqslant 2c_0\left(|z_{xx}-\widehat{z}_{xx}|\|k(x)\|\|z\| + |\widehat{z}_{xx}|\|k(x)\|\|z-\widehat{z}\|\right) \\
&\leqslant 2c_0\|k(x)\|\left(|z_{xx}-\widehat{z}_{xx}|\|z\|_{\mathcal{Y}} + |\widehat{z}_{xx}|\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\right) \\
&\leqslant 2c_0\|k(x)\|\left(C|z_{xx}-\widehat{z}_{xx}| + |\widehat{z}_{xx}|\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|Q(z)-Q(\widehat{z})|^2 &\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\Bigg(C^2\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right|^2 + 2C\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right||\widehat{z}_{xx}|\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}} \\
&+ |\widehat{z}_{xx}|^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) em $(0,L)$ obtêm-se

$$\begin{aligned}
\int_0^L |Q(z)-Q(\widehat{z})|^2dx &\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\Bigg(C^2\int_0^L\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right|^2dx\\
&+ 2C\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\int_0^L\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right||\widehat{z}_{xx}|dx+\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\int_0^L|\widehat{z}_{xx}|^2dx\Bigg)\\
&\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\Bigg(C^2\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right\|^2+2C\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(z-\widehat{z})\right\|\|\widehat{z}_{xx}\|\\
&+ \|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}_{xx}\|^2\Bigg)\\
&\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\left(C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2+2C\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}+\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\right)\\
&\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\left(C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2+2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2+C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\right)\\
&\leqslant 16c_0^2\|k(x)\|^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\\
&\leqslant C_2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2
\end{aligned}$$

onde $C_2 \geq 16c_0^2\|k(x)\|^2C^2$.

Logo,

$$\|Q(z)-Q(\widehat{z})\|^2 \leqslant C_2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{2.18}$$

Para

$$\begin{aligned}
R:\ \mathcal{Y} &\to L^2(\Omega)\\
z &\mapsto R(z) = -c_0k(x)\|z_x\|^2,\quad k(x)\in L^2(\Omega),
\end{aligned}$$

temos para $z,\widehat{z}\in\mathcal{Y}$ que

$$\begin{aligned}
|R(z)-R(\widehat{z})| &= c_0\left|k(x)\|z_x\|^2-k(x)\|\widehat{z}_x\|^2\right|\\
&\leqslant c_0|k(x)|\left|\int_0^L|z_x|^2-|\widehat{z}_x|^2dx\right|dx\\
&\leqslant c_0|k(x)|\int_0^L\left|\frac{\partial}{\partial x}(z-\widehat{z})\frac{\partial}{\partial x}(z+\widehat{z})\right|dx\\
&\leqslant c_0|k(x)|\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\|z+\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}\\
&\leqslant 2c_0C|k(x)|\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}},
\end{aligned}$$

assim,

$$|R(z)-R(\widehat{z})|^2 \leqslant 4c_0^2C^2|k(x)|^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\int_0^L|R(z)-R(\widehat{z})|^2dx &\leqslant 4c_0^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\int_0^L|k(x)|^2dx \leqslant 4c_0^2C^2\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\|k(x)\|^2\\
&\leqslant C_3\|z-\widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2,
\end{aligned}$$

onde $C_3 \geq 4c_0^2C^2\|k(x)\|^2$.
Logo,

$$\|R(z) - R(\widehat{z})\|^2 \leqslant C_3\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{2.19}$$

Finalmente, para

$$\begin{aligned} S: \ \mathcal{Y} &\to L^2(\Omega) \\ z &\mapsto S(z) = -2c_0k(x)\int_0^L k(x)z dx, \quad k(x) \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

temos para $z, \widehat{z} \in \mathcal{Y}$ que

$$|S(z) - S(\widehat{z})| \ \leqslant \ 2c_0|k(x)|\int_0^L |k(x)||z - \widehat{z}|dx \leqslant 2c_0|k(x)|\|k(x)\|\|z - \widehat{z}\|.$$

Assim,

$$|S(z) - S(\widehat{z})|^2 \leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\|z - \widehat{z}\|^2|k(x)|^2$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^L |S(z) - S(\widehat{z})|^2dx &\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^2\|z - \widehat{z}\|^2\int_0^L |k(x)|^2dx \\ &\leqslant 4c_0^2\|k(x)\|^4\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \\ &\leqslant C_4\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2, \end{aligned}$$

onde $C_4 \geq 4c_0^2\|k(x)\|^4$.
Logo,

$$\|S(z) - S(\widehat{z})\|^2 \leqslant C_4\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{2.20}$$

Voltando em (2.13) e utilizando-se dos resultados de (2.16), (2.18), (2.19) e (2.20) tem-se que

$$\begin{aligned} \|T(z) - T(\widehat{z})\|^2 &\leqslant 4\left(\|P(z) - P(\widehat{z})\|^2 + \|Q(z) - Q(\widehat{z})\|^2 + \|R(z) - R(\widehat{z})\|^2 + \|S(z) - S(\widehat{z})\|^2\right) \\ &\leqslant 4\left(C_1\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + C_2\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + C_3\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + C_4\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2\right) \\ &\leqslant 16C_5\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \leqslant \widehat{C}\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2, \end{aligned}$$

onde $C_5 \geq C_1, C_2, C_3, C_4$ e $\widehat{C} \geq 16C_5$.

Portanto, de $\mathcal{G}(z) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} T(z)$, segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(z) - \mathcal{G}(\widehat{z})\|^2 &\leqslant \left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} T(z) - \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} T(\widehat{z})\right\|^2 \\ &\leqslant \left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} [T(z) - T(\widehat{z})]\right\|^2 \\ &\leqslant M\|T(z) - T(\widehat{z})\|^2 \\ &\leqslant M\widehat{C}\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde M é uma constante positiva que limita o operador $\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$ conforme o lema (1.4)

Utilizando (2.21), podemos mostrar que o operador N é localmente Lipschitz. Para isso, sejam $U = (z, v, \theta, w)^T$ e $V = (\widehat{z}, \widehat{v}, \widehat{\theta}, \widehat{w})^T$ elementos de $\mathcal{H}$, tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C, \|V\|_{\mathcal{H}} \leq C$ e assim

$$N(U) - N(V) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{G}(z) - \mathcal{G}(\widehat{z}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|N(U) - N(V)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\mathcal{G}(z) - \mathcal{G}(\widehat{z})\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{G}(z) - \mathcal{G}(\widehat{z})\right] \right\|^2 \\ &\leqslant M\widehat{C}\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left[T(z) - T(\widehat{z})\right] \right\|^2 \\ &\leqslant M\widehat{C}\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 + D\widehat{C}\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2 \\ &\leqslant (M\widehat{C} + D\widehat{C})\|z - \widehat{z}\|_{\mathcal{Y}}^2, \end{aligned}$$

onde D é uma constante positiva que limita o operador $\frac{\partial}{\partial x}\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$, conforme lema (1.5).

Portanto,

$$\|N(U) - N(V)\|_{\mathcal{H}} \leqslant L_C\|U - V\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.22}$$

onde L_C é uma constante positiva que depende de C. A seguir, vamos provar o resultado de solução local para o modelo (2.1).

Lema 2.1 *(Solução Local) Sejam A e N como definidos anteriormente. Se $(z_0, z_1, \theta_0, \theta_1) = U_0 \in \mathcal{D}(A)$ então existem uma única $U(t) = (z(t), z_t(t), \theta(t), \theta_t(t))$ e $T_{max} > 0$ tal que:*

$$U \in C([0, T_{max}); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, T_{max}); H)$$

e $U(t)$ satisfaz (2.1).

Demonstração: Do Teorema (2.1), temos que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $\mathcal{H}$. Vamos provar que a aplicação

$$F : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A),$$

definida por

$$F(U) = N(U), \text{ com } U(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

é localmente Lipschitiziana. Sejam $U=(z,v,\theta,w), V=(\widehat{z},\widehat{v},\widehat{\theta},\widehat{w})\in\mathcal{D}(A)$, tais que $\|U\|_{\mathcal{D}(A)}\leq C_3$ e $\|V\|_{\mathcal{D}(A)}\leq C_3$, onde $C_3>0$.

Temos que:

$$\|F(U)-F(V)\|^2_{\mathcal{D}(A)}=\left\|\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}[T(z)-T(\widehat{z})]\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H_2(\Omega)}.$$

Segue de (2.22) que

$$\|F(U)-F(V)\|^2_{\mathcal{D}(A)}\leq L_C\|U-V\|_{\mathcal{D}(A)}. \tag{2.23}$$

Utilizando (2.23) e o teorema (1.6) obtemos a demonstração do Lema (2.1). ■

A seguir será provado a existência de solução global para o sistema descrito em (2.1).

