UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA – UFSM
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA
(PROFMAT)

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA:
ARTICULANDO REGISTROS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GRAFEQ

Santa Maria, RS
2017

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA:
ARTICULANDO REGISTROS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GRAFEQ

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Professor Dr. Fidelis Bittencourt

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Martinelli, Diego da Silva Pinto
GEOMETRIA ANALÍTICA: ARTICULANDO REGISTROS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GRAFEQ / Diego da Silva Pinto Martinelli.- 2017.
182 p.; 30 cm

Orientador: Fidelis Bittencourt
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2017

1. Geometria Analítica 2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica 3. Engenharia Didática 4. GrafEq I. Bittencourt, Fidelis II. Título.

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA:
ARTICULANDO REGISTROS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GRAFEQ

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 04 de Agosto de 2017.

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Leandra Anversa Fioreze, Dra. (UFRGS)

Santa Maria, RS
2017

AGRADECIMENTOS

À minha filha Isabella, amor incondicional da minha vida, sempre me fazendo sorrir todos os dias.

À minha esposa Elisabete, pelo seu amor e dedicação; mesmo não estando muito presente ao seu lado, sempre contei com o seu apoiou durante a realização do trabalho com suas ideias, e pela sua companhia.

Ao meu orientador Dr. Fidelis Bittencourt, responsável direto na construção deste trabalho, pela sua dedicação e paciência em momentos difíceis, pelo auxílio constante no decorrer desta etapa, exemplo de profissional competente e sensível, o meu agradecimento por tudo.

À Universidade Federal de Santa Maria, pela oportunidade.

Aos professores da pós-graduação em matemática pelo carinho ao longo do curso, pela formação e que de forma indireta estiveram presentes neste trabalho.

Aos colegas do mestrado, Diego Souza e Francine Numer que estiveram comigo ao longo do curso pela sua amizade e pelas boas companhias nas pizzas de sexta à noite.

À minha amiga Natássia Gauto, que me incentivou a realizar a inscrição no PROFMAT.

Aos meus familiares, em especial ao meu pai, pelo incentivo e à minha mãe, que sempre esteve presente me incentivando e dando força em momentos difíceis.

Aos meus queridos amigos-alunos, por me causarem inquietações acerca da educação matemática.

“Escolha uma ideia. Faça dessa ideia a sua vida. Pense nela, viva pensando nela. Deixe cérebro, músculos, nervos, todas as partes do seu corpo serem preenchidas com essa ideia. Esse é o caminho para o sucesso.”

Swami Vivekananda

RESUMO

GEOMETRIA ANALÍTICA: ARTICULANDO REGISTROS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GRAFEQ

AUTOR: Diego da Silva Pinto Martinelli
ORIENTADOR: Prof. Dr. Fidélis Bittencourt

Nesta dissertação foi desenvolvida uma investigação e a criação de uma proposta didática para o ensino de Geometria Analítica em ambientes informatizados, que possa permitir aos discentes explorar os registros algébricos e geométricos com a utilização do GrafEq, propiciando a articulação entre os mesmos. Nesse sentido, nossa sequencia de ensino foi elaborada à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Utilizamos como metodologia da pesquisa a engenharia didática, que valoriza tanto o aspecto teórico como experimental, ou seja, articula pesquisa e ação didática, além de proporcionar uma organização na estrutura do trabalho. Espera-se que a sequência didática em ambientes informatizados possa contribuir para que o aluno compreenda conceitos geométricos, ampliando seus conhecimentos. Nosso ambiente de pesquisa foi uma turma do terceiro ano do ensino médio, da rede pública de Porto Alegre. Verificou-se que, após a sequência de ensino do conteúdo de geometria analítica em ambientes informatizados, os discentes apresentaram-se mais críticos e capazes de discutir em grupos para formar uma opinião consensual na resolução de problemas, além de reconhecer elementos geométricos em seus registros algébricos e vice-versa.

Palavras-Chave: Registros de Representação Semiótica. Engenharia Didática. Ensino Médio. Geometria Analítica. GrafEq.

ABSTRACT

ANALYTICAL GEOMETRY:
ARTICULATING ALGEBRAIC AND GEOMETRIC RECORDS WITH GRAFEQ

AUTHOR: Diego da Silva Pinto Martinelli
ADVISOR: Prof. Dr. Fidelis Bittencourt

In this dissertation an investigation and the creation of a didactic proposal for the teaching of Analytical Geometry in computerized environments were developed, that could allow to the students to explore the algebraic and geometric registers with the use of GrafEq, propitiating the articulation between them. In this regard, our teaching sequence was elaborated in light of Raymond Duval's theory of semiotic representation records. We use didactic engineering as a research methodology, which values both the theoretical and the experimental aspects, ie articulates research and didactic action, as well as providing an organization in the work structure. It is hoped that the didactic sequence in computerized environments can contribute to the student's understanding of geometric concepts, expanding his knowledge. Our research environment was a group of the third year of high school, of the public network of Porto Alegre. It was verified that, after the sequence of teaching of the content of analytical geometry in computerized environments, the students presented themselves more critical and able to discuss in groups to form a consensual opinion in the resolution of problems, besides recognizing geometric elements in their registers algebraic and vice versa.

Keywords: Registers of Semiotic Representation. Didactic Engineering. High school. Analytical Geometry. GrafEq.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

A presente dissertação tem como objetivo a pesquisa que realizamos na área de educação matemática. Investigamos o ensino de geometria analítica e as possibilidades didáticas de realizá-lo em ambientes informatizados, para verificar como as mídias digitais podem contribuir na articulação de registros algébricos e geométricos. A base teórica que norteia nossa pesquisa é a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

O campo de conhecimento envolve o conteúdo de geometria analítica e as representações algébricas e geométricas de um mesmo objeto matemático e como se dá a conversão de registros. A área de atuação abrange alunos do 3° ano do ensino médio que estudam na rede pública e a metodologia utilizada para a organização da pesquisa é a engenharia didática da pesquisadora e matemática francesa Michèle Artigue.

1.2 JUSTIFICATIVAS DA PESQUISA

Apresentando argumentos que justifiquem minha[1] preferência pelo conteúdo de geometria analítica e as tecnologias informáticas, delineando a articulação de registros algébricos e geométricos como linha de pesquisa, faço alguns relatos sobre experiências vivenciadas na trajetória escolar, acadêmica e profissional.

Em atividades empíricas, seja como aluno ou como professor, pude perceber que os educandos têm dificuldades ou simplesmente não gostam de matemática. Entre os anos de 1998 e 2000, como aluno do ensino médio da rede pública, constatei que a matemática sempre me foi apresentada da maneira tradicional[2], em certos conteúdos sendo apenas mera aplicação de fórmulas, não desenvolvendo habilidades que caracterizem o fazer matemática. Acredito que esta seja uma possível da dificuldade ou o mero desinteresse do educando pela matemática, pois a mesma é apresentada sem vínculos com a sua realidade ou ainda de uma forma desinteressante.

---

[1] O autor, nesta seção, ao narrar sua trajetória redige o texto na primeira pessoa do singular, pois o mesmo se refere a trajetória pessoal e profissional, as quais são importantes relatar, visto que a elas se devem as escolhas por este tema de investigação, bem como justificar outras escolhas que constituem este trabalho.

[2] Aula tradicional: Quadro negro e giz, apresentação formal do conteúdo e resolução de exercícios.

Durante a graduação em licenciatura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), tive a primeira experiência como docente com alunos do ensino fundamental (6° série, atual 7° ano) da rede pública do estado do Rio Grande do Sul. Nessas experiências pude constatar algumas dificuldades dos discentes em converter registros na língua natural para a linguagem matemática, neste caso a álgebra. Foi nesse primeiro contato que pude perceber a dificuldade dos alunos em representar objetos matemáticos em mais de um registro semiótico.

No que tange os trabalhos realizados como estudante da UFRGS, nos laboratórios de ensino aprendizagem em matemática, com alunos do 1° ano do ensino médio, observei que um grupo preponderante apresentava dificuldades em representar a equação algébrica na sua forma geométrica, no plano cartesiano, ou seja, a construção do gráfico de uma função afim. Isso também pode ser observado em trabalhos realizados recentemente por Terra Neto (2016), Martinelli (2013), Gauto (2012) e Balejo (2009).

Na graduação, foi o meu primeiro contato com mídias digitais na educação. Logo no primeiro semestre, utilizamos o Superlogo[3], que é uma linguagem de programação, isto é, uma comunicação entre o computador e a pessoa que irá usá-lo. No sexto semestre da graduação tive contato com softwares matemáticos: GrafEq, Geogebra, Winplot, Calques, entre outros que podem ser utilizados como ferramentas auxiliares na aprendizagem. Lembro que fiquei impressionado pela facilidade em explorar curvas no plano cartesiano e como se dava a articulação de registros algébricos e geométricos, com a utilização destes softwares e suas diversas aplicabilidades.

Minha primeira experiência como regente de uma turma se deu no ano de 2013. Nessa experiência, assumi uma turma do 3° ano do ensino médio e lembro-me da dificuldade dos alunos em reconhecer objetos matemáticos na sua representação algébrica. Em conversas com a professora da outra turma, sobre a dificuldade dos alunos em reconhecer os objetos matemáticos, realizar as conversões e tratamentos adequados a professora simplesmente sugeriu-me que no caso das retas, deveria solicitar aos alunos que determinassem dois pontos, atribuindo valores para x e y, para fazer um esboço da reta. Observei ainda, que a maioria dos discentes não sabia ou não se lembrava das principais propriedades da geometria plana e apresentavam dificuldades em relacionar os objetos geométricos, por meio de equações no plano cartesiano.

[3] Seu download pode ser feito em http://projetologo.webs.com/slogo.html

Constatei na conversa com a professora que os alunos eram instruídos em como deveriam realizar as atividades, o que tornava o processo de aprendizagem estático, sem o fazer matemática. Segundo o PNLD sobre a matemática:

> ...enquanto conhecimento acumulado e organizado é preciso dosar, em progressão criteriosa, o emprego de seu método próprio de validação dos resultados: o método dedutivo. É indispensável que o aluno estabeleça gradualmente a diferença entre os vários procedimentos de descoberta, invenção e validação. (BRASIL 2015. p.12)

A matemática é uma das mais antigas ciências, portanto desempenha um papel importante na formação do aluno, por isso o modo como ela é ensinada pode afetar o desempenho dos estudantes. Além disso, as pesquisas relacionadas a este campo têm apresentado notáveis avanços no desenvolvimento tecnológico e científico. Seu processo de ensino desenvolve aspectos cognitivos importantes para que o ser humano possa produzir conhecimentos, planejar ações, atribuir conceitos, interpretar, projetar soluções e raciocinar. Dessa maneira, a matemática, como área do conhecimento, é um produto de relações entre a sociedade, a natureza e a cultura servindo para que o cidadão entenda e atue no mundo (BRASIL, 2006).

No contexto escolar a matemática tem como objetivo desenvolver habilidades relacionadas à compreensão, visualização, análise, contextualização sociocultural e representação (BRASIL, 2006). Essas habilidades auxiliam os alunos na resolução de problemas no cotidiano como: operações de cálculos com grandezas, quantificações, entre outras situações e ainda nos problemas relacionados a outras áreas do conhecimento (Física, Química e Biologia), considerando que a comunicação e todas as atividades relacionadas à Matemática se dão por meio de representações.

> A matemática guarda uma forte dependência das formas de representações e da manipulação dos seus objetos. A história mostra vários exemplos em que determinadas noções só puderam alcançar um certo nível de desenvolvimento a partir do momento em que uma notação adequada foi criada (MORETTI, 2002, p.344.).

Como resultado da minha experiência em sala de aula, considero importante o papel do professor, pois além de ensinar e trocar experiências com os discentes deve assumir um papel de pesquisador, visando melhorar seus métodos de ensino.

> A pesquisa científica tem a preocupação com a originalidade, a validade e o reconhecimento por uma comunidade científica, enquanto a pesquisa do professor busca o conhecimento da realidade, para transformá-la, visando a melhoria das práticas pedagógicas (CARNEIRO, 2008, p. 203).

A geometria é parte importante dos currículos de matemática, pois desenvolve habilidades e capacidades como a compreensão, espírito de investigação, representação e resolução de problemas. Desdobrando-se em vários ramos de estudo, escolhi como objeto de pesquisa o conteúdo de geometria analítica, que tem como função tratar algebricamente, objetos geométricos e suas propriedades. Devido à dificuldade dos alunos em conhecer as relações entre as representações geométricas no plano e suas respectivas equações, escolhemos a geometria analítica.

> A unidade de Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 2006, p.124).

Os objetos matemáticos têm caráter abstrato e toda atividade matemática se dá através da evocação de símbolos para representar esses objetos, pois não são diretamente acessíveis. “O ensino/aprendizagem em matemática apresenta restrições em utilizar apenas um único registro semiótico, pois, representar um objeto matemático através de uma única representação, leva-nos por tomar esta representação como se fosse o próprio objeto” (MARTINELLI, 2013. p.13).

Na tentativa de encontrar uma teoria que me desse suporte, buscando qualificar minha formação e a aprendizagem dos alunos, fundamentei a pesquisa na teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval. Como a matemática guarda uma forte dependência de representações e a manipulação de seus objetos, a aprendizagem matemática só ocorre quando o aluno for capaz de mobilizar e coordenar vários registros de representação, no mínimo dois simultaneamente (DUVAL, 2003). Utilizei os princípios da metodologia da engenharia didática, para realizar a organização deste trabalho, articulando ação pedagógica à produção de conhecimento.

Recorrendo às experiências anteriores, onde o trabalho da geometria analítica não foi realizado em ambientes informatizados, percebi o quanto seria interessante pesquisar sobre essa integração. Na busca de uma contribuição qualitativa, apresentarei uma análise de como este conteúdo é trabalhado em livros didáticos. Através dessa pesquisa, elaborei uma proposta de ensino que procura privilegiar as conversões e tratamentos entre as representações algébricas e geométricas em ambientes informatizados, pois se apresentam como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos de aprendizagem (GRAVINA; SANTAROSA, 2008).

Tendo em vista melhorar e qualificar a aprendizagem dos alunos no ensino de geometria analítica e com a crescente inclusão de tecnologias, essa sequência de ensino foi aplicada com alunos do terceiro ano do ensino médio, objetivando que o educando melhore seu entendimento quanto ao conteúdo de geometria analítica, sendo capaz de reconhecer objetos geométricos através de sua representação algébrica e vice-versa com o uso de tecnologias.

> Não adianta virtualizar o ensino tradicional. A tecnologia como apoio ao ensino é limitada e até desnecessária. O que se pretende é que a tecnologia seja usada como ferramenta para a aprendizagem. A postura pedagógica do professor define qual utilização será feita (NETO, 2007. p.110).

Meu trabalho surge como elemento de uma reflexão, mediante as dificuldades dos alunos em reconhecer e representar objetos matemáticos em distintos registros. O que procurei não foi encontrar uma solução para o problema, mas sugerir caminhos alternativos que pudessem facilitar a aprendizagem de geometria analítica.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Neste capítulo inicial, descrevi algumas experiências como aluno e professor, bem como um panorama geral sobre a dissertação, relacionando a teoria dos registros de representação semiótica e a opção metodológica da pesquisa que é a engenharia didática.

No capítulo 2, apresentei um recorte da teoria dos registros de representação semiótica que utilizei para implementação da sequência didática, proposta para o ensino do conteúdo de geometria analítica.

No capítulo 3, explicitei a metodologia da pesquisa, engenharia didática, bem como as inquietações e descrevo as questões que nos levaram à escolha do tema de pesquisa e seus objetivos.

No capítulo 4, descrevi os dados coletados através de livros da história da matemática, sobre a evolução da geometria analítica e da análise de livros recomendados pelo MEC sobre como o conteúdo é explicado atualmente. Relatamos estes dados coletados nas dimensões epistemológica, didática e cognitiva, assim como nas análises prévias realizadas na atividade prévia; e ainda, as dificuldades e os possíveis obstáculos epistemológicos referentes às minhas escolhas para a construção da sequência de ensino.

Também é relevante destacar as variáveis globais, bem como a descrição das atividades em sala de aula e o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* em que observo cada atividade desenvolvida e a produção dos discentes, verificando quais as hipóteses válidas para concluir ou não a validação da sequência de ensino.

No capítulo 5, apresento as minhas conclusões e considerações finais acerca das atividades desenvolvidas por meio de uma breve reflexão e algumas sugestões de trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo descrevemos a base teórica utilizada no planejamento e construção da sequência de ensino, objetivando a articulação de registros algébricos e geométricos na aprendizagem de geometria analítica.

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O termo semiótica, de origem grega provém da raiz 'semeion', que denota signo. Semiótica em linhas gerais é a ciência que estuda os signos, que aqui mencionados referem-se à linguagem, ou ainda a ciência de todas as linguagens. A semiótica não se reduz apenas aos estudos do campo verbal, mas ao estudo de qualquer sistema de signos – Artes Visuais, Música, Fotografia, Moda, Cinema, entre outros. A semiótica busca estudar conceitos e ideias e como estes mecanismos de significação se processam natural e culturalmente. Esta ciência teve origem em três locais de culturas muito distintas: Europa Ocidental, União Soviética e Estados Unidos. Nos estados Unidos começou com o filósofo, físico e matemático, C.S.Peirce integrando uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos.

As atividades matemáticas são caracterizadas pela forte dependência das representações semióticas, bem como pela variedade destas representações e manipulação de seus objetos. Símbolos para a representação matemática já existiam antes da idade moderna. Basta lembrar que a representação decimal de um número foi desenvolvida pelos babilônios na idade antiga, hindus, árabes entre outros na idade média. Quando recorremos à história da matemática podemos observar que as representações ocuparam papel indispensável no desenvolvimento da matemática. Mesmo na álgebra já havia representação para incógnita nas equações polinomiais. Na idade clássica houve um grande desenvolvimento da notação algébrica com os trabalhos dos matemáticos italianos do século 16, de Viéte, e de Descartes. Viéte teve uma importância fundamental neste processo porque começou a usar símbolos literais não apenas para a incógnita, mas também para os coeficientes da equação iniciando assim a era das fórmulas na matemática.

O desenvolvimento da teoria dos registros de representação semiótica, proposta pelo psicólogo e filósofo francês Raymond Duval, foi criada com o objetivo de estudar e analisar o funcionamento do pensamento para a aquisição do conhecimento pelo indivíduo, bem como a organização de situações de aprendizagem de matemática.

Sob o ponto de vista de Duval (2003) ensinar matemática é, antes de tudo, possibilitar o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, pois as representações tornam possível o estudo com relação à construção do conhecimento, cumprindo a função de comunicação entre sujeito e a atividade cognitiva do pensamento, gerando diferentes formas de registros de representação do objeto.

O indivíduo precisa recorrer a uma representação para poder acessar objetos matemáticos, pois estes não são acessíveis, segundo Damm (2008, p.169-170), a matemática "[...] trabalha com objetos abstratos. Ou seja, seus objetos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão, o uso de uma representação".

São indispensáveis, as representações semióticas, para o desenvolvimento e comunicação das atividades matemáticas, "não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação" (DUVAL, 2009, p.29), isto é, não há apreensão conceitual de um objeto sem evocar uma exibição para este objeto.

É essencial não confundir o objeto com a sua representação, pois um mesmo objeto pode ser dado através de representações muito distintas. Pela sua pluralidade potencial, as muitas representações semióticas dos objetos são então secundárias e extrínsecas à aprendizagem e a compreensão conceitual dos objetos matemáticos.

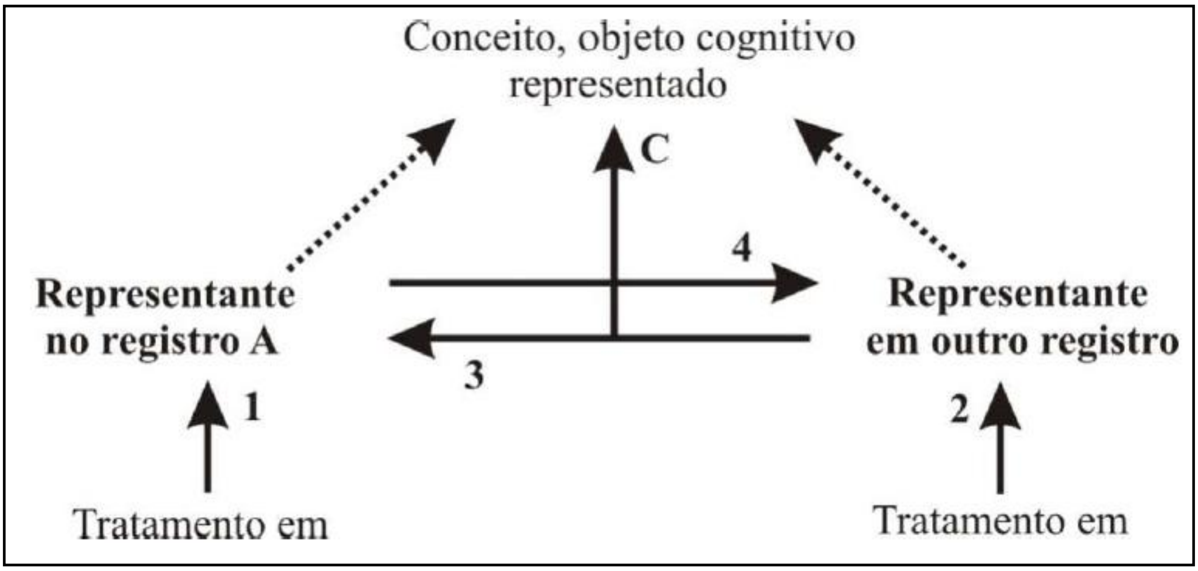
Segundo Duval (2003), registros de representação semiótica são identificados como multifuncionais que envolvem e utilizam com maior frequência: a língua natural, registros mono funcionais (escrita numérica, simbólica e algébrica), as figuras geométricas e as representações gráficas, que segundo os quais a construção do conhecimento acontece mediante a conversão estabelecida entre duas ou mais formas distintas de registro de representação.

As representações semióticas preenchem a função de comunicação e o aluno deve transitar entre esses registros, pois "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão." (DUVAL, 2009, p. 51).

A necessidade de se transitar entre registros (pelo menos dois) assume importância fundamental para que o indivíduo não confunda o objeto com a sua representação, pois a conceitualização será assimilada quando o sujeito articular as diferentes representações semióticas de um mesmo objeto.

Um exemplo de transições entre as diferentes representações semióticas na história da Matemática foi o estudo das equações polinomiais que teve inicialmente um tratamento geométrico e após Viéte um tratamento algébrico (EVES, 2004). O esquema abaixo descreve de forma simplificada a coordenação entre dois registros de representação, como se pode observar na figura 1.

Figura 1 – Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: (DUVAL, 2012. p.282).

As possíveis representações semióticas dos objetos matemáticos relativos a um sistema particular de signos como: Gráficos, tabelas, escritas algébricas, escritas numéricas, língua natural podem ser convertidos em representações que apresentam uma "congruência semântica" em outro sistema semiótico podendo ter distintos significados para quem as utiliza (DAMM, 2008).

De acordo com DUVAL (2009) existem três tipos de representações:

- As representações mentais que uma pessoa pode ter sobre um objeto são classificadas como internas, porque pertencem a um sujeito, portanto não são comunicadas a outro pela sua produção, permitindo somente uma interiorização da percepção do objeto matemático na ausência de todo significante. Estas representações cumprem a função de objetivação, como todas as representações conscientes.

- As representações computacionais são classificadas como internas, apesar disso, não conscientes do sujeito uma vez que ele executa certos ofícios sem pensar em todos os passos necessários para sua realização.
- As representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, pois são constituídas pelo emprego de signos constituídos a um sistema de representação

> [...] a um sistema particular de sistemas de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...] De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade de representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado) (DAMM, 1999, p. 141).

Destacam-se três atividades cognitivas fundamentais de representações relacionadas à *semiósis*: a formação de um registro para evocar um objeto matemático, a conversão e o tratamento.

A formação de um registro para evocar um objeto matemático implica na construção de uma representação que seja identificável, como uma representação (concebível numa língua natural), como: representação geométrica de uma figura, elaboração de uma tabela, composição de um texto, expressão de uma fórmula, entre outros. Isto implica em seleção de relações e de dados no conteúdo que será representado. Ou seja, esta formação deve respeitar regras (gramaticais, entraves de construções geométricas,...). Estas regras cumprem a função de assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação possibilitando a sua utilização em tratamentos, desenvolvendo capacidades e habilidades cognitivas (DUVAL, 2009).

Segundo DUVAL (2009) na matemática, encontramos 4 tipos de registros de representação. Considerando um registro de representação como um sistema semiótico que propicie: comunicação, objetivação e tratamento e, ainda possa ser transformado em outros sistemas semióticos. As representações são necessárias para a comunicação, mas essencialmente para atividades cognitivas do pensamento, sendo levadas em consideração as exigências científicas dos objetos matemáticos, bem como o funcionamento cognitivo humano. Podemos observar na figura 2, a classificação dos 4 tipos de registros.

Figura 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: (DUVAL, 2003).

O tratamento é uma transformação interna ao registro de uma representação referindo-se às operações dentro de um mesmo registro de representação que consiste na transformação de uma representação obtida inicialmente, como sendo um dado inicial considerado terminal em relação a uma questão. Os tratamentos dependem da forma e não do conteúdo envolvido, existindo para cada registro um tratamento diferente. Como por exemplo, a paráfrase e a inferência são tratamentos na língua natural. O cálculo (numérico, algébrico, proposicional,...) é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas.

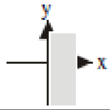
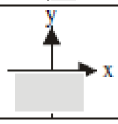
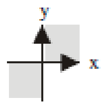
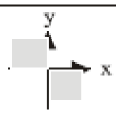
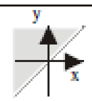
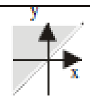
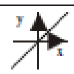
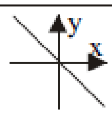
A conversão de um registro de representação é nada mais, do que transformar a representação dada de um objeto em outro registro de representação desse mesmo objeto, sendo classificada como uma operação externa em relação ao ponto inicial (DUVAL, 2009).

Duval (2003) afirma que para ser congruente uma conversão, ela deve satisfazer três condições:

1) correspondência semântica, ou correspondência uma a uma entre os elementos significantes: para cada elemento simples no registro de saída tem um elemento simples correspondente no registro de chegada.
2) unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada.
3) ordem que compõe cada uma das representações: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações.

Não podem existir regras para realizar uma conversão como existe regras de conformidade e de tratamento. Tomamos como exemplo de conversão de representação: a representação algébrica e sua representação gráfica no plano cartesiano como se pode observar na figura 3.

Figura 3 – Conversão entre a expressão algébrica de uma relação (coluna II) e sua representação gráfica cartesiana (coluna III).

I	II	III	I → III Hachurar	III → II escolher a expressão
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	$x > 0$		67%	51%
2......que tem uma ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3......cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal	$xy \geq 0$		56%	25%
4	$xy \leq 0$			23%
5......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x sendo já traçada no gráfico)	$y > x$		38%	38%
6......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x não sendo traçada no gráfico)	$y > x$		19%	25%
7......cuja ordenada é igual a abscissa	$y = x$		60%	75%
8......cuja ordenada é oposta a abscissa	$y = - x$		34%	58%

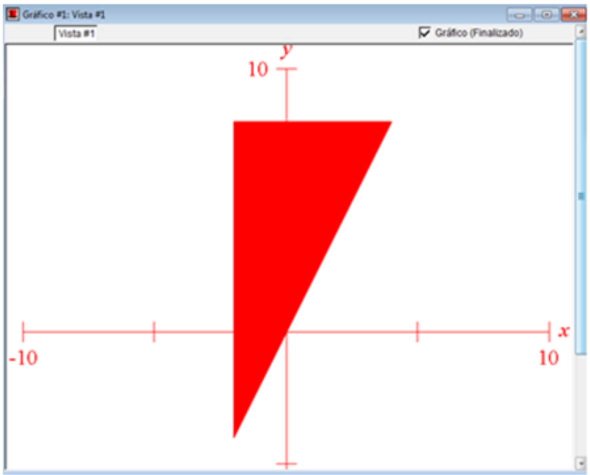
Fonte: (DUVAL, 2012. p.274).

> Nesta tabela estão os resultados obtidos com 105 alunos. Para a conversão III →II, havia apenas uma escolha entre várias expressões que correspondia ao gráfico hachurado: y = x, y > x, x > 0, y = - x, xy< 0, etc. Este exemplo é interessante porque o sistema semiótico de representação gráfica permite definir uma regra de codificação: um ponto corresponde uma dupla de números. Portanto, não importa qual dupla de números, codifica um ponto do plano. (DUVAL, 2012.p.274).

Na atividade 3 da etapa 2 da sequência didática, propomos aos alunos que realizassem uma conversão de registros e um tratamento para determinar o ponto de intersecção das retas, como aparece na figura 4.

Figura 4 – Atividade 3 da etapa 2 da sequência didática

03. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.



Fonte:(o autor).

Na atividade 1 da etapa 1 da sequência didática, propomos aos alunos que realizassem conversões de registros algébricos e geométricos entre si, reconhecendo regiões no plano cartesiano através de inequações como podemos observar nas figuras 5 e 6.

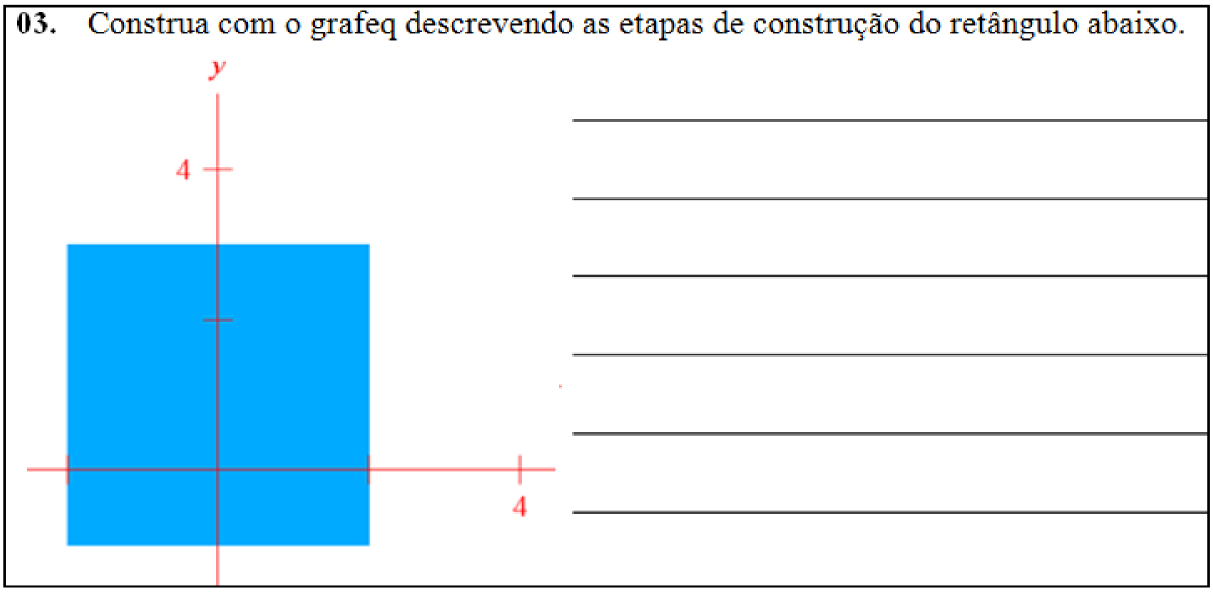
Figura 5 – Atividade 1 item b da etapa 1 da sequência didática

- $x = 3$, $x > 3$ e $x < 3$

b) Construir cada uma das relações em sistemas de eixos distintos e descrever a diferença entre as representações gráficas que apareceram no Grafeq.

Fonte:(o autor).

Figura 6 – Atividade 3 da etapa 1 da sequência didática



Fonte: (o autor).

O aluno deverá converter e tratar essas representações, pois Duval (2009) explica que não existe conhecimento que possa ser mobilizado por alguém sem uma representação. Ainda, o aluno deverá saber ler e interpretar dados para "retirar" informações objetivando desenvolver suas capacidades e habilidades de raciocínio e análise de dados.

Utilizando como base a teoria dos registros de representação semiótica, foi criada uma sequência didática pensando no ensino de geometria analítica, sendo no total cinco etapas, possibilitando aos alunos articular alguns dos diversos registros de representação. Relacionamos nas atividades conteúdos matemáticos como a geometria plana e a geometria analítica, pois a articulação destes registros implica na condição de acesso à compreensão matemática. Um dos principais objetivos das atividades que serão realizadas é evitar um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer um mesmo objeto matemático em duas ou mais de suas possíveis representações.

3. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Nesse capítulo descrevemos a metodologia utilizada na pesquisa como inspiração na organização e construção das atividades além da distribuição das etapas, bem como a seleção do tema e as justificativas que nos levaram a essa escolha.

3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo didática de forma mais abrangente, tem sua origem etimológica do grego didaktikós, referindo-se ao estudo da técnica de dirigir ou orientar a aprendizagem. No século XVII, o livro *Didactica Magna*, de Comenius não considerava os componentes específicos dos conhecimentos de cada área do conhecimento.

Tendo sua origem na França na década de 60 através da criação dos Institutos de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) na França, a didática da matemática é uma área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos seja no ensino básico ou no ensino universitário, pretendendo descrever e explicar fenômenos relativos ao ensino e aprendizagem da matemática. No entanto a didática da matemática não se reduz a um bom método ou modelo de ensinar determinadas ideias ou conceitos científicos (DOUADY, 1985).

Procurando uma metodologia que se preocupa em investigar cientificamente e extrair relações entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos (ARTIGUE, 1996), surge na França nos anos 80, o termo engenharia didática. A metodologia surge como uma vertente no transcorrer de discussões realizadas no IREM (Institutos de Pesquisa em Educação Matemática), apresentando sua inspiração no trabalho realizado por um engenheiro, que não possui um modelo pronto de resolução, e que necessita de um vasto conhecimento científico para buscar soluções alternativas para um problema, ou seja, sendo necessário criar, "inovar" resoluções para o problema (ARTIGUE, 1996).

Essa correlação ao trabalho realizado por um engenheiro está relacionada diretamente à concepção, planejamento e execução de um projeto, fundamentando-se em conhecimentos científicos. As etapas de um projeto podem defrontar-se com situações complexas, acarretando em novas escolhas e novas decisões, tornando a execução do projeto um processo dinâmico e passível de adaptações.

A engenharia didática tem uma forma muito reservada de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa, contemplando desde a dimensão teórica até a dimensão experimental. A capacidade de interligar a investigação (plano teórico) com a ação (plano experimental) da prática educativa pode ser apontada como uma das vantagens em conduzir a pesquisa por essa metodologia. Artigue descreve que nessa forma de trabalho o papel do professor/pesquisador é

> [...] comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (ARTIGUE, 1996, p.193)

Essa teoria tem sua origem na preocupação com certa “ideologia da inovação” presente no âmbito educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica.Deste modo, a engenharia didática se caracteriza por propor:

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (MACHADO, 2002, p. 198, apud DOUADY,1993, p. 2).

A engenharia didática foi criada com o objetivo de responder a duas questões:

a) as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino;

b) e o lugar reservado para as realizações didáticas entre as diversas metodologias de pesquisa.

Devemos ressaltar que a engenharia didática não é uma metodologia de ensino que procura encontrar uma verdade única sobre a possibilidade de como ensinar um determinado conteúdo. Vista como uma metodologia de investigação, que estuda as relações de pesquisa e ação no sistema de ensino, sendo uma metodologia baseada na experimentação em sala de aula (CARNEIRO, 2005). Objetivando mostrar “novos” caminhos o ensino – aprendizagem, pois de acordo com Carneiro (2005) esta metodologia possui uma ideologia de inovação, abrindo caminhos para a criação de novas experiências no âmbito escolar, com a proposta de refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo.

Uma de suas vantagens com relação a outras metodologias de pesquisa é que a engenharia didática contempla a dimensão teórica e a dimensão experimental da pesquisa didática, relacionando o plano teórico da racionalidade como território experimental da prática educativa. Não apresentando uma articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seus significados reduzidos (PAIS, 2002).

Para a aplicação e realização da engenharia didática como metodologia de pesquisa é necessário escolher um tema e definir um campo de ação, bem como justificar esta escolha, a qual será denominada como tema e campo de ação. Segundo Carneiro (2005), o tema deve contemplar um conjunto de saberes escolares, definindo-se o problema e os meios para a ação, sobre o sistema de ensino, construindo novas metodologias didáticas e articulando a pesquisa com a prática em sala de aula.

3.1.1 Fases da Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa e execução da engenharia didática, segundo Artigue (1996), é dividida em quatro grandes etapas:

1) Análises prévias;
2) Concepção e Análise a *priori* das situações didático-pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula;
3) Experimentação/Aplicação da proposta de ensino;
4) Análise a *posteriori* e validação da engenharia.

A seguir serão descritas as etapas citadas.

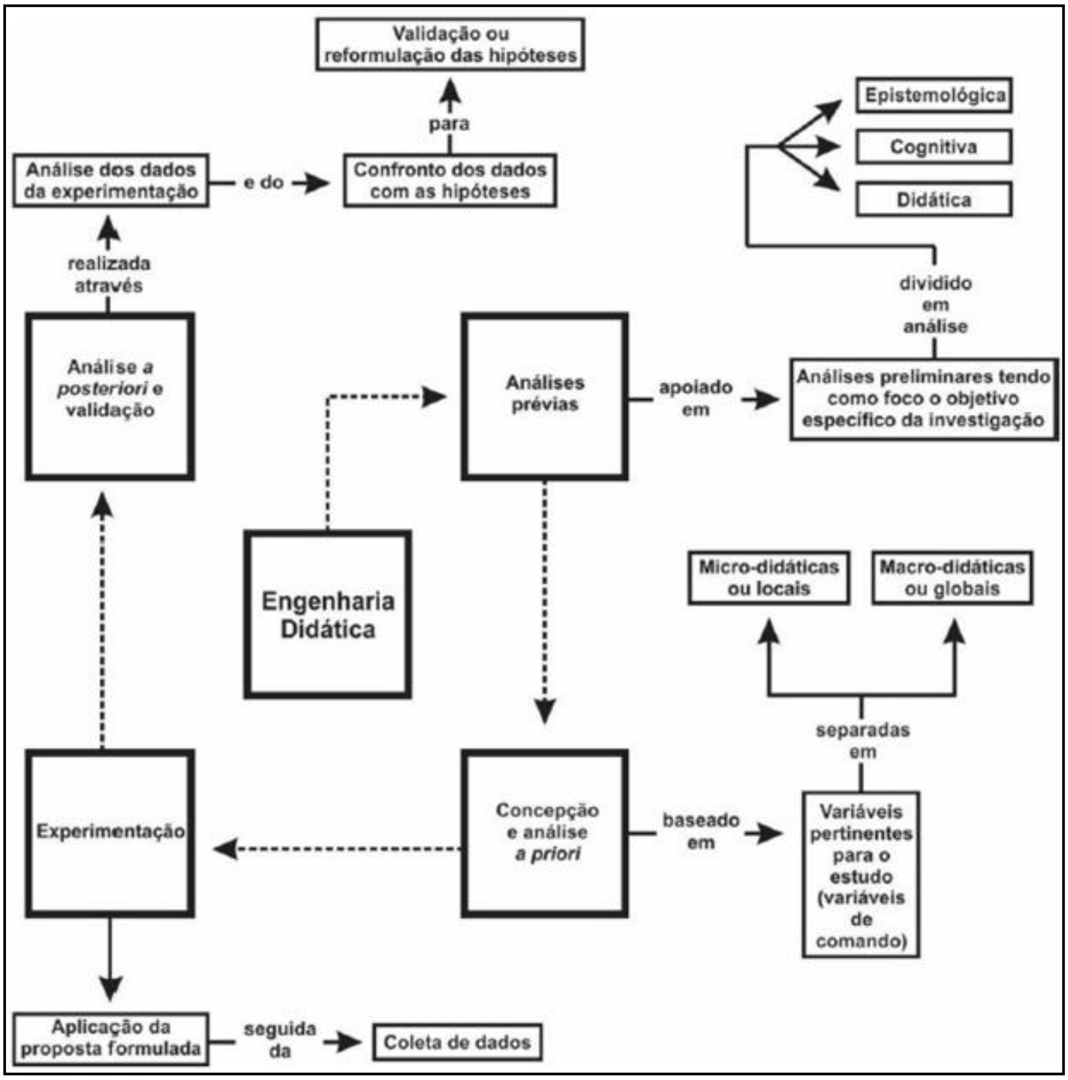
3.1.1.1 Análises prévias

Nesta etapa de análises prévias é realizada uma pesquisa com o objetivo de analisar como o conhecimento acerca de determinado conteúdo é abordado atualmente pelos professores em sala de aula. O objetivo consiste em propor uma nova intervenção para que o professor possa aperfeiçoar e ou reorganizá-lo, tornando o estudo mais satisfatório. Nesta etapa é realizada uma revisão literária que é subdividida em três dimensões:

1. Epistemológica: Está associada ao estudo da construção, ao longo dos anos, do conteúdo a ser pesquisado, ou seja, está associada às características do saber;
2. Didática: Analisa-se a forma de abordar o conteúdo em livros didáticos e os métodos pelos quais esse conhecimento vem sendo abordado;
3. Cognitiva: Nesta etapa são apresentados os principais problemas na aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades cognitivas.

Após essas análises listamos nossos constrangimentos com relação ao que impede ou dificulta a aplicação da nossa sequência de ensino. Podemos observar na figura 7 um mapa da engenharia didática.

Figura 7 – Mapa da engenharia didática



Fonte: (Lutz, 2012. p.48)

3.1.1.2 Concepção e análise a priori

Nesta etapa de análises do estudo, o investigador deve tomar a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis. Ela pode ser separada em dois âmbitos: um deles, global, no qual explicamos nossos objetivos bem como a proposta didática, justificando as escolhas realizadas, e, em outro âmbito, agora local, que diz respeito ao planejamento de uma sessão da sequência de ensino (ARTIGUE, 1996).

Elaboramos, nesta etapa, nossas hipóteses sobre o que é esperado por parte dos alunos utilizando-nos da experimentação em sala de aula para analisar nossas perspectivas iniciais. De posse dos resultados obtidos com a realização da prática, confrontamos os resultados para a validação da engenharia, ou não.

3.1.1.3 Experimentação

Nesta etapa os alunos, realizam as atividades da sequência didática que foram propostas e nós, professores, interagimos com os alunos, observamos, descrevemos e comentamos as produções e indagações realizadas pelos alunos, tal como sua participação nas sessões de ensino durante as aplicações das atividades. Dessa maneira, a experimentação pressupõe: a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa,os estudantes que participarão da experimentação, a aplicação do instrumento de pesquisa e o registro de observações feitas na experimentação (MACHADO, 2002).

3.1.1.4 Análise a posteriori e validação

Nesta etapa, agora com todos os dados obtidos com a experimentação, analisamos o processo como um todo. Analisamos os dados obtidos e os confrontamos com as hipóteses iniciais para validar ou não a engenharia. Na engenharia didática, "a validação é essencialmente interna, embasada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*" (ARTIGUE, 1996 p.197). Constituindo-se um estudo de caso, onde o professor – pesquisador seleciona um conteúdo de matemática e partindo de uma análise prévia, elabora uma sequência de ensino. Após a experiência realizada, confronta os resultados obtidos com as hipóteses iniciais. O objetivo consiste em procurar novos métodos de ensino em sala de aula, que possam ser reprodutíveis.

3.2 TEMA E CAMPO DE AÇÃO

O conhecimento matemático se faz necessário em diversas situações do cotidiano, utilizando o apoio das outras áreas do conhecimento, como instrumento de grande valia para lidar com situações diárias, ou ainda, como forma de desenvolver habilidades do pensamento. O conhecimento matemático se faz necessário como formação científica e cultural das pessoas. Sem matemática não se entende Física, Economia, etc. O professor deve identificar uma sequência didática que possa contribuir para a consolidação do conhecimento do aluno emergindo de sua prática e investigação em sala de aula.

> [...] entende-se "professor pesquisador" como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática, e toma-as como problema de pesquisa, procurando propostas de solução, bem fundamentadas, com objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na instituição (CARNEIRO, 2008. p. 202).

Nosso campo de pesquisa é uma turma do 3° ano do ensino médio, da rede pública do Estado do Rio Grande do Sul, e a turma tem com trinta e três alunos.O tema de pesquisa é "como um conjunto de saberes que se ofereça, como um recorte coerente da matemática escolar, importante e autossuficiente em si mesmo, adequado para uma ação de micro engenharia" (CARNEIRO, 2005, p.88).

Aprender geometria analítica significa estabelecer relações em duas vias: o entendimento de equações via figuras geométricas e o entendimento de figuras geométricas via equações. Como parte integrante do cotidiano, como por exemplo, as noções de reta, segmentos, pontos de interseção, retas perpendiculares e relações de paralelismo. Além disso, o ensino e a aprendizagem de geometria analítica propiciam ao aluno o desenvolvimento de certo tipo de pensamento lógico, estruturado e sistemático que auxilia na resolução de problemas.

Em experiências como professor de uma turma do 1° ano do ensino médio, percebeu-se muitas vezes, que para o aluno representar geometricamente uma equação de 1° grau com duas variáveis no plano cartesiano, este utiliza o método da "tabelinha" atribuindo valores à variável "x" e realizando cálculos para encontrar alguns pontos (principais pontos: intersecção com os eixos coordenados). Estes métodos mecânicos de resolução, não contribuem para a aprendizagem do aluno, tampouco para a compreensão das relações existentes entre as representações algébricas e geométricas (GAUTO, 2012).

Tais métodos utilizados para encontrar a representação geométrica no plano não contribuem para que o aluno compreenda o comportamento da curva, contrariando a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o conteúdo de geometria analítica.

> A geometria analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y). Partindo-se disso, podemos caracterizá-la como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola. (BRASIL, 2006, p.76).

Em experiências como docente, pode-se observar que alunos do 9° ano do ensino fundamental resolvem um sistema de equações de primeiro grau, porém sem atribuir significado geométrico para a solução encontrada, tornando-se mais uma atividade onde os alunos têm que "fazer contas". Não procuramos julgar de quem é a culpa pela falta de conexões por parte do aluno entre a solução encontrada e seu significado geométrico.

Utilizamos como referência, experiências vivenciadas no ambiente escolar, seja como professor ou mesmo como aluno, e nestas experiências começaram a surgir inquietações que nos levaram à escolha do tema de pesquisa. Observamos nessas experiências (em maioria), que os alunos no ensino fundamental e médio apresentam dificuldades em articular registros. Nosso propósito é criar uma sequência didática que auxilie os alunos a tratar algebricamente, problemas geométricos e vice-versa, particularmente na articulação entre representações algébricas e representações geométricas de curvas no plano cartesiano.

As orientações curriculares do ensino médio destacam ainda que o trabalho realizado com a geometria analítica possibilita a articulação entre a geometria e a álgebra, podendo ela ser significativa tanto para o aluno como para o professor.

> Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor (BRASIL, 2006, p.77).

Acredita-se que para existir uma melhor compressão e dar um "sentido" às respostas encontradas, o professor pode trabalhar com diferentes registros do mesmo objeto matemático, pois "uma vez definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação". (BRASIL, 2006, p.77).

Persiste nos alunos certa dificuldade em conseguir associar representações algébricas e geométricas, estando diretamente relacionada a ênfase dada à álgebra. Como exemplo, no conteúdo de funções de 1° e 2° graus, que para os alunos determinarem as raízes das equações é necessário igualar a função a zero e realizar cálculos algébricos, e quando necessário representara curva no plano cartesiano, deveria apenas marcar alguns pontos e traçar o gráfico, sem relacionar e analisar as raízes da função, tornando-se um processo mecânico para o aluno.

No conteúdo de geometria analítica em turmas no terceiro ano do ensino médio, a pergunta mais corriqueira é “eu preciso decorar todas essas fórmulas?”. Utilizando uma apresentação formal de fórmulas, os alunos não se comprometem em ações para desafiar suas capacidades cognitivas, logo passam a não serem autores das construções, que posteriormente vão dar sentido ao conhecimento matemático (GRAVINA; SANTAROSA, 2008, p. 73).

Para haver a compreensão integral e conceitual devemos articular pelo menos dois registros para não confundir o objeto com sua representação (DUVAL, 2009). Logo é importante os alunos conseguirem articular as representações algébricas e geométricas das equações, e destacar o significado da representação gráfica, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar a influência dos parâmetros e quais movimentos será realizado pelos gráficos (BRASIL, 2006).

Recursos tecnológicos estão cada vez mais presentes em ambientes escolares, e muitos destes voltados para a aprendizagem de conceitos matemáticos, especificamente, propôs-se o trabalho com alguns conceitos de geometria analítica em um meio computacional, a fim de propiciar ao aluno um ambiente dinâmico que o estimule à aprendizagem em sala de aula, pois “os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem” (GRAVINA; SANTAROSA 2008, p.78).

As experiências como docente e os motivos descritos acima contribuíram para a escolha do assunto e nos levaram ao desenvolvimento de uma proposta de ensino voltada ao conteúdo de geometria analítica como uso de mídias digitais. Diante destas justificativas explanadas, aponta-se a seguinte questão:

Como o uso de recursos tecnológicos, em particular o software GrafEq, pode auxiliar na aprendizagem de Geometria Analítica e na articulação de registros Algébricos e Geométricos?

