UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DUALIDADE DE TANNAKA PARA BIÁLGEBRAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Douglas Fernando Copatti

Santa Maria, RS, Brasil
2015

DUALIDADE DE TANNAKA PARA BIÁLGEBRAS

Douglas Fernando Copatti

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Bagio

Santa Maria, RS, Brasil
2015

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

DUALIDADE DE TANNAKA PARA BIÁLGEBRAS

elaborada por

Douglas Fernando Copatti

como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Dirceu Bagio, Dr.
(Presidente/Orientador)

Alveri A. Santana, Dr. (UFRGS)

Fernando A. Fantino, Dr. (UNC-FAMAF)

Santa Maria, 14 de agosto de 2015.

Agradecimentos

Aos meus pais e avós por todo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Dirceu Bagio, por toda ajuda, incentivos e conselhos que me ofereceu durante todo este tempo. Pessoa grandiosa e paciente, além de orientador, é um grande amigo. À Alana e à Lívia que me deram força, amor e carinho durante esta caminhada. Ao meu amigo Geovani, que sempre me ajudou e me apoiou.

A todos os meus amigos e colegas de mestrado, que quero levar para a vida toda, dentre os quais quero ressaltar a Joice, Simone, João Matheus, Mônica e Fernando, por todas as coisas simples e únicas que passamos juntos. A todos os meus grandes amigos por todo o apoio que me deram. Aos amigos e professores de Córdoba, e em especial ao professor Fernando, que me ajudou muito nesta fase. Aos professores que compuseram a banca, juntamente com o professor Gustavo, pelo tempo doado à correção e melhora do trabalho.

Aos professores do programa de pós-graduação, em especial aos que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Ao programa de Pós-graduação e Universidade Federal de Santa Maria, pela oportunidade e à CAPES pelo suporte e incentivo financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

DUALIDADE DE TANNAKA PARA BIÁLGEBRAS

AUTOR : DOUGLAS FERNANDO COPATTI
ORIENTADOR : DIRCEU BAGIO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 14 de agosto de 2015

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria monoidal quase simétrica cocompleta e abeliana e $\mathcal{A}_0$ a subcategoria cheia de $\mathcal{A}$, formada pelos objetos de $\mathcal{A}$ que possuem dual à esquerda. Dados uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e um funtor monoidal $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$, mostraremos que existe um objeto biálgebra em $\mathcal{A}$ associado ao par $(\mathcal{C}, \omega)$. Em particular, quando $\mathcal{A}$ é a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo, este objeto biálgebra associado será exatamente uma biálgebra no sentido usual.

Palavras-chave: Categorias, Categorias Trançadas, Biálgebras em Categorias Trançadas, Coend's de Funtores, Dualidade de Tannaka.

ABSTRACT
Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

TANNAKA DUALITY FOR BIALGEBRAS
AUTHOR : DOUGLAS FERNANDO COPATTI
ADVISOR : DIRCEU BAGIO
Date and Location of Defense: Santa Maria, August 14^{th}, 2015.

Let $\mathcal{A}$ be an abelian cocomplete quasi symmetric monoidal category and $\mathcal{A}_0$ the subcategory of $\mathcal{A}$ formed by the objects of $\mathcal{A}$ that have left dual. Given a monoidal category $\mathcal{C}$ and a monoidal functor $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$, we will prove that there exists a bialgebra object of $\mathcal{A}$ associated to the pair $(\mathcal{C}, \omega)$. Particularly, when $\mathcal{A}$ is the category of vector spaces over a field, this bialgebra object associated will be a bialgebra in the usual sense.

Keywords: Categories, Braided Categories, Bialgebras in Braided Categories, coends of functors, Tannaka Duality.

Sumário

Agradecimentos **4**

Introdução **8**

1 Preliminares **10**
1.1 Categorias 10
1.2 Funtores 14
1.3 Transformações Naturais 16
1.4 Adjunção de Funtores 20
1.5 Categorias Aditivas e Lineares 24
1.5.1 Produtos e Coprodutos em Categorias 25
1.5.2 Categorias Aditivas e Lineares 28
1.6 (Co)Núcleos, (Co)Equalizadores e Categorias Abelianas 29
1.7 Limites e Colimites 32
1.8 End e Coend de Funtores 37

2 Categorias Monoidais, Categorias Quase Simétricas e Biálgebras em Categorias Quase Simétricas **41**
2.1 Categorias Monoidais 41
2.1.1 Funtores Monoidais 45
2.2 Teorema de Maclane e Teorema da Coerência 47
2.3 Objetos Duais, Categorias Monoidais Rígidas e Hom Functor Internos . 47
2.4 Categorias Quase Simétricas (ou Trançadas) 58
2.5 Biálgebras em Categorias Quase Simétricas 59

3 Dualidade de Tannaka para biálgebras **64**
3.1 A categoria $\mathfrak{C}$ 64
3.2 $\mathfrak{C}$ é monoidal 65
3.3 $coend(\omega)$ é um objeto coálgebra em $\mathcal{A}$ 67
3.4 $coend(\omega)$ é um objeto álgebra em $\mathcal{A}$ 73
3.5 $coend(\omega)$ é um objeto biálgebra em $\mathcal{A}$ 77
3.6 Exemplo 80

Referências Bibliográficas **83**

Introdução

Dado um grupo finito G, uma representação de G sobre o corpo $\Bbbk$ é um morfismo de grupos $\rho : G \to Aut(V)$, onde V é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Cada representação do grupo G induz uma ação de G sobre o espaço vetorial V via $g \cdot v = \rho(g)(v)$, $g \in G$ e $v \in V$, munindo V de uma estrutura de $\Bbbk G$-módulo. Reciprocamente, cada ação de G sobre V fornece um morfismo de grupos $\rho : G \to Aut(V)$, onde $\rho(g)$ é o automorfismo de V definido por $\rho(g)(v) = g \cdot v$, $g \in G$ e $v \in V$. Note que $Aut(V)$ é um grupo com a operação dada pela composição de automorfismos.

Observe que o espaço vetorial $End(V)$ tem estrutura de álgebra unitária sobre o corpo $\Bbbk$ com a multiplicação dada pela composição de endomorfismos. Uma representação de uma álgebra A é um morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\rho : A \to End(V)$, onde V é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Cada representação $\rho : A \to End(V)$ da álgebra A induz uma estrutura de A-módulo no espaço vetorial V via $a \cdot v = \rho(a)(v)$, $a \in A$ e $v \in V$. Reciprocamente, para cada A-módulo V temos uma representação $\rho : A \to End(V)$ da álgebra A, onde $\rho(a)$ é o endomorfismo de V dado por $\rho(a)(v) = a \cdot v$, $a \in A$ e $v \in V$.

Se $\rho : A \to End(V)$ e $\eta : A \to End(W)$ são duas representações da álgebra A, um morfismo entre estas representações é uma transformação linear $T : V \to W$, tal que $\eta(a) \circ T = T \circ \rho(a)$, para qualquer $a \in A$. Pode-se verificar facilmente que T é um morfismo entre representações de A se, e somente se, T é um morfismo entre os respectivos A-módulos associados. Portanto, a categoria de representações de uma álgebra A, a qual será denotada por $Rep(A)$, é a categoria dos A-módulos (à esquerda). Como no caso de representações de grupos, o estudo das representações de uma álgebra é reduzido ao estudo das representações de grau finito, ou seja, das representações do tipo $\rho : A \to End(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Assim, no que segue, denotaremos por $Rep(A)$ a categoria de representações de grau finito de A.

Se $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma $\Bbbk-$biálgebra, a categoria de representações $Rep(B)$ da álgebra (B, m, u) tem uma estrutura monoidal induzida pela comultiplicação Δ e pela counidade ε. Explicitamente, se V e W são dois B-módulos, então $V \otimes_{\Bbbk} W$ é um B-módulo via: $b \cdot (v \otimes w) = (b_1 \cdot v) \otimes (b_2 \cdot w)$, onde $\Delta(b) = b_1 \otimes b_2$, $b \in B$, $v \in V$ e $w \in W$.

Desde que Δ é um morfismo de álgebras, segue que $V \otimes_{\Bbbk} W$ é um B-módulo. O objeto unidade da estrutura monoidal é o corpo $\Bbbk$, o qual é um B-módulo via: $b \cdot \lambda = \varepsilon(b)\lambda$, $b \in B$ e $\lambda \in \Bbbk$. Novamente, como ε é um morfismo de álgebras, segue que $\Bbbk$ é um B-módulo. O isomorfismo natural associatividade a é a identidade, enquanto o left l e o right r são os isomorfismos naturais usuais. Veja o Capítulo 2 para detalhes sobre categorias monoidais.

Denote por vec a categoria dos espaços vetoriais sobre $\Bbbk$ que possuem dimensão finita. Dada uma biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ temos um funtor monoidal $\omega : Rep(B) \to vec$ que associa a cada B-módulo de dimensão finita V o espaço vetorial V, ou seja, o funtor ω esquece a estrutura de B-módulo de V. Por esta razão, este funtor é denominado funtor de esquecimento (forget). Portanto, cada biálgebra B determina uma categoria monoidal $Rep(B)$ e um funtor monoidal $\omega : Rep(B) \to vec$.

De forma análoga, dada uma $\Bbbk-$biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, podemos considerar a categoria $CoRep(B)$ de correpresentações (finitas) de B. Mais precisamente, um objeto em $CoRep(B)$ é um B-comódulo V. Usando que a multiplicação e a unidade são morfismo de comódulos, é fácil verificar que $CoRep(B)$ é uma categoria monoidal. Como no caso da categoria de representações de B, o funtor esquecimento $\omega : CoRep(B) \to vec$ é monoidal. Assim, dada uma biálgebra B está associado o par $(CoRep(B), \omega)$. O objetivo deste trabalho é analisar a associação no sentido inverso. Mais precisamente, se $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal, $\mathcal{A}_0$ é uma categoria monoidal com determinadas propriedades (as quais vec cumpre) e $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ é um funtor monoidal, então podemos associar uma biálgebra ao par $(\mathcal{C}, \omega)$? A resposta a esta pergunta é afirmativa e foi dada em [Sch], o qual será o objeto de estudo desta dissertação.

Para entender a resposta da pergunta acima, necessitaremos diversos conceitos e resultados sobre categorias, funtores, transformações naturais, (co)limites e (co)end's, os quais serão apresentados no primeiro capítulo. No segundo capítulo, estudamos categorias monoidais e quase simétricas. Finalizamos o trabalho com um capítulo no qual mostramos como associar uma biálgebra à um par $(\mathcal{C}, \omega)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal, $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ é um funtor monoidal e $\mathcal{A}_0$ é uma categoria monoidal com determinadas propridades.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da teoria de categorias que serão necessários neste trabalho.

1.1 Categorias

Sejam C e D duas classes de objetos. O produto cartesiano destas duas classes é a classe $C \times D$, que é composta pelos pares (X, Y), onde X é um objeto da classe C e Y é um objeto da classe D. Utilizaremos a notação $X \in C$ para dizer que X é um objeto da classe C.

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste dos seguintes dados:*

(i) *uma classe de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$;*

(ii) *para cada $(X, Y) \in Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$, um conjunto denotado por $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, ou simplesmente $Mor(X, Y)$, cujos elementos serão chamados de morfismos;*

(iii) *para cada tripla $(X, Y, Z) \in Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$, uma função:*

$$\circ^{X,Y,Z} : Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

que será chamada de composição de morfismos;

sujeitos aos seguintes axiomas:

- *os conjuntos de morfismos são dois a dois disjuntos;*
- *a composição é unitária, isto é, para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$, existe um morfismo destacado em $Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$, que será denotado por 1_X e chamado morfismo identidade,*

tal que para quaisquer $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,X)$, tem-se $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$;

- *a composição é associativa, isto é, dados $f \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,W)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ e $h \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, tem-se que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*

No decorrer do texto, $X \in \mathcal{C}$ indicará que X é objeto da categoria $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ indicará que $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $Mor(\mathcal{C})$ indicará a união $\bigcup_{X,Y \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e a composição de morfismos será denotada pela justaposição, salvo quando houver possibilidade de confusão.

Exemplo 1.1.2.
1. *Set é a categoria cujos objetos são os conjuntos, os morfismos são as funções entre estes conjuntos e a composição é a usual.*
2. *Gr é a categoria cujos objetos são os grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupos e a composição é a usual.*
3. *Rng é a categoria cujos objetos são os anéis, os morfismos são os homomorfismos de anéis e a composição é a usual.*
4. *Dado um anel A, ${}_AMod$ é a categoria cujos objetos são os A-módulos à esquerda, os morfismos são os homomorfismos de A-módulos à esquerda, e a composição é a usual.*
5. *Ab é a categoria cujos objetos são os grupos abelianos (ou os $\mathbb{Z}$-módulos) e os morfismos são os homomorfismos de grupos (homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos), e a composição é a usual.*
6. *Dado um corpo $\Bbbk$, $Vec_{\Bbbk}$ é a categoria cujos objetos são os $\Bbbk$-espaços vetoriais, os morfismos são as transformações $\Bbbk$-lineares e a composição é a usual.*
7. *$vec_{\Bbbk}$ é a categoria dos $\Bbbk$-espaços vetoriais de dimensão finita, os morfismos são as transformações $\Bbbk$-lineares entre estes e a composição é a usual.*
8. *Dado um grupo $(G, \cdot)$, C(G) é a categoria que possui apenas um objeto, denotado pelo símbolo $*$, o conjunto de morfismos é exatamente o grupo G e a composição é dada pela operação de G, isto é, dados f, $g \in Mor(*, *)$, então $f \circ g = f \cdot g \in G$.*
9. *Se $\Bbbk$ é um corpo, então $Matr_{\Bbbk}$ é a categoria cujos objetos são os números inteiros não negativos; para cada par de objetos $m, n \in Matr_{\Bbbk}$, $Mor(m,n) = \mathbb{M}_{n \times m}(\Bbbk)$, isto é, o conjunto de matrizes $n \times m$ com entradas no corpo $\Bbbk$, e a composição é dada pela multiplicação usual de matrizes.*

10. *Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$, $\mathbb{PO}(X)$ é a categoria cujos objetos são os elementos de X. Se $x,\ y \in X$, $Mor(x,\ y) = \begin{cases} \phi, & se\ x \npreceq y; \\ \{k_y^x\}, & se\ x \preceq y. \end{cases}$ Aqui k_y^x é apenas um símbolo. Nesta categoria a composição de dois morfismos é dada por $k_z^y \circ k_y^x = k_z^x$.*

11. *Se X é uma classe de objetos, não vazia, pode-se considerar a categoria discreta, onde a classe de objetos é X e os morfismos são apenas os morfismos identidade.*

12. *Se (C, Δ, ε)é uma $\mathbb{k}-$coálgebra, $\mathcal{M}^C$ é a categoria cuja classe de objetos são os $C-$comódulos à direita, os morfismos são os homomorfismos de $C-$comódulos à direita e a composição é a usual.*

13. *Se G é um grupo e $\mathbb{k}$ é um corpo, diremos que um $\mathbb{k}$-espaço vetorial V é G-graduado quando V pode ser escrito como uma soma direta de subespaços vetoriais de V, indexada por G, isto é, $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$. Um morfismo entre espaços vetorias G-graduados é uma transformação linear $T : V \to W$ que preserva a graduação, ou seja, $T(V_g) \subseteq W_g$, para todo $g \in G$. Denotaremos por Vec_G a categoria cujos objetos são os $\mathbb{k}$-espaços vetorias G-graduados, os morfismos são as transformações lineares que preservam a graduação e a composição é a usual.*

14. *Se A e G são grupos, $C_G(A)$ é a categoria cuja classe de objetos consiste dos símbolos δ_g, $g \in G$, e os conjuntos de morfismos são dados por:*

$$Mor_{C_G(A)}(\delta_g, \delta_h) = \begin{cases} \emptyset, & se\ g \neq h, \\ A, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A composição de dois morfismos é dada pela operação de A.