Teorema 2.2 *(**Solução Global**) Considere o dado inicial $U_0=(z_0,z_1,\theta_0,\theta_1)^T\in\mathcal{D}(A)$, e assuma que $k(x)\in L^2(\Omega)$, então, existe uma única função $U(t)=(z(t),z_t(t),\theta(t),\theta_t(t))$ tal que $U\in C([0,+\infty);\mathcal{D}(A))\cap C^1((0,+\infty);\mathcal{H})$ e $U(t)$ satisfaz o problema descrito em (2.1) com $U(0)=U_0$.*

Demonstração: Segue do lema (2.1) que existe um par de funções (z,θ), com $z,z_t,\theta\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $z_{xx},z_{tt},\theta_t\in H_0^1(\Omega)$ e $\theta_{tt}\in L^2(\Omega)$, que é solução de (9) em $[0,T_{max})$, para algum $T_{max}>0$. Vamos mostrar que $T_{max}=+\infty$. Para isso, vamos mostrar que o item (b) do teorema (1.6) não vale, isto é, vamos mostrar que $\|U(t)\|_{\mathcal{D}(A)}=\|U(t)\|_{\mathcal{H}}+\|AU(t)\|_{\mathcal{H}}\leqslant C(T_{max})$ e assim,

$$\lim_{t\to T_{max}}\|U(t)\|_{\mathcal{D}(A)}\leqslant\lim_{t\to T_{max}}C(T_{max})\leqslant C(T_{max}),$$

onde

$$\|U\|_{\mathcal{H}}=\|z_{xx}\|^2+\|z_{tx}\|^2+\|z_t\|^2+\lambda\|\theta_x\|^2+\alpha\|\theta_t\|^2,$$

e,

$$\begin{aligned}\|AU\|_{\mathcal{H}} &= \left\|\begin{pmatrix} z_t \\ -\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}z_{xxxx}-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{txx} \\ \theta_t \\ \alpha^{-1}z_{xxt}+\lambda\alpha^{-1}\theta_{xx}-\alpha^{-1}\theta_t\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|z_{txx}\|^2+\left\|\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}z_{xxxx}+\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{txx}\right\|^2_{H_0^1}+\lambda\|\theta_{tx}\|^2+\|z_{txx}+\lambda\theta_{xx}-\theta_t\|^2.\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação de (9) por z_t, a segunda equação de (9) por θ_t, somando o resultado obtido e integrando de 0 a L, obtem-se

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_0^L z_tz_{tt}dx}_{I}+\underbrace{\int_0^L z_tz_{xxxx}dx}_{II}-\underbrace{\int_0^L z_tz_{xxtt}dx}_{III}-\underbrace{\int_0^L z_tH(t)z_{xx}dx}_{IV}+\underbrace{\int_0^L z_tk(x)H(t)dx}_{V} \\ &+\underbrace{\int_0^L z_t\theta_{xxt}dx}_{VI}+\alpha\underbrace{\int_0^L \theta_t\theta_{tt}dx}_{VII}+\underbrace{\int_0^L \theta_t\theta_tdx}_{VIII}-\lambda\underbrace{\int_0^L \theta_t\theta_{xx}dx}_{IX}-\underbrace{\int_0^L \theta_tz_{xxt}dx}_{X}=0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Nota-se que

I)

$$z_t z_{tt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_t)^2 \Rightarrow \int_0^L z_t z_{tt} dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(z_t)^2 dx. \tag{2.25}$$

II)

$$\begin{aligned}(z_{xxx}z_t)_x = z_{xxxx}z_t + z_{xxx}z_{tx} \Rightarrow \int_0^L z_{xxxx}z_t dx &= z_{xxx}(L,t)z_t(L,t) - z_{xxx}(0,t)z_t(0,t) \\ &- \int_0^L z_{xxx}z_{tx}dx = -\int_0^L z_{xxx}z_{tx}dx,\end{aligned}$$

logo,

$$\int_0^L z_{xxxx}z_t dx = -\int_0^L z_{xxx}z_{tx}dx. \tag{2.26}$$

De modo análogo, tem-se que

$$\int_0^L z_{xxx}z_{tx}dx = -\int_0^L z_{xx}z_{txx}dx. \tag{2.27}$$

De (2.25) e (2.26), conclui-se que

$$\int_0^L z_{xxxx}z_t dx = \int_0^L z_{xx}z_{txx}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(z_{xx})^2 dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L z_{xxxx}z_t dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(z_{xx})^2 dx. \tag{2.28}$$

III)

$$\begin{aligned}(z_t z_{xtt})_x &= z_{tx}z_{xtt} + z_t z_{xxtt}, \\ \int_0^L z_t z_{xxtt}dx &= \underbrace{z_t(L,t)}_{=0} z_{xtt}(L,t) - \underbrace{z_t(0,t)}_{=0} z_{xtt}(0,t) - \int_0^L z_{xt}z_{xtt}dx \\ \int_0^L z_t z_{xxtt}dx &= -\int_0^L z_{xt}z_{xtt}dx = -\frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(z_{xt})^2 dx,\end{aligned}$$

isto é

$$\int_0^L z_t z_{xxtt}dx = -\frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(z_{xt})^2 dx. \tag{2.29}$$

IV+V) Tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^L z_t k(x)H(t)dx - \int_0^L z_t H(t)z_{xx}dx &= -\int_0^L H(t)(z_{xx} - k(x))z_t dx \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2\mu}H^2(t)\right).\end{aligned} \tag{2.30}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2\mu}H^2(t)\right) &= \frac{L}{\mu}H(t)\frac{d}{dt}H(t) = \frac{1}{2}H(t)\int_0^L \frac{d}{dt}(z_x^2+2k(x)z)dx \\ &= \frac{1}{2}H(t)\int_0^L(2z_xz_{xt}+2k(x)z_t)dx = H(t)\int_0^L(z_xz_{xt}+k(x)z_t)dx \\ &= H(t)\left(\int_0^L z_xz_{xt}dx+\int_0^L k(x)z_tdx\right). \qquad (2.31)\end{aligned}$$

Como

$$(z_xz_t)_x = z_{xx}z_t + z_xz_{tx},$$

temos que

$$\int_0^L z_xz_{tx}dx \quad = \quad z_x(L,t)z_t(L,t) - z_x(0,t)z_t(0,t) - \int_0^L z_{xx}z_tdx.$$

Assim,

$$\int_0^L z_xz_{tx}dx = -\int_0^L z_{xx}z_tdx. \qquad (2.32)$$

De (2.31) e (2.32) segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2\mu}H^2(t)\right) &= H(t)\left(-\int_0^L z_{xx}z_tdx+\int_0^L k(x)z_tdx\right) \qquad (2.33)\\ &= -\int_0^L H(t)(z_{xx}-k(x))z_t)dx. \qquad (2.34)\end{aligned}$$

De forma inteiramente análoga, concluí-se que

VI)

$$\int_0^L z_t\theta_{xxt}dx = \int_0^L z_{txx}\theta_tdx.$$

Portanto, subtraindo VI de X temos que

$$\int_0^L z_t\theta_{xxt}dx - \int_0^L \theta_tz_{xxt}dx = 0. \qquad (2.35)$$

VII)

$$\alpha\int_0^L \theta_t\theta_{tt}dx = \frac{\alpha}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(\theta_t^2)dx. \qquad (2.36)$$

VIII)

$$\int_0^L \theta_t\theta_tdx = \int_0^L \theta_t^2dx. \qquad (2.37)$$

IX)

$$-\lambda\int_0^L \theta_t\theta_{xx}dx = \frac{\lambda}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(\theta_x^2)dx. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.25), (2.28), (2.29), (2.30), (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38) na identidade (2.24) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left(z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{xt}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2\right)dx + \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2\mu}H^2(t)\right) = 0. \tag{2.39}$$

Definindo

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{xt}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2\right)dx,$$

e

$$E(t) = E_0(t) + \frac{L}{2\mu}H^2(t), \tag{2.40}$$

tem-se, da equação (2.39), que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L \theta_t^2 dx \leqslant 0. \tag{2.41}$$

Integrando (2.41) em $(0,t)$, $t < T_{max}$ tem-se,

$$E(t) \leqslant E(0).$$

Portanto,

$$E_0(t) + \frac{L}{2\mu}H^2(t) = E(t) \leq E(0) \Rightarrow E_0(t) \leq E(0),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_0^L (z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{xt}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2)dx \leq E(0).$$

Consequentemente, têm-se as seguintes desigualdades

$$(i)\quad \frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xt}^2]dx \leqslant E(0) \Rightarrow \|z_t\|^2 + \|z_{tx}\|^2 \leqslant 2E(0),$$

$$(ii)\quad \frac{1}{2}\int_0^L z_{xx}^2 dx \leqslant E(0) \Rightarrow \int_0^L z_{xx}^2 dx \leqslant 2E(0) \Rightarrow \|z_{xx}\|^2 \leqslant 2E(0),$$

$$(iii)\quad \frac{\alpha}{2}\int_0^L \theta_t^2 dx \leqslant E(0) \Rightarrow \alpha\|\theta_t\|^2 \leqslant 2E(0),$$

$$(iv)\quad \frac{\lambda}{2}\int_0^L \theta_x^2 dx \leqslant E(0) \Rightarrow \lambda\|\theta_x\|^2 \leqslant 2E(0).$$

Usando $(i), (ii), (iii)$ e (iv), temos que $\|U\|_{\mathcal{H}} = \|(z, z_t, \theta, \theta_t)^T\|_{\mathcal{H}} = \|z_{xx}\|^2 + \|z_{tx}\|^2 + \|z_t\|^2 + \lambda\|\theta_x\|^2 + \alpha\|\theta_t\|^2$, é limitado por $2E(0)$, conforme $i), ii), iii)$ e $iv)$.
Observemos ainda que

$$\begin{aligned}
E(t) &\leqslant E(0) = E_0(0) + \frac{L}{2\mu}H^2(0)\\
E(t) &\leqslant E_0(0) + \frac{L}{2\mu}H^2(0)\\
E_0(t) + \frac{L}{2\mu}H^2(t) &\leqslant E_0(0) + \frac{L}{2\mu}H^2(0)\\
H^2(t) &\leqslant \frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\\
H(t) &\leqslant \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall\ 0 \leqslant t \leqslant T < T_{max}. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Para obter estimativas de ordem superior, derivamos as duas equações do modelo (9) em t e agrupamos os termos de forma adequada. Obtemos que

$$\begin{cases}
z_{ttt} + z_{xxxxt} - z_{xxttt} - H(t)z_{xxt} + \theta_{xxtt} - [z_{xx} - k(x)]\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt}dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_t dx\right] = 0,\\
\alpha\theta_{ttt} + \theta_{tt} - \lambda\theta_{xxt} - z_{xxtt} = 0.
\end{cases} \qquad (2.43)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.43) por z_{tt} e a segunda equação de (2.43) por θ_{tt} e somando o resultado obtido obtêm-se

$$\begin{aligned}
z_{tt}z_{ttt} &+ z_{tt}z_{xxxxt} - z_{tt}z_{xxttt} - H(t)z_{tt}z_{xxt} + z_{tt}\theta_{xxtt} - z_{tt}[z_{xx} - k(x)]\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt}dx\right.\\
&+ \left.\frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_t dx\right] + \alpha\theta_{tt}\theta_{ttt} + \theta_{tt}^2 - \lambda\theta_{tt}\theta_{xxt} - \theta_{tt}z_{xxtt} = 0.
\end{aligned}$$

