UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS ASSOCIADAS A GRUPÓIDES DUPLOS VACANTES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Geovani Raulino**

**Santa Maria, RS, Brasil**
**2015**

**ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS ASSOCIADAS A GRUPÓIDES DUPLOS VACANTES**

**Geovani Raulino**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
**Mestre em Matemática**.

**Orientadora: Profª Drª Daiana Flôres**

**Santa Maria, RS, Brasil**
**2015**

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Raulino, Geovani
Álgebras de Hopf fracas associadas a grupóides duplos vacantes / Geovani Raulino.-2015.
101 p.; 30cm

Orientadora: Daiana Flôres
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2015

1. Categorias 2. Grupóides duplos vacantes 3. Álgebras de Hopf fracas 4. Categoria de representações I. Flôres, Daiana II. Título.

**Universidade Federal de Santa Maria**
**Centro de Ciências Naturais e Exatas**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,**
**aprova a Dissertação de Mestrado**

**ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS ASSOCIADAS A GRUPÓIDES DUPLOS VACANTES**

elaborada por
**Geovani Raulino**

como requisito parcial para a obtenção do grau de
**Mestre em Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

**Daiana Flôres, Dra.**
(Presidente/Orientadora)

**Andrea Morgado, Dra.** (UFPel)

**Saradia Della Flora, Dra.** (UFSM)

Santa Maria, 28 de agosto de 2015.

# Agradecimentos

Aos meus pais, pessoas mais importantes que tenho, pela ajuda durante toda minha vida e por me deixarem livre para escolher minha carreira profissional e por me apoiarem nessa escolha.

À minha orientadora, Daiana Flôres, por aceitar me orientar, por me ajudar a trilhar meu caminho acadêmico e profissional, e pela amizade.

À minha coorientadora, Sonia Natale, por me orientar e me auxiliar em quase todo meu trabalho durante minha estadia em Córdoba, sendo de fundamental importância para o resultado final deste trabalho.

Ao meu melhor amigo, Douglas, pela sua amizade, por estar ao meu lado nos momentos felizes e por sempre me ajudar nos momentos difíceis. Mesmo estando longe, durante nossas estadias em Córdoba, era a pessoa que mais conversava. Obrigado por ser meu conselheiro, meu confidente e meu irmão para vida toda.

Aos meus amigos, Fernando e Mônica, amizades do tempo de graduação e que continuaram comigo durante o mestrado, e aos novos amigos que fiz durante esses dois anos de mestrado, em especial, João Mateus, Joice, Silvia e Simone, amizades que levarei para a vida.

Às professoras, Saradia e Andrea, por aceitarem participar da banca, apontando correções e sugestões para o melhoramento deste trabalho.

Aos professores do programa de pós-graduação que contribuíram para a minha formação acadêmica, em especial, ao professor Dirceu Bagio pela minha formação como algebrista.

Ao programa de Pós-graduação e Universidade Federal de Santa Maria, que me deram a oportunidade de estudar aqui, à Universidad Nacional de Córdoba, por proporcionar a oportunidade de fazer intercâmbio e à CAPES pelo suporte e incentivo financeiro durante esses dois anos, tanto aqui em Santa Maria como em Córdoba.

*"Hoje, ainda almejamos saber por que estamos aqui e de onde viemos. O desejo profundo da humanidade pelo conhecimento é justificativa suficiente para nossa busca contínua."*

(Stephen Hawking)

## RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

## ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS ASSOCIADAS A GRUPÓIDES DUPLOS VACANTES

AUTOR: GEOVANI RAULINO
ORIENTADORA: DAIANA FLÔRES
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 28 de Agosto de 2015

Neste trabalho, construímos uma álgebra de Hopf fraca ([BNSz]) a partir de um grupóide duplo finito. Dado um corpo $\mathbb{K}$ e um grupóide duplo finito

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P}, \end{array}$$

consideremos o $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base dada pelos elementos de $\mathcal{B}$ (caixas). Esse espaço vetorial tem estrutura de álgebra associada a estrutura de álgebra do grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ e tem estrutura de coálgebra associada ao dual da estrutura de álgebra do grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$. Estudamos condições necessárias e suficientes para que este seja uma álgebra de Hopf fraca ([AN2]). Isto se verifica com a condição do grupóide duplo ser vacante ([M]).

Na parte final, estudamos a categoria de representações de uma álgebra de Hopf fraca ([NTV]) e, em particular, estudamos a que está relacionada a grupóides duplos vacantes finitos e concluímos que a mesma é uma categoria monoidal rígida, e com mais algumas condições é uma categoria tensorial e de fusão.

**Palavras-chave:** Categorias, grupóides duplos vacantes, álgebras de Hopf fracas, categoria de representações.

**ABSTRACT**

Dissertation

Graduate Program in Mathematics

Federal University of Santa Maria

**WEAK HOPF ALGEBRAS ASSOCIATED TO VACANT DOUBLE GROUPOIDS**

AUTHOR: GEOVANI RAULINO

ADVISOR: DAIANA FLÔRES

Date and Location of Defense: Santa Maria, August $28^{th}$, 2015.

In this work, we build a weak Hopf algebra ([BNSz]) from a finite double groupoid. Given a field $\mathbb{K}$ and a finite double groupoid

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \mathcal{V} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{P}, \end{tikzcd}$$

consider the $\mathbb{K}$-vector space with basis given by the elements of $\mathcal{B}$ (boxes). This vector space has algebra structure associated with the algebra structure of the groupoid $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ and has coalgebra structure associated to the dual algebra structure of the groupoid $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$. We study necessary and sufficient conditions for this to be a weak Hopf algebra ([AN2]). This is verified on the condition of the double groupoid be vacant ([M]).

In the final part, we studied the category of representations of a weak Hopf algebra ([NTV]) and, in particular, we study that is related to the finite vacant double groupoids and conclude that is a rigid monoidal category, and with some conditions it is a tensor and fusion category.

**Keywords:** Categories, vacant double groupoids, weak Hopf algebra, category of representations.

# Sumário

# Introdução

As álgebras de Hopf fracas foram introduzidas por Böhm e Szlachányi em [BSz] e [BNSz], no final da década de 90, como uma generalização das álgebras de Hopf ordinárias. Uma álgebra Hopf fraca tem estrutura de álgebra associativa e de coálgebra coassociativa; a comultiplicação é multiplicativa, mas não preserva a unidade e a counidade não é multiplicativa. Um dos primeiros exemplos de álgebra de Hopf fraca que não é uma álgebra de Hopf ordinária é a álgebra de grupóide. Anteriormente, uma particular, mas muito importante, classe de álgebras de Hopf fracas, as *face algebras*, foram introduzidas e estudadas por Hayashi em [H].

A noção de categoria dupla foi apresentada por Ehresmann em [E] como uma categoria interna na categoria das categorias pequenas. Uma categoria dupla consiste de quatro conjuntos não-vazios, oito funções de fronteira, quatro identidades e quatro composições, onde tais elementos satisfazem certos axiomas. Um grupóide duplo é um grupóide interno na categoria dos grupóides ou, equivalentemente, é uma categoria dupla onde as categorias que a compõe são grupóides. A noção de grupóide duplo foi estudada, em um contexto topológico, por Brown e Spencer em [BS]. Mackenzie em [M], iniciou o estudo dos grupóides duplos de Lie. Andruskiewitsch e Natale em [AN2], mostraram como construir uma álgebra de Hopf fraca a partir de um grupóide duplo finito (ver, Teorema 3.1), satisfazendo a condição de ser vacante, que foi apresentada por Mackenzie em [M].

Nosso principal objetivo deste trabalho é estudar condições necessárias e suficientes para demonstrar detalhadamente o Teorema 3.1, em [AN2]. Para isso, no primeiro capítulo, apresentamos alguns conteúdos necessários para a realização deste trabalho, que servem de preliminares para o objetivo principal de estudo. São eles: categorias, funtores, grupóides, categoria e grupóide interno, e categoria dupla e grupóide duplo. As principais referências utilizadas neste capítulo são: [AN2], [A], [Mac] e [R].

No segundo capítulo, na primeira seção, estudamos grupóides duplos vacantes e provamos alguns lemas técnicos que serão de grande importância para demonstrarmos o Teorema citado anteriormente. Na segunda seção, definimos ação de grupóide, par combinado de grupóides e fatoração exata de grupóides, e demonstramos a Proposição 2.2.9, a qual diz que esses conceitos são equivalentes a grupóides duplos vacantes. A principal referência neste capítulo é [AN2].

No capítulo 3, na primeira seção, estudamos álgebras de Hopf fracas. Na seção seguinte, provamos o Teorema 3.2.4, o qual é o principal resultado do trabalho. Construímos uma álgebra de Hopf fraca a partir de um grupóide duplo vacante. Na última seção, deformamos esta estrutura com 2-cociclos normalizados. As principais referências neste capítulo são: [AN2], [BNSz], [BSz] e [NV].

Por fim, no último capítulo, estudamos a categoria de representações de uma álgebra de Hopf fraca e provamos que a mesma tem estrutura de categoria monoidal rígida. Além disso, a categoria de representações da álgebra de Hopf fraca obtida de um grupóide duplo vacante, além de ser monoidal rígida, mediante algumas condições, é tensorial e de fusão. As referências mais usadas neste capítulo foram: [AN2], [JMM], [NTV] e [NV].

Neste texto, $\mathbb{K}$ será considerado um corpo e $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, salvo não seja mencionado o contrário.

# Capítulo 1

# Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados básicos que serão utilizados ao longo de todo o trabalho. São eles categorias, funtores, categoria interna, grupóides, categoria dupla e grupóide duplo. Além disso, apresentamos alguns exemplos e resultados de cada um dos conceitos explanados.

## 1.1 Categorias

A teoria das categorias foi apresentada pela primeira vez em 1945 por Eilenberg e Mac Lane (ver [EMac]), como uma teoria relacionada com topologia algébrica. Essa teoria matemática trata de forma abstrata as estruturas matemáticas e as relações entre elas. De acordo com Awodey em [A], pode-se dizer que a teoria das categorias é o estudo matemático (abstrato) da álgebras de funções, a partir da idéia de um sistema de funções entre alguns objetos.

**Definição 1.1.1** *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste dos seguintes dados:*

- *Uma classe de objetos $Obj(\mathcal{C})$;*
- *Para cada par ordenado de objetos $(X,Y)$ de $\mathcal{C}$, um conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de morfismos de $X$ em $Y$, onde $X$ é chamado de domínio e $Y$ é chamado de codomínio;*
- *Uma composição que associa para cada par de morfismos $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ o morfismo $g \circ f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Z)$.*

*Sujeitos aos seguintes axiomas:*

1. *Os conjuntos de morfismos são dois à dois disjuntos, ou seja, cada morfismo tem um único domínio e um único codomínio.*

2. *Para cada objeto* $X$ *de* $\mathcal{C}$*, existe um morfismo identidade* $1_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$*, tal que para cada* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *e* $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,X)$*, tem-se que:*

$$f \circ 1_X = f \quad e \quad 1_X \circ g = g.$$

3. *A composição é associativa, isto é, dados morfismos* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$*,* $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ *e* $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,W)$*, então*

$$h \circ (g \circ f) \quad = \quad (h \circ g) \circ f.$$

**Observação 1.1.2** *Ao longo do texto, pode-se utilizar o termo de flechas para nos referir a morfismos. Mais ainda, um morfismo* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *poderá ser representado da seguinte forma* $f : X \longrightarrow Y$*.*

**Exemplo 1.1.3** Considere $\mathcal{C}$ a categoria onde a classe de objetos é formada por todos os conjuntos; os morfismos são as funções e a composição é a composição usual de funções. Esta categoria será denotada por *Set*.

**Exemplo 1.1.4** Se $G$ é um grupo, então $G$ pode ser visto como uma categoria, indicada por $\mathbf{C}(G)$, que possui apenas um objeto, denotado por $\{*\}$; o conjunto de morfismos é $G$, ou seja, $Mor_{C(G)}(*,*) = G$ e a composição é a operação em $G$.

**Exemplo 1.1.5** Seja $X$ um conjunto parcialmente ordenado, $(X, \leq)$. Definimos a categoria $\mathcal{C}$ cujos objetos são os elementos de $X$ e se $x$, $y \in X$, então

$$Mor_{\mathcal{C}}(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \delta^x_y, & \text{se } x \leq y. \\ \phi, & \text{se } x \text{ não está relacionado com } y. \end{cases}$$

O símbolo $\delta^x_y$ denota o único elemento em $Mor_{\mathcal{C}}(x,y)$, quando $x \leq y$. A composição nesta categoria é dada por

$$\delta^y_z \delta^x_y \quad = \quad \delta^x_z.$$

Observe que a composição está bem definida, pois se $x \leq y$ e $y \leq z$, por transitividade, segue que $x \leq z$.

Vejamos que $\mathcal{C}$ é, de fato, uma categoria. Note que, $\delta^x_y = \delta^z_w$ se e somente se $x = z$ e $y = w$. Logo, os conjuntos de morfismos são dois à dois disjuntos. Temos que, por reflexividade, $x \leq x$, para cada $x \in X$, assim existe $\delta^x_x$ tal que

$$\delta^x_y \delta^x_x = \delta^x_y \quad \text{e} \quad \delta^x_x \delta^z_x = \delta^z_x.$$

Por fim, sejam $x$, $y$, $z$, $w$ em $X$, tais que $x \leq y$, $y \leq z$ e $z \leq w$. Assim,

$$\delta_w^z \left(\delta_z^y \delta_y^x\right) = \delta_w^z \delta_z^x = \delta_w^z.$$

Por outro lado,

$$\left(\delta_w^z \delta_z^y\right) \delta_y^x = \delta_w^y \delta_y^x = \delta_w^z.$$

Logo, a composição é associativa.

**Definição 1.1.6** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é uma categoria cuja classe de objetos é uma subclasse de Obj$(\mathcal{C})$ e, para todo $X$, $Y$ de $\mathcal{C}'$, se verifica a inclusão $Mor_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$. A composição em $\mathcal{C}'$ é dada pela restrição da composição de $\mathcal{C}$. Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é dita cheia se, para todo par $X$, $Y$ de $\mathcal{C}'$, é válida a igualdade $Mor_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.*

**Exemplo 1.1.7** Seguem listados mais alguns exemplos de categorias, as quais são subcategorias de *Set*.

1. *Gr* é a categoria dos grupos.
2. *Ab* é a categoria dos grupos abelianos. Note que essa categoria é uma subcategoria cheia de *Gr*.
3. *Rng* é a categoria dos anéis.
4. *Fld* é a categoria dos corpos.
5. $Vec_{\mathbb{K}}$ é categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. A categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita será denotada por $vec_{\mathbb{K}}$.
6. Considere $R$ um anel. ${}_RMod$ é a categoria dos $R$-módulos à equerda e $Mod_R$ é a categoria dos $R$-módulos à direita.
7. *Top* é categoria dos espaços topológicos.

**Definição 1.1.8** *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita pequena se Obj$(\mathcal{C})$ é um conjunto.*

As categorias dos Exemplos 1.1.4 e 1.1.5 são categorias pequenas. Observe que, *Set* não uma categoria pequena, pois a classe de objetos não é um conjunto.

Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos construir uma nova categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, chamada de produto de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, do seguinte modo. Os objetos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ são pares $(X,Y)$ onde $X$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $Y$ é um objeto de $\mathcal{D}$; um morfismo $(X,Y) \longrightarrow (X,Y')$

em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par $(f,g)$ de morfismos $f : X \longrightarrow X'$ e $g : Y \longrightarrow Y'$ e a composição de dois morfismos nesta categoria

$$(X,Y) \xrightarrow{(f,\ g)} (X',Y') \xrightarrow{(f',\ g')} (X'',Y'') \ ,$$

é definida nos termos das composições em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, do seguinte modo

$$(f,g) \circ (f',g') \ = \ (f' \circ f, g' \circ g).$$

**Definição 1.1.9** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ é dito um isomorfismo (ou uma equivalência) se existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$, tal que $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$. O morfismo $g$ é chamado o inverso de $f$.*

**Observação 1.1.10** *Se existe o inverso de um morfismo, então ele é único. Além disso, sejam $X$, $Y$ em $Obj(\mathcal{C})$, dizemos que $X$ é isomorfo a $Y$ e denotamos por $X \cong Y$, se existe um isomorfismo entre eles.*

**Definição 1.1.11** *Um grupóide $\mathcal{G}$ é uma categoria pequena, onde todo morfismo é um isomorfismo, ou seja, todos os morfismos são inversíveis.*

Um exemplo importante de grupóide é a categoria apresentada no Exemplo 1.1.4.

### 1.1.1 Funtores

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor é um "morfismo" entre essas categorias, ou seja, uma aplicação que associa objetos e morfismos de $\mathcal{C}$ com objetos e morfismos de $\mathcal{D}$, respectivamente, preservando as estruturas.

**Definição 1.1.12** *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor covariante $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ consiste de duas funções:*

- *$F\colon Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{D})$ que associa a cada objeto $X$ de $\mathcal{C}$ um objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$;*
- *Para cada par de objetos $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, $F\colon Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ que associa a cada $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$,*

*satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo objeto $X$ de $\mathcal{C}$;*
2. *$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para quaisquer morfismos $f$ e $g$ componíveis.*

De maneira análoga definimos um funtor contravariante, apenas mudando a segunda função e o segundo axioma, da definição anterior, respectivamente, por:

- Para cada par de objetos $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, $F$: $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$ que associa cada $f: X \longrightarrow Y$ um morfismo $F(f)$: $F(Y) \longrightarrow F(X)$;

2. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, para quaisquer morfismos $f$ e $g$ componíveis.

**Exemplo 1.1.13** Se $\mathcal{C}$ é uma categoria, então o *funtor identidade* $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é definido por: $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$, para todo $X$ de $\mathcal{C}$ e $f$ morfismo em $\mathcal{C}$.

**Exemplo 1.1.14** Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X$ em $Obj(\mathcal{C})$. Definimos $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ por $F(Y) = X$ e $F(f) = 1_X$, para cada objeto $Y$ de $\mathcal{C}$ e cada morfismo $f$ em $\mathcal{C}$. Então $F$ é um funtor, o qual é chamado de *funtor constante* de $X$.

**Exemplo 1.1.15** Considere as categorias *Set* e *Gr*. Definimos $E : Gr \longrightarrow Set$ tal que $E(G) = G$ e $E(f) = f$ para qualquer grupo $G$ e qualquer morfismo de grupos $f$. Em outras palavras, $E$ "esquece" a estrutura do grupo. Então $E$ é um funtor e é chamado de *funtor esquecimento*.

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias, $F$: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G$: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ funtores. Definimos a composição de $G$ com $F$ por:

- $GF(X) = G(F(X))$, para todo objeto $X$ de $\mathcal{C}$;
- $GF(f) = G(F(f))$, para todo $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

**Observação 1.1.16** *Nas condições anteriores, a composição de dois funtores é um funtor. De fato, sejam f, g morfismos componíveis em $\mathcal{C}$, então*

$$GF(f \circ g) = G(F(f) \circ F(g)) = G(F(f)) \circ G(F(g)) = GF(f) \circ GF(g).$$

*Mais ainda, para cada objeto $X$ de $\mathcal{C}$, temos*

$$GF(1_X) = G(1_{F(X)}) = 1_{G(F(X))} = 1_{GF(X)}.$$

*Assim, GF é um funtor covariante.*

Com isso podemos apresentar mais dois exemplos de categorias.

**Exemplo 1.1.17** A categoria *Cat* é a categoria onde os objetos são todas as categorias pequenas, os morfismos em *Cat* são todos os funtores entre categorias pequenas e a composição em *Cat* é a composição de funtores definida acima.

**Exemplo 1.1.18** Denotaremos por *Grp* a subcategoria cheia de *Cat* cujos objetos são grupóides.

Agora apresentaremos o conceito de *transformação natural*, que pode ser interpretado como um "morfismo" entre funtores. Para duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos considerar os funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ como os objetos de uma nova categoria e as flechas entre esses objetos são o que chamaremos de transformações naturais.

**Definição 1.1.19** *Dadas duas categorias $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e dois funtores $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, uma transformação natural $\vartheta : F \longrightarrow G$ é uma família $(\vartheta_X : F(X) \longrightarrow G(X))_X$ de morfismos em $\mathcal{D}$ tal que para quaisquer objetos $X$, $Y$ em $\mathcal{C}$ e cada flecha $f : X \longrightarrow Y$, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\vartheta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\vartheta_Y"'] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

*Além disso, se para cada $X$ de $\mathcal{C}$ o morfismo $\vartheta_X$ é um isomorfismo, então a transformação natural $\vartheta$ é chamada de isomorfismo natural.*

**Exemplo 1.1.20** Considere os funtores $F : Fld \longrightarrow Gr$, que associa a cada corpo $\mathbb{K}$ o grupo $GL_n$ sobre $\mathbb{K}$ e o funtor $G : Fld \longrightarrow Gr$, que associa a cada corpo $\mathbb{K}$ o grupo multiplicativo $\mathbb{K}^\times$.

Seja $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ um morfismo em $Fld$, então $F(f) : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{L})$, $(a_{ij}) \longmapsto (f(a_{ij}))_{ij}$ e $G(f) : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathbb{L}^\times$, $G(f) = f|_{\mathbb{K}^\times}$. Temos que a função determinante $det_{\mathbb{K}} : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ é um homomorfismo de grupos e define uma transformação natural para estes funtores. Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ em $Fld$, devemos verificar se o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
GL_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "det_{\mathbb{K}}"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathbb{K}^\times \arrow[d, "G(f)"] \\
GL_n(\mathbb{L}) \arrow[r, "det_{\mathbb{L}}"'] & \mathbb{L}^\times.
\end{tikzcd}$$

De fato, para qualquer $(a_{ij})$ em $GL_n(\mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned}
(G(f) \circ det_{\mathbb{K}})((a_{ij})) &= G(f)(det_{\mathbb{K}}(a_{ij})) = f(det_{\mathbb{K}}(a_{ij})) \\
&= det_{\mathbb{L}}((f(a_{ij}))_{ij}) = (det_{\mathbb{L}} \circ F(f))((a_{ij})).
\end{aligned}$$

Considere a categoria $Vec_{\mathbb{K}}$ e, para cada $V$ em $Vec_{\mathbb{K}}$, a aplicação $\varphi_V : V \longrightarrow V^{**}$ definida por $\varphi_V(v)(g) = g(v)$, para todo $v \in V$ e $g \in V^*$. Note que $\varphi_V$ é uma transformação linear injetiva. Porém, nem sempre é sobrejetiva. No caso que $V$ tem dimensão finita, $\varphi_V$ é bijetiva.

No exemplo seguinte, apresentamos uma transformação natural entre o funtor identidade e o funtor bidual sobre $vec_{\mathbb{K}}$. Para simplificar a notação, usaremos $\varphi_v$ para indicar $\varphi_V(v)$.

**Exemplo 1.1.21** Considere a categoria $vec_{\mathbb{K}}$ e $(\_)^{**} : vec_{\mathbb{K}} \longrightarrow vec_{\mathbb{K}}$ o funtor bidual, que associa cada $V$ em $vec_{\mathbb{K}}$ ao seu bidual $V^{**}$ em $vec_{\mathbb{K}}$ e para cada $f : V \longrightarrow W$ transformação linear, associa

$$\begin{array}{rccccl} f^{**}: & V^{**} & \longrightarrow & W^{**} & & \\ & \varphi_v & \longmapsto & f^{**}(\varphi_v): & W^* \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & u \longmapsto & \varphi_v(u \circ f). \end{array}$$

Para cada $V$ em $vec_{\mathbb{K}}$, $\vartheta_V : V \longrightarrow V^{**}$, definida por $\vartheta_V(v) = \varphi_v$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Então $\vartheta : 1_{vec_{\mathbb{K}}} \longrightarrow (\_)^{**}$ é um isomorfismo natural. Sejam $V, W$ em $vec_{\mathbb{K}}$ e $f : V \longrightarrow W$, devemos mostrar que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\vartheta_W"'] & W^{**}, \end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, para quaisquer $v \in V$ e $h : W \longrightarrow \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \vartheta_V)(v)(h) &= (f^{**} \circ \varphi_v)(h) = \varphi_v(h \circ f) \\ &= (h \circ f)(v) = \varphi_{f(v)}(h) \\ &= \vartheta_W(f(v))(h) = (\vartheta_W \circ f)(v)(h). \end{aligned}$$

### 1.1.2 Categorias Internas

Nesta seção, apresentaremos o conceito de produto fibrado em uma categoria, o qual será importante para a definição de categoria interna (ou objeto categoria).

**Definição 1.1.22** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dados dois morfismos $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$, uma solução para o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C, \end{tikzcd}$$

*consiste de uma tripla* $(P, \pi_1, \pi_2)$*, onde* $P$ *é um objeto de* $\mathcal{C}$*,* $\pi_1 \in Mor_{\mathcal{C}}(P, A)$ *e* $\pi_2 \in Mor_{\mathcal{C}}(P, B)$*, tal que* $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$*, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

**Definição 1.1.23** *Nas condições anteriores, o produto fibrado é uma solução* $(P, \pi_1, \pi_2)$ *satisfazendo a seguinte propriedade: dados* $(Z, z_1, z_2)$ *outra solução para o diagrama, com* $f \circ z_1 = g \circ z_2$*, então existe um único morfismo* $u$*:* $Z \longrightarrow P$ *com* $z_1 = \pi_1 \circ u$ *e* $z_2 = \pi_2 \circ u$*, ou seja, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "z_2"] \arrow[ddr, bend right, "z_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

**Proposição 1.1.24** *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria,* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ *e* $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$*. Se o produto fibrado de* $f$ *e* $g$ *existe, ele é único a menos de equivalência.*

*Demonstração:*

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow C$ morfismos em $\mathcal{C}$. Suponhamos que $(P,\ \pi_1,\ \pi_2)$ e $(Q,\ \tau_1,\ \tau_2)$ são produtos fibrados para o diagrama. Logo, temos que $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$ e $f \circ \tau_1 = g \circ \tau_2$. Se $(P,\ \pi_1,\ \pi_2)$ é o produto fibrado, então existe uma única $\theta : Q \longrightarrow P$ tal que $\tau_i = \pi_i \circ \theta$ $(i = 1,\ 2)$. Do mesmo modo, se $(Q,\ \tau_1,\ \tau_2)$ é o produto fibrado, então existe uma única $\phi : P \longrightarrow Q$ tal que $\pi_i = \tau_i \circ \phi$ $(i = 1,\ 2)$.

Assim, obtemos que $\pi_i = \pi_i \circ \theta \circ \phi$ $(i = 1,\ 2)$, isto é, $\theta \circ \phi$ faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "\theta\circ\phi"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Entretanto, o morfismo identidade $1_P$ também faz o diagrama acima comutar. Assim, pela unicidade da definição segue que $\theta \circ \phi = 1_P$. Analogamente, verifica-se que $\phi \circ \theta = 1_Q$.

□

**Exemplo 1.1.25** Considere a categoria *Set* e sejam $X$, $Y$ e $Z$ em *Set*. Suponhamos que $X, Y \subseteq Z$ e $i : X \longrightarrow Z$, $j : Y \longrightarrow Z$ são as inclusões canônicas. Então, $P = X \cap Y$, $\imath : P \longrightarrow X$ e $\iota : P \longrightarrow Y$ as inclusões, é o produto fibrado para $i$, $j$.

De fato, seja $(W, \alpha, \beta)$ outra solução para o diagrama, isto é, $\alpha : W \longrightarrow Y$, $\beta : W \longrightarrow X$ tais que $i \circ \alpha = j \circ \beta$, o que implica $\alpha(w) = \beta(w)$, para todo $w$ em $W$.

Definimos $\theta : W \longrightarrow P$, por $\theta(w) = \beta(w) = \alpha(w)$. Note que $\theta$ está bem definida, pois $\beta(w) \in X$ e $\alpha(w) \in Y$, mas como $\alpha(w) = \beta(w)$, concluímos que $\alpha(w) = \beta(w) \in X \cap Y = P$. Assim, para todo $w \in W$, temos

$$(\imath \circ \theta)(w) = \imath(\theta(w)) = \imath(\alpha(w)) = \alpha(w) \quad \text{e} \quad (\iota \circ \theta)(w) = \iota(\theta(w)) = \iota(\beta(w)) = \beta(w).$$

Logo, $\imath \circ \theta = \alpha$ e $\iota \circ \theta = \beta$. Para verificarmos a unicidade, suponhamos que $\phi : W \longrightarrow P$, é tal que $\imath \circ \phi = \alpha$ e $\iota \circ \phi = \beta$. Assim, $\phi = \alpha$ e $\phi = \beta$ e, consequentemente, $\phi = \theta$. Portanto, $(P, \imath, \iota)$ é o produto fibrado de $i$, $j$.

**Exemplo 1.1.26** Ainda considerando a categoria *Set*, afirmamos que o produto fibrado existe sempre. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos em *Set* e funções $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow C$. Então $D = \{(x, y) \in A \times B; f(x) = g(y)\}$, $\alpha : D \longrightarrow A$ e $\beta : D \longrightarrow B$ as projeções, é o produto fibrado de $f$ e $g$.

De fato, seja $(X, p, q)$ outra solução para o diagrama, isto é, existem funções $p : X \longrightarrow A$ e $q : X \longrightarrow B$ tais que $g \circ q = f \circ p$. Definimos, $\theta : X \longrightarrow D$, por $\theta(x) = (p(x), q(x))$. Assim, temos

$$(\alpha \circ \theta)(x) = \alpha((p(x), q(x))) = p(x) \quad \text{e} \quad (\beta \circ \theta)(x) = \beta((p(x), q(x))) = q(x).$$

Logo, $\alpha \circ \theta = p$ e $\beta \circ \theta = q$. Suponhamos que $\varphi : X \longrightarrow D$ é tal que $\alpha \circ \varphi = p$ e $\beta \circ \varphi = q$. Assim, $\alpha \circ \theta = \alpha \circ \varphi$ e $\beta \circ \theta = \beta \circ \varphi$, ou seja, $\varphi = \theta$. Portanto, $(D, \alpha, \beta)$ é o produto fibrado de $f$ e $g$.

**Observação 1.1.27** *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos em $\mathcal{C}$. Se existe o produto fibrado de $f$ e $g$, este será denotado por $A_f \times_g B$.*

O conceito de produto fibrado, nos permite definir uma estrutura dentro de uma categoria $\mathcal{C}$, o que chamamos de *categoria interna* ou *objeto categoria* em $\mathcal{C}$.

**Definição 1.1.28** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos fibrados. Uma categoria interna (ou objeto categoria) em $\mathcal{C}$ é uma coleção $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, p, f, id, m)$ onde:*

- *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ são objetos de $\mathcal{C}$;*
- *$p$, $f$: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$, $id$: $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $m$: $\mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ são morfismos em $\mathcal{C}$,*

*sujeitos a comutividade dos seguintes diagramas:*

1. *Princípio e fim do morfismo identidade:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "p"] \\ & \mathcal{O} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

2. *Princípio e fim da composição:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "p"'] & \mathcal{O} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

3. *Associatividade da composição:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[r, "id_{\mathcal{A}} \times m"] \arrow[d, "m \times id_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

4. *Identidades à esquerda e à direita:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[r, "id \times id_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} \arrow[d, "m"] & \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{O} \arrow[l, "id_{\mathcal{A}} \times id"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

**Observação 1.1.29** *Note que, $\mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A}$ é o produto fibrado do diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

**Observação 1.1.30** *No que segue, quando f, g são flechas componíveis em uma categoria $\mathcal{C}$, a composição será indicada por justaposição $fg$, ao invés de $g \circ f$, caso não seja especificado o contrário.*

**Proposição 1.1.31** *As seguintes noções são equivalentes:*

*(a) Categoria pequena;*

*(b) Categoria interna em Set.*

*Demonstração:*

Consideremos $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é uma categoria intena em $Set$, ou seja, $\mathcal{C}$ é uma coleção $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, p, f, id, m)$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ são conjuntos e $p$, $f$, $id$ e $m$ são funções que satisfazem a comutatividade dos diagramas da Definição 1.1.28.

Da definição de categoria pequena, chamamos de $\mathcal{O}$ o conjunto dos objetos de $\mathcal{C}$ e de $\mathcal{A}$ a união dos conjuntos de morfismos entre pares de objetos de $\mathcal{C}$, isto é,

$$\mathcal{A} = \dot{\bigcup_{X,Y \in Obj(\mathcal{C})}} Mor_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Desta forma, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{A}$ são conjuntos e, consequentemente, objetos em $Set$.