15. *Fld é a categoria cuja classe de objetos consiste dos corpos, os morfismos são os homomorfismos não triviais entre corpos, e a composição é a usual.*

16. *Dado $n \in \mathbb{N}$, GL_n é a categoria cuja classe de objetos consiste dos grupos multiplicativos $GL_n(\mathbb{k})$, isto é, as matrizes inversíveis $n \times n$ com entradas num corpo $\mathbb{k}$. Dados dois objetos $GL_n(\mathbb{k})$ e $GL_n(\mathbb{k}')$, definimos o conjunto de morfismos por $\{\tilde{f} :\ \tilde{f}(M) = (f(M_{i,j}))_{i,j},\ onde\ 0 \neq f : \mathbb{k} \to \mathbb{k}'\ é\ um\ homomorfismo\ de\ corpos\}$, para quaisquer corpos $\mathbb{k}$ e $\mathbb{k}'$, com a composição induzida pela composição de homomorfismos de corpos.*

17. *Seja G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. Uma representação de G é um par (ρ, V), onde V é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : G \to Aut(V)$ é um homomorfismo de grupos entre G e o grupo de automorfismos de V. Se (ρ, V) e (η, W) são duas representações para G e $T : V \to W$ é uma transformação $\Bbbk$-linear, diremos que T é um morfismo de representações se $T \circ \rho(g) = \eta(g) \circ T$, para cada $g \in G$. Neste contexto, se T é inversível, então T é um isomorfismo de representações de G. Rep(G) é a categoria que tem como objetos as representações do grupo G, os conjuntos de morfismos entre duas representações são compostos pelos morfismos citados anteriormente e a composição é a composição de transformações $\Bbbk$-lineares.*

Definição 1.1.3. *Considere $f : X \to Y$ um morfismo em uma categoria $\mathcal{C}$.*

1. *f é dito um isomorfismo se existe um morfismo $g \in Mor(Y, X)$ tal que $fg = 1_Y$ e $gf = 1_X$. Neste caso denota-se $X \cong Y$ para dizer que existe um isomorfismo de X para Y, e diz-se que X e Y são isomorfos;*

2. *f é dito um monomorfismo se, dados $g, h \in Mor(Z, X)$, tais que $f \circ g = f \circ h$, tivermos $g = h$;*

3. *f é dito um epimorfismo se, dados $g, h \in Mor(Y, Z)$, tais que $g \circ f = h \circ f$, tivermos $g = h$;*

4. *f é dito um endomorfismo se $X = Y$;*

5. *f é dito um automorfismo se é um endomorfismo e um isomorfismo.*

Note que em Set os monomorfismos são as funções injetivas, os endomorfismos são as funções sobrejetivas e os isomorfismos são as funções bijetivas. Em particular, se um morfismo é epimorfismo e monomorfismo, simultaneamente, então é um isomorfismo. Porém isso nem sempre é válido, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.4. *Considere a categoria que possui apenas dois objetos, digamos X e Y, e apenas um morfismo $X \xrightarrow{f} Y$, além dos morfismos identidade. Vê-se claramente que f é um monomorfismo e um epimorfismo, porém f não é um isomorfismo, pois $Mor(Y, X) = \emptyset$.*

Abaixo seguem algumas construções e definições que serão úteis mais adiante.

Categoria oposta. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, considere a categoria $\mathcal{C}^{op}$, chamada categoria oposta ou dual, cuja classe de objetos é a mesma de $\mathcal{C}$ e os conjuntos de morfismos são $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. A composição é dada por $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$, para quaisquer $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$.

Subcategoria. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é uma categoria que tem como classe de objetos uma subclasse de $Obj(\mathcal{C})$. Para cada $X, Y \in \mathcal{C}'$, $Mor_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ é um subconjunto de $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e a composição é dada pela restrição da composição de $\mathcal{C}$. Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é dita uma *subcategoria cheia* se $Mor_{\mathcal{C}'}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}'$.

Esqueleto de uma categoria. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, define-se um esqueleto de $\mathcal{C}$, e denota-se por $SK(\mathcal{C})$ a subcategoria cheia de $\mathcal{C}$ formada pelos objetos não isomorfos de $\mathcal{C}$. De um modo geral, uma categoria se diz *esquelética* se não possui objetos distintos isomorfos.

Categoria produto cartesiano. Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é a categoria cuja classe de objetos é $Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{D})$, os conjuntos de morfismos são dados por $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = Mor_{\mathcal{C}}(X, X') \times Mor_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ e a composição é feita em cada coordenada.

Exemplo 1.1.5. *1. Considere a categoria $\mathcal{C}$, cujos objetos são os $\Bbbk$-espaços vetoriais $\Bbbk^n, n \in \mathbb{N}$, e o espaço nulo, os morfismos são as transformações $\Bbbk$-lineares entre estes espaços e a composição é a usual. Esta categoria é o esqueleto de $vec_{\Bbbk}$.*

2. No exemplo 1.1.2, os itens (8), (9), (10),(11) e (14) são exemplos de categorias esqueléticas.

1.2 Funtores

Quando estamos trabalhando com estruturas algébricas ordinárias, podemos escolher funções que tem a propriedade de preservar a estrutura em questão. Por exemplo, um morfismo de grupos é uma função entre dois grupos que preserva (ou é compatível com) as operações dos mesmos. De forma similar temos a noção de morfismos entre categorias.

Definição 1.2.1. *Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma associação entre objetos e morfismos de $\mathcal{C}$ e objetos e morfismos em $\mathcal{D}$ que cumpre os seguintes axiomas:*

(i) se $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, então $\mathcal{F}(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;

(ii) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$, *para qualquer* $X \in \mathcal{C}$;

(iii) $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$, *para quaisquer morfismos* $f, g \in Mor(\mathcal{C})$ *que são componíveis.*

Observação 1.2.2. *1. A definição acima é a definição de funtor covariante. Analogamente, define-se funtor contravariante trocando-se os itens (i) e (iii) respectivamente por :*

(i') $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, *então* $\mathcal{F}(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$;

(iii') $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$, *para quaisquer morfismos* $f, g \in Mor(\mathcal{C})$ *que são componíveis.*

2. *Note que um funtor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *é contravariante se, e somente se,* $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ *é um funtor covariante.*

3. *Um funtor do tipo* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *é chamado de bifuntor.*

4. *Se* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *e* $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *são funtores, então a composição* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, *dada por* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(X))$ *e* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$ *é um funtor.*

5. *Se* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *são categorias, definimos* $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \{\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}; \mathcal{F}$ *é funtor*$\}$.

Exemplo 1.2.3. *1. Dada uma categoria* $\mathcal{C}$, *considere o funtor* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, *tal que* $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$, *para todo* $X \in \mathcal{C}$ *e* $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, *para todo* $f \in Mor(\mathcal{C})$. *Este é chamado de funtor identidade de* $\mathcal{C}$.

2. *Dada uma categoria* $\mathcal{C}$ *e* $X \in \mathcal{C}$, *a seguinte associação define um funtor:*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathcal{C}}(X, \_) : \mathcal{C} & \longrightarrow & Set \\ Y & \longmapsto & Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ (f : Y \to Z) & \longmapsto & Mor_{\mathcal{C}}(X, f) := f \circ \_ \end{array}$$

3. *Dada uma categoria* $\mathcal{C}$ *e* $Z \in \mathcal{C}$, *a seguinte associação define um funtor:*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathcal{C}}(\_, Z) : \mathcal{C}^{op} & \longrightarrow & Set \\ X & \longmapsto & Mor_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f : X \to Y) & \longmapsto & Mor_{\mathcal{C}}(f, Z) := \_ \circ f \end{array}$$

4. *Sejam* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ *e* $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *funtores. A seguinte associação define um funtor:*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}(\_), \mathcal{G}(\_)) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} & \longrightarrow & Set \\ (X, Y) & \longmapsto & Mor_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y)) \\ (f, g) : (X, Y) \to (X', Y') & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}(f)), \mathcal{G}(g)) := \mathcal{G}(g) \circ \_ \circ \mathcal{F}(f) \end{array}$$

5. *Considere o funtor $\mathcal{F} : Ab \to Gr$ tal que $\mathcal{F}(G) = G$ e $\mathcal{F}(f) = f$, para qualquer grupo abeliano G e qualquer morfismo de grupos abelianos f. Também podemos definir um funtor $\mathcal{F} : Vec_{\Bbbk} \to Ab$ tal que $\mathcal{F}(V) = V$ e $\mathcal{F}(T) = T$, para cada espaço vetorial V, e para cada transformação linear T. Ou seja, $\mathcal{F}$ "esquece"a ação do corpo sobre o espaço vetorial. Os funtores desta forma, que apenas "esquecem"determinada estrutura, se chamam de funtores de esquecimento.*

6. *Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial fixado. Então temos um funtor $\mathcal{F}_V : Vec_{\Bbbk} \to Vec_{\Bbbk}$ dado por $\mathcal{F}_V(W) = V \otimes_{\Bbbk} W$ e $\mathcal{F}_V(f) = Id_V \otimes_{\Bbbk} f$, para qualquer $f \in Mor(Vec_{\Bbbk})$.*

7. *Dado um anel comutativo com unidade R, a seguinte associação define um bifuntor:*

$$\begin{aligned} \otimes : {}_RMod \times {}_RMod &\longrightarrow {}_RMod \\ (M, N) &\longmapsto M \otimes_R N \\ (f, g) &\longmapsto f \otimes_R g \end{aligned}$$

8. *Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, e $Z \in \mathcal{D}$ fixado, a associação $cte : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dada por $X \mapsto Z$ e $f \mapsto 1_Z$ define um funtor, chamado de funtor constante.*

9. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Existem dois funtores de projeção, $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, dados por $\pi_{\mathcal{C}}(C, D) = C$ e $\pi_{\mathcal{D}}(C, D) = D$, $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$.*

1.3 Transformações Naturais

Intuitivamente, uma transformação natural é um morfismo entre funtores. Seja Cat a categoria cujos objetos são as categorias, os morfismos são os funtores entre essas categorias e a composição é a composição de funtores. Considere a categoria $\mathcal{L}$, onde $Obj(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \, : \, \mathcal{F} \text{ é } funtor\}_{\mathcal{C},\mathcal{D} \in Cat}$. Para definir o conjunto de morfismos, considere $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias e $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Define-se:

$$Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \mathcal{A} \neq \mathcal{C} \text{ ou } \mathcal{B} \neq \mathcal{D}, \\ \{\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde η é uma família de morfismos $\eta_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ em $\mathcal{D}$, indexada em $\mathcal{C}$, que faz comutar o seguinte diagrama, independentemente da escolha de $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
\mathcal{G}(X) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Considere a composição como sendo a função que leva $(\theta, \eta) \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \times Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ no morfismo $\theta \circ \eta$, onde $(\theta \circ \eta)_X = \theta_X \circ \eta_X$, para cada $X \in \mathcal{C}$. Observa-se que os conjuntos de morfismos são dois a dois disjuntos e que a composição é associativa. Para verificar que $\mathcal{L}$ é, de fato, uma categoria, resta verificar que a composição de dois morfismos componíveis de $\mathcal{L}$ é ainda um morfismo de $\mathcal{L}$. Para isso, tomando $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, $\theta \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\eta \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, então :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) \circ (\theta \circ \eta)_X &= \mathcal{H}(f) \circ (\theta_X \circ \eta_X) \\
&= (\mathcal{H}(f) \circ \theta_X) \circ \eta_X \\
&= (\theta_Y \circ \mathcal{G}(f)) \circ \eta_X \\
&= \theta_Y \circ (\mathcal{G}(f) \circ \eta_X) \\
&= \theta_Y \circ (\eta_Y \circ \mathcal{F}(f)) \\
&= (\theta_Y \circ \eta_Y) \circ \mathcal{F}(f) \\
&= (\theta \circ \eta)_Y \circ \mathcal{F}(f)
\end{aligned}$$

ou seja, $\theta \circ \eta \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. Consequentemente, $\theta \circ \eta \in Mor(\mathcal{L})$.

Definição 1.3.1. *Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, uma transformação natural $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é uma família $\{\eta_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ de morfismos em $Mor(\mathcal{D})$, que cumprem a seguinte propriedade universal: dados $X, Y \in \mathcal{C}$ e um morfismo $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$, então o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
\mathcal{G}(X) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Se para cada $X \in \mathcal{C}$ o morfismo η_X for um isomorfismo, então a transformação natural η é chamada de isomorfismo natural. Neste caso, diremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são funtores *naturalmente equivalentes ou naturalmente isomorfos.*

Exemplo 1.3.2. *1. Se R é um anel comutativo, com unidade, então $Mor_R(R, M)$ é um R-módulo à esquerda, para cada R-módulo à esquerda M. Definindo, para cada $M \in {}_R Mod$, o isomorfismo de R-módulos à esquerda $\varphi_M : Mor_R(R, M) \to M$, por $\varphi_M(f) = f(1)$, tem-se que $\varphi := \{\varphi_M\}_{M \in {}_R Mod}$ é um isomorfismo natural entre os funtores $Mor_R(R, \text{\textvisiblespace})$ e o funtor identidade da categoria ${}_R Mod$.*

2. Tome $n \in \mathbb{N}$ e considere os funtores:

$$\begin{array}{rcl} GL_n(\text{\textvisiblespace}) : Fld & \longrightarrow & GL_n \\ \Bbbk & \longmapsto & GL_n(\Bbbk) \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (\text{\textvisiblespace})^\times : Fld & \longrightarrow & GL_n \\ \Bbbk & \longmapsto & \Bbbk^\times = \{d[k, 1, \cdots, 1]; k \in \Bbbk \setminus \{0\}\} \\ f & \longmapsto & \tilde{f}, \end{array}$$

onde $d[k, 1, \cdots, 1]$ denota a matriz diagonal com elementos $k, 1, \ldots, 1$ na sua diagonal. Para cada corpo $\Bbbk$, a função determinante $det_\Bbbk : GL_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$ é um morfismo em GL_n. Aqui estamos identificando $k \in \Bbbk \setminus \{0\}$ com a matriz diagonal $d[k, 1, \cdots, 1]$. Mais ainda, $det : GL_n(\text{\textvisiblespace}) \to (\text{\textvisiblespace})^\times$ é uma transformação natural.

A composição (vertical) de duas transformações naturais $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é dada por $(\eta \circ \theta)_X = \eta_X \circ \theta_X$. Vale salientar que é possível definir uma segunda composição de transformações naturais, chamada de composição horizontal. De fato, dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{J}, \mathcal{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores e $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\nu : \mathcal{J} \to \mathcal{H}$ transformações naturais. Nota-se que para $\eta_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$, $\mathcal{J}(\eta_X) : \mathcal{J}\mathcal{F}(X) \to \mathcal{J}\mathcal{G}(X)$ e $\nu_{\mathcal{G}(X)} : \mathcal{J}\mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}\mathcal{G}(X)$, tem-se $\nu_{\mathcal{G}(X)} \circ \mathcal{J}(\eta_X) : \mathcal{J}\mathcal{F}(X) \to \mathcal{H}\mathcal{G}(X)$. Pode-se definir a transformação natural $\nu \circ \eta : \mathcal{J}\mathcal{F} \to \mathcal{H}\mathcal{G} = \{(\nu \circ \eta)_X = \nu_{\mathcal{G}(X)} \circ \mathcal{J}(\eta_X)\}_{X \in \mathcal{C}}$.

Se $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ são duas categorias e $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são dois funtores, utilizaremos a notação $Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ para denotar o conjunto das transformações naturais de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$.

Definição 1.3.3. *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas equivalentes quando existem funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tais que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ é naturalmente equivalente ao funtor $Id_\mathcal{D}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ é naturalmente equivalente ao funtor $Id_\mathcal{C}$. Neste caso diremos que os funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são equivalências de categorias. Mais ainda, se $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_\mathcal{D}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id_\mathcal{C}$, então diremos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas e que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são isomorfismos de categorias.*

Definição 1.3.4. *Sejam $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $X, Y \in \mathcal{C}$. Considere a aplicação:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{X,Y} : Mor_\mathcal{C}(X, Y) & \longrightarrow & Mor_\mathcal{D}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \end{array}$$

- *$\mathcal{F}$ é dito fiel se $\mathcal{F}_{X,Y}$ é injetiva, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$;*

- *$\mathcal{F}$ é dito total se $\mathcal{F}_{X,Y}$ é sobrejetiva, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$;*

- *$\mathcal{F}$ é dito totalmente fiel se é total e fiel.*

Definição 1.3.5. *Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito essencialmente sobrejetivo se para cada $Y \in \mathcal{D}$, existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(X)$ e Y são isomorfos, ou seja, se existe um isomorfismo $f_{X,Y} : \mathcal{F}(X) \to Y \in Mor(\mathcal{D})$.*

Proposição 1.3.6. *Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, é essencialmente sobrejetivo e totalmente fiel.*

Dem.: ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{F}$ é uma equivalência de categorias, então existe um funtor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\eta : \mathcal{GF} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\theta : Id_{\mathcal{D}} \to \mathcal{FG}$. Se $Y \in \mathcal{D}$, então $\theta_Y : Y \to \mathcal{FG}(Y)$ é um isomorfismo. Como $\mathcal{G}(Y) \in \mathcal{C}$, tem-se que $\mathcal{F}$ é essencialmente sobrejetivo.

Para ver que $\mathcal{F}$ é um funtor fiel, suponha que existam $X, X' \in \mathcal{C}$ e $f, f' : X \to X'$ tais que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f')$. Logo, $\mathcal{GF}(f) = \mathcal{GF}(f')$. Pela naturalidade de η, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \mathcal{GF}(X) \arrow[l, "\eta_X"'] \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathcal{GF}(f)=\mathcal{GF}(f')"] & X \arrow[d, "f'"] \\
X' & \mathcal{GF}(X') \arrow[l, "\eta_{X'}"] \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & X'
\end{tikzcd}$$

A partir deste, podemos concluir que $f = f'$, visto que η_X *e* $\eta_{X'}$ são isomorfismos. Para ver que $\mathcal{F}$ é total, dados $X, X' \in \mathcal{C}$ e um morfismo $g : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X') \in Mor(\mathcal{D})$, considere o morfismo $h := \eta_{X'} \circ \mathcal{G}(g) \circ \eta_X^{-1} \in Mor(\mathcal{C})$. Tem-se que $h \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ \mathcal{G}(g)$. Este fato, juntamente com a naturalidade de η garantem a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{GF}(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"'] & X \arrow[d, "h"] & \mathcal{GF}(X) \arrow[l, "\eta_X"'] \arrow[d, "\mathcal{GF}(h)"] \\
\mathcal{GF}(X') \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & X' & \mathcal{GF}(X') \arrow[l, "\eta_{X'}"]
\end{tikzcd}$$

Deste podemos concluir que $\mathcal{GF}(h) = \mathcal{G}(g)$. Com uma construção análoga à feita para o funtor $\mathcal{F}$ anteriormente, prova-se que $\mathcal{G}$ é um funtor fiel. Com isto temos que $\mathcal{F}(h) = g$. Assim, dado um morfismo $g \in Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X'))$, existe um morfismo $h \in Mor_{\mathcal{C}}(X, X')$, tal que $\mathcal{F}(h) = g$, e portanto, $\mathcal{F}$ é total.