4. DISCUSSÃO DOS ACHADOS

4.1 ANÁLISES PRÉVIAS

Escolhidos, o tema e campo de ação e definida nossa questão norteadora partimos para a etapa de análises prévias. Dividimos esta fase da engenharia didática em 3 etapas que são elas:

a) Análise Epistemológica, na qual realizamos um breve estudo sobre a evolução da geometria analítica ao longo dos anos;
b) Análise Didática, na qual analisamos o ensino atual de geometria analítica e também analisamos três livros didáticos recomendados pelo PNLD (Plano Nacional de Livros Didáticos) de 2015;
c) Análise Cognitiva, que destacamos as dificuldades dos alunos em reconhecer objetos matemáticos em seus registros algébricos e geométricos e os principais obstáculos na aprendizagem dos alunos em geometria analítica.

Os constrangimentos encontrados nas análises realizadas para a aplicação da proposta serão apresentados ao final do capítulo.

4.1.1 Considerações de natureza epistemológica

Nesse capítulo apresentamos um histórico sobre a evolução da geometria analítica, com o objetivo de ressaltar a importância de uma notação (criação de símbolos) adequada para o desenvolvimento da matemática. A sua evolução articulando registros entre a geometria plana e a álgebra, criando assim a geometria analítica, tal que a mesma reside na transferência e articulação da investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente (EVES, 2004).

Ao se fazer um breve relato cronológico, é difícil escolher um único ponto de partida, um local ou mesmo uma civilização, se tratando de história da geometria analítica, quanto à sua evolução (ROQUE, 2012).Na origem da matemática temos dois locais de destaque por volta de 1700 a.C. o Egito e a Mesopotâmia, pelo fato de terem registros escritos e problemas registrados em papiros por parte dos egípcios e tablitas feitas de barro, pelos mesopotâmios.

A álgebra tem sua origem quase simultaneamente na Mesopotâmia e no Egito, envolvendo números desconhecidos ou problemas matemáticos. Mais de 400 tábuas foram identificadas com problemas matemáticos. Um tablete de barro, com datação de 1700 a.C. considerado um “livro de exercícios” (GARBI, 1997), contendo exercícios de aritmética e geometria, marca o início da álgebra antiga.

Percorrendo um longo caminho, a álgebra teve uma evolução lenta e gradual que culminou na criação do simbolismo adequado para representar operações de resolução de equações por volta de 1700 d.C. Por exemplo, a álgebra dos babilônios apresenta uma variedade de problemas resolvidos, podemos citar a resolução de equações quadráticas. A análise dos papiros Rhind (ver figura 8) e de Moscou, documentos egípcios que datam de cerca de 1650 a.C e 1850 a.C respectivamente, mostrou que a álgebra egípcia era bem desenvolvida.

Figura 8 – Papiro de Rhind

Fonte: (sitedecuriosidades.com)

Dos 110 problemas propostos nos papiros, muitos lidam com questões substanciais como o pão, cerveja, rações para gado e sobre o armazenamento de grãos. Ao todo, 26 deles são geométricos, decorrendo de fórmulas de mensuração necessária para o cálculo de áreas e volumes (EVES, 2004, p.75).

Tanto egípcios como mesopotâmios realizam seus cálculos geométricos envolvendo medidas de comprimento e área. A geometria babilônica relaciona-se fortemente com a ideia de mensuração prática, como resolver problemas de áreas de retângulos, triângulos ou ainda volume de sólidos como um prisma reto de base trapezoidal (EVES, 2004).

Na tábua de Strasburgo, com datação de 1800 a.C., encontramos pela primeira vez o caráter algébrico dos problemas geométricos apresentados pelos babilônicos. (EVES, 2004). Cálculos envolvendo práticas da agrimensura no Egito, em anotações de Heródoto, eram utilizados para determinar o valor de imposto que deveriam ser pagos ao rei, sendo que enchentes como a do Nilo cobriam parte da terra fazendo com que fosse necessário um novo cálculo para determinar o valor a ser pago (ROQUE, 2012).

A Álgebra apresenta três estágios de evolução ao longo dos anos:

i) Álgebra retórica (verbal): expressões escritas sem a presença de símbolos matemáticos utilizando somente palavras pela completa descrição do problema a ser solucionado;

ii) Álgebra sincopada: uso de abreviações no lugar das palavras;

iii) Álgebra simbólica: utiliza simbolismo próprio passando a ser objeto de estudo a própria estrutura e não apenas os procedimentos.

O matemático grego Diofanto (3d.C.), considerado por muitos como o pai da álgebra, foi o pioneiro na utilização de símbolos para a representação de incógnitas através de abreviações estenográficas. Diofanto viveu em Alexandria e ficou conhecido pelo seu estudo realizado em soluções de problemas algébricos considerados indeterminados, que mais tarde tornaram-se conhecidos como *problemas diofantinos*.

Na área de geometria, os gregos se destacam, entre eles citamos Tales (600 a.C) que estabeleceu que verdades precisam ser demonstradas, criando assim a matemática dedutiva. A geometria grega culminou com os notáveis Elementos de Euclides (300a.C) que sintetizou o conhecimento geométrico da época (GARBI, 1997).

As primeiras ligações entre a geometria e a álgebra são encontradas na matemática grega, com a criação de representação de um número por meio de um segmento de reta visando resolver problemas de caráter algébrico sem a utilização de qualquer notação algébrica. Valendo-se de uma álgebra geométrica para a resolução destes problemas.

Parte desta álgebra geométrica foi atribuída aos pitagóricos, esta interpretação geométrica para a resolução de caráter algébrico foi incorporada no Livro II dos *Elementos* (EVES, 2004, p.107).

No período que compreende a queda do Império Romano, na metade do século V, até o século XI, a produção de conhecimento atingiu níveis muito baixos. No século XIII, um dos principais nomes na história da matemática foi o italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci. Em viagens pelo Mediterrâneo, aperfeiçoou-se em álgebra, até então inexplorada na Europa. Duas descobertas exibem o desenvolvimento de uma álgebra simbólica: a primeira na Andaluzia em torno das escolas de ábaco no século XIII e no Magreb, bem como a sua transferência de conhecimentos para cristãos na Espanha. Com essas descobertas, J.Høyrup, propõe que Fibonacci não seria mais um paladino solitário na origem da nova matemática (ROQUE, 2012).

> De fato, um livro de ábaco anônimo, escrito provavelmente entre 1288 e 1290, é um dos primeiros exemplares do gênero a ser encontrado, e seu autor afirma seguir Fibonacci. Entretanto, como mostra Høyrup, o livro consiste de duas partes: uma que corresponde ao currículo básico das escolas de ábaco e que não tem nada a ver com Fibonacci; e outra que contém assuntos mais avançados, traduzidos do *Liber Abaci*, mas que revelam pouca compreensão da matéria exposta. Esse texto aponta que algumas notações magrebinas, usadas por Fibonacci, não tiveram difusão na Itália nesse período inicial. Tudo indica, portanto, que o texto foi escrito por um compilador familiarizado com as práticas de cálculo, pouco versado, contudo, na matemática efetivamente usada por Fibonacci, apesar de querer se apresentar como seu herdeiro devido, talvez, à fama que aquele possuía na época. (Roque, 2012. p.208)

Jacopo da Firenze, em 1307, no livro de ábaco foi um dos primeiros a propor uma álgebra. Este livro não apresenta indícios que confirmem a influência de Fibonacci, tampouco de árabes. Um dos fatos que podem confirmar é a ausência de provas geométricas e somente regras realizando uma mistura de matemática comercial e algébrica. Somente no final do século XV surgem indícios de uma notação simbólica (ROQUE, 2012). A álgebra do século XV e XVI era essencialmente a mesma dos árabes, com um simbolismo (não unificado) para operações e incógnitas.

> Na Europa do século XVI, desenvolveram-se pesquisas dedicadas à resolução de equações que empregavam uma grande quantidade de símbolos e que estão na origem de alguns dos que conhecemos até hoje. Os símbolos de + (mais) e − (menos) já eram usados na Alemanha. O símbolo para raiz quadrada, por exemplo, foi introduzido em 1525 pelo matemático alemão Christoff Rudolff. Seu aspecto vem de uma abreviação da letra *r*, inicial de "raiz". Em 1557, o inglês Robert Recorde publicou um livro de álgebra no qual introduziu o símbolo "=", usado por nós para a igualdade: um par de retas paralelas, pois "não pode haver duas coisas mais iguais". Os símbolos para o quadrado e o cubo da quantidade desconhecida provinham de abreviações das palavras latinas. (Roque, 2012. p.210)

No século XVI, a álgebra teve grande avanço científico, através do matemático francês François Viéte, sendo o primeiro a introduzir o uso de símbolos também para a representação dos coeficientes das equações, dando origem a era das fórmulas em matemática. No seu mais famoso trabalho, *In Artem*, Viéte, do qual muito o simbolismo algébrico deve, introduziu vogais para representar incógnitas e as consoantes para representar constantes. Não é de surpreender-se que ele tenha aplicado a álgebra à trigonometria e à geometria, pois Viéte foi um excelente algebrista (EVES, 2004).

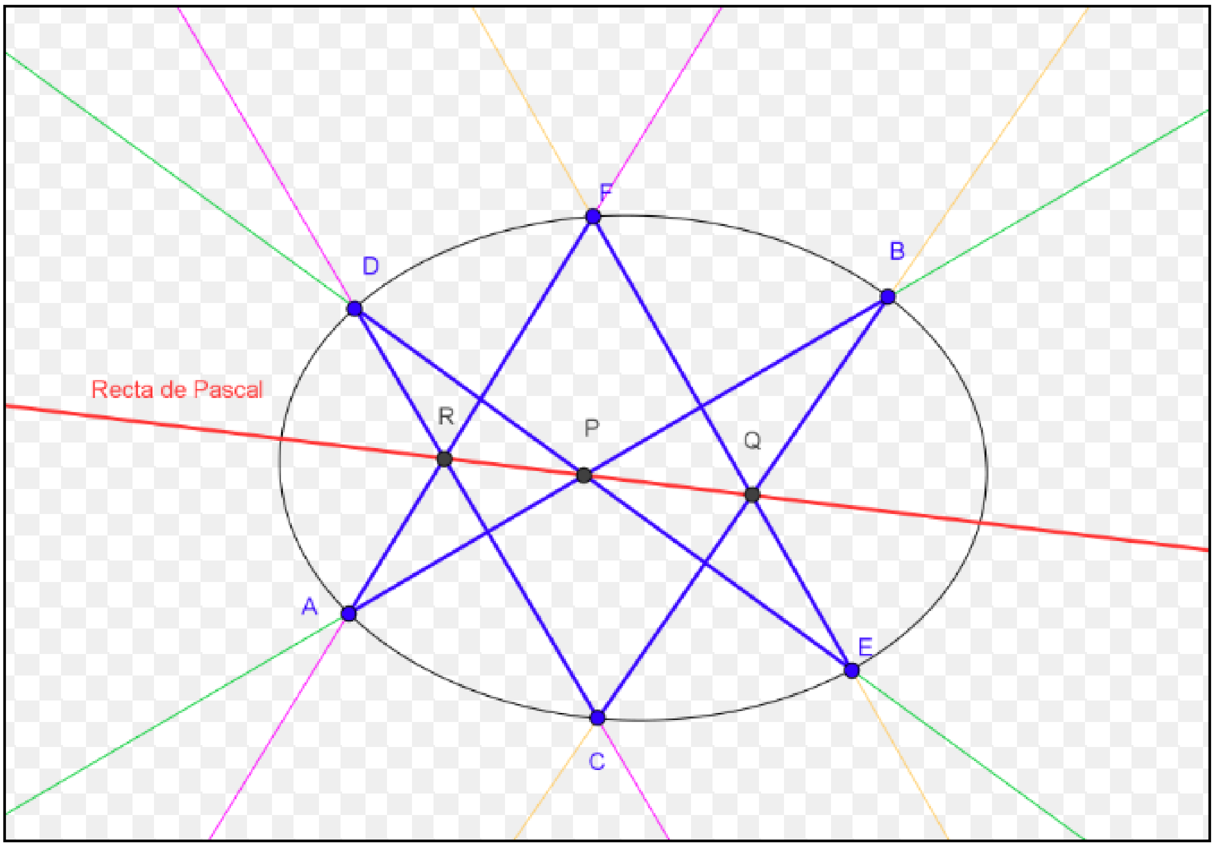
Outro precursor da geometria analítica, no século XIV, foi Nicole Oresme antecipando alguns aspectos da geometria analítica ao representar graficamente algumas leis, através do confronto da variável dependente (*latitudo*) com a independente (*longitudo*) o que permitiu manifestar explicitamente a equação da reta (EVES, 2004).

A geometria e a álgebra, até o século XVII, tinham origens semelhantes, sendo trabalhadas de forma independente, pois somente com a contribuição de Fermat e Descartes foi possível fundir estes dois ramos da matemática.

> As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados (EVES, 2004. p.383).

No século XVII, temos Pascal (matemático, físico, filósofo e teólogo), que com as suas descobertas torna-se um precursor da geometria projetiva "*se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares*" incluindo seus estudos sobre as cônicas.

Figura 9 – Hexágono Inscrito na cônica (elipse)



Fonte: (amontes.webs.ull.es)

Através dos estudos realizados pelos matemáticos, Pierre de Fermat e René Descartes que a geometria analítica foi "inventada", com o objetivo de resolver problemas geométricos pela intervenção de métodos algébricos. Com o desenvolvimento da álgebra por Fermat, em 1629, com a obra *Isogoge ad lócus planos et solidos* (Introdução aos lugares planos e sólidos), temos a equação geral da reta e da circunferência e uma breve discussão sobre parábolas, elipses e hipérboles e o início da localização de objetos utilizando um sistema de coordenadas tridimensional. Fermat partia de uma equação e encontrava um lugar correspondente, enquanto Descartes partia de um lugar geométrico para encontrar a equação (EVES, 2004).

4.1.2 Considerações de natureza didática

Nesta etapa da engenharia didática realizamos uma pesquisa em três das seis coleções recomendadas pelo Guia de Livros Didáticos (Plano Nacional de Livros Didáticos 2015), pois o livro didático é uma ferramenta de suporte na formação dos alunos. Analisamos como é abordado e a forma de ensino do conteúdo de geometria analítica, no 3° ano do ensino médio.

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (PNLD, 2015. p.9)

Essas coleções foram selecionadas por serem aprovadas pelo MEC (Ministério da Educação), posteriormente pelos contatos realizados com livros como docente. E algumas atribuições importantes do livro didático, no que diz respeito ao aluno e ao professor, segundo (PNLD, 2015. p.10):

Tratando-se do aluno estas atribuições podem ser:

- favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos;
- propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Tratando-se do professor estas atribuições podem ser:

- auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno;
- favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência.

São eles:

a) DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações**.** Volume 3.2ª ed. São Paulo: Ática, 2014.

b) LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática.** Volume 3. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

c) PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva 3**. Volume 3. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

No primeiro livro, Contexto e Aplicações, observamos a divisão do conteúdo de geometria analítica em três capítulos que são: ponto e reta, a circunferência e secções cônicas. O conteúdo inicia com uma breve abordagem história de geometria analítica e seus precursores, Descartes e Fermat. O livro deixa claro para o aluno que irá estudar curvas e suas propriedades geométricas, por meio de processos algébricos.

O livro apresenta o sistema cartesiano ortogonal e, para cada ponto um único par ordenado. Os conteúdos são apresentados de maneira suscinta, explorando-se possibilidades entre os pontos no plano cartesiano. O livro não estabele conexões entre a geometria plana e álgebra, apenas define para o aluno que calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, deve-se usar Pitágoras. Em contraponto, o livro faz a demonstração geométrica para determinar a equação do ponto médio entre dois pontos.

O livro traz um tópico no decorrer de cada assunto como: “Você sabia?”, “Fique Atento” e “Para refletir”, convidando o aluno a questionamentos e debates em sala de aula. O estudo da reta começa com a condição de alinhamento de três pontos, realizando uma demonstração geométrica para concluir que o resultado corresponde ao determinante. Explorando conceitos de inclinação e coeficiente angular, para posteriormente apresentar suas possíveis equações (fundamental, reduzida, geral, segmentária e paramétrica), explicando as vantagens de cada equação. Por exemplo, quando representamos a reta na sua forma segmentária, temos suas intersecções com os eixos coordenados. Devemos ressaltar que não há qualquer apresentação entre suas representações algébricas e geométricas.

Para cada tópico do conteúdo o autor faz uma demonstração no livro didático para a compreensão do aluno (o que está por trás de cada fórmula e seus conceitos implícitos ou não). O único tópico que não apresenta uma demonstração da fórmula, é a expressão que determina a distância de um ponto a uma reta.

No final do capítulo de retas temos ainda aplicações à geometria plana (um exemplo) e o tópico "Um pouco mais" que o autor apresenta o ângulo formado por duas retas no plano cartesiano. Antes do aluno realizar as atividades propostas, o autor apresenta questões relacionadas ao conteúdo com a sua resolução, orientando o aluno a cada "passo".

Na parte de circunferências, uma breve abordagem da sua equação na forma reduzida. O autor propõe duas possibilidades de encontrar centro e raio, a partir da equação geral: completamento de quadrados ou pela comparação entre a equação geral dada sua expansão algébrica.

Após as atividades sobre essasequações o autor aborda as posições relativas entre a reta e a circunferência. Somente no tópico – Um pouco mais – é trabalhado a posição relativa entre duas circunferências. Após esse estudo o autor traz novos tópicos: *Outros Contextos*, *Pensando no Enem*, *Vestibular Norte e Sul*.

O conteúdo de cônicas é apresentado de maneira clara ao aluno com demonstrações algébricas. Constatamos que o trabalho é concentrado nos estudos de reta, circunferência e cônicas, contudo a discussão para obtenção das curvas (parábolas, elipses e hipérboles) é extenso para esta etapa do ensino. Em nenhum momento do decorrer do conteúdo, o livro explorou a posição relativa entre ponto e circunferência e as inequações no plano cartesiano. Observando as atividades propostas no decorrer dos tópicos, quase não apresentam aplicações práticas ligadas ao conteúdo de geometria analítica, focam quase que na sua totalidade a resolução algébrica, não articulando as possíveis representações. O autor não sugere em momento algum, a utilização do computador como ferramenta na aprendizagem do conteúdo até chegar em cônicas que, repentinamente surge um tópico *Matemática e Tecnologia* para a construção geométrica de parábolas e elipses, com o uso do software Geogebra.

No segundo livro, Conexões com a Matemática, que selecionamos, pode-se observar que assim como no primeiro livro o conteúdo de geometria analítica foi dividido em três capítulos: Conceitos básicos e a reta, a Circunferência e as Cônicas. O autor apresenta ao aluno os objetivos do capítulo e, logo no início da apresentação do sistema cartesiano ortogonal é apresentado um exemplo prático (simulação de resgate com a utilização de um helicóptero) sobre pontos no plano cartesiano. No próximo tópico (distância entre dois pontos) é solucionado o problema do helicóptero, mas não é explicitado ao aluno porque é utilizado o Teorema de Pitágoras para solucionar o problema da distância entre pontos.

Na sequência do conteúdo em coordenadas do ponto médio só é dito ao aluno que pelo Teorema de Tales...vale uma relação (sem utilizar a semelhança de triângulos) é apresentado a fórmula para calcular as coordenadas do ponto médio. No início do conteúdo de retas temos a condição de alinhamento de três pontos na qual o autor realiza uma demonstração geométrica para determinar se os pontos são colineares através do determinante.

No estudo da reta é apresentada ao aluno a equação geral da reta e a forma para sua obtenção via determinante. Após essa apresentação, o autor contempla a inclinação e o coeficiente angular de uma reta, para posteriormente, apresentar ao aluno como obter a equação fundamental da reta dado coeficiente angular e um ponto.

Na equação reduzida o autor apresenta o comportamento da função afim (crescente, decrescente ou constante) de acordo com o coeficiente angular, mas sem apresentar representações geométricas. Na equação segmentária é apresentada uma articulação entre a reta, na sua forma segmentária (algébrica) e sua representação no plano cartesiano (geométrica).

O autor faz uma breve abordagem sobre equações paramétricas e apresenta ao aluno as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano (representação algébrica e geométrica). Após ser trabalhado com o aluno as posições relativas, incluindo o ângulo entre duas retas, é realizado através de um exemplo o cálculo da distância entre um ponto e uma reta e apresentado sua fórmula. De maneira resumida é tratado as inequações de primeiro grau no plano cartesiano.

No início do conteúdo de circunferência é apresentada sua definição geométrica e dois exemplos: LHC – Grande Colisor de Hádrons em Genebra e a London Eye em Londres. É versada ao aluno a apresentação da equação geral e reduzida da circunferência e o método da comparação e fórmulas, para o mesmo conseguir determinar centro e raio e as condições de existência de uma circunferência, sob o ponto de vista dos coeficientes na forma geral. Ainda em circunferência, o autor explora a posição relativa entre circunferência e ponto, circunferência e reta e circunferência e circunferência. Após este tópico inicia-se o estudo de cônicas explicitando suas construções geométricas e suas representações algébricas e geométricas no plano cartesiano.

No decorrer de cada conteúdo aparecem "janelas" com os itens: *Reflita* e *Observações* oportunizando o debate entre alunos e professor. Após cada tópico é solucionado pelo autor algumas atividades, com alguns comentários adicionais sobre a questão solucionada. Na seção de exercícios, temos as atividades de *aplicação*, de *aprofundamento* e depois a seção *desafio*.

O interessante deste livro é que ao final de cada capítulo é apresentado uma autoavaliação e retomada de conceitos, para o aluno consultar uma tabela e verificar o que precisa estudar novamente. Ao final do conteúdo de circunferência, o autor propõe um tópico “*pesquisa em ação*”, que explora a interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática.

Assim, como no primeiro livro há a preferência por exercícios algébricos em detrimento de resoluções geométricas, ou ainda uma articulação entre as duas representações. Além disso, é proposto ao aluno um número excessivo de exercícios e o tratamento dado às equações de reta é fragmentado, em contrapartida observamos algumas deduções bem articuladas com outros campos da matemática.

No terceiro livro, Matemática: Paiva 3, de forma distinta dos livros anteriores, a separação do conteúdo de geometria analítica é realizada em cinco capítulos: ponto e reta, formas da equação da reta e posições relativas, complemento sobre o estudo da reta, equações da circunferência e no último capítulo as secções cônicas.

Logo na primeira página, de maneira sucinta é explicado ao aluno o funcionamento do GPS. É exposta ao aluno uma representação algébrica com a sua representação geométrica de um ponto, uma reta, uma parábola e uma região no plano cartesiano. Supondo que o aluno conheça a representação do ponto como um par ordenado e sua representação geométrica, o autor a inicia o conteúdo em distância entre pontos.

De maneira superficial é apresentado a equação da distância entre pontos, assim como o ponto médio de um segmento. No estudo das retas é mostrado ao aluno o coeficiente angular e como determinar o seu valor conhecendo dois pontos da reta. A seguir temos alinhamento de três pontos sem explorar o cálculo do determinante, apenas a variação entre pontos. As equações de reta que são apresentadas: equação fundamental da reta, equação geral, equação reduzida e as equações paramétricas. Sobre as retas é explorada a intersecção entre duas retas no plano cartesiano e a condição de concorrência entre retas.

Somente no terceiro capítulo, o autor utiliza determinantes para condição de alinhamento e obtenção da equação da reta. Observa-se que o estudo sobre equações de retas neste livro é fragmentado, embora o autor procure estabelecer relações básicas entre as figuras geométricas e suas equações. Há em demasia o uso de regras e fórmulas em detrimento da exploração e investigação. É apresentado ao aluno as inequações no plano cartesiano de forma básica (melhor explorado que nos dois primeiros livros).

No início das atividades com as circunferências é apresentado uma aplicação interessante do processo de formação de um tsunami e do funcionamento de um sistema de alerta. Após breve introdução a forma reduzida da circunferência é apresentado ao aluno a equação geral (na sua forma algébrica).O autor explora as condições de existência de uma circunferência, bem como a obtenção de centro e raio a partir da equação geral, utilizando o método do completamento de quadrados, o que é elogiável. No final do capítulo é proporcionado ao aluno o estudo das posições relativas entre ponto e circunferência e reta e circunferência.

No início do estudo das cônicas é apresentado um exemplo de aplicações das cônicas (forno solar). É exposto aos alunos as cônicas como seções de dois cones e uma breve apresentação da origem dessas curvas e suas aplicações. O autor ainda apresenta a construção das cônicas utilizando pregos e barbante, bem como a sua representação algébrica e geométrica.

O diferencial deste livro é que ele apresenta ao final de cada capítulo um roteiro de trabalho, incentivando o trabalho em grupo e a troca de informações entre alunos e professor, trazendo a geometria analítica de forma contextualizada no tópico "*Matemática sem Fronteiras*".

Ao término desta breve análise, podemos concluir que os três livros didáticos que foram analisados abordam os conteúdos de maneiras similares no que se refere a sequência didática, bem como a construção do conteúdo de geometria analítica.Uma observação sobre os livros é a pouca utilização por parte dos autores, de exercícios e as conexões com as atividades desempenhadas pelas pessoas, pois na matemática, como citado no PNLD

> [...], articulam-se, de forma complexa e indissociável, dois aspectos. O primeiro é o das aplicações às várias atividades humanas, que têm sido origem de muitos dos belos modelos abstratos dessa ciência. Outro é o da especulação pura, voltada para problemas gerados no próprio edifício da Matemática e que, em muitos casos, revelaram-se fonte de surpreendentes aplicações (BRASIL, 2012, p.14).

Outro fato que nos sugere uma reflexão é a não sugestão dos autores com relação ao uso do computador como uma ferramenta de recursos para se trabalhar em sala de aula. Ambientes informatizados podem estimular o aluno e apresentam grande vantagem para a construção de gráficos, pois facilmente pode-se visualizar a representação geométrica de uma curva através da sua equação algébrica utilizada na atividade.

> Quanto ao potencial das múltiplas representações, considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a uma função pode – se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar famílias de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. Os programas que fazem "traduções" entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar – se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema á outro, atividade que geralmente demanda tempo. (GRAVINA-SANTAROSA, 1998, p.11)

Podemos afirmar que existem singularidades entre os livros didáticos analisados, então cabe ao professor selecionar o mais adequado, porém não se deve basear as aulas em um só livro. É imprescindível à formação no ensino médio, exercícios contextualizados para que o aluno seja parte integrante na sociedade como cidadão mais crítico. O professor deve pensar sua aula além de quadro e giz, utilizando outros recursos didáticos, como o computador, criando atividades para este fim, explorando conceitos matemáticos de forma a não fragmentar o conteúdo e, sim, os relacionando.

4.1.3 Considerações de natureza cognitiva

Procuramos identificar neste estágio da engenharia didática, as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem do conteúdo de geometria analítica bem como a articulação entre registros algébricos-geométricos e vice-versa. Para identificar os conhecimentos prévios dos alunos, elaboramos uma atividade inicial, seguindo as etapas da engenharia didática.

> O conceito de aprendizagem significativa, central na perspectiva construtivista, implica, necessariamente, o trabalho simbólico de "significar" a parcela da realidade que se conhece. As aprendizagens que os alunos realizam na escola serão significativas à medida que conseguirem estabelecer relações substantivas e não-arbitrárias entre os conteúdos escolares e os conhecimentos previamente construídos por eles, num processo de articulação de novos significados. (PCN, 1997. p.38)

Propomos 8 atividades prévias contemplando o conteúdo de geometria analítica (Ver Apêndice A). Aplicamos esta atividade antes da sequência didática, ambicionando identificar as principais dificuldades dos alunos em reconhecer objetos matemáticos, através de suas representações, bem como os tratamentos adequados dentro de cada registro. Esta avaliação investigativa auxiliará os professores na construção e planejamento das atividades para organizá-las de forma adequada às características dos alunos.

A primeira questão propõe aos alunos que conhecidos três pontos no plano cartesiano, determinem a equação da reta que passa por dois destes pontos, assim como construir a reta bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto de intersecção entre estas duas retas. Este conhecimento prévio contempla a conversão de registros algébricos e geométricos, entre outros. Estes conteúdos também foram trabalhados com alunos do 9° ano (bissetriz, plano cartesiano, sistema de equações) e no 1° do Ensino Médio (funções de 1° grau).

A segunda questão aborda inequações no plano cartesiano e foi planejado com o intuito dos alunos conseguirem converter uma representação algébrica em uma representação geométrica no plano cartesiano. A terceira questão da sondagem foi elaborada para verificar se os alunos conseguem representar de maneira geométrica uma reta e a influência do coeficiente linear na equação da reta. A quarta questão de sondagem tem como objetivo verificar se os alunos conseguem constatar a influência do coeficiente angular na equação da reta.

A quinta questão representa um elemento geométrico no plano cartesiano com o objetivo de verificar se os alunos conseguem transformar um registro geométrico em um registro algébrico, seguindo o processo inverso da questão dois. A sexta questão trabalha com o produto cartesiano, objetivando uma representação geométrica para o mesmo. A sétima questão parte do plano cartesiano e uma reta como objetivo verificar se os alunos conseguem coletar informações da curva no plano cartesiano e realizar uma conversão de registros. Na oitava questão temos 6representações algébricas e 6 geométricas com o objetivo de verificar se os alunos relacionam corretamente as curvas com as suas representações algébricas. Todas as questões acima podem ser observadas no apêndice A.

Alguns dos conteúdos das questões propostas na atividade prévia, os alunos já tiveram contato em sala de aula, no transcorrer do ensino fundamental e médio;(como os conteúdos das questões um, três, quatro, seis, sete e oito). Essas atividades serviram de embasamento para a sondagem do conhecimento prévio dos alunos, como os mesmos se colocavam diante do conteúdo, suas dificuldades e erros, servindo como base para a construção das próximas fases da engenharia didática.

4.1.4 Análise da atividade prévia

Construímos uma atividade prévia contendo oito questões que abordavam desde o tratamento dentro de um registro, até a articulação entre registros algébricos e geométricos. Durante a realização desta atividade os alunos dispuseram de um tempo de 100 minutos (2 períodos) para solucionar as questões com os seus conhecimentos prévios. Os alunos realizaram esta primeira atividade em duplas ou grupos de três participantes, reunidos conforme afinidade.

Realizamos esta atividade em sala de aula, em uma escola da rede estadual de Porto Alegre e contamos com a participação de 33 alunos do 3° ano do ensino médio. Na sua maioria os alunos mostraram-se confortáveis com relação à aplicação da atividade prévia. Alguns questionamentos foram realizados por parte dos alunos: *Vale ponto por participação?,E se eu não responder as perguntas corretamente?E se eu não conseguir terminar?*.

O que levamos em consideração como primeiro questionamento realizado pelos alunos durante a aplicação da atividade prévia, foi a preocupação em valer “ponto”. Ao informarmos os alunos que a atividade não acrescentaria ou descontaria nota, os alunos ficaram mais à vontade, contudo estavam receosos da impressão que causariam. Ressaltamos que nem todos os grupos de trabalho conseguiram resolver na sua totalidade as questões propostas na atividade prévia, seja por não saber resolver ou por não terem tido tempo suficiente.

Nesta fase da engenharia didática faremos uma análise sobre os resultados obtidos na atividade prévia. Apresenta-se a seguir a atividade 1 da atividade prévia (figura 10).

Figura 10 – Atividade 1 da etapa prévia

1. Construa o plano cartesiano e marque os pontos $A(-5,0)$, $B(5,0)$ **e** $C(0,5)$.

a) Determine a equação da reta que passa pelos pontos A e C.

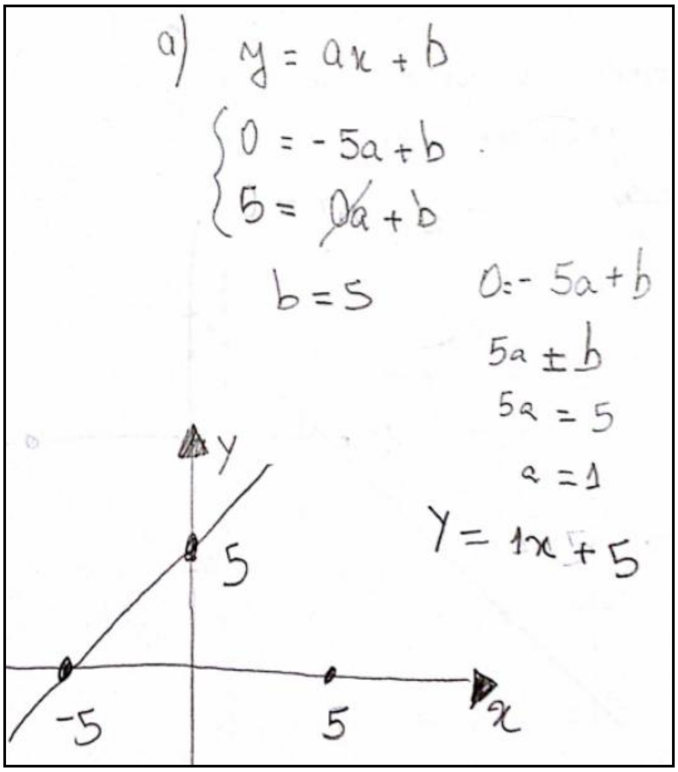
b) Construa a reta bissetriz dos quadrantes pares e marque o ponto de intersecção com a reta encontrada no item a.

c) Determine as coordenadas do ponto do ponto de intersecção.

Fonte: (o Autor)

Analisando os métodos utilizados pelos alunos para a resolução da atividade 1 da atividade prévia, percebemos que apenas três duplas relacionaram corretamente o item *a* da atividade 1, articulando corretamente a representação algébrica com a sua representação geométrica. O método usado pelos alunos consistia em substituir os pontos na equação da reta (relacionando com a função afim) e solucionar o sistema. Na sua totalidade os grupos marcaram os pontos corretamente no plano cartesiano e construíram a reta $\overleftrightarrow{AC}$, como podemos observar na figura 11.

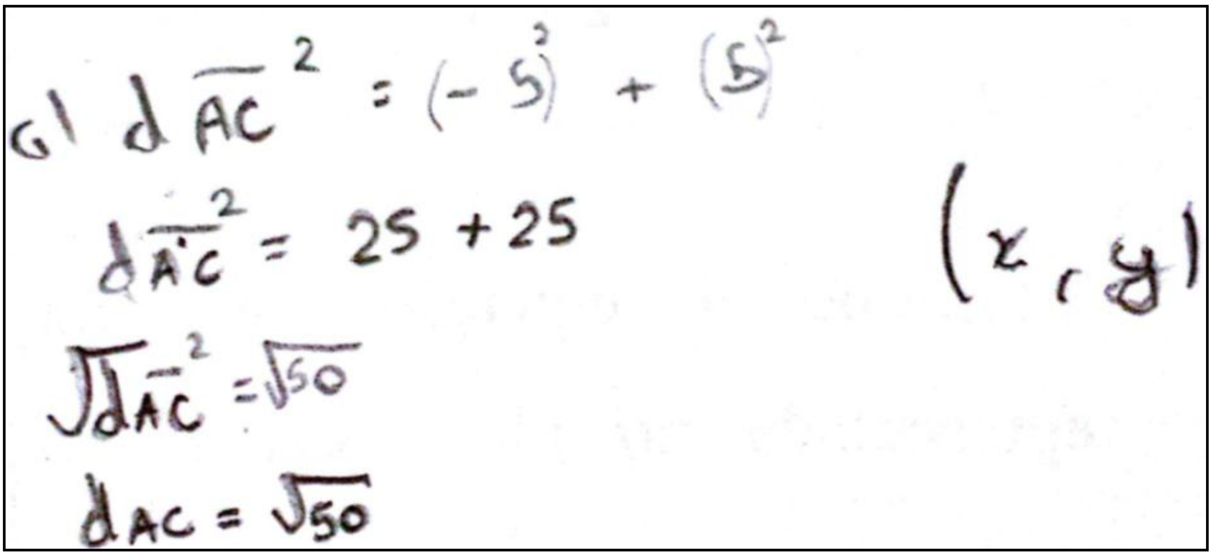
Figura 11 – Resolução da atividade 1 item a da atividade prévia pelo aluno A



Fonte: (acervo dos alunos)

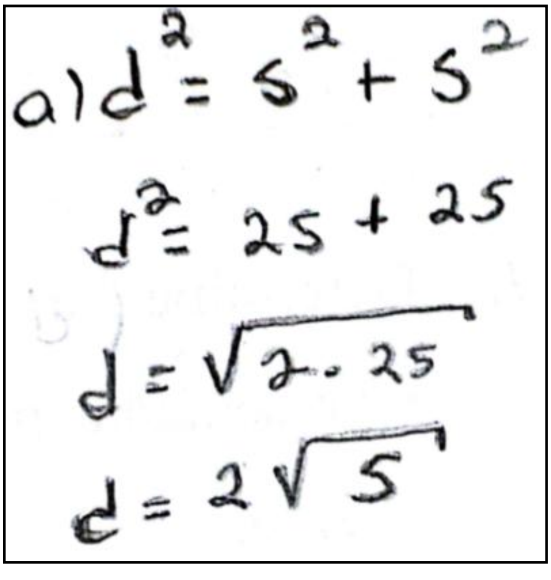
Como curiosidade ainda no item *a* alguns grupos (6 ao todo) calcularam a distância do segmento $\overline{AC}$, visto que era o conteúdo que estávamos trabalhando em sala de aula. Acreditamos aqui que os alunos não compreenderam o que era solicitado no enunciado, seja por falta de conhecimento ou interpretação do problema. Notamos ainda, alguns erros matemáticos durante a resolução da conta, no momento de extrair a raiz quadrada. Vejamos nas figuras12 e 13 o cálculo da distância realizado pelo aluno B e um equívoco na extração da raiz quadrada pelo aluno F, respectivamente.

Figura 12 – Resolução da atividade 1 item a da atividade prévia pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 13 – Resolução da atividade 1 item a da atividade prévia pelo aluno F

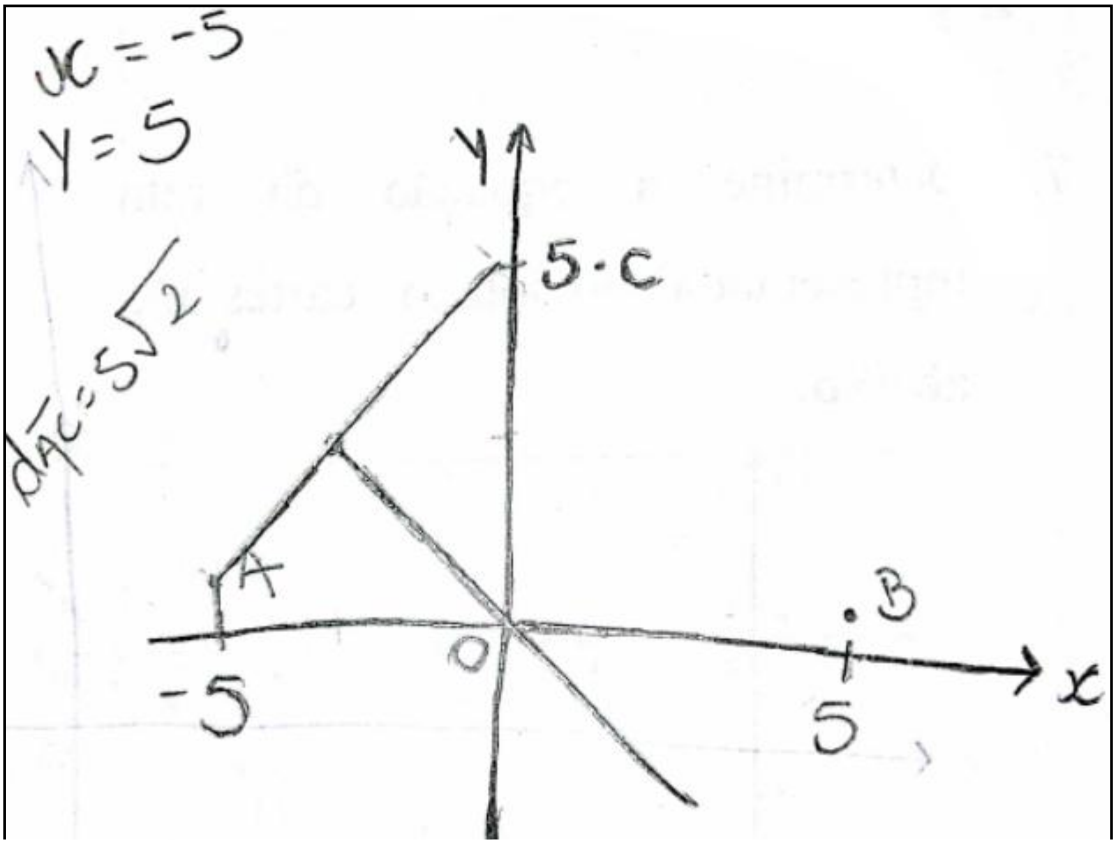


Fonte: acervo dos alunos

Acreditamos que esta dificuldade em relacionar a representação geométrica com a representação algébrica pode ter ocorrido pela falta de conexões entre as representações algébricas e geométricas ocorridas em anos anteriores. Constatamos também a dificuldade na extração da raiz quadrada como observado na figura 13 por parte dos alunos.

No item *b* da atividade 1, os grupos na sua maioria estavam com uma dificuldade associada a palavra bissetriz, o que nos levou ao quadro para um resgate de alguns conceitos da geometria plana. Após a explicação, apenas dois grupos não conseguiram construir corretamente a reta bissetriz. Dois grupos trataram a reta bissetriz como semirreta, como pode ser observado na figura 14 na resolução do item *b* proposto pelo aluno C, pode-se observar um erro, inclusive na localização dos pontos sobre os eixos coordenados.

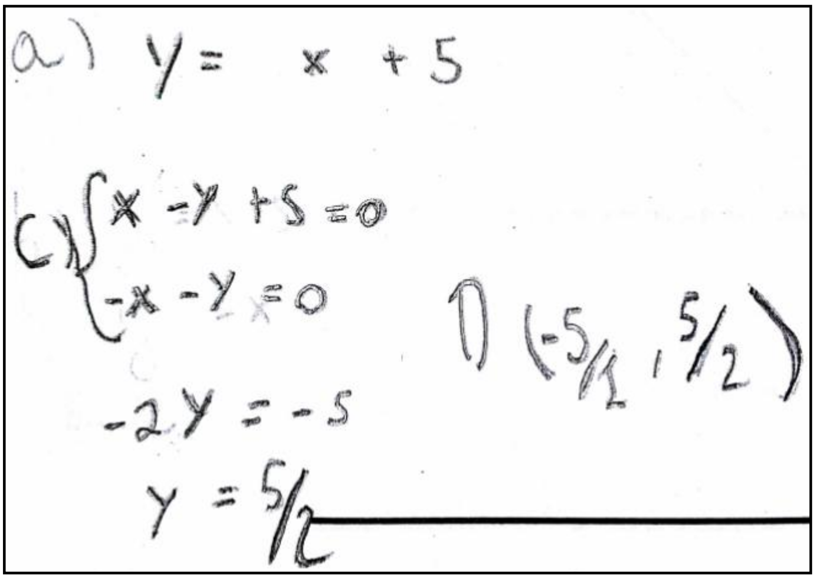
Figura 14 – Resolução da atividade 1 item b da atividade prévia pelo aluno C



Fonte: (acervo dos alunos)

No item *c* constatamos que os alunos, na grande maioria, responderam corretamente utilizando o ponto médio entre os pontos A(-5,0) e C(0,5). Acreditamos que por intuição visual, os alunos responderam corretamente, apenas três grupos realizaram a construção de um sistema para determinar o ponto de encontro entre as retas. Casualmente os mesmos três grupos que relacionaram corretamente a representação geométrica com a sua representação algébrica no item *a*. Podemos observar na figura 15 a resolução proposta pelo aluno D.

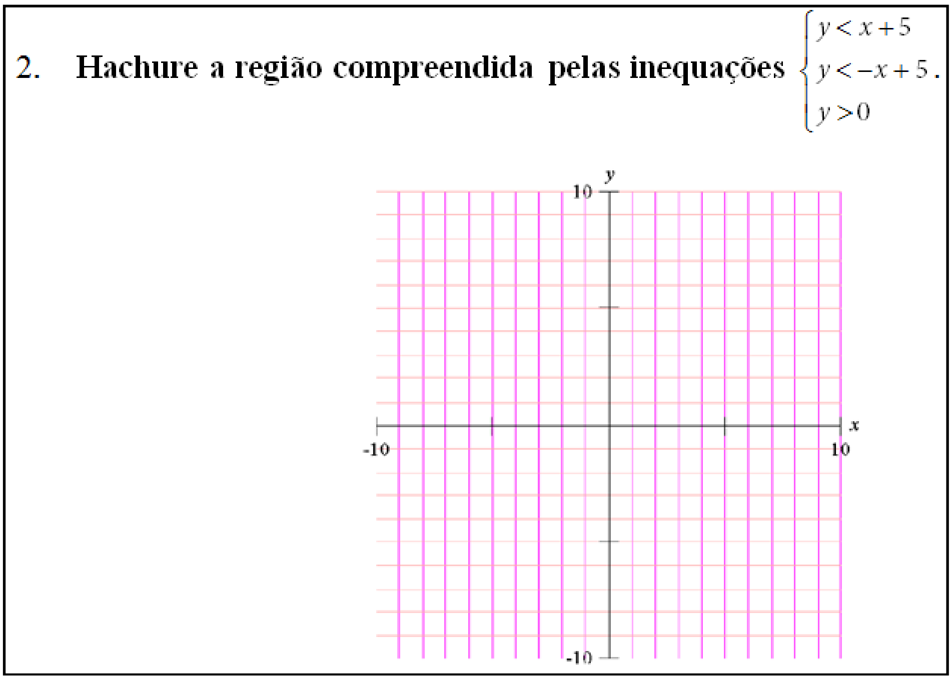
Figura 15 – Resolução da atividade 1 item c da atividade prévia pelo aluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

A atividade 2, da etapa prévia serviu para identificar se os alunos sabiam ou não, identificar e articular no plano cartesiano um sistema de inequações como se pode observar na figura 16.

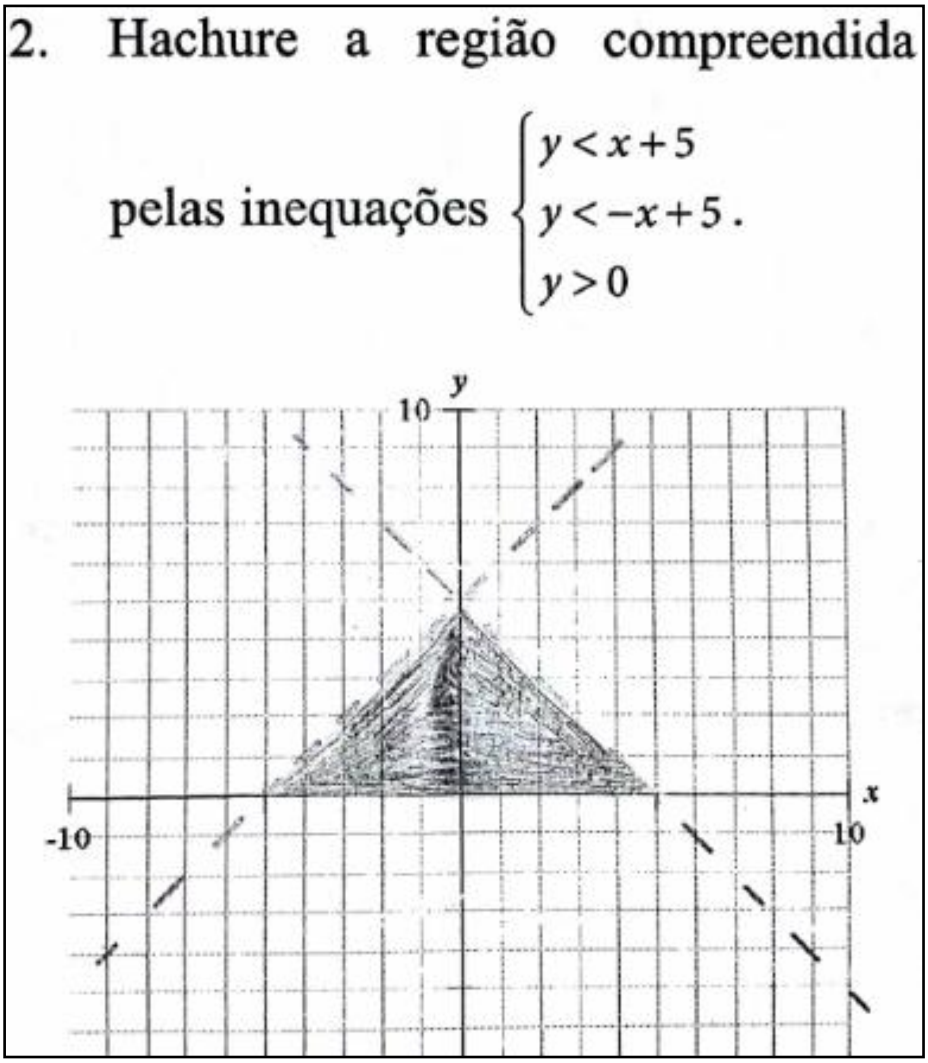
Figura 16 – Atividade 2 da etapa prévia



Fonte: (o Autor)

Observando os resultados obtidos nesta atividade ficamos surpresos, pois somente a dupla D respondeu corretamente. No início deste exercício fomos questionados pelos alunos sobre o significado da palavra hachure, após a explicação surgiram algumas regiões no plano cartesiano como retângulos e triângulos retângulos. Podemos observar na figura 17 a resolução daatividade2 proposta pelo aluno D.