Definimos, agora, as funções $p$, $f$, $id$ e $m$. Dado $g \in \mathcal{A}$, temos que $g \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, para $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, então definimos $p(g) = X$ e $f(g) = Y$. Por serem os conjuntos de morfismos dois à dois disjuntos, segue que $p$, $f$ estão bem definidas. Para cada $X \in \mathcal{O}$, associamos $id(X) := 1_X$, o morfismo identidade em $\mathcal{C}$ e pela unicidade segue a boa definição da função $id$. Por fim, definimos o conjunto $\mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A} = \{(g,h) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : f(g) = p(h)\}$, o qual é o produto fibrado, como no Exemplo 1.1.26. Assim, para $(g,h) \in \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A}$, pomos $m(g,h) = g \circ h$, a boa definição de $m$ segue do fato de $m$ ser exatamente a composição em $\mathcal{C}$. Basta verificar se as funções assim definidas, satisfazem os axiomas da definição de categoria interna.

Seja $X \in \mathcal{O}$, temos que

$$p(id(X)) = p(1_X) = X = id_{\mathcal{O}}(X) \text{ e } f(id(X)) = f(1_X) = X = id_{\mathcal{O}}(X).$$

Logo, o axioma do princípio e fim do morfismo identidade é satisfeito.

Seja $(g,h) \in \mathcal{A}\ {}_f\times_p\ \mathcal{A}$, então $p(m(g,h)) = p(g \circ h) = p(g) = p(\pi_1(g,h))$. Analogamente, $f(m(g,h)) = f(g \circ h) = f(h) = f(\pi_2(g,h))$. Logo, é válido o axioma do princípio e fim da composição.

A associatividade de $m$ segue da associatividade da composição de $\mathcal{C}$.

Finalmente, sejam $g \in \mathcal{A}$, $p(g) = X \in \mathcal{O}$, assim

$$m(id \times id_{\mathcal{A}})(X,g) = m(1_X, g) = 1_X \circ g = g = \pi_2(X,g).$$

Do mesmo modo, sejam $h \in \mathcal{A}$, $f(h) = Y \in \mathcal{O}$, então

$$m(id_{\mathcal{A}} \times id)(h,Y) = m(h, 1_Y) = h \circ 1_Y = h = \pi_1(h,Y).$$

Assim, é válido o axioma da identidade à esquerda e à direita. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma categoria interna em *Set*.

Reciprocamente, seja $\mathcal{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, p, f, id, m)$ uma categoria interna em *Set*. Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ são objetos em *Set*, então são conjuntos. Chamando $\mathcal{O}$ o conjunto dos objetos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os morfismos de $\mathcal{C}$, assim dados $X, Y \in \mathcal{O}$ definimos $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{g \in \mathcal{A};\ p(g) = X \text{ e } f(g) = Y\}$.

A definição da composição é induzida pela $m$, da seguinte forma,

$$g \circ h = m(g,h) = gh,$$

para todo $g$, $h$ em $\mathcal{A}$.

Temos que $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) \subseteq \mathcal{A}_f \times_p \mathcal{A}$, pois $f(g) = Y = p(h)$, para todo $g \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$. Assim, a composição está bem definida. Basta verificar os axiomas da definição de categoria pequena.

Cada morfismo em $\mathcal{A}$, possui único princípio e único fim, pois $p$, $f$ são funções e, portanto, os conjuntos de morfismos são dois à dois disjuntos.

Sejam $g \in \mathcal{A}$, então $m(id \times id_{\mathcal{A}})(p(g), g) = m(1_{p(g)}, g) = 1_{p(g)}g$. Por outro lado,

$m(id \times id_{\mathcal{A}})(p(g), g) = \pi_2(p(g), g) = g$, consequentemente, $1_{p(g)}g = g$. Analogamente, concluímos que $g1_{f(g)} = g$. Assim, se verifica o Axioma 2.

Por fim, sejam $g$, $h$, $l$ componíveis em $\mathcal{A}$. Então,

$$m(id_{\mathcal{A}} \times m)(g, h, l) = m(g, hl) = g(hl) = g \circ (h \circ l).$$

Por outro lado,

$$m(m \times id_{\mathcal{A}})(g, h, l) = m(gh, l) = (gh)l = (g \circ h) \circ l.$$

Logo, vale o Axioma 3. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena.

□

Apresentamos uma definição equivalente para a Definição 1.1.12.

**Definição 1.1.32** *Sejam* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_0, p, f, id, m)$ *e* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_0, p', f', id', m')$ *duas categorias pequenas. Um funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *é um par de funções* $F_0 : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_0$ *e* $F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_1$ *que satisfazem a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "p{,}f"] \arrow[d, "F_1"'] & \mathcal{C}_0 \arrow[d, "F_0"] \\ \mathcal{D}_1 \arrow[r, "p'{,}f'"'] & \mathcal{D}_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_0 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "F_0"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "F_1"] \\ \mathcal{D}_0 \arrow[r, "id'"'] & \mathcal{D}_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{1f} \times_p \mathcal{C}_1 \arrow[r, "F_1 \times F_1"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{D}_{1f'} \times_{p'} \mathcal{D}_1 \arrow[d, "m'"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "F_1"'] & \mathcal{D}_1, \end{tikzcd}$$

*ou, equivalentemente,* $F_0 p = pF_1$, $F_0 f = fF_1$, $F_1 id = id' F_0$ *e* $m'(F_1 \times F_1) = F_1 m$.

### 1.1.3 Grupóides

A próxima definição que apresentaremos é equivalente à Definição 1.1.11.

**Definição 1.1.33** *Um grupóide* $\mathcal{G}$ *é uma categoria pequena* $(\mathcal{G}, \mathcal{P}, p, f, id, m)$ *munida com uma aplicação S:* $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *sujeita à comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "diag"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[d, "m(id_{\mathcal{G}}\times S)"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "id"'] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "diag"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[d, "m(S\times id_{\mathcal{G}})"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "id"'] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

**Observação 1.1.34** *A aplicação* $diag : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ *é dada por* $diag(g) = (g, g)$.

Denotaremos um grupóide $\mathcal{G}$ com base $\mathcal{P}$ por $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$. Para cada $X$, $Y \in \mathcal{P}$, denotamos $\mathcal{G}(X,Y) = \{g \in \mathcal{G} : p(g) = X \text{ e } f(g) = Y\}$ o conjunto de todas as flechas de $X$ para $Y$. Além disso, $\mathcal{G}(X,X) = \mathcal{G}(X)$ o conjunto de flechas de $X$ para $X$.

Temos que $\mathcal{G}(X)$ com a composição de $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é um grupo. De fato, a associatividade da composição vem do fato de $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ ser grupóide, existe uma identidade $1_X$ e cada morfismo em $\mathcal{G}(X)$ é inversível. Este grupo é chamado de grupo de *isotropia*.

**Exemplo 1.1.35** A categoria $C(G)$ (Exemplo 1.1.4) é um grupóide, onde a aplicação $S$ é dada por $S(g) = g^{-1}$.

**Exemplo 1.1.36** Seja $\sim$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $\mathcal{P}$. Então, definimos um grupóide $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ do seguinte modo:

1. Dados $X$, $Y \in \mathcal{P}$, $\mathcal{G}(X,Y) = \begin{cases} (X,Y), & \text{se} \quad X \sim Y \\ \phi, & \text{se} \quad X \nsim Y \end{cases}$;
2. $p(X,Y) = X$ e $f(X,Y) = Y$;
3. A composição é dada por $(X,Y)(Y,Z) = (X,Z)$;
4. $id(X) = (X,X)$;
5. $(X,Y)^{-1} = (Y,X)$.

**Observação 1.1.37** *Considere a relação sobre* $\mathcal{P}$ *na qual todos os elementos estão relacionados, e denotemos por* $\mathcal{P}^2$ *o grupóide obtido a partir desta relação. O grupóide* $\mathcal{P}^2$ *é chamado de grupóide grosseiro sobre* $\mathcal{P}$.

A estrutura de qualquer grupóide pode ser descrita com a ajuda do exemplo anterior, juntamente com os dois exemplos seguintes. Consideremos dois grupóides $\mathcal{G} = (\mathcal{G}, \mathcal{P}, p_1, f_1, id_1, m_1, S_1)$ e $\mathcal{G}' = (\mathcal{G}', \mathcal{P}', p_2, f_2, id_2, m_2, S_2)$.

**Exemplo 1.1.38** A união disjunta $\mathcal{G}\dot{\bigcup}\mathcal{G}'$ é o grupóide com base $\mathcal{P}\dot{\bigcup}\mathcal{P}'$ . As aplicações são definidas das seguintes forma:

$$p(g) = \begin{cases} p_1(g), & \text{se } g \in \mathcal{G}, \\ p_2(g), & \text{se } g \in \mathcal{G}'. \end{cases} , \quad f(g) = \begin{cases} f_1(g), & \text{se } g \in \mathcal{G}, \\ f_2(g), & \text{se } g \in \mathcal{G}'. \end{cases}$$

$$id(X) = \begin{cases} id_1(X), \text{ se } X \in \mathcal{P}, \\ id_2(X), \text{ se } X \in \mathcal{P}'. \end{cases}, \quad m(g,h) = \begin{cases} m_1(g,h), \text{ se } g,h \in \mathcal{G}, \\ m_2(g,h), \text{ se } g,h \in \mathcal{G}', \\ \text{caso contrário, não está definido.} \end{cases}$$

$$S(g) = \begin{cases} S_1(g), \text{ se } g \in \mathcal{G}, \\ S_2(g), \text{ se } g \in \mathcal{G}'. \end{cases}$$

**Exemplo 1.1.39** A categoria produto cartesiano $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ é um grupóide com a aplicação $S : \mathcal{G} \times \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ dada por $S(g,h) = (S_1(g), S_2(h))$.

Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ um grupóide e definimos uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P}$ do seguinte modo: $X \sim Y$ se e somente se $\mathcal{G}(X,Y) \neq \phi$, para todo $X$, $Y \in \mathcal{P}$.

Dizemos que $\mathcal{G}$ é *conexo* se $X \sim Y$, para todo $X$, $Y$ em $\mathcal{P}$. Isto quer dizer que, para todo par de elementos $X$, $Y$ em $\mathcal{P}$ existe ao menos uma flecha de $X$ para $Y$. Se $X \sim Y$ implicar que $X = Y$, dizemos que $\mathcal{G}$ é um *feixe de grupos*. Equivalentemente, $p = f = id$ e, neste caso, $\mathcal{G} = \bigcup_{X \in \mathcal{P}} \mathcal{G}(X)$.

Sejam $Q$ um subconjunto de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{G}_Q$ o grupóide correspondente com base $Q$ ($\mathcal{G}_Q \rightrightarrows Q$), isto é, $\mathcal{G}_Q(X,Y) = \mathcal{G}(X,Y)$, para todo $X$, $Y$ em $Q$. Assim, $\mathcal{G}_Q$ é um grupóide conexo para toda classe de equivalência de $Q$.

**Proposição 1.1.40** *(a) Se $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é conexo, então $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}(X) \times \mathcal{P}^2$, onde $X$ é um elemento qualquer de $\mathcal{P}$.*

*(b) Se $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é um grupóide qualquer, então $\mathcal{G} \simeq \bigcup_{Q \in \mathcal{P}/\sim} \mathcal{G}_Q$.*

*Demonstração:*

Demonstraremos o item $(a)$, o item $(b)$ é imediato. Fixemos um objeto $X \in \mathcal{P}$. Como $\mathcal{G}$ é conexo, então para cada $Y \in \mathcal{P}$, escolhemos $\tau_Y \in \mathcal{G}(X,Y)$. Definimos $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}(X) \times \mathcal{P}^2$ dada por $\phi(g) = (\tau_U g \tau_V^{-1}, (U,V))$, onde $U = p(g)$ e $V = f(g)$. Verificamos que $\phi$ é um funtor. Sejam $(g,h) \in \mathcal{G}_f \times_p \mathcal{G}$ e $p(g) = U$, $f(h) = V$ e $f(g) = p(h) = T$, então

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= (\tau_U g h \tau_V^{-1}, (U,V)) = (\tau_U g \tau_T^{-1} \tau_T h \tau_V^{-1}, (U,T)(T,V)) \\ &= (\tau_U g \tau_T^{-1}, (U,T))(\tau_T h \tau_V^{-1}, (T,V)) \\ &= \phi(g)\phi(h). \end{aligned}$$

Agora, definimos $\psi : \mathcal{G}(X) \times \mathcal{P}^2 \longrightarrow \mathcal{G}$ por $\psi(g,(U,V)) = \tau_U^{-1} g \tau_V$. Facilmente, se verificam as igualdades $\phi\psi = Id_{\mathcal{G}(X) \times \mathcal{P}^2}$ e $\psi\phi = Id_{\mathcal{G}}$. Portanto, $\phi$ é um isomorfismo de grupóides.

□

**Definição 1.1.41** *Seja $\mathcal{G}$ um grupóide, então*

- *Um subgrupóide $\mathcal{H}$ é uma subcategoria tal que ela própria é um grupóide. Em outras palavras, $\mathcal{H}$ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{G}$ estável pela multiplicação e pelo inverso. A base de $\mathcal{H}$ são as identidades de seus elementos, isto é, o conjunto $\mathcal{P}' = \{p(g) : g \in \mathcal{H}\}$.*

- *Um subgrupóide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ cuja base é $\mathcal{P}$ é chamado subgrupóide amplo.*

## 1.2 Categorias Duplas

Uma *categoria dupla* é uma categoria interna na categoria *Cat*. Esta definição não nos premite fazer "cálculos", para isto apresentamos uma definição, que traduz esta definição de uma forma mais concreta.

**Definição 1.2.1** *Uma categoria dupla $\mathcal{T}$ consiste do seguintes dados:*

- *4 conjuntos não vazios: $\mathcal{B}$ (caixas), $\mathcal{H}$ (arestas horizontais), $\mathcal{V}$ (arestas verticais) e $\mathcal{P}$ (pontos);*

- *8 funções de fronteira: $t$, $b$: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H}$, $l$, $r$: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}$, $t$, $b$: $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P}$ e $l$, $r$: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}$;*

- *4 funções identidade: $id$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H}$, $id$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\boldsymbol{id}$: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\boldsymbol{id}$: $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{B}$;*

- *4 funções composição, todas denotadas por $m$:*

$$\mathcal{B}_b \times_t \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \text{ (composição vertical)}, \; \mathcal{B}_r \times_l \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \text{ (composição horizontal)},$$

$$\mathcal{H}_r \times_l \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ e } \mathcal{V}_b \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}.$$

Satisfazendo os seguintes axiomas:

**Axioma 0.** $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, t, b, \boldsymbol{id}, m)$, $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, l, r, \boldsymbol{id}, m)$, $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, l, r, id, m)$, $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, t, b, id, m)$ são categorias pequenas.

**Axioma 1.** Existem quatro identidades entre as oito possíveis funções de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{P}$, à saber,

$$tr = rt, \quad tl = lt, \quad bl = lb, \quad br = rb.$$

Este axioma nos permite descrever graficamente $A \in \mathcal{B}$ pela caixa

$$A = l \begin{array}{c} t \\ \boxed{\phantom{X}} \\ b \end{array} r,$$

onde $t(A) = t$, $b(A) = b$, $r(A) = r$, $l(A) = l$ e os quatro vértices da caixa representando $A$ são $tl(A)$, $tr(A)$, $bl(A)$ e $br(A)$.

Sejam $A$, $B$ em $\mathcal{B}$, escrevemos $A|B$ se $r(A) = l(B)$, deste modo $A$ e $B$ são componíveis horizontalmente e $\dfrac{A}{B}$ se $b(A) = t(B)$, sendo assim $A$ e $B$ são componíveis verticalmente.

**Notação:** $AB$ indicará a composição horizontal, enquanto que $\frac{A}{B}$ indicará a composição vertical, isto quando $A$ e $B$ forem componíveis apropriadamente.

**Axioma 2.** *Consistência das fronteiras com a composição*:

Sejam $A = l \begin{array}{c} t \\ \boxed{\phantom{X}} \\ b \end{array} r$ e $B = s \begin{array}{c} u \\ \boxed{\phantom{X}} \\ c \end{array} m$ em $\mathcal{B}$.

(1) Se $A|B$, então $AB = l \begin{array}{c} tu \\ \boxed{\phantom{X}} \\ bc \end{array} m$.

(2) Se $\dfrac{A}{B}$, então $\frac{A}{B} = ls \begin{array}{c} t \\ \boxed{\phantom{X}} \\ c \end{array} rm$.

Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ em $\mathcal{B}$, a notação $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$ indica que todos os produtos horizontais e verticais são permitidos. Tendo em vista o axioma 2, isto implica que $\dfrac{AB}{CD}$ e $\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \end{array}$.

**Axioma 3.** *Lei de intercâmbio entre as composições horizontais e verticais*:

Se $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$, então

$$\begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix} := \begin{matrix} \{AB\} \\ \{CD\} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix}.$$

**Axioma 4.** *Identidades horizontais e verticais*:

As funções identidades $\boldsymbol{id}: \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ (identidade vertical) e $\boldsymbol{id}: \mathcal{V} \to \mathcal{B}$ (identidade horizontal) satisfazem para quaisquer $x \in \mathcal{H}$ e $g \in \mathcal{V}$

$$\boldsymbol{id}\, x = \begin{array}{ccc} & x & \\ id\; l(x) & \boxed{\phantom{x}} & id\; r(x) \\ & x & \end{array} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{id}\, g = \begin{array}{ccc} & id\; t(g) & \\ g & \boxed{\phantom{x}} & g \\ & id\; b(g) & \end{array} .$$

**Axioma 5.** *Identidades horizontais e verticais de identidades de pontos*:

Se $P \in \mathcal{P}$, então $\boldsymbol{id}\ id_{\mathcal{H}}\ P = \boldsymbol{id}\ id_{\mathcal{V}}\ P$. Esta caixa será denotada por $\Theta_P$.

**Axioma 6.** *Compatibilidade das identidades com a composição de flechas*:

Se $g,\ h \in \mathcal{V},\ x,\ y \in \mathcal{H}$ são flechas componíveis, então $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\ g \\ \boldsymbol{id}\ h \end{Bmatrix} = \boldsymbol{id}\ gh$ e $\{\boldsymbol{id}\ x\ \boldsymbol{id}\ y\} = \boldsymbol{id}\ xy$.

**Observação 1.2.2** *Uma caixa $A$ em $\mathcal{B}$ não está, em geral, determinada por suas quatro funções de fronteira $t,\ b,\ r,\ l$. Ver Exemplo 1.2.4 mais adiante.*

A próxima proposição mostra que a definição anterior é equivalente a definição dada no início desta seção.

**Proposição 1.2.3** *As seguintes noções são equivalentes:*

*(a) Categoria interna em Cat.*

*(b) Categoria dupla.*

*Demonstração:*

Seja $\mathcal{T}$ uma categoria interna em *Cat*. Assim, $\mathcal{T}$ é uma coleção $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, t, b, id, m)$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ são objetos em *Cat*, isto é, são categorias pequenas e $t,\ b: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$, $id: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A}$, $m: \mathcal{A}_b \times_t \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ são funtores sujeitos aos axiomas da Definição 1.1.28.

Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ são categorias pequenas, podemos escrever $\mathcal{A} = (\mathcal{B},\ \mathcal{V},\ l,\ r,\ \boldsymbol{id},\ m)$ e $\mathcal{O} = (\mathcal{H},\ \mathcal{P},\ l,\ r,\ id,\ m)$, onde as aplicações $r,\ l,\ id,\ m$ em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{O}$ são, respectivamente,

$$l, r: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{id}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{e} \quad m: \mathcal{B}_r \times_l \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B},$$

$$l, r: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}, \quad id: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{e} \quad m: \mathcal{H}_r \times_l \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Além disso, os funtores $t,\ b,\ id$ e $m$ de $\mathcal{T}$ correspondem, respectivamente, as seguintes aplicações:

$$t, b: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{e} \quad t, b: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P};$$

$$\boldsymbol{id}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{e} \quad id: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V};$$

$$m : \mathcal{B}_b \times_t \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{e} \quad m : \mathcal{V}_b \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}.$$

Assim, temos todos os dados da Definição 1.2.1, basta verificar os sete axiomas.

Temos que $(\mathcal{B},\ \mathcal{V},\ l,\ r,\ \boldsymbol{id},\ m)$ e $(\mathcal{H},\ \mathcal{P},\ l,\ r,\ id,\ m)$ são categorias pequenas. Como $\mathcal{T}$ é uma categoria interna em *Cat*, os funtores $t,\ b,\ id$ e $m$ satisfazem a comutatividade dos diagramas da Definição 1.1.28 e, portanto, $(\mathcal{B},\mathcal{H},\ t,\ b,\ \boldsymbol{id},\ m)$ e $(\mathcal{V},\ \mathcal{P},\ t,\ b,\ id,\ m)$ são categorias pequenas.

Como $t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$ é um funtor então, pela Definição 1.1.32, temos que:

$$tl(A) = lt(A) \quad \text{e} \quad tr(A) = rt(A),$$

para todo $A \in \mathcal{B}$. Analogamente, $bl = lb$ e $br = rb$. Logo, o Axioma 1 é satisfeito.

Sejam $A : l(A) \longrightarrow r(A)$ e $B : l(B) \longrightarrow r(B)$ em $\mathcal{B}$, na categoria $\mathcal{A}$, componíveis, ou seja, $r(A) = l(B)$, então $A|B$. Temos que $AB : l(A) \longrightarrow r(B)$ em $\mathcal{A}$, o que implica $l(AB) = l(A)$ e $r(AB) = r(B)$. Pela funtorialidade de $t,\ b$ temos que $t(AB) = t(A)t(B)$ e $b(AB) = b(A)b(B)$. Disto segue a parte (1) do Axioma 2.

Agora, sejam $A : t(A) \longrightarrow b(A)$ e $B : t(B) \longrightarrow b(B)$ em $\mathcal{B}$, componíveis verticalmente, ou seja, $b(A) = t(B)$, então $\dfrac{A}{B}$. Assim, $\dfrac{A}{B} : t(A) \longrightarrow b(B)$, isso implica $t\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = t(A)$ e $b\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = b(A)$. Usando o fato de $m$ ser funtor temos que $m(l_b \times_t l) = lm$ e $m(r_b \times_t r) = rm$, pela Definição 1.1.32, e disto concluímos que $l\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = l(A)l(B)$ e $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = r(A)r(B)$. O que implica na parte (2) do Axioma 2.

Por $m$ ser funtor, pela Definição 1.1.32, temos que $m(m_b \times_t m) = m(m \times m)$. Sejam $A$, $B$, $C$ e $D \in \mathcal{B}$, com $r(A) = l(B)$, $r(C) = l(D)$, $b(A) = t(C)$ e $b(B) = t(D)$ e, ainda, $b(AB) = b(A)b(B) = t(C)t(D) = t(CD)$, logo

$$m(m \times m)((A,B),(C,D)) = m(AB,CD) = \begin{Bmatrix}AB\\CD\end{Bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$m(m_b \times_t m)((A,B),(C,D)) = m\begin{pmatrix}A & B\\ C, & D\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix}A\\C\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}B\\D\end{Bmatrix}.$$

Assim, segue o Axioma 3.

Sejam $g \in \mathcal{V}$ e $\boldsymbol{id}\ g \in \mathcal{B}$ na categoria $\mathcal{A}$. Por $t,\ b$ serem funtores, pela Definição 1.1.32, segue que,

$$t(\boldsymbol{id}\ g) = id\ t(g) \quad \text{e} \quad b(\boldsymbol{id}\ g) = id\ b(g).$$

Como $\boldsymbol{id}\ g \in \mathcal{B}$, na categoria $\mathcal{A}$, então $l(\boldsymbol{id}\ g) = g = r(\boldsymbol{id}\ g)$. Assim, é válida a identidade horizontal do Axioma 4. De maneira similar, usando a funtorialidade de

$id$, demonstra-se a identidade vertical no Axioma 4.

Por $id : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A}$ ser funtor, com aplicações $\boldsymbol{id} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $id_{\mathcal{V}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$. Pela Definição 1.1.32, temos $\boldsymbol{id}\, id_{\mathcal{H}}(P) = \boldsymbol{id}\, id_{\mathcal{V}}(P)$, para todo $P \in \mathcal{P}$, consequentemente o Axioma 5 é válido.

Por $m$ ser funtor é válido $m(\boldsymbol{id}_b \times_t \boldsymbol{id}) = \boldsymbol{id}\, m$. Assim, sejam $g$, $h \in \mathcal{V}$ componíveis, então

$$m(\boldsymbol{id}_b \times_t \boldsymbol{id})(g,h) = m(\boldsymbol{id}\ g, \boldsymbol{id}\ h) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\ g \\ \boldsymbol{id}\ h \end{Bmatrix}.$$

Por outro lado temos $\boldsymbol{id}\ m(g,h) = \boldsymbol{id}\ gh$, assim é válida a igualdade e verifica-se a primeira parte do Axioma 6. Pela funtorialidade de $id$ temos que é válido $id\ m = m(id \times id)$. Sejam $x$, $y \in \mathcal{H}$ componíveis, pelo mesmo raciocínio, temos que $\boldsymbol{id}\ xy = \{\boldsymbol{id}\ x\ \ \boldsymbol{id}\ y\}$. Daí segue o Axioma 6. Portanto, $\mathcal{T}$ é uma categoria dupla.

Reciprocamente, temos que todas as construções são inversíveis, ou seja, se consideramos uma categoria dupla, pelos mesmos argumentos concluímos que a mesma é uma categoria interna em $Cat$. Isto demonstra a proposição.

□

É habitual representar uma categoria dupla na forma das quatro categorias relacionadas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \mathcal{V} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{P}, \end{tikzcd}$$

sujeitas aos axiomas da Definição 1.1.28. De modo que as setas verticais,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \mathcal{V}, & \mathcal{P}, \end{tikzcd}$$

correspondem as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}$ de flechas e objetos, respectivamente, enquanto as flechas horizontais,

$$\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}\ , \qquad \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}\ ,$$

correspondem aos funtores $t$, $b$: $\mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{O}$.

**Exemplo 1.2.4** Se considerarmos $G$ um grupo abeliano, então temos a categoria dupla $\mathcal{T}$ associado a $G$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \{e_G\} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \{e_G\} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \{*\}, \end{tikzcd}$$

onde, $\{e_G\} \rightrightarrows \{*\}$ é a categoria associada ao subgrupo $\{e_G\}$ de $G$ e $G \rightrightarrows \{e_G\}$ é a categoria associada ao grupo $G$.

Observe que o fato de $G$ ser abeliano é fundamental, pois do Axioma 3 da Definição 1.2.1 obtemos $\begin{matrix}\{gh\}\\\{lk\}\end{matrix} = \left\{\begin{matrix}g\\l\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right\}$, para quaisquer $g$, $h$, $l$, $k \in G$. Como a composição é dada pela operação de $G$, isto é, equivalente a $ghlk = glhk$, para quaisquer $g$, $h$, $l$, $k \in G$. Consequentemente, é uma categoria dupla se e somente se $hl = lh$, para quaisquer $h$, $l \in G$. Note que, neste caso todos os elementos $g \in G$ são representados da forma

$$\begin{array}{ccc} & e_G & \\ e_G & \square & e_G. \\ & e_G & \end{array}$$

**Observação 1.2.5** *A transposta de uma categoria dupla $\mathcal{T}$ é a categoria dupla $\mathcal{T}^t$ com as mesmas caixas e mesmos pontos, mas trocando os papéis das categorias horizontais e verticais, ou seja, $\mathcal{H}^t := \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^t := \mathcal{H}$. Uma caixa $A \in \mathcal{B}$ é denotada por $A^t$ quando considerada em $\mathcal{T}^t$.*

- *A categoria $\mathcal{V}^t \rightrightarrows \mathcal{P}^t$ coincide com a categoria $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e a $\mathcal{H}^t \rightrightarrows \mathcal{P}^t$ com a categoria $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$.*

- *$\mathcal{B}^t \rightrightarrows \mathcal{H}^t$ é a categoria onde as flechas são as caixas em $\mathcal{T}$ e os objetos são os morfismos verticais. As aplicações $t^t$, $b^t$: $\mathcal{B}^t \longrightarrow \mathcal{H}^t$ são definidas por $t^t := l$ e $b^t := r$, onde $l$, $r$: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}$ em $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{id}^t := \boldsymbol{id}$ e a composição é definida por $\begin{matrix}A^t\\B^t\end{matrix} := (AB)^t$.*

- *$\mathcal{B}^t \rightrightarrows \mathcal{V}^t$ é a categoria onde as flechas são as caixas em $\mathcal{T}$ e os objetos são os morfismos horizontais. As aplicações $l^t$, $r^t$: $\mathcal{B}^t \longrightarrow \mathcal{V}^t$ são definidas por $l^t := t$ e $r^t := b$, onde $t$, $b$: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H}$ em $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{id}^t := \boldsymbol{id}$ e a composição é definida por $A^tB^t := \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}^t$.*

Um exemplo importante de categoria dupla, é a categoria dupla construída a partir de um par combinado de grupos. Para podermos apresentar esse exemplo, necessitamos primeiro introduzir algumas definições.

**Definição 1.2.6** *Uma ação à esquerda de um grupo $G$ sobre um conjunto não vazio $X$ é uma função $\triangleright$: $G \times X \longrightarrow X$, a qual para cada par $(g, x) \in G \times X$ associa $g \triangleright x$, satisfazendo:*

1. *$g \triangleright (h \triangleright x) = gh \triangleright x$, para todo $g$, $h \in G$ e $x \in X$;*

2. *$e_G \triangleright x = x$, para todo $x \in X$.*

De maneira análoga se define ação à direita.

**Definição 1.2.7** *Sejam $F$ e $G$ dois grupos finitos juntamente com um ação à direita $\triangleleft: G \times F \longrightarrow G$ de $F$ sobre o conjunto $G$ e uma ação à esquerda $\triangleright: G \times F \longrightarrow F$ de $G$ sobre o conjunto $F$. Dizemos que a coleção $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ é um par combinado de grupos finitos se são satisfeitas as seguintes condições, para todo $g$, $h \in G$ e $x$, $y \in F$:*

1. $g \triangleright xy = (g \triangleright x)((g \triangleleft x) \triangleright y)$;

2. $gh \triangleleft x = (g \triangleleft (h \triangleright x))(h \triangleleft x)$.

**Exemplo 1.2.8** Seja $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupos finitos. Então temos a seguinte categoria dupla,

$$\begin{tikzcd}
G \times F \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
F \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \{*\},
\end{tikzcd}$$

definida por:

- $F \rightrightarrows \{*\}$ e $G \rightrightarrows \{*\}$ são categorias associadas as estruturas dos grupos $F$ e $G$, respectivamente, como no Exemplo 1.1.4.

- $G \times F \rightrightarrows G$, é uma categoria cujos objetos são os elementos de $G$ e as flechas são os elementos de $G \times F$. As aplicações $t$, $b$ são definidas da seguinte maneira:

$$b \ := \triangleleft: G \times F \longrightarrow G, \quad t := \pi_1 : G \times F \longrightarrow G.$$

A composição $m : (G \times F)_b \times_t (G \times F) \longrightarrow G \times F$ e a identidade $\boldsymbol{id}: G \longrightarrow G \times F$, são determinadas, respectivamente, por

$$(g, x).(h, y) = (g, xy), \quad id(g) = (g, e_F),$$

para todo $g$, $h \in G$, $x$, $y \in F$, tais que $g \triangleleft x = h$.

- $G \times F \rightrightarrows F$, é uma categoria cujos objetos são os elementos de $F$ e as flechas são os elementos de $G \times F$. As aplicações $l$, $r$ são definidas da seguinte maneira:

$$l \ := \triangleright: G \times F \longrightarrow F, \quad r := \pi_2 : G \times F \longrightarrow F.$$

A composição $m : (G \times F)_r \times_l (G \times F) \longrightarrow G \times F$ e a identidade $\boldsymbol{id}: G \longrightarrow G \times F$, são determinadas, respectivamente, por

$$(g, x).(h, y) = (gh, y), \quad id(x) = (e_G, x),$$

para todo $g$, $h \in G$, $x$, $y \in F$, tais que $h \triangleright y = x$.