($\Leftarrow$) Já que $\mathcal{F}$ é essencialmente sobrejetivo, defina $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D} \mapsto \mathcal{G}(Y)$, onde $\mathcal{G}(Y) \in \mathcal{C}$ é um objeto tal que existe um isomorfismo $\eta_Y : Y \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(Y))$. Agora, como

$\mathcal{F}$ é totalmente fiel, dado $g \in Mor_{\mathcal{D}}(Y, Y')$, defina $\mathcal{G}(g)$ como sendo o único morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{G}(g)) = \eta_{Y'} \circ g \circ \eta_Y^{-1}$. É de fácil verificação que $\mathcal{G}$ é um funtor e que $\eta = \{\eta_Y\}_{Y \in \mathcal{D}} : Id_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathcal{G}$ é um isomorfismo natural. Finalmente, para cada $X \in \mathcal{C}$ defina $\theta_X : \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \to X$ como sendo o único morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(\theta_X) = \eta_{\mathcal{F}(X)}^{-1}$. Para ver que $\theta : \mathcal{G}\mathcal{F} \to Id_{\mathcal{C}}$ é uma transformação natural, note que para cada morfismo $f : X \to X'$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \circ \theta_X) &= \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\theta_X) \\
&= \mathcal{F}(f) \circ \eta_{\mathcal{F}(X)}^{-1} \\
&= \eta_{\mathcal{F}(X')}^{-1} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}(f) \\
&= \mathcal{F}(\theta_{X'}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}\mathcal{F}(f)) \\
&= \mathcal{F}(\theta_{X'} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}(f)).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}$ é fiel, tem-se que $f \circ \theta_X = \theta_{X'} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}(f)$. Com isto, θ é uma transformação natural. Para cada $X \in \mathcal{C}$, $\theta_X^{-1} : X \to \mathcal{G}\mathcal{F}(X)$ é o único morfismo tal que $\mathcal{F}(\theta_X^{-1}) = \eta_{\mathcal{F}(X)}$. Logo θ é um isomorfismo natural. Portanto, $\mathcal{F}$ é uma equivalência de categorias. $\square$

1.4 Adjunção de Funtores

A noção de adjunção de funtores será utilizada mais tarde no estudo de objetos duais e Hom-Functors internos.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Considere os funtores dados pelas seguintes composições (ver Exemplo 1.2.3):

$$\begin{aligned}
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(_), _) &:= Mor_{\mathcal{D}}(_, _) \circ (\mathcal{F} \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set, \\
Mor_{\mathcal{C}}(_, \mathcal{G}(_)) &:= Mor_{\mathcal{C}}(_, _) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{G}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set.
\end{aligned}$$

Definição 1.4.1. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Diremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são funtores adjuntos quando existe um isomorfismo natural $\phi : Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\_), \_) \to Mor_{\mathcal{C}}(\_, \mathcal{G}(\_))$. Neste caso, diremos que $\mathcal{F}$ é adjunto à esquerda de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ é adjunto à direita de $\mathcal{F}$, ou apenas que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi)$ é uma adjunção.*

A próxima proposição fornece uma caracterização muito útil para adjunções. Vale salientar que alguns autores tomam seu segundo item como definição de adjunção.

Proposição 1.4.2. *Sejam $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma adjunção $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi)$;

(ii) Existem transformações naturais $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G}\mathcal{F}$ e $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \to Id_{\mathcal{D}}$, tais que as seguintes composições são morfismos identidade (para quaisquer $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$):

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(\eta_X)} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}(X)}} \mathcal{F}(X)$$

$$\mathcal{G}(Y) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}(Y)}} \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}(Y) \xrightarrow{\mathcal{G}(\epsilon_Y)} \mathcal{G}(Y)$$

Dem.: Ver [A], página 183. $\square$

Exemplo 1.4.3. *1. Tome os seguintes funtores:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : Set & \longrightarrow & Vec_{\Bbbk} \\ X & \longmapsto & V_X := \Bbbk\langle X \rangle \\ f : X \to Y & \longmapsto & \langle f \rangle : V_X \to V_Y, \ x \in X \mapsto f(x) \end{array} \qquad \mathcal{G} := forget : Vec_{\Bbbk} \ \to \ Set.$$

Dados $X \in Set$, $V \in Vec_{\Bbbk}$, $f : X \longrightarrow V$ uma função e $T : V_X \longrightarrow V$ uma transformação $\Bbbk-$linear, nota-se que $\phi_{X,V} : Mor_{Vec_{\Bbbk}}(V_X, V) \longrightarrow Mor_{Set}(X, V)$, onde $\phi_{X,V}(T) = T|_X$ é um isomorfismo natural cujo inverso é o isomorfismo natural $\psi_{X,V} : Mor_{Set}(X, V) \to Mor_{Vec}(V_X, V)$, dado por $\psi_{X,V}(f) = \langle f \rangle$, onde $\langle f \rangle$ significa a extensão linear de f para V_X. Assim, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi)$ é uma adjunção.

2. Sejam G um grupo finito, $H \lhd G$ (subgrupo normal) e $\Bbbk$ um corpo de característica zero, algebricamente fechado. Se W é um $\Bbbk H$-módulo e V é um $\Bbbk G$-módulo, existe um isomorfismo $\Bbbk$-linear $\Phi : Hom_{\Bbbk H}(W, Hom_{\Bbbk G}(\Bbbk G, V)) \to Hom_{\Bbbk G}(\Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} W, V)$ onde:

$$\Phi(f)(g \otimes w) = f(w)(g), \ f \in Hom_{\Bbbk H}(W, Hom_{\Bbbk G}(\Bbbk G, V)), \ g \in G, \ w \in W.$$

Este resultado permite estabelecer uma adjunção entre $Ind_H^G : {}_{\Bbbk H}Mod \to_{\Bbbk G} Mod$ e $Res_H^G : {}_{\Bbbk G}Mod \to {}_{\Bbbk H}Mod$ (o funtor de indução de representações do subgrupo H ao grupo G e o funtor de restrição de representações de G ao subgrupo H, respectivamente). Mais detalhes podem ser encontrados em [W] e em [Se].

3. Se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias, existe um funtor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $c : \mathcal{F}\mathcal{G} \to Id_{\mathcal{D}}$, $u : Id_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G}\mathcal{F}$. Defina a transformação natural $\psi := \mathcal{G}(\_) \circ u : Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\_), \_) \to Mor_{\mathcal{C}}(\_, \mathcal{G}(\_))$ por $\psi_{X,Y}(g) = \mathcal{G}(g) \circ u$, para quaisquer $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e $g \in Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y)$. Como $\mathcal{F}$ é uma equivalência de categorias, $\mathcal{G}$ também é uma equivalência de categorias, e portanto, para cada $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, a função $G : Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y))$, $h \mapsto \mathcal{G}(h)$

é bijetiva, visto que $\mathcal{G}$ é totalmente fiel. Assim, para cada $(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, tem-se que $\psi_{X,Y} = \mathcal{G}(\_) \circ u_X$ é um isomorfismo, já que , por hipótese, u é um isomorfismo. Com isto, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \psi)$ é uma adjunção.

Lema 1.4.4. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ duas categorias, $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores e $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ uma transformação natural. Então $(\_) \circ \alpha : Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{G}(\_), \_) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\_), \_)$ é uma transformação natural. Além disso, se α é um isomorfismo, então $(\_) \circ \alpha$ é um isomorfismo, com inverso $(\_) \circ \alpha^{-1}$.*

Dem.: Imediata a partir da definição de transformação natural. □

As duas proposições seguintes fornecem uma maneira de construir uma adjunção a partir de uma adjunção e de um funtor naturalmente equivalente a um dos adjuntos.

Notação: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, $X, X', Y, Y' \in \mathcal{C}$ objetos , $\theta \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ um morfismo e $\Gamma : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(X',Y')$ uma função. Denotaremos: $\langle \Gamma, \theta \rangle := \Gamma(\theta)$.

Proposição 1.4.5. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores, tais que existe uma adjunção $(\mathcal{F}, \mathcal{H}, \phi)$ e um isomorfismo natural $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$. Então $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \bar{\phi})$ é uma adjunção, onde $\bar{\phi} = \phi \circ (\_)\alpha^{-1}$.*

Dem.: Denote $\bar{\mathcal{F}} := Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\_), \_)$, $\bar{\mathcal{G}} := Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{G}(\_), \_)$ e $\bar{\mathcal{H}} := Mor_{\mathcal{C}}(\_, \mathcal{H}(\_))$. Tome um morfismo $(X,Y) \xrightarrow{(f,g)} (Z,W)$ na categoria $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{\mathcal{G}}(X,Y) \arrow[rrr, "\bar{\mathcal{G}}(f,g)"] \arrow[dr, "(_)\circ\alpha_X^{-1}"] \arrow[dd, "\bar{\phi}_{X,Y}"'] & & & \bar{\mathcal{G}}(Z,W) \arrow[dl, "(_)\circ\alpha_Z^{-1}"'] \arrow[dd, "\bar{\phi}_{Z,W}"] \\
\arrow[r, phantom, "(IV)"] & \bar{\mathcal{F}}(X,Y) \arrow[r, "\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F},g)"] \arrow[dl, "\phi_{X,Y}"] \arrow[u, phantom, "(I)"] \arrow[d, phantom, "(III)"] & \bar{\mathcal{F}}(Z,W) \arrow[dr, "\phi_{Z,W}"'] \arrow[r, phantom, "(II)"] & \\
\bar{\mathcal{H}}(X,Y) \arrow[rrr, "\bar{\mathcal{H}}(f,g)"'] & & & \bar{\mathcal{H}}(Z,W)
\end{tikzcd}$$

Nota-se que (II) e (IV) comutam em virtude da definição de $\bar{\phi}$. O quadrilátero (III) comuta, pois $(\mathcal{F}, \mathcal{H}, \phi)$ é uma adjunção. Portanto resta mostrar que (I) comuta. Para isto, tomando um morfismo $\theta \in \bar{\mathcal{G}}(X,Y)$, tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
\langle [(_) \circ \alpha_Z^{-1}] \circ \bar{\mathcal{G}}(f,g),\ \theta \rangle & = & \langle \bar{\mathcal{G}}(f,g) \circ \alpha_Z^{-1}, \theta \rangle \\
& = & \langle g \circ (_) \circ \mathcal{G}(f) \circ \alpha_Z^{-1}, \theta \rangle \\
& = & g \circ \theta \circ \mathcal{G}(f) \circ \alpha_Z^{-1} \\
& \overset{(\star)}{=} & g \circ \theta \circ \alpha_X^{-1} \circ \mathcal{F}(f) \\
& = & \langle g \circ [(_) \circ \alpha_X^{-1}] \circ \mathcal{F}(f), \theta \rangle \\
& = & \langle \bar{\mathcal{F}}(f,g) \circ [(_) \circ \alpha_X^{-1}],\ \theta \rangle
\end{array},$$

onde $(*)$ decorre da naturalidade de α. Assim o perímetro comuta e consequentemente $\bar{\phi}$ é um isomorfismo natural, cujo inverso é $\phi^{-1}\circ(\text{\textvisiblespace})\circ\alpha$. Logo $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \bar{\phi})$ é uma adjunção.$\square$

Proposição 1.4.6. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores, tais que existe uma adjunção $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \psi)$ e um isomorfismo natural $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Então $(\mathcal{F}, \mathcal{H}, \bar{\psi})$ é uma adjunção, onde $\bar{\psi} = \eta \circ \psi$.*

Dem.: Análoga a proposição anterior. $\square$

Os próximos resultados implicam na unicidade de adjuntos à direita, a menos de um único isomorfismo natural (existe uma versão para adjuntos à esquerda, com provas inteiramente análogas).

Proposição 1.4.7. *Considere $\mathcal{F}, \mathcal{J} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que existem adjunções $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi)$,$(\mathcal{J}, \mathcal{H}, \psi)$ e uma transformação natural $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Então existe uma única transformação natural $\mu : \mathcal{J} \to \mathcal{F}$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$
\begin{tikzcd}
Mor(\mathcal{F}(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "(\text{\textvisiblespace})\circ\mu_X"'] & Mor(X, \mathcal{G}(Y)) \arrow[d, "\eta_Y\circ(\text{\textvisiblespace})"] \\
Mor(\mathcal{J}(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"'] & Mor(X, \mathcal{H}(Y))
\end{tikzcd}
\quad , \ X \in \mathcal{C}, \quad Y \in \mathcal{D}.
$$

Dem.: Ver [M], página 122. $\square$

Corolário 1.4.8. *Sob as hipóteses da proposição anterior, se η é um isomorfismo, então μ é um isomorfismo.*

Dem.: Vamos exibir um inverso para μ. Para isso, dados $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$, considere o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \arrow[rrr, "\phi_{X,Y}"] \arrow[dr, "(\text{\textvisiblespace})\circ\mu_X"] \arrow[dd, "Id=(\text{\textvisiblespace})\circ Id_{\mathcal{F}}"'] & \arrow[r, phantom, "(I)"] & & Mor_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)) \arrow[dl, "\eta_Y\circ(\text{\textvisiblespace})"'] \arrow[dd, "Id=Id_{\mathcal{G}}\circ(\text{\textvisiblespace})"] \\
\arrow[r, phantom, "(IV)"] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[dl, "(\text{\textvisiblespace})\circ\alpha_X"] & Mor_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{H}(Y)) \arrow[dr, "\eta_Y^{-1}\circ(\text{\textvisiblespace})"] & \arrow[l, phantom, "(II)"] \\
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \arrow[rrr, "\phi_{X,Y}"'] & \arrow[r, phantom, "(III)"] & & Mor_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))
\end{tikzcd}
$$

onde $\alpha : \mathcal{J} \to \mathcal{F}$ é a única transformação natural que faz (III) comutar e é obtida pela Proposição 1.4.7 aplicada a transformação natural $\eta^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Nota-se também que

$Id_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é uma (então, pela Proposição 1.4.7, é a única) transformação natural que faz o perímetro comutar. Observando que o quadrilátero (I) também comuta em virtude da Proposição 1.4.7 e que (II) comuta trivialmente, tem-se que o triângulo (IV) também comuta, ou seja: $(\_) \circ Id_{\mathcal{F}} = (\_) \circ \mu_X \circ \alpha_X$. Logo, escolhendo $Y = \mathcal{F}(X)$ e aplicando esta composição no morfismo $1_{\mathcal{F}(X)}$, tem-se que: $1_{\mathcal{F}(X)} = 1_{\mathcal{F}(X)} \circ (Id_{\mathcal{F}})_X = (1_{\mathcal{F}(X)}) \circ \mu_X \circ \alpha_X = \mu_X \circ \alpha_X$. Assim, α é um inverso à direita para μ. Um diagrama análogo pode ser obtido permutando-se $\mathcal{F}$ por $\mathcal{J}$ e $\mathcal{G}$ por $\mathcal{H}$ (e os respectivos morfismos). Logo α também é um inverso à esquerda para μ, o que garante que μ é um isomorfismo natural. $\square$

Corolário 1.4.9. *Considere $\mathcal{F}, \mathcal{J} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores, tais que existem adjunções $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi)$ e $(\mathcal{J}, \mathcal{G}, \psi)$. Então existe um único isomorfismo natural $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{J}$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \arrow[d, "(_)\circ\alpha_X"'] \arrow[dr, "\phi_{X,Y}"] & \\
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"'] & Mor_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))
\end{tikzcd} \qquad , \ X \in \mathcal{C}, \quad Y \in \mathcal{D},$$

Dem.: Tome na Proposição 1.4.7, $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ e $\eta = Id_{\mathcal{G}}$ e use o Corolário 1.4.8. $\square$

1.5 Categorias Aditivas e Lineares

Iniciaremos esta seção com definições e exemplos de objetos iniciais, terminais e zeros de uma categoria.

Definição 1.5.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $X \in \mathcal{C}$ é dito um objeto inicial na categoria $\mathcal{C}$ quando $Mor_{\mathcal{C}}(X, W)$ é um conjunto unitário, para qualquer $W \in \mathcal{C}$. Um objeto $Y \in \mathcal{C}$ é dito um objeto final (ou terminal) na categoria $\mathcal{C}$ quando $Mor_{\mathcal{C}}(W, Y)$ é um conjunto unitário, para qualquer $W \in \mathcal{C}$. Um objeto $0 \in \mathcal{C}$ é dito um objeto zero na categoria $\mathcal{C}$ quando 0 é um objeto inicial e terminal na categoria $\mathcal{C}$, ou seja, quando $Mor_{\mathcal{C}}(0, W)$ e $Mor_{\mathcal{C}}(W, 0)$ são conjuntos unitários, para qualquer objeto $W \in \mathcal{C}$.*

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria que possui objeto zero 0, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, podemos destacar um morfismo $0_Y^X : X \to Y$, que é dado pela seguinte composição: $0_Y^X = g_Y \circ f_X$, onde $f_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X, 0)$ e $g_Y \in Mor_{\mathcal{C}}(0, Y)$. Este será chamado de *morfismo zero*.