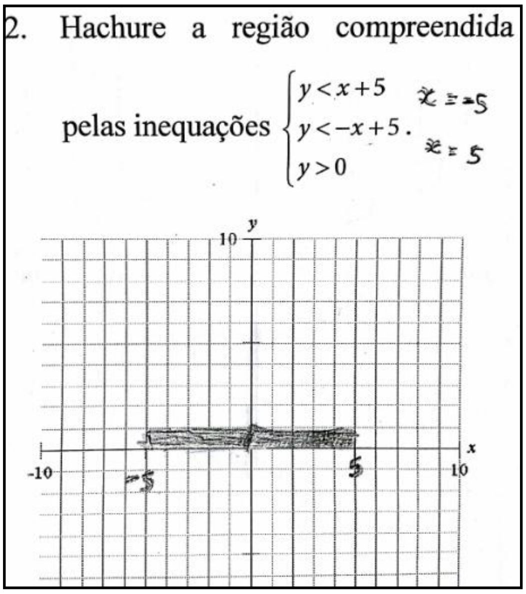
Figura 17 – Resolução da atividade 2 da atividade prévia pelo aluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

Gostaríamos de destacar a proposta de resolução da atividade 2 por um dos grupos de trabalho. Acreditamos que os alunos ignoraram a inequação e a trataram como uma equação e atribuíram o valor zero para *y* para determinar o intervalo de variação do *x* delimitando uma região retangular. Isto pode ser observado na figura 18.

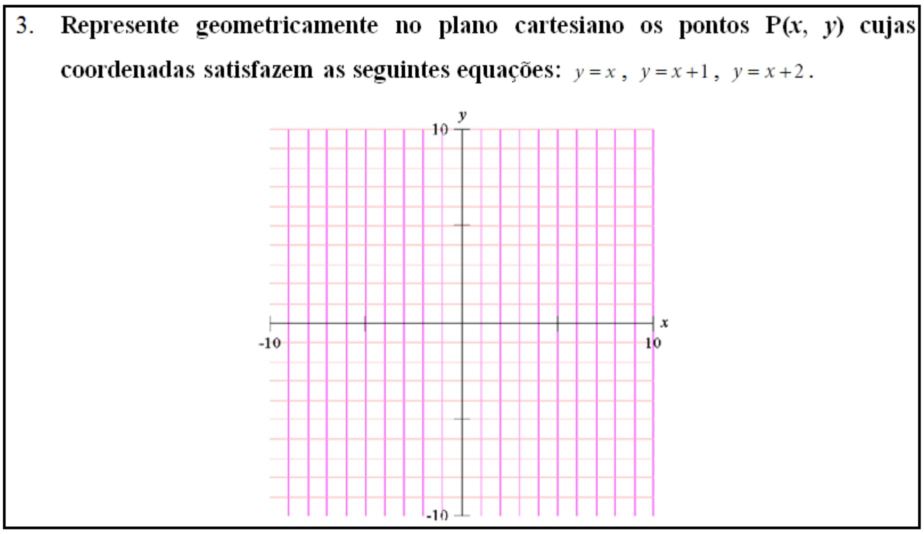
Figura 18 – Resolução da atividade 2 da atividade prévia pelo aluno F



Fonte: (acervo dos alunos)

A atividade 3 da atividade prévia serviu para analisar se os grupos detinham conhecimento na construção de retas no plano cartesiano, bem como a influência do coeficiente linear da reta, visto que o conteúdo já foi visto no primeiro ano do ensino médio em funções.

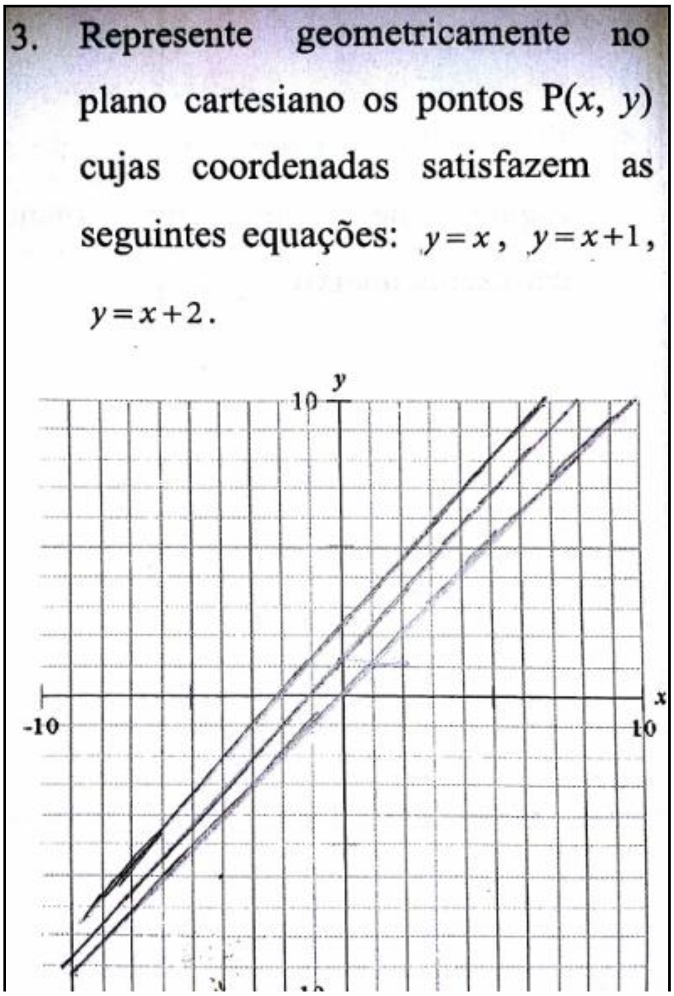
Figura 19 – Atividade 3 da etapa prévia



Fonte: (o Autor)

Analisando os resultados obtidos na resolução proposta pelos alunos, começamos a ficar preocupados, pois apenas as mesmas três duplas da atividade 1 responderam corretamente, visto que é um conteúdo explorado no 1° ano do ensino médio. Isto é, menos de 20% da turma conseguiu articular corretamente a representação algébrica com a sua representação geométrica. Podemos observar uma das resoluções corretas, proposta pelo aluno D na figura 20.

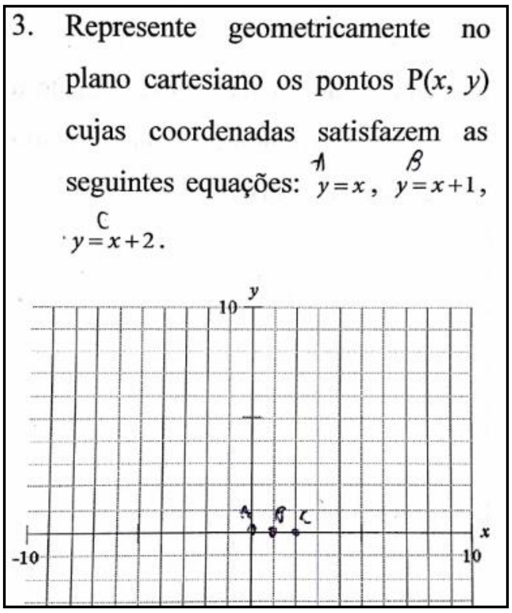
Figura 20 – Resolução da atividade 3 da atividade prévia pelo aluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

Sobre as resoluções da questão três, observamos que na grande maioria, sete grupos de trabalho, marcaram no eixo das abscissas os pontos (0,0), (1,0) e (2,0). Acreditamos que estes valores foram marcados e estejam relacionados com o coeficiente linear da reta nesta atividade como podemos observar na figura 21, proposta pelo aluno G.

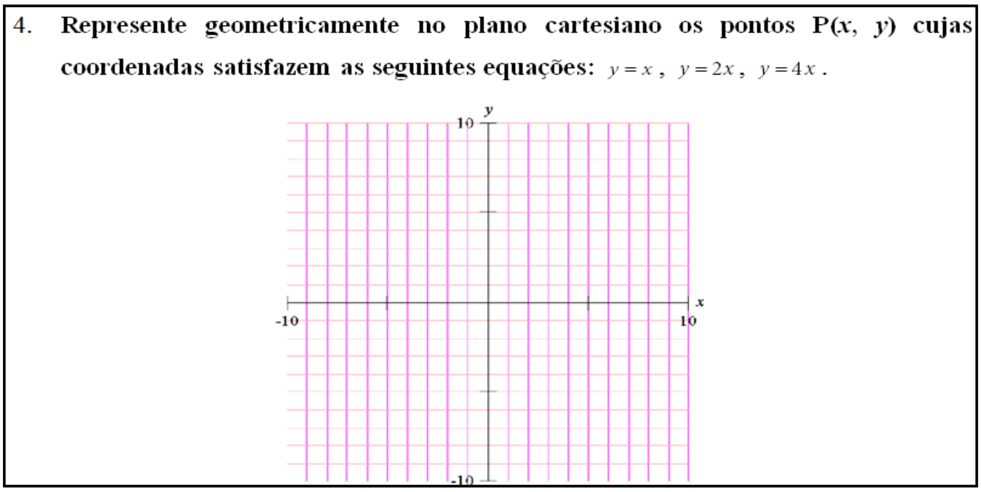
Figura 21 – Resolução da atividade 3 da atividade prévia pelo aluno G



Fonte: (acervo dos alunos)

A atividade 4 serviu como base para analisar se os alunos conseguiam construir retas no plano cartesiano, similar à atividade 3, mas também propondo que os alunos observassem e constatassem a influência do coeficiente angular (chamado também de declividade da reta, que determina a sua inclinação) na equação reduzida.

Figura 22 – Atividade 4 da etapa prévia

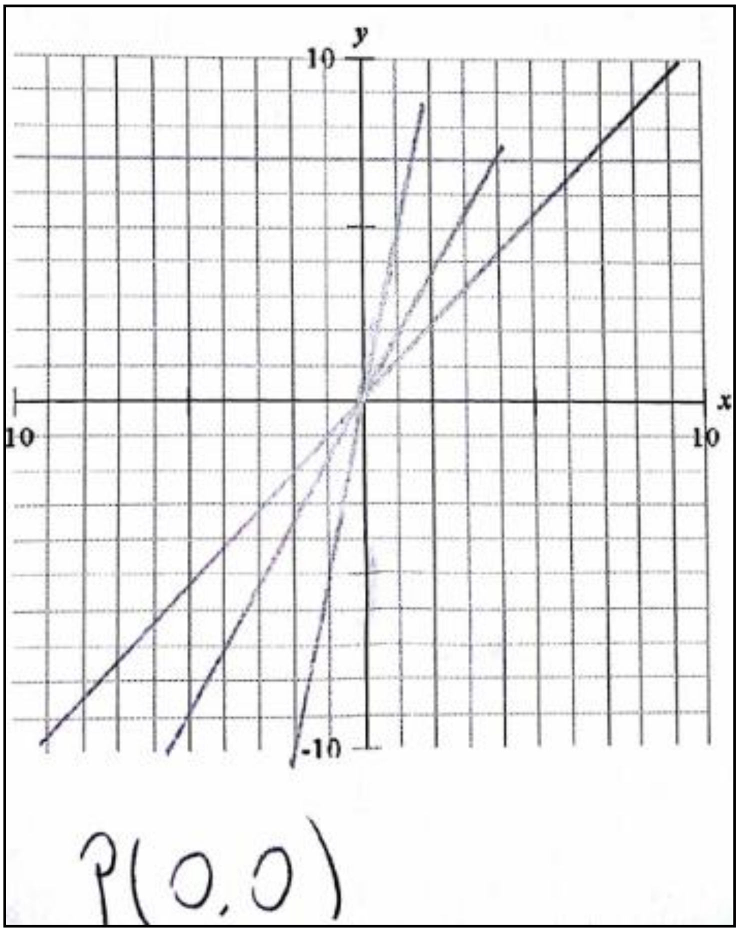


Fonte: (acervo dos alunos)

Analisando os resultados obtidos com este exercício, vimos que dos quatorze grupos de trabalho, oito deles deixaram a questão em branco. Neste momento apenas três duplas acertaram a atividade 4, sendo as mesmas duplas que acertaram as atividades 1 e 3. Nos outros grupos de trabalho que não acertaram e não deixaram em branco, surgiu como resposta uma região triangular hachurada, e outros dois grupos marcaram os pontos (0,0), (1,0) e (2,0) como solução para a atividade.

Acreditamos que estes pontos foram marcados no eixo das abscissas por estarem associados a variável *x*. Apresentamos na figura 23 a resolução proposta pelo grupo do aluno C, que juntamente com as duplas dos alunos A e D responderam corretamente.

Figura 23 – Resolução da atividade 4 da atividade prévia pelo aluno C

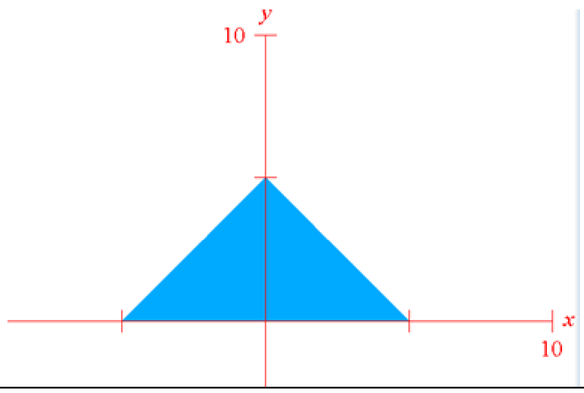


Fonte: acervo dos alunos

Na atividade 5 temos uma proposta de resolução análoga à atividade2 privilegiando a conversão no sentido geométrica-algébrica. Nesta atividade temos a região triangular hachurada e propomos aos alunos que determinassem o sistema de inequações, adequado a região dada.

Figura 24 – Atividade 5 da etapa prévia

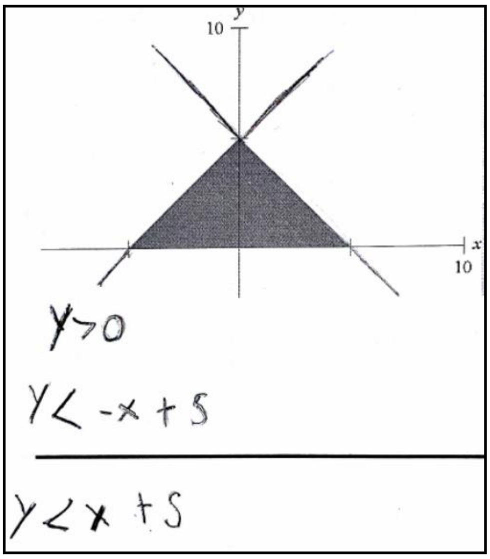
5. Utilizando inequações represente a região hachurada no plano cartesiano abaixo.



Fonte: o Autor

Nessa atividade observamos a solução dada por 4 grupos de trabalho, visto que oito duplas deixaram as respostas em branco, podemos verificar que apenas a dupla D respondeu corretamente o sistema de inequações e em observações desta dupla, em sala de aula vimos que rapidamente associaram a questão 5 à questão 2, visto que é a mesma questão apresentada em outro registro inicial em relação à atividade anterior. Nesta questão pudemos constatar a dificuldade dos alunos na conversão destes registros. Na figura 25 apresentamos a solução proposta pela dupla do aluno D.

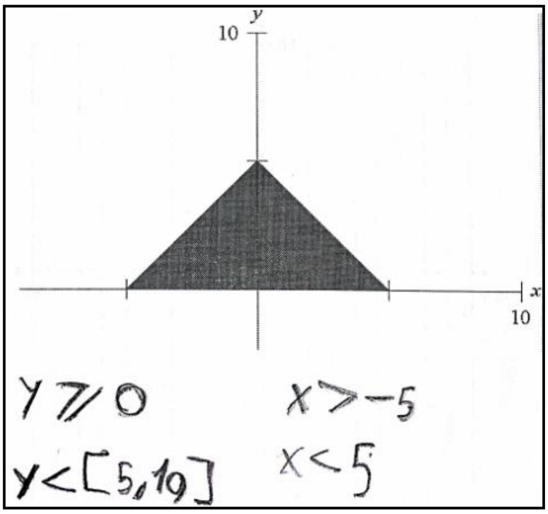
Figura 25 – Resolução da atividade 5 da atividade prévia peloaluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

Achamos interessante, porém incorreta a solução apresentada pela dupla do aluno A, que utilizou as inequações associando valores para os vértices do triângulo e limitando os valores de *x* e *y* no plano cartesiano. Constatamos ainda que a dupla apresenta algumas dificuldades na representação algébrica de inequações, como observamos na imagem da figura 26.

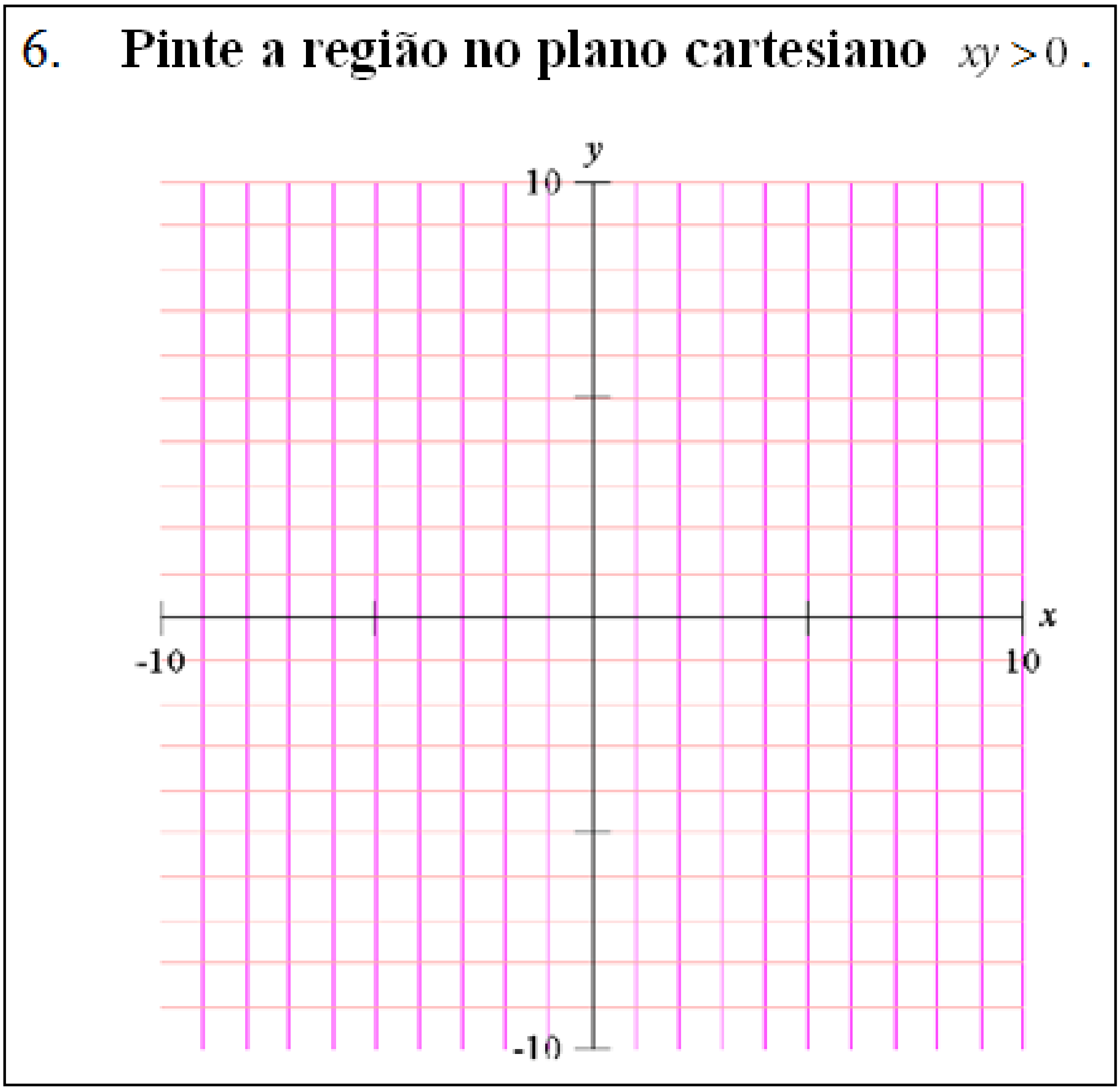
Figura 26 – Resolução da atividade 5 da atividade prévia pelo aluno A



Fonte: (acervo dos alunos)

A atividade 6 da atividade prévia tem como objetivo que alunos reconheçam o conjunto dos pontos em que o produto dos valores de *x* e *y* é positivo, como podemos observar na figura 27.

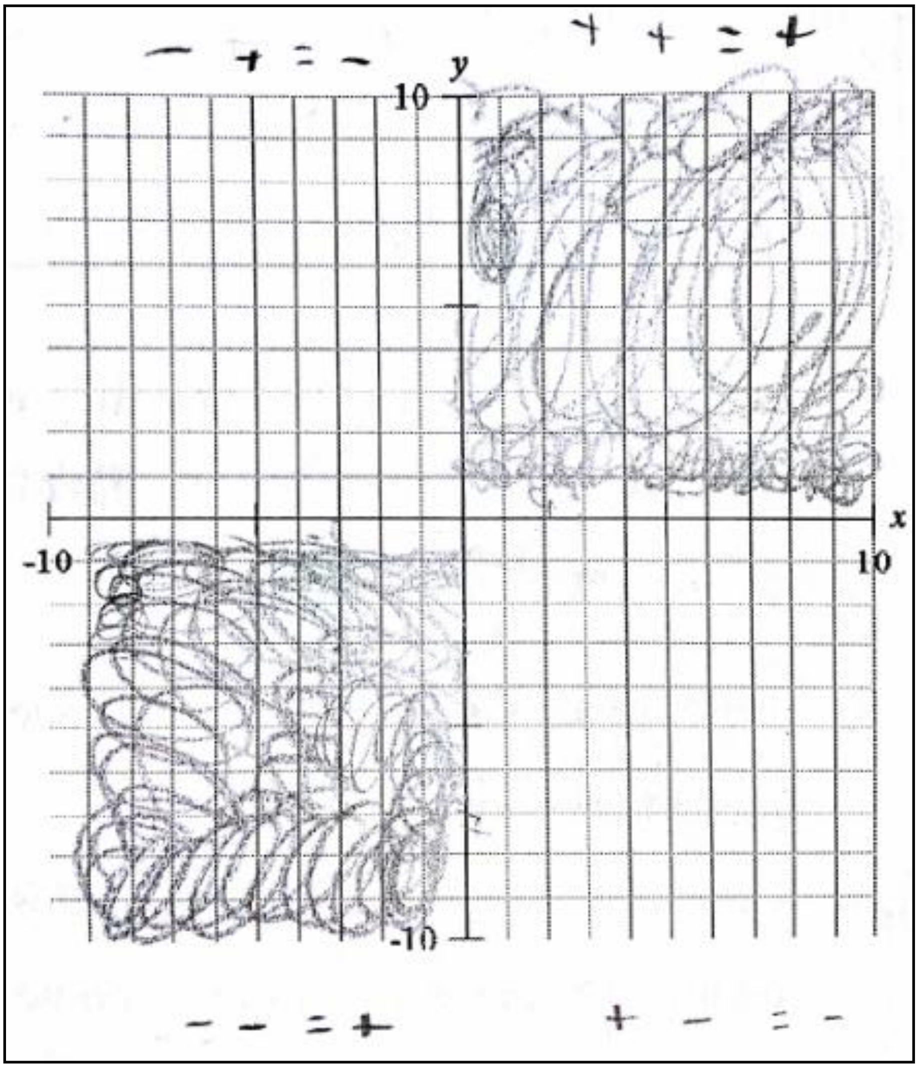
Figura 27 – Atividade 6 da etapa prévia



Fonte: (o Autor)

Analisando a resposta dada pelos grupos de trabalho da atividade 6, tivemos uma grata surpresa, pois seis grupos de trabalho responderam corretamente e dois grupos pintaram a região do primeiro quadrante como solução. Podemos observar na figura 28 a solução dada pelo grupo do aluno B que utilizou a *regra de sinais* da multiplicação para demarcar a região no plano cartesiano.

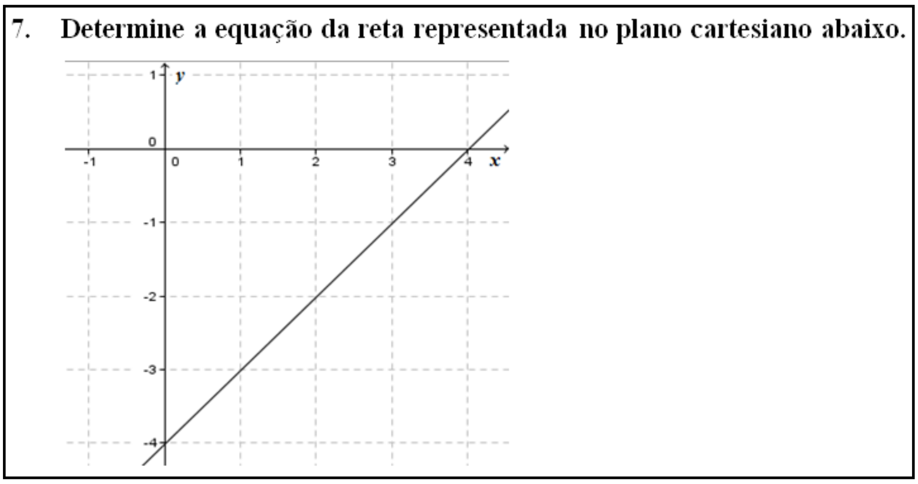
Figura 28 – Resolução da atividade 6 da atividade prévia pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

Na atividade 7 partimos de um registro geométrico, para verificar a capacidade dos alunos em determinar a representação algébrica da equação da reta. Esta atividade apresenta algumas semelhanças à atividade 1, desta etapa da sequência didática.

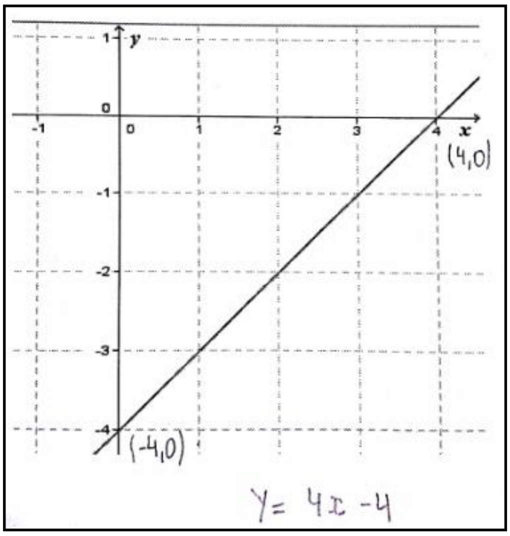
Figura 29 – Atividade 7 da etapa prévia



Fonte: (o Autor)

Na resolução da atividade 7 vimos que apenas os grupos de trabalho A, D e F novamente associaram corretamente a curva com a sua representação algébrica. Analisando as soluções destacamos a resposta dada pelo grupo do aluno F, que determinou os pontos corretamente (4,0) e (0,-4) e associou o número quatro ao coeficiente angular e menos quatro ao coeficiente linear por ele cortar o eixo das ordenadas, como podemos observar na figura 30.

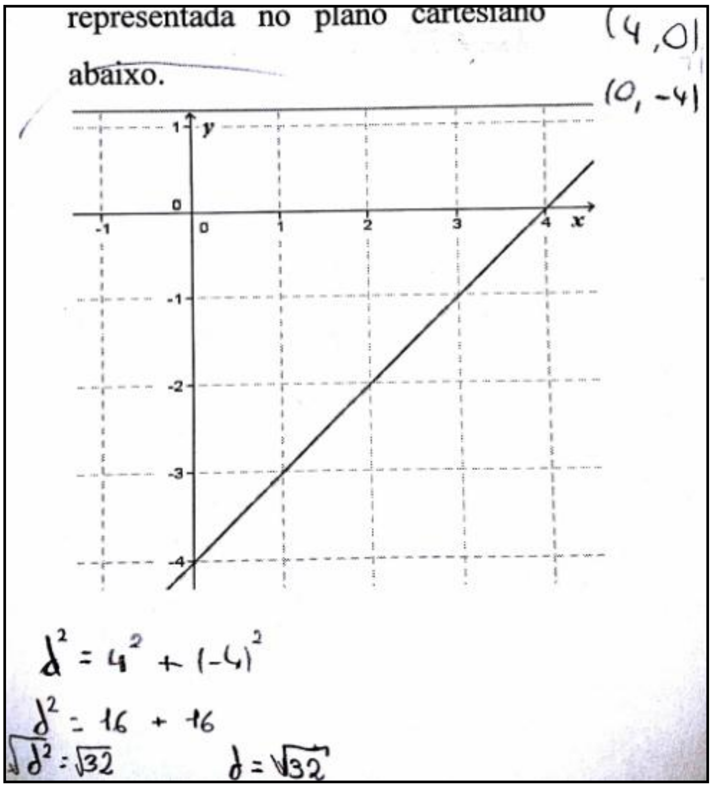
Figura 30 – Resolução da atividade 7 da atividade prévia pelo aluno F



Fonte: (acervo dos alunos)

Nesta atividade ainda constatamos que alguns grupos de trabalho (2 trios e 3 duplas) calcularam a distância entre os pontos, aqui ficando claro que os alunos não interpretaram corretamente o enunciado como pode ser observado na solução proposta pelo grupo do aluno E na figura 31.

Figura 31 – Resolução da atividade7 da atividade prévia pelo aluno E



Fonte: (acervo dos alunos)

Ainda na atividade 7 constatamos uma dificuldade na conversão de registros geométricos para registros algébricos. Ficamos surpresos com a dificuldade dos alunos em realizar a articulação entre os registros, acreditamos que uma das dificuldades esteja ligada ao fato dos alunos precisarem retirar informações do gráfico para realizar a conversão, ou seja, determinar dois pontos da reta, visto que no exercício 1 item *a* os alunos conheciam os dois pontos da reta.

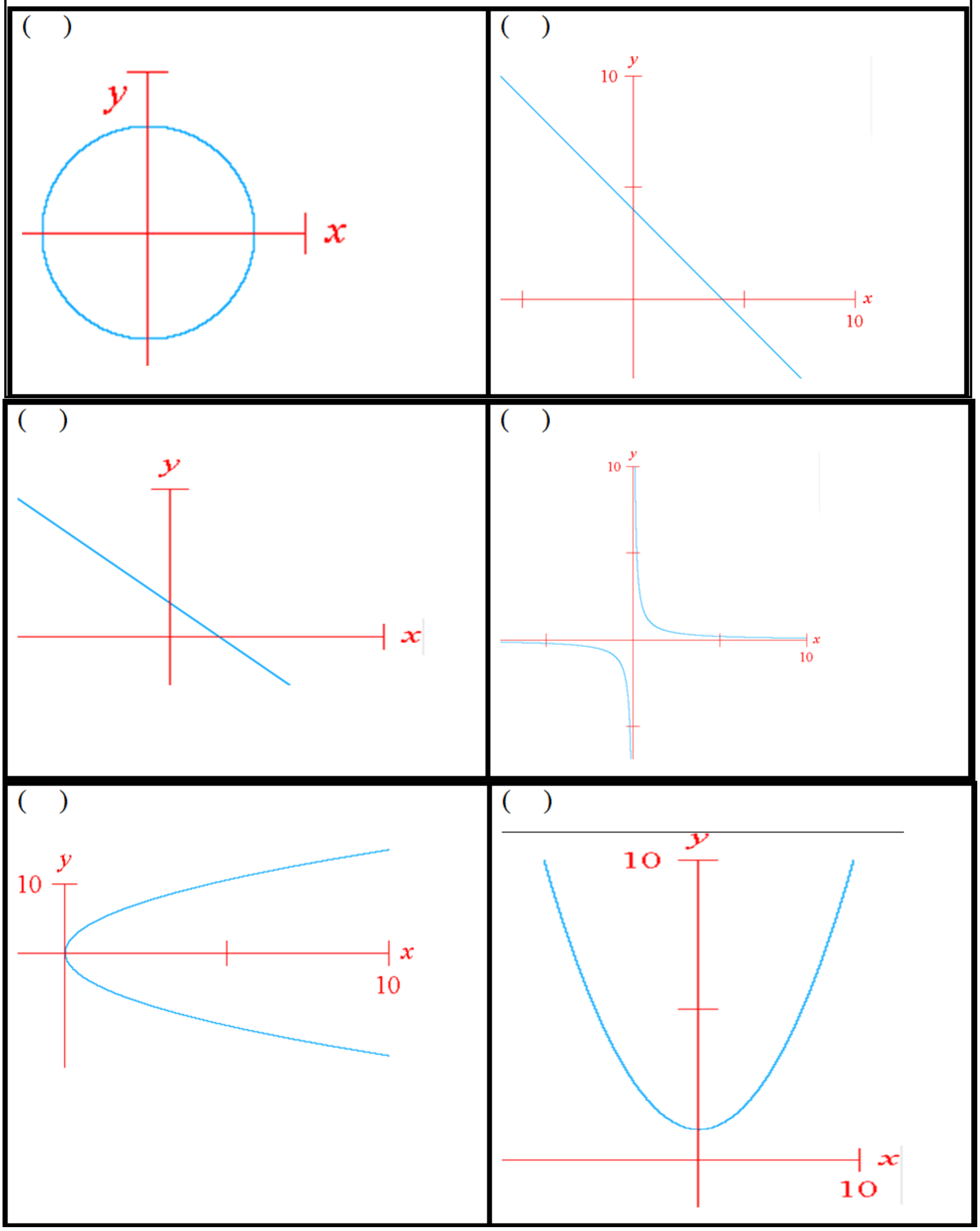
Na atividade 8 os alunos deveriam relacionar registros algébricos com a sua representação geométrica no plano cartesiano. Acreditamos aqui que os alunos utilizariam o método da substituição de pontos, para solucionar o problema e determinar corretamente as equações.

Figura 32 – Atividade 8 da etapa prévia

8. Relacione as equações com as suas respectivas representações geométricas.

a) $x+y=1$ b) $y=x^2+1$ c) $x^2+y^2=4$

d) $xy=1$ e) $x=y^2$ f) $x+y=4$



Fonte: (o Autor)

Vamos organizar em uma tabela os dados obtidos pelos grupos no exercício 8.

TABELA 1 – Dados acerca da atividade 8 da etapa prévia

Item	N° de acertos	N° de erros	% de acertos	% de erros
A	5	9	35,71	62,29
B	6	8	42,85	57,15
C	3	11	21,42	78,58
D	2	12	14,25	85,75
E	7	7	50,00	50,00
F	10	4	71,42	28,58

Fonte: (Próprio Autor)

Observando os dados obtidos na tabela acima percebemos uma dificuldade dos alunos em relacionar suas representações algébricas e geométricas. Os dois itens que obtiveram os menores índices de acertos foram: a equação da circunferência (desconhecida até então para os alunos) e a equação em que o produto das variáveis gera uma constante. Percebemos que os grupos não procuram nem “localizar” pontos que satisfaçam as equações. O que nos chama a atenção é a discrepância de acertos entre os itens *a* e *f*, pois ambas são equações de retas diferenciadas apenas pelo coeficiente linear.

4.1.5 Constrangimentos

Constatamos em nossa atividade prévia, e em pesquisas realizadas em trabalhos aplicados recentemente, Lutz (2015), Martinelli (2013), Gauto (2013), Dallemole (2010) e Balejo (2009), constatamos que na sua grande maioria, os alunos apresentam dificuldades em realizar tratamentos e converter registros algébricos em geométricos e vice-versa, em geometria analítica.

Na realização da atividade prévia constatamos algumas possíveis dificuldades para a aplicação da sequência de ensino do conteúdo de geometria analítica, devido à dificuldade de alguns alunos em solucionar as atividades1, 3, 4 e 7 da etapa prévia. Estas questões abordam temas já trabalhados pelos alunos no 1° ano do ensino médio, em funções de 1° grau. As mesmas questões tiveram índices de acertos em torno de 20%.

A maior parte dos alunos apresentou uma limitada compreensão sobre retas, demonstrando dificuldades na abstração e interpretação. Constatamos que os alunos não compreenderam de maneira satisfatória conteúdos vistos anteriormente, como função afim e função quadrática, pois de acordo com Duval (2006) para que haja compreensão integral de um conteúdo, o aluno deve transitar e conhecer pelo menos duas representações do mesmo objeto matemático.

Em conversas com outros professores, sobre a utilização de tecnologias em sala de aula, os professores de Geografia, Biologia, Química e Física utilizavam os computadores em sala de aula, mas apenas na forma de slides com conteúdo e imagens sobre o que estava sendo trabalhado. Acreditamos que o uso de mídias digitais possa ser um obstáculo na aplicação da nossa proposta didática, pois nessas conversas, poucos professores trabalham em ambientes informatizados e os alunos na sua maioria estão mais acostumados a utilizar o computador como forma de entretenimento.

As atividades que propomos na sequência didática visam conectar as representações algébricas e geométricas com o uso do software GrafEq para que os alunos compreendam que cada objeto matemático pode apresentar mais de uma representação. Acreditamos que, com a utilização do software a visualização da representação gráfica de uma curva no plano cartesiano, através da sua representação algébrica, irá auxiliar os alunos qualitativamente, auxiliando no entendimento e na conversão de registros.

4.2 CONCEPÇÕES E ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta primeira etapa, realizamos alguns estudos de natureza epistemológica (evolução do conteúdo), didática (como o conteúdo é tratado nos livros didáticos recomendados pelo MEC) e cognitiva (possíveis obstáculos na aprendizagem e a dificuldade dos alunos em reconhecer objetos na sua representação algébrica e geométrica) sobre o conteúdo de geometria analítica. No final desta etapa realizamos uma sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos e para isso elaboramos e aplicamos esta atividade (Ver Apêndice A).

Após a realização dos estudos preliminares, elaboramos uma sequência de ensino com algumas atividades para auxiliar a aprendizagem de geometria analítica. Nossa proposta tem como um dos objetivos apresentar para o aluno o conteúdo de maneira distinta da forma tradicional (quadro branco/negro, canetas/giz, exercícios e aplicações de fórmulas) como foi constatado em algumas observações.

Durante a aplicação da nossa sequência de ensino procuramos engajar os alunos na resolução das atividades propostas, com trabalhos em grupos e em ambientes informatizados.Constatamos na análise didática, através de três livros recomendados pelo MEC, que o ensino do conteúdo de geometria analítica não explora de maneira satisfatória a articulação entre registros algébricos e registros geométricos. Mesmo nos exercícios que é solicitado ao aluno para construir uma reta, dada sua equação, acreditamos que tais procedimentos impossibilitam ao aluno visualizar o comportamento da curva no plano cartesiano.

A partir dos resultados obtidos na atividade prévia, realizamos nossas primeiras escolhas para a elaboração e construção das atividades. Este delineamento das escolhas realizadas diz respeito às variáveis de âmbito global (mais amplo), que se referem à organização da engenharia didática. A seguir, será descrita nossas escolhas.

a) Articular registros algébricos e geométricos

Como referencial teórico, utilizamos os registros de representação semiótica de Raymond Duval para a elaboração da sequência de atividades desta pesquisa. Como descrito no capítulo dois deste trabalho, a matemática é uma ciência cujos objetos são abstratos, meramente descritivos, necessitando de símbolos para sua comunicação, bem como conceituar os objetos matemáticos é indispensável para sua compreensão.

Nossas atividades abrangem a articulação de registros algébricos e geométricos, pois representações semióticas são indispensáveis para a comunicação, pois não existe conhecimento que possa ser mobilizado sem a utilização de pelo menos um registro de representação, como mostra a afirmação:

> ...diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21)

b) Trabalhar em grupos (no mínimo 2)

Nossa proposta de ensino apresenta como característica a resolução das atividades criadas visando à aprendizagem de geometria analítica, o trabalho em duplas ou trios utilizado como recurso em sala de aula com o objetivo de estimular e dinamizar a participação dos alunos.

O trabalho em grupo promove a interação social entre os membros fazendo com que os alunos troquem informações, escolham, avaliem e decidam, além de promover a discussão e o debate sobre o conteúdo, ampliando suas capacidades de respeitar posições diferentes. Dada a importância da interação para o processo de ensino aprendizagem, Veiga (2000) afirma que

> grupos formados com objetivos educacionais, a interação deverá estar sempre provocando uma influência recíproca entre os participantes do processo de ensino, o que me permite afirmar que os alunos não aprenderão apenas com o professor, mas também através da troca de conhecimentos, sentimentos e emoções dos outros alunos. (Veiga, 2000, p.105).

c) Utilizar como recurso computacional o software GrafEq

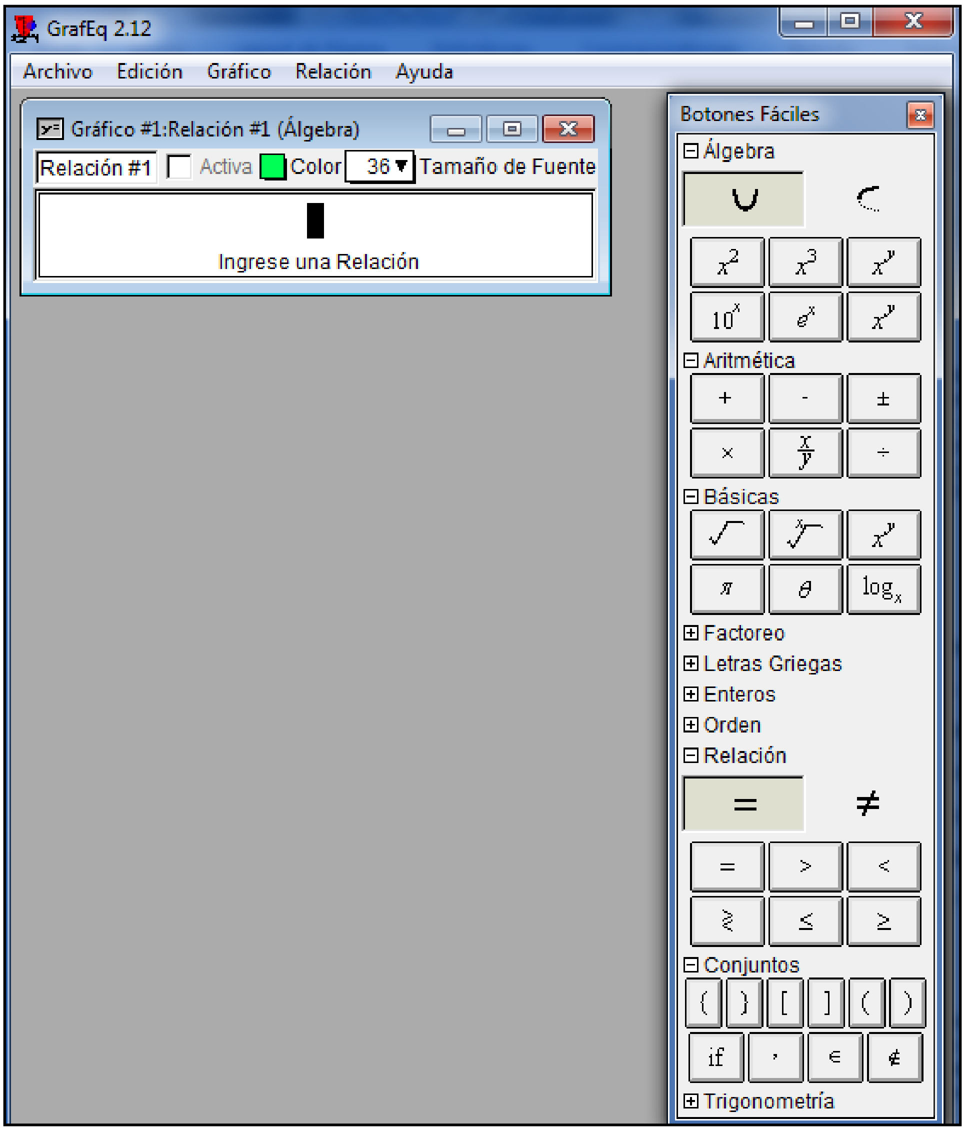
Nossas atividades foram planejadas para serem trabalhadas em um ambiente informatizado, buscando facilitar a aprendizagem do conteúdo de geometria analítica para que o aluno trabalhe alguns conceitos de geometria plana via equações. Utilizamos como ferramenta para o desenvolvimento das atividades o uso do software GrafEq[4].

É um poderoso software de matemática utilizado para plotagem de funções e inequações em coordenadas cartesianas e polares. É um programa intuitivo e flexível que vamos utilizar para trabalhar conceitos de Geometria Analítica, pois permite que o aluno possa explorar os objetos matemáticos, visualizando simultaneamente a representação algébrica e a geométricas. Dentre suas vantagens destacamos que o software:

- Possui uma versão livre para acesso-teste e uma versão completa que deve ser paga;
- É um programa "leve", que pode ser utilizado em diversos computadores sem perder sua eficiência e velocidade.

[4] Seu download pode ser feito em http://www.peda.com/grafeq/

Figura 33 – Interface do GrafEq



Fonte: (GrafEq)

Ambientes informatizados apresentam grande potencial de exploração para articulares registros algébricos e geométricos de diferentes objetos matemáticos em sala de aula tornando-se significativos no processo da construção de conceitos acerca de objetos matemáticos. Segundo Gravina e Santarosa (2008) ambientes informatizados apresentam elevado potencial aos processos de aprendizagem, oferecendo vantagens ao modo clássico (quadro negro/branco e exercícios) entre elas a de explorar uma grande variedade de curvas em pouco tempo, pois esse caráter estático pode por vezes dificultar a construção do significado.

> No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o fazer matemática: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de fatos, geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e consequentemente não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático. O processo de pesquisa vivenciado pelo matemático profissional evidencia a inadequabilidade de tal abordagem. Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido. (GRAVINA, SANTAROSA p.73)

Para isso elaboramos uma sequência de ações que vão permitir aos alunos explorar e investir acerca da influência dos parâmetros angular e linear da reta, bem como relacionar regiões no plano cartesiano através de inequações. O uso de computadores e celulares em sala de aula pode atuar como um fator positivo, pois aproxima o aluno da sua rotina (estar sempre conectado nas mais diversas redes sociais), pois muitas vezes a matemática é apresentada de forma obsoleta, por vezes inútil aos olhos do educando.

Através destas análises preliminares, construímos uma sequência de ações que deverão ser aplicadas em 8 a 10 encontros para que os alunos consigam compreender alguns conceitos básicos da geometria analítica. Durante a realização desta sequência de ações objetivamos que os alunos ao final saibam exemplificar e justificar os procedimentos realizados, estabelecendo conexões entre os objetos matemáticos, realizando conversões e tratamentos nas representações algébricas e geométricas.

4.2.1 Hipóteses

O desenvolvimento cognitivo do aluno é o objetivo maior deste processo, para isso nesta etapa da engenharia didática, algumas previsões foram feitas a respeito do comportamento dos alunos frente às situações didáticas propostas nas atividades construídas na sequência de ensino. Estas hipóteses iniciais serão comparadas posteriormente, com os resultados obtidos ao final da aplicação da sequência de ensino. Segundo Carneiro (2005, p.103), “tomar decisões e formular hipóteses são ações simultâneas”, pois ao mesmo tempo em que aplicamos as atividades formulamos hipóteses de como será o comportamento do aluno.

Para que ao final das atividades o aluno seja capaz de atribuir conceitos, raciocinar, interpretar e resolver problemas que se apresentam em diversas situações da vida cotidiana e profissional contamos com o uso do software GrafEq. Acreditamos que este software auxilia os alunos na representação e visualização dos objetos matemáticos na sua forma algébrica e geométrica e vice-versa. Nossas atividades foram desenvolvidas e organizadas em um processo gradativo de exploração e dedução para que o discente explore e reconheça algumas curvas no plano cartesiano. Para que o aluno se aproprie desse conhecimento é necessário uma variedade de sistemas de representação, ou seja, utilizar

> Sistemas variados de escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes diagramas, esquemas, etc. (DUVAL, 2009, p.13).

Atualmente com o desenvolvimento da tecnologia e as frequentes veiculações de informações em alta velocidade elaboramos nossa proposta de ensino objetivando inserir os alunos em um ambiente informatizado. “É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento” (GRAVINA, SANTAROSA, 2008, p.73).

Elaboramos nossas atividades para serem realizadas em duplas ou trios, para que os alunos possam trocar informações, estimulando o debate de idéias promovendo a ampliação dos conceitos que possuíam anteriormente. Ao final de cada atividade proposta da sequência de ensino, os alunos devem explicitar os passos utilizados na construção, para isso as duplas devem responder um questionário, com o intuito de analisarmos os passos utilizados pelos alunos. Este questionário será analisado para confrontarmos os resultados obtidos com nossas hipóteses iniciais.