**Observação 1.2.9** *Neste exemplo de categoria dupla, um elemento* $A = (g,x) \in G \times F$ *é representado da seguinte forma* $A = g \triangleright x \underset{g \triangleleft x}{\overset{g}{\boxed{\phantom{xx}}}} x$, *onde é o único elemento de* $G \times F$ *satisfazendo* $t(g,x) = g$ *e* $r(g,x) = x$. *Observe que o fato de ser par combinado de grupos é fundamental, para verificar o Axioma 2 da Definição 1.2.1. De fato, sejam* $A = (g,x)$ *e* $B = (h,y)$ *tais que* $x = h \triangleright y$, *então* $A$ *e* $B$ *são representados de maneira única por* $A = g \triangleright x \underset{g \triangleleft x}{\overset{g}{\boxed{\phantom{xx}}}} x$, $B = h \triangleright y \underset{h \triangleleft y}{\overset{h}{\boxed{\phantom{xx}}}} y$, *pelo Axioma 2 devemos ter*

$$AB = \quad g \triangleright x \underset{(g \triangleleft x)(h \triangleleft y)}{\overset{gh}{\boxed{\phantom{xxxx}}}} y \quad = g \triangleright (h \triangleright y) \underset{(g \triangleleft (h \triangleright y))(h \triangleleft y)}{\overset{gh}{\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxx}}}} y.$$

*Entretanto, o elemento* $C = (gh, y)$ *é unicamente representado por* $C = gh \triangleright y \underset{gh \triangleleft y}{\overset{gh}{\boxed{\phantom{xx}}}} y$. *Assim, é válida a composição horizontal no Axioma 2, se e somente se* $\triangleright$ *é ação e é par combinado de grupos. Da mesma forma, é válida a composição vertical no axioma 2 se e somente se* $\triangleleft$ *é ação e é par combinado de grupos.*

**Exemplo 1.2.10** Seja $\mathcal{C}$ um categoria pequena. Definimos a categoria dupla, denotada por $\mathbb{QD}(\mathcal{C})$, onde as caixas são representadas pelos quadros

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, "y"'] & W
\end{tikzcd}$$

tais que $xg = fy$. Os elementos de $\mathcal{P}$ são os objetos de $\mathcal{C}$ e os elementos de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{V}$ são as flechas em $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ são as categorias onde os objetos são os objetos de $\mathcal{C}$ e as flechas são os morfismos entre objetos de $\mathcal{C}$. As aplicações $l$, $r$, $t$, $b$, $id$ e $m$ são as naturais.

- $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é a categoria onde os objetos são os morfismos em $\mathcal{C}$ e as flechas são quadros comutativos. As aplicações $t$, $b$, $\boldsymbol{id}$ são as naturais e a composição é definida da seguinte forma: sejam $A$ e $B$ dois quadros comutativos, onde

$b(A) = t(B)$, então $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$ é dada por

$$A = \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "y"'] & W \end{tikzcd} ,B = \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "a"'] & W \arrow[d, "b"] \\ R \arrow[r, "c"'] & S \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "fa"'] & Y \arrow[d, "gb"] \\ R \arrow[r, "c"'] & S \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ é a categoria onde os objetos são os morfismos em $\mathcal{C}$ e as flechas são quadros comutativos. As aplicações $l$, $r$, $\boldsymbol{id}$ são as naturais e a composição é definida da seguinte forma: sejam $A$ e $B$ dois quadros comutativos, onde $r(A) = l(B)$, então $AB$ é dada por

$$A = \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "y"'] & W \end{tikzcd} ,B = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[d, "c"] \\ W \arrow[r, "b"'] & S \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "xa"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "c"] \\ Z \arrow[r, "yb"'] & S \end{tikzcd}$$

### 1.2.1 Propriedades de categorias duplas

Agora apresentaremos algumas propriedades básicas para categorias duplas em geral e introduziremos alguns termos que serão utilizados mais adiante no trabalho. Para um elemento $A \in \mathcal{B}$, usaremos a notação $A^h$, (respectivamente, $A^v$) para a inversa horizontal (respectivamente, vertical) de $A$, desde que existam. Estas são definidas, respectivamente, pelas relações:

$$AA^h = \boldsymbol{id}\, l(A), \quad A^hA = \boldsymbol{id}\, r(A), \quad \begin{matrix}A\\A^v\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, t(A) \quad \text{e} \quad \begin{matrix}A^v\\A\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, b(A).$$

Nos resultados seguintes apresentamos algumas relações entre os inversos em $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ e $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ com $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$.

**Lema 1.2.11** *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria dupla e $A \in \mathcal{B}$. Suponha que $A = l \underset{b}{\overset{t}{\boxed{\phantom{X}}}} r$ é inversível com respeito a composição horizontal. Então $t = t(A)$, $b = b(A)$ são* *inversíveis em $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e temos*

$$A^h = r \underset{b^{-1}}{\overset{t^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}} l\,.$$

*Analogamente, se $A$ é inversível com respeito a composição vertical, então $l = l(A)$, $r = r(A)$ são inversíveis em $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e temos*

$$A^v = l^{-1} \underset{t}{\overset{b}{\boxed{\phantom{x}}}} r^{-1}.$$

*Demonstração:*

Seja $A = l \underset{b}{\overset{t}{\boxed{\phantom{x}}}} r$ em $\mathcal{B}$. Primeiramente, suponhamos que $A$ seja inversível com relação a composição horizontal, então existe $A^h = x \underset{v}{\overset{u}{\boxed{\phantom{x}}}} y$, tal que $AA^h = \boldsymbol{id}\, l(A)$ e $A^h A = \boldsymbol{id}\, r(A)$. Como $A$ e $A^h$ são componíveis, temos que $r = r(A) = l(A^h) = x$ e $y = l(A) = r(A^h) = l$.

Agora, pelo Axioma 2 da Definição 1.2.1, temos $AA^h = l \underset{bv}{\overset{tu}{\boxed{\phantom{x}}}} l$ e $A^h A = r \underset{vb}{\overset{ut}{\boxed{\phantom{x}}}} r$.

Mas por hipótese, sabemos que

$$AA^h = \boldsymbol{id}\, l(A) = \quad l \underset{id\ b(l)}{\overset{id\ t(l)}{\boxed{\phantom{x}}}} l \qquad \text{e} \qquad A^h A = \boldsymbol{id}\, r(A) = \quad r \underset{id\ b(r)}{\overset{id\ t(r)}{\boxed{\phantom{x}}}} r \quad .$$

Assim,

$$tu = id\ t(l) \quad \text{e} \quad ut = id\ t(r),$$

$$bv = id\ b(l) \quad \text{e} \quad vb = id\ b(r).$$

Consequentemente, $t$ e $b$ são inversíveis, com $t^{-1} = u$ e $b^{-1} = v$. Portanto,

$$A^h = r \underset{b^{-1}}{\overset{t^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}} l.$$

Analogamente, mostra-se a outra parte do lema.

$\square$

**Lema 1.2.12** *Seja $\mathcal{T}$ uma categoria dupla. Então,*

*(a) Se $g \in \mathcal{V}$ é inversível, então $\boldsymbol{id}\ g$ é verticalmente inversível e $(\boldsymbol{id}\ g)^v = \boldsymbol{id}\ g^{-1}$.*

*(b) Se $x \in \mathcal{H}$ é inversível, então $\boldsymbol{id}\ x$ é horizontalmente inversível e $(\boldsymbol{id}\ x)^h = \boldsymbol{id}\ x^{-1}$.*

*Demonstração:*

($a$) Seja $g \in \mathcal{V}$ inversível, então existe $g^{-1} \in \mathcal{V}$, tal que $gg^{-1} = id\ t(g) = id\ b(g^{-1})$ e $g^{-1}g = id\ b(g) = id\ t(g^{-1})$. Pelo Axioma 4 da Definição 1.2.1, temos que

$$\boldsymbol{id}\ g = \begin{array}{ccc} & id\ t(g) & \\ g & \square & g \\ & id\ b(g) & \end{array}, \qquad \boldsymbol{id}\ g^{-1} = \begin{array}{ccc} & id\ t(g^{-1}) & \\ g^{-1} & \square & g^{-1} \\ & id\ b(g^{-1}) & \end{array}.$$

Como $b(\boldsymbol{id}\ g) = id\ b(g) = id\ t(g^{-1}) = t(\boldsymbol{id}\ g^{-1})$ e $t(\boldsymbol{id}\ g) = id\ t(g) = id\ b(g^{-1}) = b(\boldsymbol{id}\ g^{-1})$, então $\boldsymbol{id}\ g$ e $\boldsymbol{id}\ g^{-1}$ são componíveis verticalmente.

Pelos Axiomas 5 e 6 da Definição 1.2.1, obtemos

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\ g \\ \boldsymbol{id}\ g^{-1} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{id}\ gg^{-1} = \boldsymbol{id}\ id\ t(g) = \boldsymbol{id}\ t(\boldsymbol{id}\ g),$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\ g^{-1} \\ \boldsymbol{id}\ g \end{Bmatrix} = \boldsymbol{id}\ g^{-1}g = \boldsymbol{id}\ id\ b(g) = \boldsymbol{id}\ b(\boldsymbol{id}\ g).$$

Pela unicidade do inverso segue que $(\boldsymbol{id}\ g)^v = \boldsymbol{id}\ g^{-1}$. Seguindo o mesmo raciocínio, demonstra-se o item ($b$).

$\square$

**Lema 1.2.13** *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria dupla e $X$, $R \in \mathcal{B}$.*

*(a) Suponha que $\dfrac{X}{R}$ e que $X$, $R$ são inversíveis horizontalmente. Então, $\dfrac{X}{R}$ é inversível horizontalmente, $\dfrac{X^h}{R^h}$ e $\dfrac{X^h}{R^h} = \begin{Bmatrix} X \\ R \end{Bmatrix}^h$.*

*(b) Suponha que $X|R$ e que $X$, $R$ são inversíveis verticalmente. Então, $XR$ é inversível verticalmente, $X^v|R^v$ e $X^vR^v = \{XR\}^v$.*

*Demonstração:*

($a$) Sejam $X$ e $R$ em $\mathcal{B}$ tais que $\dfrac{X}{R}$ e, ainda, $X$ e $R$ inversíveis horizontalmente. Como $X$ e $R$ são componíveis verticalmente então $b(X) = t(R)$. Além disso, pelo Lema 1.2.11, sabemos que $b(X^h) = b(X)^{-1}$ e $t(R^h) = t(R)^{-1}$, consequentemente, $t(R^h) = b(X^h)$ e $\dfrac{X^h}{R^h}$.

Finalmente, pelo Axioma 3 da Definição 1.2.1, obtemos

$$\left\{\begin{matrix} X \\ R \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} X^h \\ R^h \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} XX^h \\ RR^h \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{id}\, l(X) \\ \boldsymbol{id}\, l(R) \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{id}\, l \left\{\begin{matrix} X \\ R \end{matrix}\right\}, \text{ e}$$

$$\left\{\begin{matrix} X^h \\ R^h \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} X \\ R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} X^hX \\ R^hR \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{id}\, r(X) \\ \boldsymbol{id}\, r(R) \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{id}\, r \left\{\begin{matrix} X \\ R \end{matrix}\right\}.$$

Logo, $\dfrac{X^h}{R^h} = \left\{\begin{matrix} X \\ R \end{matrix}\right\}^h$. Do mesmo modo, demonstra-se o item $(b)$.

$\square$

**Lema 1.2.14** *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria duplo e $A \in \mathcal{B}$ inversível horizontalmente e verticalmente. Além disso, suponha que $A^h$ é verticalmente inversível e $A^v$ é horizontalmente inversível. Então, $(A^h)^v = (A^v)^h$.*

*Demonstração:*

Seja $A \in \mathcal{B}$ inversível tanto horizontalmente como verticalmente, existem $A^h$ e $A^v$. Ainda, como $A^h$ é verticalmente inversível existe $(A^h)^v$ e, analogamente, como $A^v$ é horizontalmente inversível existe $(A^v)^h$.

Assim, temos que $\begin{array}{c|c} (A^v)^h & A^v \\ \hline A^h & A \end{array}$ e também $\begin{array}{c|c} (A^h)^v & A^v \\ \hline A^h & A \end{array}$. De fato, as composições $A^h|A$, $\dfrac{A^v}{A}$, $(A^v)^h|A^v$ e $\dfrac{(A^h)^v}{A^h}$ estão bem definidas. Basta verificar se as composições $(A^h)^v|A^v$ e $\dfrac{(A^v)^h}{A^h}$ fazem sentido.

De fato,

$$t(A^h) = t(A)^{-1} = b(A^v)^{-1} = b((A^v)^h) \text{ e } \; l(A^v) = l(A)^{-1} = r(A^h)^{-1} = r((A^h)^v).$$

Agora, usando o Axioma 3 da Definição 1.2.1 temos que

$$\left\{\begin{matrix} (A^v)^h \\ A^h \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} A^v \\ A \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \{(A^v)^hA^v\} \\ \{A^hA\} \end{matrix} = \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, r(A)^{-1} \\ \boldsymbol{id}\, r(A) \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, (r(A)^{-1}r(A)) = \Theta_{br(A)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{matrix} \{(A^h)^vA^v\} \\ \{A^hA\} \end{matrix} = \left\{\begin{matrix} (A^h)^v \\ A^h \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} A^v \\ A \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{id}\, b(A)^{-1}\boldsymbol{id}\, b(A) = \boldsymbol{id}\, (b(A)^{-1}b(A)) = \Theta_{rb(A)}.$$

Assim, concluímos que $\begin{matrix}(A^v)^h & A^v\\ A^h & A\end{matrix} = \begin{matrix}(A^h)^v & A^v\\ A^h & A\end{matrix}$, o que implica em

$$\begin{Bmatrix}(A^v)^h\\ A^h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}A^v\\ A\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}(A^h)^v\\ A^h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}A^v\\ A\end{Bmatrix}.$$

Como $\begin{matrix}A^v\\ A\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, b(A)$, então $\begin{Bmatrix}(A^v)^h\\ A^h\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}(A^h)^v\\ A^h\end{Bmatrix}$ e do fato de $A^h$ ser inversível verticalmente segue a identidade, $(A^h)^v = (A^v)^h$.

□

Denotaremos $A^{-1} := (A^h)^v = (A^v)^h$. Assim, $A^{-1} = r^{-1} \begin{matrix} b^{-1} \\ \boxed{\phantom{X}} \\ t^{-1}\end{matrix} l^{-1}$.

## 1.3 Grupóides Duplos

Um *grupóide interno* em $\mathcal{C}$ é uma categoria interna munida com uma aplicação $S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ que satisfaz a comutatividade dos diagramas da Definição 1.1.33. Um *grupóide duplo* é um grupóide interno na subcategoria cheia *Grp* de *Cat*.

Um grupóide duplo é uma categoria dupla de tal forma que todas as quatro categorias que a compõe são grupóides. Na próxima proposição, demonstramos que é necessário e suficiente que apenas as categorias $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ e $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ sejam grupóides para uma categoria dupla ser grupóide duplo.

**Proposição 1.3.1** *Uma categoria dupla é um grupóide duplo se e somente se as categorias $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ e $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ são grupóides.*

*Demonstração:*

Seja $\mathcal{T}$ uma categoria dupla tal que $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ e $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ são grupóides. Basta mostrar que $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ são grupóides.

Seja $x \in \mathcal{H}$, podemos considerar $\boldsymbol{id}\, x$ em $\mathcal{B}$. Usando o fato de $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ ser grupóide, então $\boldsymbol{id}\, x$ é inversível com relação a composição horizontal. Pelo Lema 1.2.11, segue que $x$ é inversível e, consequentemente, $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é um grupóide. Analogamente, $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é um grupóide. Portanto, $\mathcal{T}$ é grupóide duplo. A recíproca é imediata.

□

**Observação 1.3.2** *O transposto de um grupóide duplo é um grupóide duplo.*

**Exemplo 1.3.3** Consideremos o Exemplo 1.2.8. Esse é um exemplo de grupóide duplo, onde $F \rightrightarrows \{*\}$ e $G \rightrightarrows \{*\}$ são grupóides associados as estruturas dos grupos $F$ e $G$, respectivamente, ver Exemplo 1.1.35. A categoria $G \times F \rightrightarrows G$, é um grupóide com $S : G \times F \longrightarrow G \times F$ definida por $S(g,x) = (g \triangleleft x, x^{-1})$. Além disso, $G \times F \rightrightarrows F$, é um grupóide com $S : G \times F \longrightarrow G \times F$ definida por $S(g,x) = (g^{-1}, g \triangleright x)$.

Agora apresentamos alguns resultados técnicos para grupóides duplos.

**Lema 1.3.4** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo, e sejam $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $A|B|C$ e $ABC = \boldsymbol{id}\; t(ABC)$.*

*(b) Existem únicos $U$, $V \in \mathcal{B}$ tais que*

$$\begin{array}{c|c|c} A & U & \\ \hline & V & C \end{array}, \quad \begin{array}{c} U \\ V \end{array} = B, \quad AU = \boldsymbol{id}\; t(AU) \quad e \quad VC = \boldsymbol{id}\; t(VC).$$

*Além disso, temos que* $\begin{array}{c|c|c} A & U & \boldsymbol{id}\; t(C) \\ \hline \boldsymbol{id}\; b(A) & V & C \end{array}$.

*(c) Existem únicos $W$, $Z \in \mathcal{B}$ tais que*

$$\begin{array}{c|c|c} & W & C \\ \hline A & Z & \end{array}, \quad \begin{array}{c} W \\ Z \end{array} = B, \quad AZ = \boldsymbol{id}\; t(AZ) \quad e \quad WC = \boldsymbol{id}\; t(WC).$$

*Além disso, temos que* $\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{id}\; t(A) & W & C \\ \hline A & Z & \boldsymbol{id}\; b(C) \end{array}$.

*Demonstração:*

Inicialmente, mostraremos que as afirmações $(a)$ e $(b)$ são equivalentes. Suponhamos que $ABC = \boldsymbol{id}\; t(ABC)$, então $l(A) = l(ABC) = l(\boldsymbol{id}\; t(ABC)) = id\; lt(ABC) = id\; tl(ABC) = id\; tl(AB) = id\; lt(AB)$. Seja $x = t(A)t(B) \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo existe $A^h \in \mathcal{B}$, o inverso de A com relação a composição horizontal. Observemos que

$$r(A^h) = l(A) = id\; lt(AB) = id\; l(t(A)t(B)) = id\; l(x) = l(\boldsymbol{id}\; x)$$

e disto implica que $A^h | \boldsymbol{id}\; x$. Assim, definimos $U := A^h \boldsymbol{id}\; x$ e $V := \begin{array}{c} U^v \\ B \end{array}$.

Note que $V$ está bem definida, pois

$$b(U^v) = t(U) = t(A^h \boldsymbol{id}\; x) = t(A^h)x = t(A)^{-1}t(A)t(B) = t(B).$$

Agora, verifiquemos se $U$ e $V$, definidas desta forma, satisfazem as condições requeridas. Claramente, temos que $\dfrac{U}{V} = B$. Pela definição de $U$ temos que $AU = \boldsymbol{id}\, x = \boldsymbol{id}\,(t(A)t(B)) = \boldsymbol{id}\,(t(A)t(U)) = \boldsymbol{id}\, t(AU)$. Observemos que

$$\begin{aligned} r(V) &= r(U^v)r(B) = r((A^h\boldsymbol{id}\, x)^v)r(B) = r((A^h)^v(\boldsymbol{id}\, x)^v)r(B) \\ &= r(A^{-1}\boldsymbol{id}\, x)r(B) = r(\boldsymbol{id}\, x)r(B) = (id\; r(x))r(B) = r(B) = l(C). \end{aligned}$$

Logo, $V|C$, então $VC$. Basta mostrar que $VC = \boldsymbol{id}\, t(VC)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} r(U) &= r(A^v\boldsymbol{id}\, x) = id\; r(x) = id\; r(t(A)t(B)) = id\; rt(B) \\ &= id\; tr(B) = id\; tl(C) = id\; lt(C) = l(\boldsymbol{id}\, t(C)). \end{aligned}$$

Desta forma, $U|\boldsymbol{id}\, t(C)$. Além disso,

$$\begin{aligned} l(V) &= l\begin{pmatrix} U^v \\ B \end{pmatrix} = l(U^v)l(B) = l((A^h\boldsymbol{id}\, x)^v)l(B) = l((A^h)^v(\boldsymbol{id}\, x)^v)l(B) \\ &= l(A^{-1}\boldsymbol{id}\, x)l(B) = l(A^{-1})l(B) = r(A)^{-1}l(B) = r(A)^{-1}r(A) \\ &= id\; br(A) = id\; rb(A) = r(\boldsymbol{id}\, b(A)). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\boldsymbol{id}\, b(A)|V$. E assim, temos $\begin{array}{c|c|c} A & U & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \hline \boldsymbol{id}\, b(A) & V & C \end{array}$.

Observe que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{id}\, t(ABC) &= ABC = \begin{Bmatrix} A & U & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) & V & C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AU & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) & VC \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\, t(AU) & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) & VC \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\, t(AB) & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) & VC \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Disto temos que $b(A) = t(AB)$ e $t(VC) = t(C)$. Além disso, pelo Axioma 6 da definição 1.2.1, temos que $\boldsymbol{id}\, t(ABC) = \{\boldsymbol{id}\, t(AB)\boldsymbol{id}\, t(C)\} = \{\boldsymbol{id}\, t(AB)\boldsymbol{id}\, t(VC)\}$. Assim,

$$\{\boldsymbol{id}\, t(AB)\boldsymbol{id}\, t(VC)\} = \{\boldsymbol{id}\, t(AB)\}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\, t(VC) \\ VC \end{Bmatrix}.$$

Logo, concluímos que $VC = \boldsymbol{id}\, t(VC)$.

Agora, sejam $U'$ e $V'$ em $\mathcal{B}$ que também satisfazem as condições de $(b)$, logo temos que $B = \dfrac{U}{V} = \dfrac{U'}{V'}$. Mostremos que $U = U'$ e, consequentemente, $V = V'$.

Notemos que $t(B) = t(U) = t(U')$, assim da condição $AU = \boldsymbol{id}\, t(AU) = \boldsymbol{id}\, t(AB)$

e $AU' = \boldsymbol{id}\ t(AU') = \boldsymbol{id}\ t(AB)$, segue que $AU = AU'$ e por $\mathcal{T}$ ser grupóide duplo implica que $U = U'$.

Reciprocamente, de $B = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$ e $A|U$, temos que $l(B) = l\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = l(U)l(V) = r(A)l(V)$. Da condição $VC = \boldsymbol{id}\ t(VC)$ concluímos que $l(V) = id\ lt(VC)$, então $l(B) = r(A)l(V) = r(A)(id\ lt(VC)) = r(A)$, logo $A|B$. Além disso, temos que $V|C$, $AU = \boldsymbol{id}\ t(AU)$ e $r(B) = r(U)r(V)$, então $r(V) = l(C)$ e $r(U) = id\ rt(AU)$, assim $r(B) = r(U)r(V) = id\ rt(AU)l(C) = l(C)$, então $B|C$ e concluímos que $A|B|C$. Falta verificar a igualdade $ABC = \boldsymbol{id}\ t(ABC)$.

Por hipótese, $B = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$ e sabemos que $A = \begin{matrix} A \\ \boldsymbol{id}\, b(A) \end{matrix}$ e $C = \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(C) \\ C \end{matrix}$. Assim, usando o Axioma 3 da Definição 1.2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
ABC &= \begin{Bmatrix} A & U & \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) & V & C \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} A \\ \boldsymbol{id}\, b(A) \end{matrix} \ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(C) \\ C \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(AU) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) \end{matrix} \ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, t(VC) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(AB) \\ \boldsymbol{id}\, b(A) \end{matrix} \ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, t(BC) \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(AB) \\ \boldsymbol{id}\, t(AB) \end{matrix} \ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(C) \\ \boldsymbol{id}\, t(C) \end{matrix} \right\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{id}\, t(AB)t(C) \\ \boldsymbol{id}\, t(AB)t(C) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{id}\, t(ABC).
\end{aligned}
$$

Onde a quinta igualdade se deve a $\dfrac{\boldsymbol{id}\ t(AB)}{\boldsymbol{id}\ b(A)}$ implica $t(AB) = b(A)$ e $\dfrac{\boldsymbol{id}\ t(C)}{\boldsymbol{id}\ t(BC)}$ implica $t(C) = t(BC)$.

Para a demonstrar que $(a)$ é equivalente a $(c)$, basta definir $W := \boldsymbol{id}\ yC^h$ e $Z := \begin{matrix} W^v \\ B \end{matrix}$, onde $y = t(B)t(C) \in \mathcal{H}$, e o resultado segue de maneira análoga.

□

O lema seguinte é o dual do lema anterior.

**Lema 1.3.5** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo, e sejam $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

*(a)* $\dfrac{\dfrac{A}{B}}{C}$ e $\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\ \ l\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

*(b) Existem únicos $U$, $V \in \mathcal{B}$ tais que*

$$
\begin{array}{c|c} A & \\ \hline U & V \\ \hline & C \end{array}, \quad UV = B, \quad \begin{matrix} A \\ U \end{matrix} = \boldsymbol{id}\ l\begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{matrix} V \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\ l\begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix}.
$$

*Além disso, temos que* $\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{id}\, r(A) \\ \hline U & V \\ \hline \boldsymbol{id}\, l(C) & C \end{array}$ .

*(c) Existem únicos* $W,\ Z \in \mathcal{B}$ *tais que*

$$\begin{array}{c|c} & A \\ \hline W & Z \\ \hline C & \end{array}, \quad WZ = B, \quad \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{matrix} W \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l \begin{pmatrix} W \\ C \end{pmatrix}.$$

*Além disso, temos que* $\begin{array}{c|c} \boldsymbol{id}\, l(A) & A \\ \hline W & Z \\ \hline C & \boldsymbol{id}\, r(C) \end{array}$ .

*Demonstração:*

A demonstração é análoga à do lema anterior.

□

**Lema 1.3.6** *As seguintes propriedades são válidas em um grupóide duplo* $\mathcal{T}$.

*(a) Sejam* $A,\ X,\ Y,\ Z \in \mathcal{B}$ *tais que*

$$\begin{array}{c|c|c} & X^{-1} & \\ \hline X & Y & Z \\ \hline & Z^{-1} & \end{array} \tag{1.1}$$

*Então as seguintes condições são equivalentes:*

$$XYZ = A. \tag{1.2}$$

$$\left\{\begin{matrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{matrix}\right\} = A^{-1}. \tag{1.3}$$

*(b) A coleção* $X = A = Z,\ Y = A^h$ *satisfaz (1.1), (1.2) e (1.3).*

*Demonstração:*

$(a)$ Suponhamos que $XYZ = A$, então $b(A) = b(XYZ) = b(X)b(Y)b(Z)$. Por (1.1) temos que $b(Y) = t(Z^{-1}) = b(Z)^{-1}$, de onde segue que $b(A) = b(X)b(Y)b(Z) = b(X)b(Z)^{-1}b(Z) = b(X)$. Mais ainda, como $b(A) = t(A^v)$ então $b(X) = t(A^v)$ e concluímos que $\dfrac{X}{A^v}$.

Analogamente, por hipótese, $t(A) = t(XYZ) = t(X)t(Y)t(Z)$, mas por (1.1) sabemos que $t(Y) = b(X^{-1}) = t(X)^{-1}$, assim $t(A) = t(X)t(Y)t(Z) = t(X)t(X)^{-1}t(Z) = t(Z)$. Mais ainda, $t(A) = b(A^v)$, implicando que $t(Z) = b(A^v)$. Logo, $\dfrac{A^v}{Z}$.

Além disso, temos $r(X^{-1}) = l(X)^{-1}$, mas por (1.2), temos $l(X) = l(A)$. Logo $r(X^{-1}) = l(A)^{-1} = l(A^v)$, o que implica $X^{-1}|A^v$. Do mesmo modo, $l(Z^{-1}) = r(Z)^{-1}$, mas por (1.2), temos $r(Z) = r(A)$. Logo, $l(Z^{-1}) = r(A)^{-1} = r(A^v)$, o que implica $A^v|Z^{-1}$. Portanto, temos

$$\begin{array}{c|c|c} X^v & X^{-1} & A^v \\ \hline X & Y & Z \\ \hline A^v & Z^{-1} & Z^v \end{array}$$

Agora utilizando o Axioma 3 da Definição 1.2.1 de dois modos distintos, obtemos

$$\begin{Bmatrix} X^v & X^{-1} & A^v \\ X & Y & Z \\ A^v & Z^{-1} & Z^v \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \{ & X^v & X^{-1} & A^v & \} \\ \{ & X & Y & Z & \} \\ \{ & A^v & Z^{-1} & Z^v & \} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} A^v \\ A \\ A^v \end{Bmatrix} = A^v.$$

$$\begin{Bmatrix} X^v & X^{-1} & A^v \\ X & Y & Z \\ A^v & Z^{-1} & Z^v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^v \\ X \\ A^v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A^v \\ Z \\ Z^v \end{Bmatrix} = A^v \begin{Bmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{Bmatrix} A^v.$$

Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo, então $A^{-1}A^v = (A^v)^h A^v = \boldsymbol{id}\, r(A^v) = \boldsymbol{id}\, r(A)^{-1}$. Assim, $A^v = A^v \begin{Bmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{Bmatrix} A^v$ implica em $A^{-1} = \begin{Bmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{Bmatrix}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\begin{Bmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{Bmatrix} = A^{-1}$, então $r(A^{-1}) = r\begin{pmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{pmatrix} = r(X^{-1})r(Y)r(Z^{-1})$. Por (1.1), temos que $r(Y) = l(Z) = r(Z)^{-1}$, assim $r(A^{-1}) = r(X^{-1})r(Y)r(Z^{-1}) = r(X^{-1})r(Z^{-1})^{-1}r(Z^{-1}) = r(X^{-1})$. Mais ainda, $r(A^{-1}) = l(A^v)$, logo $l(A^v) = r(X^{-1})$ e concluímos $X^{-1}|A^v$. Analogamente, $l(A^{-1}) = l\begin{pmatrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{pmatrix} = l(X^{-1})l(Y)l(Z^{-1})$. Por (1.1), temos que $l(Y) = r(X) = l(X)^{-1}$, assim $l(A^{-1}) = l(X^{-1})l(Y)l(Z^{-1}) = l(X^{-1})l(X^{-1})^{-1}l(Z^{-1}) = l(Z^{-1})$. Mais ainda, $l(A^{-1}) = r(A^v)$, logo $r(A^v) = l(Z^{-1})$ e $A^v|Z^{-1}$.

Além disso, temos que $t(Z) = b(Z^{-1})^{-1} = b(A^{-1})^{-1} = b(A^v)$ e $t(X^{-1})^{-1} = t(A^{-1})^{-1} = t(A^v)$. Assim,

$$\begin{array}{c|c|c} X^v & X^{-1} & A^v \\ \hline X & Y & Z \\ \hline A^v & Z^{-1} & Z^v \end{array}.$$

Utilizando o Axioma 3 da Definição 1.2.1 de dois modos distintos, obtemos $A^v =$

$\begin{Bmatrix} A^v \\ XYZ \\ A^v \end{Bmatrix}$ e usando $\begin{Bmatrix} A^v \\ A \end{Bmatrix} = \boldsymbol{id}\, b(A)$, concluímos que $A = XYZ$.

$(b)$ Sejam $X = Z = A$ e $Y = A^v$ em $\mathcal{B}$. Mostraremos que estes satisfazem as condições (1.1), (1.2) e (1.3). De fato,

$$\begin{gathered} b(X^{-1}) = (t(A))^{-1} = t(A^h) = t(Y), \\ r(X) = r(A) = l(A^h) = l(Y), \\ l(Z) = l(A) = r(A^h) = r(Y), \\ b(Y) = b(A^h) = (b(A))^{-1} = t(A^{-1}) = t(Z). \end{gathered}$$

Logo a condição (1.1) verifica-se. Além disso,

$$XYZ = AA^hA = (AA^h)A = \boldsymbol{id}\, l(A)A = A \qquad \text{e} \qquad \begin{matrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{matrix} = \begin{matrix} A^{-1} \\ A^h \\ A^{-1} \end{matrix} = A^{-1}.$$

□

# Capítulo 2

# Grupóides Duplos Vacantes

Neste capítulo, apresentamos a noção de grupóide duplo vacante. Estudamos a definição e damos descrições alternativas para este conceito. Além disso, demonstramos algumas propriedades sobre grupóides duplos vacantes que serão de suma importância para o objetivo principal do trabalho. Na segunda seção, definimos par combinado de grupóides e fatoração exata de grupóides, e apresentamos um resultado que mostra que estes conceitos são equivalentes a grupóides duplos vacantes.

## 2.1 Grupóides Duplos Vacantes

A noção de grupóides duplos vacantes apareceu pela primeira vez em [M], no início dos anos 90. Na principal referência deste trabalho [AN2], Andruskiewitsch e Natale apresentam a seguinte definição.

**Definição 2.1.1** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo. Dizemos que $\mathcal{T}$ é vacante se para cada $x \in \mathcal{H}$ $g \in \mathcal{V}$ tal que $r(x) = t(g)$, existe único $X \in \mathcal{B}$ de modo que* $X = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{X}} \end{array} g$.

As seguintes proposições nos dão descrições alternativas de grupóides duplos vacantes, que serão importantes ao longo do trabalho.