Integrando em $(0, L)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_{tt}z_{ttt}dx &+ \int_0^L z_{tt}z_{xxxxt}dx - \int_0^L z_{tt}z_{xxttt}dx - H(t)\int_0^L z_{tt}z_{xxt}dx + \int_0^L z_{tt}\theta_{xxtt}dx\\
&- \left(\int_0^L z_{tt}[z_{xx} - k(x)]dx\right)\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt}dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_t dx\right]\\
&+ \alpha\int_0^L \theta_{tt}\theta_{ttt}dx + \int_0^L \theta_{tt}^2 dx - \lambda\int_0^L \theta_{tt}\theta_{xxt}dx - \int_0^L \theta_{tt}z_{xxtt}dx = 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L z_{tt}^2 dx + \int_0^L z_{xxt}^2 + \int_0^L z_{xtt}^2 dx + \alpha\int_0^L \theta_{tt}^2 dx + \lambda\int_0^L \theta_{xt}^2 dx\right) + \int_0^L \theta_{tt}^2 dx\\
=& \int_0^L \theta_{tt}z_{xxtt}dx + H(t)\int_0^L z_{tt}z_{xxt}dx - \int_0^L z_{tt}\theta_{xxtt}dx\\
+& \int_0^L z_{tt}[z_{xx} - k(x)]dx\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt}dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_t dx\right].
\end{aligned}$$

Seja

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [z_{tt}^2 + z_{xxt}^2 + z_{xtt}^2 + \alpha\theta_{tt}^2 + \lambda\theta_{xt}^2]dx.$$

Derivando $E_1(t)$ em t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} &+ \int_0^L \theta_{tt}^2 dx = \underbrace{\int_0^L \theta_{tt} z_{xxtt} dx}_{XI} + \underbrace{H(t)\int_0^L z_{tt} z_{xxt} dx}_{XII} - \underbrace{\int_0^L z_{tt}\theta_{xxtt} dx}_{XIII} \\ &+ \underbrace{\int_0^L z_{tt} z_{xx} dx}_{XIV}\left[\underbrace{\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt} dx}_{XV} + \underbrace{\frac{\mu}{L}\int_0^L k(x) z_t dx}_{XVI}\right] \\ &- \underbrace{\int_0^L z_{tt} k(x) dx}_{XVII}\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt} dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x) z_t dx\right]. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Usando a desigualdade de Young e (2.42), obtemos.

Em (XI-XIII)

$$\int_0^L \theta_{tt} z_{xxtt} dx - \int_0^L z_{tt}\theta_{xxtt} dx = 0.$$

Em (XII),

$$\begin{aligned}\left|H(t)\int_0^L z_{tt} z_{xxt} dx\right| &\leqslant H(t)\int_0^L |z_{tt} z_{xxt}| dx \leqslant \frac{1}{2} H(t)\left[\int_0^L |z_{xt}|^2 dx + \int_0^L |z_{xtt}|^2 dx\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}} (E(0) + \|z_{xtt}\|^2).\end{aligned}$$

Em (XIV),

$$\begin{aligned}\left|\int_0^L z_{tt} z_{xx} dx\right| &\leqslant \int_0^L |z_{tt} z_{xx}| dx \leqslant \frac{1}{2}\left[\|z_{tt}\|^2 + \|z_{xx}\|^2\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\|z_{tt}\|^2 + 2E(0)\right].\end{aligned}$$

Em (XV),

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mu}{L}\int_0^L z_x z_{xt} dx\right| &= \left|\frac{\mu}{L}\int_0^L z_{xx} z_t dx\right| \leq \frac{\mu}{L}\int_0^L |z_{xx} z_t| dx \\ &\leqslant \frac{\mu}{L}\|z_{xx}\|\|z_t\| \leqslant \frac{4\mu}{L}E^2(0).\end{aligned}$$

Em (XVI),

$$\left|\frac{\mu}{L}\int_0^L k(x) z_t dx\right| \leqslant \frac{\mu}{L}\int_0^L |k(x) z_t| dx \leqslant \frac{\mu}{L}\|k(x)\|\|z_t\| \leqslant \frac{2\mu}{L}\|k(x)\| E(0).$$

Em (XVII),

$$\left|\int_0^L z_{tt}k(x)dx\right| \leqslant \int_0^L |z_{tt}k(x)|dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\|z_{tt}\|^2 + \|k(x)\|^2\right).$$

Segue de (2.44) e das estimativas obtidas em $XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI$ e $XVII$ que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} &\leqslant \left|H(t)\int_0^L z_{tt}z_{xxt}dx + \int_0^L z_{tt}z_{xx}dx\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_xz_{xt}dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_tdx\right]\right.\\
&- \left.\int_0^L z_{tt}k(x)dx\left[\frac{\mu}{L}\int_0^L z_xz_{xt}dx + \frac{\mu}{L}\int_0^L k(x)z_tdx\right]\right|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}\left(E(0) + \|z_{xtt}\|^2\right)\\
&+ \frac{1}{2}[\|z_{tt}\|^2 + 2E(0)]\left[\frac{4\mu}{L}E^2(0) + \frac{2\mu}{L}\|k(x)\|E(0)\right]\\
&+ \frac{1}{2}(\|z_{tt}\|^2 + \|k(x)\|^2)\left[\frac{4\mu}{L}E^2(0) + \frac{2\mu}{L}\|k(x)\|E(0)\right]. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Sejam

$$c_1 = \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$c_2 = \frac{4\mu}{L}E^2(0) + \frac{2\mu}{L}\|k(x)\|E(0).$$

Segue, de (2.45), que

$$\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} \leqslant \frac{1}{2}c_1E(0) + \frac{1}{2}c_1\|z_{xtt}\|^2 + \frac{1}{2}\|z_{tt}\|^2c_2 + E(0)c_2 + \frac{1}{2}\|z_{tt}\|^2c_2 + \frac{1}{2}\|k(x)\|^2c_2,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}c_1E(0) + E(0)c_2 + \frac{1}{2}\|k(x)\|^2c_2}_{XVIII} + \frac{1}{2}c_1\|z_{xtt}\|^2 + \|z_{tt}\|^2c_2. \qquad (2.46)$$

Em $XVIII$, sejam $c_a = \frac{1}{2}c_1E(0) + E(0)c_2 + \frac{1}{2}\|k(x)\|^2c_2$ e consideremos $C_0 = max\{c_a, c_1, c_2\}$. Com esta notação, segue, de (2.46), que

$$\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} \leqslant C_0 + \frac{1}{2}\|z_{tt}\|^2C_0 + \frac{1}{2}C_0\|z_{xtt}\|^2,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} &\leqslant C_0 + \frac{1}{2}C_0(\|z_{tt}\|^2 + \|z_{xxt}\|^2 + \|z_{xtt}\|^2 + \alpha\|\theta_{tt}\|^2 + \lambda\|\theta_{xt}\|^2)\\
&\leqslant C_0 + \frac{1}{2}C_0E_1(t) \leqslant C_0 + C_0E_1(t), \forall\ 0 \leqslant t \leqslant T_1 \leqslant T_{max}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, lema (1.6), segue-se que

$$E_1(t) \leqslant E_1(0)e^{C_0t} \leqslant const\ e^{C_0T_1}, \forall\ 0 \leqslant t \leqslant T_1 < T_{max}. \qquad (2.47)$$

Segue, de (2.47), que:

$$\begin{aligned} \|z_{tt}\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C(E(0), E_1(0), T_{max}), \\ \|z_t\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} &\leq C(E(0), E_1(0), T_{max}), \\ \|\theta_t\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C(E(0), E_1(0), T_{max}), \\ \|\theta_{tt}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(E(0), E_1(0), T_{max}), \end{aligned} \tag{2.48}$$

isto é, limitados por uma constante positiva dependendo de $E(0)$ e $E_1(0)$ em $0 \leqslant t \leqslant T_1 < T_{max}$.