4.3 EXPERIMENTAÇÕES

Realizaram-se encontros uma vez por semana com uma turma de trinta e três alunos do 3° ano do ensino médio, a qual tinha quatro períodos de matemática por semana. Nosso trabalho foi dividido em três etapas de cinco encontros. Na primeira etapa com o auxílio do projetor realizamos uma breve introdução do funcionamento do software GrafEq explorando sua potencialidade em sala de aula.

Escolhemos esta turma para a realização e aplicação da sequência de ensino, pois a mesma já trabalhou com o professor pesquisador no 2° ano do ensino médio com a utilização de mídias digitais. No segundo encontro com os discentes, aplicamos a atividade prévia e a turma realizou a atividade na sua totalidade.

Solicitamos aos alunos que sentassem em grupos (2 a 3 participantes) para a realização das atividades, pois acreditamos que a troca de informações, ideias, métodos de resolução e os debates realizados contribuem para o crescimento do discente.

Nossa atividade prévia serviu para obtermos algumas “informações” sobre o conhecimento dos alunos acerca das futuras atividades e conteúdos trabalhados em anos anteriores. Em relação às atividades realizadas em sala de aula, concordamos com Carneiro (2005, p. 97), que diz: “o professor em ação não espera para analisar o trabalho após concluí-lo”. Ou seja, no decorrer das etapas de ensino propostas analisou-se o desempenho dos discentes acerca de suas facilidades e dificuldades.

No terceiro encontro realizamos a atividade 1 da sequência de ensino (Ver Apêndice C). Esta etapa foi realizada em dois períodos de 50 minutos. Nossas atividades foram alternadas entre aulas expositivas e aulas em ambientes informatizados, pois acreditamos que as duas metodologias se complementam, propiciando ao aluno um número maior de ferramentas para a aprendizagem.

No quarto e no quinto encontro realizamos as atividades 2 (Ver Apêndice D) e 3 (Ver Apêndice E), respectivamente, sempre utilizando dois períodos de 50 minutos para a realização de cada uma das atividades. As demais atividades optamos por não realizar num primeiro momento, devido ao número de feriados e a chegada das datas para as avaliações trimestrais.

4.3.1 Relato da etapa 1

Na semana anterior à aplicação da sequência didática solicitamos aos discentes que realizassem o download do GrafEq, com o objetivo de que eles pudessem explorar o aplicativo em casa, e lhes entregamos um tutorial do software(Ver Apêndice B) contendo breves explicações sobre como utilizar o programa e as ferramentas necessárias para a realização das atividades.

Nosso primeiro encontro para realização da etapa 1 da sequência didática ocorreu em sala de aula, visto que o laboratório de informática da escola estava impossibilitado de ser utilizado. Começamos com alguns percalços no caminho, pois neste momento precisávamos realizar uma adaptação da nossa proposta de ensino. Substituímos o uso do software GrafEq, pelo Geogebra (aplicativo de celular), pois os alunos já conheciam o software em experiências de anos anteriores (1° e 2° ano do ensino médio) com o professor pesquisador. Organizamos os alunos em duplas ou trios, conforme afinidade. Solicitamos aos grupos de trabalho que os mesmos realizassem, em suas casas, as construções no Grafeq e posteriormente enviassem os arquivos via e-mail ao professor pesquisador.

Previamente exploramos alguns conceitos iniciais[5] de geometria analítica com a turma. A etapa 1 da sequência didática foi realizada em dois períodos de 50 minutos sendo composta por cinco atividades, explorando regiões no plano cartesiano e a influência dos coeficientes na equação da reta como podemos observar na figura 34.

Figura 34 – Atividade 1 da etapa 1 da sequência didática

01. Construa no grafeq as seguintes relações:

- $-2 \leq x \leq 2$

a) Qual foi a representação geométrica que apareceu quando digitamos este intervalo?

____

____

- $x = 3, x > 3$ e $x < 3$

b) Construir cada uma das relações em sistemas de eixos distintos e descrever a diferença entre as representações gráficas que apareceram no Grafeq.

____

____

- $y = 2$ e $y > 2$

c) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

____

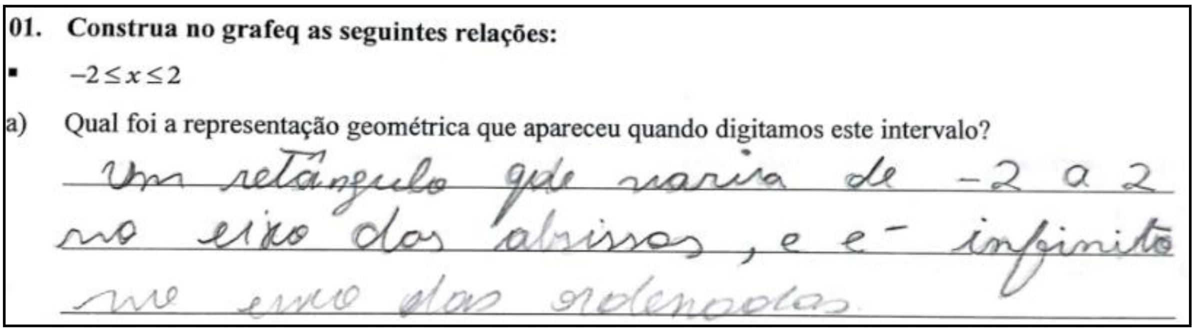
____

Fonte: (o Autor)

[5] O professor pesquisador considera conceitos iniciais como a localização de pontos no plano cartesiano bem como ponto médio e baricentro de um triângulo.

Nessa atividade propomos aos alunos que construíssem regiões retangulares nos primeiros dois itens da atividade 1. No item a, limitamos o intervalo no eixo das abscissas e no item b, deixamos o intervalo limitado à direita ou à esquerda para que no terceiro, os discentes conseguissem deduzir qual seria a representação geométrica obtida através das inequações fornecidas pela atividade. Neste momento começamos a constatar a troca de informações entre alunos, inclusive entre grupos para a solução do terceiro item. Os alunos questionaram o professor pesquisador se era possível utilizar o software para realizar uma verificação, se o que foi respondido estava de acordo com a região obtida com aquelas inequações fornecidas pela atividade. Observando as respostas dadas pelos grupos de trabalho, constatamos que na sua maioria (10 dos 14 grupos) identificaram uma "região retangular infinita" como podemos observar na figura 35.

Figura 35 – Resposta da atividade 1 item a dada pelo aluno A



01. Construa no grafeq as seguintes relações:

- $-2 \leq x \leq 2$

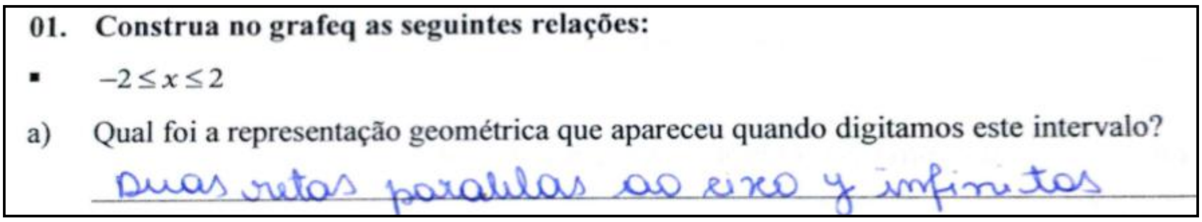
a) Qual foi a representação geométrica que apareceu quando digitamos este intervalo?

Um retangulo qde varia de -2 a 2 no eixo das absissas, e e- infinito no eixo das ordenadas.

Fonte: (acervo dos alunos)

A resposta dada por um dos grupos de trabalho chamou-nos a atenção, como podemos observar na figura 36.

Figura 36 – Resposta da atividade 1 item a dada pelo aluno C



01. Construa no grafeq as seguintes relações:

- $-2 \leq x \leq 2$

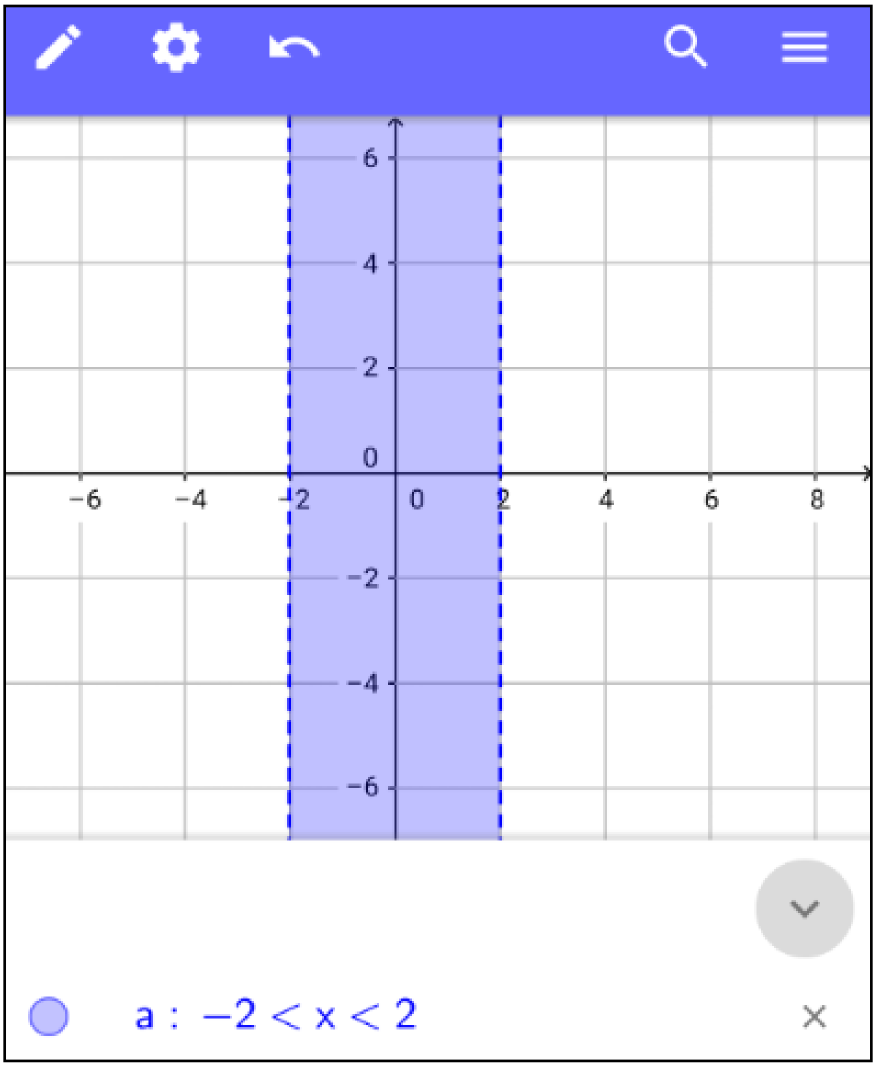
a) Qual foi a representação geométrica que apareceu quando digitamos este intervalo?

Duas retas paralelas ao eixo y infinitas

Fonte: (acervo dos alunos)

Após análise da resposta dada pelo aluno C, realizamos uma busca nos arquivos recebidos pelos grupos durante as atividades e constatamos a importância que a dupla deu as retas $x = 2$ e $x = -2$, ou seja, não conseguiram compreender a representação geométrica do intervalo no plano cartesiano como podemos observar na construção feita pelo grupo do aluno C, na figura 37.

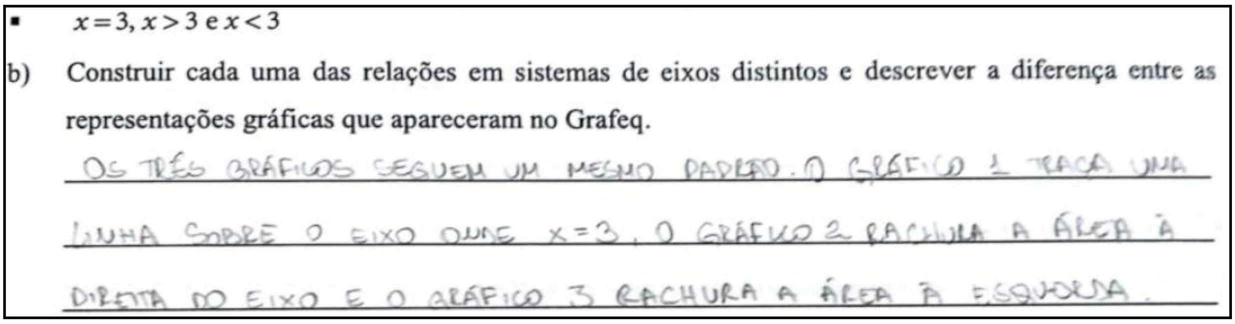
Figura 37 – Construção do item a da atividade 1 pelo aluno C



Fonte: (acervo dos alunos)

Segue abaixo mais algumas respostas da atividade 1 item b, nas figuras 38 e 39.

Figura 38 – Resposta da atividade 1 item b dada pelo aluno A



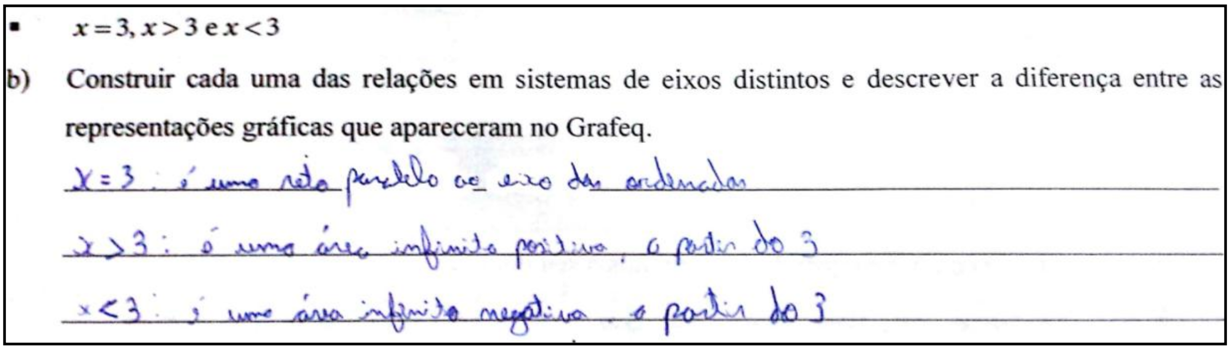
- $x = 3, x > 3$ e $x < 3$

b) Construir cada uma das relações em sistemas de eixos distintos e descrever a diferença entre as representações gráficas que apareceram no Grafeq.

OS TRÊS GRÁFICOS SEGUEM UM MESMO PADRÃO. O GRÁFICO 1 TRAÇA UMA LINHA SOBRE O EIXO ONDE x=3. O GRÁFICO 2 RACHURA A ÁREA À DIREITA DO EIXO E O GRÁFICO 3 RACHURA A ÁREA À ESQUERDA.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 39 – Resposta da atividade 1 item b dada pelo aluno D



- $x = 3, x > 3$ e $x < 3$

b) Construir cada uma das relações em sistemas de eixos distintos e descrever a diferença entre as **representações gráficas que apareceram** no Grafeq.

x=3: é uma reta paralela ao eixo das ordenadas

x>3: é uma área infinita positiva, a partir do 3

x<3: é uma área infinita negativa, a partir do 3

Fonte: (acervo dos alunos)

Como podemos observar nas figuras 38 e 39 os grupos de trabalho com os alunos A e D conseguiram compreender a diferença entre a equação e as inequações tal como a sua representação no plano cartesiano como pode ser constatado no item c da atividade 1. Na sua totalidade os grupos de trabalho responderam corretamente o item c, que solicitava aos grupos que descrevessem a região obtida através de uma equação e uma inequação como podemos observar na resposta dada pela dupla D na figura 40.

Figura 40 – Resposta da atividade 1 item c dada pelo aluno D

c) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

$y=2$: é uma reta paralela ao eixo das abcissas

$y>2$: é uma área infinita positiva, a partir do 2

Fonte: (acervo dos alunos)

Na atividade 2 propomos aos alunos que através das informações obtidas no exercício 1 realizassem a construção de um quadrado de lado 5 como podemos observar na figura 41.

Figura 41 – Atividade 2 da Etapa 1 da sequência didática

02. Utilizando os itens a, b e c da questão 1 para construir um quadrado de lado 5 e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

____

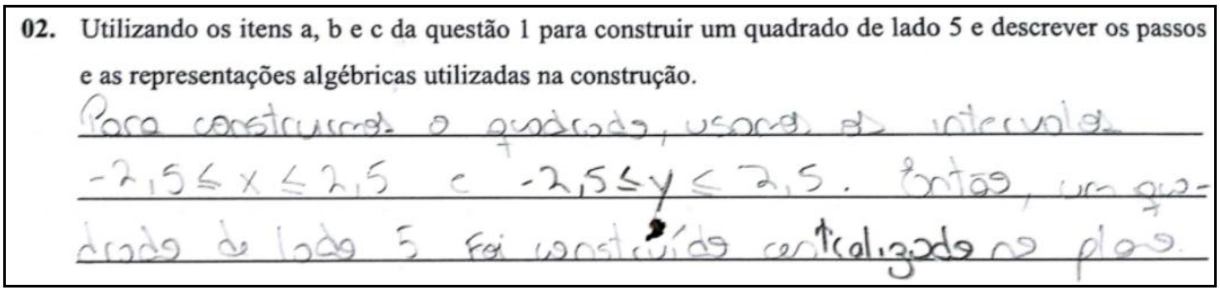
____

____

Fonte: (o Autor)

Na resolução dessa atividade constatamos que alguns grupos de trabalho estavam utilizando o debate para solucionar o problema proposto no exercício 2. Para surpresa, alguns grupos de trabalho estavam discutindo sobre possíveis representações do quadrado no plano cartesiano sem utilizar o método de tentativa e erro. Visto em alguns grupos. Podemos observar as figuras 42 e 43, soluções propostas pelas duplas dos alunos B e D que representaram de forma distinta, o quadrado no plano cartesiano.

Figura 42 – Resposta da atividade 2 dada pelo aluno B

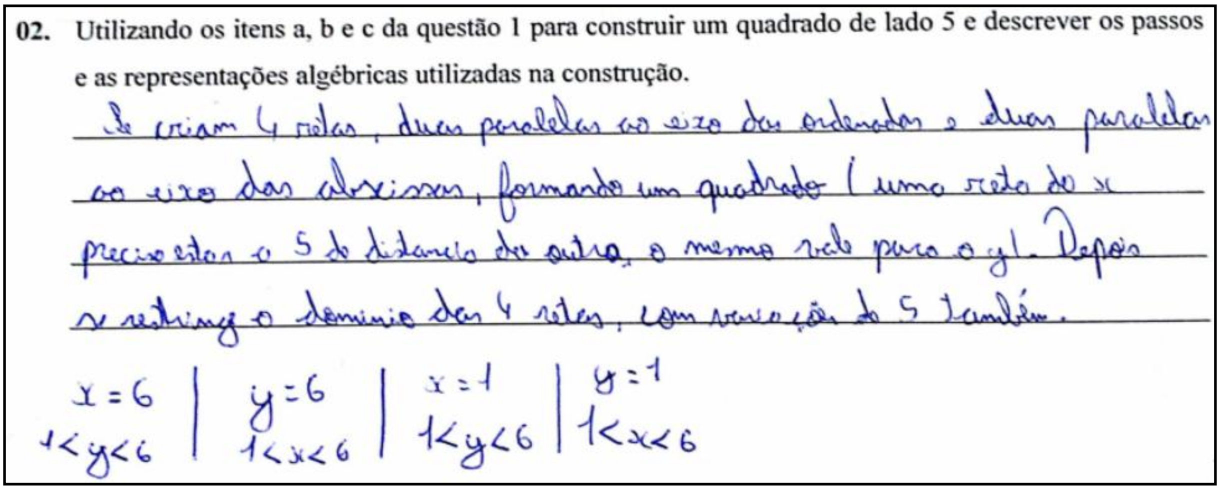


02. Utilizando os itens a, b e c da questão 1 para construir um quadrado de lado 5 e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

Para construirmos o quadrado, usamos os intervalos $-2,5 \le x \le 2,5$ e $-2,5 \le y \le 2,5$. Então, um quadrado de lado 5 foi construído centralizado no plano.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 43 – Resposta da atividade 2 dada pelo aluno D



02. Utilizando os itens a, b e c da questão 1 para construir um quadrado de lado 5 e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

Se criam 4 retas, duas paralelas ao eixo das ordenadas e duas paralelas ao eixo das abscissas, formando um quadrado (uma reta do x precisa estar a 5 de distância da outra, o mesmo vale para o y). Depois se restringe o domínio das 4 retas, com variação de 5 também.

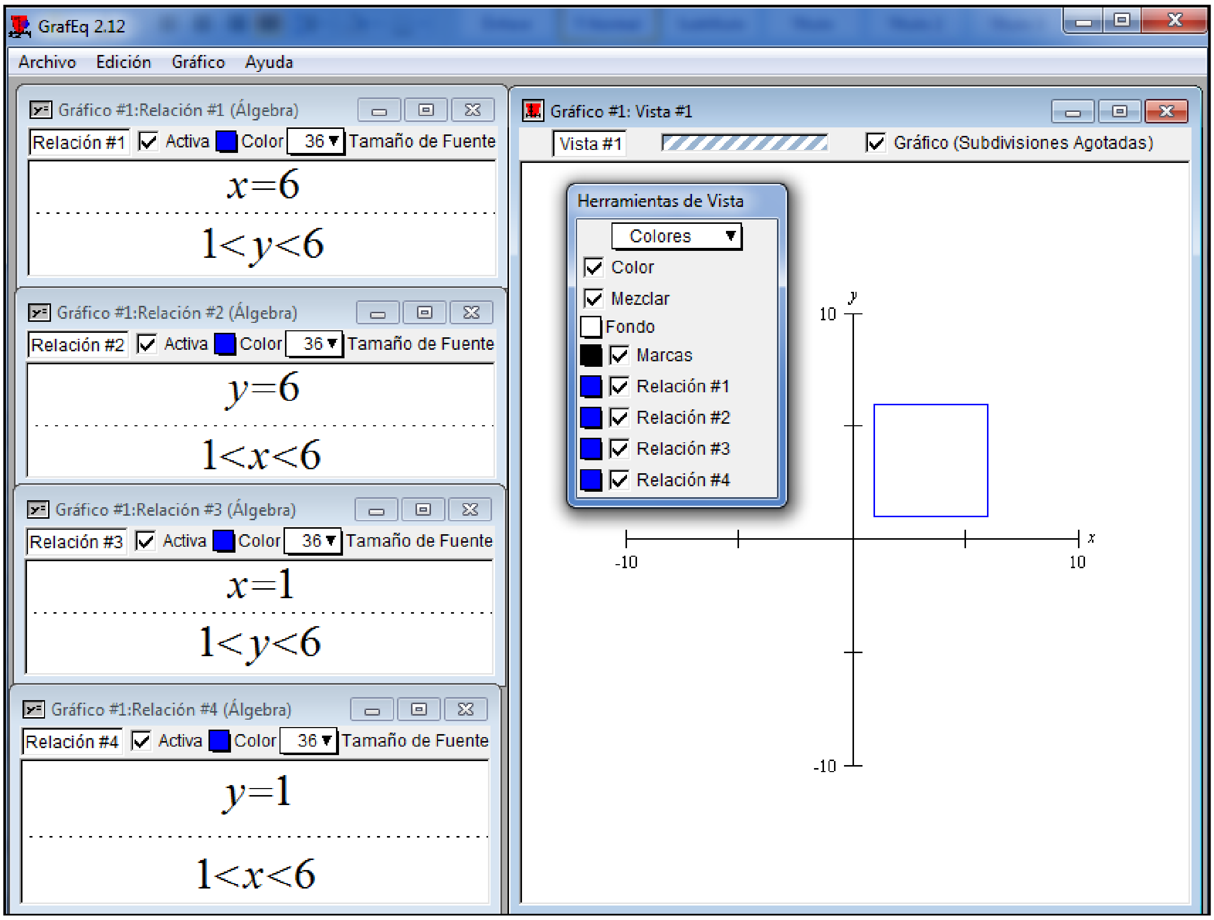
$x = 6$, $1 < y < 6$ | $y = 6$, $1 < x < 6$ | $x = 1$, $1 < y < 6$ | $y = 1$, $1 < x < 6$

Fonte: (acervo dos alunos)

Durante a realização desta atividade, indagamos os grupos sobre como haviam escolhido as inequações e na sua maioria obtivemos como resposta “se é um quadrado deve ter lados iguais, então o *x* e o *y* devem variar no mesmo intervalo”. Constatamos que três dos quatorze grupos construíram corretamente o quadrado mas de lado 10. Como o quadrado tem lado 5 estes grupos de trabalho utilizaram o intervalo de -5 à 5 para ambos intervalos.

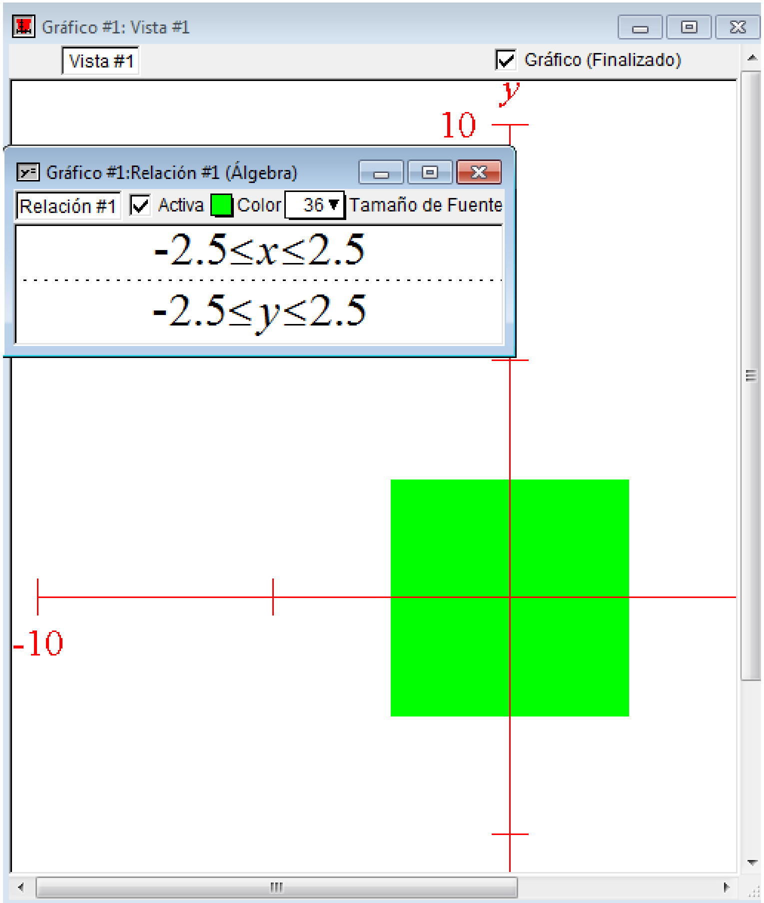
Logo após a indagação sobre os intervalos para gerar um quadrado, levantamos o questionamento da possibilidade do *x* e *y* variar em intervalos distintos e ainda assim gerarmos um quadrado de lado 5. Eis que alguns alunos se deram conta que não precisam variar no mesmo intervalo, basta que o intervalo tenha o mesmo “tamanho”. Destacamos das construções recebidas por e-mail das duplas dos alunos B e D, nas figuras 44 e 45, respectivamente.

Figura 44 – Construção do quadrado da atividade 2 da etapa 1 pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 45 – Construção do quadrado da atividade 2 da etapa 1 pelo aluno D



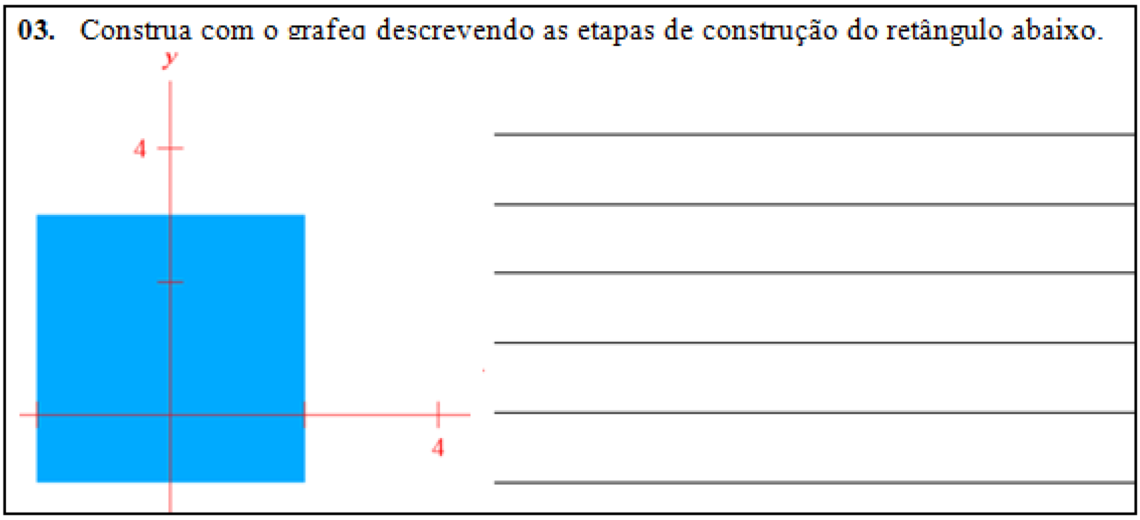
Fonte: (acervo dos alunos)

A dupla do aluno D mostrou-se preocupada em centralizar o quadrado na origem. Neste momento solicitamos a este grupo sobre como construir um quadrado que estivesse no segundo quadrante e para nossa surpresa a pergunta foi respondida quase que instantaneamente pelos componentes. Ou seja, este grupo conseguiu realizar as conversões de registros de maneira eficiente com a utilização do GrafEq.

Logo no início das atividades este grupo mostrou-se "empolgado" com a nossa proposta didática de utilizar ferramentas digitais em sala de aula. Na atividade 1, importante relatar que os mesmos estavam explorando o software com outros intervalos, tanto no eixo das abscissas, como no eixo das ordenadas.

Na atividade 3 da atividade 1, propomos aos discentes que realizassem um tratamento de conversão de um registro geométrico para um registro algébrico como podemos observar na figura 46.

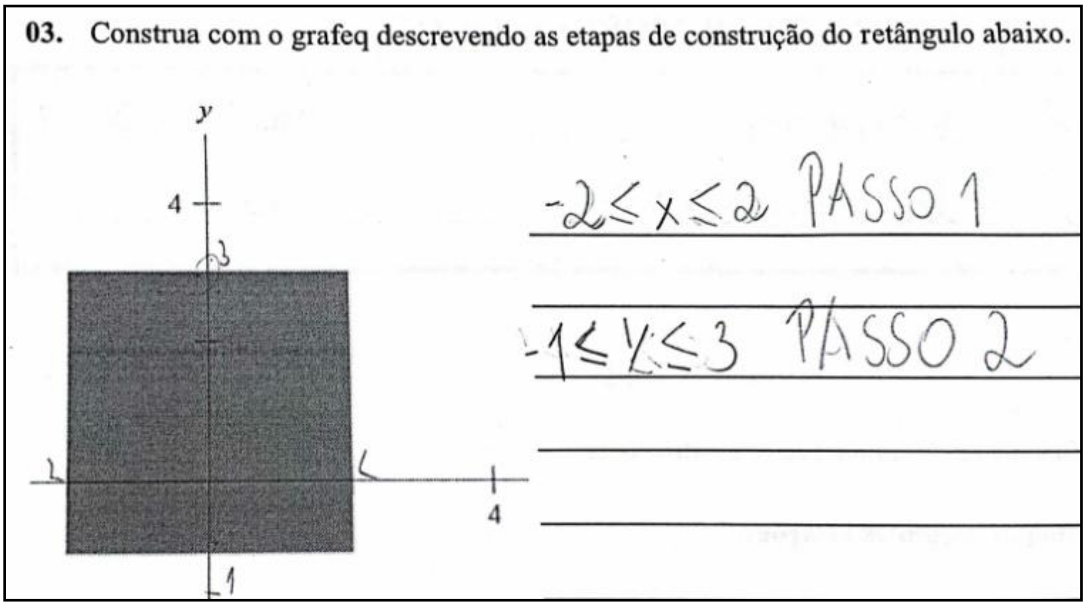
Figura 46 – Atividade 3 da etapa 1 da sequência didática



Fonte: (o Autor)

Na análise desta atividade e da percepção em sala de aula notamos que os grupos de trabalho conseguiram compreender e explicitar facilmente as desigualdades utilizadas para a construção da figura proposta na atividade 3. Constatamos que todos os grupos de trabalho utilizaram os mesmos intervalos como podemos observar na figura 42.

Figura 47 – Resposta da questão 3 da atividade 1 pela grupo do aluno F



Fonte: (acervo dos alunos)

Durante a realização da atividade 4 pelos grupos intervimos solicitando aos alunos que realizassem a construção reta num primeiro momento para posteriormente restringir o intervalo de variação como pode-se observar na figura 48.

Figura 48 – Atividade 4 da etapa 1 da sequência didática

04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

____

____

- $y = x + 1, 0 < x < 5$

b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

____

____

Fonte: (o Autor)

Até o presente momento constatamos que na sua maioria, os alunos estavam assimilando essa conversão de registros algébricos e geométricos pela facilidade em explicitar as inequações da atividade 3. Na atividade 4, tínhamos como finalidade a compreensão dos alunos na construção de segmentos de retas dada uma equação e um certo intervalo. O grupo de trabalho do aluno D, já conseguiaprever com certa facilidade o que iria acontecer, em virtude do que analisamos nas atividades anteriores, em específico na atividade 2, como podemos constatar na figura 49.

Figura 49 – Resposta da atividade 4 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno D

04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

o reta passa a ser um segmento que vai do x = -2 ao x = 2, passando pelo ponto 1 do eixo das abscissas.

- $y = x + 1, 0 < x < 5$

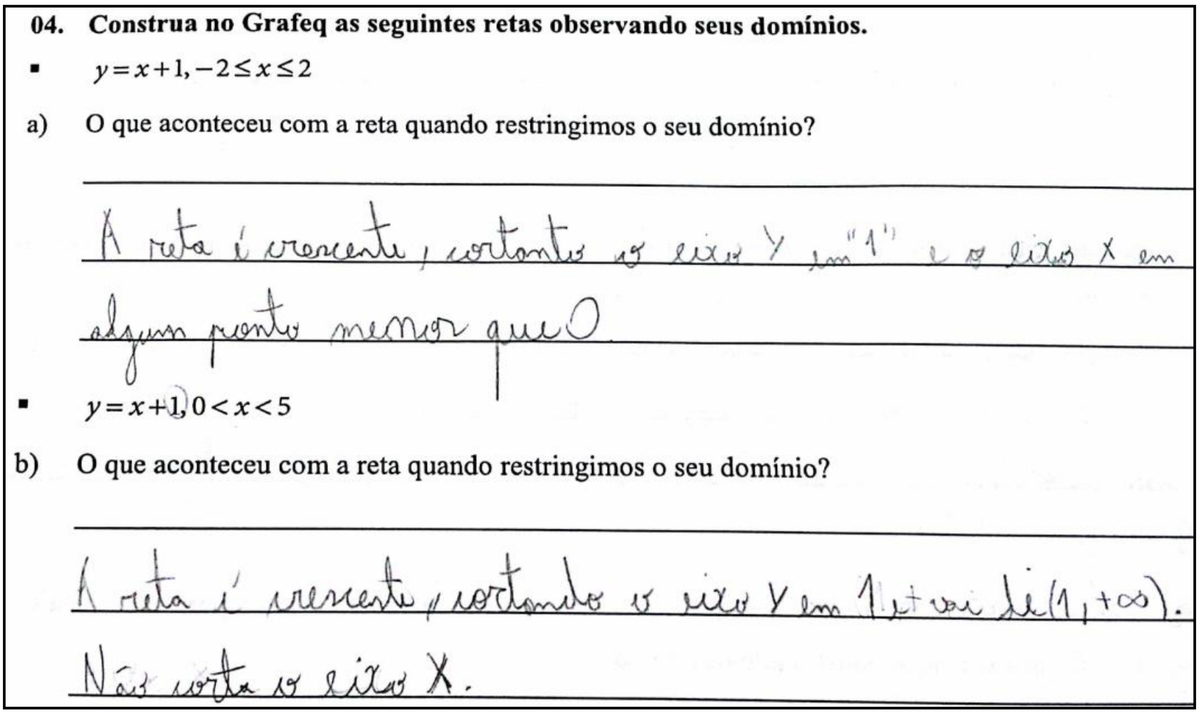
b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

A reta passa a ser um segmento que vai (~~[illegible]~~) do x = 0 ao x = 5, (~~[illegible]~~) partindo do ponto 1 do eixo das abscissas

Fonte: Acervo dos alunos

Analisando as respostas dadas pelos demais grupos, constatamos uma preocupação em apresentar a intersecção da curva com os eixos coordenados. Acreditamos que isso ocorreu em virtude do primeiro ano, pois muitas vezes os alunos são “treinados” em função afim, para encontrar os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Verificamos este fato em observações realizadas em sala de aula, durante exposição do conteúdo no quadro e a representação geométrica de uma reta no plano cartesiano. Como consta em algumas respostas dadas pelos grupos nas figuras 50, 51 e 52.

Figura 50 – Resposta da atividade 4 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno A



04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

A reta é crescente, cortanto o eixo Y em "1" e o eixo X em algum ponto menor que 0

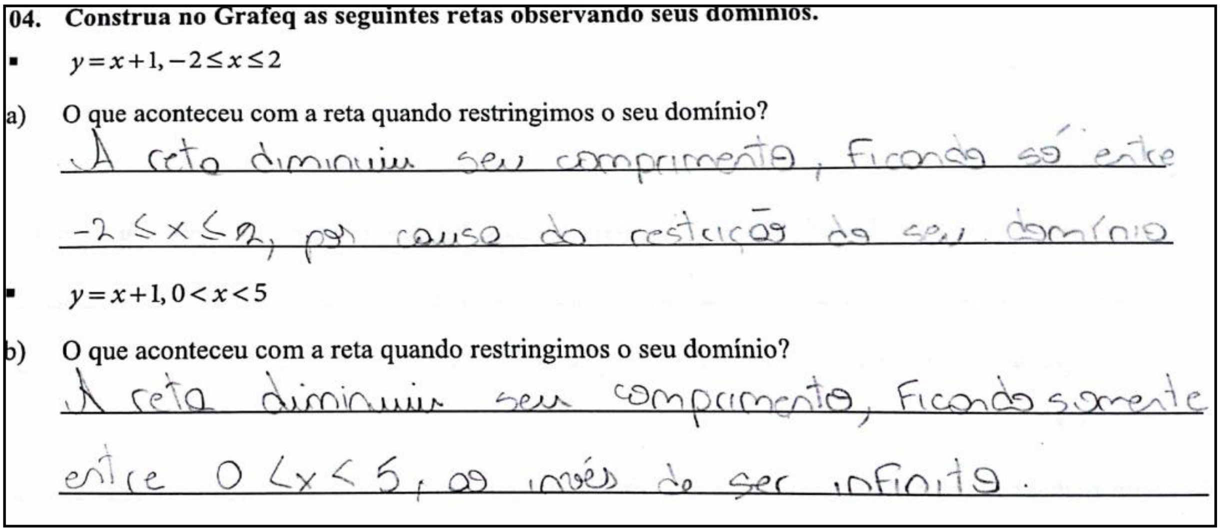
- $y = x + 1, 0 < x < 5$

b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

A reta é crescente, cortando o eixo Y em 1 e vai de $(1, +\infty)$. Não corta o eixo X.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 51 – Resposta da atividade 4 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno B



04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

A reta diminuiu seu comprimento, ficando só entre $-2 \leq x \leq 2$, por causa da restrição do seu domínio

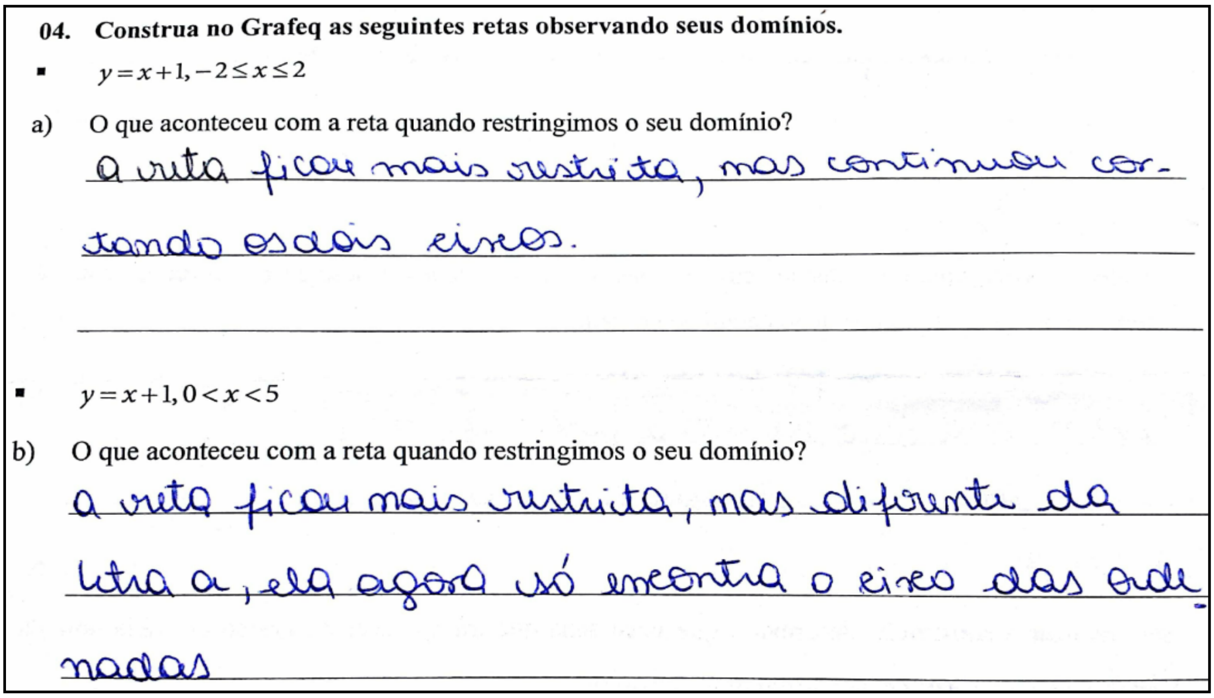
- $y = x + 1, 0 < x < 5$

b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

A reta diminuiu seu comprimento, ficando somente entre $0 < x < 5$, ao invés de ser infinito.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 52 – Resposta da atividade 4 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno C



04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

a reta ficou mais restrita, mas continuou cor-
tando os dois eixos.

- $y = x + 1, 0 < x < 5$

b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

a reta ficou mais restrita, mas diferente da
letra a, ela agora só encontra o eixo das orde-
nadas

Fonte: Acervo dos alunos

Na atividade 5, propomos aos alunos que construíssem retas alterando seus coeficientes. Na primeira situação mantivemos fixo o coeficiente linear e alteramos o angular, e de forma análoga fixamos o coeficiente angular e alteramos o parâmetro linear na equação da reta, objetivando que os discentes compreendessem a influência dos coeficientes na equação reduzida da reta. Podemos observar a atividade 5 na figura 53.

Figura 53 – Atividade 5 da Etapa 1 da sequência didática

05. Construa no Grafeq as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos.

- $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$.

a) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (aumentarmos) o parâmetro a.

____

- $y = x + 1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{4}x + 1$ e $y = \frac{1}{8}x + 1$

b) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (diminuirmos) o parâmetro a.

____

$y = -x + 1$, $y = -2x + 1$, $y = -3x + 1$.

c) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (trocarmos de sinal) o parâmetro a.

____

- $y = x + 1$, $y = x + 3$, $y = x + 5$, $y = x - 1$ e $y = x - 3$.

d) O que acontece com a reta conforme alteramos o parâmetro b.

____

e) Pelo que você observou, qual é a influência dos parâmetros a e b na equação reduzida da reta?

____

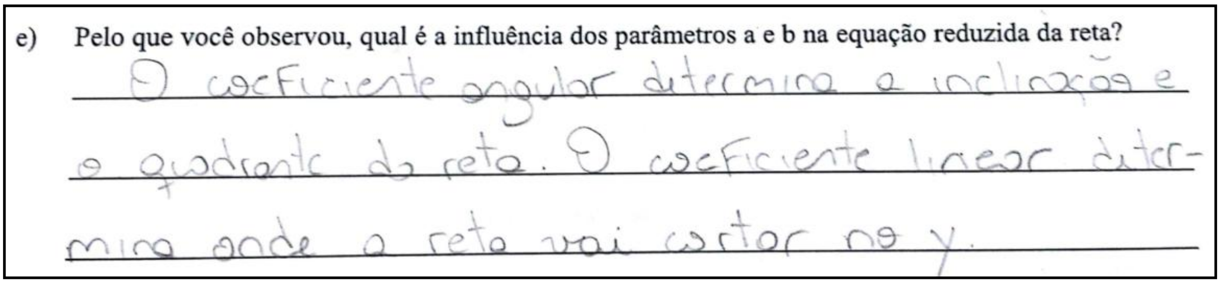
Fonte: (o Autor)

Nesta atividade observamos a discussão dos grupos sobre o comportamento dos parâmetros na equação reduzida da reta. Levantamos o questionamento após os grupos afirmarem que conforme aumentássemos o coeficiente angular, aumentaria a inclinação da reta e se “aproximaria do eixo y”. Para a pergunta: “Em que momento a reta irá passar para o outro lado?”. A resposta mais frequente foi que bastaria aumentar o coeficiente que em certo momento a reta certamente “passaria” para o outro lado.

A cada mudança do coeficiente angular registrada na tela, os alunos discutiam e observavam as alterações nas equações e sua implicação na representação gráfica. Esta mobilização concomitante de dois registros de representação, um algébrico e outro geométrico do mesmo objeto, contribui para a aprendizagem dos alunos (DUVAL, 2009).

Em outro momento da aula, observamos uma maior experimentação do software por parte dos grupos. Vimos inclusive que grupos que haviam terminado a atividade antes do término da aula aproveitaram para explorar outras equações no plano cartesiano. Até o presente momento não constatamos maiores dificuldades pelos grupos na realização da atividade. Na atividade 5 estamos interessados particularmente na resposta dada pelos alunos no item e, objetivando verificar a influência dos coeficientes, conforme podemos ver nas figuras 54 e 55.

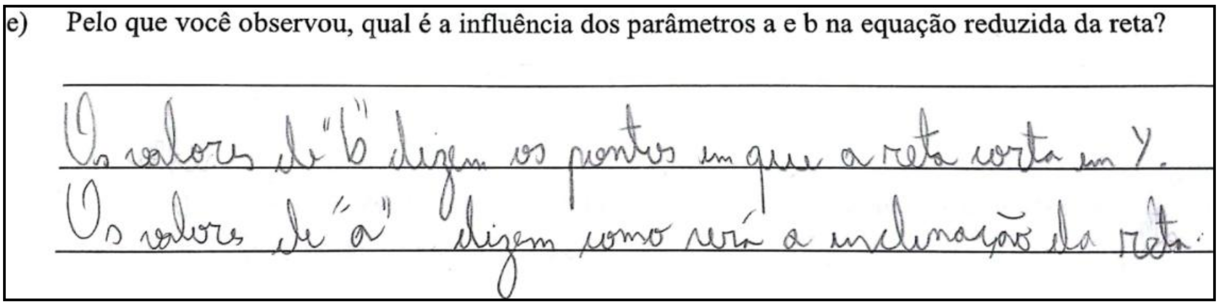
Figura 54 – Resposta da atividade 5 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno B


e) Pelo que você observou, qual é a influência dos parâmetros a e b na equação reduzida da reta?

O coeficiente angular determina a inclinação e o quadrante da reta. O coeficiente linear determina onde a reta vai cortar no y.

Fonte: (Acervo dos alunos)

Figura 55 – Resposta da atividade 5 da etapa 1 da sequência didática dada pelo aluno A


e) Pelo que você observou, qual é a influência dos parâmetros a e b na equação reduzida da reta?

Os valores de "b" dizem os pontos em que a reta corta em Y.

Os valores de "a" dizem como será a inclinação da reta.

Fonte: Acervo dos alunos

Decorridos os dois períodos os alunos entregaram as atividades devidamente preenchidas. Na mesma semana antes de realizarmos a atividade 2, os grupos, na sua maioria, enviaram via e-mail e entregaram as construções realizadas no GrafEq. Fomos surpreendidos pelo engajamento e entusiasmo na realização das atividades.

Após a realização desta atividade explicitamos o conteúdo de retas no quadro para os alunos, pois “a aprendizagem é um processo construtivo, que depende de modo fundamental das ações do sujeito e se suas reflexões sobre estas ações” (GRAVINA, 1999).

4.3.2 Relato da etapa 2

Na etapa 2 da sequência didática, elaboramos atividades pretendendo consolidar os conhecimentos da etapa 1 e acerca de regiões no plano cartesiano utilizando um sistema de inequações e ampliá-los, além disso realizar articulações algébricas e geométricas visando à aprendizagem do conteúdo de geometria analítica.

No dia anterior a realização da etapa 2, três alunos nos questionaram sobre a possibilidade de trazerem seu computador pessoal para a realização das atividades, em virtude de não conseguirmos utilizar o laboratório de informática. Neste momento propomos uma nossa possibilidade para a realização da atividade, pois o professor pesquisador se comprometeu em levar três notebooks para a aula e assim conseguirmos realizar as atividades na sua totalidade.