**Proposição 2.1.2** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

*(a) $\mathcal{T}$ é vacante;*

*(b) Para qualquer $f \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{H}$ tais que $l(y) = b(f)$, existe único $Z \in \mathcal{B}$ tal que*

$$Z = f \begin{array}{c} \boxed{\phantom{X}} \\ y \end{array};$$

*(c) Para qualquer $f \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{H}$ tais que $l(x) = t(f)$, existe único $Z \in \mathcal{B}$ tal que*

$$Z = f\,\overset{x}{\boxed{\phantom{x}}}\ ;$$

*(d) Para qualquer $g \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{H}$ tais que $r(y) = b(g)$, existe único $Z \in \mathcal{B}$ tal que*

$$Z = \underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}\,g.$$

*Demonstração:*

Primeiramente, mostraremos que $(a)$ é equivalente a $(b)$. Sejam $y \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{V}$ tal que $l(y) = b(f)$. Suponhamos que exista um $Z$ em $\mathcal{B}$ tal que $Z = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$. Por $\mathcal{T}$ ser grupóide duplo existe $Z^{-1}$ e pelo Lema 1.2.14, segue que $Z^{-1} = \overset{y^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}\,f^{-1}$. Como $\mathcal{T}$ é vacante segue que existem únicos $x \in \mathcal{H}$ e $g \in \mathcal{V}$ que completam $Z^{-1}$. Assim temos que $Z = f\,\overset{x^{-1}}{\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}}\,g^{-1}$ e pela unicidade do inverso de $x$ e de $g$ segue que $Z$ é o único morfismo em $\mathcal{B}$ tal que $Z = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$.

Reciprocamente, seja $Z \in \mathcal{B}$ o único morfismo tal que $Z = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$, com $b(f) = l(y)$. Uma vez que $\mathcal{T}$ é grupóide duplo existe o morfismo $Z^{-1}$ tal que $Z^{-1} = \overset{y^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}\,f^{-1}$, que é o único morfismo com esta representação, pela unicidade do inverso. Logo, $\mathcal{T}$ é vacante.

Agora, mostraremos que $(a)$ é equivalente a $(c)$. Sejam $x \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{V}$ tal que $l(x) = t(f)$. Suponhamos que exista um $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z = f\,\overset{x}{\boxed{\phantom{x}}}$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo, existe $Z^h$ tal que $Z^h = \overset{x^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}\,f$, pelo Lema 1.2.11. Como $\mathcal{T}$ é vacante existem únicos $y \in \mathcal{H}$ e $g \in \mathcal{V}$ que completam $Z^h$. Assim temos que $Z = f\,\overset{x}{\underset{y^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}}\,g$ e pela unicidade do inverso de $y$ segue que $Z$ é o único com $Z = f\,\overset{x}{\boxed{\phantom{x}}}$.

Reciprocamente, seja $Z \in \mathcal{B}$ o único morfismo tal que $Z = f\,\overset{x}{\boxed{\phantom{x}}}$, com $t(f) = l(x)$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo existe o morfismo $Z^h$ que é da forma $Z^h = \overset{x^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}\,f$, sendo este o único com esta representação, pela unicidade do inverso. Logo, $\mathcal{T}$ é vacante.

Para demonstramos que $(a)$ é equivalente a $(d)$ usa-se racíocinio similar a equivalência $(a)$ e $(c)$. Tomando o inverso vertical.

$\square$

**Proposição 2.1.3** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

*(a) $\mathcal{T}$ é vacante;*

*(b) Para todo $R,\ S,\ P \in \mathcal{B}$ tais que $\dfrac{R}{S}$ e $P|\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right\}$, então existem únicos $X,\ Y \in \mathcal{B}$ tais que $\begin{array}{c|c} X & R \\ \hline Y & S \end{array}$ e $P = \dfrac{X}{Y}$;*

*(c) Para todo $T,\ U,\ Q \in \mathcal{B}$ tais que $T|U$ e $\dfrac{Q}{TU}$, então existem únicos $V,\ Z \in \mathcal{B}$ tais que $\begin{array}{c|c} V & Z \\ \hline T & U \end{array}$ e $Q = VZ$.*

*Demonstração:*

Faremos, primeiramente, a demonstração de que $(a)$ é equivalente a $(b)$. Suponhamos que $\mathcal{T}$ é um grupóide duplo vacante. Sejam $R, S, P \in \mathcal{B}$ tais que $\dfrac{R}{S}$ e $P|\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right\}$, ou seja, $b(R) = t(S)$ e $r(P) = l\begin{pmatrix}R\\S\end{pmatrix} = l(R)l(S)$.

Consideremos $x = t(P)$ e $g = l(R)$. Temos que

$$r(x) = rt(P) = tr(P) = tl\begin{pmatrix}R\\S\end{pmatrix} = lt\begin{pmatrix}R\\S\end{pmatrix} = lt(R) = tl(R) = t(g),$$

o que implica $r(x) = t(g)$ e por ser $\mathcal{T}$ vacante existe exatamente um $X \in \mathcal{B}$ tal que $X = \overset{x}{\boxed{\phantom{x}}}\,g$. Notemos que $b(X^v) = t(X) = x = t(P)$. Disto, definimos $Y := \dfrac{X^v}{P}$.

Claramente, pela definição de $X$ e $Y$, temos que $P = \dfrac{X}{Y}$. Basta, assim, verificar que $\begin{array}{c|c} X & R \\ \hline Y & S \end{array}$. Note que as composições $\dfrac{X}{Y}$, $X|R$ e $\dfrac{R}{S}$ fazem sentido. Basta verificarmos que a composição $Y|S$ está bem definida.

Como $\mathcal{T}$ é grupóide existe $l(R)^{-1}$, assim

$$l(S) = l(R)^{-1}r(P) = l(R)^{-1}r(X)r(Y) = l(R)^{-1}l(R)r(Y) = r(Y),$$

o que implica $Y|S$. Logo, $X$ e $Y$ definidas desta maneira satisfazem as condições da proposição. Falta verificar a unicidade.

Sejam $X'$ e $Y'$ em $\mathcal{B}$, que satisfazem as condições em $(b)$. Logo $t(X') = t(P) = x$ e $r(X') = l(R) = g$, consequentemente, $X'$ é $X' = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{X}} \end{array} g$. Mas, $\mathcal{T}$ é vacante então $X' = X$. E, ainda, se $Y'$ cumpre as condições teríamos $t(Y') = b(X) = t(Y)$ e $r(Y') = l(S) = r(Y)$, e o que implica $Y' = Y$, pois $\mathcal{T}$ é vacante.

Reciprocamente, sejam $x \in \mathcal{H}$ e $g \in \mathcal{V}$ tal que $r(x) = t(g)$. Podemos tomar, $R = \boldsymbol{id}\ g$ e $S = (\boldsymbol{id}\ g)^v = \mathbf{id}\ g^{-1}$. Temos que $t(g^{-1}) = b(g)$. Assim, podemos compor verticalmente $R$ e $S$, e $\dfrac{R}{S} = \Theta_{t(g)}$. Mais ainda, como $r(x) = t(g)$, tomamos $P = \boldsymbol{id}\ x$. Assim, a composição $P \mid \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix}$ faz sentido, pois

$$r(P) = id\ r(x) = id\ t(g) = id\ b(g^{-1}) = gg^{-1} = l(R)l(S) = l\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}.$$

Agora, por hipótese, sabemos que que existem únicos $X,\ Y \in \mathcal{B}$ tais que cumprem as condições em $(b)$, e disso, obtemos que $t(X) = t(P) = x$ e $r(X) = l(R) = g$, então o morfismo $X$ é representado da forma $X = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{X}} \end{array} g$. Basta mostrar que $X$ é único com essa representação.

Seja $X'$ um morfismo em $\mathcal{B}$ tal que $X' = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{X}} \end{array} g$ e definimos $Y' = \dfrac{(X')^v}{P}$. Os morfismos $X'$ e $Y'$ definidos desta forma satisfazem as condições de $(b)$, mas pela unicidade da hipótese segue que $X' = X$ e $Y' = Y$. Portanto, existe um $X \in \mathcal{B}$ com $t(X) = x$ e $r(X) = g$, consequentemente, $\mathcal{T}$ é vacante.

Agora, demonstraremos que $(a)$ é equivalente a $(c)$. Suponhamos que $\mathcal{T}$ é vacante. Sejam $T,\ U,\ Q \in \mathcal{B}$ tais que $T|U$ e $\dfrac{Q}{TU}$, ou seja, $r(T) = l(U)$ e $b(Q) = t(TU) = t(T)t(U)$ e consideremos $f = l(Q)$ e $y = t(T)$. Assim, temos que

$$b(f) = bl(Q) = lb(Q) = lt(TU) = tl(TU) = tl(T) = lt(T) = l(y),$$

o que implica $b(f) = l(y)$. Seja $V \in \mathcal{B}$ tal que $V = f \begin{array}{c} \boxed{\phantom{X}} \\ y \end{array}$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide existe

$V^{-1}$ tal que $V^{-1} = \overset{y^{-1}}{\boxed{\phantom{x}}}\, f^{-1}$ e com $\mathcal{T}$ é vacante é a única desta forma. Logo, $V$ é o único morfismo com esta representação.

Definimos $Z := V^h|Q$, a qual está bem definida, pois $r(V^h) = l(V) = f = l(Q)$.

Claramente, pela definição de $V$ e $Z$, temos que $Q = VZ$. Basta, assim, verificar que $\begin{array}{c|c} V & Z \\ \hline T & U \end{array}$. Observe que as composições $T|U$, $V|Z$ e $\dfrac{V}{T}$ estão bem definidas. Logo, só é necessário verificar se a composição $\dfrac{Z}{U}$ está bem definida.

Como $\mathcal{T}$ é grupóide existe $t(T)^{-1}$, então

$$t(U) = t(T)^{-1}b(Q) = t(T)^{-1}b(V)b(Z) = t(T)^{-1}t(T)b(Z) = b(Z),$$

o que implica em $\dfrac{Z}{U}$. Assim, $V$ e $Z$ definidas desta maneira satisfazem as condições da proposição. Falta verificar a unicidade.

Sejam $V'$ e $Z'$ em $\mathcal{B}$ que satisfazem as condições em $(c)$. Assim temos que $l(V') = l(Q) = f$ e $b(V') = t(T) = y$. Logo, $V'$ é representado por $V' = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$. Como $\mathcal{T}$ é vacante implica que $V' = V$. E, ainda, se $Z'$ cumpre as condições temos $l(Z') = r(V') = r(V) = l(Z)$ e $b(Z') = t(U) = b(Z)$, e o que implica $Z' = Z$, pois $\mathcal{T}$ é vacante.

Demonstraremos que $(a)$ é equivalente a $(c)$. Sejam $y \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{V}$ tal que $l(y) = b(f)$. Podemos tomar, $T = \boldsymbol{id}\ y$ e $U = (\boldsymbol{id}\ y)^h = \boldsymbol{id}\ y^{-1}$. Temos que $l(y^{-1}) = r(y)$, então podemos compor horizontalmente $T$ e $U$ com $TU = \Theta_{l(y)}$. Mais ainda, como $l(y) = b(f)$, tomamos $Q = \boldsymbol{id}\ f$. Logo, a composição $\dfrac{Q}{TU}$ faz sentido, pois

$$b(Q) = id\ b(f) = id\ l(y) = yy^{-1} = t(T)t(U) = t(TU).$$

Agora, por hipótese, sabemos que existem únicos $V$, $Z \in \mathcal{B}$ tais que cumprem as condições em $(c)$, e disso, obtemos que $l(V) = l(Q) = f$ e $b(V) = b(T) = y$, então $V$ é representado por $V = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$. Basta mostrar que $V$ é único com essa representação.

Seja $V' \in \mathcal{B}$ tal que $V' = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$ e definimos $Z' = (V')^h Q$. Os morfismos $V'$ e $Z'$ definidas desta forma satisfazem as condições de $(c)$, mas pela unicidade da hipótese segue que $V' = V$ e $Z' = Z$. Portanto, existe um morfismo $V$ em $\mathcal{B}$ tal que $V = f\,\underset{y}{\boxed{\phantom{x}}}$. Logo, pela proposição anterior, $\mathcal{T}$ é vacante.

$\square$

**Proposição 2.1.4** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

*(a) $\mathcal{T}$ é vacante;*

*(b) Para todo $A$, $B$, $X$, $Y \in \mathcal{B}$ tais que $XY = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$, então existem únicos $U$, $V$, $R$, $S$ $\in \mathcal{B}$ com $\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline R & S \end{array}$, $UV = A$, $RS = B$, $\begin{matrix} U \\ R \end{matrix} = X$ e $\begin{matrix} V \\ S \end{matrix} = Y$.*

*Demonstração:*

Sejam $A$, $B$, $X$, $Y \in \mathcal{B}$ tais que $XY = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$. Consideremos $x = t(Y)$ e $g = r(A)$, temos que $r(x) = rt(Y) = tr(Y) = t(r(A)r(B)) = tr(A) = t(g)$, o que implica $r(x) = t(g)$ e por $\mathcal{T}$ ser vacante existe um $V$ em $\mathcal{B}$ da forma $V = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{V}} \end{array} g$. Definimos, a partir de $V$, os morfismos $U := AV^h$, $S := \begin{matrix} V^v \\ Y \end{matrix}$ e $R := \begin{matrix} A^vV^{-1} \\ X \end{matrix}$.

Notemos que $U$, $R$, $S$ estão bem definidas, pois $l(V^h) = r(V) = g = r(A)$ e $b(V^v) = t(V) = x = t(Y)$. Mais ainda,

$$b(A^vV^{-1}) = b(A^v)b(V^{-1}) = t(A)t(V)^{-1} = t(A)t(Y)^{-1} = t(X).$$

Basta verificar se $U$, $V$, $R$ e $S$ definidos desta maneira satisfazem as condições de $(b)$. Observemos que $r(U) = r(AV^h) = r(V^h) = l(V)$, o que implica em $U|V$. Agora, temos que

$$\begin{aligned} b(U) &= b(AV^h) = b(A)b(V^h) = t(A^v)b(V)^{-1} = t(A^v)t(V^{-1}) \\ &= t(A^vV^{-1}) = t\begin{pmatrix} A^vV^{-1} \\ X \end{pmatrix} = t(R). \end{aligned}$$

Disto concluímos que $\frac{U}{R}$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} r(R) &= r\begin{pmatrix} A^vV^{-1} \\ X \end{pmatrix} = r(A^vV^{-1})r(X) = r(V^{-1})r(X) = l(V)^{-1}l(Y) \\ &= l(V^v)l(Y) = l\begin{pmatrix} V^v \\ Y \end{pmatrix} = l(S). \end{aligned}$$

O que implica em $R|S$. Por fim, temos $t(S) = t\begin{pmatrix} V^v \\ Y \end{pmatrix} = t(V^v) = b(V)$. Assim, $\frac{V}{S}$.

Logo, temos $\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline R & S \end{array}$.

Agora, mostraremos que $A = UV$ e $B = RS$. Primeiro,

$$UV = (AV^h)V = A(V^hV) = A\boldsymbol{id}\, r(V) = A.$$

Assim, $A = UV$. Do mesmo modo,

$$RS = \left\{\begin{matrix} A^vV^{-1} \\ Y \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} V^v \\ Y \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A^vV^{-1}V^v \\ XY \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A^v \\ A \\ B \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{id}\, b(A) \\ B \end{matrix}\right\} = B.$$

Assim, $B = RS$.

Finalmente, mostraremos que $X = \begin{matrix} U \\ R \end{matrix}$ e $Y = \begin{matrix} V \\ S \end{matrix}$.

$$\begin{matrix} U \\ R \end{matrix} = \left\{\begin{matrix} AV^v \\ A^vV^{-1} \\ X \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(A)\boldsymbol{id}\, t(V)^{-1} \\ X \end{matrix}\right\} = X.$$

Do mesmo modo, $\begin{matrix} V \\ S \end{matrix} = \left\{\begin{matrix} V \\ V^v \\ Y \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{id}\, t(V) \\ Y \end{matrix}\right\} = Y$. Portanto, $U$, $V$, $R$ e $S$ satisfazem as condições de $(b)$.

Agora, sejam $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{R}$ e $\widetilde{S} \in \mathcal{B}$ que também satisfazem as condições, ou seja, $\widetilde{U}\widetilde{V} = A$, $\widetilde{R}\widetilde{S} = B$, $\begin{matrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{R} \end{matrix} = X$, $\begin{matrix} \widetilde{V} \\ \widetilde{S} \end{matrix} = Y$ e $\dfrac{\widetilde{U} \,|\, \widetilde{V}}{\widetilde{R} \,|\, \widetilde{S}}$. Assim, $r(\widetilde{V}) = r(A) = g$ e $t(\widetilde{V}) = t(Y) = x$. Como $\mathcal{T}$ é vacante segue que $\widetilde{V} = V$.

Do mesmo modo $r(\widetilde{U}) = l(\widetilde{V}) = l(V) = r(U)$ e $t(\widetilde{U}) = t(X) = t(U)$ e como $\mathcal{T}$ é vacante segue que $\widetilde{U} = U$. Mais ainda, $r(\widetilde{S}) = r(B) = r(S)$ e $t(\widetilde{S}) = b(\widetilde{V}) = b(V) = t(S)$ e daí $\widetilde{S} = S$ por ser $\mathcal{T}$ vacante. E, por fim, $r(\widetilde{R}) = l(\widetilde{S}) = l(S) = r(R)$ e $t(\widetilde{R}) = b(\widetilde{U}) = b(U) = t(R)$ e pelo mesmo motivo $\widetilde{R} = R$.

Reciprocamente, sejam $x$ em $\mathcal{H}$ e $g$ em $\mathcal{V}$ tais que $t(g) = r(x)$. Queremos mostrar que existe um V $\in \mathcal{B}$ da forma $V = \overset{x}{\boxed{\phantom{V}}}\, g$.

Podemos tomar $A := \boldsymbol{id}\ g$ e $B := A^v = \boldsymbol{id}\ g^{-1}$. Temos assim que $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} = \Theta_{t(g)}$. Agora, tomamos $Y := \boldsymbol{id}\ x$ e $X := Y^h = \boldsymbol{id}\ x^{-1}$ e a composição $XY = \Theta_{r(x)}$. Assim, usando o fato de $t(g) = r(x)$, concluímos que $\Theta_{t(g)} = \Theta_{r(x)}$ e, consequentemente, $XY = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$.

Logo, por hipótese existem únicos $U$, $V$, $R$ e $S$ em $\mathcal{B}$ tais que satisfazem as condições. E disso temos que $r(V) = r(A) = g$ e $t(V) = t(Y) = x$. Assim, $V$ é da forma $V = \overset{x}{\boxed{\phantom{V}}}\, g$.

Seja $\widetilde{V} \in \mathcal{B}$ tal que $\widetilde{V} = \overset{x}{\boxed{\phantom{V}}}\, g$, definimos os morfismos $\widetilde{U} := A(\widetilde{V})^h$, $\widetilde{S} := \underset{Y}{(\widetilde{U})^v}$ e $\widetilde{R} := \underset{X}{A^v(\widetilde{V})^{-1}}$, claramente $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{R}$ e $\widetilde{S}$ satisfazem as condições de $(b)$, mas pela unicidade da hipótese segue que $\widetilde{V} = V$, $\widetilde{U} = U$, $\widetilde{R} = R$ e $\widetilde{S} = S$. E, portanto, $\mathcal{T}$ é vacante.

$\square$

**Lema 2.1.5** *Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e seja $A \in \mathcal{B}$. Existe exatamente uma coleção $X$, $Y$, $Z \in \mathcal{B}$ tal que as condições (1.1), (1.2) e (1.3) do Lema 1.3.6 são válidas, à saber $X = Z = A$, $Y = A^h$.*

*Demonstração:*

Pelo Lema 1.3.6 parte $(b)$, temos que a coleção $X = Z = A$ e $Y = A^h$ satisfaz as condições. Basta mostrar que são únicas. Sejam $P$, $Q$, $R \in \mathcal{B}$ tais que também satisfazem as três condições.

De $PQR = A$ temos que $r(R) = r(A)$. Além disso, $t(R) = b(R^{-1})^{-1}$, mas pela condição 1.3 sabemos que $b(R^{-1}) = b(A^{-1})$, assim $t(R) = b(A^{-1})^{-1} = (t(A)^{-1})^{-1} = t(A)$. Logo, $r(R) = r(A)$ e $t(R) = t(A)$, e como $\mathcal{T}$ é vacante, segue que $R = A$.

Do mesmo modo, de $PQR = A$ temos que $l(P) = l(A)$. Mais ainda, $b(P) = t(P^{-1})^{-1}$, mas pela condição (1.3) sabemos que $t(P^{-1}) = t(A^{-1})$, assim $b(P) = t(A^{-1})^{-1} = (b(A)^{-1})^{-1} = b(A)$. Logo, $l(P) = l(A)$ e $b(P) = b(A)$ e como $\mathcal{T}$ é vacante, segue que $P = A$.

Por fim, já sabemos que $R = P = A$, substituindo na condição (1.2), obtemos $AQA = A$. Por ser $\mathcal{T}$ grupóide duplo existe $A^h$, então aplicando em duas vezes $A^h$ na equação $AQA = A$, concluímos que $Q = A^h$. Disto segue o resultado.

$\square$

Listamos agora, alguns fatos técnicos sobre grupóides duplos vacantes que serão utilizados no decorrer do trabalho.

**Proposição 2.1.6** *Sejam $\mathcal{T}$ uma grupóide duplo vacante e $C \in \mathcal{B}$. Se uma aresta horizontal (respectivamente, vertical) de $C$ é uma identidade, então $C = \boldsymbol{id}\ r(C)$ (respectivamente, $C = \boldsymbol{id}\ t(C)$).*

*Demonstração:*

Seja $C \in \mathcal{B}$ . Vamos mostrar o resultado para o caso em que $t(C)$ é uma identidade, os demais casos são análogos. Sejam $r(C) = g$ e $t(C) = id\ t(g)$, claramente temos que $t(g) = r(id\ t(g))$ e $C$ é da forma

$$C = \begin{array}{cc} id\ t(g) & \\ \boxed{\phantom{X}} & g \end{array} .$$

Entretanto, $\boldsymbol{id}\ g$ é um morfismo em $\mathcal{B}$ com $t(\boldsymbol{id}\ g) = id\ t(g)$ e $r(\boldsymbol{id}\ g) = g$. Por hipótese, $\mathcal{T}$ é vacante, logo $C = \boldsymbol{id}\ g$.

$\square$

**Proposição 2.1.7** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $C$ em $\mathcal{B}$. Então,*

*(a) O conjunto de pares de morfismos (A,B) tais que* $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \end{array}$, $AB = \boldsymbol{id}\ t(AB)$ *e* $\dfrac{A}{C} = \boldsymbol{id}\ l\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ *é*

$$\begin{cases} \varnothing, & \text{se } C \text{ não uma identidade horizontal,} \\ \{(\Theta_P, \boldsymbol{id}\ x) :\ x \in \mathcal{H},\ l(x) = P\}, & \text{se } C = \boldsymbol{id}\ g,\ P = t(g). \end{cases}$$

*(b) O conjunto de pares de morfismos (A,B) tais que* $\begin{array}{c|c} & C \\ \hline A & B \end{array}$, $AB = \boldsymbol{id}\ b(AB)$ *e* $\dfrac{C}{B} = \boldsymbol{id}\ r\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ *é*

$$\begin{cases} \varnothing, & \text{se } C \text{ não uma identidade horizontal,} \\ \{(\boldsymbol{id}\ h, \Theta_Q) :\ h \in \mathcal{H},\ r(h) = Q\}, & \text{se } C = \boldsymbol{id}\ g,\ Q = b(g). \end{cases}$$

*Demonstração:*

Demonstraremos o item $(a)$, o outro item segue analogamente. Suponhamos que sejam válidas $AB = \boldsymbol{id}\ t(AB)$ e $\dfrac{A}{C} = \boldsymbol{id}\ l\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, então $b(C) = b\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = id\ bl\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, pela Proposição 2.1.6 segue que $C = \boldsymbol{id}\ r(C)$.

Agora, sejam $g = r(C)$ e $P = t(g)$. Temos de $\dfrac{A}{C}$ que $b(A) = t(C) = id\ t(g) = id\ P$ e de $AB = \boldsymbol{id}\ t(AB)$ que $l(A) = id\ lt(AB) = id\ lt(A) = id\ tl(A)$. Mas, $bl(A) = P$ e $l(A)$ é uma identidade, assim $tl(A) = bl(A) = P$. Logo, $b(A) = id\ P$ e $l(A) = id\ P$ e como $\mathcal{T}$ é vacante, segue que $A = \Theta_P$.

Também de $AB = \boldsymbol{id}\ t(AB)$, temos que $r(B) = id\ rt(AB) = id\ rt(B)$. Logo, pela equação 2.1.6, concluímos que $B = \boldsymbol{id}\ r(B)$. Seja $x = r(B)$ em $\mathcal{H}$, mas como $A|B$ segue que $l(B) = r(A)$ o que implica $id\ l(x) = id\ P$, e assim $l(x) = P$.

Logo, se $C = \boldsymbol{id}\ g$, com $t(g) = P$, então a solução é $(\Theta_P,\ \boldsymbol{id}\ x)$, com $x$ em $\mathcal{H}$ e $l(x) = P$. Caso contrário é vazia.

$\square$

**Proposição 2.1.8** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $C$ em $\mathcal{B}$. Então,*

*(a) O conjunto de pares de morfismos (A,B) tais que* $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^{-1} & \end{array}$, *$AB = C$ é*

$$\begin{cases} \varnothing, & \text{se } C \neq \boldsymbol{id}\ g. \\ \{(\ g \overset{z^{-1}}{\square},\ \overset{z}{\square} g) :\ z \in \mathcal{H},\ l(z) = t(g)\}, & \text{se } C = \boldsymbol{id}\ g. \end{cases}$$

*(b) O conjunto de pares de morfismos (A,B) tais que* $\begin{array}{c|c} & A^{-1} \\ \hline A & B \end{array}$, *$AB = C$ é*

$$\begin{cases} \varnothing, & \text{se } C \neq \boldsymbol{id}\ g. \\ \{(\ g \underset{w}{\square},\ \underset{w^{-1}}{\square} g\ ) :\ w \in \mathcal{H},\ r(w) = b(g)\}, & \text{se } C = \boldsymbol{id}\ g. \end{cases}$$

*Demonstração:*

Faremos a demosntração do item $(a)$, o item $(b)$ segue analogamente. Suponhamos que sejam válidas as condições. Notemos que $r(A) = l(B)$ e $b(A) = t(B^{-1}) = b(B)^{-1}$, assim $A$ é da forma $A = \underset{b(B)^{-1}}{\square}\, l(B)$, mas $B^h$ possui os mesmos "right" e "bottom" que $A$, então por $\mathcal{T}$ ser vacante segue que $A = B^h$. Assim, $C = AB = B^h B = \boldsymbol{id}\, r(B)$.

Sejam $g = r(B)$ e $z = t(B)$. Como $A = B^h$ segue que $l(A) = g$ e $t(A) = z^{-1}$, logo a solução é $\left( g \overset{z^{-1}}{\square},\ \overset{z}{\square} g \right)$. Caso contrário, a solução é vazia.

$\square$

## 2.2 Par Combinado de Grupóides

O objetivo desta seção é dar uma caracterização de grupóides duplos vacantes em termos de par combinado de grupóides. Serão apresentadas inicialmente algumas definições e alguns resultados necessários para a demonstração da proposição no final desta seção. Esta caracterização é devido a Mackenzie em [M].

**Definição 2.2.1** *Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ um grupóide e $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$ uma aplicação, onde $\mathcal{E}$ é um conjunto. Uma ação à esquerda de $\mathcal{G}$ em $q$ é uma aplicação $\triangleright : \mathcal{G}_f \times_q \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, onde $\mathcal{G}_f \times_q \mathcal{E} = \{(g,x) \in \mathcal{G} \times \mathcal{E} : f(g) = q(x)\}$ tal que, para todo $g$, $h \in \mathcal{G}$ e $x \in \mathcal{E}$, satisfaz:*

1. $q(g \triangleright x) = p(g)$;

2. $g \triangleright (h \triangleright x) = gh \triangleright x$;

3. $id\ q(x) \triangleright x = x$.

**Definição 2.2.2** *Uma ação à direita de $\mathcal{G}$ em $q$ é uma aplicação $\triangleleft : \mathcal{E}_q \times_p \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}_q \times_p \mathcal{G} = \{(x,g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{G} : q(x) = p(g)\}$ tal que, para todo $g$, $h \in \mathcal{G}$ e $x \in \mathcal{E}$, satisfaz:*

1. $q(x \triangleleft g) = f(g)$;

2. $(x \triangleleft g) \triangleleft h = x \triangleleft gh$;

3. $x \triangleleft id\ q(x) = x$.

**Observação 2.2.3** *Dado $P \in \mathcal{P}$, definimos $\mathcal{E}_X := q^{-1}(X)$, ou seja, $\mathcal{E}_X = \{a \in \mathcal{E} : q(a) = X\}$. Então a ação de $g \in \mathcal{G}$, $g \triangleright \_ : \mathcal{E}_{f(g)} \longrightarrow \mathcal{E}_{p(g)}$, é um isomorfismo.*

**Definição 2.2.4** *Dadas duas ações de $\mathcal{G}$ em $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$ e $q' : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{P}$ e uma aplicação $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$, dizemos que as ações se entrelaçam se $q = \phi q'$ e $\phi(g \triangleright x) = g \triangleright \phi(x)$, para todo $g \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{E}$ tais que $f(g) = q(x)$.*

**Definição 2.2.5** *Uma ação é dita trivial se existe uma conjunto $X$ tal que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \times X$, onde $q : \mathcal{P} \times X \longrightarrow \mathcal{P}$ é a projeção e $g \triangleright (f(g), x) = (p(g), x)$, para todo $g \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{E}$.*

As duas próximas definições generalizam as noções de par combinado e fatoração exata correspondentes para grupos finitos.

**Definição 2.2.6** *Um par combinado de grupóides é um par de grupóides $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ de mesma base $\mathcal{P}$, com aplicações princípio e fim $t$, $b$: $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $l$, $r$: $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$, respectivamente, e dotado com uma ação à esquerda $\triangleright$: $\mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ de $\mathcal{H}$ em $t : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P}$ e uma ação à direita $\triangleleft$: $\mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{H}$ de $\mathcal{V}$ em $r : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}$, satisfazendo:*

1. $b(x \triangleright g) = l(x \triangleleft g)$;
2. $x \triangleright fg = (x \triangleright f)((x \triangleleft f) \triangleright g)$;
3. $xy \triangleleft g = (x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g)$,

*para todo $f$, $g \in \mathcal{V}$, $x$, $y \in \mathcal{H}$, tais que a composição seja possível.*

**Lema 2.2.7** *Seja $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupóides, então:*

*(a)* $x \triangleright id\ r(x) = id\ l(x)$, *para todo* $x \in \mathcal{H}$;

*(b)* $id\ t(g) \triangleright g = id\ b(g)$, *para todo* $g \in \mathcal{V}$.

*Demonstração:*

Demonstraremos o item $(a)$, o item $(b)$ verifica-se analogamente. Seja $x \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} x \triangleright id\ r(x) &= x \triangleright ((id\ r(x))(id\ r(x))) = (x \triangleright id\ r(x))((x \triangleleft id\ r(x)) \triangleright id\ r(x)) \\ &= (x \triangleright id\ r(x))(x \triangleright id\ r(x)). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{V}$ é grupóide e $x \triangleright id\ r(x) \in \mathcal{V}$, então existe $(x \triangleright id\ r(x))^{-1}$. Assim, multiplicando $(x \triangleright id\ r(x))^{-1}$ em ambos os lados da última igualdade, obtemos que $id\ b(x \triangleright id\ r(x)) = x \triangleright id\ r(x)$.

Pela Definição 2.2.6 temos que $b(x \triangleright id\ r(x)) = l(x \triangleleft id\ r(x)) = l(x)$. Logo, concluímos que $x \triangleright id\ r(x) = id\ l(x)$.

□

**Definição 2.2.8** *Seja $\mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{P}$ um grupóide. Uma fatoração exata de $\mathcal{K}$ é um par de subgrupóides amplos $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$, tal que para cada $h \in \mathcal{K}$, existem únicos $f \in \mathcal{V}$, $g \in \mathcal{H}$, tais que $h = fg$, isto é, se a multiplicação $m : \mathcal{V}_b \times_l \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ é uma bijeção.*

*Se o par $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ é uma fatoração exata de $\mathcal{K}$, denotaremos $\mathcal{K} = \mathcal{V}\mathcal{H}$.*

Fatorações exatas, $\mathcal{K} = \mathcal{V}\mathcal{H}$, de grupóides são equivalentes às estruturas de pares combinados de grupóides, sobre o par de $(\mathcal{V}, \mathcal{H}$, e as estruturas de grupóides duplos vacantes. Isto é demonstrado no seguinte resultado.