Exemplo 1.5.2. *1. Seja $C = \{C_z; \quad z \in \mathbb{Z}\}$ uma família de conjuntos, tal que $C_i \subseteq C_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$. C é um conjunto totalmente ordenado pela inclusão, logo induz uma categoria $\mathbb{PO}(C)$, conforme o Exemplo (1.1.2 10). Quando a cadeia $C_i \subseteq C_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$, for limitada inferiormente (superiormente), então esta cota inferior (superior) é um objeto inicial (terminal) de $\mathbb{PO}(C)$.*

2. *O espaço nulo é objeto zero em $Vec_{\Bbbk}$.*

3. *Set não possui objeto zero. De fato, o único objeto inicial da categoria Set é o conjunto vazio, e os únicos objetos terminais de Set são os conjuntos unitários.*

Observação 1.5.3. *1. Objetos iniciais, quando existem, são únicos a menos de um (único) isomorfismo. De fato, sejam X e Y objetos iniciais na categoria $\mathcal{C}$ e denote por $m_Z : X \to Z$ e $n_Z : Y \to Z$ os únicos morfismos dados pela Definição 1.5.1, para cada $Z \in \mathcal{C}$. A comutatividade do seguinte diagrama prova que $m_Y : X \to Y$ é um isomorfismo, cujo inverso é o morfismo $n_X : Y \to X$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m_Y"] \arrow[d, "m_X=1_X"'] & Y \arrow[d, "n_Y=1_Y"] \arrow[dl, "n_X"] \\ X \arrow[r, "m_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Analogamente, os objetos terminais, quando existem, são únicos a menos de um (único) isomorfismo. Consequentemente, objetos zero são únicos, a menos de um (único) isomorfismo.

1.5.1 Produtos e Coprodutos em Categorias

Com o intuito de definir categorias aditivas e abelianas, introduziremos agora as noções de produto e coproduto entre objetos de uma categoria.

Definição 1.5.4. *O produto, ou produto binário, entre dois objetos X e Y de uma categoria $\mathcal{C}$ é uma tripla (P, π_X, π_Y), onde $P \in \mathcal{C}$ e $\pi_X : P \to X$ e $\pi_Y : P \to Y$ são morfismos, chamados de projeções, que cumprem a seguinte propriedade universal: dados um objeto $Z \in \mathcal{C}$ e um par de morfismos $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, existe um único morfismo $\gamma : Z \to P$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dotted, "\gamma"'] & \\
X & & Y \\
 & P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.5.5. *1. É fácil verificar que o produto, quando existe, é único, salvo isomorfismos. Por isso, usaremos $X \sqcap Y$ para denotar o produto de X por Y.*

2. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{O_Z\}_{Z\in\mathcal{O}}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Diremos que existe o produto para a família $\{O_Z\}_{Z\in\mathcal{O}}$ e o denotaremos por $\prod\limits_{Z\in\mathcal{O}} O_Z$ quando existem morfismos $\pi_X : \prod\limits_{Z\in\mathcal{O}} O_Z \to O_X$, $X \in \mathcal{O}$, em $Mor(\mathcal{C})$, tais que: dados $f_X : A \to O_X \in Mor(\mathcal{C})$, $X \in \mathcal{O}$, existe um único morfismo (em $\mathcal{C}$) $\gamma : A \to \prod\limits_{Z\in\mathcal{O}} O_Z$ tal que $\pi_X \circ \gamma = f_X$, para cada $X \in \mathcal{O}$.

3. Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Se os produtos $(X \sqcap Y) \sqcap Z$ e $X \sqcap (Y \sqcap Z)$ existem então são isomorfos; ver [R].

Exemplo 1.5.6. *1. Em Set, o produto é dado pelo produto cartesiano dos objetos, juntamente com os morfismos de projeção usuais.*

2. Se Y é um conjunto, considere $\mathbf{P}(Y)$ como sendo o conjunto das partes de Y, ou seja, o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de Y. Note que $(\mathbf{P}(Y), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, logo determina uma categoria, conforme o Exemplo 1.1.2, item (10). Nesta categoria o produto é dado pela intersecção.

3. Se R é um anel comutativo com unidade, a categoria ${}_R Mod$ admite produto binário entre seus objetos e este é determinado pelo produto cartesiano, também chamado de soma direta, juntamente com os morfismos de projeção usuais.

4. Dado um conjunto parcialmente ordenado X e $a, b \in X$, o produto $a \sqcap b$ existe em $\mathbb{PO}(X)$ se, e somente se, existe uma maior cota inferior para a e b, simultaneamente. Neste caso, a maior cota inferior e o produto $a \sqcap b$ coincidem.

A noção dual ao produto é a de coproduto. Intuitivamente, a definição de coproduto é obtida da definição de produto, invertendo todas as flechas.

Definição 1.5.7. *O coproduto entre dois objetos X e Y em uma categoria $\mathcal{C}$ é uma tripla $(C,\ i_X,\ i_Y)$, onde C é um objeto desta categoria, $i_X : X \to C$ e $i_Y : Y \to C$ são morfismos, chamados inclusões, que possuem a seguinte propriedade universal: dados um objeto Z e dois morfismos $f : X \to Z,\ g : Y \to Z \in Mor(\mathcal{C})$, existe um único morfismo $\gamma : C \to Z \in Mor(\mathcal{C})$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i_X"'] & & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "i_Y"] \\
& C \arrow[uu, dotted, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.5.8.

1. *É fácil verificar que o coproduto, se existe, é único, salvo isomorfismos. Por isso, usaremos $X \sqcup Y$ para denotar o coproduto de X por Y.*

2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{O_Z\}_{Z\in\mathbb{O}}$ uma subfamília de objetos de $Obj(\mathcal{C})$. Diremos que existe o coproduto para a família $\{O_Z\}_{Z\in\mathbb{O}}$, e o denotaremos por $\bigsqcup_{Z\in\mathbb{O}} O_Z$, quando existem morfismos $i_X : O_X \to \bigsqcup_{Z\in\mathbb{O}} O_Z,\ X \in \mathbb{O}$, em $Mor(\mathcal{C})$, tais que: dados $f_X : O_X \to A \in Mor(\mathcal{C}),\ X \in \mathbb{O}$, existe um único morfismo (em $\mathcal{C}$) $\gamma : \bigsqcup_{Z\in\mathbb{O}} O_Z \to A$ tal que $\gamma \circ i_X = f_X$, para cada $X \in \mathbb{O}$.*

3. *Se o coproduto $\sqcup_{Z\in\mathbb{O}} O_Z$ existe e a categoria possui objeto zero, então existem morfismos $\pi_X : \sqcup_{Z\in\mathbb{O}} O_Z \to O_X,\ X \in \mathbb{O}$, tais que $\pi_X \circ i_X = 1_{O_X}$ e $\pi_X \circ i_Y = 0_{O_X}^{O_Y}$, se $Y \neq X$. De fato, basta tomar π_X como o único morfismo que faz o diagrama*

abaixo comutar

$$\begin{tikzcd}
& O_X & \\
O_X \arrow[ur, "1_{O_X}"] \arrow[dr, "i_X"'] & & O_Y \arrow[ul, "0^{O_Y}_{O_X}"'] \arrow[dl, "i_Y"] \\
& \sqcup_{Z\in\mathcal{C}} O_Z \arrow[uu, dotted, "\pi_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.5.9. 1. *Na categoria Set o coproduto entre dois objetos é exatamente a união disjunta, juntamente com os morfismos canônicos de inclusão.*

2. *Na categoria $_R Mod$ o coproduto entre dois objetos é exatamente o produto cartesiano, juntamente com os morfismos canônicos de inclusão.*

3. *Sejam X um conjunto parcialmente ordenado e $a, b \in X$. O coproduto de a por b existe em $\mathbb{PO}(X)$ se, e somente se, existe uma menor cota superior para a e b, simultaneamente. Neste caso, a menor cota superior e o coproduto de a por b coincidem.*

1.5.2 Categorias Aditivas e Lineares

Agora temos todos os conceitos necessários para introduzir a noção de categoria aditiva.

Definição 1.5.10. *Diremos que uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva quando:*

(i) Mor(X,Y) é um grupo abeliano, para qualquer par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$;

(ii) A composição é distributiva com relação à operação do grupo, ou seja, dados $f, g : X \to Y$, $h : Z \to X$ e $j : Y \to W$, então :

$$j(f+g) = jf + jg \quad e \quad (f+g)h = fh + gh;$$

(iii) $\mathcal{C}$ possui objeto zero;

(iv) Existe o produto entre dois objetos quaisquer de $\mathcal{C}$.

Uma categoria que cumpre somente os dois primeiros itens da definição acima é dita uma *categoria pré aditiva.*

Exemplo 1.5.11. *1. A categoria Ab dos grupos abelianos é aditiva, onde cada conjunto de morfismos $Mor_{Ab}(X,Y)$ tem estrutura de grupo abeliano induzida pela operação de Y, o objeto zero é o grupo abeliano trivial e o produto de grupos abelianos é o produto cartesiano usual de grupos.*

2. *Considere $C = \{a, b, c, d\}$ munido com a seguinte relação de ordem parcial:*

$$a \leq a,\ b \leq b,\ c \leq c,\ d \leq d,\ a \leq c,\ b \leq d.$$

Considerando a categoria $\mathbb{PO}(C)$, o produto entre os objetos c e d não existe, pois não existe um elemento $x \in C$, tal que $x \leq c$ e $x \leq d$.

3. *$Vec_{\Bbbk}$ e $vec_{\Bbbk}$ são categorias aditivas, onde cada conjunto de morfismos tem estrutura de grupo abeliano usual ($\mathcal{L}(V,W)$, o conjunto das transformações lineares de V para W é um $\Bbbk$-espaço vetorial).*

4. *Vec_G é uma categoria aditiva, onde o objeto zero é o corpo $\Bbbk$ e o produto é o produto cartesiano de espaços vetoriais G-graduados com a graduação definida por $(V \times W)_g = V_g \times W_g$, para cada $g \in G$, juntamente com os morfismos de projeção canônica.*

Definição 1.5.12. *Seja $\Bbbk$ é um corpo. Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita $\Bbbk$-linear se cada conjunto de morfismos é um espaço vetorial sobre o corpo $\Bbbk$ e a composição $\circ : Mor(Y,Z) \times Mor(X,Y) \to Mor(X,Z)$ é uma transformação $\Bbbk$-bilinear, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.*

Exemplo 1.5.13. *1. A categoria dos $\Bbbk$-espaços vetoriais é uma categoria $\Bbbk$-linear.*

2. *Se A é uma $\Bbbk$-álgebra, então a categoria A-Mod é $\Bbbk$-linear.*

3. *Vec_G é uma categoria $\Bbbk$-linear.*

1.6 (Co)Núcleos, (Co)Equalizadores e Categorias Abelianas

Aqui introduziremos a noção de núcleo e de conúcleo de um morfismo em uma categoria que possui objeto zero. As noções de equalizador e de coequalizador são, sob certo ponto de vista, o núcleo e o conúcleo, respectivamente, da diferença de dois morfismos.

Definição 1.6.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria que possui objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo. Um núcleo para o morfismo f é um par (K, k), onde $K \in \mathcal{C}$ e $k : K \to X \in Mor(\mathcal{C})$ é um morfismo tal que $f \circ k = 0_Y^K$, que possui a seguinte propriedade universal: dado outro par (K', k'), onde $K' \in \mathcal{C}$ e $k' : K' \to X \in Mor(\mathcal{C})$, satisfazendo $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, existe um único morfismo $\gamma : K' \to K$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
& K \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "0_Y^K"] & \\
& K' \arrow[u, dotted, "\gamma"] \arrow[uul, bend left, "k'"] \arrow[uur, bend right, "0_Y^{K'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Os núcleos de homomorfismos de anéis, módulos, grupos, espaços vetoriais e de álgebras, juntamente com os morfismos de inclusão canônica são exemplos de núcleos, no sentido categórico. Núcleos de morfismos, quando existem, são únicos, a menos de isomorfismos. Denotaremos o núcleo de um morfismo f, quando existir, por $Ker(f)$.

Definição 1.6.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$. Um conúcleo para o morfismo f é um par (C, c), onde $C \in \mathcal{C}$ e $c : Y \to C \in Mor(\mathcal{C})$ é um morfismo tal que $c \circ f = 0_C^X$, e que possui a seguinte propriedade universal: dado outro par (C', c'), onde $C' \in \mathcal{C}$ e $c' : Y \to C' \in Mor(\mathcal{C})$ é um morfismo tal que $c' \circ f = 0_{C'}^X$, então existe um único morfismo $\gamma : C \to C'$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "0_C^X"'] \arrow[ddr, bend right, "0_{C'}^X"'] & & Y \arrow[dl, "c"] \arrow[ddl, bend left, "c'"] \\
& C \arrow[d, dotted, "\gamma"] & \\
& C' &
\end{tikzcd}$$

Os conúcleos de homomorfismos de módulos, grupos abelianos e de espaços vetoriais, juntamente com os morfismos de inclusão canônica são exemplos de conúcleos, no sentido categórico. Vale lembrar que os conúcleos destes homomorfismos, no sentido usual, são exatamente o quociente do contradomínio pela imagem. Observamos que conúcleos de morfismos, quando existem, são únicos, a menos de isomorfismo. Denotaremos, quando existir, o conúcleo de um morfismo f por $Coker(f)$.

Definição 1.6.3. *Dados dois morfismos $f, g : X \to Y$ em uma categoria $\mathcal{C}$, um equalizador para f e g é um par (E, v), onde $E \in \mathcal{C}$ e $v : E \to X \in Mor(\mathcal{C})$, tal que*

$f \circ v = g \circ v$, e vale a seguinte propriedade universal: se (E', v') é um par composto por um objeto $E' \in \mathcal{C}$ e um morfismo $v' : E' \to X$, tal que $f \circ v' = g \circ v'$, então existe um único morfismo $\gamma : E' \to E$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f{,}g"] & & Y \\
& E \arrow[ul, "v"'] \arrow[ur, "f\circ v=g\circ v"] & \\
& E' \arrow[u, dotted, "\gamma"] \arrow[uul, bend left, "v'"] \arrow[uur, bend right, "f\circ v'=g\circ v'"'] &
\end{tikzcd}$$

Equalizadores de morfismos, quando existem, são únicos a menos de isomorfismo. Por esta razão denotaremos o equalizador dos morfismos f e g por $eq(f, g)$.

Observação 1.6.4. *Note que quando a categoria $\mathcal{C}$ é pré aditiva e possui objeto zero, $f \circ v = g \circ v$ implica em $(f - g) \circ v = 0_Y^E$. Então é fácil verificar que $eq(f, g) = Ker(f - g)$.*

Definição 1.6.5. *Dados dois morfismos $f, g : X \to Y$ em uma categoria $\mathcal{C}$, um coequalizador para f e g é um par (D, u), onde $D \in \mathcal{C}$ e $u : Y \to D \in Mor(\mathcal{C})$, tal que $u \circ f = u \circ g$, e vale a seguinte propriedade universal: se (D', u') é um par composto por um objeto $D' \in \mathcal{C}$ e um morfismo $u' : Y' \to D'$ tal que $u' \circ f = u' \circ g$, existe um único morfismo $\gamma : D \to D'$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f{,}g"] \arrow[dr, "u\circ f=u\circ g"] \arrow[ddr, bend right, "u'\circ f=u'\circ g"'] & & Y \arrow[dl, "u"] \arrow[ddl, bend left, "u'"] \\
& D \arrow[d, dotted, "\gamma"] & \\
& D' &
\end{tikzcd}$$

Coequalizadores, quando existem, são únicos a menos de isomorfismo. Por isso denotaremos o coequalizador dos morfismos f e g por $coeq(f, g)$.

Observação 1.6.6. *Análogo ao que acontece com os equalizadores, se a categoria $\mathcal{C}$ é pré aditiva e possui objeto zero, então $coeq(f, g) = Coker(f - g)$.*

Finalizamos esta seção com a noção de categorias abelianas a qual é de grande importância em teoria de categorias.

Definição 1.6.7. *Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita abeliana se, para qualquer morfismo*

$f : X \to Y$ dado, existe uma decomposição canônica da forma

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & I \arrow[d, "i"] \\
& & Y \arrow[d, "c"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

tal que:

$$i \circ \pi = f,\ (K, k) = Ker(f),\ (C, c) = Coker(f),\ (I, i) = Ker(c) \ \ e \ \ (I, \pi) = Coker(k).$$

Exemplo 1.6.8. 1. *A categoria Ab dos grupos abelianos é abeliana.*

2. *Dado um anel A, então a categoria ${}_AMod$ é abeliana. Mais ainda, se o anel tomado for uma $\Bbbk$-álgebra, esta categoria é $\Bbbk$-linear.*

3. *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias abelianas, então $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ são categorias abelianas. Também é abeliana a categoria $\mathcal{L} := Fun(\mathcal{C},\ \mathcal{D})$, cuja classe de objetos consiste dos funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, os morfismos são as transformações naturais entre estes funtores, e a composição é a composição vertical de transformações naturais.*

1.7 Limites e Colimites

Nesta seção exploramos as noções de limite e colimite de funtores. Para tal, usaremos os conceitos de cones e cocones de um funtor.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Um *cone* para o funtor $\mathcal{F}$ consiste de um objeto $V \in \mathcal{D}$, chamado de vértice do cone, e uma família de morfismos em $\mathcal{D}$, $\{a_Z : V \to \mathcal{F}(Z)\}_{Z \in \mathcal{C}}$, tais que, para cada $f : X \to Y \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "a_X"'] \arrow[dr, "a_Y"] & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

Com um certo abuso de notação, um cone composto por um vértice V e morfismos $a_Z : V \to \mathcal{F}(Z),\ Z \in \mathcal{C}$, será denotado simplesmente por (V, a).