Resta mostrar que $\|z_{xx}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq cte$ e $\|\theta_t\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq cte$. Para isso, observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} &\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} + \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{txx}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 2\left(\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right. \\ &+ \left.\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta_{txx}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leqslant 2\left(\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}z\right)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_t\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leqslant 2\left(\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(-I + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + I\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}z\right)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(-I + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + I\right)\theta_t\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leqslant 2\left(\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(-I + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}z\right) + \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}z\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right. \\ &+ \left.\left\|\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(-I + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\theta_t + \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_t\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leqslant 2\left(\left\|-z_{xx} + \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|-\theta_t + \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_t\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &\leqslant 4\left[\|z_{xx}\|^2_{H_0^1(\Omega)} + D\|z_{xx}\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\theta_t\|^2_{H_0^1(\Omega)} + D\|\theta_t\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right]. \end{aligned}$$

Como

$$\|z_{xx}\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|z_{xx}\|^2 + \|z_{xxx}\|^2 \tag{2.49}$$

$$\leqslant 2E(0) + \underbrace{\|z_{xxx}\|^2}_{XIX}, \tag{2.50}$$

vamos estimar XIX. Multiplicando a primeira equação de (9) por $-z_{xx}$ e em seguida integrando em (0,L), obtemos

$$\begin{aligned} -z_{xx}z_{tt} - z_{xx}z_{xxxx} + z_{xx}z_{xxtt} &= -z_{xx}^2 H(t) + z_{xx}k(x)H(t) + z_{xx}\theta_{xxt} \\ -\int_0^L z_{xx}z_{tt}dx - \int_0^L z_{xx}z_{xxxx}dx + \int_0^L z_{xx}z_{xxtt}dx &= -\int_0^L z_{xx}^2 H(t)dx + \int_0^L z_{xx}k(x)H(t)dx \\ &+ \int_0^L z_{xx}\theta_{xxt}dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-\int_0^L z_{xx}z_{xxxx}dx = \int_0^L z_{xx}z_{tt}dx - \int_0^L z_{xx}z_{xxtt}dx - H(t)\int_0^L [z_{xx}^2 - z_{xx}k(x)]dx + \int_0^L z_{xx}\theta_{xx}dx.$$

Nota-se ainda que,

$$-\int_0^L z_{xx}z_{xxxx}dx = \int_0^L z_{xxx}z_{xxx}dx = \int_0^L z_{xxx}^2 dx,$$

portanto,

$$\int_0^L |z_{xxx}|^2 dx \leqslant \int_0^L |z_{xx}z_{tt}|dx + \left|\int_0^L z_{xx}z_{xxtt}dx\right| + H(t)\int_0^L |z_{xx}^2 - z_{xx}k(x)|dx + \left|\int_0^L z_{xx}\theta_{xxt}dx\right|.$$

Logo, para algum $d > 0$, a ser escolhido posteriormente, temos, observando que

$$0 \leq (a - d^2b)^2 = a^2 - 2ad^2b + d^4b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2d^2}a^2 + \frac{d^2b^2}{2},$$

segue:

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^L |z_{xx}z_{tt}|dx &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |z_{tt}|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\|z_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}\|z_{tt}\|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}(2E(0) + C), \end{aligned} \tag{2.51}$$

onde C é uma constante positiva obtida em (2.48).

(b)

$$\begin{aligned} \left|\int_0^L z_{xx}z_{xxtt}dx\right| &\leqslant \int_0^L |z_{xxx}z_{xtt}|dx \leqslant \frac{1}{2d^2}\int_0^L |z_{xxx}|^2 dx + \frac{d^2}{2}\int_0^L |z_{xtt}|^2 dx \\ &\leqslant \frac{1}{2d^2}\|z_{xxx}\|^2 + \frac{d^2}{2}\|z_{xtt}\|^2 \leqslant \frac{1}{2d^2}\|z_{xxx}\|^2 + \frac{d^2}{2}C, \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde C é uma constante positiva obtida em (2.48).

(c)

$$\begin{aligned} H(t)\int_0^L |z_{xx}^2 - z_{xx}k(x)|dx &\leqslant \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \int_0^L |z_{xx}k(x)|dx\right) \\ &\leqslant \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}} (\|z_{xx}\|^2 + \|z_{xx}\|\|k(x)\|) \\ &\leqslant \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0) + H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}} (2E(0) + 2E(0)\|k(x)\|). \end{aligned} \tag{2.53}$$

(d)

$$\begin{aligned} \left|\int_0^L z_{xx}\theta_{xxt}dx\right| &\leqslant \int_0^L |z_{xxx}\theta_{xt}|dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^L |z_{xxx}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\theta_{xt}|^2 dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|z_{xxx}\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_{xt}\|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|z_{xxx}\|^2 + \frac{C}{2}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde C é uma constante positiva obtida em (2.48).

Assim, de (2.51) - (2.54),

$$\begin{aligned}\int_0^L |z_{xxx}|^2 dx &\leqslant \left(\frac{2\mu}{L}E_0(0)+H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}(2E(0)+2E(0)\|k(x)\|)+\frac{1}{2}\|z_{xxx}\|^2+\frac{C}{2}\\ &+ \frac{1}{2}(2E(0)+C)+\frac{1}{2d^2}\|z_{xxx}\|^2+\frac{d^2}{2}C,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{d^2}\right)\int_0^L |z_{xxx}|^2 dx &\leqslant 2\left(\frac{2\mu}{L}E_0(0)+H^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}(2E(0)+2E(0)\|k(x)\|)\\ &+ 2C+2E(0)+d^2C. \qquad (2.55)\end{aligned}$$

Escolhendo adequadamente $d > 1$, em (2.55) conclui-se que $\|z_{xx}\|^2_{H_0^1}$ é limitada para todo $0 \leqslant t < T_{max}$.

Para limitar $\|\theta_{xx}\|^2$, multiplicamos a segunda equação de (9) por $-\theta_{xx}$, isto é,

$$-\alpha\theta_{xx}\theta_{tt}-\theta_{xx}\theta_t+\lambda\theta_{xx}^2+\theta_{xx}z_{xxt}=0.$$

Integrando em $(0, L)$ a expressão acima, segue que

$$-\alpha\int_0^L \theta_{xx}\theta_{tt}dx-\int_0^L \theta_{xx}\theta_t dx+\lambda\int_0^L \theta_{xx}^2 dx+\int_0^L \theta_{xx}z_{xxt}dx=0,$$

ou seja,

$$\lambda\int_0^L \theta_{xx}^2 dx=\alpha\int_0^L \theta_{xx}\theta_{tt}dx+\int_0^L \theta_{xx}\theta_t dx-\int_0^L \theta_{xx}z_{xxt}dx.$$

Observemos que, para $d > 0$,

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^L |\theta_{xx}|^2 dx &\leqslant \alpha\int_0^L |\theta_{xx}\theta_{tt}|dx+\int_0^L |\theta_{xx}\theta_t|dx+\int_0^L |\theta_{xx}z_{xxt}|dx\\ &\leqslant \alpha\left(\frac{1}{2d^2}\|\theta_{xx}\|^2+\frac{d^2}{2}\|\theta_{tt}\|^2\right)+\frac{1}{2d^2}\|\theta_{xx}\|^2\\ &+ \frac{d^2}{2}\|\theta_t\|^2+\frac{1}{2d^2}\|\theta_{xx}\|^2+\frac{d^2}{2}\|z_{xxt}\|^2\\ &= \left(\frac{\alpha+2}{2d^2}\right)\|\theta_{xx}\|^2+\frac{\alpha d^2}{2}\|\theta_{tt}\|^2+\frac{d^2}{2}\|\theta_t\|^2+\frac{d^2}{2}\|z_{xxt}\|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\lambda d^2-(\alpha+2)}{2d^2}\right)\|\theta_{xx}\|^2 &\leqslant \frac{\alpha d^2}{2}\|\theta_{tt}\|^2+\frac{d^2}{2}\|\theta_t\|^2+\frac{d^2}{2}\|z_{xxt}\|^2\\ &\leqslant \frac{\alpha d^2}{2}C+d^2C, \qquad (2.56)\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que limita $\|\theta_{tt}\|^2$, $\|\theta_t\|^2$ e $\|z_{xxt}\|^2$. Escolhendo $d > \sqrt{\frac{\alpha+2}{2\lambda}}$, segue que $\|\theta_{xx}\|^2$ é limitada, para $0 \leqslant t < T_{max}$. Isso conclui a prova de que $\|AU\|_{\mathcal{H}}$ é limitado, para $0 \leqslant t < T_{max}$.

Para provar a unicidade da solução, observamos inicialmente que

$$\|z_{xx}\|^2 + \|z_{tx}\|^2 + \|z_t\|^2 + \lambda\|\theta_x\|^2 + \alpha\|\theta_t\|^2 \leq C, \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.57}$$

Suponha-se que o modelo (9) tenha duas soluções (z_1, θ_1) e (z_2, θ_2). Logo,

$$\begin{cases} z_{1tt} + z_{1xxxx} - z_{1xxtt} = H_1(t)z_{1xx} - k(x)H_1(t) - \theta_{1xxt}, \\ \alpha\theta_{1tt} + \theta_{1t} - \lambda\theta_{1xx} - z_{1xxt} = 0, \end{cases} \tag{2.58}$$

onde

$$H_1(t) = \left(\int_0^L (z_{1x}^2 + 2k(x)z_1)dx\right)\frac{\mu}{2L},$$

$$\begin{gathered} z_1(x,0) = z_0, \quad \theta_1(x,0) = \theta_0, \\ z_{1t}(x,0) = z_1^{(1)}, \quad \theta_{1t}(x,0) = \theta_1^{(1)}, \\ z_1(0,t) = 0, \quad z_{1xx}(0,t) = 0, \\ z_1(L,t) = 0, \quad z_{1xx}(L,t) = 0 \end{gathered}$$

e

$$\begin{cases} z_{2tt} + z_{2xxxx} - z_{2xxtt} = H_2(t)z_{2xx} - k(x)H_2(t) - \theta_{2xxt}, \\ \alpha\theta_{2tt} + \theta_{2t} - \lambda\theta_{2xx} - z_{2xxt} = 0, \end{cases} \tag{2.59}$$

onde

$$H_2(t) = \left(\int_0^L (z_{2x}^2 + 2k(x)z_2)dx\right)\frac{\mu}{2L},$$

$$\begin{gathered} z_2(x,0) = z_0, \quad \theta_2(x,0) = \theta_0, \\ z_{2t}(x,0) = z_1^{(1)}, \quad \theta_{2t}(x,0) = \theta_1^{(1)}, \\ z_2(0,t) = 0, \quad z_{2xx}(0,t) = 0, \\ z_2(L,t) = 0, \quad z_{2xx}(L,t) = 0. \end{gathered}$$