**Proposição 2.2.9** *As seguintes definições são equivalentes:*

*(a) Par combinado de grupóides;*

*(b) Grupóides com fatoração exata;*

*(c) Grupóides duplos vacantes.*

*Se $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ é um par combinado de grupóides, o grupóide decorrente de (b) será denotado por $\mathcal{K} = \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$*

*Demonstração:*

Inicialmente, mostraremos que $(a)$ é equivalente a $(b)$. Seja $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupóides, onde $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ são grupóides com a mesma base $\mathcal{P}$ e $\triangleright\colon \mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\triangleleft\colon \mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{H}$ são ações.

Consideramos $\mathcal{K}$ o grupóide com base $\mathcal{P}$ e flechas $\mathcal{V}\,{}_b\!\times_l \mathcal{H} = \{(g,x) \in \mathcal{V}\times\mathcal{H} : b(g) = l(x)\}$; as aplicações princípio e fim dadas, respectivamente, por $\alpha(g,x) = t(g)$ e $\beta(g,x) = r(x)$, para todo $(g,x) \in \mathcal{V}\,{}_b\!\times_l \mathcal{H}$; a composição $m$ definida por $(g,x)(h,y) = (g(x \triangleright h),(x \triangleleft h)y)$; a identidade $Id$ dada por $Id(X) = (id_{\mathcal{V}}(X), id_{\mathcal{H}}(X))$ e, além disso, $(g,x)^{-1} = (x^{-1} \triangleright g^{-1}, x^{-1} \triangleleft g^{-1})$. Com essa estrutura $\mathcal{K}$ é um grupóide.

De fato, seja $X \in \mathcal{P}$, temos

$$\begin{aligned}(\alpha \circ Id)(X) = \alpha(id_{\mathcal{V}}(X), id_{\mathcal{H}}(X)) = t(id_{\mathcal{V}}(X)) = X = id_{\mathcal{P}}(X),\\ (\beta \circ Id)(X) = \beta(id_{\mathcal{V}}(X), id_{\mathcal{H}}(X)) = r(id_{\mathcal{H}}(X)) = X = id_{\mathcal{P}}(X).\end{aligned}$$

Sejam $(g,x),(h,y)$ em $\mathcal{V}\,{}_b\!\times_l \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}(\alpha \circ m)((g,x),(h,y)) &= \alpha(g(x \triangleright h),(x \triangleleft h)y) = t(g(x \triangleright h)) = t(g)\\ &= \alpha(g,x) = (\alpha \circ \pi_1)((g,x),(h,y)).\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}(\beta \circ m)((g,x),(h,y)) &= \beta(g(x \triangleright h),(x \triangleleft h)y) = r((x \triangleleft h)y) = r(y)\\ &= \beta(h,y) = (\beta \circ \pi_2)((g,x),(h,y)).\end{aligned}$$

Consideremos $(g,x),(h,y),(l,z) \in \mathcal{V}\,{}_b\!\times_l \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned}(m(id \times m))((g,x),(h,y),(l,z)) &= m((g,x),(h(y \triangleright l),(y \triangleleft l)z))\\ &= (g(x \triangleright h(y \triangleright l)),(x \triangleleft h(y \triangleright l))(y \triangleleft l)z).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(m(m\times id))((g,x),(h,y),(l,z)) &= m((g(x\triangleright h),(x\triangleleft h)y),(l,z))\\ &= (g(x\triangleright h)((x\triangleleft h)y\triangleright l),((x\triangleleft h)y\triangleleft l)z).\end{aligned}$$

Como $(\mathcal{V},\mathcal{H},\triangleright,\triangleleft)$ é um par combinado de grupóides, concluímos que $m$ é associativa.

Sejam $X\in\mathcal{P}$ e $(g,x)\in\mathcal{V}\ {}_b{\times}_l\ \mathcal{H}$, tal que $t(g)=X$.

$$\begin{aligned}(m(Id\times id))(X,(g,x)) &= m((id_{\mathcal{V}}(X),id_{\mathcal{H}}(X)),(g,x))\\ &= (id_{\mathcal{V}}(X)(id_{\mathcal{H}}(X)\triangleright g),(id_{\mathcal{H}}(X)\triangleleft g)x)\\ &= ((id_{\mathcal{V}}(X))g),(id_{\mathcal{H}}(X))x) \ = \ (g,x) \ = \ \pi_2(X,(g,x)).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}(m(id\times Id))((g,x),X) &= m((g,x),(id_{\mathcal{V}}(X),id_{\mathcal{H}}(X)))\\ &= (g(x\triangleright id_{\mathcal{V}}(X)),(x\triangleleft id_{\mathcal{V}}(X))id_{\mathcal{H}}(X))\\ &= (g(id_{\mathcal{V}}(X)),x(id_{\mathcal{H}}(X))) \ = \ (g,x) \ = \ \pi_1((g,x),X).\end{aligned}$$

Por fim, seja $(g,x)\in\mathcal{V}\ {}_b{\times}_l\ \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(m(id\times S)diag)(g,x) &= (m(id\times S))((g,x),(g,x))\\ &= m((g,x),(x^{-1}\triangleright g^{-1},x^{-1}\triangleleft g^{-1}))\\ &= (g(x\triangleright(x^{-1}\triangleright g^{-1})),(x\triangleleft(x^{-1}\triangleright g^{-1}))(x^{-1}\triangleleft g^{-1}))\\ &= (g(id\ l(x)\triangleright g^{-1}),xx^{-1}\triangleleft g^{-1})\\ &= (g(id\ t(g^{-1})\triangleright g^{-1}),xx^{-1}\triangleleft g^{-1})\\ &= (gg^{-1},id\ l(x)\triangleleft g^{-1}) \ = \ (id\ t(g),id\ t(g^{-1})\triangleleft g^{-1})\\ &= (id\ t(g),id\ b(g^{-1})) \ = \ (id\ t(g),id\ t(g))\\ &= Id(t(g)) \ = \ Id(\alpha(g,x)).\end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned}(m(S\times id)diag)(g,x) &= (m(S\times id))((g,x),(g,x))\\ &= m((x^{-1}\triangleright g^{-1},x^{-1}\triangleleft g^{-1}),(g,x))\\ &= ((x^{-1}\triangleright g^{-1})((x^{-1}\triangleleft g^{-1})\triangleright g),((x^{-1}\triangleleft g^{-1})\triangleleft g)x)\\ &= (x^{-1}\triangleright g^{-1}g,(x^{-1}\triangleleft id\ t(g^{-1}))x)\\ &= (x^{-1}\triangleright id\ t(g^{-1}),(x^{-1}\triangleleft id\ t(g^{-1}))x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^{-1} \triangleright id\ r(x^{-1}), (x^{-1} \triangleleft id\ r(x^{-1}))x) \\
&= (id\ l(x^{-1}), x^{-1}x) \ = \ (id\ r(x), id\ r(x)) \\
&= Id(r(x)) \ = \ Id(\beta(g,x)).
\end{aligned}
$$

Denotaremos uma flecha $(g,x)$ em $\mathcal{V}\ {}_b{\times}_l\ \mathcal{H}$, do seguinte modo ${}^{g}\big\lfloor\underline{\quad}_{x}$. Identificaremos as flechas de $\mathcal{H}$ por ${}^{id\ l(x)}\big\lfloor\underline{\quad}_{x}$ e as flechas de de $\mathcal{V}$ por ${}^{g}\big\lfloor\underline{\quad}_{id\ b(g)}$.

Portanto, o par $(\mathcal{H},\ \mathcal{V})$ é uma fatoração exata de $\mathcal{K}$.

Reciprocamente, sejam $\mathcal{K}$ um grupóide e $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ uma fatoração exata de $\mathcal{K}$. Para cada par $(x,g)$ em $\mathcal{H}\ {}_r{\times}_t\ \mathcal{V}$, existem e são únicos, pela definição de fatoração exata, $x \triangleright g$ em $\mathcal{V}$ e $x \triangleleft g$ em $\mathcal{H}$ tais que $xg = (x \triangleright g)(x \triangleleft g)$.

Basta mostrar que $\triangleright$ e $\triangleleft$ descritas desta forma são ações e que satisafazem as condições de par combinado de grupóides.

Temos que $b(x \triangleright g) = l(x \triangleleft g)$, caso contrário a composição $(x \triangleright g)(x \triangleleft g)$ não faria sentido.

Sejam $x$, $y$ em $\mathcal{H}$ e $g$ em $\mathcal{V}$, tais que $r(x) = l(y)$ e $r(y) = t(g)$. Pelo fato de $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ serem subgrupóides de $\mathcal{K}$, temos que é válida a associatividade, ou seja, $(xy)g = x(yg)$ em $\mathcal{K}$. Isso implica que, $(xy \triangleright g)(xy \triangleleft g) = x(y \triangleright g)(y \triangleleft g)$. Mais uma vez pela fatoração exata temos que

$$(xy \triangleright g)(xy \triangleleft g) = (x \triangleright (y \triangleright g))(x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g).$$

Pela unicidade da fatoração segue que

$$xy \triangleright g = x \triangleright (y \triangleright g) \quad \text{e} \quad xy \triangleleft g = (x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g). \tag{2.1}$$

Analogamente, sejam $x$ em $\mathcal{H}$ e $g$, $h$ em $\mathcal{V}$, tais que $r(x) = t(g)$ e $b(g) = t(h)$. Segue que

$$x \triangleright gh = (x \triangleright g)((x \triangleleft g) \triangleright h) \quad \text{e} \quad x \triangleleft gh = (x \triangleleft g) \triangleleft h. \tag{2.2}$$

Sejam $g$ em $\mathcal{V}$ e $id\ t(g)$, $id\ b(g)$ em $\mathcal{H}$. Por serem $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ subgrupóides de $\mathcal{K}$ temos que $g = (id\ t(g))g = (id\ t(g) \triangleright g)(id\ t(g) \triangleleft g)$ e $g = g(id\ b(g))$, consequentemente $g(id\ b(g)) = (id\ t(g) \triangleright g)(id\ t(g) \triangleleft g)$. O que implica em

$$g = id\ t(g) \triangleright g \quad \text{e} \quad id\ b(g) = id\ t(g) \triangleleft g. \tag{2.3}$$

Analogamente, sejam $x$ em $\mathcal{H}$ e $id\ l(x)$, $id\ r(x)$ em $\mathcal{V}$, então

$$x = x \triangleleft id\ r(x) \quad \text{e} \quad id\ l(x) = x \triangleright id\ r(x). \tag{2.4}$$

Assim, de (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), concluímos que $\triangleright$, $\triangleleft$ são ações e satisfazem as condições de par combinado de grupóides. Portanto, $(\mathcal{H},\ \mathcal{V},\ \triangleright,\ \triangleleft)$ é um par combinado de grupóides.

Agora, mostraremos que $(a)$ é equivalente a $(c)$. Seja $(\mathcal{H},\ \mathcal{V},\ \triangleright,\ \triangleleft)$ um par combinado de grupóides, onde $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ e $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ são grupóides com a mesma base $\mathcal{P}$ e $\triangleright$, $\triangleleft$ são ações de grupóides. Definimos $\mathcal{B} := \mathcal{H}\ {}_r\!\times_t\ \mathcal{V}$ e denotamos $X = (x, g)$ em $\mathcal{B}$ do seguinte modo $X = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright g & \boxed{\phantom{X}} & g \\ & x \triangleleft g & \end{array}$.

Assim, $\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$ é um grupóide duplo, onde os grupóides $\mathcal{H}\ {}_r\!\times_t\ \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}\ {}_r\!\times_t\ \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{V}$ possuem as mesmas estruturas do Exemplo 1.3.3. Basta verificar que tal grupóide é vacante.

Sejam $x$ em $\mathcal{H}$ e $g$ em $\mathcal{V}$, tais que $r(x) = t(g)$. Por definição $X = (x, g)$ em $\mathcal{B}$ é dada por $X = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright g & \boxed{\phantom{X}} & g \\ & x \triangleleft g & \end{array}$. Agora, sejam $y$ em $\mathcal{H}$ e $h$ em $\mathcal{V}$, flechas tais que $h = l(X)$ e $y = b(X)$, mas por definição $l(X) = x \triangleright g$ e $b(X) = x \triangleleft g$ e pela unicidade de $l$ e $b$, segue que $h = x \triangleright g$ e $y = x \triangleleft g$. Portanto, o grupóide duplo é vacante.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante. Dados $x$ em $\mathcal{H}$ e $g$ em $\in \mathcal{V}$, tais que $r(x) = t(g)$. Definimos, $x \triangleleft g := b(X)$ e $x \triangleright g := l(X)$, onde $X$ em $\mathcal{B}$ é o único morfismo tal que $X = \begin{array}{cc} x & \\ \boxed{\phantom{X}} & g \end{array}$. Da unicidade de $l(X)$ e $b(X)$ implica que as aplicações $\triangleright$, $\triangleleft$ estão bem definidas. Basta verificar se são ações e se satisfazem as condições de par combinado de grupóides.

Sejam $x,\ y$ em $\mathcal{H}$ e $f,\ g\ \mathcal{V}$, tais $r(x) = t(g)$, $r(x) = l(y)$ e $b(f) = t(g)$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo vacante, então existe um $X$ em $\mathcal{B}$ da forma $X = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright g & \boxed{\phantom{X}} & g \\ & x \triangleleft g & \end{array}$.
Consequentemente,

$$l(x) = t(x \triangleright g), \quad b(g) = r(x \triangleleft g) \quad e \quad b(x \triangleright g) = l(x \triangleleft g). \tag{2.5}$$

Suponha que $x \triangleright fg$, isto implica que $r(x) = t(fg) = t(f)$. Logo, existem

$$A = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright fg & \boxed{\phantom{xx}} & fg \\ & x \triangleleft fg & \end{array} \quad \text{e} \quad B = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright f & \boxed{\phantom{xx}} & f \\ & x \triangleleft f & \end{array}.$$

Agora, notemos que $r(x \triangleleft f) = b(f) = t(g)$, pois existe a composição $fg$. Logo, podemos considerar a caixa

$$C = \begin{array}{ccc} & x \triangleleft f & \\ (x \triangleleft f) \triangleright g & \boxed{\phantom{xxx}} & g \\ & (x \triangleleft f) \triangleleft g & \end{array}.$$

Temos que $b(B) = t(C)$, assim $\dfrac{B}{C}$ e

$$\frac{B}{C} = \begin{array}{ccc} & x & \\ (x \triangleright f)((x \triangleleft f) \triangleright g) & \boxed{\phantom{xxx}} & fg \\ & (x \triangleleft f) \triangleleft g & \end{array}.$$

Mas, por hipótese, o grupóide duplo é vacante, logo $A = \dfrac{B}{C}$ e, consequentemente,

$$x \triangleright fg = (x \triangleright f)((x \triangleleft f) \triangleright g) \quad \text{e} \quad x \triangleleft fg = (x \triangleleft f) \triangleleft g. \tag{2.6}$$

Analogamente, suponha que $r(xy) = r(y) = t(g)$. Logo, podemos considerar $xy \triangleright g$. Como $\mathcal{T}$ é um grupóide duplo vacante, $r(xy) = t(g)$ e $r(y) = t(g)$, então existem

$$P = \begin{array}{ccc} & xy & \\ xy \triangleright g & \boxed{\phantom{xx}} & g \\ & xy \triangleleft g & \end{array} \quad \text{e} \quad Q = \begin{array}{ccc} & y & \\ y \triangleright g & \boxed{\phantom{xx}} & g \\ & y \triangleleft g & \end{array}.$$

Além disso, pela existência da composição $xy$, temos que $t(y \triangleright g) = l(y) = r(x)$. Assim, podemos considerar

$$R = \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright (y \triangleright g) & \boxed{\phantom{xxx}} & y \triangleright g. \\ & x \triangleleft (y \triangleright g) & \end{array}$$

Como $r(R) = l(Q)$, podemos compor horizontalmente $R|Q$ e

$$RQ = \begin{array}{ccc} & xy & \\ x \triangleright (y \triangleright g) & \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} & g \\ & (x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g) & \end{array}.$$

Mas como o grupóide duplo é vacante, concluímos que $P = RQ$ e, portanto,

$$xy \triangleleft g = (x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g) \quad \text{e} \quad xy \triangleright g = x \triangleright (y \triangleright g). \tag{2.7}$$

Sejam $g$ em $\mathcal{V}$ e $id\ t(g)$ em $\mathcal{H}$, temos que $r(id\ t(g)) = t(g)$, então podemos considerar

$$A = \begin{array}{ccc} & id\ t(g) & \\ id\ t(g) \triangleright g & \boxed{\phantom{xxxx}} & g \\ & id\ t(g) \triangleleft g & \end{array},$$

como $A$ possui uma identidade em um dos seus lados horizontais, pela Proposição 2.1.6, segue que $A = \boldsymbol{id}\ g$ e, portanto, temos que

$$id\ t(g) \triangleright g = g \quad \text{e} \quad id\ t(g) \triangleleft g = id\ b(g). \tag{2.8}$$

Analogamente, sejam $x$ em $\mathcal{H}$ e $id\ r(x)$ em $\mathcal{V}$, então

$$x \triangleright id\ r(x) = id\ l(x) \quad \text{e} \quad x \triangleleft id\ r(x) = x. \tag{2.9}$$

Por (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), concluímos que $\triangleright$, $\triangleleft$ são ações e satisfazem as condições de par combinado de grupóides. Portanto, $(\mathcal{H}, \mathcal{V}, \triangleright, \triangleleft)$ é um par combinado de grupóides.

$\square$

# Capítulo 3

# Álgebras de Hopf fracas associadas a grupóides duplos vacantes

Neste capítulo, apresentamos o principal resultado deste trabalho. Construímos uma álgebra de Hopf fraca a partir de um grupóide duplo vacante finito.

## 3.1 Álgebras de Hopf fracas

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de álgebras de Hopf fracas ou grupóides quânticos finitos, que foram introduzidos por Böhm, Nill e Szlachányi em [BNSz], [BSz], no final da década de 90, como uma generalização das álgebras de Hopf ordinárias. Apresentaremos resultados úteis para o trabalho e alguns exemplos. Por fim, provaremos uma proposição que diz qual condição uma álgebra de Hopf fraca precisa satisfazer para que esta seja uma álgebra de Hopf ordinária.

**Definição 3.1.1** *Uma biálgebra fraca é uma quintúpla* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$*, onde* $H$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita,* $(H, m, u)$ *tem estrutura de álgebra associativa,* $(H, \Delta, \varepsilon)$ *tem estrutura de coálgebra coassociativa, tal que para todo* $g$*,* $h$*,* $l$ *em* $H$*, as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Multiplicidade da comultiplicação:* $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h)$;
2. *Multiplicidade fraca da counidade:* $\varepsilon(ghl) = \sum \varepsilon(gh_1)\varepsilon(h_2 l) = \sum \varepsilon(gh_2)\varepsilon(h_1 l)$;
3. *Comultiplicidade fraca da unidade:*

$$\Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) = (1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H).$$

*A comultiplicação será denotada por uma variação da notação de Sweedler,* $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$.

Uma biálgebra fraca tem uma estrutura de álgebra e uma de coálgebra, a comultiplicação é multiplicativa, mas não preserva a unidade e a counidade não é multiplicativa, ou seja, se enfraquece a condição da comultiplicação e da counidade serem morfismos de álgebras na definição de biálgebra ordinária.

Observemos que a comultiplicadade fraca da unidade pode ser escrita do seguinte modo:

$$1_1 \otimes 1_2 1_1' \otimes 1_2' \quad = \quad 1_1' \otimes 1_1 1_2' \otimes 1_2 \quad = \quad 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3.$$

Além disso, da multiplicidade de $\Delta$, podemos concluir que, para todo $h$ em $H$,

$$\Delta(h) = h_1 \otimes h_2 = h_1 1_1 \otimes h_2 1_2 = 1_1 h_1 \otimes 1_2 h_2.$$

**Exemplo 3.1.2** Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ um grupóide, tal que $\mathcal{P}$ é finito. Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\mathcal{G}$ com base $\{u_g; g \in \mathcal{G}\}$. Este é uma biálgebra fraca com a seguinte estrutura:

$$u_g u_h = \begin{cases} u_{gh}, & \text{se } f(g) = p(h). \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad \mathit{1} = \sum_{X \in \mathcal{P}} u_{1_X}, \quad \Delta(u_g) = u_g \otimes u_g, \quad \varepsilon(u_g) = 1,$$

para quaisquer $g$, $h \in \mathcal{G}$.

**Exemplo 3.1.3** Consideremos o dual $(\mathbb{K}\mathcal{G})^*$ da álgebra de grupóide, com base $\{v_g; g \in \mathcal{G}\}$ que é base dual de $\{u_g; g \in \mathcal{G}\}$, ou seja, $v_g(u_h) = \delta_{g,h}$; Temos que $(\mathbb{K}\mathcal{G})^*$ tem estrutura de biálgebra fraca, dada por:

$$v_g v_h = \delta_{g,h} v_g, \quad \mathit{1} = \sum_{g \in \mathcal{G}} v_g, \quad \Delta(v_g) = \sum_{g = jl} v_j \otimes v_l, \quad \varepsilon\left(\sum_{g \in \mathcal{G}} \lambda_g v_g\right) = \sum_{g = 1_X} \lambda_g,$$

para quaisquer $g$, $h \in \mathcal{G}$.

A partir da counidade podemos definir duas aplicações $\mathbb{K}$-lineares: $\varepsilon_p : H \longrightarrow H$, chamada de princípio, e $\varepsilon_f : H \longrightarrow H$, chamada de fim, as quais são definidas por:

$$\varepsilon_p(h) := (id \otimes \varepsilon)((1_H \otimes h)\Delta(1_H)) = 1_1 \varepsilon(h 1_2).$$
$$\varepsilon_f(h) := (\varepsilon \otimes id)(\Delta(1_H)(h \otimes 1_H)) = \varepsilon(1_1 h) 1_2.$$

A linearidade de $\varepsilon_p$ e $\varepsilon_f$ decorre da linearidade de $\varepsilon$. Essas aplicações são elementos idempotentes em $End_{\mathbb{K}}(\mathrm{H})$, ou seja, $\varepsilon_f(\varepsilon_f(h)) = \varepsilon_f(h)$ e $\varepsilon_p(\varepsilon_p(h)) = \varepsilon_p(h)$. As imagens das aplicações $\varepsilon_p$ e $\varepsilon_f$ são subálgebras de $H$ chamadas de subálgebras princípio e fim, denotadas por $H_p$ e $H_f$, respectivamente. Tais subálgebras contêm

$1_H$ e comutam entre si, isto é, $st = ts$, para quaisquer $s \in H_p$ e $t \in H_f$. Além disso, são separáveis (ver, Prop. 2.3.4, [NV]).

Substituindo $h$ por $1_H$ na multiplicidade fraca da counidade, obtemos as seguintes relações $\varepsilon(gl) = \varepsilon(g\varepsilon_f(l))$ e $\varepsilon(gl) = \varepsilon(\varepsilon_p(g)l)$ para todo $g,\ l \in H$. Ainda explorando esta propriedade, podemos que concluir que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_f(g\varepsilon_f(h)) &= \varepsilon_f(g\varepsilon(1_1h)1_2) = \varepsilon(1_1h)\varepsilon_f(g1_2) \\
&= \varepsilon(1_1h)\varepsilon(1_1'g1_2)1_2' = \varepsilon(1_1'gh)1_2' \\
&= \varepsilon_f(gh).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, concluímos que $\varepsilon_p(\varepsilon_p(g)h) = \varepsilon_p(gh)$.

Seguem alguns resultados acerca de biálgebras fracas.

**Lema 3.1.4** *Seja $H$ uma biálgebra fraca. Para todo $g,\ h \in H$ temos:*

*(a)* $(id \otimes \varepsilon_f)(\Delta(h)) = 1_1h \otimes 1_2, \quad (\varepsilon_p \otimes id)(\Delta(h)) = 1_1 \otimes h1_2$*;*

*(b)* $h = \varepsilon_f(h) \Leftrightarrow \Delta(h) = 1_1h \otimes 1_2, \quad h = \varepsilon_p(h) \Leftrightarrow \Delta(h) = 1_1 \otimes h1_2$*;*

*(c)* $h\varepsilon_f(g) = \varepsilon(h_1g)h_2, \quad \varepsilon_p(g)h = h_1\varepsilon(gh_2)$.

*Demonstração:*

$(a)$ Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon_f)(\Delta(h)) &= (id \otimes \varepsilon_f)(h_1 \otimes h_2) = h_1 \otimes \varepsilon(1_1h_2)1_2 \\
&= h_1\varepsilon(1_1h_2) \otimes 1_2 = 1_1'h_1\varepsilon(1_11_2'h_2) \otimes 1_2 \\
&= 1_1h_1\varepsilon(1_2h_2) \otimes 1_3 = 1_{11}h_1\varepsilon(1_{12}h_2) \otimes 1_2 \\
&= (1_1h)_1\varepsilon((1_1h)_2) \otimes 1_2 = 1_1h \otimes 1_2.
\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se a outra igualdade.

$(b)$ Seja $h \in H$ e suponhamos que $h = \varepsilon_f(h)$, então

$$\begin{aligned}
\Delta(h) &= \Delta(\varepsilon_f(h)) = \Delta(\varepsilon(1_1h)1_2) \\
&= \varepsilon(1_1h)\Delta(1_2) = \varepsilon(1_1h)(1_{21} \otimes 1_{22}) \\
&= \varepsilon(1_1h)1_2 \otimes 1_3 = \varepsilon(1_1'h)1_11_2' \otimes 1_2 \\
&= 1_1\varepsilon(1_1'h)1_2' \otimes 1_2 = 1_1\varepsilon_f(h) \otimes 1_2 \\
&= 1_1h \otimes 1_2.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, temos que $\varepsilon_f(h) = \varepsilon(1_1h)1_2 = \varepsilon(h_1)h_2 = h$. Analogamente, demonstra-se a outra equivalência.

$(c)$ Sejam $g$, $h \in H$, então

$$\begin{aligned} h\varepsilon_f(g) &= h\varepsilon(1_1 g)1_2 = \varepsilon(h_1)h_2\varepsilon(1_1 g)1_2 = \varepsilon(h_1)\varepsilon(1_1 g)h_2 1_2 \\ &= \varepsilon(h_1)\varepsilon(\varepsilon_p(h_{21})g)h_{22} = \varepsilon(h_1)\varepsilon(\varepsilon_p(h_2)g)h_3 = \varepsilon(\varepsilon_p(\varepsilon(h_1)h_2)g)h_3 \\ &= \varepsilon(\varepsilon_p(h_1)g)h_2 = \varepsilon(h_1 g)h_2. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, verifica-se a outra igualdade.

□

**Lema 3.1.5** *Seja $H$ uma biálgebra fraca. Para todo $g$, $h \in H$, temos:*

*(a)* $\varepsilon_f(\varepsilon_f(g)h) = \varepsilon_f(g)\varepsilon_f(h)$;

*(b)* $\varepsilon_p(g\varepsilon_p(h)) = \varepsilon_p(g)\varepsilon_p(h)$.

*Demonstração:*

$(a)$ Sejam $g$, $h \in H$. Então

$$\varepsilon_f(\varepsilon_f(g)h) = \varepsilon(1_1\varepsilon_f(g)h)1_2 = \varepsilon((\varepsilon_f(g))_1 h)(\varepsilon_f(g))_2 = \varepsilon_f(g)\varepsilon_f(h).$$

Onde a última igualdade decorre do Lema 3.1.4 $(c)$.

$(b)$ Similarmente, sejam $g$, $h \in H$, então

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(g\varepsilon_p(h)) &= 1_1\varepsilon(g\varepsilon_p(h)1_2) = 1_1\varepsilon(\varepsilon_p(g)\varepsilon_p(h)1_2) \\ &= (\varepsilon_p(h))_1\varepsilon(\varepsilon_p(g)(\varepsilon_p(h))_2) = \varepsilon_p(\varepsilon_p(g))\varepsilon_p(h) = \varepsilon_p(g)\varepsilon_p(h). \end{aligned}$$

Onde a penúltima igualdade decorre do Lema 3.1.4 $(c)$.

□

**Lema 3.1.6** *Seja $H$ uma biálgebra fraca. Então $\Delta(1_H) \in H_p \otimes H_f$.*

*Demonstração:*

Usando $h = 1_H$ no item $(a)$ do Lema 3.1.4, obtemos

$$(id \otimes \varepsilon_f)(\Delta(1_H)) = 1_1 1_H \otimes 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 = \Delta(1_H). \tag{3.1}$$

$$(\varepsilon_p \otimes id)(\Delta(1_H)) = 1_1 \otimes 1_H 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 = \Delta(1_H). \tag{3.2}$$

Da igualdade (3.1) concluímos que $\Delta(1_H) \in H \otimes H_f$ e de (3.2) que $\Delta(1_H) \in H_p \otimes H$. Portanto, $\Delta(1_H) \in (H_p \otimes H) \cap (H \otimes H_f) = H_p \otimes H_f$.

□

A partir da definição de biálgebra fraca, apresentamos o conceito de álgebra de Hopf fraca ou grupóide quântico finito.

**Definição 3.1.7** *Uma biálgebra fraca $H$ é dita uma álgebra de Hopf fraca ou um grupóide quântico finito, se existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\mathcal{S} : H \longrightarrow H$, chamada de antípoda, que satisfaz, para todo $h \in H$, as seguintes condições.*

1. $m(\mathcal{S} \otimes id)\Delta(h) = \varepsilon_p(h)$;

2. $m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(h) = \varepsilon_f(h)$;

3. $m^2(\mathcal{S} \otimes id \otimes \mathcal{S})\Delta^2(h) = \mathcal{S}(h)$.

**Observação 3.1.8** *Toda álgebra de Hopf, no sentido clássico, é uma álgebra de Hopf fraca. A seguir veremos sob que condição estas noções coincidem.*

**Observação 3.1.9** *Se $H$ é uma álgebra de Hopf fraca, então a unidade, a counidade e a antípoda são únicas. Isto pode ser visto em [BNSz], Lema 2.8.*

**Exemplo 3.1.10** A álgebra de grupóide tem estrutura de álgebra de Hopf fraca, com antípoda dada por $\mathcal{S}(u_g) = u_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

**Exemplo 3.1.11** O dual da álgebra de grupóide tem estrutura de álgebra de Hopf fraca, com antípoda dada por $\mathcal{S}(v_g) = v_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

**Definição 3.1.12** *Um morfismo entre álgebras de Hopf fracas $H_1$, $H_2$ é uma aplicação $\omega : H_1 \longrightarrow H_2$, que é tanto um morfismo de álgebra como um morfismo de coálgebra, preservando a unidade e a counidade e que comuta com as antípodas da $H_1$ e $H_2$, isto é, $\omega \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 \circ \omega$. A imagem de um morfismo de álgebras de Hopf fracas é, claramente, uma álgebra de Hopf fraca.*

**Observação 3.1.13** *Podemos reescrever as definições das aplicações $\varepsilon_f$ e $\varepsilon_p$ envolvendo a antípoda. Seja $H$ uma álgebra de Hopf fraca, temos que $\varepsilon_f(h) = \varepsilon(\mathcal{S}(h)1_1)1_2$ e $\varepsilon_p(h) = 1_1\varepsilon(1_2\mathcal{S}(h))$, para todo $h$ em $H$. Além disso, são válidas as igualdades $\varepsilon_f(h) = \mathcal{S}(1_1)\varepsilon(1_2 h)$ e $\varepsilon_p(h) = \varepsilon(h1_1)\mathcal{S}(1_2)$, para todo $h$ em $H$. Para maiores detalhes ver [BNSz].*

As propriedades da antípoda de uma álgebra de Hopf fraca são semelhantes às da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Observe que a antípoda é um anti-homomorfismo de álgebras e um anti-homomorfismo de coálgebras. As imagens $\mathcal{S}(H_p)$ e $\mathcal{S}(H_f)$ são isomorfas a $H_f$ e $H_p$, respectivamente. Além disso, $\mathcal{S}$ é inversível. A unidade e a counidade são $\mathcal{S}$-invariantes. Para mais detalhes ver [BNSz], Teorema 2.10.

**Observação 3.1.14** *Seja $H$ uma álgebra de Hopf fraca. Então são válidas as seguintes propriedades:* $h_1 \otimes h_2\mathcal{S}(h_3) = 1_1 h \otimes 1_2$, $\mathcal{S}(h_1)h_2 \otimes h_3 = 1_1 \otimes h1_2$, $h_1 \otimes \mathcal{S}(h_2)h_3 = h1_1 \otimes \mathcal{S}(1_2)$ *e* $h_1\mathcal{S}(h_2) \otimes h_3 = \mathcal{S}(1_1) \otimes 1_2 h$. *Estas propriedades serão importantes para demonstrarmos algumas resultados mais adiante. As demonstrações destas igualdades encontram-se feitas em [BNSz].*

O dual de uma álgebra de Hopf fraca $H$ é o espaço dual $H^* = Hom_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K})$, o qual tem estrutura de álgebra de Hopf fraca, com aplicações $m^*, u^*, \Delta^*, \varepsilon^*, \mathcal{S}^*$ definidas pela transposição das aplicações da estrutura de $H$ através do *pairing* canônico $\langle\ ,\ \rangle : H^* \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz:

$$\langle \varphi\psi, h\rangle := \langle \varphi \otimes \psi, \Delta(h)\rangle,\ \langle \Delta^*(\psi), h \otimes k\rangle := \langle \psi, hk\rangle,$$

$$\langle u^*, h\rangle := \varepsilon(h),\ \varepsilon^*(\psi) := \langle \psi, u\rangle,\ \langle \mathcal{S}^*(\psi), h\rangle := \langle \psi, \mathcal{S}(h)\rangle,$$

para todo $\varphi, \psi \in H^*$ e $h, k \in H$.