Um morfismo do cone (V, a) para o cone (V', a'), do funtor $\mathcal{F}$, é um morfismo $\vartheta : V \to V' \in Mor(\mathcal{D})$ tal que o seguinte diagrama comuta, para cada Z em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "a_Z"'] & V' \arrow[dl, "a'_Z"] \\ \mathcal{F}(Z) & \end{tikzcd}$$

A composição entre dois morfismos de cone deriva da composição de morfismos na categoria $\mathcal{D}$, a qual fornece um novo morfismo de cones a partir de dois morfismos de cones componíveis. Tal composição herda a associatividade e os morfismos identidade da categoria $\mathcal{D}$. É imediato verificar que dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, **Cone**$(\mathcal{F})$ é uma categoria, cujos objetos são os cones do funtor $\mathcal{F}$, os morfismos são os morfismos de cone e a composição é a citada acima.

Definição 1.7.1. *O limite para um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um objeto terminal na categoria **Cone**($\mathcal{F}$). Um limite se diz finito quando a classe de objetos da categoria $\mathcal{C}$ é um conjunto finito.*

Observação 1.7.2. *Explicitamente, o limite para um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um objeto $L \in \mathcal{D}$, juntamente com uma família de morfismos $\{a_Z : L \to \mathcal{F}(Z)\}_{Z \in \mathcal{C}}$, tal que o seguinte diagrama comuta: para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$,*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "a_X"'] \arrow[dr, "a_Y"] & \\ \mathcal{F}(X) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

e que possuem a seguinte propriedade universal: se $L' \in \mathcal{D}$ e $\{a'_Z : L' \to \mathcal{F}(Z)\}_{Z \in \mathcal{C}}$ é outro par com as mesmas propriedades, então existe um único morfismo $\gamma : L' \to L$

que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[ddl, "a'_X"'] \arrow[ddr, "a'_Y"] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & \\
 & L \arrow[dl, "a_X"] \arrow[dr, "a_Y"'] & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.7.3. 1. *Sejam $\mathcal{C} = \{1, 2\}$ a categoria discreta que possui apenas dois objetos e $\mathcal{D}$ uma categoria qualquer, com dois objetos fixados, A e B. Considere o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tal que $\mathcal{F}(1) = A$, e $\mathcal{F}(2) = B$. $\mathcal{F}$ tem limite se, e só se o produto $A \sqcap B$ existe. Caso exista, o limite será exatamente este produto (juntamente com os morfismos de projeção, conforme a Definição 1.5.4). Generalizando, seja $\mathcal{C}$ um conjunto ou classe de objetos qualquer que parametrize uma subclasse de uma categoria $\mathcal{D}$, ou seja, para cada $X \in \mathcal{C}$, escolhe-se um objeto $A_X \in \mathcal{D}$. Considerando $\mathcal{C}$ como uma categoria discreta e tomando o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tal que $X \mapsto A_X$, o produto $\prod\limits_{X \in \mathcal{C}} A_X$ existe se, e só se $\mathcal{F}$ tem limite. Aqui o limite é o objeto $\prod\limits_{X \in \mathcal{C}} A_X$, juntamente com os morfismos de projeção.*

2. *Seja $\mathcal{C} = \{1, 2\}$ uma categoria que possui apenas dois objetos e quatro morfismos, sendo dois destes os morfismos identidade e os outros dois sendo $m, m' : 1 \to 2$. Tomando dois morfismos, $f, g : A \to B$, em uma categoria $\mathcal{D}$ qualquer, e o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tal que $\mathcal{F}(1) = A$, $\mathcal{F}(2) = B$, $\mathcal{F}(m) = f$, $\mathcal{F}(m') = g$, o limite de $\mathcal{F}$ existe se, e só se, existe o equalizador para o par (f, g). Neste caso o equalizador é o limite do funtor $\mathcal{F}$ (juntamente com os morfismos da Definição 1.6.3).*

Define-se *cocone* para o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ como sendo um objeto $V \in \mathcal{D}$, juntamente com uma família de morfismos em $\mathcal{D}$, $\{b_Z : \mathcal{F}(Z) \to V\}_{Z \in \mathcal{C}}$, que faz o seguinte diagrama comutar: para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ e para qualquer $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$,

$$\begin{tikzcd}
& V & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[ur, "b_X"] \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y) \arrow[ul, "b_Y"']
\end{tikzcd}$$

Se (V, b_Z) e (V', b'_Z) são dois cocones para o funtor $\mathcal{F}$, um morfismo de cocones de (V, b_Z) para (V', b'_Z) é um morfismo $\zeta : V \to V' \in Mor(\mathcal{D})$, tal que o seguinte diagrama é comutativo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e para qualquer $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
& V' & \\
& V \arrow[u, dotted, "\zeta"] & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[uur, "b'_X"] \arrow[ur, "b_X"] \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y) \arrow[uul, "b'_Y"'] \arrow[ul, "b_Y"']
\end{tikzcd}$$

Se considerarmos a composição de morfismos de cocones como sendo a induzida pela composição da categoria $\mathcal{D}$, esta é associativa e admite os morfismos identidade. Assim, podemos definir a categoria $Cocone(\mathcal{F})$ como sendo a categoria cuja classe de objetos é composta pelos cocones do funtor $\mathcal{F}$, os morfismos são os morfismos entre cocones de $\mathcal{F}$ e a composição é a induzida pela composição de $\mathcal{D}$.

Definição 1.7.4. *Um colimite para o funtor $\mathcal{F}$ é um objeto $C \in \mathcal{C}$, juntamente com uma família de morfismos $\{b_Z : \mathcal{F}(Z) \to C\}_{Z \in \mathcal{C}}$, que é um objeto inicial na categoria $Cocone(\mathcal{F})$.*

Exemplo 1.7.5. *1. Seja $\mathcal{C} = \{1, 2\}$ a categoria discreta que possui apenas dois objetos. Seja $\mathcal{D}$ uma categoria, $A, B \in \mathcal{D}$ e considere o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tal que $\mathcal{F}(1) = A$ e $\mathcal{F}(2) = B$. Considere (C, i_j) um cocone para $\mathcal{F}$. C é o colimite do funtor $\mathcal{F}$ se, e somente se, para cada par (Z, b_j), existe um único morfismo*

$\gamma : C \to Z$, *tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dd, dotted, "\gamma"] & \\
A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[dr, "b_A"'] & & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[dl, "b_B"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Isto equivale a dizer que Z é o coproduto de A e B.

2. *Seja $\mathcal{C} = \{1, 2\}$ uma categoria que possui apenas dois objetos e quatro morfismos, sendo dois destes os morfismos identidade e os outros dois sendo $m, m' : 1 \to 2$. Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria, $A, B \in \mathcal{D}$, $f, g \in Mor_{\mathcal{D}}(A, B)$, e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ o funtor tal que $\mathcal{F}(1) = A, \mathcal{F}(2) = B, \mathcal{F}(m) = f, \mathcal{F}(m') = g$. Se $(C, \{v_A, v_B\})$ é um cocone para $\mathcal{F}$, então o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "v_A"'] \arrow[dr, "v_B"] & \\
A \arrow[rr, "{f,g}"'] & & B
\end{tikzcd}$$

$(C, \{v_A, v_B\})$ é o colimite de $\mathcal{F}$ se, e somente se, para cada cocone $(Z, \{v'_A, v'_B\})$, existe um único morfismo $\gamma : C \to Z$, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dotted, "\gamma"] \arrow[ddl, bend right, "v_A"'] \arrow[ddr, bend left, "v_B"] & \\
& Z \arrow[dl, "v'_A"] \arrow[dr, "v'_B"'] & \\
A \arrow[rr, "{f,g}"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Com isto, $f \circ v_A = v_B = g \circ v_A$. É fácil ver que v_A é o coequalizador de f e g.

Observação 1.7.6. 1. *Cocones são cones na categoria oposta.*

2. *Um colimite é exatamente um limite na categoria oposta, no seguinte sentido: Se (L, b_Z) é um limite para o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, então (L, b_Z) é um colimite para o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$. Decorre disso que coprodutos e coequalizadores (e em particular, conúcleos) são exatamente produtos, equalizadores (núcleos) na categoria oposta, respectivamente.*

3. *Como limites (colimites) são objetos terminais (iniciais) em uma determinada categoria, então são únicos, a menos de um isomorfismo, conforme Observação 1.5.3.*

Definição 1.7.7. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita completa (resp. cocompleta) se ela possui todos os limites (resp. colimites) pequenos, isto é, qualquer funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, onde $\mathcal{D}$ é uma categoria pequena, tem limite (resp. colimite) em $\mathcal{C}$.*

Exemplo 1.7.8. *Muitas categorias familiares são completas e cocompletas, como por exemplo: Set, Grp, Ab, Vec, R-Mod, etc.*

1.8 End e Coend de Funtores

Introduzimos nessa seção as noções de end e coend de funtores. Tais noções serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

Definição 1.8.1. *Dados dois bifuntores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, uma transformação diagonalmente natural de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ é uma família de morfismos em $\mathcal{D}$, indexada por $\mathcal{C}$, $\{\mu_X : \mathcal{F}(X,X) \to \mathcal{G}(X,X)\}_{X \in \mathcal{C}}$, tal que, para cada $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X,X) \arrow[r, "\mu_X"] & \mathcal{G}(X,X) \arrow[dr, "\mathcal{G}(1_X,f)"] & \\
\mathcal{F}(Y,X) \arrow[ur, "\mathcal{F}(f,1_X)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(1_Y,f)"'] & & & \mathcal{G}(X,Y)) \\
 & \mathcal{F}(Y,Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & \mathcal{G}(Y,Y) \arrow[ur, "\mathcal{G}(f,1_Y)"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.8.2. *O caso particular de transformação diagonalmente natural onde um dos funtores é constante é chamado de wedge. Mais precisamente, se $D \in \mathcal{D}$ (funtor constante de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$), um wedge para $\mathcal{F}$ é um par (D, μ), onde $D \in \mathcal{D}$ e μ denota a familia de morfismos $\{\mu_X : \mathcal{F}(X,X) \to D\}_{X \in \mathcal{C}}$, tal que o seguinte diagrama comuta,* *para qualquer $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Y,X) \arrow[r, "\mathcal{F}(1_Y,f)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f,1_X)"'] & \mathcal{F}(Y,Y) \arrow[d, "\mu_Y"] \\ \mathcal{F}(X,X) \arrow[r, "\mu_X"'] & D \end{tikzcd}$$

De forma análoga, o outro caso de wedge para $\mathcal{F}$ é quando o funtor de saída é constante, ou seja, uma transformação diagonalmente natural de um funtor constante para o funtor $\mathcal{F}$. Neste caso um wedge é um par (D, μ), onde $D \in \mathcal{D}$ e μ denota a família de morfismos $\{\mu_X : D \to \mathcal{F}(X,X) \in Mor(\mathcal{D})\}_{X\in\mathcal{C}}$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathcal{F}(Y,Y) \arrow[d, "\mathcal{F}(f,1_Y)"] \\ \mathcal{F}(X,X) \arrow[r, "\mathcal{F}(1_X,f)"'] & \mathcal{F}(X,Y) \end{tikzcd}$$

Fixado um bifuntor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e dados wedges $(D, \{\mu_X : D \to \mathcal{F}(X,X)\}_{X\in\mathcal{D}})$ e $(D', \{\mu'_X : D' \to \mathcal{F}(X,X)\}_{X\in\mathcal{D}})$ para $\mathcal{F}$, podemos definir um morfismo de wedges de $\mathcal{F}$, de $(D, \{\mu_X : D \to \mathcal{F}(X,X)\}_{X\in\mathcal{D}})$ para $(D', \{\mu'_X : D' \to \mathcal{F}(X,X)\}_{X\in\mathcal{D}})$, como sendo um morfismo $g : D \to D' \in Mor(\mathcal{D})$, tal que $\mu_X = \mu'_X \circ g,\ X \in \mathcal{C}$. Assim, construímos a categoria dos wedges para o funtor $\mathcal{F}$, do tipo $(D, \{\mu_X : D \to \mathcal{F}(X,X)\}_{X\in\mathcal{C}})$, na qual os morfismos são os morfismos de wedges de $\mathcal{F}$ e a composição é induzida pela composição da categoria $\mathcal{D}$. Denotaremos tal categoria por $W_s(\mathcal{F})$.

Definição 1.8.3. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um bifuntor. Um End para o bifuntor $\mathcal{F}$ é um objeto $E = \int_{X\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(X,X) \in \mathcal{D}$, juntamente com uma transformação diagonalmente natural do funtor constante $E \in \mathcal{D}$ ao funtor $\mathcal{F}$, que é um objeto terminal em $W_s(\mathcal{F})$.*

Notação: $End(\mathcal{F}) = \int_{X\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(X,X)$.

Observação 1.8.4. *Conforme a definição* **??**, *o End de um bifuntor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um objeto $E \in \mathcal{D}$, juntamente com uma família de morfismos $\{\mu_X : E \to\}$*

Dado um bifuntor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to D$, pode-se construir a categoria cujos objetos são os wedges de $\mathcal{F}$ à algum funtor constante definido por um objeto de $\mathcal{D}$. Esta categoria será denotada por $W_t(\mathcal{F})$. De forma análoga ao que fizemos acima, definimos coend's.

Definição 1.8.5. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um bifuntor. Um Coend para o bifuntor $\mathcal{F}$ é um objeto $C = \int^{X\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(X,X) \in \mathcal{D}$, juntamente com uma transformação diagonalmente natural de $\mathcal{F}$ ao funtor constante definido por C, que é um objeto inicial na categoria $W_t(\mathcal{F})$.*

Notação: $Coend(\mathcal{F}) = \int^{X\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(X,X)$.

Observação 1.8.6. *Desde que coend's e end's são objetos iniciais e terminais, segue que são únicos a menos de isomorfismo.*

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ categorias e assuma que existe produto e coproduto em $\mathcal{A}$ (sempre) e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ um funtor. Para cada morfismo $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$, denotemos: $X = s_f$ (source de f) e $Y = t_f$ (target de f). Considere os morfismos u_f e v_f obtidos pelas composições nos diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(s_f,s_f) \arrow[rr, "\mathcal{F}(1_{s_f},f)"] & & \mathcal{F}(s_f,t_f) \\
& \prod_{Z\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(Z,Z) \arrow[ul, "\pi_{\mathcal{F}(s_f,s_f)}"] \arrow[ur, dotted, "u_f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(t_f,t_f) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f,1_{t_f})"] & & \mathcal{F}(s_f,t_f) \\
& \prod_{Z\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(Z,Z) \arrow[ul, "\pi_{\mathcal{F}(t_f,t_f)}"] \arrow[ur, dotted, "v_f"'] &
\end{tikzcd}$$

A existência do produto $\prod\limits_{g\in Mor(\mathcal{C})} \mathcal{F}(s_g,t_g)$ garante que existem únicos morfismos P e Q que fazem os seguintes diagramas comutarem:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(s_f,t_f) & \\
\prod_{Z\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(Z,Z) \arrow[ur, "u_f"] \arrow[rr, dotted, "P"'] & & \prod_{g\in Mor(\mathcal{C})} \mathcal{F}(s_g,t_g) \arrow[ul, "\pi_{\mathcal{F}(s_f,t_f)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(s_f,t_f) & \\
\prod_{Z\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(Z,Z) \arrow[ur, "v_f"] \arrow[rr, dotted, "Q"'] & & \prod_{g\in Mor(\mathcal{C})} \mathcal{F}(s_g,t_g) \arrow[ul, "\pi_{\mathcal{F}(s_f,t_f)}"']
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.8.7. *Assuma as notações e hipóteses acima. Então,*

$$\int_{X\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(X,X) = Ker(P - Q).$$

Dem.:

Ver Proposição 1 de [Ma], página 224. $\square$

De forma análoga, temos um resultado que nos permite calcular o coend do funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Considere os morfismos u_f e v_f obtidos pelas composições nos diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(t_f, s_f) \arrow[rr, "\mathcal{F}(1_{t_f}, f)"] \arrow[dr, dotted, "u_f"'] & & \mathcal{F}(t_f, t_f) \arrow[dl, "i_{\mathcal{F}(t_f,t_f)}"] \\
& \coprod\limits_{Z \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(Z, Z) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(t_f, s_f) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f, 1_{s_f})"] \arrow[dr, dotted, "v_f"'] & & \mathcal{F}(s_f, s_f) \arrow[dl, "i_{\mathcal{F}(s_f,s_f)}"] \\
& \coprod\limits_{Z \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(Z, Z) &
\end{tikzcd}$$

Usando a propriedade universal da definição de coproduto, obtemos (únicos) morfismos P, Q em $\mathcal{A}$ que fazem os diagramas a seguir comutar:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(t_f, s_f) \arrow[dl, "i_{\mathcal{F}(t_f,s_f)}"'] \arrow[dr, "u_f"] & \\
\coprod\limits_{g \in Mor(\mathcal{C})} \mathcal{F}(t_g, s_g) \arrow[rr, dotted, "P"'] & & \coprod\limits_{Z \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(Z, Z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(t_f, s_f) \arrow[dl, "i_{\mathcal{F}(t_f,s_f)}"'] \arrow[dr, "v_f"] & \\
\coprod\limits_{g \in Mor(\mathcal{C})} \mathcal{F}(t_g, s_g) \arrow[rr, dotted, "Q"'] & & \coprod\limits_{Z \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(Z, Z)
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.8.8. *Assuma as notações e hipóteses acima. Então,*

$$\int^{X \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(X, X) = Coker(P - Q).$$

$\square$

Capítulo 2

Categorias Monoidais, Categorias Quase Simétricas e Biálgebras em Categorias Quase Simétricas

Nete capítulo estudaremos algumas propriedades de categorias monoidais e quase simétricas que serão necessárias para o capítulo seguinte. Além disso, relembraremos a noção de biálgebra em uma categoria quase simétrica, a qual generaliza o conceito usual de biálgebra.