Seja $(z, \theta) = (z_1 - z_2, \theta_1 - \theta_2)$. De (2.58) e (2.59), temos que (z, θ) satisfaz

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = H_1(t)z_{1xx} - H_2 z_{2xx} - k(x)\left[H_1(t) - H_2(t)\right] - \theta_{xxt}, \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{2.60}$$

onde

$$
\begin{aligned}
z(x,0)=0, &\quad \theta(x,0)=0,\\
z_t(x,0)=0, &\quad \theta_t(x,0)=0,\\
z(0,t)=0, &\quad z_{xx}(0,t)=0,\\
z(L,t)=0, &\quad z_{xx}(L,t)=0.
\end{aligned}
$$

No sistema (2.60), multiplica-se por z_t a primeira equação e por θ_t a segunda equação. Obtemos, integrando o resultado em $(0,L)$ que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L z_t z_{tt}dx + \int_0^L z_t z_{xxxx}dx - \int_0^L z_t z_{xxtt}dx = \int_0^L z_t H_1(t) z_{1xx}dx - \int_0^L z_t H_2 z_{2xx}dx\\
- &\quad [H_1(t)-H_2(t)]\int_0^L z_t k(x)dx - \int_0^L z_t\theta_{xxt}dx
\end{aligned}
$$

e

$$
\alpha\int_0^L \theta_t\theta_{tt}dx + \int_0^L \theta_t^2 dx - \lambda\int_0^L \theta_t\theta_{xx}dx - \int_0^L \theta_t z_{xxt}dx = 0,
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_t^2)dx + \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_{xx}^2)dx + \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_{tx}^2)dx = \int_0^L z_t H_1(t) z_{1xx}dx - \int_0^L z_t H_2 z_{2xx}dx\\
- &\quad [H_1(t)-H_2(t)]\int_0^L z_t k(x)dx + \int_0^L z_{tx}\theta_{xt}dx
\end{aligned}
$$

e

$$
\alpha\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\theta_t^2)dx + \int_0^L \theta_t^2 dx + \lambda\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\theta_x^2)dx + \int_0^L \theta_{tx}z_{xt}dx = 0.
$$

Somando as duas últimas identidades, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{tx}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2]dx\right] + \int_0^L \theta_t^2 dx\\
= &\underbrace{\int_0^L z_t H_1(t) z_{1xx}dx - \int_0^L z_t H_2(t) z_{2xx}dx - (H_1(t)-H_2(t))\int_0^L z_t k(x)dx.}_{I_1} \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

Reagrupando os termos convenientemente temos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [H_1(t)-H_2(t)]\int_0^L z_t(z_{1xx}-z_{2xx})dx + H_1(t)\int_0^L z_t z_{2xx}dx + H_2(t)\int_0^L z_t z_{txx}dx\\
&- \quad 2H_2(t)\int_0^L z_t z_{2xx}dx - (H_1(t)-H_2(t))\int_0^L z_t k(x)dx.
\end{aligned}
$$

Segue das definições de $H_1(t)$ e $H_2(t)$ que

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{\mu}{2L}\left[\int_0^L z_x(z_{1x}+z_{2x})dx\int_0^L z_t z_{xx}dx + 2\int_0^L k(x)zdx\int_0^L z_t z_{xx}dx\right.\\
&+ \int_0^L z_t z_{2xx}dx\int_0^L z_x(z_{1x}+z_{2x})dx + 2\int_0^L z_t z_{2xx}dx\int_0^L k(x)zdx\\
&+ \int_0^L z_{2x}^2 + 2k(x)z_2dx\int_0^L z_t z_{xx}dx - \int_0^L z_x(z_{1x}+z_{2x})dx\int_0^L z_t k(x)dx\\
&- \left. 2\int_0^L k(x)zdx\int_0^L z_t k(x)dx\right].
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \frac{\mu}{2L}\Big[\|z_x\|\|z_{1x}+z_{2x}\|\|z_t\|\|z_{xx}\| + 2\|k(x)\|\|z\|\|z_t\|\|z_{xx}\| + \|z_t\|\|z_{2xx}\|\|z_x\|\|z_{1x}+z_{2x}\| \\ &+ 2\|z_t\|\|z_{2xx}\|\|k(x)\|\|z\| + \|z_{2x}^2 + 2k(x)z_2\|\|z_t\|\|z_{xx}\| + \|z_x\|\|z_{1x}+z_{2x}\|\|z_t\|\|k(x)\| \\ &+ \|k(x)\|\|z\|\|z_t\|\|k(x)\|\Big] \\ &\leq \frac{\mu}{2L}\Big[\|z\|_{H^2}^2\left(\|z_{1x}\|+\|z_{2x}\|\right)\|z_t\| + 2\|k(x)\|\|z_t\|\|z\|_{H^2}^2 + \|z\|_{H^2}\|z_t\|\|z_{2xx}\|\left(\|z_{1x}\|+\|z_{2x}\|\right) \\ &+ 2\|z_{2xx}\|\|k(x)\|\|z_t\|\|z\|_{H^2} + \left(\|z_{2x}\|^2 + 2\|k(x)\|\|z_2\|\right)\|z_t\|\|z\|_{H^2} \\ &+ \left(\|z_{1x}\|+\|z_{2x}\|\right)\|k(x)\|\|z_t\|\|z\|_{H^2} + \|k(x)\|^2\|z_t\|\|z\|_{H^2}\Big]. \end{aligned}$$

Visto que (z_1,θ_1) e (z_2,θ_2) são soluções do sistema (2.58) e (2.59), respectivamente, tem-se que, (z_1,θ_1) e (z_2,θ_2) satisfazem a desigualdade descrita em (2.57). Logo

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_{I_1}\|z\|_{H^2}^2 + C_{I_2}\|z\|_{H^2}^2 + C_{I_3}\|z\|_{H^2}\|z_t\| + C_{I_4}\|z\|_{H^2}\|z_t\| + C_{I_5}\|z\|_{H^2}\|z_t\| + C_{I_6}\|z\|_{H^2}\|z_t\| \\ &+ C_{I_7}\|z\|_{H^2}\|z_t\| \\ &\leq C_{I_8}\|z\|_{H^2}^2 + C_{I_9}\left(\|z\|_{H^2}^2 + \|z_t\|^2\right) \\ &\leq C_{I_9}\|z_t\|^2 + C_{I_{10}}\|z\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

Segue, de (2.61), que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{tx}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2]dx\right] + \int_0^L \theta_t^2 dx \leq C_{I_9}\|z_t\|^2 + C_{I_{10}}\|z\|_{H^2}^2,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{tx}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2]dx\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L z^2 + \theta^2 dx\right] &\leq C_{I_9}\|z_t\|^2 + C_{I_{10}}\|z\|_{H^2}^2 \\ &+ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L z^2 + \theta^2 dx\right]. \end{aligned}$$

Seja $J(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{tx}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2 dx + z^2 + \theta^2]dx$. Segue, da última desigualdade, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[J(x,t)] &\leq C_{I_9}\|z_t\|^2 + C_{I_{10}}\|z\|_{H^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\alpha}{2\alpha}\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L z^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L z_t^2 dx \\ &\leq C_{I_{11}}\left(\|z_t\|^2 + \|z\|_{H^2}^2 + \|\theta\|^2 + \alpha\|\theta_t\|^2\right) \\ &\leq C_{I_{12}} J(x,t). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, (1.6), segue que

$$J(x,t) \leq \underbrace{J(x,0)}_{=0} e^{\int_0^t C_{I_{11}} ds} \Rightarrow J(x,t) = 0.$$

Sendo assim, conclui-se que

$$\theta^2 = 0 \Rightarrow (\theta_1 - \theta_2)^2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

e

$$z^2 = 0 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2,$$

o que mostra a unicidade da solução global para o modelo (9). Isso conclui a prova do teorema (2.2). ■

Capítulo 3

Estabilidade da Solução

Neste capítulo, vamos mostrar o decaimento exponencial da energia total associada ao sistema (9) definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [z_t^2 + z_{xx}^2 + z_{xt}^2 + \alpha\theta_t^2 + \lambda\theta_x^2]dx + \frac{L}{2\mu}H^2(t).$$

Para isso construiremos um funcional $H_\epsilon(t)$ que é uma pertubação de $E(t)$. Tal funcional $H_\epsilon(t)$ será obtido através de técnicas multiplicativas que serão mostradas nos seguintes lemas.

3.1 Lemas preliminares

Lema 3.1 *Seja $U = (z, z_t, \theta, \theta_t)$ a solução do problema* (9)*, obtida no teorema* (2.2)*. Seja*

$$J(t) = \int_0^L [zz_t + z_x z_{xt} + \alpha\theta\theta_t]dx. \tag{3.1}$$

Então, existe $C_1 = C_1(k)$ tal que $0 < C_1 < \frac{1}{2}$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) &\leq (-\frac{1}{2} + C_1)\int_0^L z_{xx}^2 dx - \frac{\lambda}{4}\int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{H^2(t)}{2c_0} + \left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\int_0^L z_{xt}^2 dx \\ &+ \left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\int_0^L \theta_t dx, \forall\ t \geq 0. \end{aligned}$$

As constantes $\lambda, c_0 = \frac{\mu}{2L}, \alpha$ e λ_1 são todas positivas.