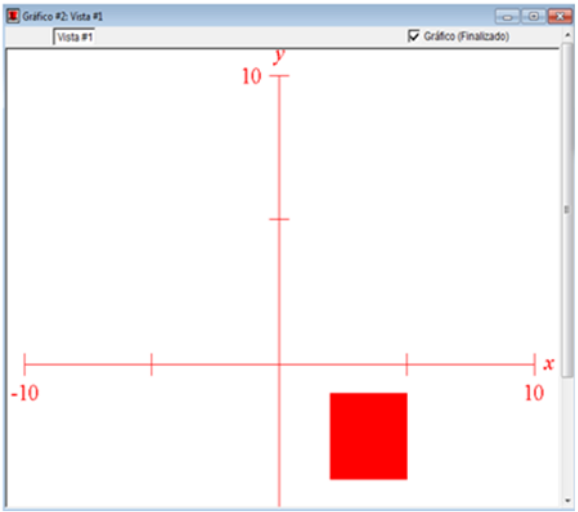
Em contrapartida no dia da realização da atividade tivemos um grupo menor de trabalho, pois oito alunos estavam ausentes. Neste momento, propomos algumas mudanças sobre a organização dos alunos em sala de aula. Contamos neste dia com vinte e cinco alunos, organizamos seis grupos, um deles com cinco pessoas e os demais com quatro integrantes. Ficamos um pouco apreensivos neste momento, pois segundo Pais (2001) é necessário atentar para o maior número de informações que podem contribuir no registro e no desenvolvimento do fenômeno pesquisado. Conseguimos contornar a situação e explorar em sala de aula, a utilização do software GrafEq, fora do laboratório de matemática.Nosso objetivo através desta sequência didática foi propor que os alunos realizassem atividades dinâmicas na aprendizagem de geometria analítica, completando uma aula tradicional, pois

> Geralmente, com o decorrer das aulas, dependendo de como a GA é lecionada, o aluno acaba vendo um apanhado de fórmulas a serem decoradas: ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos; as várias equações da reta... (NERY, 2008, p.19.).

Na primeira atividade propusemos aos discentes que construíssem uma região retangular no quarto quadrante, resgatando alguns conceitos explorados na atividade 1 como podemos observar na figura 56.

Figura 56 – Atividade 1 da etapa 2 da sequência didática

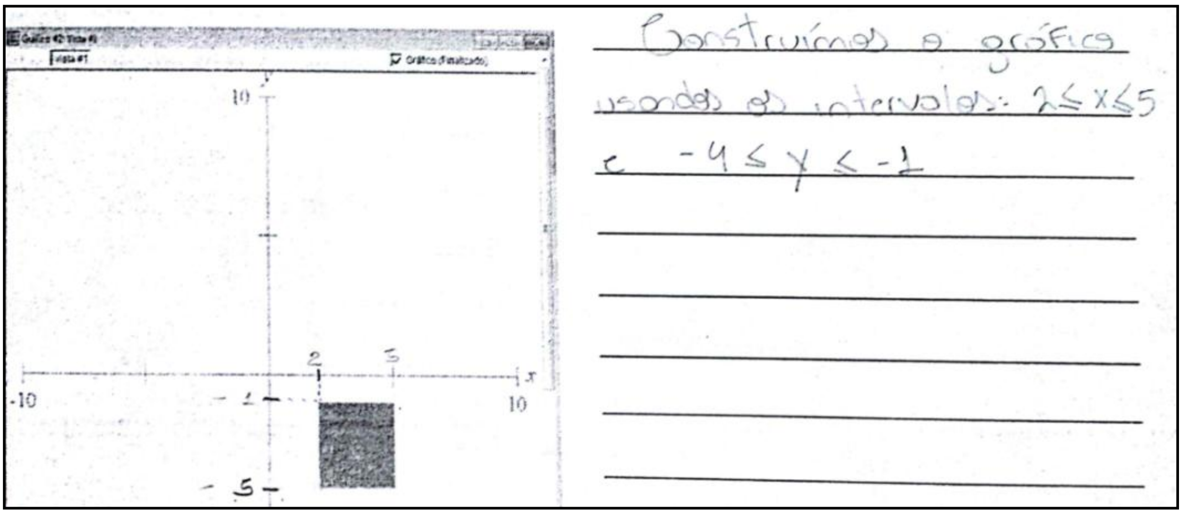
01. As regiões foram construídas no software GrafEq, descreva passo a passo a construção destas regiões.



Fonte: (o Autor)

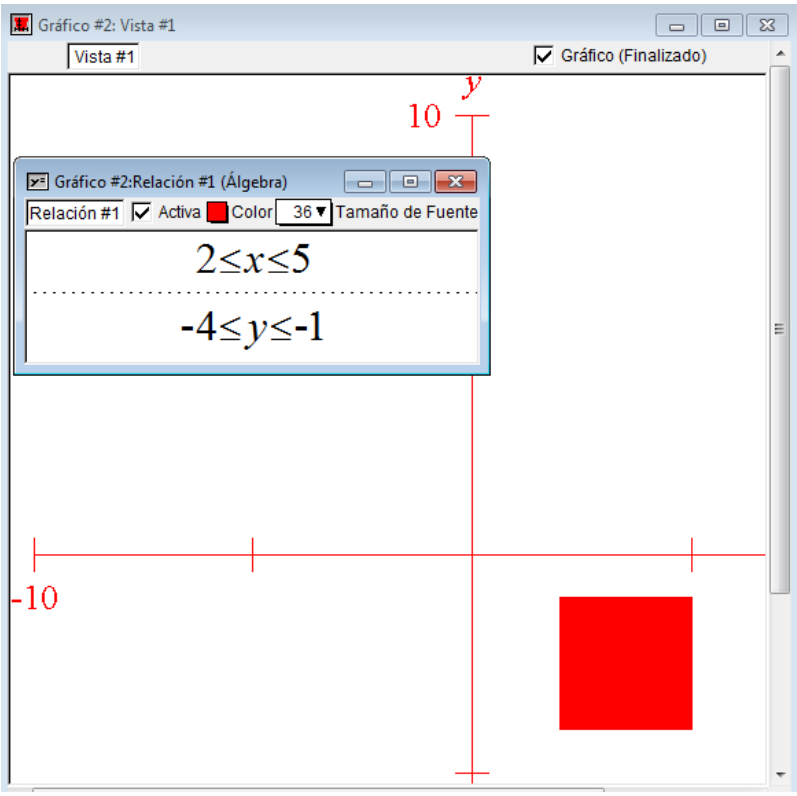
Surpreendeu-nos a dedicação e a atenção na resolução das atividades dos alunos remanescentes. Já na atividade 1 item a, observamos a troca de informações e debates sobre como construir o quadrado no quarto quadrante. Rapidamente os seis grupos de trabalho identificaram os intervalos e realizaram a construção corretamente. Analisando os intervalos propostos pelos alunos na construção do quadrado, observamos que cinco grupos de trabalho tiveram a preocupação em deixar um "espaço" maior para iniciar o quadrado no eixo das abscissas, ou seja, o lado do quadrado está mais próximo do eixo das abscissas do que do eixo das ordenadas, como podemos observar nas figuras 57 (resposta do aluno B) e 58 (construção realizada pelo aluno B).

Figura 57 – Resposta da atividade 1 item a da etapa 2 da sequência didática dada pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

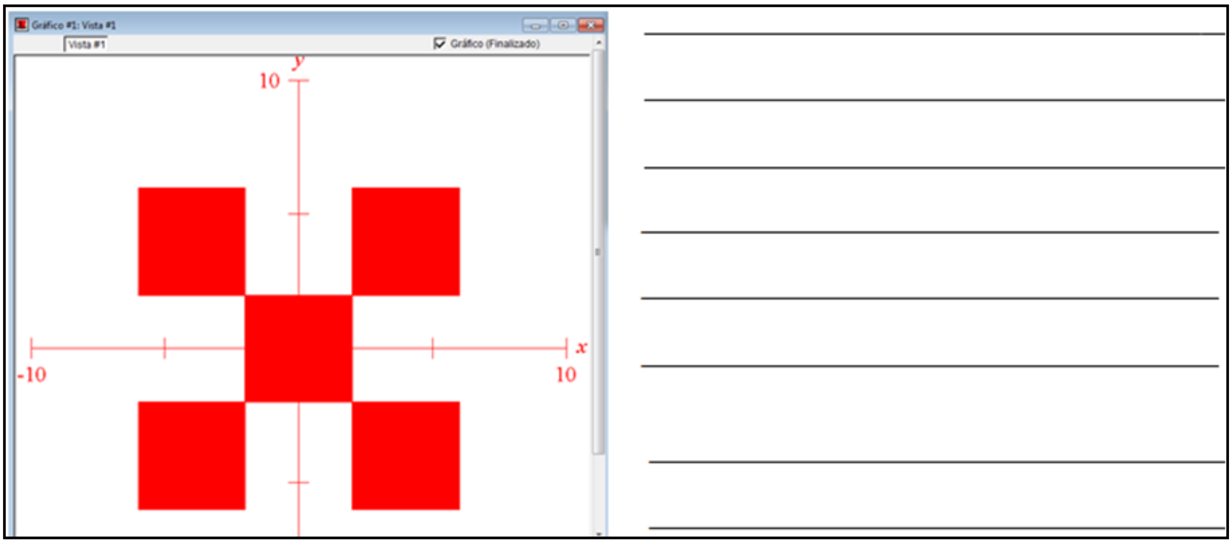
Figura 58 – Construção da atividade 1 tem a pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

No item b da atividade 1 propusemos aos alunos que realizassem a composição de polígonos, alguns quadrados obtendo a figura 59.

Figura 59 – Atividade 1 item b da etapa 2 da sequência didática

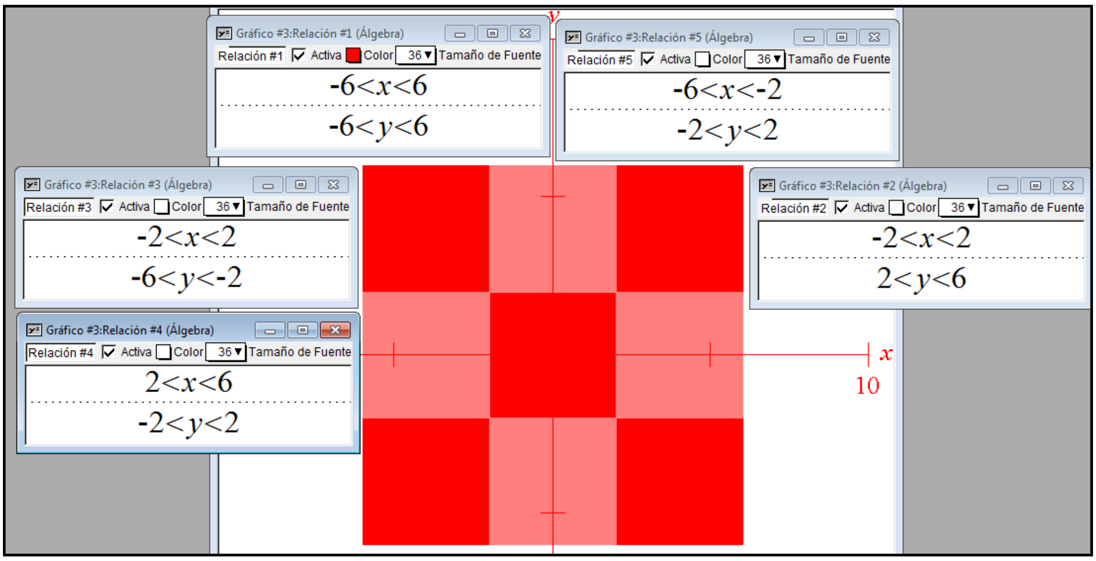


Fonte: acervo dos alunos

No item b, observamos uma leve dificuldade quanto à construção do quadrado central. Acreditamos que esta dificuldade ocorreu pelo fato dos grupos não relacionarem o centro geométrico do quadrado com a origem. Como curiosidade, observamos que todos os grupos de trabalho construíram quadrados de lado 4.

Um dos grupos questionou a possibilidade de construirmos um quadrado de lado 12 e “pintarmos” as outras regiões de branco, percebemos que este grupo de trabalho estava desenvolvendo “novas habilidades” através de um processo empírico que auxilia na apropriação de conhecimento. Nesta construção ocorre uma sobreposição de quadrados, mas para a construção da figura 59, construir 5 quadrados vermelhos é congruente a construir um quadrado vermelho e sobre ele acrescentar 4 outros quadrados brancos como podemos observar na construção da figura 60.

Figura 60 – Construção do item 1b realizada pelo grupo A



Fonte: (acervo dos alunos)

Na atividade 2 gostaríamos de explorar com os alunos as inequações de 1° grau com duas variáveis e suas representações geométricas no plano cartesiano.

Figura 61 – Atividade 2 da etapa 2 da sequência didática

02. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y = x + 1$, $y > x + 1$ e $y < x + 1$.

a) Digite as desigualdades (cada relação deve utilizar o seu próprio sistema de eixos cartesianos) e descreva as regiões obtidas.

____

____

$y < x + 4$, $y < -x + 4$ e $y > 0$.

b) Digite as desigualdades (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva a região obtida.

____

____

- $y > x + 4$, $y > -x + 4$ e $y < 6$.

c) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

____

____

Fonte: o Autor

Nessa atividade, constatamos uma dificuldade dos grupos em reconhecer regiões no plano através de um sistema de inequações. No item a, os grupos não apresentaram maiores dificuldades, neste momento o professor pesquisador sugeriu a construção de novas inequações questionando o grupo sobre a região hachurada.

Todos os grupos responderam corretamente as indagações (inequações similares a do item a) mostrando que os alunos reconheceram as representações geométricas no plano cartesiano.Explicitamente neste exercício podemos distinguir duas fases na resolução do exercício: a primeira na manipulação das inequações e suas representações algébricas e geométricas, na segunda a formalização escrita como podemos observar na figura 62.

Figura 62 – Resposta da atividade 3 item a da etapa 2 da sequência didática dada pelo aluno A

02. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y=x+1$, $y>x+1$ e $y<x+1$.

a) Digite as desigualdades (cada relação deve utilizar o seu próprio sistema de eixos cartesianos) e descreva as regiões obtidas.

Uma área infinita cujo o Y é maior que x+1.
Uma area infinita cujo o Y é menor que X+1
Reta Diagonal

Fonte: acervo dos alunos

Observamos pela resposta dada pelo grupo do aluno C, na figura 56, que os discentes têm dificuldade em reconhecer a região hachurada como um semiplano ou desconhecem o termo, pois apenas um grupo utilizou essa referência. Observando o item a, e a resposta dada pelo grupo do aluno B (ver figura 63) e sua construção geométrica (ver figura 64) percebemos uma dificuldade dos integrantes do grupo em imaginar o plano cartesiano infinito.

Figura 63 – Resposta da atividade 1 dos itens a, b e c da etapa 2 da sequência didática dada pelo aluno B

- $y=x+1$, $y>x+1$ e $y<x+1$.

a) Digite as desigualdades (cada relação deve utilizar o seu próprio sistema de eixos cartesianos) e descreva as regiões obtidas.

No 1º relação, é uma reta crescente pegando os valores da reta
No 2º relação, é um triângulo que pega todos os valores acima da reta, com intervalo aberto
No 3º relação pega os valores abaixo da reta, com intervalo aberto

- $y<x+4$, $y<-x+4$ e $y>0$.

b) Digite as desigualdades (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva a região obtida.

Um triângulo que fica apenas no 1º e 2º quadrante.

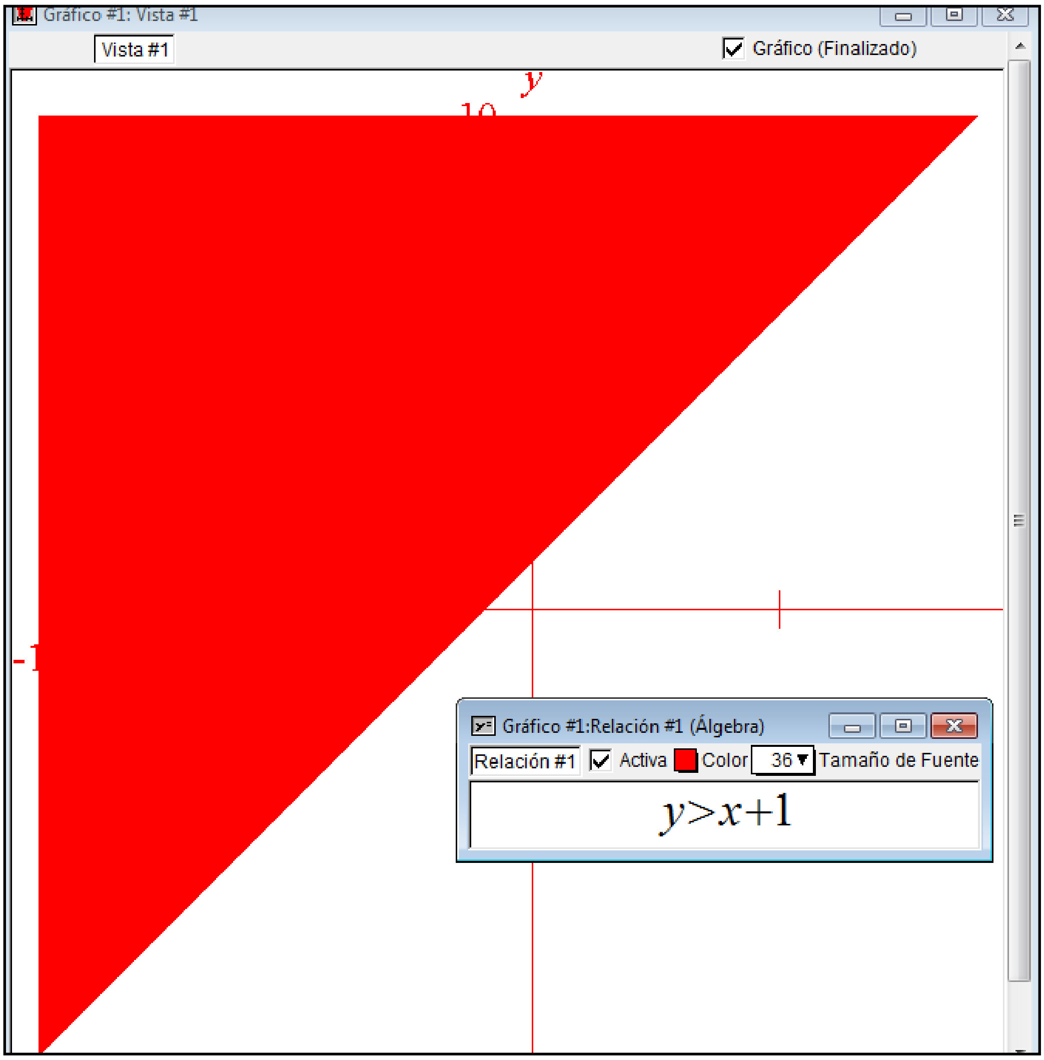
- $y>x+4$, $y>-x+4$ e $y<6$.

c) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

Forma um triângulo pegando acima da origem o 1º e 2º quadrante.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 64 – Construção da atividade 2 realizada pelo aluno B



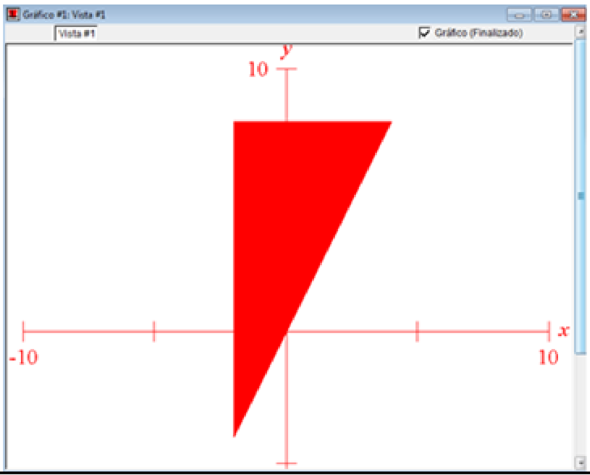
Fonte: (acervo dos alunos)

Observando os debates entre os grupos nos itens b e c, notamos algumas dificuldades e solicitamos que antes de realizarem a construção do item b no GrafEq, representassem em cada sistema de eixos, cada uma das inequações e posteriormente, realizassem a intersecção das regiões. Acreditamos ser válida esta intervenção, pois todos os grupos perceberam que a intersecção dos 3 semiplanos resultaria em um triângulo.

Na atividade 3, mostramos a representação geométrica de um triângulo no plano cartesiano e propomos aos discentes que realizassem a conversão de registros para representar um triângulo através de um sistema de inequações, ou seja, sua representação algébrica, como podemos observar na figura 65.

Figura 65 – Atividade 3 da etapa 2 da sequência didática

03. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

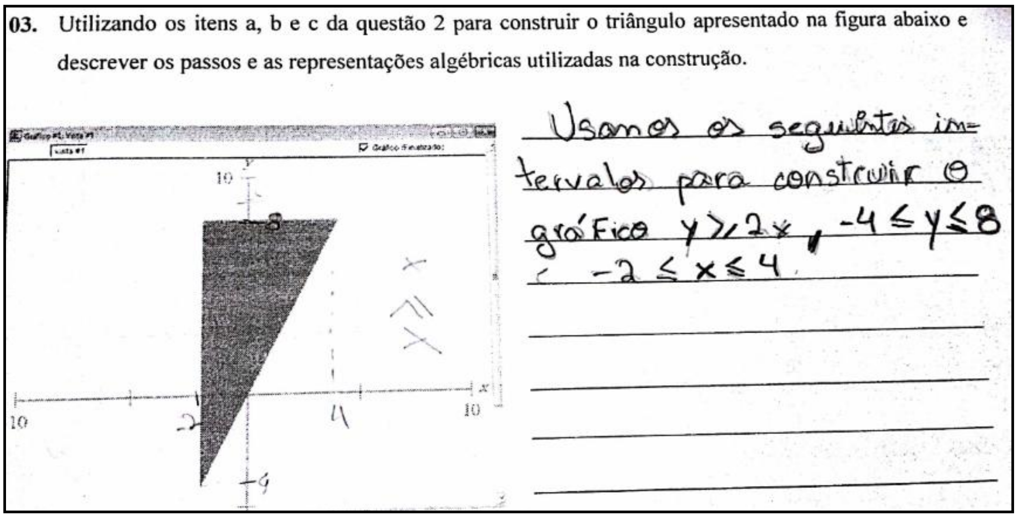


Fonte: (o Autor)

Procuramos discutir com os grupos, métodos para a resolução da atividade 3. Solicitamos que todos estivessem sempre resolvendo a mesma atividade, com o objetivo de todos os alunos participar das possíveis discussões e debates para trocarem informações. Consideramos importante uma observação direta nas atividades desenvolvidas pelos discentes observando o processo de produção de conhecimento e possíveis indagações, que pudessem surgir no decorrer das atividades. Quando observamos algumas resoluções das construções parciais realizadas pelos alunos, duas das três retas foram rapidamente construídas: as retas paralelas aos eixos coordenados. Para determinar a reta que passa pela origem, percebemos que os alunos já compreendiam que o coeficiente linear é zero e a inclinação da reta foi pelo método da tentativa e erro, mas ao mesmo tempo os grupos argumentaram que quando maior o coeficiente angular, maior será a inclinação da reta quando o coeficiente é positivo.

Observando as construções realizadas pelos alunos, notamos dois métodos de construção. Um deles utilizando o intervalo de variação de *x* e *y* com a intersecção de um semiplano. Outro método utilizado foi a da intersecção dos três semiplanos, como podemos observar nas respostas e construções dos grupos que os alunos D (figuras 66 e 67) e C (figuras 68 e 69)estavam participando.

Figura 66 – Resposta da atividade 3 da etapa 2 dada pelo aluno D



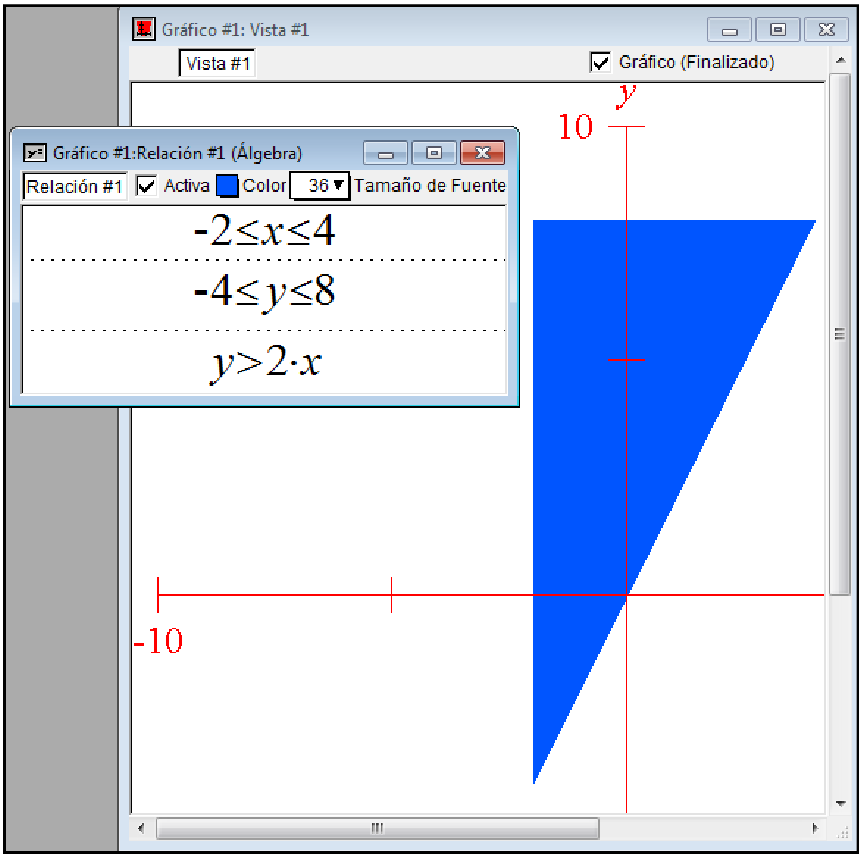
03. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

Usamos os seguintes intervalos para construir o gráfico $y \geq 2x$, $-4 \leq y \leq 8$

$-2 \leq x \leq 4$

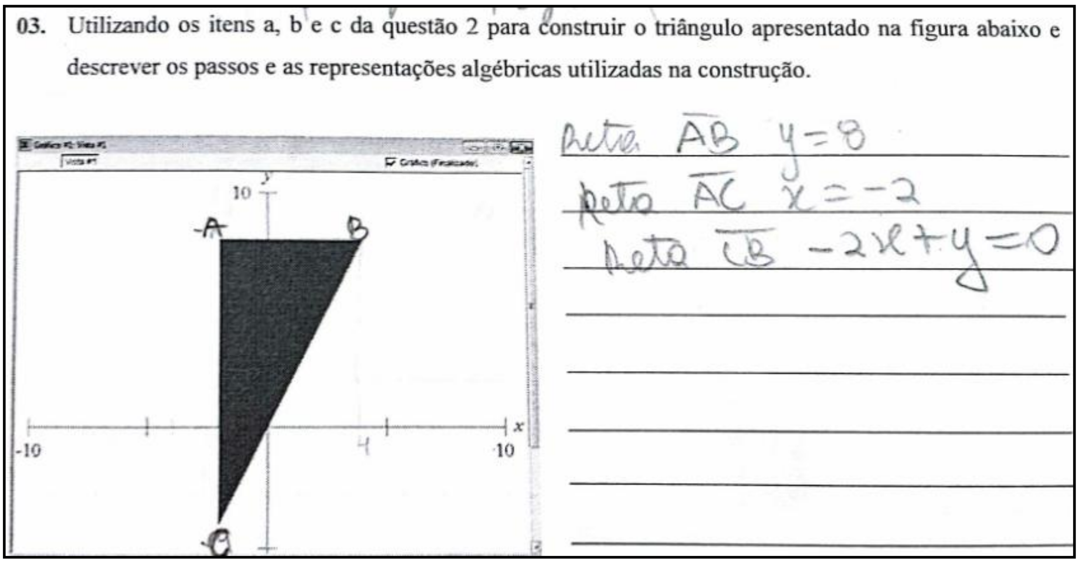
Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 67 – Construção do triângulo na atividade 3 pelo aluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 68 – Resposta da atividade 3 da etapa 2 dada pelo aluno C


03. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

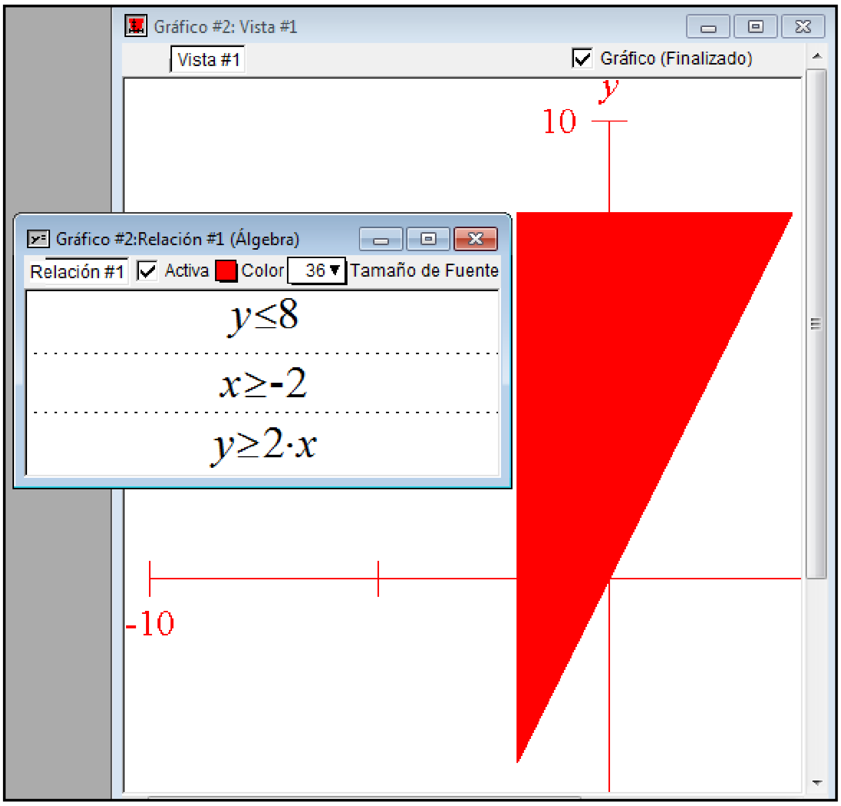
Reta $\overline{AB}$ $y=8$

Reta $\overline{AC}$ $x=-2$

Reta $\overline{CB}$ $-2x+y=0$

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 69 – Construção do triângulo na atividade 3 pelo aluno C



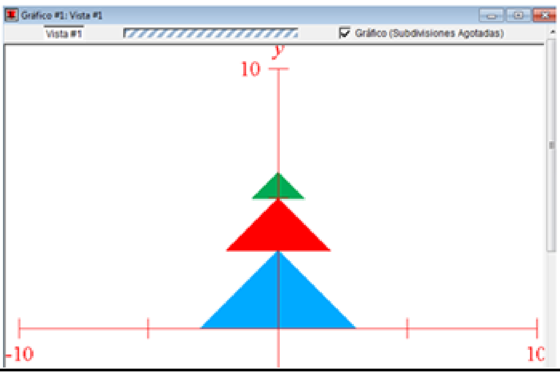
Fonte: (acervo dos alunos)

No arquivo recebido por e-mail do grupo do aluno C, percebemos que a construção foi realizada de maneira correta, mas não foi representada na sua forma algébrica correta na resposta dada como foi observado na figura 69. Notamos que ainda escrever em matemática, bem como utilizar suas linguagens, causa certa estranheza aos alunos.

Na atividade 4, assim como na atividade 1 (item b), os alunos deveriam realizar uma composição de triângulos (imagem criada pelo professor pesquisador) e estabelecer relações entre as inequações e realizar corretamente as translações verticais, como podemos observar na figura 70.

Figura 70 – Atividade 4 da etapa 2 da sequência didática

04. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

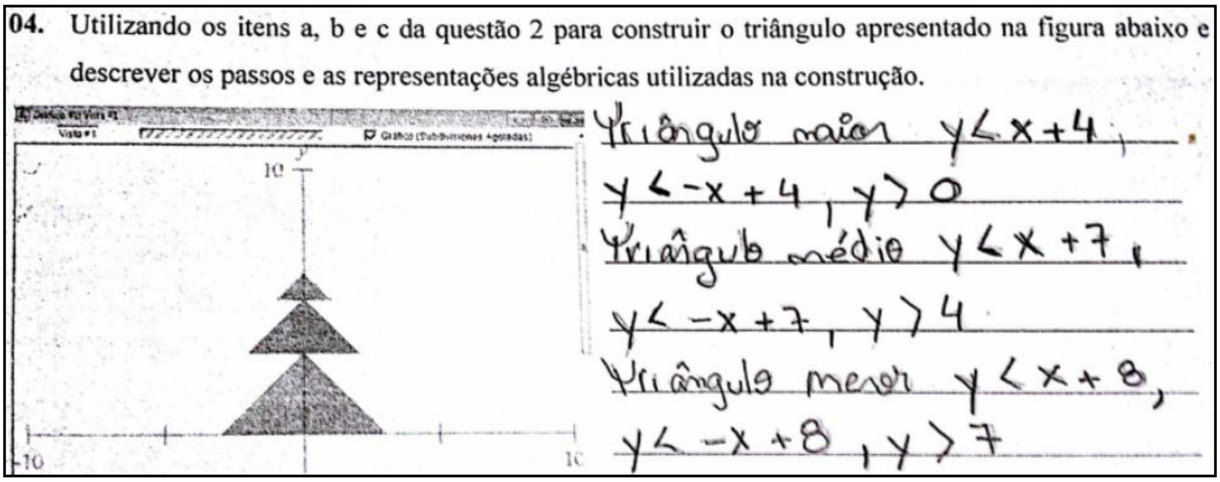


Fonte: (o Autor)

Observando os grupos realizando essa atividade notamos certa “discussão” em como realizar as construções. O que mais nos chamou a atenção nos gruposque os alunos A, B e D estavam participando, foi o fato de antes de realizarem as construções no software, estarem debatendo sobre a representação geométrica que ia aparecer na tela do computador. Notamos inclusive que os grupos que utilizaram os semiplanos para obter os triângulos, conseguiram mais rapidamente determinar o sistema de inequações para cada um dos triângulos observados na figura 70.

Analisando as respostas dadas pelos integrantes do grupo que o aluno C estava participando, notamos a utilização das equações de retas; mas recorrendo ao arquivo da construção, vimos que novamente foi realizada corretamente a sua construção e a utilização do sistema de inequações. Observamos que os conceitos trabalhados na atividade 1,os alunos já compreendiam, como a influência dos coeficientes na equação da reta, presente na resposta (ver figura 71) e na construção (ver figura 72) realizada pelo grupo do aluno D.

Figura 71 – Resposta da atividade 4 dada pelo grupo do aluno D

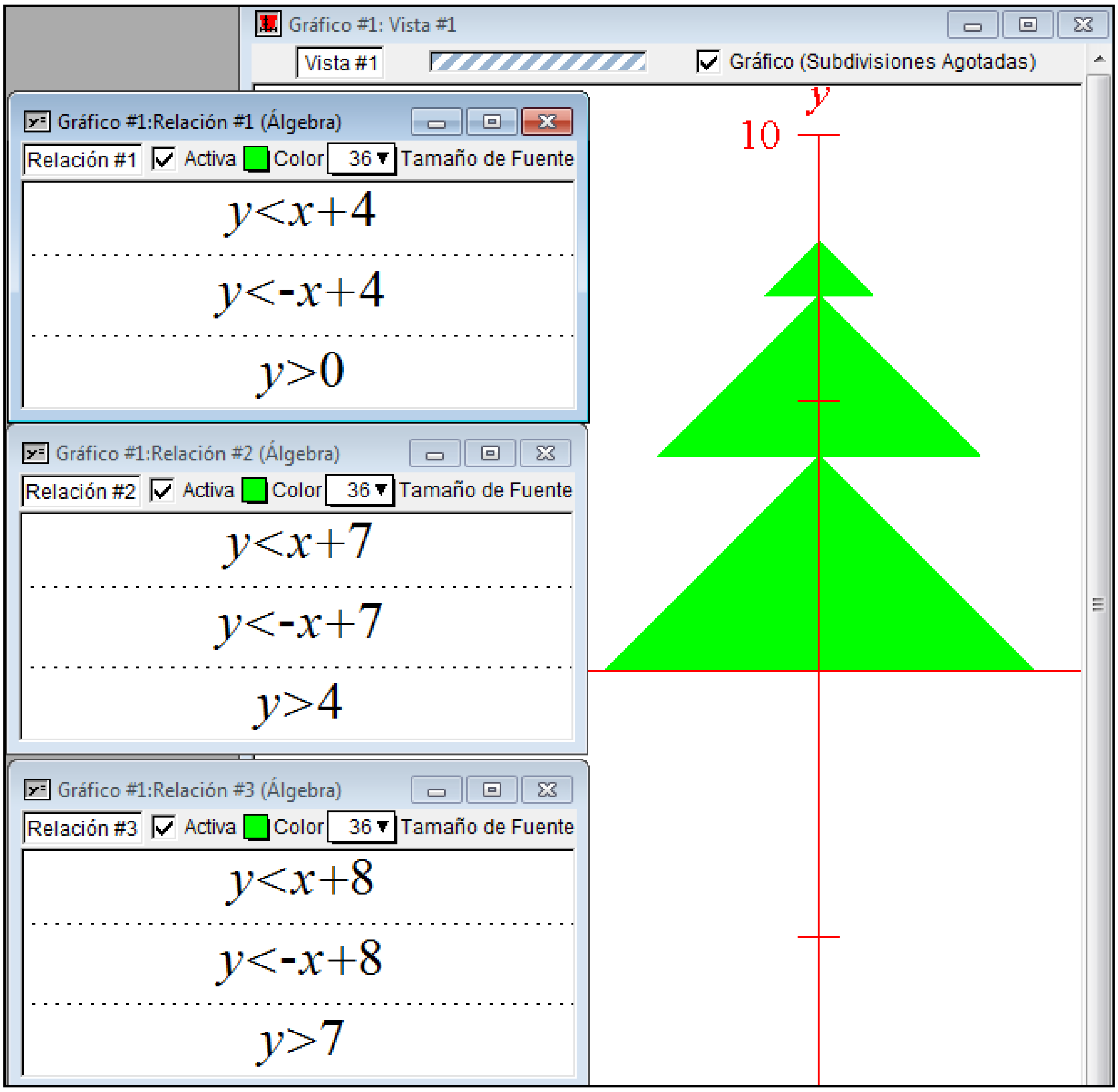


04. **Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.**

Triângulo maior $y < x + 4$, $y < -x + 4$, $y > 0$
Triângulo médio $y < x + 7$, $y < -x + 7$, $y > 4$
Triângulo menor $y < x + 8$, $y < -x + 8$, $y > 7$

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 72 – Construção da atividade 4 pelo aluno D

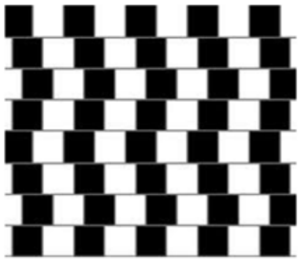


Fonte: acervo dos alunos

Na atividade 5 escolhemos uma obra de arte para que os grupos realizassem sua construção, como podemos observar na figura 73.

Figura 73 – Atividade 5 da etapa 2 da sequência didática

05. Agora vamos colocar em prática os conhecimentos obtidos e obter a construção de uma obra de arte.



www.HypeSience.com

Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

____

____

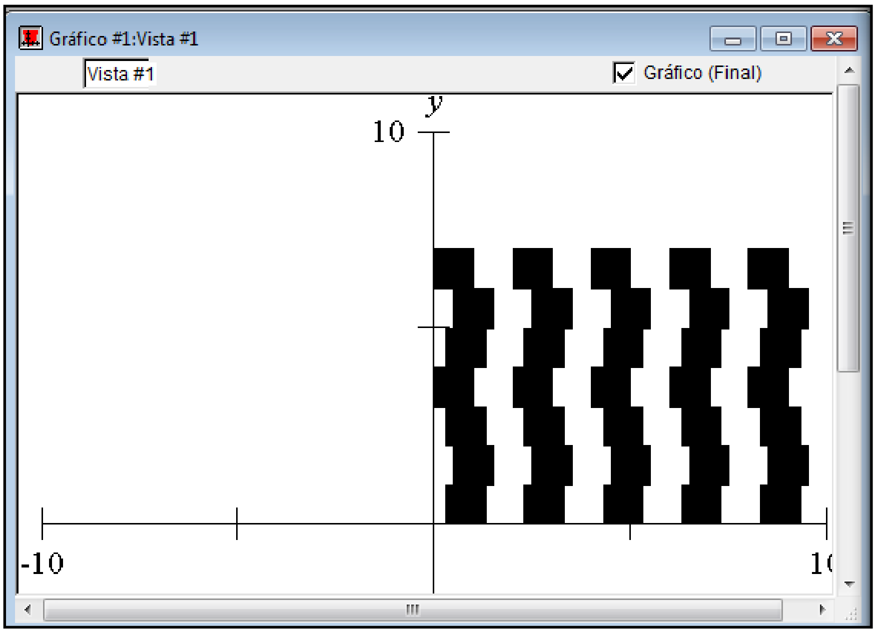
Fonte: (www.HypeSience.com)

Nesta atividade um dos grupos solicitou que a mesma fosse deixada para ser realizada no final argumentando que seriam necessárias muitas inequações para montar os quadrados. Respondemos de forma positiva à solicitação do grupo, pois todos concordaram que seria melhor realizar a atividade6 primeiro, que trabalha com regiões retangulares e triangulares através de bandeiras.

Ao final do segundo período de aula, faltou a construção da atividade 5 por parte dos grupos e combinamos que a construção seria realizada em casa e enviado via e-mail para o professor pesquisador, juntamente com os detalhes da construção. Recebemos via e-mail 4 das 6 construções esperadas. Os outros 2 grupos argumentaram que não estavam conseguindo relacionar as regiões, pois "*as retas estavam tortas*". Observamos na figura 74 uma das construções recebidas por e-mail.

Questionamos como o grupo procedeu para a construção da obra de arte e o explicado foi: "atribuímos comprimento 1 para o lado do quadrado e utilizamos espaços diferentes para cada fila de quadrados". Observando o arquivo das construções, compreendemos o que seria para os alunos "espaços diferentes", para uma fileira de quadrados trabalharam com a origem como vértice e para o eixo das ordenadas, outra fila afastada 0,3 unidades do eixo y e por fim outra fila afastada 0,5 unidades e a partir daí deram espaçamentos de uma unidade entre os quadrados.

Figura 74 – Construção do mosaico da atividade 5 pelo aluno D.

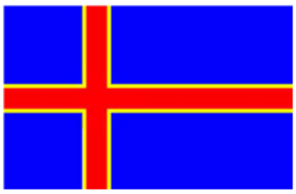


Fonte: (acervo dos alunos)

Na atividade 6 escolhemos duas bandeiras para que os discentes selecionassem uma delas e realizassem sua construção utilizando como base as atividades desenvolvidas anteriormente, como podemos observar na figura 75.

Figura 75 – Atividade 6 da etapa 2 da sequência didática

06. Agora vamos colocar em prática os conhecimentos obtidos e obter a construção de uma bandeira (escolha uma).

a) 

b) 

Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da bandeira. Anote as relações utilizadas.

____

____

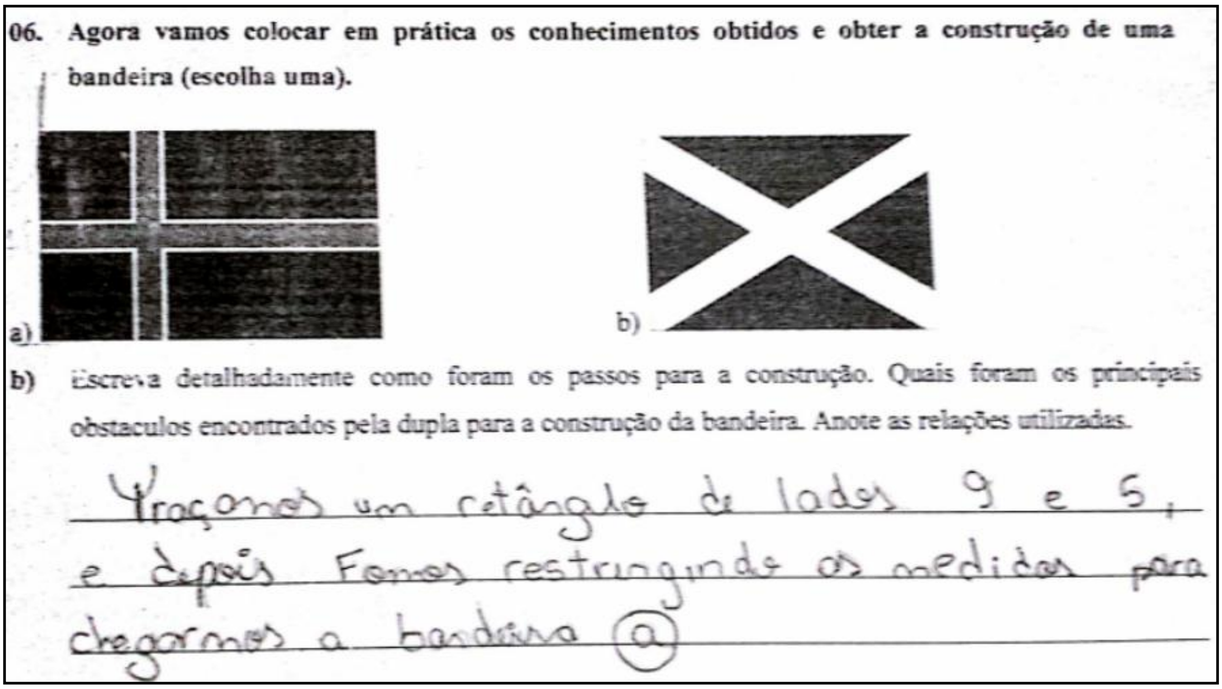
Fonte: (O Autor)

Inicialmente os discentes deveriam escolher uma entre as duas bandeiras disponíveis para realizar sua construção. Após esta etapa deveriam realizar as conversões de registros geométricos em algébricos. Ficamos satisfeitos ao final desta atividade, pois os alunos remanescentes enxergaram as atividades como desafios e se engajaram na realização das mesmas. Observamos que os grupos A, B,e D apresentaram maior facilidade na resolução das atividades anteriores escolheram a bandeira do item b, pois argumentaram que essa “era mais difícil”, ou seja, é um desafio que os alunos estavam dispostos a superar.

Observando a realização deste exercício pelos grupos notamos que 5 deles, utilizaram uma folha de caderno e representaram no plano cartesiano a bandeira escolhida pelo grupo afim de obter as inequações para a construção da figura. Constatamos ainda que nenhum dos grupos estavam “realizando cálculos” para realizar as construções.

Analisando as escritas dos alunos continuamos a observar uma dificuldade na escrita e em como se expressar corretamente, como podemos observar na figura 76.

Figura 76 – Resposta da atividade 6 dada pelo aluno D.


06. Agora vamos colocar em prática os conhecimentos obtidos e obter a construção de uma bandeira (escolha uma).

a)

b)

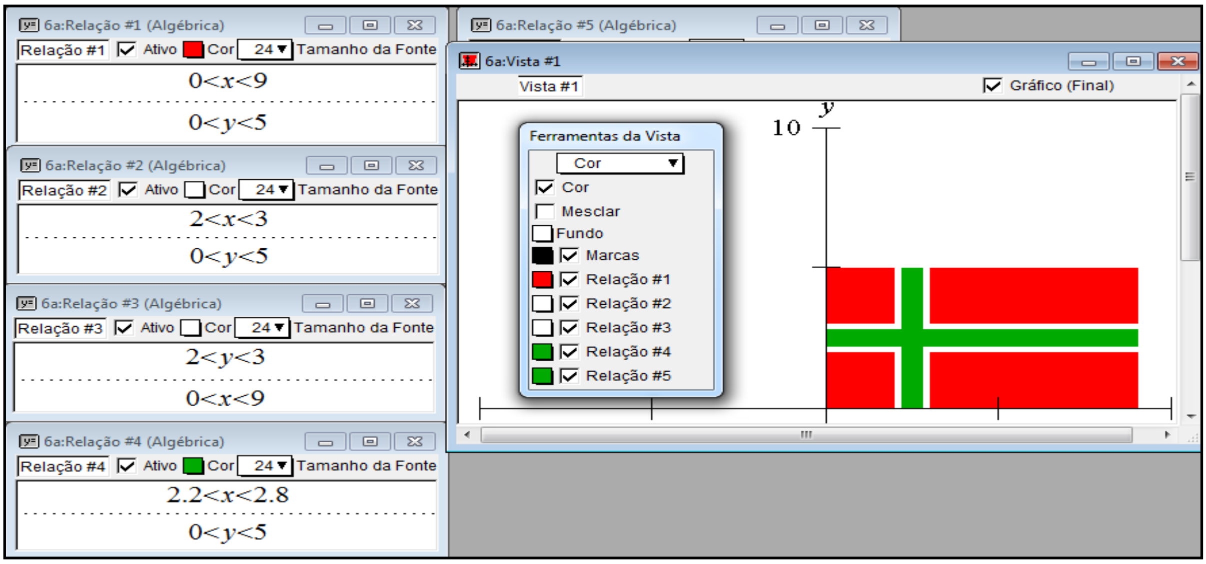
b) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da bandeira. Anote as relações utilizadas.