2.1 Categorias Monoidais

Um monóide é um conjunto M munido com uma operação associativa $\cdot : M \times M \to M$, chamada multiplicação, um objeto destacado $e \in M$, chamado unidade, e duas funções

$$(\textvisiblespace) \cdot e : M \to M, \quad m \mapsto m \cdot e, \qquad e \cdot (\textvisiblespace) : M \to M, \quad m \mapsto e \cdot m, \qquad m \in M,$$

tais que $e.m = m = m.e$, para todo $m \in M$.

Uma categoria monoidal, como o nome sugere, é uma categoria com determinadas propriedades que imitam a noção de um monóide. Porém, neste processo as igualdades dão lugar a isomorfismos naturais. Similarmente, um funtor monoidal será um funtor que "respeita"o produto tensorial, já que um morfismo de monóides é multiplicativo.

Definição 2.1.1. *Uma categoria monoidal é uma sequência* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$, *onde* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um bifuntor, chamado de produto tensorial ,* $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$, $a : (\textvisiblespace \otimes \textvisiblespace) \otimes \textvisiblespace \to \textvisiblespace \otimes (\textvisiblespace \otimes \textvisiblespace)$ *é um isomorfismo natural, chamado de associatividade,* $l : \mathbb{1} \otimes \textvisiblespace \to \textvisiblespace$ *e* $r : \textvisiblespace \otimes \mathbb{1} \to \textvisiblespace$ *são isomorfismos naturais, chamados de left e right,* *respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
& ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes 1_W"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes W) \arrow[rr, "1_X\otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbb{1})\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes 1_Y"'] & & X\otimes(\mathbb{1}\otimes Y) \arrow[dl, "1_X\otimes l_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Estes dois diagramas são chamados de diagramas (ou axiomas) do pentágono e do triângulo, respectivamente. O bifuntor é chamado de produto tensorial pois tem propriedades semelhantes ao produto tensorial de bimódulos.

Observe que o conjunto das classes de isomorfismo de uma categoria monoidal pequena é um monóide com a multiplicação $\otimes$ e unidade $\mathbb{1}$.

Exemplo 2.1.2. 1. *Set tem estrutura monoidal dada por* $\otimes = \times$, $\mathbb{1} = \{*\}$ *(conjunto unitário), a associatividade é a usual, left e right são dados respectivamente por:* $l_X : \mathbb{1}\otimes X \to X$, $l_X(*, x) = x$ *e* $r_X : X\otimes\mathbb{1} \to X$, $r_X(x, *) = x$, *para todo* $x \in X$.

2. $Vec_{\Bbbk}$ *tem estrutura monoidal dada por* $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$, $\mathbb{1} = \Bbbk$, *a associatividade é a usual e left e right são os isomorfismos naturais* $\Bbbk \otimes_{\Bbbk} V \simeq V$ *e* $V \otimes_{\Bbbk} \Bbbk \simeq V$, *onde* V *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial.*

3. *Se* A *é um grupo abeliano e* G *é um grupo,* $C_G(A)$ *é a categoria cuja classe de objetos consiste dos símbolos* δ_g, $g \in G$, *e os conjuntos de morfismos são dados por:*

$$Mor_{C_G(A)}(\delta_g, \delta_h) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } g \neq h, \\ A, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$C_G(A)$ *tem estrutura monoidal dada por* $\delta_g \otimes \delta_h := \delta_{gh}$, $\mathbb{1} := \delta_{e_G}$, *a associatividade* *é dada por* $a_{\delta_{ghl}} = e_A$*, onde* e_A *é o elemento neutro do grupo* A*, e left e right são dados pelos isomorfismos* $l_{\delta_g} = r_{\delta_g} = e_A$*, para quaisquer* $g, h, l \in G$*.*

4. Vec_G *tem estrutura monoidal quando consideramos o produto tensorial dado por* $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{h,h' \in G; hh'=g} V_h \otimes W_{h'}$*,* $g \in G$*,* $\mathbb{1} = \Bbbk$*, onde* $\Bbbk$ *tem a seguinte graduação:*

$$\Bbbk_g = \begin{cases} \Bbbk, & se\ g = e_G, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A associatividade é a usual de espaços vetoriais e os isomorfismos left e right são determinados pelos isomorfismos usuais, de espaços vetoriais, $\Bbbk \otimes V_g \cong V_g$ *e* $V_g \otimes \Bbbk \cong \mathbb{V}_g$*, respectivamente.*

5. *Seja* G *um grupo. Uma função* $\alpha : G \times G \times G \to \Bbbk$ *é dito um 3-cociclo se* $\alpha(g_1g_2, g_3, g_4)\alpha(g_1, g_2, g_3g_4) = \alpha(g_1, g_2, g_3)\alpha(g_1, g_2, g_3g_4)\alpha(g_2, g_3, g_4)$*, para todo* $g_i \in G$*,* $i = 1, 2, 3, 4$*. Um 3-cociclo* α *se diz normalizado se* $\alpha(g, e_G, h) = 1$*, para todo* $g, h \in G$*.* Vec_G^α *é uma categoria monoidal, onde* $Vec_G^\alpha = Vec_G$*, como categoria, porém a associatividade é dada pelo 3-cociclo normalizado* α *da forma explicada a seguir. Dados objetos* $U = \oplus_{g \in G} U_g$*,* $V = \oplus_{h \in G} V_h$*,* $W = \oplus_{l \in G} W_l$ *definimos* $a_{g,h,l} : (U_g \otimes V_h) \otimes W_l \to U_g \otimes (V_h \otimes W_l)$ *por:*

$$a_{g,h,l}((x \otimes y) \otimes z) = \alpha(g, h, l)(x \otimes (y \otimes z)), \quad x \in U_g,\ y \in V_h,\ z \in W_l.$$

Usando a propriedade de 3-cociclo prova-se a comutatividade do axioma do pentágono. A normalidade do 3-cociclo implica a comutatividade do axioma do triângulo. Logo, Vec_G^α *é uma categoria monoidal.*

6. *Se* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ *é uma categoria monoidal, então* $(\mathcal{C}^{sym}, \bar{\otimes}, \mathbb{1}, \bar{a}, \bar{l}, \bar{r})$ *é uma categoria monoidal, chamada de categoria monoidal simétrica de* $\mathcal{C}$*, onde:*

$$Obj(\mathcal{C}^{sym}) = Obj(\mathcal{C}),\ X \bar{\otimes} Y := Y \otimes X,\ \bar{a}_{X,Y,Z} := a^{-1}_{Z,Y,X},\ \bar{l} := r,\ \bar{r} := l.$$

7. *Se* G *é um grupo e* $\Bbbk$ *é um corpo, então a categoria* $Rep(G)$ *de representações de* G *é monoidal. De fato, o produto tensorial de duas representações é dada por* $(\rho, V) \otimes (\eta, W) := (\rho \otimes \eta, V \otimes W)$*, onde* $(\rho \otimes \eta)(g) = \rho(g) \otimes \eta(g)$*, para cada* $g \in G$*. O objeto* $\mathbb{1} \in Rep(G)$ *é a representação trivial* $\varepsilon : G \to Aut(\Bbbk) \cong \Bbbk^\times$ *que leva cada* $g \in G$ *no elemento* $1 \in \Bbbk$*. Os isomorfismos left e right são dados pelos isomorfismos* $\Bbbk$*-lineares* $\Bbbk \otimes V \cong V$ *e* $V \otimes \Bbbk \cong V$*, respectivamente.*

Observação 2.1.3. *Decorre da naturalidade de* $l : \mathbb{1}\otimes\_ \to \_$ *e de* $r : \_\otimes\mathbb{1} \to \_$ *que, dado um morfismo* $f : X \to Y$*, então* $r_Y \circ (f \otimes 1_{\mathbb{1}}) = f \circ r_X$ *e* $l_Y \circ (1_{\mathbb{1}} \otimes f) = f \circ l_X$*. Além disso,* $l_{X\otimes Y} \circ a_{\mathbb{1},X,Y} = l_X \otimes 1_Y$ *e* $1_X \otimes r_Y \circ a_{X,Y,\mathbb{1}} = r_{X\otimes Y}$ *(ver [EGNO]). Estas propriedades serão usadas livremente no decorrer do texto sem ser feita qualquer menção. Frequentemente será feita referência à uma categoria monoidal* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ *apenas pela categoria adjacente* $\mathcal{C}$*, ficando implícita a existência de* $\otimes, \mathbb{1}, a, l$ *e* r*.*

Agora precismos lembrar que se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ são dois funtores, denotamos $\mathcal{F} \times \mathcal{G}(X, Y) = (\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y))$ e $\mathcal{F} \times \mathcal{G}(f, g) = (\mathcal{F}(f), \mathcal{G}(g))$, para $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$, $f \in Mor(\mathcal{C})$ e $g \in Mor(\mathcal{D})$. Mais ainda, se $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ e $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ são duas transformações naturais, então podemos construir a transformação natural $(\alpha, \beta) : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{F}' \times \mathcal{G}'$, onde $(\alpha, \beta)_{(X,Y)} := (\alpha_X, \beta_Y)$.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria monoidal, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funtores. Neste caso, podemos definir o funtor produto tensorial da seguinte forma:

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \otimes \circ (\mathcal{F} \times \mathcal{G}) : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}, \quad \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}(X, Y) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{G}(Y), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}.$$

A próxima proposição nos diz que o produto tensorial de duas transformações naturais segue sendo uma transformação natural.

Proposição 2.1.4. *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma categoria monoidal,* $\mathcal{F}, \mathcal{F}' : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$*,* $\mathcal{G}, \mathcal{G}' : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ *funtores e* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$*,* $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ *transformações naturais. Seja* $\alpha \otimes \beta : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F}' \otimes \mathcal{G}'$ *dada por:* $\alpha \otimes \beta_{(X,Y)} := \alpha_X \otimes \beta_Y$*,* $X \in \mathcal{C}$*,* $Y \in \mathcal{D}$*. Então* $\alpha \otimes \beta$ *é uma transformação natural. Mais ainda, se* α *e* β *são isomorfismos naturais, então* $\alpha \otimes \beta$ *também é.*

Dem.: Sejam $f : X \to X' \in Mor(\mathcal{C})$ e $g : Y \to Y' \in Mor(\mathcal{D})$. Como α e β são transformações naturais, tem-se que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y)) \arrow[r, "(\mathcal{F}(f), \mathcal{G}(g))"] \arrow[d, "(\alpha_X, \beta_Y)"'] & (\mathcal{F}(X'), \mathcal{G}(Y')) \arrow[d, "(\alpha_{X'}, \beta_{Y'})"] \\
(\mathcal{F}'(X), \mathcal{G}'(Y)) \arrow[r, "(\mathcal{F}'(f), \mathcal{G}'(g))"'] & (\mathcal{F}'(X'), \mathcal{G}'(Y'))
\end{tikzcd}$$

Como $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é um funtor covariante, este respeita a composição, e assim $(\mathcal{F}'(f) \otimes \mathcal{G}'(g)) \circ (\alpha_X \otimes \beta_Y) = (\alpha_{X'} \otimes \beta_{Y'}) \circ (\mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{G}(g))$, e isto garante que $\alpha \otimes \beta$ é uma transformação natural. Se α e β são isomorfismos naturais, então $\alpha \otimes \beta$ é um isomorfismo natural, cujo inverso é $\alpha^{-1} \otimes \beta^{-1}$. $\square$

2.1.1 Funtores Monoidais

A medida que se acrescenta propriedades às categorias, é natural pedir que os funtores sejam compatíveis com tais propriedades. Aqui, estamos interessados em funtores munidos de um isomorfismo natural específico, os quais serão denominados por funtores (fracamente) monoidais. Sob o mesmo ponto de vista, as transformações naturais entre funtores monoidais que são compatíveis com os isomorfismos mencionados, serão chamadas de transformações naturais monoidais.

Definição 2.1.5. *Sejam* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ *e* $(\mathcal{C}', \otimes', \mathbb{1}', a', l', r')$ *duas categorias monoidais. Um funtor fracamente monoidal é uma terna* $(\mathcal{F}, \mathsf{j}, \mathsf{j}_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$*, onde* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *é um funtor,* $\mathsf{j} : \mathcal{F}(\_) \otimes' \mathcal{F}(\_) \to \mathcal{F}(\_ \otimes \_)$ *é uma transformação natural, e* $\mathsf{j}_0 : \mathbb{1}' \to \mathcal{F}(\mathbb{1})$ *é um morfismo, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}(X) \otimes' \mathcal{F}(Y)) \otimes' \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathsf{j}_{X,Y} \otimes' 1_{\mathcal{F}(Z)}"] \arrow[d, "a'_{\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(Z)}"'] & \mathcal{F}(X \otimes Y) \otimes' \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathsf{j}_{X \otimes Y, Z}"] & \mathcal{F}((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "\mathcal{F}(a_{X,Y,Z})"] \\
\mathcal{F}(X) \otimes' (\mathcal{F}(Y) \otimes' \mathcal{F}(Z)) \arrow[r, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes' \mathsf{j}_{Y,Z}"'] & \mathcal{F}(X) \otimes' \mathcal{F}(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathsf{j}_{X, Y \otimes Z}"'] & \mathcal{F}(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \otimes' \mathbb{1}' \arrow[r, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes' \mathsf{j}_0"] \arrow[d, "r'_{\mathcal{F}(X)}"'] & \mathcal{F}(X) \otimes' F(\mathbb{1}) \arrow[d, "\mathsf{j}_{X,\mathbb{1}}"] \\
\mathcal{F}(X) & \mathcal{F}(X \otimes \mathbb{1}) \arrow[l, "\mathcal{F}(r_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}' \otimes' \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathsf{j}_0 \otimes' 1_{\mathcal{F}(X)}"] \arrow[d, "l'_{\mathcal{F}(X)}"'] & \mathcal{F}(\mathbb{1}) \otimes' \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathsf{j}_{\mathbb{1},X}"] \\
\mathcal{F}(X) & \mathcal{F}(\mathbb{1} \otimes X) \arrow[l, "\mathcal{F}(l_X)"']
\end{tikzcd}$$

Um *funtor monoidal* é um funtor fracamente monoidal, onde j é um isomorfismo natural e j_0 é um isomorfismo. Um *funtor monoidal estrito* é um funtor monoidal, onde j e j_0 são identidades.

Alguns autores definem funtor monoidal apenas como um par formado por um funtor e um isomorfismo natural $(\mathcal{F}, \mathsf{j})$ como acima, que fazem comutar o primeiro diagrama da definição, isto é, pede-se que $\mathcal{F}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}'$ e que $\mathsf{j}_0 : \mathbb{1}' \to \mathcal{F}(\mathbb{1})$ seja o morfismo identidade. Veremos que, pelo teorema de Maclane, esta definição não perde generalidade.