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (9) por z, a segunda equação de (9) por θ, integrando o resultado obtido em $(0, L)$ e fazendo a soma obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^L zz_{tt}dx + \int_0^L zz_{xxxx}dx - \int_0^L zz_{xxtt}dx - \int_0^L zz_{xx}H(t)dx + \int_0^L zk(x)H(t)dx \\ &+ \int_0^L z\theta_{xxt}dx + \alpha\int_0^L \theta\theta_{tt}dx + \int_0^L \theta\theta_t dx - \lambda\int_0^L \theta\theta_{xx}dx - \int_0^L \theta z_{xxt}dx = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^L zz_{tt}dx &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^L zz_t dx\right) - \int_0^L z_t^2 dx, && (3.3)\\ \alpha\int_0^L \theta\theta_{tt}dx &= \frac{d}{dt}\left(\alpha\int_0^L \theta\theta_t dx\right) - \alpha\int_0^L \theta_t^2 dx, && (3.4)\\ \int_0^L z_x z_{xtt}dx &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^L z_x z_{xt} dx\right) - \int_0^L z_{xt}^2 dx. && (3.5)\end{aligned}$$

Combinando adequadamente as expressões de (3.1),(3.2),(3.3), (3.4) e (3.5) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &= \int_0^L z_t^2 dx - \int_0^L z_{xx}^2 dx + \int_0^L z_{xt}^2 dx - H(t)\int_0^L [z_x^2 + zk(x)]dx\\ &+ \alpha\int_0^L \theta_t^2 dx - \int_0^L \theta\theta_t dx - \lambda\int_0^L \theta_x^2 dx - \int_0^L z\theta_{xxt}dx + \int_0^L \theta z_{xxt}dx.\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &= \int_0^L z_t^2 dx - \int_0^L z_{xx}^2 dx + \int_0^L z_{xt}^2 dx - H(t)\int_0^L [z_x^2 + zk(x)]dx\\ &+\alpha\int_0^L \theta_t^2 dx - \int_0^L \theta\theta_t dx - \lambda\int_0^L \theta_x^2 dx - \int_0^L z_{xx}\theta_t dx - \int_0^L \theta_x z_{xt}dx. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Em seguida, vamos estimar os termos do lado direito da identidade (3.6). Para isso utilizaremos os seguintes resultados.

(i) Desigualdade de Poincaré: $\exists\ \lambda_1^{-1} > 0$ tal que $\forall\ u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se que $\|u\|^2 \leq \lambda_1^{-1}\|u_x\|^2$, onde λ_1^{-1} é uma constante positiva que depende de Ω.

(ii) Existe $C_2 > 0$ tal que se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então $\|u\| \leq C_2\|u_{xx}\|$.

Seja $c_0 = \frac{\mu}{2L}$. Então,

$$\frac{H(t)}{c_0} = \int_0^L [z_x^2 + 2k(x)z]dx,$$

ou seja

$$\frac{H(t)}{c_0} - \int_0^L k(x)dx = \int_0^L [z_x^2 + k(x)z]dx. \qquad (3.7)$$

Logo, usando a identidade (3.7) e a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}-H(t)\left[\int_0^L [z_x^2 + k(x)z]dx\right] &= -H(t)\left[\frac{H(t)}{c_0} - \int_0^L zk(x)dx\right]\\ &= -\frac{H^2(t)}{c_0} + H(t)\int_0^L zk(x)dx\\ &= -\frac{H^2(t)}{c_0} + \int_0^L H(t)zk(x)dx\\ &\leq -\frac{H^2(t)}{c_0} + \frac{1}{2c_0}H^2(t) + \frac{c_0C_3^2}{2}\|z_{xx}\|^2\\ &= -\frac{H^2(t)}{2c_0} + \frac{c_0C_3^2}{2}\|z_{xx}\|^2, \qquad (3.8)\end{aligned}$$

onde $C_3 = C_2\|k(x)\|$. Utilizando a desigualdade de Hölder, temos, pelas observações (i) e (ii), para $\delta > 0, \beta > 0$ e $\gamma > 0$, que

$$\left|-\int_0^L \theta\theta_t dx\right| \leq \int_0^L |\theta\theta_t| dx \leq \frac{\beta}{2\lambda_1}\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2\beta}\int_0^L |\theta_t|^2 dx, \tag{3.9}$$

$$\left|-\int_0^L \theta_x z_{xt} dx\right| \leq \int_0^L |\theta_x z_{xt}| dx \leq \frac{\delta}{2}\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2\delta}\int_0^L |z_{xt}|^2 dx \tag{3.10}$$

e

$$\left|-\int_0^L z_{xx}\theta_t dx\right| \leq \int_0^L |z_{xx}\theta_t| dx \leq \frac{\gamma}{2}\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \frac{1}{2\gamma}\int_0^L |\theta_t|^2 dx. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.8)-(3.11) em (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t) &\leq \int_0^L z_t^2 dx + \left(\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{c_0 C_3^2}{2}\right)\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{2\delta}\right)\int_0^L |z_{xt}|^2 dx \\
&+ \left(\alpha + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma}\right)\int_0^L |\theta_t|^2 dx + \left(\frac{\beta}{2\lambda_1} - \lambda + \frac{\delta}{2}\right)\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{H^2(t)}{2c_0} \\
&\leq \left(\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{c_0 C_3^2}{2}\right)\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\int_0^L |z_{xt}|^2 dx \\
&+ \left(\alpha + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma}\right)\int_0^L |\theta_t|^2 dx + \left(\frac{\beta}{2\lambda_1} - \lambda + \frac{\delta}{2}\right)\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{H^2(t)}{2c_0}
\end{aligned}$$

Considerando $\delta = \lambda, \beta = \frac{\lambda\lambda_1}{2}, \gamma = 1$ e $C_1 = \frac{c_0 C_3^2}{2}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t) &\leq \left(-\frac{1}{2} + C_1\right)\int_0^L |z_{xx}|^2 dx - \frac{\lambda}{4}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{H^2(t)}{2c_0} + \left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\int_0^L |z_{xt}|^2 dx \\
&+ \left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\int_0^L |\theta_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Além disso, para se ter $0 < C_1 < \frac{1}{2}$, deve-se escolher $\|k(x)\| < \frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{1}{c_0}}$ pois,

$$\|k(x)\| < \frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{1}{c_0}} \Rightarrow \|k(x)\|^2 < \frac{1}{C_2^2 c_0} \Rightarrow C_3^2 < \frac{1}{c_0} \Rightarrow C_1 = \frac{C_3^2 c_0}{2} < \frac{1}{2}.$$

■

Lema 3.2 *Com as mesmas hipóteses do lema* (3.1)*, considera-se o funcional*

$$F(t) = \alpha\int_0^L z_t\theta_t dx + \lambda\int_0^L \theta_x z_x dx.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq \gamma_1\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \gamma_2\int_0^L \theta_t^2 dx + \gamma_3\frac{H^2(t)}{4c_0} - \frac{1}{2}\int_0^L |z_{tx}|^2 dx,$$

onde γ_1, γ_2 e γ_3 são constantes positivas adequadas.

Demonstração: Derivando F em t, obtemos

$$\frac{d}{dt}F(t)=\alpha\int_0^L z_{tt}\theta_t dx+\alpha\int_0^L z_t\theta_{tt}dx+\lambda\int_0^L \theta_{xt}z_x dx+\lambda\int_0^L \theta_x z_{xt}dx. \tag{3.12}$$

Do sistema (9), temos que

$$\begin{aligned} z_{tt} &= -\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}+H(t)\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx}-\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} k(x)H(t)\\ &- \left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{xxt}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\alpha\theta_{tt}=-\theta_t+\lambda\theta_{xx}-z_{xxt}. \tag{3.14}$$

Assim, substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12) e realizando algumas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &= -\alpha\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}dx+\alpha H(t)\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx}dx\\ &- \alpha H(t)\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} k(x)dx-\alpha\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{xxt}dx\\ &- \int_0^L z_t\theta_t dx-\int_0^L z_{tx}^2 dx+\lambda\int_0^L\theta_{xt}z_x dx. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dt}F(t)=\sum_{j=1}^{7}I_j(t), \tag{3.15}$$

onde,

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\alpha\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx}dx,\\ I_2(t) &= \alpha H(t)\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx}dx,\\ I_3(t) &= -\alpha H(t)\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} k(x)dx,\\ I_4(t) &= -\alpha\int_0^L\theta_t\left(I-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\theta_{xxt}dx,\\ I_5(t) &= -\int_0^L z_t\theta_t dx,\\ I_6(t) &= \lambda\int_0^L\theta_{xt}z_x dx=-\lambda\int_0^L\theta_t z_{xx}dx \end{aligned}$$

e

$$I_7(t) = -\int_0^L z_{tx}^2 dx.$$

A seguir vamos mojorar os termos $I_j(t), 1 \leq j \leq 6$.