**Proposição 3.1.15** *Seja $H$ uma álgebra de Hopf fraca. Então $H$ é uma álgebra de Hopf clássica se e somente se* $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$.

*Demonstração:*

Demonstraremos a recíproca, pois a implicação é imediata. Suponhamos que $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Demonstraremos que $\varepsilon$ é multiplicativa e vale $\mathcal{S}(h_1)h_2 = h_1\mathcal{S}(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$.

Sejam $g$, $h \in H$. Temos que $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g1_H h) = \varepsilon(g1_H)\varepsilon(h1_H) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Logo $\varepsilon$ é multiplicativa. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(h_1)h_2 &= (id \otimes \varepsilon)((1_H \otimes h)\Delta(1_H)) = (id \otimes \varepsilon)((1_H \otimes h)(1_H \otimes 1_H)) \\ &= (id \otimes \varepsilon)(1_H \otimes h) = \varepsilon(h)1_H. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} h_1\mathcal{S}(h_2) &= (\varepsilon \otimes id)(\Delta(1_H)(h \otimes 1_H)) = (\varepsilon \otimes id)((1_H \otimes 1_H)(h \otimes 1_H)) \\ &= (\varepsilon \otimes id)(h \otimes 1_H) = \varepsilon(h)1_H. \end{aligned}$$

Portanto, $H$ é uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

□

## 3.2 Álgebras de Hopf fracas associadas a grupóides duplos vacantes

Nesta seção, construímos uma álgebra de Hopf fraca. Para isto, consideremos $\mathcal{T}$ um grupóide duplo finito, isto é, os conjuntos $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{P}$ são finitos. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e denotamos por $\mathbb{K}\mathcal{T}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $\mathcal{B}$. Temos que as estruturas de álgebras e de coálgebra em $\mathbb{K}\mathcal{T}$ são dadas por:

*Estrutura de Álgebra:* A estrutura de álgebra em $\mathbb{K}\mathcal{T}$ corresponde a álgebra de grupóide associada a $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$. Assim, $m : \mathbb{K}\mathcal{T} \otimes \mathbb{K}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{T}$ e $u : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{T}$ são dadas por:

$$A.B = \begin{cases} \frac{A}{B}, & \text{se } \frac{A}{B}. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad u(1_{\mathbb{K}}) = \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathcal{T}} := \mathbf{1} = \sum_{x \in \mathcal{H}} \boldsymbol{id}\, x.$$

Segue que $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é uma álgebra associativa.

*Estrutura de coálgebra:* A estrutura de coálgebra em $\mathbb{K}\mathcal{T}$ corresponde ao dual da estrutura de álgebra da álgebra de grupóide associada ao grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$. Definimos, $\Delta : \mathbb{K}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{T} \otimes \mathbb{K}\mathcal{T}$ e $\varepsilon : \mathbb{K}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ por:

$$\Delta(A) = \sum_{B|C,\ A = BC} B \otimes C \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = \boldsymbol{id}\, l(A). \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente, a comultiplicação é coassociativa.

Para cada $P \in \mathcal{P}$ consideremos os elementos

$$_{P}\mathbf{1} = \sum_{x \in \mathcal{H},\ l(x) = P} \boldsymbol{id}\, x \qquad \text{e} \qquad \mathbf{1}_{P} = \sum_{x \in \mathcal{H},\ r(x) = P} \boldsymbol{id}\, x.$$

**Lema 3.2.1** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $P$, $Q \in \mathcal{P}$, então temos que $_{P}\boldsymbol{1}_{Q}\boldsymbol{1} = \delta_{P,Q}\ {}_{P}\boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{1}_{P}\boldsymbol{1}_{Q} = \delta_{P,Q}\boldsymbol{1}_{P}$.*

*Demonstração:*

Demonstraremos a primeira igualdade, a outra segue de modo análogo. Sejam $P$, $Q \in \mathcal{P}$. Assim,

$$\begin{aligned} {}_{P}\mathbf{1}_{Q}\mathbf{1} &= \left( \sum_{x \in \mathcal{H},\ l(x) = P} \boldsymbol{id}\, x \right) \left( \sum_{y \in \mathcal{H},\ l(y) = Q} \boldsymbol{id}\, y \right) \\ &= \sum_{l(x) = P,\ l(y) = Q} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{id}\, x \\ \boldsymbol{id}\, y \end{matrix} \right\} = \delta_{P,Q} \sum_{l(x) = l(y) = P} \boldsymbol{id}\, x = \delta_{P,Q}\ {}_{P}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.2** *Considere* $\mathbb{K}\mathcal{T}$ *o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com base* $\mathcal{B}$*. Então* $\Delta(\boldsymbol{1}) = \sum_{y,z\in\mathcal{H},\ y|z} \boldsymbol{id}\, y \otimes \boldsymbol{id}\, z$.

*Demonstração:*

Usando a definição de comultiplicação, temos que

$$\Delta(\mathbf{1}) = \Delta\left(\sum_{x\in\mathcal{H}} \boldsymbol{id}\, x\right) = \sum_{B|C,\ BC=\boldsymbol{id}\ t(BC)} B \otimes C.$$

Assim, obtemos que $l(B) = id\ lt(BC)$ e $r(C) = id\ rt(BC)$ e pela Proposição 2.1.6 segue que $B$, $C$ são identidades verticais, isto é, $B = \boldsymbol{id}\, y$ e $C = \boldsymbol{id}\, z$ com $y$, $z \in \mathcal{H}$. Assim,

$$\Delta(\mathbf{1}) = \sum_{y,z\in\mathcal{H},\ y|z} \boldsymbol{id}\, y \otimes \boldsymbol{id}\, z.$$

□

**Lema 3.2.3** *Considere* $\mathbb{K}\mathcal{T}$ *o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com base* $\mathcal{B}$*. Então, as aplicações* $\varepsilon_p$ *e* $\varepsilon_f$*, são dadas por*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_f(A) &= \begin{cases} {}_P\boldsymbol{1}, & se\ A = \boldsymbol{id}\, g,\ g \in \mathcal{V}\ e\ t(g) = P. \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases} \\
\varepsilon_p(A) &= \begin{cases} \boldsymbol{1}_P, & se\ A = \boldsymbol{id}\, g,\ g \in \mathcal{V}\ e\ t(g) = P. \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases}
\end{aligned}$$

*Demonstração:*

Seja $A$ em $\mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_f(A) &= (\varepsilon \otimes id)(\Delta(\mathbf{1})(A \otimes \mathbf{1})) \\
&= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{r(x)=l(y)} \boldsymbol{id}\, x \otimes \boldsymbol{id}\, y\right)\left(A \otimes \sum_{z\in\mathcal{H}} \boldsymbol{id}\, z\right) \\
&= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{r(x)=l(y)} (\boldsymbol{id}\, x).A \otimes \boldsymbol{id}\, y. \sum_{z\in\mathcal{H}} \boldsymbol{id}\, z\right) \\
&= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{r(x)=l(y)} (\boldsymbol{id}\, x).A \otimes \boldsymbol{id}\, y\right) \\
&= \left(\sum_{r(x)=l(y)} \varepsilon((\boldsymbol{id}\, x).A) \otimes \boldsymbol{id}\, y\right) \\
&= \varepsilon((\boldsymbol{id}\, x).A) \sum_{l(y)=P} \boldsymbol{id}\, y \\
&= \varepsilon(A) \sum_{l(y)=P} \boldsymbol{id}\, y
\end{aligned}$$

Na última igualdade, a composição $\boldsymbol{id}\, x.A = A$ se $x = t(A)$. Como $r(x) = P$, então temos que $P = rt(A) = tr(A)$. Pela definição da $\varepsilon$, concluímos que

$$\varepsilon_f(A) \;=\; \begin{cases} {}_P\mathbf{1}, & \text{se } A = \boldsymbol{id}\, g,\ g \in \mathcal{V} \text{ e } t(g) = P. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $g = r(A)$. Da mesma forma, demonstra-se a igualdade para $\varepsilon_p$.

□

Assim, concluímos que os dois subespaços $\mathbb{K}\mathcal{T}_p$ e $\mathbb{K}\mathcal{T}_f$ são gerados, respectivamente, por $\mathbf{1}_P$ e ${}_P\mathbf{1}$, $P$ em $\mathcal{P}$, isto é, $\mathbb{K}\mathcal{T}_p := \oplus_{P\in\mathcal{P}}\mathbb{K}\mathbf{1}_P$ e $\mathbb{K}\mathcal{T}_f := \oplus_{P\in\mathcal{P}}\mathbb{K}_P\mathbf{1}$. Além disso, são isomorfos como espaços vetoriais e são subálgebras de dimensão $|\mathcal{P}|$.

**Teorema 3.2.4** *O $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\mathcal{T}$ com estruturas de álgebra e de coálgebra definidas anteriormente é uma álgebra de Hopf fraca (ou grupóide quântico finito) se e somente se $\mathcal{T}$ é um grupóide duplo vacante. Neste caso, a antípoda é definida por $\mathcal{S}(A) = A^{-1}$, para todo $A \in \mathcal{B}$.*

*Demonstração:*

Suponhamos $\mathcal{T}$ seja um grupóide duplo vacante. Consideremos $A$, $B$ em $\mathcal{B}$ verticalmente componíveis. Assim,

$$\Delta(A.B) = \Delta\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sum X \otimes Y,$$

com $X$, $Y$ em $\mathcal{B}$, componíveis horizontalmente, tais que $XY = \dfrac{A}{B}$. Por outro lado, sejam $\Delta(A) = \sum_{U|V,\ A=UV} U \otimes V$, $\Delta(B) = \sum_{R|S,\ B=RS} R \otimes S$. Assim,

$$\Delta(A)\Delta(B) = \left(\sum_{U|V,\ A=UV} U \otimes V\right)\left(\sum_{R|S,\ B=RS} R \otimes S\right) = \sum \frac{U}{R} \otimes \frac{V}{S},$$

onde $\dfrac{U \,|\, V}{R \,|\, S}$, $A = UV$, $B = RS$. Assim, desde que $\{X \otimes Y;\ X,\ Y \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $\mathbb{K}\mathcal{T} \otimes \mathbb{K}\mathcal{T}$, temos que $\Delta(A.B) = \Delta(A)\Delta(B)$ se e somente se

$$\#\left\{\begin{pmatrix} U & V \\ R & S \end{pmatrix};\ \frac{U \,|\, V}{R \,|\, S},\ UV = A,\ RS = B,\ X = \frac{U}{R},\ Y = \frac{V}{S}\right\} = 1.$$

Como $\mathcal{T}$ é vacante, pela Proposição 2.1.4, para todo $A$, $B$, $X$, $Y$ em $\mathcal{B}$, tais que $XY = \dfrac{A}{B}$, implica que existem únicos $U,\ V,\ R,\ S$ em $\mathcal{B}$, tais que $X = \dfrac{U}{R}$, $Y = \dfrac{V}{S}$,

$A = UV$, $B = RS$ e $\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline R & S \end{array}$. Disto, segue a igualdade $\Delta(A.B) = \Delta(A)\Delta(B)$. Evidentemente, se $A$, $B$ não são componíveis a igualdade é válida. Portanto, o coproduto é multiplicativo.

Sejam $A, B, C$ em $\mathcal{B}$, com $\Delta(B) = \sum_{B=UV} U \otimes V$. Suponhamos que $A, B, C$ são componíveis verticalmente, ou seja, $b(A) = t(B)$ e $b(B) = t(C)$. Assim,

$$\varepsilon(A.B.C) = \begin{cases} 1, \text{ se } \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ é uma identidade horizontal, o Lema 1.3.5 garante a existência de únicos $U, V$ em $\mathcal{B}$ tais que $B = UV$, $\begin{matrix} A \\ U \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix}$ e $\begin{matrix} V \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix}$.

Assim,

$$\sum \varepsilon(A.U)\varepsilon(V.C) = \begin{cases} 1, \text{ se } \begin{matrix} A \\ U \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix} \text{e } \begin{matrix} V \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

E daí segue a igualdade $\varepsilon(A.B.C) = \sum \varepsilon(A.U)\varepsilon(V.C)$.

Novamente pelo Lema 1.3.5 temos que existem únicos $U'$, $V'$ em $\mathcal{B}$ tais que $B = U'V'$, $\begin{matrix} A \\ V' \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} A \\ V' \end{pmatrix}$ e $\begin{matrix} U' \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} U' \\ C \end{pmatrix}$.

Assim,

$$\sum \varepsilon(A.V')\varepsilon(U'.C) = \begin{cases} 1, \text{ se } \begin{matrix} A \\ V' \end{matrix} = \boldsymbol{id}\ \ l\begin{pmatrix} A \\ V' \end{pmatrix} \text{e } \begin{matrix} U' \\ C \end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix} U' \\ C \end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

E daí segue a igualdade $\varepsilon(A.B.C) = \sum \varepsilon(A.V')\varepsilon(U'.C)$.

Claramente, se $A, B, C$ não são componíveis adequadamente. Portanto, segue que é válida a multiplicidade fraca de counidade.

Pelo Lema 3.2.2, sabemos o $\Delta(\mathbf{1})$, agora calculamos $\Delta^2(\mathbf{1})$,

$$\begin{aligned} \Delta^2(\mathbf{1}) &= (id \otimes \Delta)\Delta(\mathbf{1}) = (id \otimes \Delta)\left( \sum_{y,z \in \mathcal{H}, y|z} \boldsymbol{id}\, y \otimes \boldsymbol{id}\, z \right) \\ &= \sum_{y|z} \boldsymbol{id}\, y \otimes \left( \sum_{z=pq,\ p|q} \boldsymbol{id}\, p \otimes \boldsymbol{id}\, q \right) = \sum_{y|p|q} \boldsymbol{id}\, y \otimes \boldsymbol{id}\, p \otimes \boldsymbol{id}\, q. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta(\mathbf{1})\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\Delta(\mathbf{1})) &= \left(\left(\sum_{y|z}\boldsymbol{id}\,y\otimes\boldsymbol{id}\,z\right)\otimes\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}\otimes\left(\sum_{p|q}\boldsymbol{id}\,p\otimes\boldsymbol{id}\,q\right)\right)\\
&= \sum_{y|z,\ p|q}\boldsymbol{id}\,y\otimes\boldsymbol{id}\,z.\boldsymbol{id}\,p\otimes\boldsymbol{id}\,q \;=\; \sum_{y|p|q}\boldsymbol{id}\,y\otimes\boldsymbol{id}\,p\otimes\boldsymbol{id}\,q.
\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $(\mathbf{1}\otimes\Delta(\mathbf{1}))(\Delta(\mathbf{1})\otimes\mathbf{1}) = \sum_{y|p|q}\boldsymbol{id}\,y\otimes\boldsymbol{id}\,p\otimes\boldsymbol{id}\,q$. Assim, segue a igualdade

$$\Delta^2(\mathbf{1}) = (\Delta(\mathbf{1})\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\Delta(\mathbf{1})) = (\mathbf{1}\otimes\Delta(\mathbf{1}))(\Delta(\mathbf{1})\otimes\mathbf{1}).$$

Logo, a válida comultiplicidade fraca da unidade. Portanto, concluímos que $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é uma biálgebra fraca. Basta verificar as condições para que $\mathbb{K}\mathcal{T}$ seja uma álgebra de Hopf fraca.

Seja $A\in\mathcal{B}$. Temos

$$\begin{aligned}
m(id\otimes\mathcal{S})\Delta(A) &= m(id\otimes\mathcal{S})\left(\sum_{A=BC,\ B|C} B\otimes C\right) = m\left(\sum B\otimes\mathcal{S}(C)\right)\\
&= m\left(\sum B\otimes C^{-1}\right) = \sum \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{C^{-1}},
\end{aligned}$$

com $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^{-1} & \end{array}$ e $A = BC$. Assim, pela Proposição 2.1.8 parte $(a)$, sabemos que o conjunto de pares $(B,C)$ tais que $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^{-1} & \end{array}$ e $A = BC$ é

$$\left\{\left( g\,\overset{z^{-1}}{\boxed{\phantom{xx}}},\ \overset{z}{\boxed{\phantom{xx}}}\,g\right); z\in\mathcal{H} \text{ e } l(z)=t(g)\right\}$$

se $A = \boldsymbol{id}\,l(A)$ e vazia caso contrário. Logo,

$$m(id\otimes\mathcal{S})\Delta(A) = \sum \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{C^{-1}} = \sum_{l(z)=P}\boldsymbol{id}\,z = {}_P\mathbf{1}$$

e, portanto,

$$m(id\otimes\mathcal{S})\Delta(A) = \begin{cases} 0, & \text{se A não é uma identidade horizontal.}\\ {}_P\mathbf{1}, & \text{se } A = \boldsymbol{id}\,l(A),\ tl(A) = P. \end{cases}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.3 temos que,

$$\varepsilon_f(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ \text{A não é uma identidade horizontal.} \\ {}_P\mathbf{1}, & \text{se } \ A = \boldsymbol{id}\, l(A), \ tl(A) = P. \end{cases}$$

Portanto, segue que é válida a igualdade $m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(A) = \varepsilon_f(A)$. Analogamente, demonstra-se que é válida a igualdade $m(\mathcal{S} \otimes id)\Delta(A) = \varepsilon_p(A)$.

Finalmente, seja $A \in \mathcal{B}$, temos que

$$\begin{aligned}
m^2(\mathcal{S} \otimes id \otimes \mathcal{S})\Delta^2(A) &= m^2(\mathcal{S} \otimes id \otimes \mathcal{S})(\Delta \otimes id)\left(\sum_{W|Z,\ A=WZ} W \otimes Z\right) \\
&= m^2(\mathcal{S} \otimes id \otimes \mathcal{S})\left(\sum \Delta(W) \otimes Z\right) \\
&= m^2(\mathcal{S} \otimes id \otimes \mathcal{S})\left(\sum_{A=XYW} X \otimes Y \otimes Z\right) \\
&= m^2\left(\sum \mathcal{S}(X) \otimes Y \otimes \mathcal{S}(Z)\right) \\
&= m(m \otimes id)\left(\sum \ X^{-1} \otimes Y \otimes Z^{-1}\right) \\
&= m\left(\sum \genfrac{}{}{0pt}{}{X^{-1}}{Y} \otimes \ Z^{-1}\right) = \sum \begin{matrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{matrix},
\end{aligned}$$

com $A = XYZ$ e $\begin{array}{c|c|c} & X^{-1} & \\ \hline X & Y & Z \\ \hline & Z^{-1} & \end{array}$, usando o Lema 2.1.5, segue que $\begin{matrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{matrix} = A^{-1}$. Como $\mathcal{T}$ é grupóide duplo vacante, então $X,\ Y,\ Z$ são os únicos morfismos que satisfazem esta condição. Assim, segue a igualdade

$$m^2(S \otimes id \otimes \mathcal{S})\Delta^2(A) = \begin{matrix} X^{-1} \\ Y \\ Z^{-1} \end{matrix} = A^{-1} = \mathcal{S}(A)$$

Portanto, $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é uma álgebra de Hopf fraca.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é uma álgebra de Hopf fraca. Usando o fato da comultiplicação ser multiplicativa, temos que $\Delta(A.B) = \Delta(A)\Delta(B)$ ou, equivalentemente, $\sum X \otimes Y = \sum \genfrac{}{}{0pt}{}{U}{R} \otimes \genfrac{}{}{0pt}{}{V}{S}$, onde $XY = \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$, com $A = UV$, $B = RS$, $X = \genfrac{}{}{0pt}{}{U}{R}$, $Y = \genfrac{}{}{0pt}{}{V}{S}$ e $\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline R & S \end{array}$. Pela unicidade de $U$, $V$, $R$ e $S$, segue pela Proposição 2.1.4, que $\mathcal{T}$ é vacante.

$\square$

**Proposição 3.2.5** *Sejam $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dois grupóides duplos vacantes finitos. Então, existem os seguintes isomorfismos de álgebras de Hopf fracas:* $\mathbb{K}(\mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2) \simeq \mathbb{K}\mathcal{T}_1 \times \mathbb{K}\mathcal{T}_2$, $\mathbb{K}(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \simeq \mathbb{K}\mathcal{T}_1 \otimes \mathbb{K}\mathcal{T}_2$.

$\square$

Agora apresentamos uma caracterização para a álgebra de grupóide. Pela Proposição 1.1.40, sabemos que $\mathcal{G}$ é isomorfo a $\coprod_{X\in\mathcal{P}/\sim}\mathcal{G}_X$, onde $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P}$, e cada componente $\mathcal{G}_X$ é um grupóide conexo na classe de equivalência $X$ e pela mesma proposição temos que $\mathcal{G}_X \simeq \mathcal{G}(x)\times\mathcal{P}^2$ para $x$ em $X$. Assim, temos que

$$\mathbb{K}\mathcal{G} \simeq \coprod_{X\in\mathcal{P}/\sim}\mathbb{K}\mathcal{G}_X \simeq \coprod_{X\in\mathcal{P}/\sim}\mathbb{K}(\mathcal{G}(x)\times\mathcal{P}^2) \simeq \bigoplus_{X\in\mathcal{P}/\sim}\mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes\mathbb{K}\mathcal{P}^2$$

Existe um isomorfismo entre as álgebras $\mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes\mathbb{K}\mathcal{P}^2 \simeq \mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes M_n(\mathbb{K})$, onde $n = |X|$. De fato, definimos a aplicação $\varphi : \mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes\mathbb{K}\mathcal{P}^2 \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes M_n(\mathbb{K})$ dada por $(g,(x_i,x_j)) \longmapsto (g,E_{ij})$. Observe que $\varphi$ definida desta forma é um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear. Logo, basta verifcar que $\varphi$ é um morfismo de álgebras.

Sejam $(g,(x_i,x_j))$, $(h,(x_k,x_l))$ em $\mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes\mathbb{K}\mathcal{P}^2$, então

$$\varphi((g,(x_i,x_j)).(h,(x_k,x_l))) = \varphi(\delta_{j,k}(gh,(x_i,x_l))) = \delta_{j,k}(gh,E_{il}).$$

Por outro lado

$$\varphi(g,(x_i,x_j)\varphi(h,(x_k,x_l) = (g,E_{ij})(h,E_{kl}) = \delta_{jk}(gh,E_{il}),$$

logo $\varphi$ é álgebras e $\mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes\mathbb{K}\mathcal{P}^2 \simeq \mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes M_n(\mathbb{K})$. Daí, concluímos que

$$\mathbb{K}\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{X\in\mathcal{P}/\sim}\mathbb{K}\mathcal{G}(x)\otimes M_n(\mathbb{K})$$

Por construção, $\mathbb{K}\mathcal{T}$ tem estrutura de álgebra correspondente a álgebra de grupóide do grupóide vertical $\mathcal{B}\rightrightarrows\mathcal{H}$. Usando a descrição anterior, temos que

$$\mathbb{K}\mathcal{T} \simeq \bigoplus_{H\in\mathcal{H}/\sim_h}\mathbb{K}\mathcal{B}(x)\otimes M_{n(H)}(\mathbb{K}), \text{ onde } n(H) = |H|.$$

Similarmente a esta construção, temos um isomorfismo de coálgebras.

$$\mathbb{K}\mathcal{T} \simeq \bigoplus_{V\in\mathcal{V}/\sim_v}\mathbb{K}\mathcal{B}(g)^*\otimes M_{n(V)}(\mathbb{K})^*, \text{ onde } n(V) = |V|.$$

**Proposição 3.2.6** *Se $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é simples como álgebra, então*

*(a) $\mathcal{B}\rightrightarrows\mathcal{H}$ é o grupóide grosseiro sobre $\mathcal{H}$.*

*(b) $\mathcal{H}\rightrightarrows\mathcal{P}$ é um feixe de grupos triviais.*

*(c) $\mathcal{V}\rightrightarrows\mathcal{P}$ é o grupóide grosseiro sobre $\mathcal{P}$.*

*(d) $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ é um feixe de grupos triviais.*

*Demonstração:*

($a$) Se $\mathbb{K}\mathcal{T}$ é simples como álgebra, então admite apenas ideais bilaterais triviais. Assim temos que $|\mathcal{H}/\sim| = 1$ e, portanto, todos os elementos de $\mathcal{H}$ se relacionam e $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é o grupóide grosseiro sobre $\mathcal{H}$.

($b$) Seja $x \in \mathcal{H}$, com $l(x) = P$ e $r(x) = Q$. Então, existe uma caixa $B$ em $\mathcal{B}$ conectando $x$ com $id\ P \in \mathcal{H}$, isto é, existe um $g \in \mathcal{V}$ com $t(g) = P$ e $b(g) = Q$ tal que

$B = \begin{array}{c} id\ P \\ \boxed{\phantom{x}}\ g \\ x \end{array}$. Como $\mathcal{T}$ é vacante, então $B = \boldsymbol{id}\ g$, logo $x = id\ Q$. Portanto, segue que $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é um feixe de grupos triviais.

($c$) Sejam $P$, $Q$ em $\mathcal{P}$, então existe uma única caixa $A$ conectando $id\ P$ e $id\ Q$, ou seja, $A = \begin{array}{c} id\ P \\ \boxed{\phantom{x}} \\ id\ Q \end{array}$. Assim, pelo fato de $\mathcal{T}$ ser vacante, os lados verticais de $A$ são iguais , e conecta $P$ e $Q$. Logo, $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é o grupóide grosseiro sobre $\mathcal{P}$.

($d$) Seja $B = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{x}}\ g \end{array}$ uma caixa em $\mathcal{B}$, com $r(x) = t(g) = P$. Pelo item ($b$), $x = id\ P$ e como $\mathcal{T}$ é vacante, segue que $B = \boldsymbol{id}\ g$, logo $\mathcal{B}(g) = \{\boldsymbol{id}\ g\}$, para todo $g$ em $\mathcal{V}$ e, portanto, $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ é um feixe de grupos triviais.

□

## 3.3 Extensões com cociclos

**Definição 3.3.1** *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ um grupóide. Um 2-cociclo normalizado em $\mathcal{G}$ sobre valores de $\mathbb{K}^\times$ é uma função $\sigma : \mathcal{G}_f \times_p \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$, que satifaz:*

1. $\sigma(g,h)\sigma(gh,l) = \sigma(h,l)\sigma(g,hl)$;

2. $\sigma(g, id\ f(g)) = \sigma(id\ p(g), g) = 1$,

*para todo g, h, l adequadamente componíveis em $\mathcal{G}$.*

Seja $\mathcal{T}$ um grupóide duplo. Um 2-cociclo normalizado vertical é um 2-cociclo no grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$. Similarmente, um 2-cociclo normalizado horizontal é um 2-cociclo no grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$.

**Definição 3.3.2** *Consideramos o grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$. Um 2-cociclo normalizado vertical é uma função $\sigma : \mathcal{B}_b \times_t \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ que satisfaz:*

1. *Se* $\dfrac{\dfrac{A}{B}}{C}$, *então* $\sigma(A,B)\sigma\left(\dfrac{A}{B}, C\right) = \sigma(B,C)\sigma\left(A, \dfrac{B}{C}\right)$;

2. *Se* $A$ *ou* $B$ *é uma identidade vertical, então* $\sigma(A,B) = 1$.

**Definição 3.3.3** *Consideramos o grupóide* $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$. *Um 2-cociclo normalizado horizontal é uma função* $\tau : \mathcal{B}_r \times_l \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ *que satisfaz:*

1. *Se* $A|B|C$, *então* $\tau(A,B)\tau(AB,C) = \tau(B,C)\tau(A,BC)$;

2. *Se* $A$ *ou* $B$ *é uma identidade horizontal, então* $\tau(A,B) = 1$.

**Lema 3.3.4** *Seja* $\mathcal{T}$ *um grupóide duplo. Se considerarmos* $A = B^v = C$ *na Definição 3.3.2, obtemos* $\sigma(B^v, B) = \sigma(B, B^v)$. *Analogamente, se considerarmos* $A = B^h = C$ *na Definição 3.3.3, obtemos* $\tau(B^h, B) = \tau(B, B^h)$.

*Demonstração:*

Consideremos $A = C = B^v$ e substituindo na equação (1) da Definição 3.3.2, obtemos $\sigma(B^v, B)\sigma\left(\dfrac{B^v}{B}, B^v\right) = \sigma(B, B^v)\sigma\left(B^v, \dfrac{B}{B^v}\right)$. Mas como $\dfrac{B^v}{B} = \boldsymbol{id}\ t(B)$ e $\dfrac{B}{B^v} = \boldsymbol{id}\ b(B)$. Assim, pelo item 2 da Definição 3.3.2, concluímos que $\sigma(B^v, B) = \sigma(B, B^v)$. Do mesmo modo, verifica-se a outra parte do lema.

□

**Definição 3.3.5** *Seja* $\mathcal{T}$ *um grupóide duplo. Um 2-cociclo normalizado em* $\mathcal{T}$ *com valores em* $\mathbb{K}^\times$ *é um par* $(\sigma, \tau)$, *onde* $\sigma$ *é um 2-cociclo normalizado vertical e* $\tau$ *é um 2-cociclo normalizado horizontal, e vale a seguinte propriedade:*

$$\text{Se } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}, \text{ então } \sigma(AB, CD)\tau\begin{pmatrix} A & B \\ C, & D \end{pmatrix} = \tau(A,B)\tau(C,D)\sigma(A,C)\sigma(B,D). \quad (3.3)$$

**Lema 3.3.6** *Se* $x,\ y \in \mathcal{H}$, $r(x) = l(y)$ *tal que* $\begin{array}{c|c} \boldsymbol{id}\ x & \boldsymbol{id}\ y \\ \hline \boldsymbol{id}\ x & \boldsymbol{id}\ y \end{array}$, *então temos que* $\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y) = 1$. *Similarmente, se* $f,\ g \in \mathcal{V}$, $b(f) = t(g)$ *tal que* $\begin{array}{c|c} \boldsymbol{id}\ f & \boldsymbol{id}\ f \\ \hline \boldsymbol{id}\ g & \boldsymbol{id}\ g \end{array}$, *então temos que* $\sigma(\boldsymbol{id}\ f, \boldsymbol{id}\ g) = 1$.

*Demonstração:*

Sejam $x,\ y \in \mathcal{H}$ tais que $r(x) = l(y)$, assim a composição $\boldsymbol{id}\ x|\boldsymbol{id}\ y$ faz sentido. da equação 3.3, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{id}\ x\ \ \boldsymbol{id}\ y, \boldsymbol{id}\ x\ \ \boldsymbol{id}\ y)\tau\begin{pmatrix} \boldsymbol{id}\ x & \boldsymbol{id}\ y \\ \boldsymbol{id}\ x' & \boldsymbol{id}\ y \end{pmatrix} &= \sigma(\boldsymbol{id}\ xy, \boldsymbol{id}\ xy)\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y) \\
&= \tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y) \ = \ 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y)\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y)\sigma(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ x)\sigma(\boldsymbol{id}\ y, \boldsymbol{id}\ y) &= \tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y)\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y) \\
&= \tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y).
\end{aligned}$$

Disto segue $\tau(\boldsymbol{id}\ x, \boldsymbol{id}\ y) = 1$. Analogamente, demonstra-se a outra parte do lema.

$\square$

Dados um 2-cociclo normalizado vertical $\sigma$ e um 2-cociclo normalizado horizontal $\tau$ no grupóide duplo $\mathcal{T}$, podemos considerar a estrutura de álgebra de grupóide $\sigma$-torcida e, dualmente, a estrutura de coálgebra de grupóide $\tau$-torcida no $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\mathcal{T}$ com base $\mathcal{B}$. Vejamos:

*Estrutura de álgebra $\sigma$-torcida*: Deformamos a estrutura de álgebra de grupóide de $\mathbb{K}\mathcal{T}$ correspondente ao grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$. Seja $\sigma : \mathcal{B}_b \times_t \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ uma função, definimos a multiplicação e a unidade por:

$$A.B = \begin{cases} \sigma(A,B)\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}, & \text{se } \dfrac{A}{B}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{1}^\sigma := \mathbf{1} = \sum_{x \in \mathcal{H}} \boldsymbol{id}\ x$$

Sejam $A,\ B,\ C$ em $\mathcal{B}$ componíveis, então $(A.B).C = \sigma(A,B)\sigma(\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}, C)\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}$. Por outro lado, $A.(B.C) = \sigma(B,C)\sigma(A, \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{C})\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}$. Assim, a multiplicação é associativa se e somente se $\sigma$ é um 2-cociclo normalizado vertical. Denotamos a álgebra de grupóide $\sigma$-torcida por $\mathbb{K}_\sigma\mathcal{T}$.