Traçamos um retângulo de lados 9 e 5, e depois Fomos restringindo as medidas para chegarmos a bandeira a

Fonte: (acervo dos alunos)

Analisando as inequações utilizadas para a construção da bandeira notamos que o grupo ao qual pertence o aluno C utilizou apenas intervalos de variação no eixo das abscissas e das ordenadas como podemos observar na figura 77.

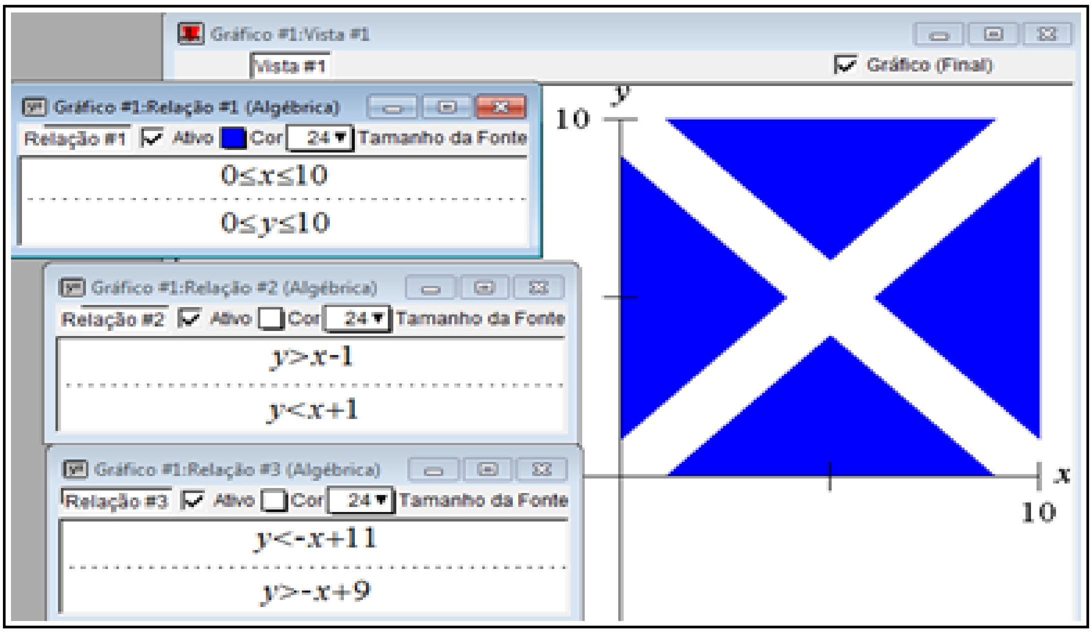
Figura 77 – Construção da bandeira da atividade 6 realizada pelo aluno C.



Fonte: (acervo dos alunos)

Na construção da bandeira b pelos grupos A, B e D destacamos a construção do grupo B como podemos observar na figura 78.

Figura 78 – Construção da bandeira da atividade 6 realizada pelo aluno B.



Fonte: (acervo dos alunos)

Na aula posterior à realização da etapa 2 da sequência didática, solicitamos uma conversa em particular com os integrantes do grupo B acerca da construção da bandeira b. Questionamos os integrantes acerca das inequações utilizados e sobre a proporção da figura. Pela figura 78, notamos que o grupo iniciou a construção pelo retângulo maior (construíram um quadrado) e depois as duas faixas transversais sobre o azul. Quando solicitamos aos alunos que trocassem a cor da faixa branca por outra cor, foi que o grupo percebeu as falhas na construção, "... *não limitamos o x e o y*". Achamos importante esta intervenção com o grupo, pois deverá ser responsabilidade do professor

> saber desempenhar um papel desafiador, mantendo vivo o interesse do aluno, e incentivando relações sociais, de modo que os alunos possam aprender uns com os outros e saber como trabalhar em grupo. Além disso, o professor deverá servir como modelo de aprendiz e ter um profundo conhecimento dos pressupostos teóricos que embasam os processos de construção de conhecimento e das tecnologias que podem facilitar esses processos. (VALENTE, 1999, p. 43-44)

Destacamos no final da atividade, o engajamento e o empenho dos alunos na realização das atividades e o modo como estavam explorando o software em sala de aula, com o professor pesquisador. Esta zona de exploração auxiliou os alunos na apropriação do conceito de inequação e os conduziu em seus estudos.

4.3.3 Relato da etapa 3

Na etapa 3 da sequência didática elaboramos atividades objetivando consolidar os conhecimentos adquiridos nas etapa 1 e 2 com as construções da atividade 3, bem como explorar com os alunos a análise do coeficiente angular para retas paralelas e retas perpendiculares no plano cartesiano e também as articulações algébricas e geométricas.

Antes da realização da atividade 3 da sequência de ensino, pelos dados coletados nas etapas 1 e 2 e pelo observado acerca da dificuldade na escrita dos discentes, optamos por realizar uma aula expositiva sobre alguns conceitos de geometria plana que serão necessários para a realização da atividade, mais especificamente sobre ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal e as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano. Resgatamos ainda a utilização de sistemas lineares e mostramos aos discentes um significado geométrico para a solução algébrica obtida na resolução dos sistemas.

Nossa atividade foi realizada em sala de aula, assim como na etapa 2 da sequência de ensino contamos com 6 notebooks e dois participantes a mais. Nesse momento inserimos os participantes nos grupos formados na etapa 2 e ficamos com três grupos de cinco alunos e três grupos de quatro alunos. A atividade 3 explora com os discentes as posições relativas entre duas retas no plano cartesiano, articulando as suas representações algébrica e geométrica com a utilização do GrafEq.

> Ao controlar os efeitos de desenho a partir de manipulações algébricas, os alunos podem apreender sobre movimentos de gráficos. Desta forma, as expressões algébricas associadas ficam impregnadas de significado geométrico e isso é resultado das explorações feitas no sistema de representação que com seu dinamismo, de imediato, relaciona duas diferentes representações de um objeto – a analítica e a geométrica. (GRAVINA, BASSO. 2010, p. 15).

A atividade 1 conta com quatro itens que permitem aos alunos explorar a forma algébrica de retas paralelas (coeficiente angular) e com o auxílio visual do GrafEq para a representação geométrica (sem pontos em comum no plano cartesiano) como podemos observar na figura 79.

Figura 79 – Atividade 1 da etapa 3 da sequência didática

01. Construa no GrafEq as seguintes equações:

- $y = x + 1$, $y = x + 2$ e $y = x + 3$.

a) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas.

____

$y = 2x + 1$, $y = 2x + 2$ e $y = 2x + 3$.

b) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas. Estas retas se interceptam no plano cartesiano? Por quê?

____

- $y = 5x + 1$, $y = 5x + 2$ e $y = 5x + 3$.

c) Sem realizar a construção faça um esboço do que você acha que irá aparecer no GrafEq ao digitarmos estas equações e depois compare com a representação obtida no software.

____

- $y = 5x + 1$ e $y = 5x + 4$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = \frac{2}{3}x + 3$.

d) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são ditas paralelas você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas paralelas no plano cartesiano?

____

Fonte: (o Autor)

Analisando as respostas dadas pelos grupos participantes, constatamos que todos afirmaram que o par de retas em cada um dos itens (a, b e c) no exercício 1 eram paralelas. Neste momento, questionamos os participantes sobre o fato de afirmarem que as retas eram paralelas e como poderiam confirmar a veracidade da resposta. Tivemos duas soluções propostas pelos grupos dos alunos B e D: o grupo A afirmou que "*o ângulo entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal é o mesmo, logo o coeficiente angular será o mesmo, pois será igual à tangente da inclinação*" e o grupo do aluno D propôs a utilização de um sistema linear para confirmar a posição relativa entre as retas no plano. Constatamos que durante a realização desta atividade, os participantes mais ativos de cada grupo sempre estavam com os seus cadernos tentando solucionar a indagação do pesquisador. Ficamos satisfeitos com as soluções propostas pelos grupos B e D, pois cada grupo "encontrou" um método (algébrico e geométrico) para determinar a posição relativa entre duas retas no plano cartesiano.

Observamos que todos os grupos responderam corretamente que as retas eram paralelas e para nossa surpresa, os grupos E e F afirmaram que a distância entre as retas paralelas era de uma unidade, como podemos observar na figura 80.

Figura 80 – Resposta da atividade 1 item a dada pelo aluno grupo E

01. Construa no *GrafEq* as seguintes equações:

- $y = x + 1$, $y = x + 2$ e $y = x + 3$.

a) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas.

todas os retas são paralelas com a distância de 1 entre elas.

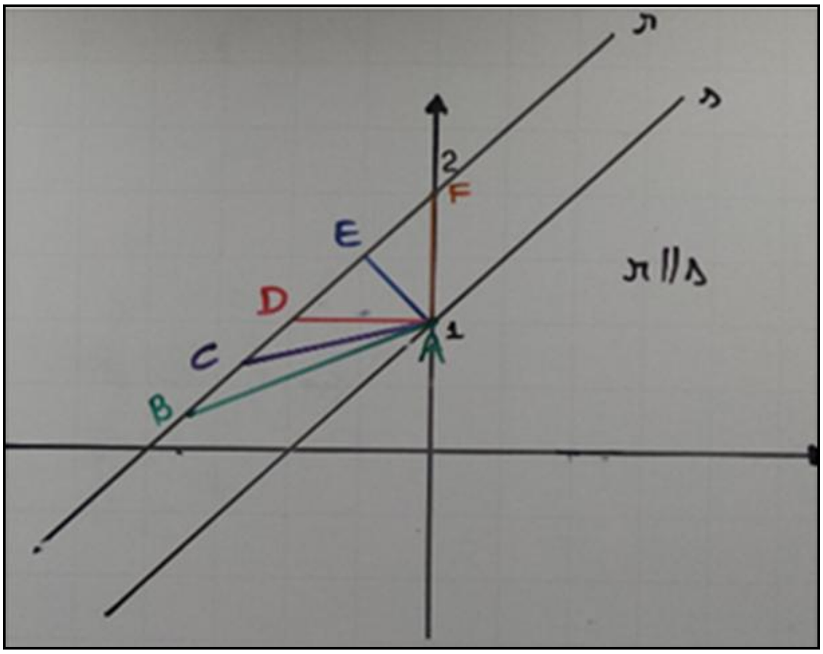
Fonte: (acervo dos alunos)

Levantamos o questionamento proposto aos grupos E e F, sobre a distância de uma unidade entre as duas retas paralelas para todos os participantes e se esta seria a menor distância entre as duas retas. Os grupos utilizaram como fundamento, para embasar a veracidade de que a distância de uma unidade era a menor, utilizando retas paralelas ao eixo das abscissas. Solicitamos aos grupos que voltassem sua atenção para o quadro e o pesquisador realizou algumas construções, como podemos observar nas figuras 81 e 82.

Figura 81 – Construção realizada pelo pesquisador

Fonte: (o Autor)

Figura 82 – Construção realizada pelo pesquisador

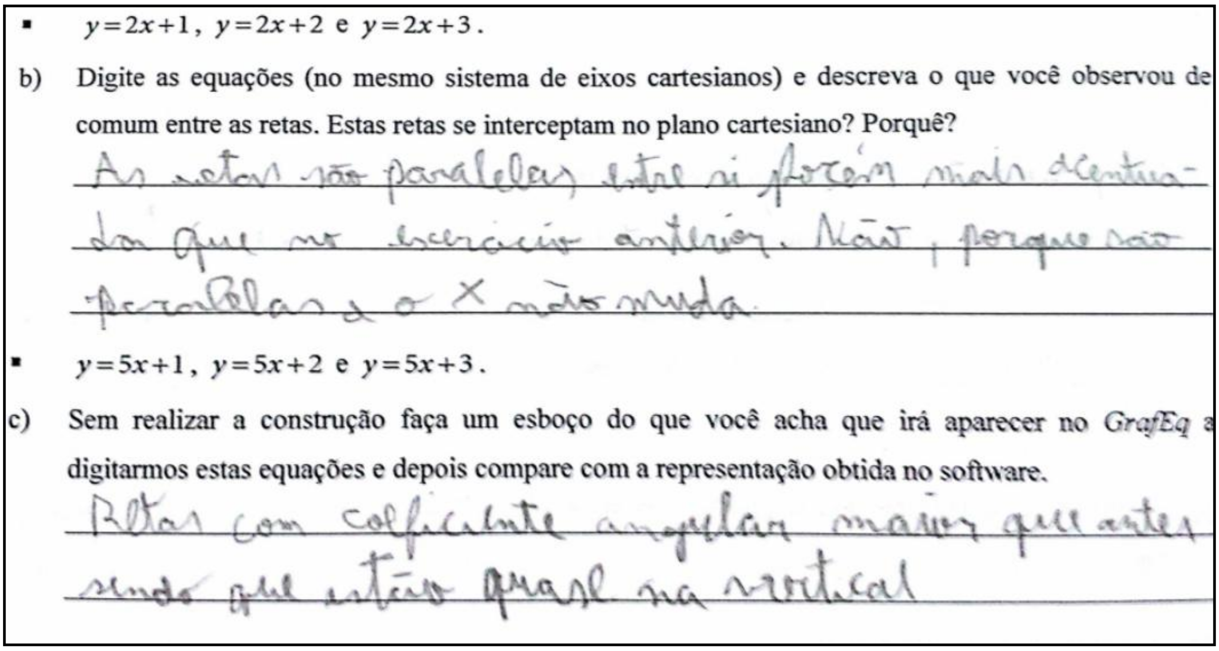


Fonte: (o Autor)

O pesquisador realizou duas construções. A primeira construção utilizamos 2 retas paralelas ao eixo das abscissas e 5 segmentos de retas e questionamos os grupos sobre qual dos segmentos seria o menor e todos os grupos responderam que o segmento $\overline{AB}$ é o menor entre todos.

Na segunda construção os grupos afirmaram que o menor segmento é $\overline{AE}$. Procuramos explicar aos alunos que a menor distância entre duas retas paralelas pode ser determinada pelos extremos de um segmento perpendicular entre as duas retas. Os demais itens da atividade 1 os grupos de alunos conseguiram solucionar as atividades sem maiores dificuldades, como podemos observar nas respostas dos grupos A, B e C, nas figuras 83, 84 e 85 respectivamente.

Figura 83 – Respostas da atividade 1 da etapa 3 dada pelo aluno A



- $y=2x+1$, $y=2x+2$ e $y=2x+3$.

b) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas. Estas retas se interceptam no plano cartesiano? Porquê?

As retas são paralelas entre si porém mais acentuadas que no exercício anterior. Não, porque são paralelas e o X não muda.

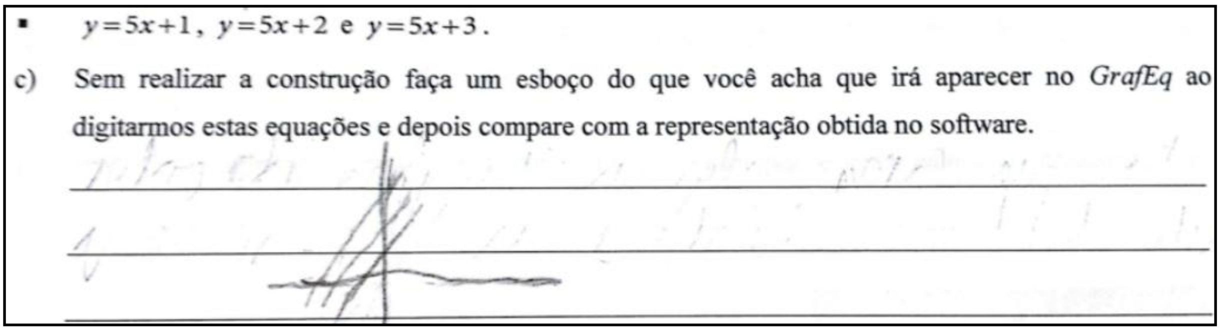
- $y=5x+1$, $y=5x+2$ e $y=5x+3$.

c) Sem realizar a construção faça um esboço do que você acha que irá aparecer no *GrafEq* a digitarmos estas equações e depois compare com a representação obtida no software.

Retas com coeficiente angular maior que antes sendo que estão quase na vertical

Fonte: acervo dos alunos

Figura 84 – Respostas da atividade 1 da etapa 3 dada pelo aluno B

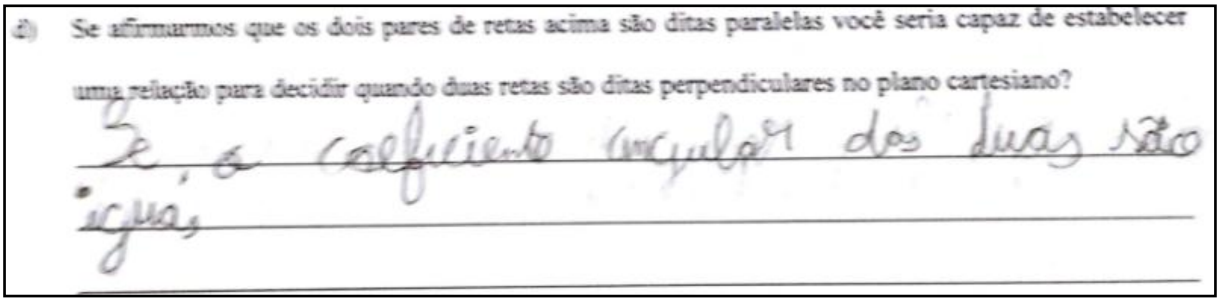


- $y=5x+1$, $y=5x+2$ e $y=5x+3$.

c) Sem realizar a construção faça um esboço do que você acha que irá aparecer no *GrafEq* ao digitarmos estas equações e depois compare com a representação obtida no software.

Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 85 – Respostas da atividade 1 da etapa 3 dada pelo aluno C



d) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são ditas paralelas você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas perpendiculares no plano cartesiano?

Se, o coeficiente angular dos duas são iguais,

Fonte: (acervo dos alunos)

Observamos ainda uma dificuldade na escrita por parte dos alunos. Na figura 83 o grupo refere-se à reta mais acentuada, ou seja, maior inclinação ou ainda, maior valor do parâmetro angular, e este como sendo o *x* que não varia para as retas serem ditas paralelas. Na figura 84 observamos uma boa representação das retas paralelas, incluindo sua intersecção no eixo das ordenadas. No item d constatamos que todos os grupos relacionaram corretamente a posição relativa (paralelas) com o parâmetro angular da reta.

Nas análises realizadas sobre a atividade 1,as respostas dos grupos foram condizentes com o que foi proposto, mostrando que os discentes assimilaram a ideia. Na atividade os discentes tinham que estabelecer um critério para decidir quando duas retas são ditas perpendiculares no plano cartesiano, utilizando como informação a sua representação algébrica (ver figura 86).

Figura 86 – Atividade 2 da etapa 3 da sequência didática

02. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y = x + 1$ e $y = -x + 2$.

e) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.

____

- $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 1$

f) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.

____

- $y = 5x + 1$ e $y = -\frac{1}{5}x + 4$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

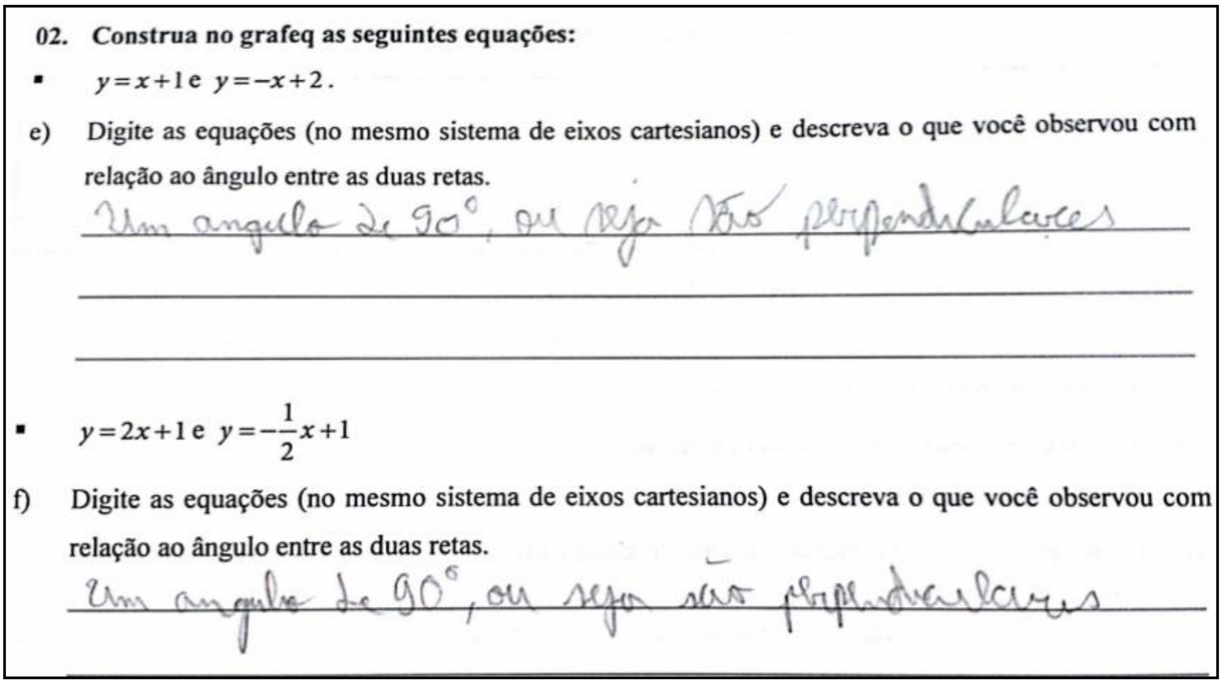
g) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são perpendiculares você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas perpendiculares no plano cartesiano?

____

Fonte: (o Autor)

Salientamos aqui a importância do GrafEq, pois o software está permitindo ao discente vivenciar e visualizar o conhecimento que estamos construindo em sala de aula. Observamos que os grupos responderam nos dois primeiros itens do exercício 2 que as retas são perpendiculares como podemos observar na figura 87.

Figura 87 – Resposta dos itens E e F da atividade 2 da etapa 3 pelo aluno C



02. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y = x + 1$ e $y = -x + 2$.

e) **Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.**

Um angulo de 90°, ou seja são perpendiculares

- $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 1$

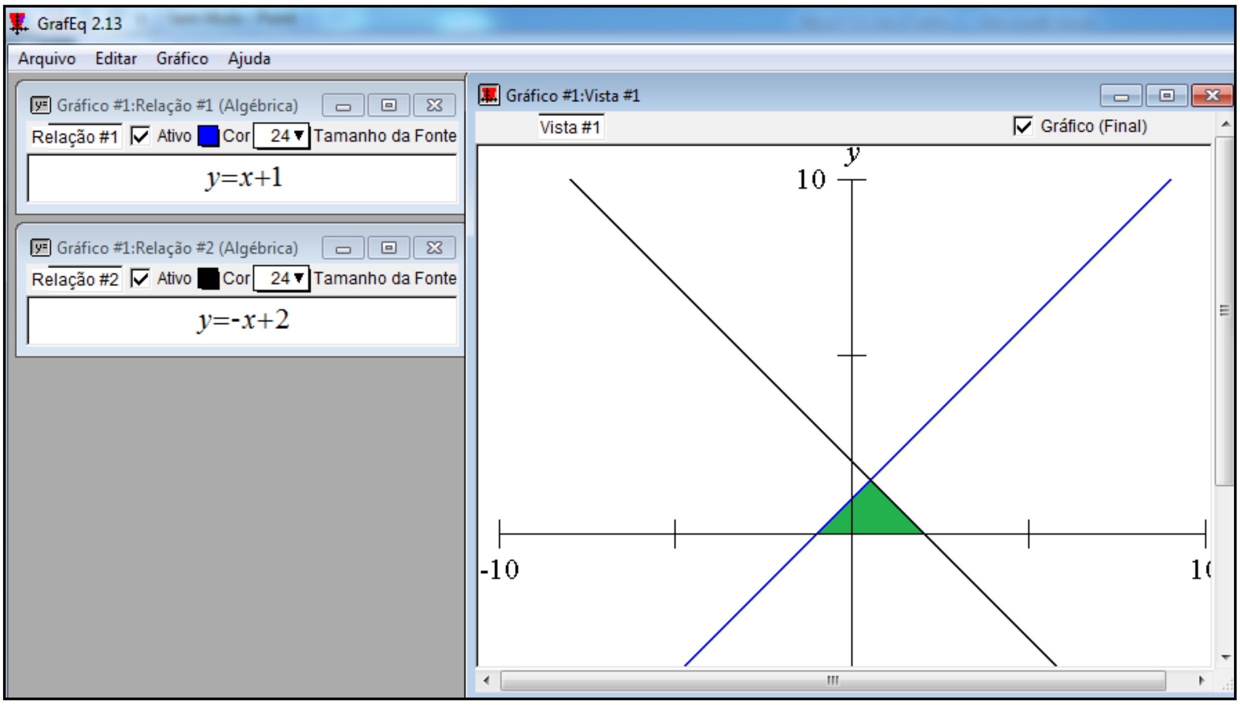
f) **Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.**

Um angulo de 90°, ou seja são perpendiculares

Fonte: (acervo dos alunos)

Após os grupos afirmarem que as retas são ditas perpendiculares, levantamos o questionamento sobre a veracidade desta afirmação e como poderíamos demonstrar que o ângulo entre as duas retas é um ângulo reto. Deixamos os integrantes trocando informações por cerca de 10 minutos, quando observamos o grupo D um pouco "eufórico". Neste momento o pesquisador aproximou-se do grupo, quando os alunos afirmaram terem como mostrar que o ângulo entre as retas é um ângulo reto. Afirmaram que "*se o ângulo é de 90° este triângulo (hachurado pelo pesquisador) é um triângulo retângulo e podemos usar Pitágoras*". Após a conversa com os integrantes do grupo, os mesmos já se debruçaram sobre as folhas para realizar os cálculos. Podemos observar a construção realizada na figura 88.

Figura 88 – Solução proposta pelo grupo A para retas perpendiculares



Fonte: acervo dos alunos

Ficamos muito satisfeitos com a observação e criatividade dos integrantes do grupo D ao proporem essa solução, pois os discentes estão investigando, fazendo suposições, elaborando estratégias de resolução de problemas e adquirindo novos conhecimentos e aprimorando os antigos. Diante do exposto, ressaltamos que

> O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráficos; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 2000, p.53)

Analisando as respostas do último item da questão 2 acerca da relação entre retas perpendiculares e seus parâmetros angulares, percebemos que os grupos E e F apenas afirmaram "que as retas são assim", gesticulando com as mãos para dizer que uma reta é crescente e outra decrescente e um dos integrantes afirmou que "o sinal muda" para as retas serem ditas perpendiculares. Os demais grupos relacionaram corretamente as retas perpendiculares com a sua representação algébrica como podemos observar nas figuras 89.

Figura 89 – Resposta do item g da atividade 2 da etapa 3 dada pelo aluno A

- $y = 5x + 1$ e $y = -\frac{1}{5}x + 4$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

g) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são perpendiculares você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas perpendiculares no plano cartesiano?

Quando o coeficiente angular for o inverso e oposto do outro.

Fonte: acervo dos alunos

Devido à dificuldade de dois grupos em relacionar o parâmetro angular com as posições relativas entre as duas retas perpendiculares, optamos por uma explicação teórica no quadro, pois devemos oferecer aos discentes um conjunto de boas situações de ensino.

Na atividade 3 propomos aos grupos que realizassem algumas construções que integrassem os conteúdos trabalhados durante o trimestre, tanto nas aulas teóricas como nas aulas realizadas em ambientes informatizados. O primeiro item que propomos foi a construção do logotipo da Caixa Econômica Federal que explora regiões retangulares e regiões compreendidas entre duas retas paralelas, como podemos observar na figura 90.

Figura 90 – Atividade 3 item a da etapa 3 da sequência didática

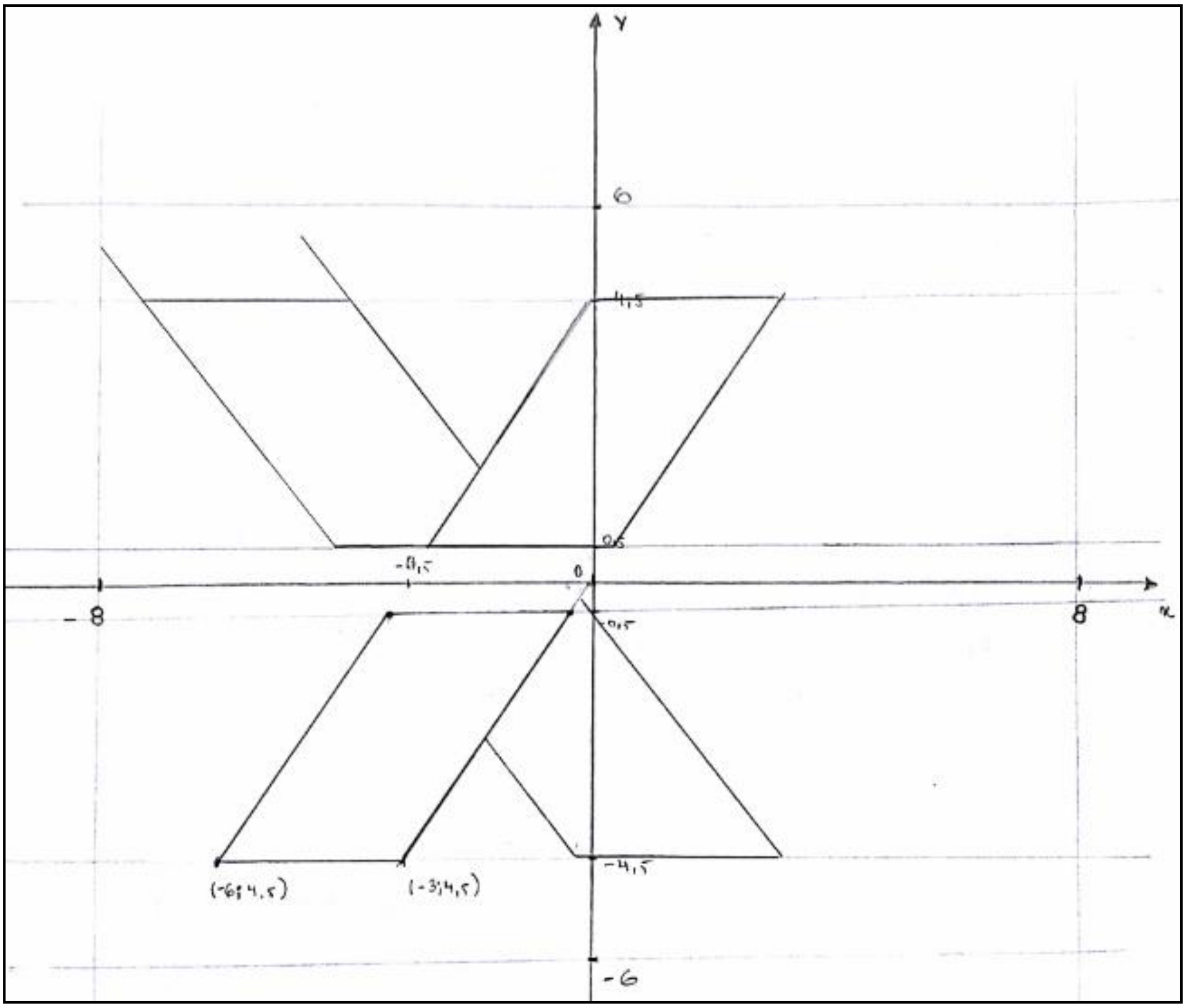
03. Utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2, vamos construir alguns polígonos regulares.

a) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

Fonte: (o Autor)

Percebemos que os grupos estavam conversando (sobre a atividade), mas relutantes em iniciar as construções. Acreditamos que neste momento os discentes poderiam estar sentindo-se pouco confortáveis acerca da realização da atividade, pois exige uma maior percepção e compreensão do conteúdo, do que precisamente a realização de cálculos, ou talvez nossa atividade fosse um pouco extensa. Salientamos que, ao depararmos com a imobilidade dos discentes, o pesquisador passou em cada grupo para dar um auxílio inicial na realização das atividades. Observamos que os grupos A, B e D recorreram ao papel, realizaram a construção do plano cartesiano e desenharam o logo da Caixa no papel, para a partir dele realizarem a construção da imagem, como podemos observar na figura 91.

Figura 91 – Construção realizada no papel da atividade 3 pelo aluno D

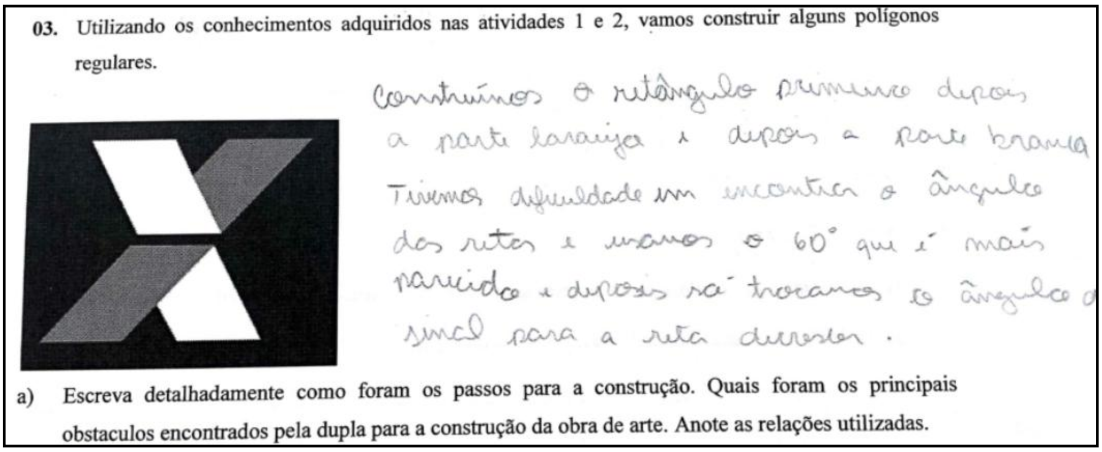


Fonte: (acervo dos alunos)

> A matemática e a arte relacionadas possibilitam que o educando desenvolva capacidade de imaginar, criar, experimentar, analisar, representar e argumentar, fazendo com que o professor utilize diferentes recursos para a criação de situações de aprendizagem desafiadoras. Utilizar esses recursos, porém, implica numa reflexão, discussão e organização do ambiente de aprendizagem, pois o professor deve estar preparado para discutir com seus alunos todos os conceitos e propriedades matemáticas envolvidas na construção das réplicas de figuras de arte (BERLANDA, 2015. p.2).

Ao término desta atividade percebemos que apenas três grupos realizaram a construção correta do logotipo da Caixa, outros dois grupos realizaram a construção parcial e um grupo construiu apenas a região retangular. Em conversas com os integrantes desses grupos, confirmamos que eles sabem qual será a região hachurada, mas apresentaram algumas dificuldades em determinar as equações das retas, ou seja, sabem o que fazer, mas faltam ferramentas necessárias para o “como fazer”. Analisando as respostas dos grupos que realizaram a construção, percebemos certa preocupação com a declividade das retas e com o ângulo entre as regiões hachuradas da letra x como podemos observar na figura 92.

Figura 92 – Resposta do item a da atividade 3 pelo aluno B


03. Utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2, vamos construir alguns polígonos regulares.

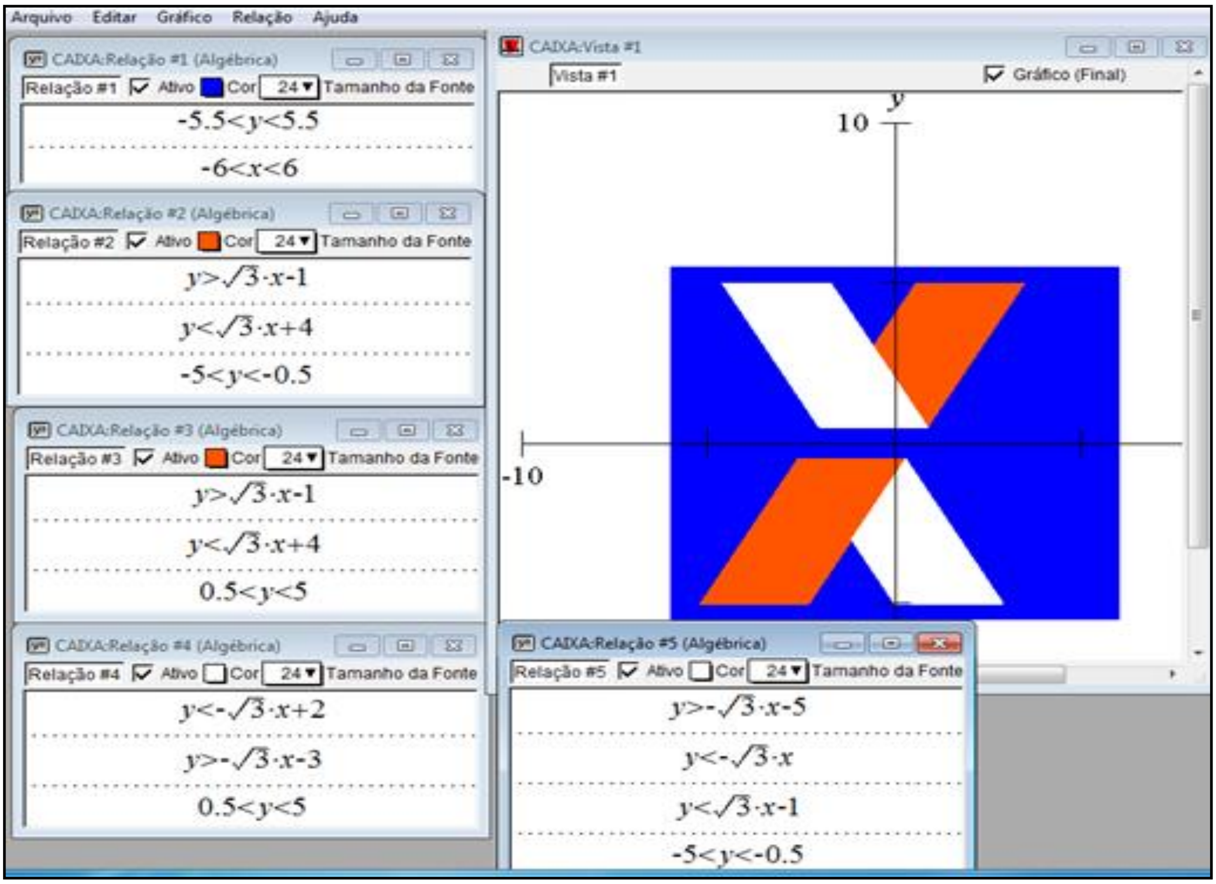
Construímos o retângulo primeiro depois a parte laranja e depois a parte branca. Tivemos dificuldade em encontrar o ângulo das retas e usamos o 60° que é mais parecido e depois só trocamos o ângulo o sinal para a reta direita.

a) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

Fonte: (acervo dos alunos)

Observamos na resposta dada pelo grupo B do item a, que se referem a ângulo como sinônimo para parâmetro angular. Questionados do porquê da inclinação de 60° ser mais “parecida”, o grupo argumentou que trabalhamos em aula “*os ângulos de 30°, 45° e 60 e destes o mais parecido é o ângulo de 60°*”. Durante a construção observamos que o grupo apenas “testava” o parâmetro linear e comparava a imagem obtida com o logotipo. Podemos observar a construção realizada pelo grupo B na figura 93.

Figura 93 – Construção do item a da atividade 3 pelo aluno B



Fonte: (acervo dos alunos)

Mesmo que a construção tenha sido realizada do método da tentativa e erro pelos integrantes do grupo, constatamos um bom domínio das relações algébricas e geométricas entre o coeficiente linear e a sua representação geométrica. Neste momento da aula, faltavam apenas 10 minutos para o encerramento da atividade, ou seja, mais uma vez os grupos ficaram responsáveis por entregar as atividades restantes por e-mail e realizar as construções em casa. Já deixamos aqui, como sugestão, para outros professores, para uma futura aplicação, dividir a atividade 3 em outras duas atividades, uma que explore apenas as posições relativas de retas em ambientes informatizados em paralelo com a aula expositiva e uma próxima atividade que explore as construções geométricas. A mobilização simultânea realizada pelos discentes, possibilitou a representação de ao menos dois registros de representação a todo o momento, o que contribuiu para a aprendizagem (DUVAL, 2009).

No item b da atividade 3 propomos que realizassem uma construção de losangos que justapostos, formam a imagem que podemos observar na figura 94.

Figura 94 – Atividade 3 item b da etapa 3 da sequência didática

b) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

____

____

Fonte: (o Autor)

Esta atividade foi entregue somente pelos grupos A, B e D. Já esperávamos uma dificuldade nesta construção, pelo que observamos na realização do logotipo da Caixa, pois as figuras estão posicionadas em ordem crescente de dificuldade. Em conversas com os alunos que não conseguiram realizar a construção, vimos que eles estavam com dificuldades para "*encontrar as retas corretas para a construção da figura*". Analisando a resposta do grupo A e do grupo B, constatamos que ambos os grupos utilizaram como parâmetro angular a tangente de 60°, pois de acordo com os integrantes era a reta "*mais parecida*" como podemos observar na figura 95.

Figura 95 – Resposta do item b da atividade 3 dada pelo aluno B

b) **Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.**

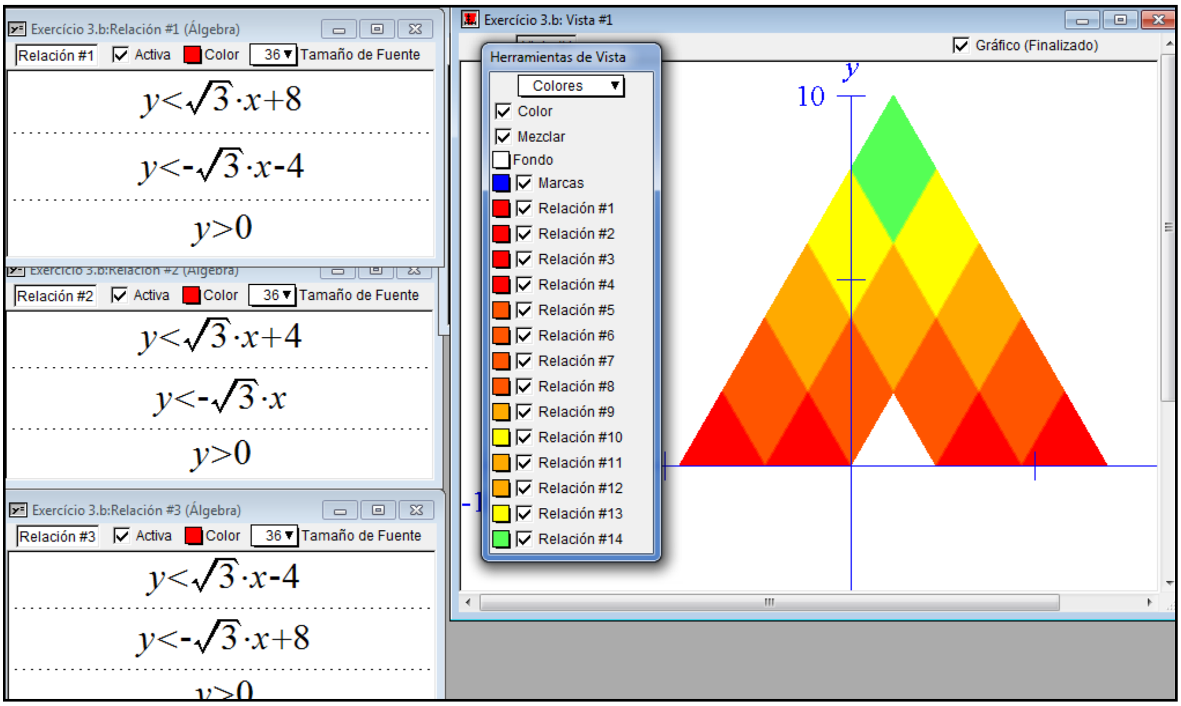
Vimos que o ângulo entre as figuras é o de 60° e para construir a figura alteramos o coeficiente linear de 4 em 4 para elas encaixarem. tivemos dificuldade nas primeiras retas depois foi fácil.

Fonte: (acervo dos alunos)

Quando analisamos as construções enviadas por e-mail pelos grupos A, B e C constatamos que os grupos A e B realizaram as conversões de registros corretamente, mas para as retas crescentes atribuíram o parâmetro angular $\sqrt{3}$ (tangente de 60°) e para as retas decrescentes apenas trocaram de sinal o parâmetro angular. Já no parâmetro linear, afirmaram que trocavam com uma variação de 4 unidades em relação ao coeficiente anterior. Podemos observar a construção do item b pelo grupo A, na figura 96.

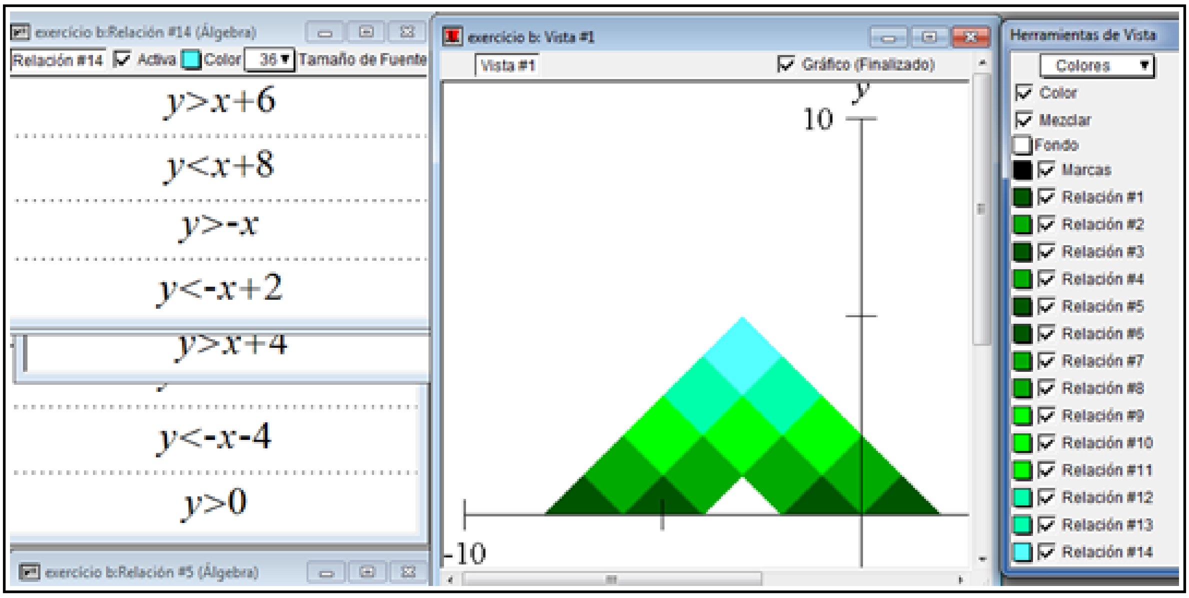
Na sala de aula optamos por não interromper o momento de discussão dos alunos durante a realização do item a, mas percebe-se que o grupo C não conseguiu relacionar corretamente o coeficiente angular da reta como se pode observar na figura 97.

Figura 96 – Construção do item b da atividade 3 realizada pelo aluno D



Fonte: (acervo dos alunos)

Figura 97 – Construção do item b da atividade 3 pelo aluno C



Fonte: (acervo dos alunos)

O terceiro item da atividade 3 desta sequência didática, explora a utilização de retas paralelas e retas perpendiculares para determinar algumas regiões no plano cartesiano, como podemos observar na figura 98.