Dados dois funtores fracamente monoidais $(\mathcal{F}, \mathsf{j}, \mathsf{j}_0), (\mathcal{G}, k, k_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, uma transformação natural $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é dita uma *transformação natural monoidal* quando é compatível com os morfismos j_0 e k_0 e com as transformações naturais j e k, no seguinte sentido: dados $X, Y \in \mathcal{C}$, os seguintes diagramas são comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\eta_X\otimes\eta_Y"] \arrow[d, "\mathrm{j}_{X,Y}"'] & \mathcal{G}(X)\otimes\mathcal{G}(Y) \arrow[d, "k_{X,Y}"] \\
\mathcal{F}(X\otimes Y) \arrow[r, "\eta_{X\otimes Y}"'] & \mathcal{G}(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\mathrm{j}_0"'] \arrow[dr, "k_0"] & \\
\mathcal{F}(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\eta_{\mathbb{1}}"'] & & \mathcal{G}(\mathbb{1})
\end{tikzcd}
$$

Proposição 2.1.6. *A composição de funtores monoidais é um funtor monoidal. Mais precisamente, se* $(\mathcal{F}, \mathrm{j}, \mathrm{j}_0) : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ *e* $(\mathcal{G}, k, k_o) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *são funtores monoidais, então* $(\mathcal{F}\mathcal{G}, \phi, \phi_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *é um funtor monoidal, onde:*

$$\phi_{X,Y} = \mathcal{F}(k_{X,Y}) \circ \mathrm{j}_{\mathcal{G}(X),\mathcal{G}(Y)} \quad e \quad \phi_0 = \mathcal{F}(k_0) \circ \mathrm{j}_0.$$

Dem.: É imediato verificar que ϕ é um isomorfismo natural e que ϕ_0 é um isomorfismo. Dados $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, considere o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{G}\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(Y)\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(Z) \arrow[rr, "1_{\mathcal{G}\mathcal{F}(X)}\otimes\phi_{Y,Z}"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{G}\mathcal{F}(X)}\otimes k_{\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(Z)}"] \arrow[dd, "k_{\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)}\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(1_Z)"] \arrow[dddd, bend right=60, "\phi_{X,Y}\otimes 1_{\mathcal{G}\mathcal{F}(Z)}"'] & & \mathcal{G}\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(Y\otimes Z) \arrow[dd, "k_{\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y\otimes Z)}"] \arrow[dddd, bend left=60, "\phi_{X,Y\otimes Z}"] \\
& \mathcal{G}\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{G}(\mathcal{F}(Y)\otimes\mathcal{F}(Z)) \arrow[ur, "\mathcal{G}\mathcal{F}(1_X)\otimes\mathcal{G}(\mathrm{j}_{Y,Z})"'] \arrow[d, "k_{\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)\otimes\mathcal{F}(Z)}"] & \\
\mathcal{G}(\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(Y))\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(Z) \arrow[r, "k_{\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(Z)}"] \arrow[dd, "\mathcal{G}(\mathrm{j}_{X,Y})\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(1_Z)"] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(Y)\otimes\mathcal{F}(Z)) \arrow[r, "\mathcal{G}(1_{\mathcal{F}(X)}\otimes\mathrm{j}_{Y,Z})"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathrm{j}_{X,Y}\otimes 1_{\mathcal{F}(Z)})"] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(Y\otimes Z)) \arrow[dd, "\mathcal{G}(\mathrm{j}_{X,Y\otimes Z})"] \\
& \mathcal{G}(\mathcal{F}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{F}(Z)) \arrow[dr, "\mathcal{G}(\mathrm{j}_{X\otimes Y,Z})"] & \\
\mathcal{G}\mathcal{F}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{G}\mathcal{F}(Z) \arrow[ur, "k_{\mathcal{F}(X\otimes Y),\mathcal{F}(Z)}"] \arrow[rr, "\phi_{X\otimes Y,Z}"'] & & \mathcal{G}\mathcal{F}(X\otimes Y\otimes Z)
\end{tikzcd}
$$

Note que os triângulos são comutativos pela definição de ϕ, os quadriláteros centrais são comutativos pela hipótese de monoidalidade dos funtores. Consequentemente, segue a comutatividade do perímetro. A comutatividade dos outros diagramas da definição de funtores monoidais podem ser checadas aplicando-se diretamente a definição de ϕ e ϕ_0 e usando a monoidalidade de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ separadamente. $\square$

2.2 Teorema de Maclane e Teorema da Coerência

Esta seção será utilizada para enunciar dois teoremas importantes, devidos a Saunders Maclane, os quais facilitam muitos cálculos envolvendo categorias monoidais.

Uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ é dita *estrita* se, para quaisquer objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, tem-se que $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$, $X \otimes \mathbb{1} = X = \mathbb{1} \otimes X$, e os morfismos $a_{X,Y,Z}, l_X, r_X$ são identidades. Uma *equivalência monoidal* entre duas categorias é uma equivalência, no sentido usual, onde o funtor envolvido é monoidal.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Maclane)**.** *Toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.*

Dem.: Ver Theorem 1.8.5 de [EGNO]. $\square$

O teorema de Maclane nos permite, na prática, manusear uma categoria monoidal qualquer como sendo estrita. O próximo teorema, que é um corolário do Teorema de Maclane, permite desprezar os parêntesis nos cálculos envolvendo categorias monoidais.

Teorema 2.2.2 (Teorema da Coerência)**.** *Sejam $X_1, ..., X_n$ objetos de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Sejam P_1 e P_2 dois objetos obtidos colocando-se parêntesis e tensorizando (na mesma ordem que aparecem) os objetos X_i, com possíveis inserçoes arbitrárias do objeto $\mathbb{1}$. Se $\alpha, \beta : P_1 \to P_2$ são dois isomorfismos obtidos pela composição dos isomorfismos de associatividade, left e right (e eventualmente seus inversos), possivelmente tensorizados com morfismos identidade, então $\alpha = \beta$.*

Dem.: Ver Theorem 1.9.1 [EGNO]. $\square$

A partir de agora assumiremos, usando o teorema de Maclane, que a associatividade de uma categoria monoidal é o isomorfismo natural identidade.

Observação 2.2.3. *Seja $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal e $X, Y \in \mathcal{C}$ então, pelo teorema da coerência, temos:* $1_X \otimes r_Y = r_{X\otimes Y}, \quad l_X \otimes 1_Y = l_{X\otimes Y}, \quad r_X \otimes 1_Y = 1_X \otimes l_Y.$

2.3 Objetos Duais, Categorias Monoidais Rígidas e Hom Functor Internos

Nesta seção apresentaremos definições e resultados relacionados com objetos duais e hom-functors internos.

Definição 2.3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, e $X \in \mathcal{C}$. Um hom-functor interno à direita é um adjunto à direita do funtor $\_ \otimes X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Quando existe, este funtor será denotado por $\underline{hom}(X, \_)$.*

Analogamente, um hom-functor interno à esquerda é um adjunto à direita para o funtor $X \otimes \text{\textvisiblespace} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Observamos que, como adjuntos à direita não são necessariamente únicos, eventualmente pode existir mais de um hom-functor interno à direita (esquerda). Adjuntos à esquerda para os funtores $\text{\textvisiblespace} \otimes X$ e $X \otimes \text{\textvisiblespace}$ são chamados co-hom-functors internos, à direita e à esquerda, respectivamente.

Se cada objeto de $\mathcal{C}$ admite um hom-functor interno à direita (respectivamente, à esquerda), então $\mathcal{C}$ é dita fechada à direita (respectivamente, à esquerda). Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita fechada quando é fechada à esquerda e à direita. Analogamente se define uma categoria co-fechada.

As próximas definições generalizam, para objetos de uma categoria monoidal, algumas propriedades dos módulos projetivos e finitamente gerados. Em particular, generalizam a noção de espaço vetorial dual.

Definição 2.3.2. *Seja X um objeto de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um par $(X^\star, ev_X)$, onde $X^\star$ é um objeto e $ev_X : X^\star \otimes X \to \mathbb{1}$ é um morfismo, é dito um objeto dual à esquerda para X, ou simplesmente um dual à esquerda para X, se existe um morfismo $db_X : \mathbb{1} \to X \otimes X^\star$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_X"'] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "db_X \otimes 1_X"] & X \otimes X^\star \otimes X \arrow[r, "1_X \otimes ev_X"] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "r_X"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X^\star \arrow[r, "r_{X^\star}^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_{X^\star}"'] & X^\star \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_{X^\star} \otimes db_X"] & X^\star \otimes X \otimes X^\star \arrow[r, "ev_X \otimes 1_{X^\star}"] & \mathbb{1} \otimes X^\star \arrow[r, "l_{X^\star}"] & X^\star \end{tikzcd}$$

Definição 2.3.3. *Seja X um objeto de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um par $({}^\star X, ev'_X)$, onde ${}^\star X$ é um objeto e $ev'_X : X \otimes {}^\star X \to \mathbb{1}$ é um morfismo, é dito um objeto dual à direita para X, ou simplesmente um dual à direita para X, se existe um morfismo $db'_X : \mathbb{1} \to {}^\star X \otimes X$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_X"'] & X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_X \otimes db'_X"] & X \otimes {}^\star X \otimes X \arrow[r, "ev'_X \otimes 1_X"] & \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {}^\star X \arrow[r, "l_{{}^\star X}^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "1_{X^\star}"'] & \mathbb{1} \otimes {}^\star X \arrow[r, "db'_X \otimes 1_{{}^\star X}"] & {}^\star X \otimes X \otimes {}^\star X \arrow[r, "1_{{}^\star X} \otimes ev'_X"] & {}^\star X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "r_{{}^\star X}"] & {}^\star X \end{tikzcd}$$

Observação 2.3.4. *Note que* $(X^\star, ev_X : X^\star \otimes X \to \mathbb{1})$ *é um dual à esquerda para* X *se, e somente se,* (X, ev_X) *é um dual à direita para* $X^\star$*.*

Uma categoria se diz *rígida à esquerda* se todo objeto possui um dual à esquerda. Analogamente, uma categoria se diz *rígida à direita* se todo objeto possui um dual à direita. Finalmente, uma categoria se diz *rígida* se é rígida à esquerda e à direita.

Exemplo 2.3.5. 1. *Tome* $V \in vec_{\Bbbk}$*, fixe uma base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$*, cuja dual será denotada por* $\{f_1, \cdots, f_n\}$ *e defina* $ev_V : V^\star \otimes V \to \Bbbk$ *por* $ev_V(f_i \otimes v_j) = f_i(v_j)$*, e* $db_V : \Bbbk \to V \otimes V^\star$ *por* $db_V(1) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes f_i$*.* $(V^\star, ev_V)$ *é um dual à esquerda, no sentido categórico, para* V*.*

2. *Para cada* $\Bbbk-$*espaço vetorial* V*, fixe uma base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$*, cuja dual será denotada por* $\{f_1, \cdots, f_n\}$ *e defina* $ev'_V : V \otimes V^\star \to \Bbbk$ *por* $ev'_V(v_i \otimes f_j) = f_j(v_i)$*, e* $db'_V : \Bbbk \to V^\star \otimes V$ *por* $db'_V(1) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes i_i$*. Com isto,* $(V^\star, ev'_V)$ *é um dual à direita para* V*, conforme a Definição 2.3.3.*

3. *Sejam* G *um grupo,* $\Bbbk$ *um corpo e* (ρ, V) *uma representação de* G *sobre* $\Bbbk$*, de grau finito* n*, isto é,* $n = dim_{\Bbbk}(V)$*. Defina* $(\rho^\star : G \to V^\star)$ *por* $\rho^\star(g) = (\rho(g^{-1}))^t$*, onde* t *denota a transposta do operador. Defina* $ev_\rho : (\rho^\star \otimes \rho, V^\star \otimes V) \to (\varepsilon, \Bbbk^\times)$ *por* $ev_\rho(f \otimes v) = f(v)$ *e* $db_\rho : (\varepsilon, \Bbbk^\times) \to (\rho \otimes \rho^\star, V \otimes V^\star)$ *por* $db_\rho(1) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes f_i$*, onde os* v_i*'s são elementos de uma base de* V*, e os* f_i*'s são elementos de sua dual. É fácil verificar que, para cada representação* (ρ, V)*, os morfismos* ev_ρ *e* db_ρ *são morfismos de representações de* G *e que* $((\rho^\star, V^\star), ev_\rho)$ *é sua dual à esquerda.*

4. *Sejam* G *um grupo,* $\Bbbk$ *um corpo e* (ρ, V) *uma representação de* G *sobre* $\Bbbk$*, de grau finito* n*. Defina* ${}^\star V = Mor_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ *e* $\rho' : V \otimes {}^\star V \to \Bbbk$ *por* $ev'_\rho(V \otimes f) = f(v)$*. A representação* $((\rho^\star, {}^\star V), ev'_\rho)$ *é a representação dual à direita de* (ρ, V)*, no sentido categórico.*

5. *Seja* R *um anel comutativo com unidade. Lembremos que se um* R*-módulo* M *é projetivo e finitamente gerado então existem* $x_1, \cdots, x_n \in M$ *e* $f_1, \cdots, f_n \in Hom_R(M, R)$ *tais que* $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$*, para cada* $x \in M$ *(ver, por exemplo, Proposição 7.58 de [R]). Tome um* R*-módulo à esquerda* M*, projetivo e finitamente gerado, e defina* $ev_M : Hom_R(M, R) \otimes_R R \to R$ *por* $ev_M(f_i \otimes_R x_j) = f_i(x_j)$ *e* $db_M : R \to M \otimes_R Hom_R(M, R)$ *por* $db_M(1) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes_R f_i$*. Então* $(Hom_R(M, R), ev_M)$ *é um dual à esquerda para* M*, no sentido categórico. De modo análogo se constrói um dual à direita para um* R*-módulo projetivo e finitamente gerado.*

As duas proposições seguintes garantem que a existência de duais implica na existência de hom-functors internos.

Proposição 2.3.6. *Seja X um objeto de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, que possui um dual à esquerda $(X^\star,\ ev_X)$. Então existem adjunções determinadas pelos seguintes isomorfismos naturais:*

$$\varphi_{V,W} : Mor(V \otimes X, W) \to Mor(V, W \otimes X^\star), \quad \varphi_{V,W}(f) = (f \otimes 1_{X^\star})(1_V \otimes db_X) r_V^{-1},$$
$$\psi_{V,W} : Mor(X^\star \otimes V, W) \to Mor(V, X \otimes W), \quad \psi_{V,W}(g) = (1_X \otimes g)(db_X \otimes 1_V) l_V^{-1}.$$

Dem.: Provaremos que $\varphi = \{\varphi_{V,W}\ :\ V, W \in \mathcal{C}\}$ é um isomorfismo natural. Primeiramente verificaremos que φ é uma transformação natural, e posteriormente que $\varphi_{V,W}$ é um isomorfismo, para quaisquer $V, W \in \mathcal{C}$. A fim de checar a naturalidade de φ, dados $V, Y, W, Z \in \mathcal{C}$, $\alpha : Y \to V$, $\gamma : W \to Z \in Mor(\mathcal{C})$, considera-se o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Mor(V \otimes X, W) \arrow[r, "\varphi_{V,W}"] \arrow[d, "\gamma(\textvisiblespace)(\alpha \otimes 1_X)"'] & Mor(V, W \otimes X^\star) \arrow[d, "(\gamma \otimes 1_{X^\star})(\textvisiblespace)\alpha"] \\
Mor(Y \otimes X, Z) \arrow[r, "\varphi_{Y,Z}"'] & Mor(Y, Z \otimes X^\star)
\end{tikzcd}$$

Se $f \in Mor(V \otimes X, W)$, tem-se o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "r_V^{-1}"] \arrow[rrrrr, bend left, "(\gamma \otimes 1_{X^\star})\varphi_{V,W}(f)\alpha"] & V \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_V \otimes db_X"] & V \otimes X \otimes X^\star \arrow[r, "f \otimes 1_{X^\star}"] & W \otimes X^\star \arrow[r, "\gamma \otimes 1_{X^\star}"] & Z \otimes X^\star \\
Y \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "r_Y^{-1}"] \arrow[rrrru, bend right, "\varphi_{Y,Z}(\gamma f(\alpha \otimes 1_X))"'] & Y \otimes \mathbb{1} \arrow[u, "\alpha \otimes 1_{\mathbb{1}}"'] \arrow[r, "1_Y \otimes db_X"] & Y \otimes X \otimes X^\star \arrow[u, "\alpha \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star}"'] & &
\end{tikzcd}$$

No diagrama anterior, o quadrilátero do lado esquerdo comuta visto que r^{-1} é um isomorfismo natural enquanto que o quadrilátero do lado direito comuta trivialmente. Além disso, verifica-se facilmente que os diagramas a seguir comutam (para o primeiro usa-se que r^{-1} é um isomorfismo natural):

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "r_V^{-1}"] \arrow[d, "g"'] & V \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_V \otimes db_X"] \arrow[d, "g \otimes 1_{\mathbb{1}}"] & V \otimes X \otimes X^{\star} \arrow[d, "g \otimes 1_X \otimes 1_{X^{\star}}"] & W \otimes X^{\star} \\
W \otimes X^{\star} \arrow[r, "1_W \otimes r_{X^{\star}}^{-1}"'] & W \otimes X^{\star} \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "1_W \otimes 1_{X^{\star}} \otimes db_X"'] & W \otimes X^{\star} \otimes X \otimes X^{\star} \arrow[r, "1_W \otimes ev_X \otimes 1_{X^{\star}}"'] & W \otimes \mathbb{1} \otimes X^{\star} \arrow[u, "1_W \otimes l_{X^{\star}}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "1_V \otimes db_X \otimes 1_X"] & V \otimes X \otimes X^{\star} \otimes X \arrow[r, "f \otimes 1_{X^{\star}} \otimes 1_X"] \arrow[d, "1_V \otimes 1_X \otimes ev_X"'] & W \otimes X^{\star} \otimes X \arrow[d, "1_W \otimes ev_X"] & \\
V \otimes X \arrow[u, "r_V^{-1} \otimes 1_X"] & V \otimes X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "f \otimes 1_{\mathbb{1}}"'] & W \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "r_W"] & W
\end{tikzcd}
$$

Seja $\tilde{\varphi}_{V,W} : Mor(V, W \otimes X^{\star}) \to Mor(V \otimes X, W)$; $\tilde{\varphi}_{V,W}(g) = r_W(1_W \otimes ev_X)(g \otimes 1_X)$. Pela comutatividade dos diagramas acima, $\varphi_{V,W} \circ \tilde{\varphi}_{V,W}(g) = g$ e $\tilde{\varphi}_{V,W} \circ \varphi_{V,W}(f) = f$.