*Estrutura de coálgebra $\tau$-torcida*: Dualmente, deformamos a estrutura de coálgebra de grupóide de $\mathbb{K}\mathcal{T}$ correspondente ao grupóide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$. Consideremos a função $\tau : \mathcal{B}_r \times_l \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ e definimos a comultiplicação e a counidade por:

$$\Delta(A) = \sum_{B|C,\ A=BC} \tau(B,C) B \otimes C \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_\tau(A) := \varepsilon(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = \boldsymbol{id}\ l(A), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A comultiplicação é coassociativa se e somente se $\tau$ é um 2-cociclo normalizado horizontal. De fato, seja $A \in \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)\Delta(A) &= (\Delta\otimes id)\left(\sum_{A=A_1A_2}\tau(A_1,A_2)\ A_1\otimes A_2\right)\\ &= \sum_{A=A_1A_2}\tau(A_1,A_2)\ \Delta(A_1)\otimes A_2\\ &= \sum_{A=A_{11}A_{12}A_2}\tau(A_{11},A_{12})\tau(A_1,A_2)\ A_{11}\otimes A_{12}\otimes A_2\\ &= \sum_{A=A_1A_2A_3}\tau(A_1,A_2)\tau(A_1A_2,A_3)\ A_1\otimes A_2\otimes A_3.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(id\otimes\Delta)\Delta(A) = \sum_{A=A_1A_2A_3}\tau(A_2,A_3)\tau(A_1,A_2A_3)\ A_1\otimes A_2\otimes A_3.$$

Denotamos a coálgebra de grupóide $\tau$-torcida por $\mathbb{K}^{\tau}\mathcal{T}$.

O teorema a seguir afirma que, as estruturas de álgebra $\sigma$-torcida e de coálgebra $\tau$-torcida formam uma estrutura de álgebra Hopf fraca. Desde que $\mathcal{T}$ seja vacante e a condição de compatibilidade dada na equação (3.3) vale.

**Teorema 3.3.7** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $(\sigma,\tau)$ um 2-cociclo normalizado em $\mathcal{T}$ com valores em $\Bbbk^{\times}$. Sejam $\mathbb{K}^{\tau}_{\sigma}\mathcal{T}$ o espaço vetorial com base $\mathcal{B}$ e estruturas de álgebra ($\mathbb{K}_{\sigma}\mathcal{T}$) e coálgebra ($\mathbb{K}^{\tau}\mathcal{T}$) definidas anteriormente. Então $\mathbb{K}^{\tau}_{\sigma}\mathcal{T}$ é uma álgebra de Hopf fraca com antípoda definida por:*

$$\mathcal{S}(A) = \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}A^{-1}.$$

*Demonstração:*

Procedendo da mesma forma que no Teorema 3.2.4 concluímos que $\Delta$ é multiplicativa se e somente se vale a condição (3.3). Em outras palavras temos que $\Delta(A.B) = \Delta(A)\Delta(B)$ se e somente se

$$\sum\sigma(A,B)\tau(X,Y)X\otimes Y = \sum\tau(U,V)\tau(R,S)\sigma(U,R)\sigma(V,S)\frac{U}{R}\otimes\frac{V}{S},$$

onde $XY = \frac{A}{B}$, com $A = UV$, $B = RS$, $X = \frac{U}{R}$, $Y = \frac{V}{S}$ e $\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline R & S\end{array}$.

Sejam $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}$, com $\Delta(B) = \sum_{B=UV}\tau(U,V)U\otimes V$ e adequadamente componíveis. Note que $A.B.C = \sigma(A,B)\sigma(\frac{A}{B},C)\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}$. Assim,

$$\varepsilon(A.B.C) = \begin{cases} \sigma(A,B)\sigma(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix},C), \text{ se } \begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $g = l\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$, mas se $\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}$ é uma identidade horizontal, então $t(A) = id\ t(g)$ e pela Proposição 2.1.6, segue que $A = \boldsymbol{id}\ l(A)$. Do mesmo modo, concluímos que $B = \boldsymbol{id}\ l(B)$ e $C = \boldsymbol{id}\ l(C)$, pois $t(B) = b(A) = id\ bl(A)$ e $b(B) = t(C) = id\ tl(C)$. Logo, pela definição de 2-cociclo normalizado vertical, segue que

$$\varepsilon(A.B.C) = \begin{cases} 1, \text{ se } \begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}$ é uma identidade horizontal, o Lema 1.3.5, garante a existência de únicos $U$, $V$ em $\mathcal{B}$ tais que $B = UV$, $\begin{matrix}A\\U\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}A\\U\end{pmatrix}$ e $\begin{matrix}V\\C\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}V\\C\end{pmatrix}$. Mas como $b(U) = id\ bl\begin{pmatrix}A\\U\end{pmatrix}$ e $t(V) = id\ tl\begin{pmatrix}V\\C\end{pmatrix}$ segue que $U = \boldsymbol{id}\ l(U)$ e $V = \boldsymbol{id}\ l(V)$. Além disso, de $B = UV$ e $B = \boldsymbol{id}\ l(B)$, segue que $B = U = V$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \varepsilon(A.U)\varepsilon(V.C) &= \varepsilon(A.B)\varepsilon(B.C) \\ &= \begin{cases} \tau(B,B)\sigma(A,B)\sigma(B,C), \text{ se } \begin{matrix}A\\B\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \text{ e } \begin{matrix}B\\C\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, \text{ se } \begin{matrix}A\\B\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \text{ e } \begin{matrix}B\\C\end{matrix} = \boldsymbol{id}\, l\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} . \end{aligned}$$

Logo, segue a propriedade de multiplicidade fraca da counidade. Claramente, se $A$, $B$, $C$ não são componíveis segue a propriedade.

Observe que $\Delta(\mathbf{1}) = \sum_{y|z} \tau(\boldsymbol{id}\ y, \boldsymbol{id}\ z)\boldsymbol{id}\ y \otimes \boldsymbol{id}\ z$. Pelo Lema 3.3.6, temos que $\tau(\boldsymbol{id}\, y, \boldsymbol{id}\, z) = 1$ e, consequentemente, $\Delta(\mathbf{1}) = \sum_{y|z} \boldsymbol{id}\, y \otimes \boldsymbol{id}\, z$. O resto da verificação da propriedade da comultiplicidade de unidade é análoga a do Teorema 3.2.4, apenas utilizando o Lema 3.3.6 de forma adequada.

Agora, mostraremos as propriedades para que $\mathbb{K}_\sigma^\tau \mathcal{T}$ seja uma álgebra de Hopf fraca. Seja $A \in \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned}
m(id\otimes S)\Delta(A) &= m(id\otimes S)\left(\sum_{A=BC,\ B|C}\tau(B,C)B\otimes C\right)\\
&= m(\sum\tau(B,C)B\otimes S(C))\\
&= m(\sum\tau(B,C)\tau(C,C^h)^{-1}\sigma(C^{-1},C^h)^{-1}B\otimes C^{-1})\\
&= \sum\tau(B,C)\tau(C,C^h)^{-1}\sigma(C^{-1},C^h)^{-1}\sigma(B,C^{-1})\ \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{C^{-1}}\\
&= \sum_{z\in\mathcal{H},\ l(z)=P}\tau(C^h,C)\tau(C,C^h)^{-1}\sigma(C^{-1},C^h)^{-1}\sigma(C^h,C^{-1})\boldsymbol{id}\,z.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue da Proposição 2.1.8. Pelo Lema 3.3.4, concluímos que

$$m(id\otimes S)\Delta(A) = \begin{cases} 0, & \text{se A não é uma identidade horizontal.}\\ {}_P\mathbf{1}, & \text{se } A=\boldsymbol{id}\,l(A),\ tl(A)=P.\end{cases}$$

Por outro lado, $\varepsilon_f(A)$ é dada pelo Lema 3.2.3, assim segue a igualdade $m(id\otimes S)\Delta(A)=\varepsilon_f(A)$. Analogamente, demonstra-se que é válida a igualdade $m(S\otimes id)\Delta(A)=\varepsilon_p(A)$.

Finalmente, seja $A\in\mathcal{B}$, temos que

$$\begin{aligned}
m^2(S\otimes id\otimes S)\Delta^2(A) &= m^2(S\otimes id\otimes S)(\Delta\otimes id)\left(\sum_{W|Z,\ A=WZ}\tau(W,Z)W\otimes Z\right)\\
&= m^2(S\otimes id\otimes S)\left(\sum_{A=XYW}\tau(W,Z)\tau(X,Y)X\otimes Y\otimes Z\right)\\
&= m^2\left(\sum\tau(W,Z)\tau(X,Y)S(X)\otimes Y\otimes S(Z)\right)\\
&= \sum\tau(XY,Z)\tau(X,Y)\tau(X,X^h)^{-1}\sigma(X^{-1},X^h)^{-1}\tau(Z,Z^h)^{-1}\\
&\quad\ \sigma(Z^{-1},Z^h)^{-1}\sigma(X^{-1},Y)\sigma(\genfrac{}{}{0pt}{}{X^{-1}}{Y},Z^{-1})\ \begin{matrix}X^{-1}\\ Y\\ Z^{-1}\end{matrix}\\
&= \sum\tau(AA^h,A)\tau(A,A^h)\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\tau(A,A^h)^{-1}\\
&\quad\ \sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)\sigma(\genfrac{}{}{0pt}{}{A^{-1}}{A},A^{-1})A^{-1}\\
&= \sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\tau(A,A^h)^{-1}A^{-1}\\
&= \mathcal{S}(A).
\end{aligned}$$

Na quinta igualdade, usamos o Lema 2.1.5. Portanto, $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é álgebra de Hopf fraca.

□

**Teorema 3.3.8** *Seja* $(\varrho, \varpi)$ *outro 2-cociclo normalizado sobre* $\mathcal{T}$ *com valores em* $\Bbbk^{\times}$. *Sejam* $\psi$: $\mathcal{T} \longrightarrow \Bbbk^{\times}$ *uma aplicação, com* $\psi(A) = 1$ *se* $A$ *é uma identidade e* $\Psi : \mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{K}_{\varrho}^{\varpi}\mathcal{T}$ *uma aplicação linear dada por* $\Psi(A) = \psi(A)A$, $A$ *em* $\mathcal{B}$. *Então* $\Psi$ *é um isomorfismo de álgebras de Hopf fracas se, e somente se, valem*

$$\psi\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\sigma(A,B) = \psi(A)\psi(B)\varrho(A,B), \text{ para todo } A, B \in \mathcal{B} \text{ tais que } \frac{A}{B}; \tag{3.4}$$

$$\psi(CD)\varpi(C,D) = \psi(C)\psi(D)\tau(C,D), \text{ para todo } C, D \in \mathcal{B} \text{ tais que } C|D. \tag{3.5}$$

*Demonstração:*

Como as bases de $\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T}$ e $\mathbb{K}_{\varrho}^{\varpi}\mathcal{T}$ é a mesma e como $\Psi$ leva a base na base, concluímos que $\Psi$ é um isomorfimo linear. Assim, basta verificar que $\Psi$ é um morfismo de álgebras de Hopf fracas. Sejam $A$, $B$ em $\mathcal{B}$ tais que $\frac{A}{B}$, assim

$$\Psi(A.B) = \Psi\left(\sigma(A,B)\frac{A}{B}\right) = \sigma(A,B)\Psi\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\sigma(A,B)\frac{A}{B}.$$

Por outro lado,

$$\Psi(A).\Psi(B) = \psi(A)A.\psi(B).B = \psi(A)\psi(B)A.B = \psi(A)\psi(B)\varrho(A,B)\frac{A}{B}.$$

Logo $\Psi$ é um morfismo de álgebras se e somente se vale (3.4). Agora, mostraremos que $\Psi$ é um morfismo de coálgebras se e somente se vale (3.5). De fato, seja $A$ em $\mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi(A)) &= \Delta(\psi(A)A) = \psi(A)\Delta(A) \\ &= \psi(A)\left(\sum_{A=CD}\varpi(C,D)C\otimes D\right) = \sum_{A=CD}\psi(CD)\varpi(C,D)C\otimes D. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\Psi\otimes\Psi)(\Delta(A)) &= (\Psi\otimes\Psi)\left(\sum_{A=CD}\tau(C,D)C\otimes D\right) = \sum_{A=CD}\tau(C,D)\Psi(C)\otimes\Psi(D) \\ &= \sum_{A=CD}\psi(C)\psi(D)\tau(C,D)C\otimes D. \end{aligned}$$

Claramente, $\Psi$ preserva a unidade e a counidade. Resta mostrar que $\Psi\circ\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2\circ\Psi$, onde $\mathcal{S}_1$ é a antípoda de $\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}_2$ é a antípoda de $\mathbb{K}_{\varrho}^{\varpi}\mathcal{T}$. Seja $A$ em $\mathcal{B}$, temos que

$$\mathcal{S}_2(\Psi(A)) = \mathcal{S}_2(\psi(A)A) = \psi(A)\mathcal{S}_2(A) = \varpi(A,A^h)^{-1}\varrho(A^{-1},A^h)^{-1}\psi(A)A^{-1}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\Psi(\mathcal{S}_1(A)) &= \Psi(\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}A^{-1})\\ &= \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\Psi(A^{-1})\\ &= \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\psi(A^{-1})A^{-1}.\end{aligned}$$

Assim, temos que $\Psi \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 \circ \Psi$ se e somente se

$$\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\psi(A^{-1}) = \varpi(A,A^h)^{-1}\varrho(A^{-1},A^h)^{-1}\psi(A).$$

Por (3.4), temos que

$$\sigma(A^{-1},A^h) = \psi\begin{pmatrix}A^{-1}\\A^h\end{pmatrix}^{-1}\psi(A^{-1})\psi(A^h)\varrho(A^{-1},A^h) = \psi(A^{-1})\psi(A^h)\varrho(A^{-1},A^h),$$

e por (3.5), temos que

$$\tau(A,A^h) = \psi(A^h)^{-1}\psi(A)^{-1}\psi(AA^h)\varpi(A,A^h) = \psi(A^h)^{-1}\psi(A)^{-1}\varpi(A,A^h).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\psi(A^{-1}) &= (\varpi(A,A^h))^{-1}(\varrho(A^{-1},A^h))^{-1}\psi(A)\psi(A^h)\\ &\quad (\psi(A^{-1}))^{-1}(\psi(A^h))^{-1}\psi(A^{-1})\\ &= (\varpi(A,A^h))^{-1}(\varrho(A^{-1},A^h))^{-1}\psi(A).\end{aligned}$$

□

**Proposição 3.3.9** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $(\sigma,\tau)$ um 2-cociclo normalizado sobre $\mathcal{T}$ com valores em $\mathbb{K}^\times$. Então a álgebra de Hopf fraca $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é uma álgebra de Hopf ordinária se e somente se $\mathcal{T}$ decorre de um par combinado de grupos.*

*Demonstração:*

Pelo Lema 3.1.6, uma álgebra de Hopf fraca é uma álgebra de Hopf ordinária se e somente se $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Assim, $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é uma álgebra de Hopf ordinária se e somente se $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} = \sum_{z,w\in\mathcal{H}} \boldsymbol{id}\ z \otimes \boldsymbol{id}\ w$. Mas pelo Lema 3.2.2, temos que $\Delta(\mathbf{1}) = \sum \boldsymbol{id}\ x \otimes \boldsymbol{id}\ y$, onde $x$ e $y$ são componíveis. Logo, a igualdade $\Delta(\mathbf{1}) = \sum_{z,w\in\mathcal{H}} \boldsymbol{id}\ z \otimes \boldsymbol{id}\ w$ é válida se todos de elementos de $\mathcal{H}$ são componíveis. Assim, para que isso aconteça temos que ter $|\mathcal{P}| = 1$, ou seja, $\mathcal{T}$ decorre de um par combinado de grupos. A recíproca encontra-se em ([AN1]).

□

**Proposição 3.3.10** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante a $(\sigma,\tau)$ um 2-cociclo normalizado sobre $\mathcal{T}$ com valores em $\mathbb{K}^\times$. Então $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é uma involução.*

*Demonstração:*

$\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é uma involução se, para todo $A\in\mathcal{B}$, tivermos $\mathcal{S}^2(A)=A$. Assim, seja $A\in\mathcal{B}$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^2(A) &= \mathcal{S}(\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}A^{-1}) = \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\mathcal{S}(A^{-1})\\ &= \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\tau(A^{-1},(A^{-1})^h)^{-1}\sigma((A^{-1})^{-1},(A^{-1})^h)^{-1}(A^{-1})^{-1}\\ &= \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\tau(A^{-1},A^v)^{-1}\sigma(A,A^v)^{-1}A.\end{aligned}$$

Notemos que é válido $\begin{array}{c|c} A & A^h \\ \hline A^v & A^{-1}\end{array}$, assim usando a condição 3.3 da Definição 3.3.5, temos

$$\sigma(AA^h,A^vA^{-1})\tau\begin{pmatrix} A & A^h \\ A^h, & A^{-1}\end{pmatrix}=\tau(A,A^h)\tau(A^v,A^{-1})\sigma(A,A^v)\sigma(A^h,A^{-1}).$$

Mas como $AA^h$, $A^vA^{-1}$, $\begin{matrix}A\\A^h\end{matrix}$ e $\begin{matrix}A^h\\A^{-1}\end{matrix}$ são identidades, então pelas Definições 3.3.2 e 3.3.3, segue que $\tau(A,A^h)\tau(A^v,A^{-1})\sigma(A,A^v)\sigma(A^h,A^{-1})=1$. Além disso, sabemos que $\tau(A^v,A^{-1})=\tau(A^{-1},A^v)$ e $\sigma(A^h,A^{-1})=\sigma(A^{-1},A^h)$. Logo segue que $\mathcal{S}^2(A)=A$.

□

**Observação 3.3.11** *Se char $\mathbb{K}=0$, então $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ é semissimples e cosemissimples. Para mais detalhes sobre isto, ver Corolário 6.5 em [N].*

**Proposição 3.3.12** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $(\sigma,\tau)$ um 2-cociclo normalizado em $\mathcal{T}$ com valores em $\mathbb{K}^\times$. Então $(\tau,\sigma)$ é um 2-cociclo normalizado no grupóide duplo transposto $\mathcal{T}^t$ e a álgebra de Hopf fraca $\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t$ é dual para $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$.*

*Demonstração:*

A estrutura de álgebra de Hopf fraca de $\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t$ é dada por:

$$A^t.B^t=\begin{cases}\tau(A,B)(AB)^t, \text{ se } \dfrac{A^t}{B^t},\\ 0, \qquad \text{caso contrário.}\end{cases}\qquad \text{e}\qquad \mathbf{1}^t=\sum_{g\in\mathcal{H}^t}\boldsymbol{id}\,g,$$

$$\Delta^t(A^t)=\sum_{B^t|C^t,\ A^t=\binom{B}{C}^t}\sigma(B,C)B^t\otimes C^t\quad \text{e}\quad \varepsilon^t(A^t)=\begin{cases}1, \text{ se } A^t=\boldsymbol{id}\,l^t(A^t),\\ 0, \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

$$\mathcal{S}^t(B^t) = \sigma(B, B^v)^{-1}\tau(B^{-1}, B^v)^{-1}(B^{-1})^t.$$

Definimos a seguinte forma $\mathbb{K}$-bilinear $\langle\ |\ \rangle : \mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T} \times \mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $\langle B|C^t\rangle = \delta_{B,C}$. Temos que $\langle\ |\ \rangle$ é não-degenarada.

De fato, se $\langle\sum_A \lambda_A A|B^t\rangle = 0$, então $\lambda_B\delta_{B,B} = \lambda_B = 0$, para todo $B^t \in \mathcal{T}^t$. Logo $\sum_A \lambda_A A = 0$. Do mesmo modo, se $\langle A|\sum_{B^t}\lambda_{B^t}B^t\rangle = 0$, então $\lambda_A\delta_{A,A} = \lambda_A = 0$, para todo $A \in \mathcal{T}$. Logo $\sum_{B^t}\lambda_{B^t}B^t = 0$.

Consideremos $(\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t)^*$ e definimos $\varphi : \mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T} \longrightarrow (\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t)^*$, por $\varphi(A)(B^t) = \langle A|B^t\rangle$. Por $\langle\ |\ \rangle$ ser não-degenerada segue que $\varphi$ é injetora. Assim, $dim(\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}) = dim(Im(\varphi)) \leq dim((\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t)^*) = dim(\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t)$. Logo $dim(\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}) \leq dim(\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t)$. Do mesmo modo, consideremos $(\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T})^*$ e definimos $\chi : \mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t \longrightarrow (\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T})^*$, por $\chi(B^t)(A) = \langle A|B^t\rangle$. Por $\langle\ |\ \rangle$ ser não-degenerada segue que $\chi$ é injetora e, consequentemente, $dim(\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t) \leq dim(\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T})$. Portanto, $\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t \simeq \mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ como espaços vetoriais. Basta verificar se $\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t$, $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$ estão em dualidade, isto é, se $\langle\ |\ \rangle$ é um *pairing*.

Sejam $A$, $B$ em $\mathcal{T}$ e $C^t$ em $\mathcal{T}^t$, com $\Delta^t(C^t) = \sum_{C^t = \binom{U}{V}^t}\sigma(U,V)U^t \otimes V^t$. Assim,

$$\langle A.B|C^t\rangle = \sigma(A,B)\langle \tfrac{A}{B}|C^t\rangle = \sigma(A,B)\delta_{\frac{A}{B},C} = \begin{cases} \sigma(A,B), & \text{se } C = \dfrac{A}{B}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\sum_{C^t = \binom{U}{V}^t}\sigma(U,V)\langle A|U^t\rangle\langle B|V^t\rangle = \sigma(U,V)\delta_{A,U}\delta_{B,V} = \begin{cases} \sigma(U,V), & \text{se } A = U \text{ e } B = V, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas se $A = U$ e $B = V$, é válida a igualdade $\langle A.B|C^t\rangle = \sum\langle A|U^t\rangle\langle B|V^t\rangle$. De modo totalmente análogo, verifica-se a igualdade $\langle A|B^t.C^t\rangle = \sum\langle R|B^t\rangle\langle S|C^t\rangle$.

Agora, para $C^t$ em $\mathcal{T}^t$, temos que $\langle \mathbf{1}|C^t\rangle = \delta_{\mathbf{1},C} = 1$, se $C = \boldsymbol{id}\ t(C)$ e 0 caso contrário. Mas $\boldsymbol{id}\ t(C) = \boldsymbol{id}\ l^t(C^t)$, daí segue a igualdade $\langle \mathbf{1}|C^t\rangle = \varepsilon^t(C^t)$. Similarmente, verifica-se que $\langle A|\mathbf{1}^t\rangle = \varepsilon(A)$, para todo $A$ em $\mathcal{T}$.

Finalmente, temos que $\langle\mathcal{S}(A)|B^t\rangle = \tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}\delta_{A^{-1},B}$, o que é igual a $\tau(A,A^h)^{-1}\sigma(A^{-1},A^h)^{-1}$ se $A^{-1} = B$ e zero, caso contrário. Por outro lado, $\langle A|\mathcal{S}^t(B^t)\rangle = \tau(B^{-1},B^v)^{-1}\sigma(B,B^v)^{-1}\delta_{A,B^{-1}}$ o que é igual a $\tau(B^{-1},B^v)^{-1}\sigma(B,B^v)^{-1}$ se $A = B^{-1}$ e zero, caso contrário. Observemos que $A^{-1} = B$ se e somente se $A = B^{-1}$, e ainda que $(A^{-1})^v = A^h$. Assim, vale a igualdade $\langle\mathcal{S}(A)|B^t\rangle = \langle A|\mathcal{S}^t(B^t)\rangle$. Portanto, concluímos que $\mathbb{K}_\tau^\sigma\mathcal{T}^t$ é dual para $\mathbb{K}_\sigma^\tau\mathcal{T}$.

□

# Capítulo 4

# A Categoria de representações de uma álgebra de Hopf fraca

O intuito deste capítulo é mostrar que, em geral, a *categoria de representações* de um álgebra de Hopf fraca $H$ tem estrutura de categoria $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida. Em particular, a categoria de representações da álgebra de Hopf fraca proveniente de um grupóide duplo vacante, além de ser $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida, é uma categoria tensorial e de fusão, sob determinadas condições.

## 4.1 Categoria monoidal rígida, categoria tensorial e categoria de fusão

O objetivo desta seção é apresentar as noções de categoria monoidal rígida, categoria tensorial e categoria de fusão. Para isso, necessitamos introduzir alguns conceitos.

**Definição 4.1.1** *Dados $\mathcal{C}$ uma categoria e $X$, $Y$ em $\mathcal{C}$. Um produto de $X$ e $Y$ é uma terna $(P, p, q)$, onde $P$ é um objeto em $\mathcal{C}$, $p \in Mor_{\mathcal{C}}(P, X)$ e $q \in Mor_{\mathcal{C}}(P, Y)$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: dados $Z$ em $\mathcal{C}$ e um par de morfismos $r \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$ e $s \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, Y)$, existe um único $\theta \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, P)$ tal que $p \circ \theta = r$ e $q \circ \theta = s$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, dotted, "\theta"] \arrow[dr, "s"] & \\
X & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

*Se $X$ e $Y$ possui produto, escrevemos $X \oplus Y$ para representar o produto.*

**Exemplo 4.1.2** Considere a categoria $Set$. Dados $X$, $Y$ em $Set$, o produto de $X$ e $Y$, é o produto cartesiano $P = X \times Y$, juntamente com as funções projeções. De fato, sejam $W$ em $Set$, $f \in Mor_{\mathcal{C}}(W, X)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}}(W, Y)$. Definimos, $\theta : W \longrightarrow X \times Y$, por $\theta(x) = (f(x), g(x))$. Assim,

$$(\pi_1 \circ \theta)(x) = \pi_1(f(x), g(x)) = f(x) \text{ e } (\pi_2 \circ \theta)(x) = \pi_2(f(x), g(x)) = g(x).$$

É fácil ver que $\theta$ é única. Portanto, $X \times Y$ é produto para $X$ e $Y$.

**Exemplo 4.1.3** Em ${}_R Mod$ o produto entre dois $R$-módulos $M$, $N$ é dado pelo produto direto $M \oplus N$, juntamente com as projeções.

**Proposição 4.1.4** *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X$, $Y$ objetos em $\mathcal{C}$. Então, o produto de $X$ e $Y$, se existe, é único a menos de isomorfismo.*

*Demonstração:*

Sejam $(P, p, q)$ e $(P', p', q')$ produtos para $X$ e $Y$. Como $(P, p, q)$ é produto, existe um único $\theta : P \longrightarrow P'$ morfismo tal que $p \circ \theta = p'$ e $q \circ \theta = q'$. Por outro lado, como $(P', p', q')$ é produto existe um único $\theta' : P' \longrightarrow P$ morfismo tal que $p' \circ \theta' = p$ e $q' \circ \theta' = q$. Portanto, temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, dotted, "\theta\circ\theta'"] \arrow[dr, "q"] & \\
X & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Mas o morfismo $1_P$ também faz este diagrama comutar. Logo, pela unicidade da definição de produto, temos que $\theta \circ \theta' = 1_P$. Analogamente, concluímos que $\theta' \circ \theta = 1_{P'}$. Portanto, $\theta$ é um isomorfismo de $P$ para $P'$.

□

**Definição 4.1.5** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $Z$ de $\mathcal{C}$ é dito um objeto zero para $\mathcal{C}$, se os conjuntos de morfismos $Mor_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{f_X\}$ e $Mor_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{g_X\}$ são unitários, para todo $X$ de $\mathcal{C}$.*

**Exemplo 4.1.6** Na categoria ${}_R Mod$ o objeto zero é o $R$-módulo trivial. Na categoria $Vec_{\mathbb{K}}$, o espaço vetorial nulo, é o objeto zero.

**Observação 4.1.7** *Assim como o produto, se existe, o objeto zero em uma categoria, então é único a menos de isomorfismo.*

**Definição 4.1.8** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z. Para todo X, Y de $\mathcal{C}$, definimos o morfismo $0_Y^X : X \longrightarrow Y$, dado por $0_Y^X = g_Y \circ f_X$.*

**Definição 4.1.9** *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita pré-aditiva se:*

- *Para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, o conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é grupo abeliano;*
- *A composição é distributiva com relação à operação do grupo, isto é, sejam f, g: $X \longrightarrow Y$, h: $Z \longrightarrow X$ e l: $Y \longrightarrow W$, então*

$$l(f+g) = lf + lg \quad e \quad (f+g)h = fh + gh.$$

**Exemplo 4.1.10** *A categoria Ab é uma categoria pré-aditiva.*

**Definição 4.1.11** *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita aditiva, se:*

- *$\mathcal{C}$ é pré-aditiva;*
- *$\mathcal{C}$ possui objeto zero;*
- *Para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, existe o produto $X \oplus Y$.*

**Exemplo 4.1.12** A categoria ${}_R Mod$ é uma categoria aditiva, onde $Mor(V,W)$ tem estrutura de grupo abeliano induzida pela soma do $R$-módulo $W$ e valem as distributivas. O objetivo zero e o produto existem (ver, Exemplos 4.1.3 e 4.1.6).

**Definição 4.1.13** *Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita $\mathbb{K}$-linear se, para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, o conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tem estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial e a composição em $\mathcal{C}$ é uma transformação $\mathbb{K}$-bilinear.*

**Definição 4.1.14** *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é dito aditivo se $F(f+g) = F(f) + F(g)$, para todo f, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Além disso, se $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ são $\mathbb{K}$-lineares e F: $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ são transformações $\mathbb{K}$-lineares então dizemos que F é funtor $\mathbb{K}$-linear.*

**Definição 4.1.15** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo f em $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é dito um monomorfismo se $f \circ g = f \circ h$ então $g = h$, para todo g, h em $Mor_{\mathcal{C}}(Z,X)$.*

Agora, sejam $f : X_1 \longrightarrow X$, $f' : X_2 \longrightarrow X$ monomorfismos, dizemos que esses monomorfismos são equivalentes se existe um isomorfismo $\mu : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $\mu \circ f' = f$. Um *subobjeto* de $X$ é uma classe de equivalência de monomorfismos que chegam em X. Se $Y$ é um subobjeto de X, denotaremos por $Y \subseteq X$.

**Definição 4.1.16** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva.*

- *Um objeto $X$ de $\mathcal{C}$, distinto do objeto zero, se diz simples se todo subobjeto de $X$ é isomorfo a 0 ou a $X$;*
- *Um objeto $X$ se diz semissimples se é uma soma direta de objetos simples;*
- *A categoria $\mathcal{C}$ se diz semissimples se todo objeto de $\mathcal{C}$ é semissimples.*

**Exemplo 4.1.17** A categoria $Vec_{\mathbb{K}}$ é uma categoria semissimples.

**Definição 4.1.18** *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria que possui objeto zero e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Um núcleo para o morfismo $f$ é um par $(K, k)$, onde $K$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $k : K \longrightarrow X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ é tal que $f \circ k = 0_Y^K$, que possui a seguinte propriedade universal: dado outro par $(K', k')$, onde $K'$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $k' : K' \longrightarrow X$ um morfismo, satisfazendo $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, então existe um único morfismo $\eta : K' \longrightarrow K$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
& K \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "0_Y^K"] & \\
& K' \arrow[u, dotted, "\eta"] \arrow[uul, bend left, "k'"] \arrow[uur, bend right, "0_Y^{K'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

**Observação 4.1.19** *Denotaremos o núcleo de um morfismo $f$ por Ker($f$).*

**Definição 4.1.20** *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Um conúcleo para o morfismo $f$ é um par $(C, c)$, onde $C$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $c : Y \longrightarrow C$ morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $c \circ f = 0_C^X$, e que possui a seguinte propriedade universal: dado outro par $(C', c')$, onde $C'$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $c' : Y \longrightarrow C'$ é um morfismo tal que $c' \circ f = 0_C^{Y'}$, então existe um único morfismo $\delta : C \longrightarrow C'$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "0_C^X"'] \arrow[ddr, bend right, "0_{C'}^X"'] & & Y \arrow[dl, "c"] \arrow[ddl, bend left, "c'"] \\
& C \arrow[d, dotted, "\delta"] & \\
& C' &
\end{tikzcd}
$$

**Observação 4.1.21** *Denotaremos o conúcleo de um morfismo $f$ por Coker($f$).*

**Definição 4.1.22** *Uma categoria aditiva C é dita abeliana se para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ dado, existe uma decomposição canônica, da seguinte forma:*

$$K \xrightarrow{\quad k \quad} X \xrightarrow{\quad \pi \quad} I \xrightarrow{\quad i \quad} Y \xrightarrow{\quad c \quad} C,$$

*onde:*

$$i \circ \pi = f,\ (K,k) = ker(f),\ (C,c) = coker(f),\ (I,i) = ker(c) \ \ e \ \ (I,\pi) = coker(k).$$

**Exemplo 4.1.23** A categoria $Ab$ dos grupos abelianos é uma categoria abeliana. Outro exemplo de categoria abeliana é a categoria $_R Mod$.