Figura 98 – Atividade 3 item c da etapa 3 da sequência didática

c) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

____

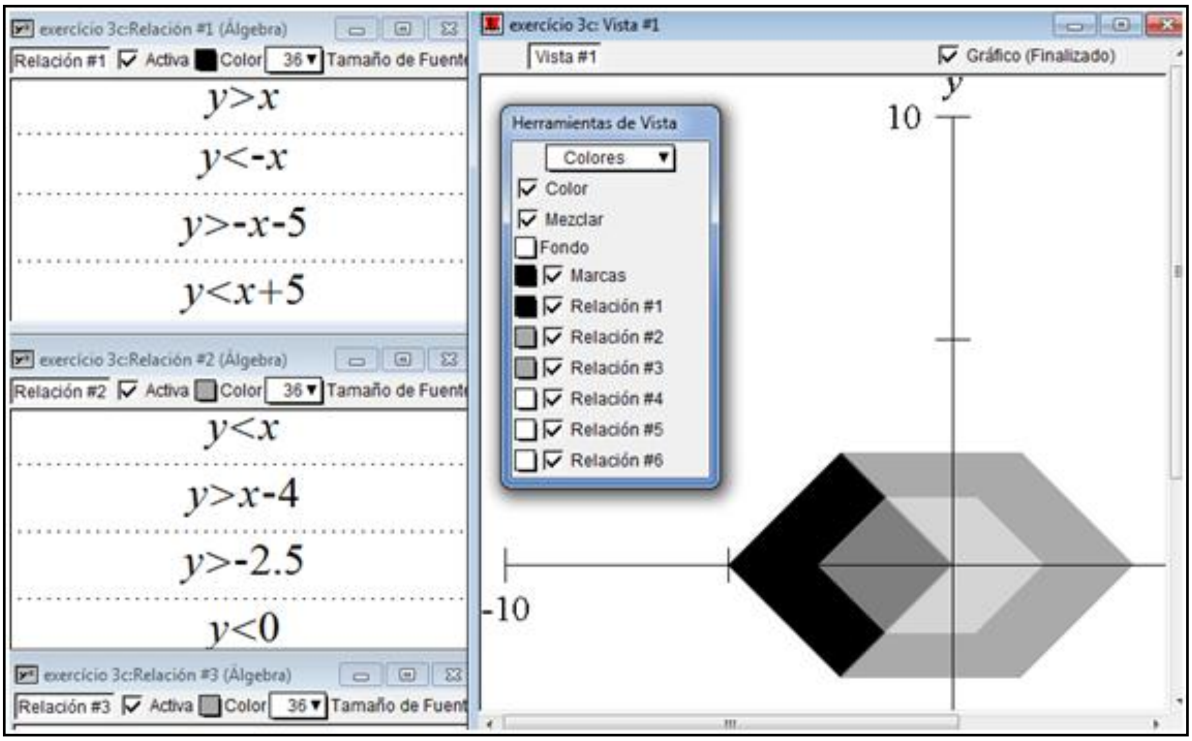
____

Fonte: o Autor

Assim como no item b,metade dos grupos enviou a construção para o e-mail do pesquisador. Percebemos um engajamento por parte dos integrantes na realização das atividades propostas para a aprendizagem de geometria analítica. Conversando com os integrantes destes grupos, constatamos que o raciocínio utilizado para equacionar as retas era de escolher uma das tangentes notáveis do primeiro quadrante e depois trocá-la de sinal. Um dos potenciais semióticos do GrafEq é trabalhar com as intersecções de regiões planas. Observando o trabalho entregue pelo grupo do aluno A, constatamos um bom entendimento acerca dos elementos geométricos e suas representações algébricas, como podemos observar na figura 99.

Procuramos afirmar que ao longo das atividades, observamos um amadurecimento e responsabilidade por parte de alguns grupos. Grande parte dos objetivos propostos foram atingidos se não na sua plenitude, parcialmente, mas por todos os discentes que participaram da sequência de ensino.

Figura 99 – Construção do item c da atividade 1 pelo aluno A



Fonte: (acervo dos alunos)

4.4 ANÁLISE *A PRIORI* E ANÁLISE *A POSTERIORI*

Nesta fase da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996) confrontam-se a análise *a priori* (parte preditiva) e análise *a posteriori*, através de análise dos dados obtidos na experimentação em sala de aula, para posteriormente validar ou não a sequência didática sobre a aprendizagem de Geometria Analítica em ambientes informatizados.

4.4.1 Etapa 1 da sequência didática

4.4.1.1 Análise a priori da etapa 1

Na etapa 1 da proposta didática, os alunos deveriam reconhecer regiões do plano cartesiano através de inequações de 1° grau e de uma variável, ou seja, limitar o intervalo de variação do *x* e do *y*. Objetivamos ainda nesta atividade que os alunos compreendessem a influência dos parâmetros angular e linear na equação reduzida da reta e o "impacto" causado pelas suas variações na representação geométrica da reta no plano cartesiano.

Nossas hipóteses iniciais em relação a esta atividade era que através de uma exploração empírica os alunos fossem instigados quanto à identificação das equações e suas representações gráficas, propiciando a reflexão e a constatação de regularidades para realizar a conversão de registros. Acreditamos ainda, que no início das atividades os alunos apresentariam algumas dificuldades em relacionar regiões no plano cartesiano, mas que gradativamente iriam compreender estas regiões e suas representações algébricas.

As atividades 2 e 3 da atividade 1, apresentam num primeiro momento uma dificuldade maior para os grupos de trabalho expor uma solução, pois envolve diretamente a conversão de registros algébricos e geométricos. Justificamos essa dificuldade, pois em conversas com outros colegas de Matemática do 1° ano do Ensino Médio nenhum deles explora o produto cartesiano e sua representação gráfica no plano cartesiano, ou seja, uma novidade para o grupo de alunos.

Outro fator que poderia influenciar o desempenho dos alunos é o fato de ser uma aula realizada em um ambiente informatizado, com a utilização de um software que os alunos não tinham conhecimento, pois o pesquisador questionou a turma em aula sobre o conhecimento ou não do GrafEq.

Contudo, prevendo esta possível dificuldade, entregamos de um tutorial do GrafEq (Ver Apêndice B) e solicitamos aos alunos que fizessem o download em seu computador pessoal, para explorar o software e realizamos uma aula prévia explicitando os principais comandos do GrafEq.

Após a execução desta etapa, considerou-se que os discentes teriam uma melhor compreensão de regiões no plano cartesiano e um conhecimento satisfatório sobre a influência dos parâmetros da reta e portando, realizar algumas conversões de registros algébricos em geométricos e vice-versa.

4.4.1.2 Análise a posteriori da etapa 1

No início das atividades, os alunos foram divididos em duplas ou trios para iniciar as atividades propostas e devido ao problema do laboratório de informática, utilizamos o Geogebra em sala de aula para a atividade 1, já que os alunos tinham conhecimento sobre este software. Como solicitado as duplas deveriam realizar as construções em casa e enviar os arquivos. Na sua totalidade as duplas enviaram os arquivos,logo o trabalho em um ambiente informatizado não foi uma dificuldade para a realização das atividades mesmo com as adaptações.

Os grupos envolveram-se com as das atividades e estavam explorando novos intervalos no exercício 1, propiciando através deste conhecimento empírico as condições necessárias para a institucionalização[6]. Os grupos rapidamente reconheciam intervalos e sua correspondência geométrica no plano cartesiano e vice-versa.

Constatamos em alguns grupos dificuldades de se expressarem. Como por exemplo, no item b, da atividade 1, no intervalo $x< 3$, uma das duplas escreveu que a representação gráfica seria uma "*área infinita negativa, à esquerda do 3*". Acredita-se que isso ocorre porque os alunos desconhecem termos matemáticos que são expostos pelo professor pesquisador, bem como a análise dos dados obtidos, uma vez que as atividades são complementares a apresentação do conteúdo na aprendizagem de Geometria Analítica.

No decorrer das atividades observamos que os grupos já estavam familiarizados com os intervalos e suas representações geométricas, pois ouvimos dos alunos que era uma atividade fácil e "deveria valer pontos". Ficamos contentes com estes comentários, pois esta etapa inicial estava ocorrendo de forma semelhante ao que planejamos previamente.

[6]Entende-se por institucionalização a sistematização do conhecimento adquirido através de processos empíricos.

Embora os alunos não conseguissem expressarem-se matematicamente corretos, as atividades foram desenvolvidas sem maiores dificuldades. Somente na atividade 2 percebemos que algumas duplas atribuíram intervalos errados na construção do quadrado.

Observando a construção de retas e a influência dos parâmetros na equação reduzida da reta, constatamos que a maioria das duplas com exceção de duas observaram corretamente a influência dos parâmetros. Na resposta dada por uma destas duplas sobre a influência dos parâmetros obtivemos como resposta: "*O parâmetro a influência no ângulo e o b forma retas novas*". Ou seja, esta dupla não reconhece o parâmetro linear como intersecção do eixo das ordenadas ou como um deslocamento vertical de *b* unidades da reta $y = x$.

Em dado momento começaram a surgir algumas conclusões equivocadas. No momento em aumentávamos o parâmetro angular, como afirma uma das duplas: "*a reta fica mais parecida com o eixo y*" e afirmaram que para um "*coeficiente muito grande estas retas ficariam iguais até o momento que a reta irá cruzar o eixo das ordenadas"*. O que podemos entender na sua descrição, é que o aluno compreende o que acontecerá com a reta ao aumentarmos o coeficiente angular. Neste momento da aula aproveitamos para ir ao quadro e resgatar alguns conceitos de funções crescentes e decrescentes. Observamos que antes das explicações no quadro, as duplas não sabiam expressar corretamente a representação geométrica de uma reta.

Notamos nos alunos alguma estranheza frente à escrita, pois muitos pensaram que iríamos fazer cálculos e utilizar fórmulas para a realização das atividades. Como constatamos a maioria das duplas apresentou dificuldades sobre alguns termos matemáticos, alguns alunos reconheceram internamente o significado das representações algébricas e geométricas; podemos considerar que obtivemos um resultado satisfatório frente às dificuldades dos alunos e que esta atividade colaborou para que os objetivos fossem atingidos.

4.4.2 Etapa 2 da sequência didática

4.4.2.1 Análise a priori da etapa 2

Realizaram-se seis atividades na etapa 2. A atividade 1 resgata alguns conceitos trabalhados na etapa 1 e o que foi trabalhado em aula durante o trimestre com o objetivo de verificar o que os discentes conseguiram absorver do conteúdo de geometria analítica acerca de intervalos nos eixos coordenados e também a influência dos parâmetros na equação reduzida da reta.

Na etapa 2, o objetivo principal era que os alunos conseguissem reconhecer algumas regiões no plano cartesiano através de uma inequação ou de um sistema de inequações de 1° grau com duas variáveis, além de converter e articular corretamente as representações algébricas e geométricas dos objetos (retângulos e triângulos) da etapa 2.

Acreditamos que nesta atividade os discentes apresentariam algumas dificuldades, pois eles afirmaram que nunca estudaram (ou não lembram) de inequações. Como esta é uma atividade que os alunos não estão familiarizados e os livros didáticos não exploram este conteúdo de geometria analítica, a realização da atividade pode apresentar um impedimento na conclusão dos exercícios. No contexto de ensino, esses registros são ensinados de forma independente, e as articulações entre os objetos são consideradas como conseqüência natural do conhecimento dos registros.

A matemática toma emprestada a língua materna e utiliza-se de símbolos para a leitura e a interpretação das atividades propostas. Sendo uma linguagem universal, segundo Klüsener (1999) existem ramificações dentro da matemática como álgebra, geometria e aritmética e cada uma com sua linguagem específica. É importante o aluno conhecer os objetos matemáticos em cada registro semiótico, mas também saber realizar os tratamentos adequados, pois cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida.

> As propriedades relativas às operações com números reais devem ser trabalhadas de modo que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas. Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma desigualdade quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver inequações que envolvam quocientes. É recomendável que o professor retome, nesse momento, as “regras de sinais” para multiplicação de números inteiros acompanhadas de justificativas; as definições de multiplicação e divisão de frações; as explicações que fundamentam os algoritmos da multiplicação e da divisão de números inteiros e decimais. Mesmo que as operações e os algoritmos já tenham sido estudados no ensino fundamental, é importante retomar esses pontos, aproveitando a maior maturidade dos alunos para entender os pontos delicados dos argumentos que explicam essas operações e algoritmos. (BRASIL, 2006. p.71)

Em contrapartida a articulação de registros em ambientes informatizados podem facilitar a visualização das figuras geométricas pelo aluno, permitindo que o aluno possa explorar conversões de registros algébricos em geométricos de uma forma rápida e precisa.

> O uso dessas tecnologias traz significativas contribuições para se repensar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática à medida que: relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente; evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas frente ao seu estudo. (BRASIL, 1998, p. 43)

Esperemos também, em decorrência da análise da etapa 1 que os alunos apresentem algumas dificuldades na escrita e com relação aos exercícios, salientamos que nesta etapa são apresentadas algumas atividades com construções mais fáceis e outras mais “complexas” como as atividades 4 e 6 (bandeira b).

Acreditamos que ao término desta atividade, os discentes conseguiram reconhecer e articular registros algébricos e geométricos do mesmo objeto matemático, reconhecendo a correspondência semiótica entre as suas distintas representações, realizar os tratamentos dentro de um mesmo registro semiótico.

4.4.2.2 Análise a posteriori da etapa 2

Nessa etapa, constatamos uma maior afinidade entre os integrantes dos grupos e a intensa troca de informações entre os participantes da atividade demonstrando a importância da valorização escolar, que além de fortalecer o desempenho escolar do aluno auxilia na formação do cidadão. Nesta etapa da sequência de ensino, oito alunos estavam ausentes. Acreditamos que estes alunos poderiam contribuir com os debates realizados em sala de aula e suas ausências foram prejudiciais para a sua aprendizagem.

Como esperado da atividade 1, as duas primeiras construções foram realizadas pelos grupos de maneira rápida e correta. Apresentaram apenas uma dificuldade em centrar o quadrado na origem, mas não chegou a ser considerado um desafio para os discentes. No geral percebemos uma boa utilização nas restrições de intervalo no produto cartesiano.

Na atividade 2 exploramos outras inequações de 1° grau com duas variáveis e para nossa surpresa os alunos compreenderam rapidamente qual semiplano seria hachurado. Quando questionamos os alunos sobre o porquê do semiplano superior seria hachurado na equação $y > x + 1$, justificaram apenas com: “*se o y é maior então é a parte de cima da reta*”.Percebemos aqui que deveríamos ir para o quadro explorar alguns conceitos com os alunos.

Na resolução da atividade 3,observamos que alguns grupos estavam utilizando o método da tentativa e erro para obter uma reta “parecida” com a utilizada na construção do triângulo, resolvendo o exercício de maneira mais intuitiva do que teórica.

Constatamos problemas em relação à linguagem e a forma de se expressar dos alunos na atividade 4, justificando que as retas “*eram assim*”, gesto com as mãos fazendo duas retas paralelas. Conseguiam descrever verbalmente, mas não conseguiam escrever isso na linguagem matemática. Ratificando nossa suposição, alguns grupos apresentaram algumas dificuldades na construção dos três triângulos nessa atividade. Ou seja, não recordaram a influência dos coeficientes angular e linear na equação da reta. Metade dos grupos de trabalho realizou as construções sem a interferência do professor pesquisador.

Na atividade 6, a maioria dos grupos escolheu a bandeira (item a) mais fácil de construir. Observamos certa preocupação de alguns grupos para causar uma “boa” impressão ao pesquisador, tanto para a escolha como na realização das construções. Acreditamos ainda que a rapidez e precisão dos ambientes informatizados permitiu aos alunos explorar e facilitar as construções das figuras.

> Buscando diversificar situações que englobem atividades de conversão, o professor propiciará ao aluno não apenas que ele apreenda progressivamente conceitos matemáticos, mas contribuirá para que o mesmo evolua em suas capacidades de raciocínio, análise, visualização, interpretação e, consequentemente, para a sua formação enquanto cidadão (DALEMOLLE, 2010. P.06).

Diante disso, os alunos apresentaram reflexões sobre a importância e a relação entre a matemática e as construções realizadas no processo de ensino e aprendizagem, nessa etapa 2.

4.4.3 Etapa 3 da sequência didática

4.4.3.1 Análise a priori da etapa 3

Foram realizados três atividades na etapa 3. As duas primeiras atividades exploram através de equações reduzidas de retas (representações algébricas), as posições relativas de retas, paralelas e perpendiculares. A terceira tarefa contempla os conhecimentos adquiridos pelos alunos nas atividades 1 e 2 através de construções geométricas que exploram as posições relativas e inequações no plano cartesiano.

Nosso objetivo principal na etapa 2 era trabalhar com os alunos as posições relativas de retas no plano e que os mesmos conseguissem reconhecer ou estabelecer uma relação entre os parâmetros angulares para retas paralelas e retas perpendiculares, além de realizar as conversões e tratamentos adequados em cada exercício.

Acreditamos que nos exercícios 1 e 2 os alunos não apresentariam muitas dificuldades em relacionar o parâmetro angular da reta com a sua posição relativa, embora no início do ano letivo os alunos argumentaram que pouco lembram do conteúdo de geometria plana. Neste momento ficamos um pouco receosos com relação à aprendizagem de geometria analítica, pois

> O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. (BRASIL, 2002. p.124)

Acreditamos, assim como na etapa 2 que os ambientes informatizados possam auxiliar os alunos no reconhecimento de retas paralelas e retas perpendiculares, pois estes ambientes caracterizam o aprendizado como um processo de investigação para que o aluno possa realizar as conversões de registros no sentido algébrico – geométrico. Como observado nas etapas 1 e 2 esperamos que os alunos ainda apresentem alguma dificuldade na escrita.

Salientamos que na atividade 3 as construções que serão realizadas pelos discentes estão em ordem crescente de dificuldade. Neste exercício esperamos uma dificuldade na construção dos itens *b* e *c*. Ao término desta atividade acreditamos que os alunos reconheçam duas retas paralelas ou duas retas perpendiculares através de suas representações algébricas tal como realizar as conversões e tratamentos necessários em cada registro semiótico.

4.4.3.2 Análise a posteriori da etapa 3

Nesta etapa contamos com a participação de dois alunos, em relação à atividade anterior sendo redirecionados para dois outros grupos que estavam com quatro integrantes na etapa 2. Ficamos gratos com a presença de mais alunos na realização da atividade 3. Percebemos uma nítida afinidade entre os integrantes dos grupose uma intensa troca de informações.

Observamos que na realização das atividades muitos alunos estavam com seus cadernos, pois na semana anterior o professor resgatou alguns conceitos de geometria plana como posições relativas entre duas retas no plano cartesiano, ângulos e ainda como solucionar problemas que envolvam sistemas lineares explorados no 2° ano do Ensino Médio.

> ...devendo o professor trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas. Evidencia-se nesta afirmação, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma necessidade de utilização de diferentes Registros de Representação Semiótica, o registro gráfico e o registro algébrico, e um trabalho que promova a articulação, ou seja, a conversão entre esses registros. (DALLEMOLLE, 2011. p.2)

Como esperado no exercício 1, os grupos de trabalho na sua totalidade reconheceram as condições do parâmetro angular para que duas retas possam ser paralelas. Quando questionados os grupos sobre a certeza de que realmente as duas retas no plano são paralelas um dos grupos sugere que: "*como o coeficiente angular é a tangente da inclinação, podemos ter duas retas paralelas interseccionadas por uma transversal que é o eixo das abscissas*". Percebemos que este grupo se apropriou dos conceitos geométricos e algébricos das retas. Outro grupo neste momento sugeriu a utilização de sistemas lineares para a confirmação da posição relativa entre as retas, pois neste caso não existe solução para o sistema de duas variáveis de 1° grau. Percebemos uma boa utilização das ferramentas matemáticas para justificarem suas respostas.

Na atividade 2, os grupos não apresentaram dificuldades em afirmar que as retas eram perpendiculares, mas dois grupos não conseguiram reconhecer sem a intervenção do professor a relação entre os parâmetros angulares. Mas nenhum dos grupos conseguiu justificar através de argumentos que o ângulo entre as duas retas é reto.

Nas construções da atividade 3 como prevíamos, todos os grupos conseguiram realizar a construção da primeira figura, constatamos aqui que três grupos apresentaram dificuldades na realização deste item. As demais construções foram realizadas por apenas dois grupos.

> o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (ONUCHIC, 1999, p.215).

Em conversas com os grupos separadamente constatamos que os alunos sabem o que deveriam fazer, só não estavam conseguindo realizar corretamente as construções. Percebemos uma dificuldade dos discentes na conversão de registros utilizada no desenvolvimento das atividades, neste momento a aula foi composta por momentos de intensa conversa, pois todos estavam querendo participar e expor seus pensamentos.

Como esperado na atividade, os alunos apresentaram facilidades nos itens 1 e 2 e uma dificuldade por parte de alguns grupos nas construções dos subitens b e c, da atividade 3. Contudo, acreditamos que esta etapa foi válida, pois os discentes puderam explorar alguns conhecimentos de uma forma diferente e, além disso, conseguimos que os alunos reconhecessem através da sua representação algébrica, a posição relativa entre duas retas no plano cartesiano e percebemos uma considerável evolução nos discentes.

4.5 VALIDAÇÃO DA PESQUISA

No mapeamento da última fase da engenharia didática, analisamos o que deu certo e o que pode ser aperfeiçoado na proposta de ensino criada para contribuir com a aprendizagem de geometria analítica em ambientes informatizados. A "validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*" (ARTIGUE, 1996, p.197). Caracterizando-se pelos registros dos estudos sobre o caso em questão a etapa de validação da engenharia didática apóia-se sobre os dados coletados durante a fase de experimentação, para investigar se nossas escolhas na implementação da proposta de ensino contribuíram de alguma maneira para consolidar o aprendizado e autonomia intelectual dos discentes.

O uso do computador como ferramenta de ensino deve privilegiar as experimentações e o pensar do discente. Ao optarmos por realizar nossas atividades da sequência de ensino em ambientes informatizados, procurou-se ter cuidado, pois de acordo com (GRAVINA: SANTAROSA, 2008) as atividades realizadas nestes ambientes podem enganar pelo visual atrativo, reforçando as mesmas características e priorizando a transmissão do conhecimento.

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. (GRAVINA, BASSO, 2010, p. 13)

Inserimos o computador em uma prática diferente do ensino tradicional (que também é uma ferramenta importante para a aprendizagem do aluno) para contribuir com a mobilização do aluno na busca pela compreensão dos conceitos matemáticos.

No que tange à escolha do GrafEq obtivemos êxito, já os grupos não apresentaram muitas dificuldades, pois o software apresenta uma interface muito simples, permitindo que o aluno explore simultaneamente a representação algébrica e a representação geométrica de um mesmo objeto matemático de forma rápida e interativa.

Acreditamos que o ambiente informatizado agiu para promover o engajamento dos alunos, pois proporcionou em sala de aula muitos debates para a realização das atividades e após a realização da etapa 1, os grupos de trabalho na sua maioria enviaram os arquivos construídos com o GrafEq em casa, via e-mail.

Outra de nossas escolhas que foi benéfica para a realização das atividades, foi a realização dos trabalhos em duplas ou trios, na etapa 1 e grupos de quatro ou cinco integrantes nas etapas 2 e 3. Este método de trabalho traz consigo nas atividades, o saber se expressar do aluno, igualmente o fato de consultar, questionar, tomar decisões, fazer planos, estabelecer compromissos, partilhar tarefas e privilegiar a troca de informações. Estas ações envolvem aspectos práticos, éticos e estéticos formadores de hábitos de estudo e atitudes sociais, potencializando a cognição dos alunos.

Através dos debates realizados pelos grupos e com o pesquisador, que organizou as discussões e contribuiu nas negociações em sala de aula, o trabalho em grupo foi um instrumento que atuou favoravelmente na troca de informações para os alunos traçarem estratégias de como resolver os problemas e articular corretamente os registros algébricos e geométricos propostos nas atividades. Este engajamento é fundamental nos processos de uma aprendizagem ativa.

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas. (BRASIL, 2000, p.52)

Nossas escolhas referentes à fundamentação teórica utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica buscaram propiciar aos alunos a compreensão de objetos matemáticos em diferentes registros e também a coordenação entre estes registros, para que o aluno possa assimilar os objetos matemáticos na tua totalidade. Obtivemos dos grupos de trabalho um excelente retorno durante a realização das atividades propostas na sequência de ensino, principalmente na conversão de registros geométricos e algébricos em ambientes informatizados.

> Os programas que fazem “traduções” entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente às diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos à transição de um sistema a outro, atividade que geralmente demanda tempo. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998).

Contudo, nem todos os resultados e situações que pretendíamos provocar deram certo. A maior parte dos grupos não realizou os tratamentos adequados dentro de cada registro semiótico, ou seja, na representação algébrica, também não efetuaram cálculos e na representação geométrica foram utilizados métodos de tentativa e erro para realizar as construções.

Iniciamos a atividade 1 com exercícios que utilizavam as representações algébricas de algumas regiões no plano cartesiano (intervalos no eixo das abscissas e ordenadas), para que os alunos reconhecessem e articulassem estas regiões retangulares no plano cartesiano através de inequações de 1° grau de uma variável e com a utilização do GrafEq.

A próxima atividade tinha como objetivo que os grupos realizassem, através da representação geométrica a representação algébrica de um quadrado no plano cartesiano. E nas últimas atividades, através do conhecimento obtido no 1° ano do ensino médio e do empirismo, identificassem a influência dos parâmetros angular e linear na equação reduzida da reta.

Na realização da atividade 1, observamos que muitos grupos estavam explorando o software *Geogebra* (mudança na atividade 1 em decorrência no problema do laboratório de informática) e algumas possibilidade de intervalo, ou seja, neste momento os alunos estavam experimentando suas "teorias" já no exercício 1 e observando sua representação geométrica no plano cartesiano. Na maioria dos grupos todas as construções foram realizadas corretamente.

Após a realização das análises das respostas dadas pelos alunos, identificamos na atividade 1, uma dificuldade em expressarem os resultados obtidos na representação algébrica por meio da língua escrita e principalmente descrever o raciocínio utilizado para a construção de algumas formas geométricas.

Na maioria dos casos as construções, como dito anteriormente, foram realizadas corretamente. Ou seja, os alunos conseguiram realizar as conversões de registros algébricos e geométricos, mas na hora da escrita para responder ao questionário constatamos certa "pobreza" no vocabulário sobre elementos matemáticos, seja por não lembrarem ou a pouca ênfase dada pelos docentes durante a sua formação. Fica como sugestão para o professor, no momento que identificar essa dificuldade dos alunos, o mesmo deve resgatar esse vocabulário com os discentes, pois a matemática é uma língua universal.

Nosso objetivo na atividade 1 foi parcialmente atingido, pois nem todos os grupos de trabalho realizaram as atividades corretamente, ou não souberam se expressar da maneira adequada. Vamos sugerir algumas reformulações na atividade 1. Antes da realização das atividades o professor deve "resgatar" alguns conceitos prévios necessários para a realização das atividades.

Diante do exposto podemos separar a atividade 1 em outras duas atividades. Uma das atividades, privilegiando exclusivamente as construções de regiões retangulares no plano cartesiano e as inequações de 1° grau com uma variável, em ambos os registros (algébricos e geométricos) explorando todos os quadrantes do plano. Na segunda atividade podemos explorar a influência dos coeficientes angular e linear, bem como a conversão de registros para que os mesmos realizem tratamentos adequados, dentro de cada registro semiótico. Acreditamos que esta mudança pode ser benéfica para a aprendizagem do aluno, pois o professor poderá explorar mais atividades em sala de aula.

Na atividade 2, propomos aos alunos que resgatassem alguns conceitos explorados na atividade 1 através da construção de algumas regiões retangulares. Tinha-se como objetivo principal nessa atividade que os alunos reconhecem as representações geométricas no plano cartesiano de inequações de 1° grau com duas variáveis e de um sistema de inequações, assim como articular as representações algébricas e geométricas. Novamente, nesta atividade observamos alguns grupos de trabalho estavam construindo suas "teorias" e explorando o software GrafEq em sala de aula.

A maioria dos grupos de trabalho reconheceu com facilidade as regiões obtidas através das inequações, mas novamente observamos uma dificuldade acerca da escrita por parte dos grupos. Os grupos de trabalho realizaram as conversões corretamente nas atividades 2 e 3. Apresentaram algumas dificuldades sobre a composição de triângulos na figura 4. Na atividade 5 poucos grupos enviaram a construção da obra de arte. Já na atividade 6, poucos grupos escolheram a bandeira mais difícil de construir.

Nossos objetivos na etapa 2 foram plenamente atingidos. Constatamos que os grupos conseguiram realizar as conversões de registros, alguns com dificuldade, porém sabiam reconhecer a região no plano na forma algébrica e na geométrica. Deixamos aqui como sugestão, antes da realização da etapa 2 uma revisão sobre inequações (operações) resgatando alguns conceitos prévios desse conhecimento esquecido por parte dos discentes.

Na atividade 3 e última atividade explorando retas e inequações de 1° grau no plano cartesiano, os discentes deveriam reconhecer as posições relativas entre as retas, sendo capaz de estabelecer relações entre os seus parâmetros angulares. Ao final da atividade os alunos deveriam realizar algumas construções geométricas, e conversões de registros geométricos em algébricos.

O objetivo proposto na atividade 3 foi parcialmente atingido, pois metade dos grupos não conseguiram realizar as construções propostas no item 3. Analisando as respostas dos alunos poucos conhecem a definição de retas paralelas no plano cartesiano e quando questionados sobre retas perpendiculares dizem apenas “90° graus”. Um pouco de preciosismo do pesquisador, mas esperávamos obter como resposta que “retas perpendiculares, são retas que possuem um ângulo reto entre si”. Embora os alunos reconheçam o seu significado, novamente percebemos uma dificuldade na escrita. Dois grupos apenas conseguiram estabelecer as relações entre os parâmetros angulares de retas perpendiculares.

Neste momento fomos para o quadro e realizamos uma demonstração sobre a relação entre os coeficientes angulares, tanto para paralelas como para perpendiculares. Acreditamos que poderíamos ter explorado alguns tratamentos sobre retas concorrentes e seu ponto de intersecção. Recomendamos para outros professores que realizem aulas prévias sobre os conhecimentos necessários para a realização desta atividade, igualmente acrescentarem algumas atividades para que os alunos possam conjecturar acerca dos coeficientes angulares e realizarem mais perguntas sobre cada atividade.

Acreditamos que a prática realizada e a sequência de ensino atingiu os seus objetivos quase que na totalidade, isto deve-se creditar ao interesse dos alunos que estavam participando das atividades e o seu interesse na resolução. De uma maneira geral, outro fator nos leva a acreditar que nossa pesquisa foi bem sucedida, são os diálogos observados entre os integrantes dos grupos. Outro fator que proporcionou este engajamento da turma foi realizar a aprendizagem em ambientes informatizados do conteúdo de Geometria Analítica para que os alunos realizassem de forma direta as conversões de registros algébricos em geométricos.

Acreditamos que durante a realização da nossa sequência de ensino, conseguimos promover algumas transformações na formação dos estudantes, qualitativas e quantitativas. Os discentes vivenciaram situações no campo da matemática e no campo da educação de uma forma mais geral. As explorações realizadas no GrafEq permitiu aos alunos fazerem conclusões empiricamente, servindo a tecnologia como ferramenta motivadora de novas descobertas.

Organizamos um quadro com algumas contribuições da sequência de ensino em relação à aprendizagem dos discentes. Organizamos os tópicos em: (1) Conteúdo, (2) Educação e Ensino e (3) Informática na educação – retratando algumas situações de aprendizagens ocorridas durante a sequência de ensino.

Quadro – Contribuições da Proposta

Conteúdo	▪ Articular as representações algébricas e geométricas de um mesmo objeto matemático; ▪ Aquisição e utilização da linguagem algébrica no plano cartesiano; ▪ Coeficientes angular e linear; ▪ Inequações e regiões no plano cartesiano; ▪ Posições relativas entre duas retas no plano cartesiano; ▪ Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações e representações geométricas.
Educação e Ensino	▪ Experimentação na Matemática; ▪ Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas; ▪ Trabalhos em grupos onde cada aluno expõe suas ideias e seus esforços são direcionados para um objetivo em comum; ▪ Autonomia; ▪ Ampliação da criatividade; ▪ Compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras.
Informática na Educação	▪ Disseminação da cultura do trabalho em ambientes informatizados; ▪ Utilização da tecnologia para aprender Matemática; ▪ Ambientes informatizados como fomentador de pesquisas; ▪ Facilitador no processo de aprendizagem

Fonte: o Autor

Afirmamos ser válida nossa proposta de ensino do conteúdo de Geometria Analítica em ambientes informatizados, embora nossa sequência didática apresentasse algumas limitações, contribuiu para uma melhora qualitativa na aprendizagem dos alunos.

Os professores devem constantemente encontrar novos métodos e recursos para o ensino de matemática.Destacamos ainda, a compreensão dos alunos quanto à álgebra que constrói regiões no plano cartesiano confirmando a apreensão do objeto matemático,e trouxemos para a aula uma articulação de registros semióticos que possibilitou a evolução dos discentes, nas estratégias de resolução das atividades.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer dessa pesquisa procurou-se desenvolver uma sequência de ensino para a aprendizagem de Geometria Analítica em ambientes informatizados, priorizando a construção do conhecimento através de atividades que permitissem aos discentes investigar, produzir e discutir significados matemáticos desenvolvendo a capacidade de raciocínio e estabelecendo conceitos comuns ao grupo de alunos. Como "[...] os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção intuitiva imediata, […] É preciso, portanto, dar representantes" (DUVAL, 2012, p. 268), organizou-se um conjunto de atividades para auxiliar os discentes na articulação de registros algébricos e geométricos de objetos matemáticos para que, por meio de um entendimento de natureza empírica, deduzissem e explicassem a relação entre retas, circunferências e regiões no plano cartesiano, através de suas representações algébricas (equações e inequações) e geométricas.

> "... é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente." (PCN-EM, p.251).

Para a realização dessa ação investigativa e com a preocupação da aquisição do conhecimento por parte do aluno, escolheu-se como referencial teórico da pesquisa a teoria dos registros de representação semiótica do filósofo e psicólogo francês, Raymond Duval. Ele afirma que a aprendizagem de matemática possibilita ao discente desenvolver suas capacidades de visualização, raciocínio e análise, por isso "[...] entender que o objeto estudado não é o mesmo que a sua representação, criamos um paradoxo, pois o entendimento de objetos matemáticos é um entendimento conceitual e só por meio de representações é que conseguimos acessá-los" (NETO, 2016. p.18).

Como inspiração na construção da sequência de ensino, utilizou-se a metodologia de pesquisa engenharia didática, com destaque para a pesquisadora francesa Michèle Artigue. Essa metodologia permitiu-nos uma reflexão acerca da organização do conteúdo de geometria analítica e sugeriu algumas propostas para complementar o ensino tradicional, objetivando uma melhora qualitativa na aprendizagem dos discentes. Para tanto, implementou-se algumas mudanças que buscassem diminuir as dificuldades de aprendizagem nesse conteúdo.

Nossa proposta didática desenvolveu-se em um processo gradativo de exploração empírica com a utilização do software GrafEq com o propósito de apresentar resultados que indicassem uma melhora qualitativa na aprendizagem do aluno. Os dados para fazer essa verificação são provenientes do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, fundamentada em nossa metodologia de pesquisa.

Em suma, ao longo desta sequência de atividades, constatamos que a aplicação da proposta de ensino tornou-se válida e percebemos uma melhora significativa dos discentes em relação à compreensão do conteúdo de geometria analítica, constatada no estabelecimento de relações entre a forma algébrica e geométrica dos objetos matemáticos. As atividades realizadas no GrafEq puderam contribuir na aprendizagem, possibilitando aos discentes realizarem experimentações, e articularem com êxito as conversões entre os registros algébricos e geométricos.

> [...] o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão. (DUVAL, 2012, p.284).

Durante os encontros realizados ficava visível a melhora gradativa dos alunos. Nossa proposta apresentou algumas limitações durante a sua execução. Uma delas diz respeito ao laboratório de informática da escola que não pôde ser utilizado. Na sequência de ensino destacamos a pouca ênfase dada à realização de tratamentos internos (resolução de problemas dentro de um mesmo registro) e as conversões de registros no sentido geométrico-algébrico. Poderíamos ainda separar a atividade 1 em outras duas atividades para explorar mais atividades com os discentes em sala de aula.

Temos o conhecimento que as dificuldades de alguns alunos persistiram até o final de cada etapa, ou seja, nem todos atingiram os objetivos esperados, mas a maioria dos alunos conseguiu compreender alguns conceitos básicos e importantes em geometria analítica, como a influência dos coeficientes angular e linear na equação reduzida da reta, bem como realizar as conversões de registros como constatamos na etapa 1. Outras habilidades importantes foram desenvolvidas pelos discentes, como resolver problemas, propor soluções, investigações, trocar informações através do diálogo, habilidades que serão importantes para a formação acadêmica e profissional dos alunos.

Em nossas reflexões sobre a da sequência de ensino realizada, constatamos que o uso da tecnologia em sala de aula auxiliou na conversão de registros e facilitou a aprendizagem dos alunos. A escolha do software GrafEq foi essencial para o êxito da proposta, ampliando a capacidade de exploração e a percepção dos discentes sobre os objetos algébricos e geométricos, tal como a equivalência entre eles. Quanto à questão norteadora, ratifica-se que o software GrafEq pode auxiliar os alunos na conversão de registros e na aprendizagem de geometria analítica. Além disso, o software permite ao aluno, pesquisar, comparar, conceituar e reformular as propriedades matemáticas, auxiliando os alunos na representação de registros geométricos e na articulação entre os registros semióticos.

Ao término dessa pesquisa, verificou-se a importância de realizar novas atividades que complementem as aulas expositivas[7], pois durante a realização da sequência de ensino,percebemos o engajamento dos alunos na realização das atividades. Ressalta-se ainda, a importância de os docentes buscarem métodos alternativos e tecnologias para melhorar a qualidade de ensino, possibilitando ao professor pesquisador refletir sobre as práticas pedagógicas, já que a reflexão permite aos educadores

> problematizarem, analisarem, criticarem e compreenderem suas práticas, produzindo significado e conhecimento que direcionam para o processo de transformação das práticas escolares. Todavia, reflexão não é sinônimo de pesquisa e o professor que reflete sobre a sua prática pode produzir conhecimento sem, necessariamente, ser um pesquisador. Quando ele avança, indo ainda além da reflexão, do ato de debruçar-se outra vez para entender o fenômeno, encurta a distância que o separa do trabalho de pesquisar, que apresenta, entretanto, outras exigências, entre as quais a análise à luz da teoria. (LÜDKE, 2005, p. 8)

Com a perspectiva de que a presente proposta realizada nesta dissertação contribua para uma reflexão sobre parte do ensino de geometria analítica e motive outros docentes a planejarem suas aulas, de modo a torná-las mais atrativa aos olhos dos discentes. É fundamental ressaltar que os espaços escolares sejam realmente um laboratório de aprendizagem e que os professores o utilizem como um lugar para criar e inovar novas abordagens sobre a matemática com a preocupação de colocar os discentes em novos patamares na construção do conhecimento.Não podemos esquecer que todo mundo pode criar, e essa é uma atividade constante; e, convenhamos o domínio da matemática, acima de tudo, exige muita criatividade. Deixamos como sugestão outras atividades nos apêndices F e G sobre o estudo da circunferência em ambientes informatizados.

[7]Aulas utilizando como ferramentas o quadro branco e caneta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes pedagógicos, 1996, p. 193-217.

BALEJO, Clarissa Coragem. **Uso de software no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2009, 60 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.126p

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio, 2000.

BRASIL. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144 p.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares de Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB). **Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 – Matemática.** Brasília, 2015. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015>Acesso em: 01 maio. 2017.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**.** Zetetike, Campinas-UNICAMP, v.13, n.23, 2005, p.85-118.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Contribuições para a Formação do professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema**, Rio Claro – SP, Ano 21, nº 29, 2008, p. 199 a 222.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica:** uma experiência com o ambiente virtual SIENA. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010

DALLEMOLE, Joseide Justin; GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira; RUIZ, Lorenzo Moreno.**Os Registros de Representação Semiótica no Estudo da Reta com Enfoque na Geometria Analítica.** ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.4, n.2, p.149-178, novembro 2011.

DAMM, R. F. **Registros de Representação**. IN: MACHADO, S. D. A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, p.135-153, 1999.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: Machado, S.D.A. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008, p.167-188

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações**.** Volume 3.2ª ed. São Paulo: Ática, 2014.

DOUADY, R. **DidactiquedesMathématiques.** EncyclopediaUniversalis, 1985, p.885-889.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-34.

_________. Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** In: MORETTI, MériclesThadeu (Trad.) Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIOREZE, L. **Atividades Digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** Uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais. 2010. 244f. Tese (Doutorado) - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2010.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas:** A história da Álgebra. São Paulo: Makron Books, 1997.

GAUTO, NatássiaKnecht. **GRAFEQ no processo de Ensino Aprendizagem de Funções Afins**. Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2012, 81p.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, IV, 1998, Brasília. **Anais. Brasília**: Editora da UFRGS, 2008, p.7. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275 > Acesso em 01 maio. 2015.

GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. de A. **Mídias digitais na Educação Matemática**. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática**. Porto Alegre: UFRGS, [200.]. p.13. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro_matematica_midias_didatica_completo.pdf>.

HALBERSTADT, Fabrício Fernando; FIOREZE, Leandra Anversa. **O ensino e aprendizagem dos objetos reta e desigualdades com o GrafEq: uma abordagem com vistas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** CINTED – UFRGS. Novas Tecnologias na Educação. V.13 N°1, Julho, 2015.

KLÜSENER, Renita (orgs.). Ler **e Escrever: compromisso de todas as áreas.** 2ª ed. Porto Alegre: Editora da Universidade/ UFGRS, 1999

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática.** Volume 3. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Joelene de Oliveira de. **Diretrizes para a construção de softwares educacionais de apoio ao ensino de Matemática.** Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação e Ciências e Matemática) – PUCRS. 2006

LÜDKE, Menga. **O professor, seu saber e sua pesquisa**. In. Educação & Sociedade. Campinas: Unicamp. vol.22, nº 74, Abril/2001- p 77 – 96.

LUTZ, M. R. Uma Sequência Didática para o Ensino de Estatística a Alunos do EnsinoMédio na Modalidade PROEJA. Porto Alegre: UFRGS, 2012. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Engenharia Didática**. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Educação Matemática: Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MARTINELLI, Diego da Silva Pinto. Geometria Analítica com o software winplot: Articulando as Representações Algébricas e Geométricas. Trabalho de Conclusão de Curso– UFRGS. 2013.

MORETTI, MériclesThadeu. **O Papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática.** Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002

MORETTI, MériclesThadeu. **Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117, 2012.

NERY, Chico. A Geometria Analítica no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática**. n° 67, p.19-24, 2008.

NETO, J. A. de M. **Tecnologia educacional: formação de professores no labirinto de ciberespaço.** Rio de Janeiro: MEMVAVMEM, 2007.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-Aprendizagem Através da Resolução de Problemas**. . In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199- 218.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva 3**. Volume 3. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lenda**.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Ricardo de Souza. **Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de geometria analítica: manipulações no software grafeq** Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação e Ciências e Matemática) – UFRGS. 2008

TERRA NETO, Platão Gonçalves. **Possibilidades na Conversão entre Registros de Geometria Plana.** Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação e Ciências e Matemática) – UFRGS. 2016

VALENTE, J. A. (Org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: UNICAMP / NIED, p. 89-99, 1999

VEIGA, Ilma P. A. **O seminário como técnica de ensino socializado**. In: Veiga, I.P. A. (org). Técnicas de ensino: Por que não? Campinas: Papirus. 2000

APÊNDICE A – ATIVIDADE PRÉVIA

Nome:____

Nome:____

Data:____/_____/2017 Turma:__________

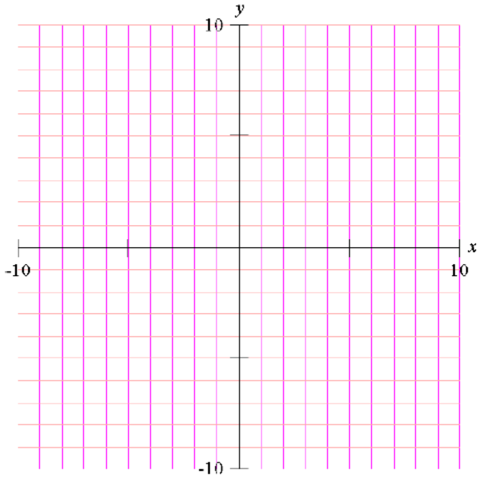
1. Construa o plano cartesiano e marque os pontos $A(-5,0)$**,** $B(5,0)$ **e** $C(0,5)$**.**

a) Determine a equação da reta que passa pelos pontos A e C.

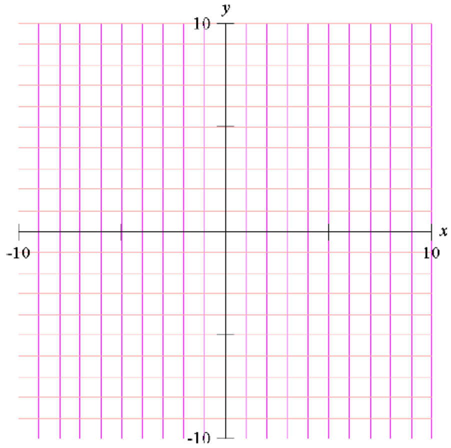
b) Construa a reta bissetriz dos quadrantes pares e marque o ponto de intersecção com a reta encontrada no item a.

c) Determine as coordenadas do ponto do ponto de intersecção.

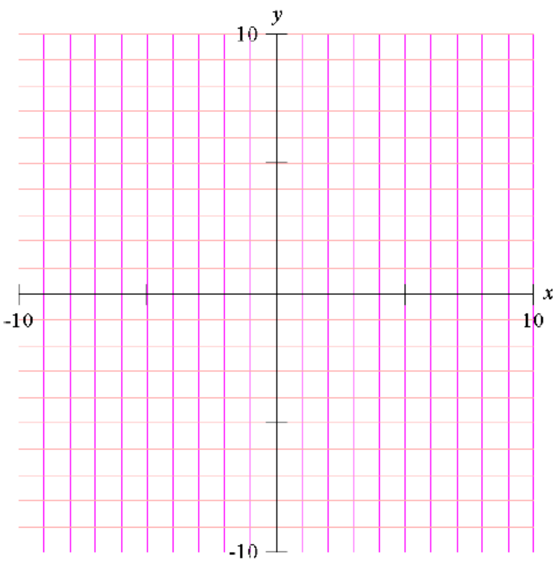
2. Hachure a região compreendida pelas inequações $\begin{cases} y < x + 5 \\ y < -x + 5 \\ y > 0 \end{cases}$.



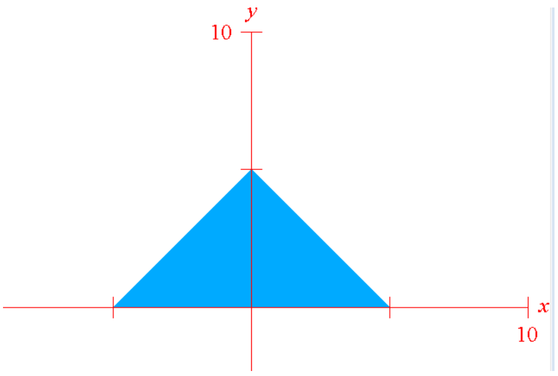
3. Represente geometricamente no plano cartesiano os pontos P(*x*, *y*) cujas coordenadas satisfazem as seguintes equações: $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$.



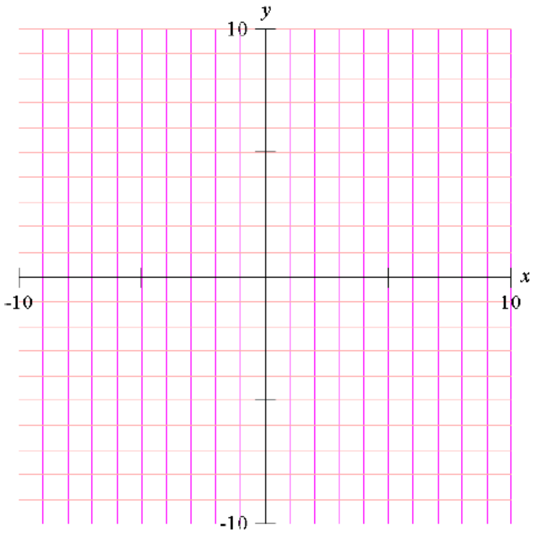
4. Represente geometricamente no plano cartesiano os pontos P(*x*, *y*) cujas coordenadas satisfazem as seguintes equações: $y = x$, $y = 2x$, $y = 4x$.



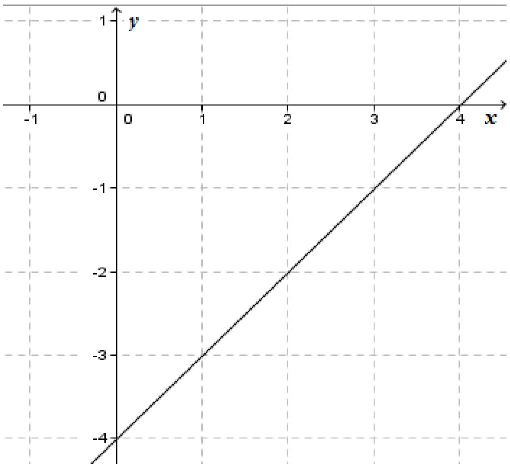
5. Utilizando inequações represente a região hachurada no plano cartesiano abaixo.