Temos que,

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= -\alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xxxx} dx \\
&= -\alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(z_{xx}) dx \\
&= \alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - I\right)(z_{xx}) dx \\
&= \alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) z_{xx} dx - \alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} dx \\
&= \alpha \int_0^L \theta_t z_{xx} dx - \alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} dx.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1 \cap H^2(\Omega)$$

é um operador limitado pelo lema 1.2. Logo existe $C_4 > 0$ tal que

$$\int_0^L \left| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} \right|^2 dx \leq C_4 \int_0^L |z_{xx}|^2 dx. \tag{3.16}$$

Sendo $\delta > 0$ constante adequada, temos

$$\begin{aligned}
|I_1(t)| &\leq \frac{\alpha^2}{2\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L z_{xx}^2 dx + \frac{\alpha^2 C_4}{2\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\delta}{2C_4} \int_0^L \left| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} \right|^2 dx \\
&\leq \frac{\alpha^2(1 + C_4)}{2\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx + \delta \int_0^L |z_{xx}|^2 dx. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
|I_2(t)| &= \left| \alpha H(t) \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} dx \right| \\
&\leq \frac{\alpha\delta}{2C_4} \int_0^L \left| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} z_{xx} \right|^2 dx + \frac{\alpha C_4}{2\delta} H^2(t) \int_0^L \theta_t^2 dx \\
&\leq \frac{\alpha\delta}{2} \int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \frac{2\alpha C_4 c_0 E(0)}{\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Para algum $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
|I_6(t)| &= |-\lambda \int_0^L \theta_t z_{xx} dx| \\
&\leq \frac{\lambda^2}{2\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\lambda\delta}{2\lambda} \int_0^L |z_{xx}|^2 dx \\
&\leq \frac{\lambda^2}{2\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |z_{xx}|^2 dx. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Para estimar $I_3(t)$, observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
|I_3(t)| &= \left| -\alpha H(t) \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} k(x) dx \right| \\
&\leq \alpha |H(t)| \left(\int_0^L \theta_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \left[\left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} k(x) \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \alpha |H(t)| \left(\int_0^L \theta_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\psi\ |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde $\psi\ = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} k(x)$. Notemos que $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H_2(\Omega)$.
Assim,

$$\begin{aligned}
|I_3(t)| &\leq \frac{\alpha\beta}{2\alpha} H^2(t) + \frac{\alpha^2}{2\beta} \|\psi\ \|^2 \int_0^L \theta_t^2 dx \\
&\leq \frac{\beta}{2} H^2(t) + \frac{\alpha^2}{2\beta} \|\psi\ \|^2 \int_0^L \theta_t^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde β é uma constante positiva.
Ainda

$$\begin{aligned}
|I_4(t)| &= \left| -\alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_{xxt} dx \right| \\
&= \alpha \int_0^L \theta_t^2 dx - \alpha \int_0^L \theta_t \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_t dx \\
&\leq \alpha \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \left| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \theta_t \right|^2 dx \\
&\leq \alpha \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\alpha C_4}{2} \int_0^L |\theta_t|^2 dx \\
&= \alpha \left[\frac{3}{2} + \frac{C_4}{2} \right] \int_0^L \theta_t^2 dx
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_5(t)| &= \left| - \int_0^L z_t \theta_t dx \right| \\
&\leq \frac{\lambda_1}{2} \int_0^L |z_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^L \theta_t^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^L |z_{tx}|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^L \theta_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Substituindo (3.17) - (3.22) em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\leq \frac{\alpha^2(1+C_4)}{2\delta}\int_0^L \theta_t^2 dx + \delta\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2}\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \frac{2\alpha C_4 c_0 E(0)}{\delta}\int_0^L \theta_t^2 dx\\
&+ \frac{\beta}{2}H^2(t) + \frac{\alpha^2}{2\beta}\|\psi\ \|^2\int_0^L \theta_t^2 dx + \alpha\left[\frac{3}{2}+\frac{C_4}{2}\right]\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |z_{xt}|^2 dx\\
&+ \frac{1}{2\lambda_1}\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\lambda^2}{2\delta}\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^L |z_{xx}|^2 dx - \int_0^L z_{xt}^2 dx\\
&= \left(\frac{3}{2}\delta + \frac{\alpha\delta}{2}\right)\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \left[\frac{\alpha^2(1+C_4)}{2\delta} + \frac{2\alpha C_4 c_0 E(0)}{\delta} + \frac{\alpha^2}{2\beta}\|\psi\ \|^2 + \alpha\left(\frac{3}{2}+\frac{C_4}{2}\right)\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{\lambda^2}{2\delta}\right]\int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L z_{xt}^2 dx + \frac{\beta}{2}H^2(t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq \gamma_1\int_0^L |z_{xx}|^2 dx + \gamma_2\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\gamma_3}{4c_0}H^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^L |z_{xt}|^2 dx,$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{3}{2}\delta + \frac{\alpha\delta}{2}\\
\gamma_2 &= \frac{\alpha^2(1+C_4)}{2\delta} + \frac{2\alpha C_4 c_0 E(0)}{\delta} + \frac{\alpha^2}{2\beta}\|\psi\ \|^2 + \alpha\left(\frac{3}{2}+\frac{C_4}{2}\right) + \frac{1}{2\lambda_1} + \frac{\lambda^2}{2\delta}\\
\gamma_3 &= 2c_0\beta,
\end{aligned}$$

com $\delta > 0$ e $\beta > 0$. ■

Lema 3.3 *Consideremos as mesmas hipóteses do lema* (3.1) *e* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno. Definimos o funcional*

$$H_\epsilon(t) = E(t) + G_\epsilon(t),$$

onde $E(t)$ *é dado em* (2.40) *e*

$$G_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{4C_5}J(t) + \epsilon F(t),$$

com $C_5 = 1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}$. *Então,*

a) $\frac{1}{2}E(t) \leq H_\epsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t)$,

b) $\frac{d}{dt}H_\epsilon(t) \leq -\epsilon\widehat{\zeta}E(t)$,

para todo $t \geq 0$ *e* $\widehat{\zeta}$ *a ser determinado.*

Demonstração: Visto que

$$J(t) = \int_0^L [zz_t + z_x z_{xt} + \alpha\theta\theta_t]dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
|J(t)| &= \int_0^L |zz_t|dx + \int_0^L |z_x z_{xt}|dx + \alpha \int_0^L |\theta\theta_t|dx \\
&\leq \|z\|\|z_t\| + \|z_{xx}\|\|z_t\| + \alpha\|\theta\|\|\theta_t\| \\
&\leq C_2\|z_{xx}\|\|z_t\| + \|z_{xx}\|\|z_t\| + \frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda}}\|\theta_x\|\|\theta_t\| \\
&\leq C_2\frac{\|z_{xx}\|^2}{2} + C_2\frac{\|z_t\|^2}{2} + \frac{\|z_{xx}\|^2}{2} + \frac{\|z_t\|^2}{2} + \frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda}}\|\theta_x\|^2 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda}}\|\theta_t\|^2 \\
&\leq C_6\frac{\|z_{xx}\|}{2} + C_6\frac{\|z_t\|^2}{2} + C_6\frac{\|z_{xx}\|^2}{2} + C_6\frac{\|z_t\|^2}{2} + \lambda C_6\frac{\|\theta_x\|^2}{2} + C_6\frac{\|\theta_t\|^2}{2},
\end{aligned}$$

onde $C_6 = C_2 + 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda}}$.
Assim,

$$|J(t)| \leq C_7 E(t),$$

ou ainda,

$$\frac{\epsilon}{4C_5}|J(t)| \leq \frac{\epsilon C_7}{4C_5}E(t).$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}
|F(t)| &= \left|\alpha\int_0^L z_t\theta_t dx + \lambda\int_0^L \theta_x z_x dx\right| \\
&\leq \alpha\|z_t\|\|\theta_t\| + \lambda\|\theta_x\|\|z_x\| \\
&\leq \alpha\|z_t\|\|\theta_t\| + \lambda\sqrt{\lambda_1^{-1}}\|\theta_x\|\|z_{xx}\| \\
&\leq \alpha\frac{\|z_t\|^2}{2} + \alpha\frac{\|\theta_t\|^2}{2} + \lambda\sqrt{\lambda_1^{-1}}\frac{\|\theta_x\|^2}{2} + \lambda\sqrt{\lambda_1^{-1}}\frac{\|z_{xx}\|^2}{2} \\
&\leq C_8\frac{\|z_t\|^2}{2} + \alpha C_8\frac{\|\theta_t\|^2}{2} + \lambda C_8\frac{\|\theta_x\|^2}{2} + C_8\frac{\|z_{xx}\|^2}{2},
\end{aligned}$$

onde $C_8 = \alpha + 1 + \sqrt{\lambda_1^{-1}} + \lambda\sqrt{\lambda_1^{-1}}$.
Assim,

$$|F(t)| \leq C_8 E(t),$$

ou ainda,

$$\epsilon|F(t)| \leq \epsilon C_8 E(t).$$

Logo, tem-se que

$$|G_\epsilon(t)| \leq \frac{\epsilon}{4C_5}|J(t)| + \epsilon|F(t)| \leq \frac{\epsilon C_7}{4C_5}E(t) + \epsilon C_8 E(t) = \epsilon C_9 E(t), \tag{3.23}$$

onde $C_9 = \frac{C_7}{4C_5} + C_8$.
Segue, da última desigualdade, que

$$(1-\epsilon C_9)E(t) \leq G_\epsilon(t) + E(t) = H_\epsilon(t) \leq (1+\epsilon C_9)E(t).$$

Escolhendo $\epsilon \leq \frac{1}{2C_9}$, segue-se o resultado do item a).