A noção de uma categoria monoidal é uma "categorificação" do que de um monóide, que basicamente é um conjunto $M$ não vazio, munido com uma operação binária associativa, $\odot : M \times M \longrightarrow M$, denominada multiplicação e que possui um elemento unidade 1 de $M$ tal que $1 \odot m = m = m \odot 1$, para todo $m$ em $M$.

**Definição 4.1.24** *Uma categoria monoidal é uma coleção $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$, onde:*

- *$\mathcal{C}$ é uma categoria;*
- *$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é um bifuntor, chamado de produto tensorial;*
- *$\mathbb{1}$ é um objeto de $\mathcal{C}$;*
- *$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$, $l_X : \mathbb{1} \otimes X \longrightarrow X$ e $r_X : X \otimes \mathbb{1} \longrightarrow X$, são isomorfismos naturais para todo X, Y, Z em $\mathcal{C}$, chamados de associatividade, esquerda e direita, respectivamente.*

*Tal que os seguintes diagramas comutam:*

***Axioma do Pentágono:***

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes 1_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "1_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

*para todo X, Y, Z, W em $\mathcal{C}$.*

***Axioma do Triângulo:***

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

*para todo $X$, $Y$ em $\mathcal{C}$.*

**Exemplo 4.1.25** A categoria $Set$ tem estrutura monoidal, onde o produto tensorial é o produto cartesiano; $\mathbb{1} = \{*\}$ é um conjunto unitário; a associatividade é a óbvia e os isomorfismos naturais $l$, $r$ são dados por $l(*, x) = x$ e $r(x, *) = x$, para todo $x \in X$, com $X$ em $Set$.

**Exemplo 4.1.26** A categoria $Vec_{\mathbb{K}}$ tem estrutura monoidal dada por: $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{1} = \mathbb{K}$, a associatividade é a usual e os isomorfismos naturais $l$, $r$ são, respectivamente, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} V \simeq V$ e $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \simeq V$, onde $V$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Consideremos $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e seja $X$ um objeto em $\mathcal{C}$.

**Definição 4.1.27** *Um objeto $X^*$ em $\mathcal{C}$ é dito um dual à esquerda de X, se existe um par de morfismos $ev_X : X^* \otimes X \longrightarrow \mathbb{1}$ e $coev_X : \mathbb{1} \longrightarrow X \otimes X^*$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l_X^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_X"'] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "coev_X \otimes 1_X"] & X \otimes X^* \otimes X \arrow[r, "1_X \otimes ev_X"] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "r_X"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r, "r_{X^*}^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_{X^*}"'] & X^* \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_{X^*} \otimes coev_X"] & X^* \otimes X \otimes X^* \arrow[r, "ev_X \otimes 1_{X^*}"] & \mathbb{1} \otimes X^* \arrow[r, "l_{X^*}"] & X^*
\end{tikzcd}$$

Um categoria monoidal $\mathcal{C}$ se diz *rígida à esquerda* se todo obejeto $X$ de $\mathcal{C}$ possui dual à esquerda.

**Exemplo 4.1.28** Consideremos a categoria $vec_{\mathbb{K}}$, que tem estrutura monoidal. Tomemos $V \in vec_{\mathbb{K}}$ e fixemos uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, cuja base dual é denotada por $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Definimos os morfismos $ev_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}$ por $ev_V(f_j \otimes v_i) = f_j(v_i)$ e $coev_V : \mathbb{K} \longrightarrow V \otimes V^*$ por $coev_V(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes f_i$. Assim, $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ é um dual à esquerda para $V$.

**Definição 4.1.29** *Um objeto* $^*X$ *em* $\mathcal{C}$ *é dito um dual à direita de* $X$*, se existe um par de morfismos* $ev'_X : X \otimes {}^*X \longrightarrow \mathbb{1}$ *e* $coev'_X : \mathbb{1} \longrightarrow {}^*X \otimes X$*, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_X"'] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_X \otimes coev'_X"] & X \otimes {}^*X \otimes X \arrow[r, "ev'_X \otimes 1_X"] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {}^*X \arrow[r, "l_{^*X}^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_{X^*}"'] & \mathbb{1} \otimes {}^*X \arrow[r, "coev'_X \otimes 1_{^*X}"] & {}^*X \otimes X \otimes {}^*X \arrow[r, "1_{^*X} \otimes ev'_X"] & {}^*X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "r_{^*X}"] & {}^*X \end{tikzcd}$$

Uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ se diz *rígida à direita* se todo obejeto $X$ de $\mathcal{C}$ possui dual à direita.

**Exemplo 4.1.30** Na categoria monoidal $vec_{\mathbb{K}}$, tomemos $V \in vec_{\mathbb{K}}$ e fixemos uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, cuja base dual é denotada por $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Definimos os morfismos $ev'_V : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ por $ev'_V(v_i \otimes f_j) = f_j(v_i)$ e $coev'_V : \mathbb{K} \longrightarrow V^* \otimes V$ por $coev'_V(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes v_i$. Assim, $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ é um dual à direita para $V$.

**Definição 4.1.31** *Uma categoria monoidal é dita rígida se é rígida à esquerda e à direita.*

**Exemplo 4.1.32** A Categoria $vec_{\mathbb{K}}$ é uma categoria monoidal rígida.

Finalmente chegamos aos conceitos de categoria tensorial e categoria de fusão.

**Definição 4.1.33** *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *se diz multitensorial finita sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *se é uma categoria abeliana,* $\mathbb{K}$*-linear finita, monoidal rígida tal que todos os funtores e transformações naturais envolvidos são aditivos e* $\mathbb{K}$*-lineares.*

**Definição 4.1.34** *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *se diz tensorial finita sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *se é uma categoria multitensorial finita sobre* $\mathbb{K}$ *tal que o objeto unidade é simples.*

**Definição 4.1.35** *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *é multifusão se é uma categoria multitensorial finita semissimples. Quando o objeto unidade é simples* $\mathcal{C}$ *se diz uma categoria de fusão.*

## 4.2 A categoria de representações de uma álgebra de Hopf fraca

Seja $H$ uma álgebra de Hopf fraca qualquer, consideramos $Rep(H)$ a *categoria de representações* de $H$, cujos objetos são $H$-módulos à esquerda de dimensão finita e os morfismos são os homomorfismos $H$-lineares. Demonstraremos que $Rep(H)$ tem estrutura de categoria $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida.

A categoria $Rep(H)$ é aditiva. De fato, para todo $V$, $W$ em $Rep(H)$, o conjunto $Mor_{Rep(H)}(V,W)$ dos $H$-homomorfismos de $V$ para $W$ tem estrutura de grupo abeliano, com operação usual e são válidas as distributivas. O produto de $V$ e $W$ é dado pelo produto direto $V \oplus W$, junto com as projeções e o objeto zero é o $H$-módulo nulo. Além disso, os $Mor_{Rep(H)}(V,W)$ são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, com produto por escalar usual e a composição é uma transformação bilinear.

Sejam $V$, $W$ em $Rep(H)$, o produto tensorial é definido da seguinte forma:

$$V \otimes W = \Delta(1)(V \otimes_{\mathbb{K}} W),$$

onde $\otimes_{\mathbb{K}}$ é o produto tensorial usual de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. A estrutura de $H$-módulo de $V \otimes W$ é dada via comultiplicação. O produto tensorial de morfismos é uma restrição do produto tensorial usual de homomorfismos.

A subálgebra fim $H_f \subset H$ é o objeto unidade em $Rep(H)$. A estrutura de $H$-módulo de $H_f$ é dada via:

$$h.z = \varepsilon_f(hz), \text{ para todo } h \in H \text{ e } z \in H_f.$$

A associatividade de $\otimes$ é induzida por $\Phi : (U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W \longrightarrow U \otimes_{\mathbb{K}} (V \otimes_{\mathbb{K}} W)$, o isomorfismo natural. Sejam $U$, $V$, $W$ em $Rep(H)$, temos que

$$\begin{aligned}
(U \otimes V) \otimes W &= \Delta(1).[(U \otimes V) \otimes_{\mathbb{K}} W] = \Delta(1).[\Delta(1).(U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W] \\
&= (\Delta \otimes id)\Delta(1).(\Delta(1) \otimes 1).[(U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W] \\
&= \Delta^2(1).(\Delta(1) \otimes 1).[(U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W].
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\Delta^2(1)(\Delta \otimes 1) &= (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)(\Delta(1) \otimes 1) \\
&= (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) \\
&= (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1))(1 \otimes \Delta(1)) \\
&= \Delta^2(1)(1 \otimes \Delta(1)) = (id \otimes \Delta)\Delta(1)(1 \otimes \Delta(1)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(U \otimes V) \otimes W &= \Delta^2(1).(\Delta(1) \otimes 1).[(U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W] \\
&= (id \otimes \Delta)\Delta(1)(1 \otimes \Delta(1)).[(U \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{K}} W]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (id\otimes\Delta)\Delta(1)(1\otimes\Delta(1)).[U\otimes_{\mathbb{K}}(V\otimes_{\mathbb{K}}W)]\\
&= (id\otimes\Delta)\Delta(1).[U\otimes_{\mathbb{K}}(V\otimes W)]\\
&= \Delta(1).[U\otimes_{\mathbb{K}}(V\otimes W)] = U\otimes(V\otimes W).
\end{aligned}
$$

Daí concluímos que a associatividade $a_{U,V,W} : (U\otimes V)\otimes W \longrightarrow U\otimes(V\otimes W)$, para $U$, $V$, $W$ em $Rep(H)$, é um isomorfismo natural, pois é induzida por $\Phi_{U,V,W}$. O axioma do pentágono é válido, pois $\Delta$ é coassociativa.

Definimos homomorfismos $\mathbb{K}$-lineares $l_V$ e $r_V$ do seguinte modo:

$$
\begin{array}{rccc}
l_V : & H_f\otimes V & \longrightarrow & V \\
& 1_1.z\otimes 1_2.v & \longmapsto & z.v
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{rccc}
r_V : & V\otimes H_f & \longrightarrow & V \\
& 1_1.v\otimes 1_2.z & \longmapsto & \mathcal{S}(z).v
\end{array}.
$$

Estas aplicações são $H$-lineares. De fato, seja $h$ em $H$, temos

$$
\begin{aligned}
l_V(h.(1_1.z\otimes 1_2.v)) &= l_V(h_11_1.z\otimes h_21_2.v) = l_V(h_1.z\otimes h_2.v)\\
&= l_V(\varepsilon_f(h_1z)\otimes h_2.v = \varepsilon_f(h_1z)h_2.v\\
&= \varepsilon(1_1h_1z)1_2h_2.v = \varepsilon(h_1z)h_2.v\\
&= h\varepsilon_f(z).v = hz.v\\
&= h.l_V(1_1.z\otimes 1_2.v).
\end{aligned}
$$

Observe que antepenúltima igualdade, usamos o Lema 3.1.4 item $(c)$. Analogamente, mostra-se que $r_V$ é $H$-linear.

A família $\{l_V\}_V$, nos dá uma transformação natural entre o funtor $H_f\otimes(\_)$ e o funtor identidade. Do mesmo modo, $\{r_V\}_V$ nos dá um transformação natural entre o funtor $(\_)\otimes H_f$ e o funtor identidade. De fato, para cada par $V$, $W$ em $Rep(H)$ e homomorfismos $H$-lineares $f : V \longrightarrow W$ temos

$$
\begin{aligned}
(l_W\circ(id\otimes f))(1_1.z\otimes 1_2.v) &= l_W(1_1.z\otimes f(1_2.v)) = l_W(1_1.z\otimes 1_2.f(v))\\
&= z.f(v) = f(z.v) = (f\circ l_V)(1_1.z\otimes 1_2.v).
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
(r_W\circ(f\otimes id))(1_1.v\otimes 1_2.z) &= r_W(f(1_1.v\otimes 1_2.z)) = r_W(1_1.f(v)\otimes 1_2.z)\\
&= \mathcal{S}(z).f(v) = f(\mathcal{S}(z).v) = (f\circ r_V)(1_1.v\otimes 1_2.z).
\end{aligned}
$$

Temos ainda que, para cada $V$ em $Rep(H)$, os morfismos $l_V$, $r_V$ são isomorfismos, com inversas $l_V^{-1}$, $r_V^{-1}$ dadas por:

$$
\begin{array}{rccc}
l_V^{-1} : & V & \longrightarrow & H_f\otimes V \\
& v & \longmapsto & \mathcal{S}(1_1)\otimes 1_2.v
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{rccc}
r_V^{-1} : & V & \longrightarrow & V\otimes H_f \\
& v & \longmapsto & 1_1.v\otimes 1_2
\end{array}.
$$

De fato, temos que $(l_V \circ l_V^{-1})(v) = l_V(\mathcal{S}(1_1) \otimes 1_2.v) = 1_H.v = v$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(l_V^{-1} \circ l_V)(1_1.z \otimes 1_2.v) &= l_V^{-1}(z.v) \;=\; \mathcal{S}(1_1) \otimes 1_2 z.v \\
&= \mathcal{S}(1_1) \otimes \varepsilon_f(1_2 z).v \;=\; \mathcal{S}(1_1) \otimes \varepsilon(1_1^{'} 1_2 z)1_2^{'} v \\
&= \mathcal{S}(1_1^{'}) \otimes \varepsilon(1_2^{'} 1_1 z)1_2.v \;=\; \mathcal{S}(1_1^{'})\varepsilon(1_2^{'} 1_1 z) \otimes 1_2.v \\
&= \varepsilon_f(1_1 z) \otimes 1_2.v \;=\; 1_1.z \otimes 1_2.v.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos $(r_V \circ r_V^{-1})(v) = r_V(1_1.v \otimes 1_2) = \mathcal{S}(1_H).v = v$. Por outro lado,

$$(r_V^{-1} \circ r_V)(1_1.v \otimes 1_2.z) = r_V^{-1}(\mathcal{S}(z).v) = 1_1\mathcal{S}(z).v \otimes 1_2 = 1_1.v \otimes 1_2.z.$$

Assim, $l$, $r$ são isomorfismos naturais. Basta verificar o Axioma do Triângulo. Seja $V$, $W$ em $Rep(H)$, assim

$$\begin{aligned}
(id_V \otimes l_W)(1_1.v \otimes 1_2.z \otimes 1_3.w) &= (id_V \otimes l_W)(1_1.v \otimes 1_1^{'} 1_2.z \otimes 1_2^{'}.w) \\
&= 1_1.v \otimes 1_2 z.w \;=\; 1_1\mathcal{S}(z).v \otimes 1_2.w \\
&= (r_V \otimes id_W)(1_1^{'}.v \otimes 1_2^{'} 1_1.z \otimes 1_2.w) \\
&= (r_V \otimes id_W)(1_1.v \otimes 1_2.z \otimes 1_3.w).
\end{aligned}$$

Aqui omitimos o isomorfismo $(V \otimes H_f) \otimes W \simeq V \otimes (H_f \otimes W)$. Portanto, a categoria possui estrutura de categoria monoidal.

Usando a antípoda $\mathcal{S}$ de $H$, podemos fornecer os duais em $Rep(H)$. Para cada objeto $V$ de $Rep(H)$, definimos a ação de $H$ em $V^* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ por

$$(h.\phi)(v) = \phi(\mathcal{S}(h).v),$$

com $h \in H$, $v \in V$, $\phi \in V^*$. Com essa ação, $V^*$ tem estrutura de $H$-módulo à esquerda. Para cada morfismo $f : V \longrightarrow W$ seja $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ o morfismo dual para $f$.

Para cada $V$ em $Rep(H)$, definimos os morfismos evaluação e coevaluação, respectivamente, do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccc}
ev_V : & V^* \otimes V & \longrightarrow & H_f \\
& \sum_j \phi^j \otimes v_j & \longmapsto & \sum_j \phi^j(1_1.v_j)1_2
\end{array}, \qquad
\begin{array}{rccc}
coev_V : & H_f & \longrightarrow & V \otimes V^* \\
& z & \longmapsto & \sum_i 1_1 z.u_i \otimes 1_2.\psi^i
\end{array}.$$

**Observação 4.2.1** *Na definição da coevaluação, $\{u_i\}_i$, $\{\psi^i\}_i$ são bases duais de $V$ e $V^*$, respectivamente. Os elementos $\sum_i u_i \otimes \psi^i$ não dependem da escolha da base. Além disso, para todo $v \in V$, $\phi \in V^*$, temos $v = \sum_i u_i\psi^i(v)$ e $\phi = \sum_i \phi(u_i)\psi^i$.*

As aplicações $ev_V$ e $coev_V$ são $H$-lineares. De fato, para $V$ em $Rep(H)$, queremos mostrar $h.coev_V(z) = coev_V(h.z)$ ou, equivalentemente,

$$\sum_i h_1 z.u_i \otimes h_2.\psi^i = \sum_i 1_1 \varepsilon_f(hz).u_i \otimes 1_2.\psi^i.$$

Uma vez que ambos os lados da igualdade acima são elementos de $V \otimes V^*$, avaliando o segundo fator por $v \in V$, obtemos

$$\sum_i h_1 z.u_i \otimes \psi^i(\mathcal{S}(h_2).v) = \sum_i 1_1 \varepsilon_f(hz).u_i \otimes \psi^i(\mathcal{S}(1_2).v),$$

ou, equivalentemente, $h_1 z\mathcal{S}(h_2).v = 1_1\varepsilon_f(hz)\mathcal{S}(1_2).v$, (observação anterior). Assim, basta demonstrar que é válida essa última igualdade. De fato,

$$\begin{aligned}
1_1\varepsilon_f(hz)\mathcal{S}(1_2).v &= 1_1\varepsilon(1_1^{'}hz)1_2^{'}\mathcal{S}(1_2).v \;=\; \varepsilon(1_1^{'}hz)1_1 1_2^{'}\mathcal{S}(1_2).v \\
&= \varepsilon(1_1 hz)1_2\mathcal{S}(1_3).v \;=\; \varepsilon(1_1 hz)1_2.v \\
&= \varepsilon(h_1 z)h_2\mathcal{S}(h_3).v \;=\; h_1\varepsilon_f(z)\mathcal{S}(h_2) \\
&= h_1 z\mathcal{S}(h_2).v.
\end{aligned}$$

Aqui usamos a comultiplicidade fraca da counidade, a Observação 3.1.14 e o Lema 3.1.4 item $(c)$. Logo, $coev_V$ é $H$-linear. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}
h.ev_V\Big(\sum_j 1_1.\phi^j \otimes 1_2.v_j\Big) &= h.\sum_j \phi^j(1_1.v_j)1_2 \;=\; \sum_j \phi^j(1_1.v_j)h.1_2 \\
&= \sum_j \phi^j(1_1.v_j)\varepsilon_f(h.1_2) \;=\; \sum_j \phi^j(1_1.v_j)\varepsilon(1_1^{'}h1_2)1_2^{'} \\
&= \sum_j \phi^j(1_1\varepsilon(1_1^{'}h1_2)v_j)1_2^{'} \;=\; \sum_j \phi^j(\varepsilon_p(1_1^{'}h)v_j)1_2^{'} \\
&= \sum_j \phi^j(\mathcal{S}((1_1^{'}h)_1)(1_1^{'}h)_2 v_j)1_2^{'} \\
&= \sum_j \phi^j(\mathcal{S}(1_{11}^{'}h_1)(1_{12}^{'}h_2 v_j)1_2^{'} \;=\; \sum_j \phi^j(\mathcal{S}(1_1 h_1)1_2 h_2 v_j)1_3 \\
&= \sum_j \phi^j(\mathcal{S}(1_1 h_1)1_1^{'}1_2 h_2 v_j)1_2^{'} \;=\; \sum_j \phi^j(\mathcal{S}(h_1)1_1^{'}h_2 v_j)1_2^{'} \\
&= \sum_j (h_1.\phi^j)(1_1^{'}h_2 v_j)1_2^{'} \;=\; \sum_j ev_V(h_1.\phi^j \otimes h_2.v_j) \\
&= ev_V\left(h.\sum_j \phi^j \otimes v_j\right).
\end{aligned}$$

Para veficarmos que $ev_v$ é $H$-linear utilizamos, nesta ordem, as definições da $\varepsilon_f$ e da $\varepsilon_p$, o item 1 da definição da álgebra de Hopf fraca, a comultiplicidade fraca da unidade e a multiplicidade da $\Delta$. Logo, $ev_V$ é $H$-linear.

Finalmente, resta verificar os diagramas da Definição 4.1.27.

$$
\begin{aligned}
r_V(id_V\otimes ev_V)(coev_V\otimes id_V)l_V^{-1}(v) &= r_V(id_V\otimes ev_V)(coev_V\otimes id_V)(\mathcal{S}(1_1)\otimes 1_2.v)\\
&= r_V(id_V\otimes ev_V)(coev_V(\mathcal{S}(1_1))\otimes 1_2.v)\\
&= r_V(id_V\otimes ev_V)\left(\sum_i 1_1'\mathcal{S}(1_1).u_i\otimes 1_2'.\psi^i\otimes 1_2.v\right)\\
&= r_V\left(\sum_i 1_1'\mathcal{S}(1_1).u_i\otimes (1_2'.\psi^i)(1_1''1_2.v)1_2''\right)\\
&= r_V\left(\sum_i 1_1'\mathcal{S}(1_1).u_i\otimes \psi^i(\mathcal{S}(1_2')1_1''1_2.v)1_2''\right)\\
&= r_V\left(\sum_i 1_1'\mathcal{S}(1_1).u_i\psi^i(\mathcal{S}(1_2')1_1''1_2.v)\otimes 1_2''\right)\\
&= r_V(1_1'\mathcal{S}(1_1)\mathcal{S}(1_2')1_1''1_2.v\otimes 1_2'') \;=\; v
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
l_{V^*}(ev_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes coev_V)r_{V^*}^{-1}(\phi) &= l_{V^*}(ev_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes coev_V)(1_1.\phi\otimes 1_2)\\
&= l_{V^*}(ev_V\otimes id_{V^*})\left(\sum_i 1_1.\phi\otimes 1_2.u_i\otimes 1_3.\psi^i\right)\\
&= l_{V^*}\left(\sum_i (1_1.\phi)(1_1'1_2.u_i)1_2'\otimes 1_3.\psi^i\right)\\
&= l_{V^*}\left(\sum_i \phi(\mathcal{S}(1_1)1_1'1_2.u_i)1_2'\otimes 1_3.\psi^i\right)\\
&= l_{V^*}\left(\sum_i 1_2'\otimes 1_3.\phi(\mathcal{S}(1_1)1_1'1_2.u_i)\psi^i\right)\\
&= l_{V^*}\left(\sum_i 1_2'\otimes 1_3 1_1\mathcal{S}^{-1}(1_1'1_2).\phi(u_i)\psi^i\right)\\
&= l_{V^*}(1_2'\otimes 1_3 1_1\mathcal{S}^{-1}(1_1'1_2).\phi) \;=\; \phi.
\end{aligned}
$$

Logo, $V^*$ é dual à esquerda. Para o dual à direita, definimos a ação de $H$ em $V^*$, do seguinte modo

$$(h.\phi)(v) = \phi(\mathcal{S}^{-1}(h).v),$$

com $h \in H$, $v \in V$, $\phi \in V^*$. Os morfismos evaluação e coevaluação são dados, respectivamente, do seguinte modo:

$$
\begin{array}{rccc}
ev_V': & V\otimes V^* & \longrightarrow & H_f\\
 & \sum_j v_j\otimes\phi^j & \longmapsto & \sum_j \phi^j(1_1.v_j)1_2
\end{array}
\quad,\quad
\begin{array}{rccc}
coev_V': & H_f & \longrightarrow & V^*\otimes V\\
 & z & \longmapsto & \sum_i 1_1.\psi^i\otimes 1_2 z.u_i
\end{array}.
$$

Da mesmo modo, verifica-se que $ev_V'$ e $coev_V'$ são $H$-lineares e satisfazem os diagramas da Definição 4.1.29. Assim, $Rep(H)$ tem estrutura de categoria monoidal rígida.

## 4.3 A categoria Rep($\mathbb{K}\mathcal{T}$)

Sabemos que para uma álgebra de Hopf fraca $H$ qualquer, a categoria de representação de $H$ tem estrutura de categoria $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida. Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante finito e $\mathbb{K}\mathcal{T}$ a álgebra de Hopf fraca associada, como no Teorema 3.2.4. Logo, concluímos que a categoria $Rep(\mathbb{K}\mathcal{T})$ tem estrutura $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida.

Sejam $U$, $V$ em $Rep(\mathbb{K}\mathcal{T})$, o produto tensorial $\otimes$ é dado por

$$U \otimes V = \Delta(\mathbf{1}).(U \otimes_{\mathbb{K}} V) = \sum_{x|y} \boldsymbol{id}\, x.U \otimes_{\mathbb{K}} \boldsymbol{id}\, y.V,$$

com ação de $\mathcal{B}$ dada pela comultiplicação. A associatividade é a trivial e se verifica o Axioma do Pentágono.

O objeto unidade é a subálgebra $\mathbb{K}\mathcal{T}_f = \oplus_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{K}_P\mathbf{1}$, a qual tem estrutura de $\mathbb{K}\mathcal{T}$-módulo via:

$$A._P\mathbf{1} = \varepsilon_f(A_P\mathbf{1}) = \begin{cases} {}_Q\mathbf{1}, & \text{se } A = \boldsymbol{id}\ g, \text{ com } g \in \mathcal{V}, \text{tal que } b(g) = P, t(g) = Q. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os isomorfismos naturais $l, r$ são definidos por

$$\begin{array}{rccc} l_V: & \mathbb{K}\mathcal{T}_f \otimes V & \longrightarrow & V \\ & {}_P\mathbf{1} \otimes v & \longmapsto & {}_P\mathbf{1}.v \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} r_V: & V \otimes \mathbb{K}\mathcal{T}_f & \longrightarrow & V \\ & v \otimes {}_P\mathbf{1} & \longmapsto & \mathcal{S}({}_P\mathbf{1}).v = \mathbf{1}_P.v \end{array},$$

para $V$ em $Rep(\mathbb{K}\mathcal{T})$.

O dual à esquerda para $V$ em $Rep(\mathbb{K}\mathcal{T})$ é $V^* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ com ação de $\mathcal{B}$ dada por

$$(A.\phi)(v) = \phi(A^{-1}.v),$$

e os morfismos $ev_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{T}_f$, e $coev_V : \mathbb{K}\mathcal{T}_f \longrightarrow V \otimes V^*$ são dados, respectivamente, por

$$ev_V\left(\sum_i \phi^i \otimes v_i\right) = \sum_i \phi^i(\boldsymbol{id}\, x.v_i)\boldsymbol{id}\, y \quad \text{e} \quad coev_V({}_P\mathbf{1}) = \sum_j {}_P\mathbf{1}.v_j \otimes \phi^j$$

De maneira similar define-se o dual à direita e os morfismos $ev'_V$ e $coev'_V$.

O próximo teorema demonstra que a categoria de representações da álgebra de Hopf fraca proveniente de um grupóide duplo vacante finito, além de ser $\mathbb{K}$-linear monoidal rígida é uma categoria tensorial e de fusão.

**Teorema 4.3.1** *Sejam $\mathcal{T}$ um grupóide duplo vacante e $(\sigma, \tau)$ um 2-cociclo normalizado em $\mathcal{T}$ com valores em $\mathbb{K}^{\times}$.*

*(a) O objeto unidade de categoria Rep$(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})$ é simples se e somente se $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é conexo.*

*(b) Se char $\mathbb{K} = 0$, então a categoria Rep$(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})$ de $\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T}$-módulos de dimensão finita é uma categoria multifusão. E é fusão se e somente se $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é conexo.*

*Demonstração:*

$(a)$ Sabemos que o objeto unidade nesta categoria é $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$ que é gerado por ${}_P\mathbf{1}$, $P$ em $\mathcal{P}$. Seja $\sim_v$ a relação de equivalência em $\mathcal{P}$, induzida pelo grupóide $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$. Para cada classe de equivalência $X$ temos o subespaço $S_X = \sum_{R \in X} \mathbb{K}_R\mathbf{1} = \langle {}_R\mathbf{1} | R \in X \rangle$ é um subobjeto simples de $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$, ou seja, cada $S_X$ é um submódulo simples de $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$. De fato, seja $W \subseteq S_X$, e suponhamos que $W \neq 0$. Seja $w = \sum_{R \in X} \lambda^R {}_R\mathbf{1}$ em $W$, com $\lambda^R \in \mathbb{K}$ não todos zero. Sejam $P$ em $X$, com $\lambda^P \neq 0$ e $Q$ em $X$ qualquer, então existe um morfismo $g \in \mathcal{V}$, com $b(g) = P$ e $t(g) = Q$. Consideremos $\boldsymbol{id}\ g$ e como $W$ é submódulo temos que $\boldsymbol{id}\ g.w \in W$, para todo $w \in W$. Assim, temos que

$$\boldsymbol{id}\ g.w = \sum_{R \in X} \lambda^R(\boldsymbol{id}\ g.{}_R\mathbf{1}) = \lambda^P \varepsilon_f(\boldsymbol{id}\ g.{}_P\mathbf{1}) = \lambda^P {}_Q\mathbf{1}.$$

Como $\lambda^P \neq 0$, então ${}_Q\mathbf{1} \in W$, para todo $Q$ em $X$. Logo, $W = S_X$ e concluímos que $S_X$ é simples. Claramente, $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$ é uma soma direta de submódulos simples $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f = \bigoplus_{X \in \mathcal{P}/\sim_v} S_X$. Portanto, $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$ é simples se $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é conexo. Reciprocamente, se $(\mathbb{K}_{\sigma}^{\tau}\mathcal{T})_f$ é simples, só admite submódulos triviais e obviamente $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ é conexo.

$(b)$ Segue da Observação 3.3.11 e do item anterior.

□

# Referências Bibliográficas


[AM] Andruskiewitsch, N.; Mombelli, J. M., Examples of Weak Hopf Algebras arising from Vacant Double Groupoids. *Nagoya Math. J.* 181, 1-27, 2006.

[AN1] Andruskiewitsch, N.; Natale, S. Braided Hops Algebras arising from matched pair of Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra* 182, 2003.

[AN2] Andruskiewitsch, N.; Natale, S. Double Categories and Quantum groupoids. *Publ. Mat. Urug* 10, 11-51, 2005.

[A] Awodey, S. Category Theory. Oxford Logic Guides, *Oxford University Press*, vol. 52, 2nd ed., 2010.

[BNSz] Böhm, G.; Nill, F.; Szlachányi, K. Weak Hopf algebras I. Integral theory and C*-structure, *J. Algebra* 221, 385-438, 1999.

[BSz] Böhm, G.; Szlachányi, K. A coassociative C*-quantum group with nonintegral dimensions, *Lett. in Math. Phys.* 35, 437-456, 1996.

[BS] Brown, R.; Spencer, C. Double groupoids and crossed modules, Cahiers Topo. et Géo. Diff. XVII, 343-364, 1976.

[E] Ehresmann, C. Catégories doubles et catégories structures, *C. R. Acad. Sci 256*, 1198-1201, Paris, 1963.

[EMac] Eilenberg, S.; Mac Lane, S. General theory of natural equivalences. *Trans. Math. Soc.* 58, 231-294, 1945.

[H] Hayashi, T. A brief introduction to face algebras, in "New trends in Hopf Algebra Theory". *Contemp. Math.* 267, 161-176, 2000.

[JMM] Mombelli, J. M. Categorías de fusión y grupoides cuánticos. *Tese de Doutorado*, FaMAF-UNC, 2006.

[Mac] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics, *Springer-Verlag*, v. 5, New York, 1971.

[M] Mackenzie, K. Double Lie algebroides and Second-order Geometry, *I, Adv. Math. 94*, 180–239, 1992.

[N] Nikshych, D. On the structure of weak Hopf algebras, *Adv. Math.* 170, 257-286, 2002.

[NTV] Nikshych, D.; Turaev, V.; Vainerman, L. Quantum groupoids and invariants of knots and 3-manifolds, **math.QA/0006078**, 2000.

[NV] Nikshych, D.; Vainerman, L. Finite quantum groupoids and their applications, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 43, 211-262, 2002.

[R] Rotman, J. J. Advanced Modern Algebra. *Prentice Hall*, 2nd ed., New York, 2003.