6. Pinte a região no plano cartesiano $xy > 0$.



7. Determine a equação da reta representada no plano cartesiano abaixo.

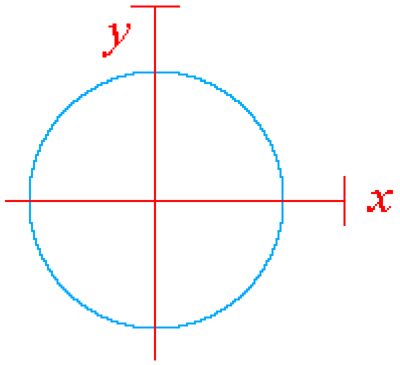


8. Relacione as equações com as suas respectivas representações geométricas.

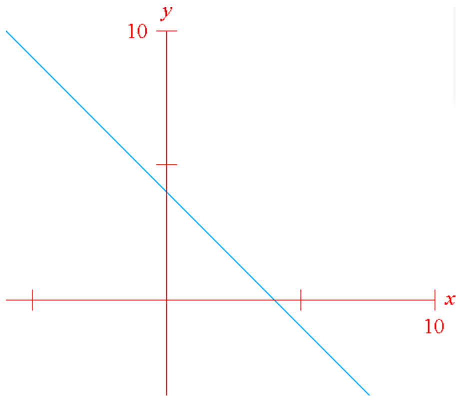
a) $x + y = 1$ b) $y = x^2 + 1$ c) $x^2 + y^2 = 4$

d) $xy = 1$ e) $x = y^2$ f) $x + y = 4$

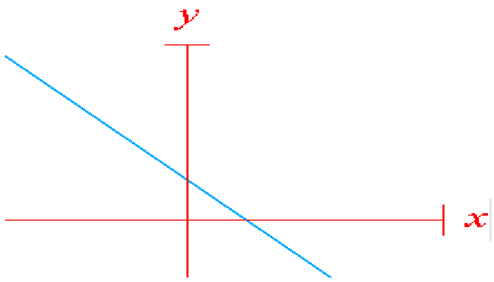
(   )



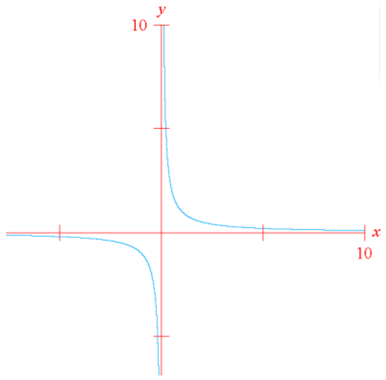
(   )



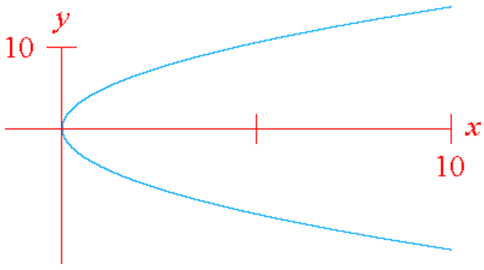
(   )



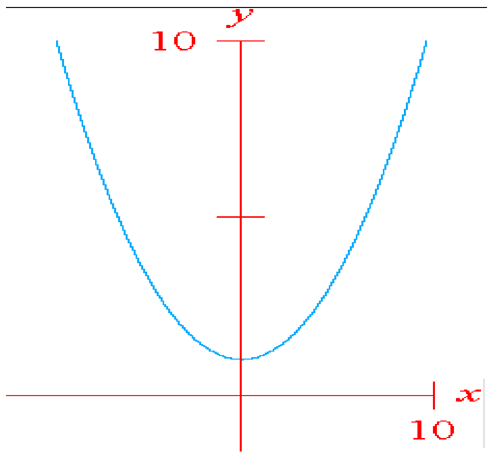
(   )



(   )



(   )

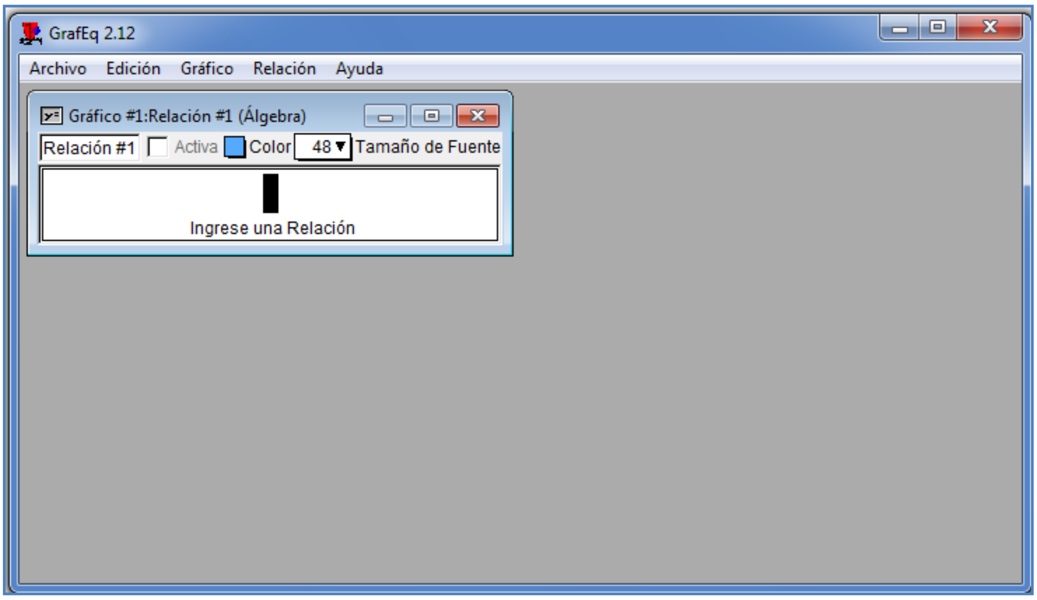


APÊNDICE B – TUTORIAL DO GRAFEQ

O Grafeq[8], criado pela empresa canadense Pedagoguery Software Inc., é um sofisticado software utilizado para plotar gráficos de funções e inequações em coordenadas cartesianas ou polares. A utilização do programa não exige nenhum conhecimento de aritmética intervalar, sendo fonte de estudos e ideias para abordagem da geometria em diversos níveis promovendo uma compreensão visual possibilitando a exploração matemática. Possui uma interface intuitiva e de fácil manuseio.

Outra de suas vantagens é ser um programa "leve", ou seja, funciona em diversos computadores sem perder sua eficiência e velocidade. Outra vantagem é ser um software livre, o que significa que é gratuito. A seguir iremos descrever os passos, bem como explicar os comandos necessários para a realização da prática (círculo e retas) que envolve os conteúdos de geometria analítica.

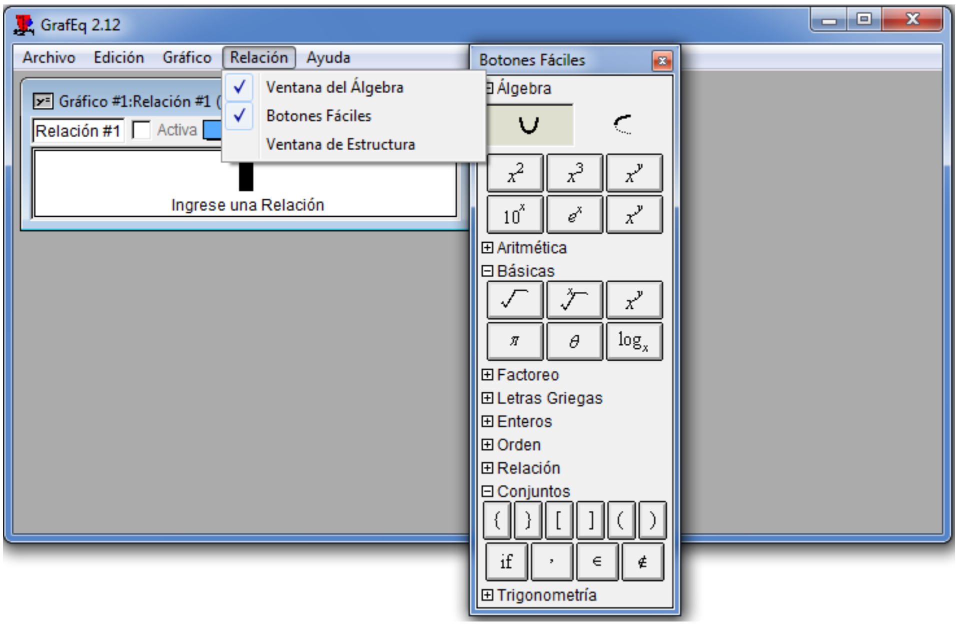
Quando abrirmos o programa irá aparecer sua interface e uma das janelas principais: *Relación* na qual será inserida uma relação entre as variáveis *x* e *y*. Para a construção de outro gráfico utilizando a mesma janela basta seguir o caminho: **Gráfico** – **Nueva Relación**.



Note que na janela superior da interface do programa temos cinco menus, um deles é *Relación*. Iniciaremos o nosso trabalho com um clique sobre o menu *Relación*.

[8]O download do Grafeq pode ser feito partir do site http://www.peda.com/grafeq/.

Neste menu temos três opções.

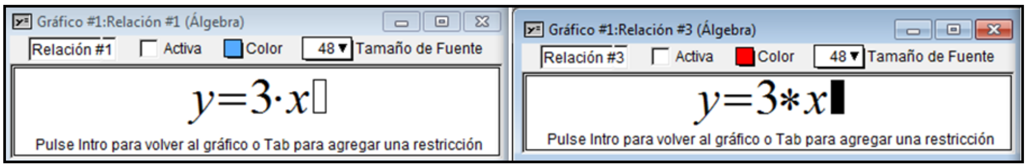


Como nosso objetivo é trabalhar com elementos geométricos e suas equações no plano, iremos optar pela janela *BotonesFáciles*(é um conjunto de operadores e de outros recursos já identificados do programa. São botões que simplificam e facilitam o uso das relações.).

Trataremos aqui de como escrever as principais operações matemáticas no Grafeq.

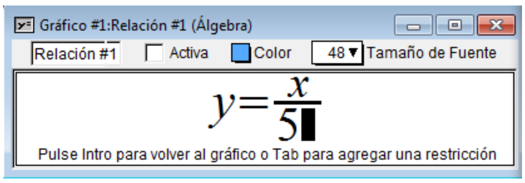
- **Multiplicação**

É representada pelo símbolo *. Contudo a mesma operação é executada quando escrevemos $y = 3 * x$ ou $y = 3x$.



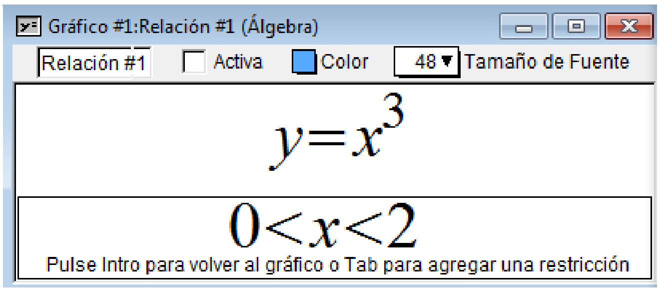
- **Divisão**

A divisão é representada pela "/".



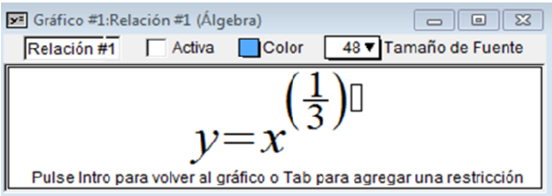
- **Potenciação**

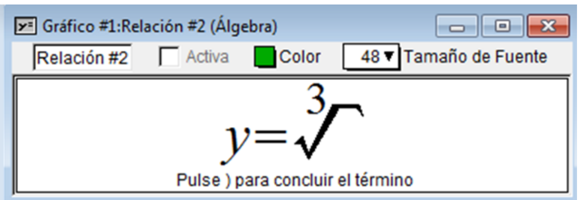
  É representada por "^".



- **Radiciação**

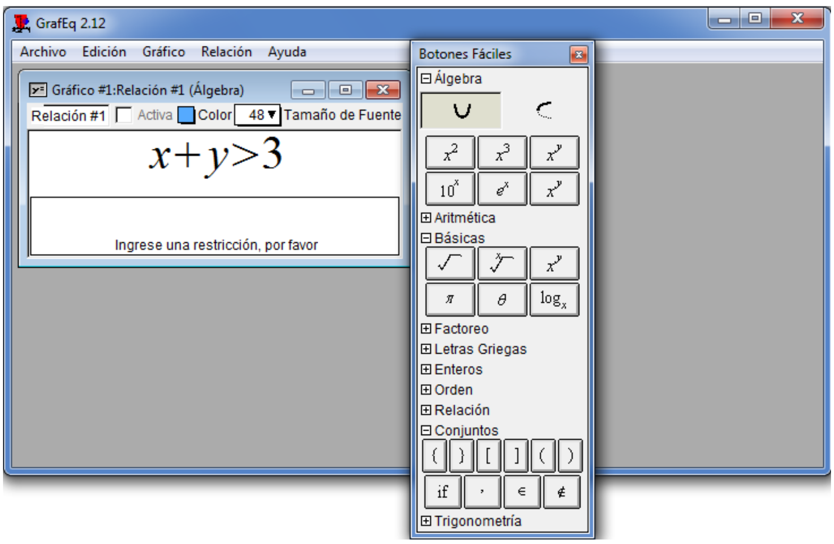
  Pode ser expressa como uma **potência fracionária**, utilizando o operador "^" ou com auxilio dos "Botones Fáciles".



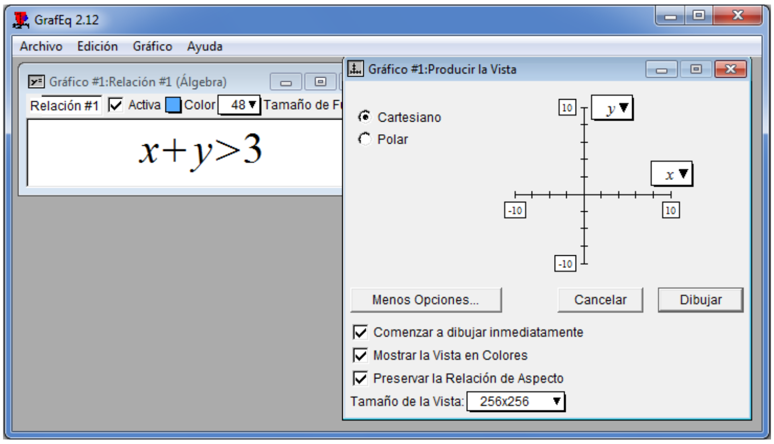


No Grafeq algumas teclas de atalho que são utilizadas na hora de escrevermos as relações:

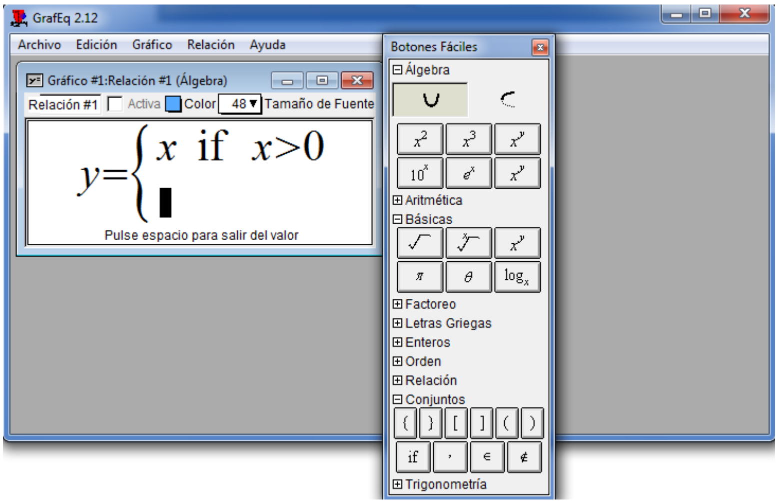
- A tecla <u>**TAB**</u> é utilizada quando terminamos de digitar uma relação e desejamos adicionar restrições;



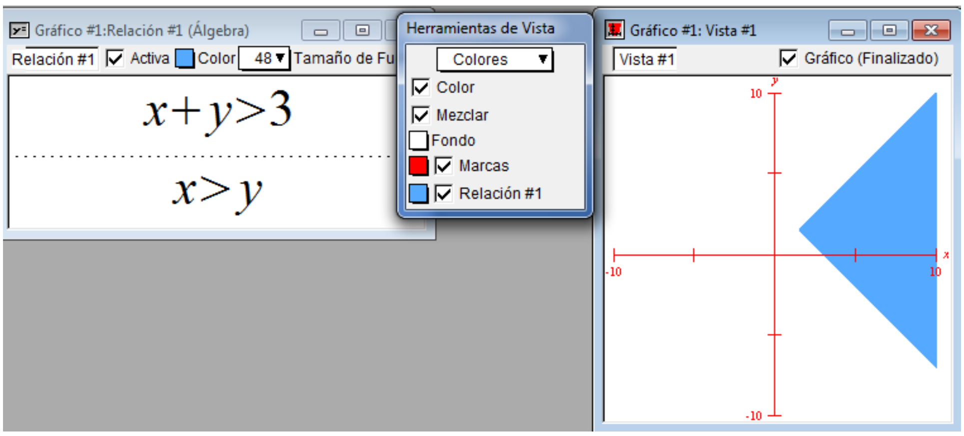
- A tecla **Enter** é usada ao final da digitação de cada relação para abrir a tela "Producir la vista";



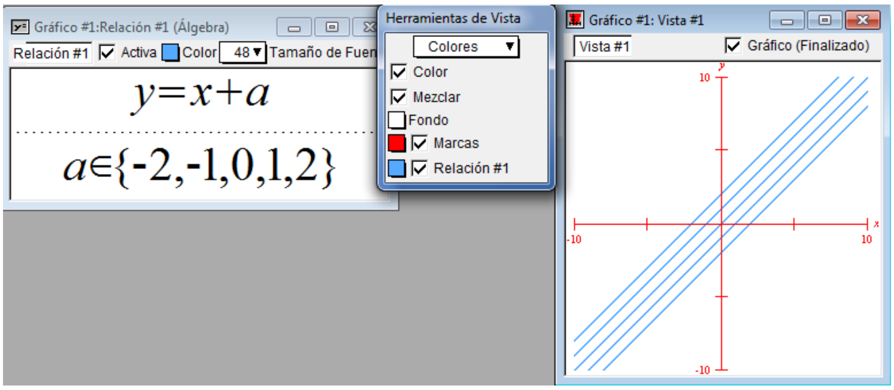
- A tecla da vírgula é usada para finalizar uma linha de um condicional e iniciar a seguinte.



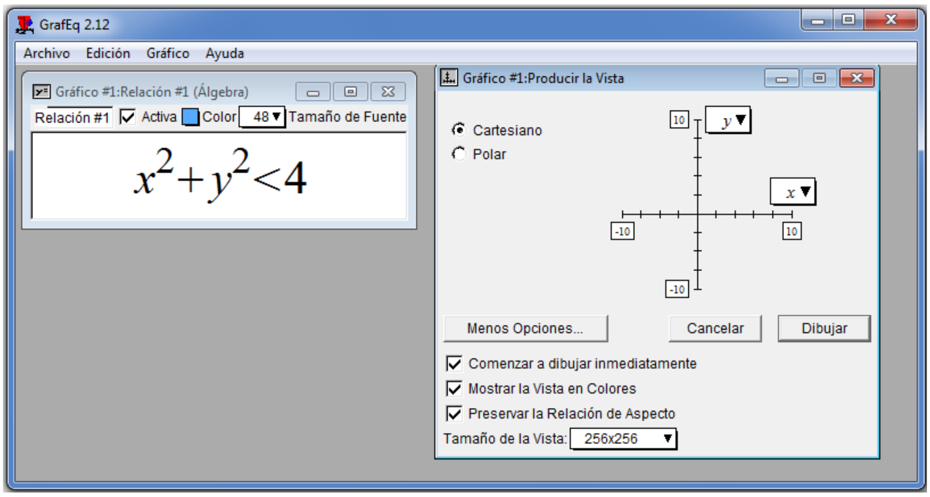
Podemos determinar a interseção de relações através do uso de operadores como < e >.



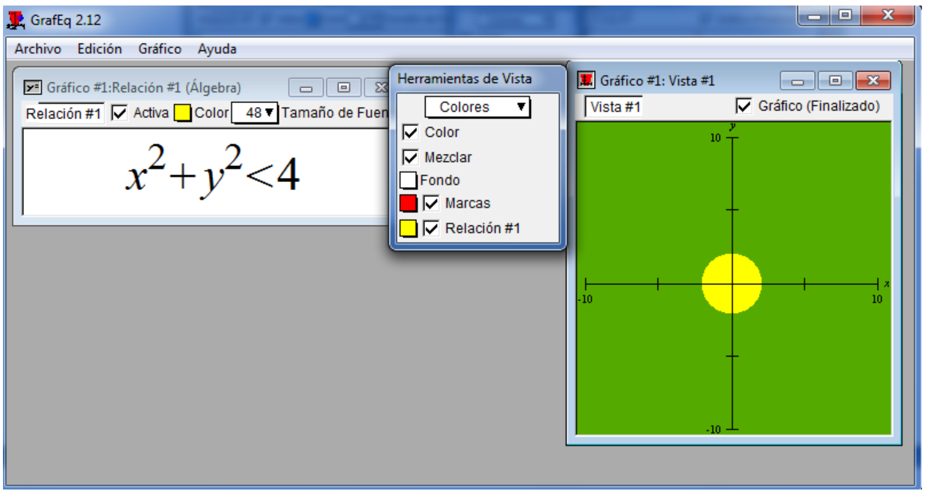
Usamos parâmetros para representar mais de uma possibilidade de coeficiente na relação.



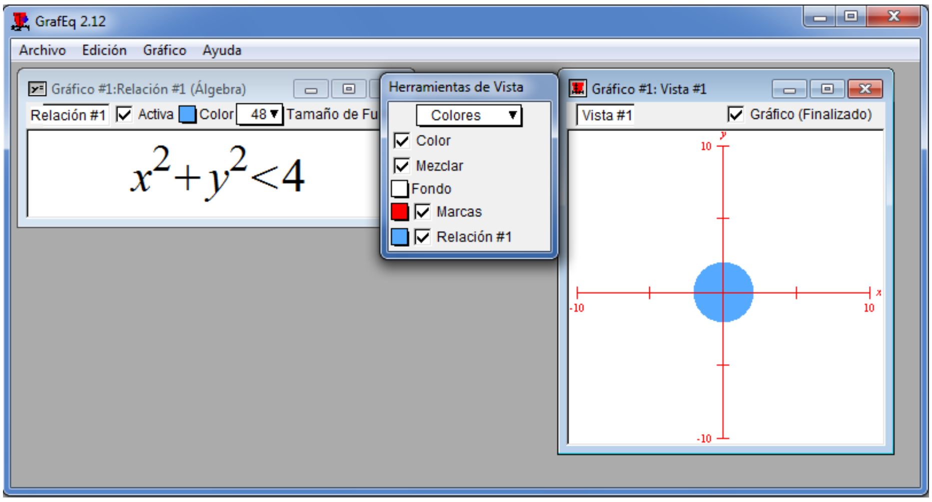
Como foi comentado no início do tutorial, será descrito como exemplo os passos para a construção de um círculo e uma reta no mesmo plano cartesiano. Inserir na Janela *Relación* a inequação para construir um círculo de raio 2.



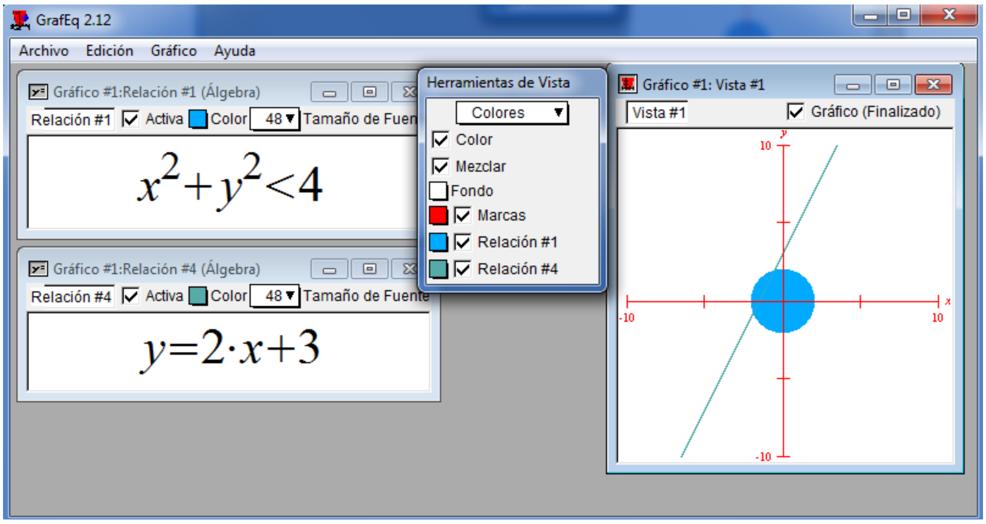
Clicar em *Dibujar* para visualizar a plotagem.



Podemos agora entre as opções disponíveis mudar as cores do fundo (*Fondo*), dos eixos (*Marcas*) e ainda do gráfico (*Relación #1*) como podemos observar na imagem acima.



Agora vamos seguir o caminho **Gráfico** – **Nueva Relación**, para a construção da reta. Realizada a inserção dos dados necessários para a construção da reta clicar em enter.



APÊNDICE C – ETAPA 1 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nome:____Data:____/____/17
Nome:____Turma:__________

Etapa 1: 2 períodos

Atividade 1

- Análise dos coeficientes e domínios nas retas utilizando o Grafeq.

01. Construa no grafeq as seguintes relações:

- $-2 \leq x \leq 2$

a) Qual foi a representação geométrica que apareceu quando digitamos este intervalo?

____

____

____

- $x = 3, x > 3$ e $x < 3$

b) Construir cada uma das relações em sistemas de eixos distintos e descrever a diferença entre as representações gráficas que apareceram no Grafeq.

____

____

____

- $y = 2$ e $y > 2$

c) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

____

____

____

02. Utilizando os itens a, b e c da questão 1 para construir um quadrado de lado 5 e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.

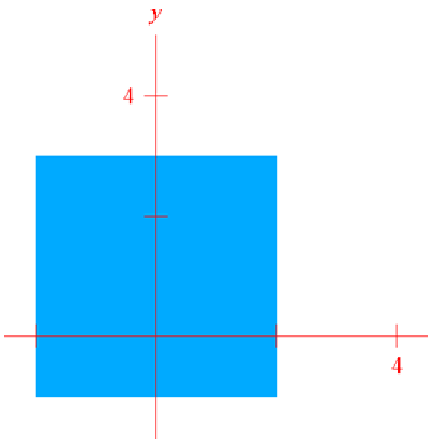
____

____

____

____

03. Construa com o grafeq descrevendo as etapas de construção do retângulo abaixo.



04. Construa no Grafeq as seguintes retas observando seus domínios.

- $y = x + 1, -2 \leq x \leq 2$

a) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

- $y = x + 1, 0 < x < 5$

b) O que aconteceu com a reta quando restringimos o seu domínio?

05. Construa no Grafeq as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos.

- $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$.

a) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (aumentarmos) o parâmetro *a*.

- $y=x+1$, $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=\frac{1}{4}x+1$ e $y=\frac{1}{8}x+1$

b) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (diminuirmos) o parâmetro *a*.

- $y=-x+1$, $y=-2x+1$, $y=-3x+1$.

c) O que aconteceu com a reta ao modificarmos (trocarmos de sinal) o parâmetro *a*.

- $y=x+1$, $y=x+3$, $y=x+5$, $y=x-1$ e $y=x-3$.

d) O que acontece com a reta conforme alteramos o parâmetro *b*.

e) Pelo que você observou, qual é a influência dos parâmetros a e b na equação reduzida da reta?

APÊNDICE D – ETAPA 2 DA PROPOSTA DIDÁTICA

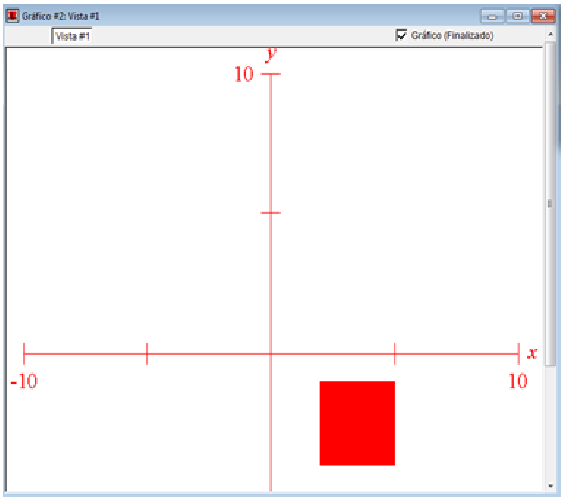
Nome:____	Data:____/____/17
Nome:____	Turma:__________

Etapa 2: 2 períodos

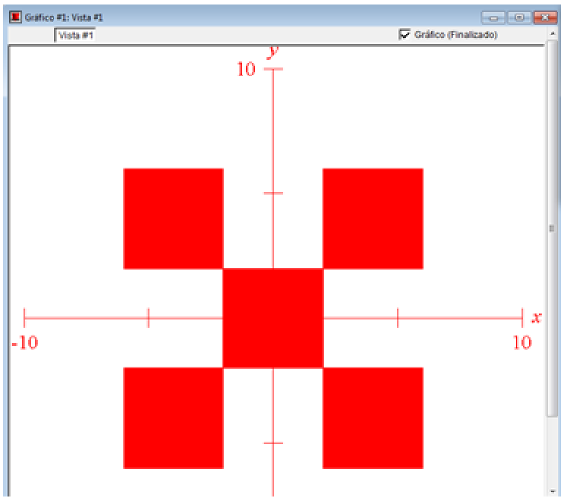
<u>Atividade 2</u>

- Construindo regiões do plano cartesiano com retas.

06. As regiões foram construídas no *softwareGrafEq*, descreva passo a passo a construção destas regiões.



____
____
____
____
____
____
____
____



____
____
____
____
____
____
____
____

07. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y = x + 1$, $y > x + 1$ e $y < x + 1$.

d) Digite as desigualdades (cada relação deve utilizar o seu próprio sistema de eixos cartesianos) e descreva as regiões obtidas.

___

___

___

___

- $y < x + 4$, $y < -x + 4$ e $y > 0$.

e) Digite as desigualdades (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva a região obtida.

___

___

___

- $y > x + 4$, $y > -x + 4$ e $y < 6$.

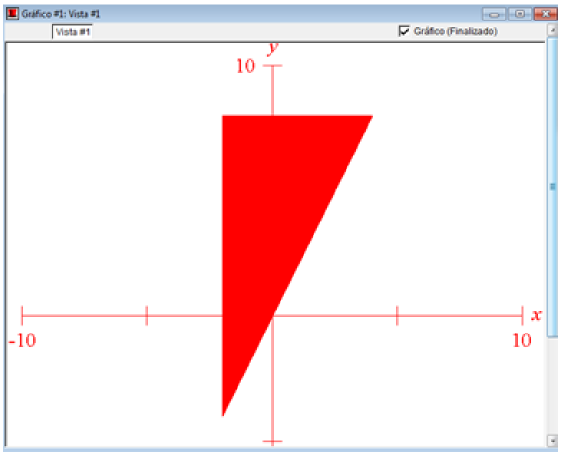
f) Sem realizar a construção descreva o que você acha que irá aparecer no grafeq em cada uma das relações. Depois verifique construindo os gráficos.

___

___

___

08. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.



___

___

___

___

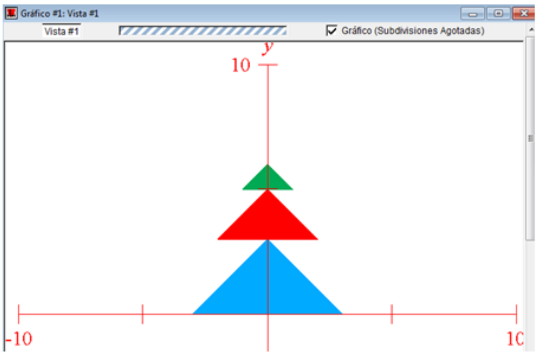
___

___

___

___

09. Utilizando os itens a, b e c da questão 2 para construir o triângulo apresentado na figura abaixo e descrever os passos e as representações algébricas utilizadas na construção.



____

____

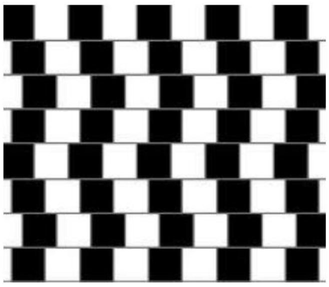
____

____

____

____

10. Agora vamos colocar em prática os conhecimentos obtidos e obter a construção de uma obra de arte.



www.HypeSience.com

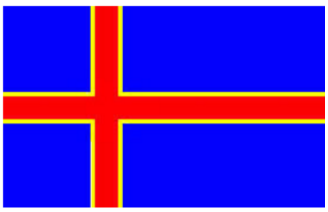
a) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

____

____

____

11. Agora vamos colocar em prática os conhecimentos obtidos e obter a construção de uma bandeira (escolha uma).

a) 

b) 

b) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da bandeira. Anote as relações utilizadas.

____

____

____

APÊNDICE E – ETAPA 3 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nome:____	Data:____/____/17
Nome:____	Turma:__________

Etapa 3: intersecção entre retas e posição relativa

Atividade 3

- Construindo retas no plano cartesiano

12. Construa no *GrafEq* as seguintes equações:

- $y = x + 1$, $y = x + 2$ e $y = x + 3$.

g) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas.

____

____

____

- $y = 2x + 1$, $y = 2x + 2$ e $y = 2x + 3$.

h) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou de comum entre as retas. Estas retas se interceptam no plano cartesiano? Porquê?

____

____

____

- $y = 5x + 1$, $y = 5x + 2$ e $y = 5x + 3$.

i) Sem realizar a construção faça um esboço do que você acha que irá aparecer no *GrafEq* ao digitarmos estas equações e depois compare com a representação obtida no software.

____

____

____

- $y = 5x + 1$ e $y = 5x + 4$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = \frac{2}{3}x + 3$.

j) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são ditas paralelas você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas paralelas no plano cartesiano?

____

____

____

13. Construa no grafeq as seguintes equações:

- $y = x + 1$ e $y = -x + 2$.

k) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.

____

____

____

- $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 1$

l) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação ao ângulo entre as duas retas.

____

____

____

- $y = 5x + 1$ e $y = -\frac{1}{5}x + 4$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

m) Se afirmarmos que os dois pares de retas acima são perpendiculares você seria capaz de estabelecer uma relação para decidir quando duas retas são ditas perpendiculares no plano cartesiano?

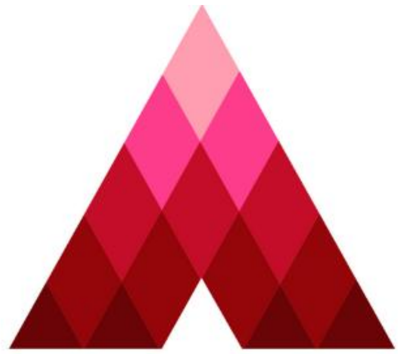
____

____

____

14. Utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2, vamos construir alguns polígonos regulares.

c) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.



d) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

e) Escreva detalhadamente como foram os passos para a construção. Quais foram os principais obstaculos encontrados pela dupla para a construção da obra de arte. Anote as relações utilizadas.

APÊNDICE F – ETAPA 4 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nome:____Data:____/____/17

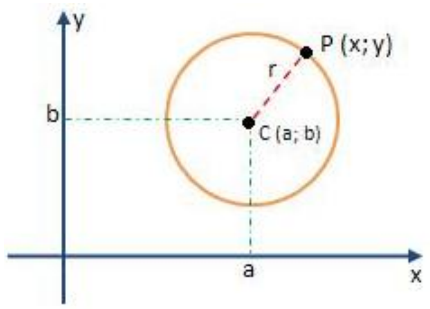
Nome:____Turma:__________

Etapa 3: Circunferência

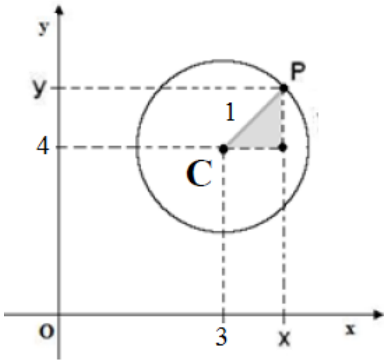
Atividade 4

- Equação da circunferência no plano cartesiano.

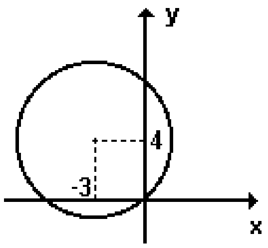
15. Determine a distância entre os pontos $C(a,b)$ e $P(x,y)$.



16. Determine o centro da circunferência e a sua equação reduzida.



17. Determine o centro da circunferência e a sua equação reduzida sabendo que o raio mede 5.



18. Utilizando os conhecimentos e suas observações nos exercícios 1,2 e 3 como podemos expressar de maneira geral a equação reduzida da circunferência?

____

____

____

19. Determine as equações reduzidas dos itens abaixo.

a) $C(3,1)$ e $r=4$

b) $C(-3,2)$ e $r=2$

c) $C(-5,-6)$ e $r=3$

d) $C(0,-4)$ e $r=\sqrt{5}$

20. Determine centro e raio nos itens abaixo.

a) $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

b) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$

c) $(x)^2+(y+4)^2=9$

21. Construa com o *GrafEq*.

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x+1)^2+(y-0)^2=1$

n) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação às circunferências.

____

____

____

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x-1)^2+(y-0)^2=1$

o) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação às circunferências.

____

____

____

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x-0)^2+(y-1)^2=1$

p) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação as circunferências

____

____

____

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x-0)^2+(y+1)^2=1$

q) Digite as equações (no mesmo sistema de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação as circunferências

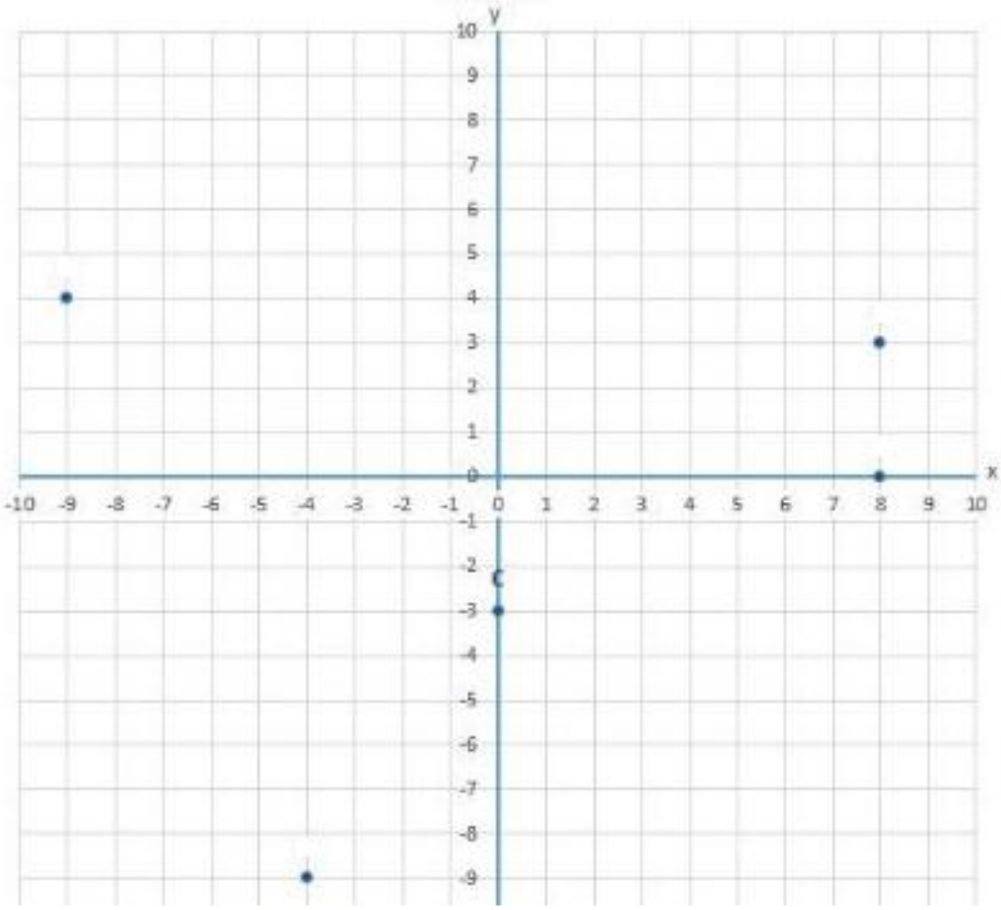
____

____

____

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x+3)^2+(y-5)^2=1$

r) Sem digitar as equações faça um esboço do que você acha que vai acontecer com a circunferência agora e depois realize as construções para comparar com o que você esboçou.



APÊNDICE G – ETAPA 5 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nome:____Data:____/____/17

Nome:____Turma:__________

Etapa 5: Circunferência

Atividade 5

- Equação da circunferência no plano cartesiano.

22. Construa com o *GrafEq*.

- $(x-0)^2+(y-0)^2=1$ e $(x-0)^2+(y-0)^2>1$ e $(x-0)^2+(y-0)^2<1$

s) Digite as equações (em diferentes sistemas de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação às inequações.

____

____

____

- $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ e $(x-2)^2+(y-2)^2>4$ e $(x-2)^2+(y-2)^2<4$

t) Digite as equações (em diferentes sistemas de eixos cartesianos) e descreva o que você observou com relação às inequações.

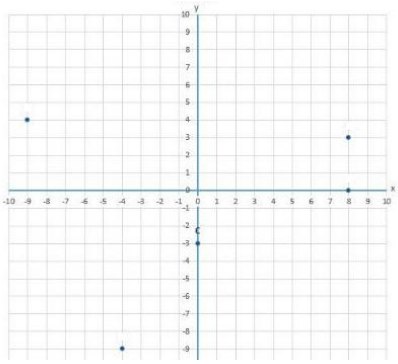
____

____

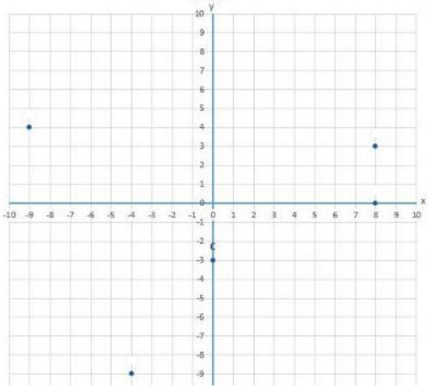
____

u) Sem digitar as equações faça um esboço do que você acha que vai acontecer com a circunferência agora e depois realize as construções para comparar com o que você esboçou.

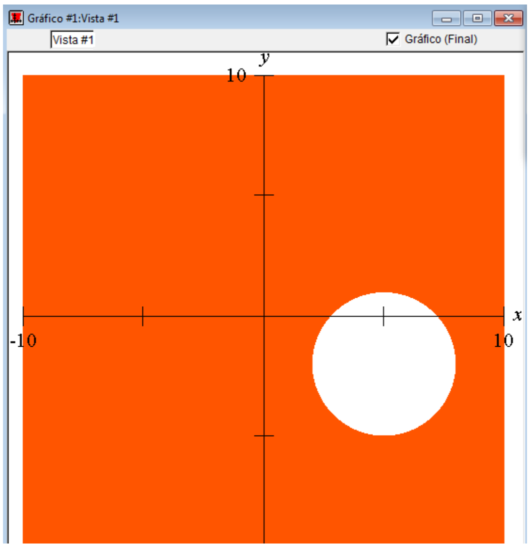
$(x+1)^2+(y-3)^2>4$



$(x+1)^2+(y-3)^2<4$

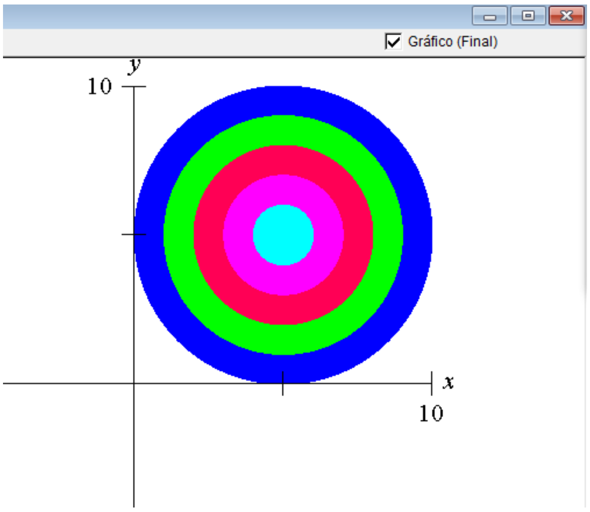


23. Determine uma possível equação para a região hachurada abaixo.

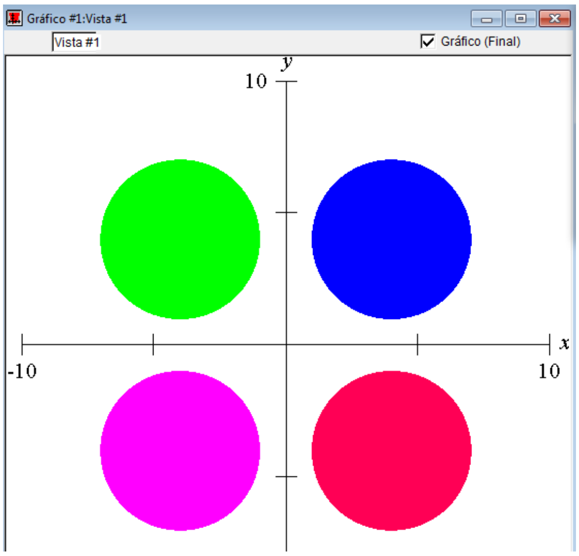


24. Construa as imagens abaixo no *GrafEq* descrevendo passo a passo o processo de obtenção das representações algébricas.

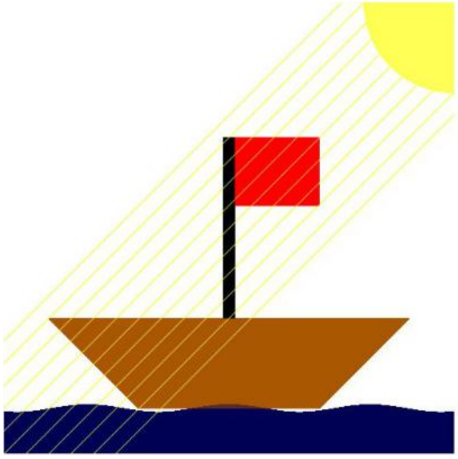
a)

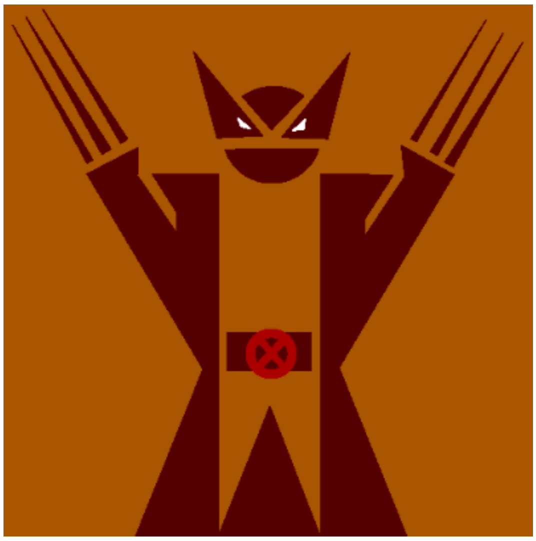


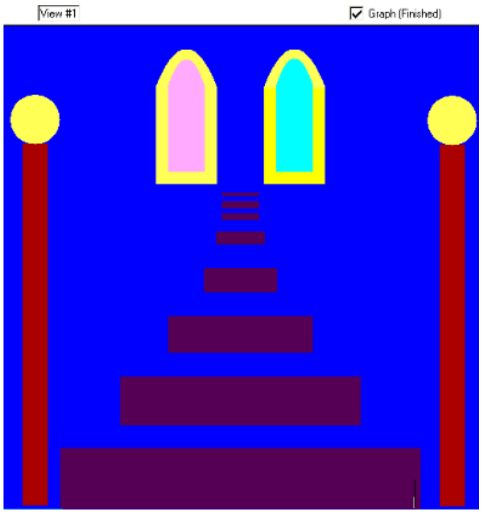
b)



25. Um pouco de tudo agora....escolha uma das imagens abaixo e tente realizar a sua construção no *GrafEq*, colocando as relações utilizadas.







APÊNDICE H – TERMO DE CONSSENTIMENTO

Eu,____, R.G.____________________, responsável pelo(a) ____, da turma 312, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Geometria Analítica: Articulando Registros Algébricos e Geométricos com o GRAFEQ** desenvolvida pelo pesquisador Diego da Silva Pinto Martinelli. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Fidelis Bittencourt, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail fidelisb@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

a) Favorecer a autonomia intelectual dos alunos, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos.

b) Desenvolver o conteúdo de Geometria Analítica em ambientes informatizados com o auxílio do software matemático Grafeq.

c) Estimular o interesse dos alunos através do uso do computador como um instrumento de ensino.

d) Identificar objetos matemáticos nos seus registros algébricos e geométricos bem como realizar conversões de registros.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de questionário escrito e trabalhos realizados no laboratório de informática, bem como da participação em aula, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo telefone (51) 991991342 ou pelo e-mail d14.martinelli@gmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de março de 2017.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura do Orientador da pesquisa:_______________________________________