A seguir vamos provar o item b). Usando os lemas (3.1),(3.2) e a igualdade (2.41) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_\epsilon(t) &\leq -\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\epsilon}{4C_5}\left[\left(-\frac{1}{2}+C_1\right)\int_0^L z_{xx}^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{H^2(t)}{2c_0} + C_5\int_0^L z_{xt}^2 dx\right.\\
&+ \left.\left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\int_0^L \theta_t^2 dx\right] + \epsilon\left[\gamma_1\int_0^L z_{xx}^2 dx + \gamma_2\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\gamma_3}{4c_0}H^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^L z_{xt}^2 dx\right]\\
&\leq \left[-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4C_5}\left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) + \epsilon\gamma_2\right]\int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{\epsilon\lambda}{8C_5}\int_0^L \theta_x^2 dx - \epsilon\left[\frac{1}{8c_0C_5} - \frac{\gamma_3}{4c_0}\right]H^2(t)\\
&- \epsilon\left[\frac{1}{4C_5}\left(\frac{1}{2}-C_1\right) - \gamma_1\right]\int_0^L z_{xx}^2 dx - \frac{\epsilon}{4}\int_0^L z_{xt}^2 dx. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Observemos que $-\lambda_1\int_0^L z_t^2 dx \geq -\int_0^L z_{xt}^2 dx$. Logo,

$$-\frac{\epsilon}{4}\int_0^L z_{xt}^2 dx = -\frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx \leq -\frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\lambda_1\int_0^L z_t^2 dx. \qquad (3.25)$$

Substituindo (3.25) em (3.24) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_\epsilon(t) &\leq \left[-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4C_5}\left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) + \epsilon\gamma_2\right]\int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{\epsilon\lambda}{8C_5}\int_0^L \theta_x^2 dx - \epsilon\left[\frac{1}{2C_5} - \gamma_3\right]\frac{H^2(t)}{4c_0}\\
&- \epsilon\left[\frac{1}{4C_5}\left(\frac{1}{2}-C_1\right) - \gamma_1\right]\int_0^L z_{xx}^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\lambda_1\int_0^L z_t^2 dx. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{4C_5(3+\alpha)}\left(\frac{1}{2} - C_1\right)$ e $\beta = \frac{1}{8c_0C_5}$, temos que

$$\gamma_1 = \frac{1}{8C_5}\left(\frac{1}{2} - C_1\right), \gamma_3 = \frac{1}{4C_5}$$

e

$$\gamma_2 = \frac{(2+\alpha)C_5}{(1-2C_1)}\left[\alpha^2(1+C_4) + 4\alpha C_4c_0E(0) + \lambda^2\right] + 4\alpha^2c_0C_5\|\psi\|^2 + \frac{\alpha}{2}(3+C_4) + \frac{1}{2\lambda_1}.$$

Com essas escolhas, segue de (3.26) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_\epsilon(t) &\leq \left[-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4C_5}\left(\alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) + \epsilon\gamma_2\right]\int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{\epsilon\lambda}{8C_5}\int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\epsilon}{4C_5}\frac{H^2(t)}{4c_0}\\
&- \epsilon\frac{1}{8C_5}\left(\frac{1}{2}-C_1\right)\int_0^L z_{xx}^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx - \frac{\epsilon\lambda_1}{8}\int_0^L z_t^2 dx \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon < \frac{1}{2\left[\frac{1}{4C_5}\left(\alpha+\frac{1}{\lambda\lambda_1}+\frac{1}{2}\right)+\gamma_2\right]+1}$ segue, de (3.27), que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_\epsilon(t) &\leq -\frac{\epsilon}{2}\int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{\epsilon\lambda}{8C_5}\int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\epsilon}{4C_5}\frac{H^2(t)}{4c_0} - \frac{\epsilon}{8C_5}\left(\frac{1}{2}-C_1\right)\int_0^L z_{xx}^2 dx\\
&- \frac{\epsilon}{8}\int_0^L z_{xt}^2 dx - \frac{\epsilon\lambda_1}{8}\int_0^L z_t^2 dx \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Consideremos

$$0<\widehat{\zeta}<\min\left\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{4C_5},\frac{(1-2C_1)}{8C_5},\frac{1}{4},\frac{\lambda_1}{4}\right\}.$$

Com esta escolha, temos:

$$\frac{d}{dt}H_\epsilon(t)\leq -\epsilon\widehat{\zeta}E(t),$$

provando o item *b*). ■

3.2 Resultado Principal

Teorema 3.1 *Considere a solução global do problema* (9) *obtida do teorema* (2.2). *Então, a energia total do sistema, definida em* (2.40)*, satisfaz*

$$E(t)\leq 3E(0)exp(-\epsilon\widehat{\zeta}t),$$

para todo $t>0$ *e* $0<\epsilon<\widehat{\zeta}$ *onde* $\widehat{\zeta}$ *é a constante encontrada no lema* (3.3).

Demonstração: Tendo em vista o lema (3.3), item *a*), tem-se que

$$H_\epsilon(t)\leq\frac{3}{2}E(t)\Rightarrow -\epsilon\widehat{\zeta}H_\epsilon(t)\geq-\frac{3}{2}\epsilon\widehat{\zeta}E(t).$$

Pelo item *b*),

$$\frac{d}{dt}H_\epsilon(t)\leq -\epsilon\widehat{\zeta}E(t)\leq-\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}H_\epsilon(t),\forall\ t\geq 0,$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}H_\epsilon(t)+\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}H_\epsilon(t)\leq 0.$$

Multiplicando por $e^{\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}H_\epsilon(t)e^{\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}+\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}H_\epsilon(t)e^{\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}\leq 0,$$

isto é

$$\frac{d}{dt}[H_\epsilon(t)e^{\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}]\leq 0.$$

Segue daí, integrando em $(0,t)$ que

$$H_\epsilon(t)\leq H_\epsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t},\forall\ t\geq 0.$$

Novamente, pelo item *a*),

$$\frac{1}{2}E(t)\leq H_\epsilon(t)\leq H_\epsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}.$$

Logo

$$E(t)\leq 2H_\epsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t}\leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\epsilon\widehat{\zeta}t},\forall\ t\geq 0.$$

■

CONCLUSÃO

Ao término desse trabalho, podemos destacar alguns pontos importantes, tais como: para a busca da solução do sistema num espaço funcional adequado, o capítulo 1 dos resultados preliminares foi de grande importância. Nele estava toda a teoria necessária para o seguir os estudos, em destaque os teoremas de Lax-Milgram e de Lumer-Phillipis, sendo eles fundamentais para chegarmos na existência do sistema considerado. No capítulo 2 foi determinada a existência e unicidade de solução do modelo termoelástico considerado. Como o modelo é não linear foi feito um estudo das propriedades da não linearidade específica. Primeiramente, encontrou-se a solução local e através de estimativas a priori prolongou-se essa solução mostrando a existência de uma solução global única. No que segue, o capítulo 3, após encontrarmos a existência e unicidade de solução do modelo, foi feito um estudo para analisar o comportamento assintótico da solução.

Para trabalhos futuros, destaca-se o estudo do modelo de termoelasticidade, similar ao estudado, conforme descrito abaixo

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} - z_{xxtt} = H(t)z_{xx} - k(x)H(t) - \theta_{xxt}, \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{3.29}$$

com condições de fronteira

$$z(0,t) = z(L,t) = z_x(0,t) = z_x(L,t) = 0$$

e dados iniciais adequados.

Além disso, pretende-se provar que a solução (z,θ) do modelo (9) é limite quando $\epsilon \to 0$ do seguinte modelo de Marguerre-Vlasov

$$\begin{cases} \epsilon u_{tt} = \mu_0 \left[u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + k(x)w\right]_x - \epsilon^\alpha u_t, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = [f(u,w)]_x - g(u,w)] - \theta_{xxt} \\ \alpha\theta_{tt} + \theta_t - \lambda\theta_{xx} - z_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

onde $u = u^\epsilon(x,t); \theta = \theta^\epsilon(x,t), w = w^\epsilon(x,t), \alpha, f, g$ são definidos anteriormente, com condições de fronteira

$$
\begin{aligned}
u^\epsilon(o,t) &= u^\epsilon(L,t) = 0,\\
w^\epsilon(0,t) &= w^\epsilon(L,t) = \theta^\epsilon(0,t) = \theta^\epsilon(L,t) = 0,\\
w^\epsilon_{xx}(0,t) &= w^\epsilon_{xx}(L,t) = 0,
\end{aligned}
$$

e condições iniciais,

$$
\begin{aligned}
u^\epsilon(x,0) &= u^\epsilon_0(x),\\
u^\epsilon_t(x,0) &= u^\epsilon_1(x),\\
w^\epsilon(x,0) &= w^\epsilon_0(x),\\
w^\epsilon_t(x,0) &= w^\epsilon_1(x),\\
\theta^\epsilon(x,0) &= \theta^\epsilon_0(x),\\
\theta^\epsilon_t(x,0) &= \theta^\epsilon_1(x).
\end{aligned}
$$

REFERÊNCIAS

AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L. **Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.** Comm. Pure Appl. Math, v.17, p. 35-92, 1964.

BREZIS, H. **Analisis Funcional, teoria y aplicaciones**. Madrid, Alianza Editorial, 1984.

BURIOL, C.; MENZALA, G. A. **On exponential stabilization of a quasi-linear model in Hyperbolic Thermoelasticity**.(Submitted to J. Math. Anal. Appl.)(2016).

CATTANEO, C. S. **Conduzione del calore**. Atti. Sem. Mat.Fis. v. 3, p. 83-101, 1948.

CAVALCANTI, M.M; DOMINGOS, CAVALCANTI, V.N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Maringá, Eduem, 2009.

CHANDRASEKHARAIAH, D. S. **Hyperbolic Thermoelasticity: A Review of recent literature.** Appl. Mechanics, Reviews 39, nº3, p. 355-376, 1986.

GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução.** 2º Edição, Rio de Janeiro, UFRJ/IM, 2012.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. United States of America: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

MEDEIROS, L.A.; MELLO, E. **A Integral de Lebesgue**. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

MEDEIROS, L.A.; MIRANDA, M. **Espaços de sobolev iniciação aos problemas**

elíptico não homogêneos. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

MENZALA, G. P.; ZUAZUA, E. **Timoshenko's plate equation as a singular limit of the dynamical von Kármán system.** J. Math. Pure Appl., v.79, p. 73-94, 2000.

MENZALA, G. P.; ZUAZUA, E. **On a one-dimensional version the dynamical Marguerre-Vlasov system.** Bulletin of the Brazilian Math. Society, no.3, p. 303-319, 2001.

PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1970.