A prova de que $\psi = \{\psi_{V,W} : V, W \in \mathcal{C}\}$ é um isomorfismo natural é análoga. Vê-se que $\tilde{\psi}_{V,W}(h) = l_W(ev_X \otimes 1_W)(1_{X^{\star}} \otimes h)$ determina o isomorfismo natural inverso de ψ. $\square$

Proposição 2.3.7. *Seja X um objeto de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ que possui um dual à direita $({}^{\star}X,\, ev'_X)$. Então existem adjunções determinadas pelos seguintes isomorfismos naturais:*

$$
\begin{aligned}
\eta_{V,W} &: Mor(V \otimes {}^{\star}X, W) \to Mor(V, W \otimes X), \quad \eta_{V,W}(f) = (f \otimes 1_X)(1_V \otimes db'_X)r_V^{-1}, \\
\theta_{V,W} &: Mor(X \otimes V, W) \to Mor(V, {}^{\star}X \otimes W), \quad \theta_{V,W}(g) = (1_{{}^{\star}X} \otimes g)(db'_X \otimes 1_V)l_V^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dem.: Dados $h \in Mor(V \otimes {}^{\star}X, W)$ e $h' \in Mor(V, {}^{\star}X \otimes W)$, definimos:

$$
\eta_{V,W}^{-1}(h) = r_W(1_W \otimes ev')(h \otimes 1_{{}^{\star}X}), \quad \theta_{V,W}^{-1} = r_W(ev' \otimes 1_W)(1_X \otimes h).
$$

O restante da prova segue de modo análogo a da proposição anterior. $\square$

Estas duas proposições fornecem informações importantes sobre objetos duais e hom-functors internos. Algumas destas serão listados no corolário a seguir:

Corolário 2.3.8. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $X \in \mathcal{C}$.*

1. *Se X possui um dual à esquerda (resp. à direita), então X admite um hom-functor interno à direita (resp. à esquerda).*

2. *Se $(X^{\star}, ev_X)$ é um dual à esquerda para X, então o morfismo db_X compatível com a definição de dual (à esquerda) é único.*

Dem.: O item (1) segue da Proposição 2.3.6 (resp. Proposição 2.3.7). Para (2), suponha que $\bar{db}_X$ é outro morfismo compatível com a definição de dual à esquerda. Então, usando o isomorfismo natural φ definido na Proposição 2.3.6, tem-se:

$$\varphi_{\mathbb{1},X}^{-1}(\bar{db}_X) = r_X(1_X \otimes ev_X)(\bar{db}_X \otimes 1_X) = l_X = \varphi_{\mathbb{1},X}^{-1}(db_X).$$

Desde que $\varphi_{\mathbb{1},X}$ é um isomorfismo, a prova está concluída. $\square$

Observação 2.3.9. *1. Vale resultado análogo para o morfismo db' da definição de dual à direita.*

2. Um dual à esquerda para um objeto X de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é um dual à direita para X em $\mathcal{C}^{Sym}$, e um dual à direita para X em $\mathcal{C}^{op}$.

3. Uma categoria monoidal rígida é fechada e cofechada.

Corolário 2.3.10. *Se $X \in \mathcal{C}$ admite um dual à esquerda $(X^\star, ev_X)$, este é único, a menos de um único isomorfismo, no seguinte sentido: se (D,e) é outro dual à esquerda para X, então existe um único isomorfismo $j : D \to X^\star$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd} D \otimes X \arrow[rr, "j \otimes 1_X"] \arrow[dr, "e"'] & & X^\star \otimes X \arrow[dl, "ev_X"] \\ & \mathbb{1} & \end{tikzcd}$$

Dem.: Se (D, e) é um dual à esquerda para X, existe $d : \mathbb{1} \to X \otimes D \in Mor(\mathcal{C})$ que, juntamente com e, faz os diagramas da Definição 2.3.2 comutarem. Com uma construção análoga à feita na Proposição 2.3.6, obtemos os seguintes isomorfismos de adjunção:

$$\begin{aligned} \psi_{V,W} : Mor(X^\star \otimes V, W) &\longrightarrow Mor(V, X \otimes W) \\ g &\longmapsto (1_X \otimes g)(db_X \otimes 1_V)l_V^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{V,W} : Mor(D \otimes V, W) &\longrightarrow Mor(V, X \otimes W) \\ g' &\longmapsto (1_X \otimes g')(d \otimes 1_V)l_V^{-1}. \end{aligned}$$

Além disso, se $h \in Mor(X^\star \otimes V, W)$ e $h' \in Mor(D \otimes V, W)$, tem-se que:

$$\varphi_{V,W}^{-1}(h) = l_V(ev_X \otimes 1_W)(1_{X^\star} \otimes h) \text{ e } \bar{\varphi}_{V,W}^{-1}(h') = l_W(e \otimes 1_W)(1_D \otimes h').$$

Logo, $\varphi^{-1}_{X,\mathbb{1}}(r_X^{-1}) = l_{\mathbb{1}}(ev_X \otimes 1_{\mathbb{1}})(1_{X^\star} \otimes r_X^{-1})$ e $\bar{\varphi}^{-1}_{X,\mathbb{1}}(r_X^{-1}) = l_{\mathbb{1}}(e \otimes 1_{\mathbb{1}})(1_D \otimes r_X^{-1})$. Usando a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} X^\star \otimes X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "ev_X \otimes 1_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "l_{X^\star \otimes X}"'] & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "l_{\mathbb{1}}"] \\ X^\star \otimes X \arrow[r, "ev_X"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \otimes X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "e \otimes 1_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "l_{D \otimes X}"'] & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "l_{\mathbb{1}}"] \\ D \otimes X \arrow[r, "e"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

e a definição de dual à esquerda, chega-se que $ev_X = \psi^{-1}_{X,\mathbb{1}}(r_X^{-1})$ e $e = \bar{\psi}^{-1}_{X,\mathbb{1}}(r_X^{-1})$. Pelo Corolário 1.4.9, existe um único isomorfismo natural $\alpha : D \otimes \_ \to X \otimes \_$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} Mor(X^\star \otimes V, W) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "(\_)\alpha_V"'] & & Mor(V, X \otimes W) \\ & Mor(D \otimes V, W) \arrow[ur, "\bar{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, $ev_X \circ \alpha_X = \bar{\psi}^{-1}_{X,\mathbb{1}} \circ \psi_{X,\mathbb{1}}(ev_X) = \bar{\psi}^{-1}_{X,\mathbb{1}}(r_X^{-1}) = e$. Mais ainda, se $A \in \mathcal{C}$, pode-se explicitar α_A:

$$\begin{aligned} \alpha_A =& 1_{X^\star \otimes A} \circ \alpha_A = \bar{\psi}^{-1}_{X,\mathbb{1}} \circ \psi_{X,\mathbb{1}}(1_{X^\star \otimes A}) = \bar{\psi}^{-1}_{X,\mathbb{1}}((db_X \otimes 1_A)l_A^{-1}) \\ =& l_{X^\star \otimes A}(e \otimes 1_{X^\star \otimes A})(1_D \otimes ((db_X \otimes 1_A)l_A^{-1}) \\ =& (l_{X^\star} \otimes 1_A)(e \otimes 1_{X^\star} \otimes 1_A)(r_D^{-1} \otimes 1_A) \\ =& [l_{X^\star}(e \otimes 1_{X^\star})(1_D \otimes db_X)r_D^{-1}] \otimes 1_A \end{aligned}$$

Denotando por $j := (l_{X^\star}(e \otimes 1_{X^\star})(1_D \otimes db_X)r_D^{-1}) : D \to X^\star$, a igualdade acima nos permite escrever: $\alpha_A = j \otimes 1_A$. Logo, $e = ev_X \circ \alpha_X = ev_X \circ (j \otimes 1_X)$. Agora, se $m : D \to X^\star$ é um isomorfismo que faz o diagrama do enunciado comutar, então tem-se que $ev_X(m \otimes 1_X) = ev_X(j \otimes 1_X)$. Tensorizando o morfismo $1_{X^\star}$ a ambos os membros desta igualdade e distribuindo a composição, tem-se:

$$(ev_X \otimes 1_{X^\star})(m \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star}) = (ev_X \otimes 1_{X^\star})(j \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star}).$$

Como m é um isomorfismo, podemos compor pela direita o morfismo $(m^{-1} \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star})$, o que nos faz chegar à seguinte igualdade: $(ev_X \otimes 1_{X^\star}) = (ev_X \otimes 1_{X^\star})(jm^{-1} \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star})$. Agora, compondo-se pela direita, o morfismo $(1_{X^\star} \otimes db_X)$ e, posteriormente, usando a definição de dual à esquerda, chega-se na primeira igualdade da sequência a seguir:

$$\begin{aligned}
l_{X^\star}^{-1} \circ r_{X^\star} &= (ev_X \otimes 1_{X^\star})(jm^{-1} \otimes 1_X \otimes 1_{X^\star})(1_{X^\star} \otimes db_X) \\
&= (ev_X \otimes 1_{X^\star})(jm^{-1} \otimes db_X) \\
&= (ev_X \otimes 1_{X^\star})(1_{X^\star} \otimes db_X)(jm^{-1} \otimes 1_{\mathbb{1}}) \\
&= (l_{X^\star}^{-1} \circ r_{X^\star})(jm^{-1} \otimes 1_{\mathbb{1}}) \\
&= l_{X^\star}^{-1} \circ jm^{-1} \circ r_{X^\star}
\end{aligned}$$

Observe que na última passagem (acima) usamos a Observação 2.1.3. Da identidade acima temos que $l_{X^\star}^{-1} \circ r_{X^\star} = l_{X^\star}^{-1} \circ jm^{-1} \circ r_{X^\star}$. Consequentemente, $j = m$. □

O seguinte lema nos diz que um funtor monoidal preserva duais à esquerda.

Lema 2.3.11. *Seja* $(\mathcal{F}, \mathsf{j}, \mathsf{j}_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *um funtor monoidal. Se* X *é um objeto de* $\mathcal{C}$ *que tem um dual à esquerda* $(X^\star, ev_X)$*, então* $(\mathcal{F}(X^\star), \tilde{ev})$ *é um dual à esquerda para* $\mathcal{F}(X)$*, com* $\tilde{ev} := \mathsf{j}_0^{-1} \circ \mathcal{F}(ev) \circ \mathsf{j}$.

Dem.: Defina $\tilde{db} := \mathsf{j}^{-1}_{X,X^\star} \circ \mathcal{F}(db) \circ \mathsf{j}_0$, e considere os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, "l^{-1}_{\mathcal{F}(X)}"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(l^{-1}_X)"] \arrow[d, phantom, "I"] & \\
\mathbb{1} \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathsf{j}_0 \otimes 1_{\mathcal{F}(X)}"] \arrow[d, "\tilde{db} \otimes 1_{\mathcal{F}(X)}"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & \mathcal{F}(\mathbb{1}) \otimes F(X) \arrow[d, "\mathcal{F}(db) \otimes 1_{\mathcal{F}(X)}"] \arrow[dr, phantom, "III"] & \mathcal{F}(\mathbb{1} \otimes X) \arrow[l, "\mathsf{j}^{-1}_{\mathbb{1},X}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}(db \otimes 1_X)"] \\
\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(X^\star) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{F}(X \otimes X^\star) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[l, "\mathsf{j}^{-1}_{X,X^\star} \otimes 1_{\mathcal{F}(X)}"'] \arrow[r, "\mathsf{j}_{X \otimes X^\star, X}"] \arrow[d, phantom, "IV"] & \mathcal{F}(X \otimes X^\star \otimes X) \arrow[d, "Id"] \\
\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(X^\star) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[r, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes \mathsf{j}_{X^\star,X}"] \arrow[d, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes \tilde{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "V"] & \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(X^\star \otimes X) \arrow[r, "\mathsf{j}_{X, X^\star \otimes X}"] \arrow[d, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes \mathcal{F}(ev)"] \arrow[dr, phantom, "VI"] & \mathcal{F}(X \otimes X^\star \otimes X) \arrow[d, "\mathcal{F}(1_X \otimes ev)"] \\
\mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{1} \arrow[dr, "r_{\mathcal{F}(X)}"'] & \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(\mathbb{1}) \arrow[l, "1_{\mathcal{F}(X)} \otimes \mathsf{j}_0^{-1}"'] \arrow[r, "\mathsf{j}_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[d, phantom, "VII"] & \mathcal{F}(X \otimes \mathbb{1}) \arrow[dl, "\mathcal{F}(r_X)"] \\
 & \mathcal{F}(X) &
\end{tikzcd}$$

Observe que I, IV e VII comutam, pois $\mathcal{F}$ é monoidal; II e V comutam em virtude da definição de $\tilde{ev}$ e $\tilde{db}$; III e VI comutam, pois j é uma transformação natural. Da comutatividade de cada parte do diagrama tiramos que o perímetro comuta. Portanto:

$$r_{\mathcal{F}(X)}(1_{\mathcal{F}(X)} \otimes \tilde{ev})(\tilde{db} \otimes 1_{\mathcal{F}(X)})l^{-1}_{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{F}(r_X(1_X \otimes ev_X)(db_X \otimes 1_X)l^{-1}_X) = \mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}.$$

Analogamente mostra-se que $\tilde{ev}$ e $\tilde{db}$ fazem comutar o outro diagrama da definição de dual à esquerda. □

Corolário 2.3.12. *Seja* $(\mathcal{F}, \mathsf{j}, \mathsf{j}_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *um funtor monoidal entre duas categorias monoidais rígidas à esquerda. Fixando os duais à esquerda:* $(X^\star, ev_X)$ *e* $(\mathcal{F}(X)^\star, ev_{\mathcal{F}(X)})$, *para* X *e* $\mathcal{F}(X)$, *respectivamente, existe um único isomorfismo* $u : \mathcal{F}(X^\star) \to \mathcal{F}(X)^\star$ *que* *faz o seguinte diagrama comutar:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X^\star) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[rr, "u \otimes 1_{\mathcal{F}(X)}"] \arrow[dl, "\mathrm{j}_{X^\star, X}"'] & & \mathcal{F}(X)^\star \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[dr, "ev_{\mathcal{F}(X)}"] & \\
\mathcal{F}(X^\star \otimes X) \arrow[drr, "\mathcal{F}(ev_X)"'] & & & & \mathbb{1} \\
 & & \mathcal{F}(\mathbb{1}) \arrow[urr, "\mathrm{j}_0^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Dem.: Definindo $\tilde{ev} := \mathrm{j}_0^{-1} \circ \mathcal{F}(ev_X) \circ \mathrm{j}_{X^\star, X} : \mathcal{F}(X^\star) \otimes \mathcal{F}(X) \to \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$, o Lema 2.3.11 garante que $(\mathcal{F}(X^\star), \tilde{ev})$ é um dual à esquerda para $\mathcal{F}(X)$. Pelo Corolário 2.3.10, segue o resultado. $\square$

Proposição 2.3.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Se $X, Y \in \mathcal{C}$ possuem duais à esquerda $(X^\star, ev_X)$ e $(Y^\star, ev_Y)$, respectivamente, então $(Y^\star \otimes X^\star, ev_{X\otimes Y})$ é um dual à esquerda para $X \otimes Y$ e*

$$
\begin{aligned}
ev_{X\otimes Y} &= ev_Y \circ (1_{Y^\star} \otimes l_Y) \circ (1_{Y^\star} \otimes ev_X \otimes 1_Y), \\
db_{X\otimes Y} &= (1_X \otimes db_Y \otimes 1_{X^\star}) \circ (1_X \otimes l_{X^\star}^{-1}) \circ db_X.
\end{aligned}
$$

Dem.:

Desde que $l_{X\otimes Y}^{-1} = l_X^{-1} \otimes 1_Y$ e $(1_X \otimes ev_X)(db_X \otimes 1_X) l_X^{-1} = r_X^{-1}$, tem-se que :

$$
\begin{aligned}
& (1_X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1})(1_X \otimes ev_X) \otimes 1_Y)(db_X \otimes 1_X \otimes 1_Y) l_{X\otimes Y}^{-1} \\
= \ & (1_X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1} \otimes 1_Y)(1_X \otimes ev_X \otimes 1_Y)(db_X \otimes 1_X \otimes 1_Y)(l_X^{-1} \otimes 1_Y) \\
= \ & (1_X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1} \otimes 1_Y)(((1_X \otimes ev_X)(db_X \otimes 1_X) l_X^{-1}) \otimes 1_Y) \\
= \ & (1_X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1} \otimes 1_Y)(r_X^{-1} \otimes 1_Y) \\
= \ & ((1_X \otimes r_{\mathbb{1}}^{-1}) r_X^{-1}) \otimes 1_Y.
\end{aligned}
$$

Isso implica na comutatividade do subdiagrama I do diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes Y \arrow[dl, "l^{-1}_{X\otimes Y}"'] \arrow[dr, "((1_X\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1})\circ r_X^{-1})\otimes 1_Y"] \arrow[d, phantom, "I"] & \\
\mathbb{1}\otimes X\otimes Y \arrow[r, "db_X\otimes 1_X\otimes 1_Y"] \arrow[d, "db_{X\otimes Y}\otimes 1_X\otimes 1_Y"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & X\otimes X^\star\otimes X\otimes Y \arrow[r, "(1_X\otimes r_{\mathbb{1}}^{-1})(1_X\otimes ev_X)\otimes 1_Y"] \arrow[d, "1_X\otimes l^{-1}_{X^\star}\otimes 1_X\otimes 1_Y"] \arrow[dr, phantom, "III"] & X\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes Y \arrow[d, "Id"] \\
X\otimes Y\otimes Y^\star\otimes X^\star\otimes X\otimes Y \arrow[d, "Id"'] \arrow[drr, phantom, "IV"] & X\otimes\mathbb{1}\otimes X^\star\otimes X\otimes Y \arrow[l, "1_X\otimes db_Y\otimes 1_{X^\star}\otimes 1_X\otimes 1_Y"'] \arrow[r, "1_X\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes ev_X\otimes 1_Y"] & X\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes Y \arrow[d, "Id"] \\
X\otimes Y\otimes Y^\star\otimes X^\star\otimes X\otimes Y \arrow[r, "1_X\otimes 1_Y\otimes 1_{Y^\star}\otimes ev_X\otimes 1_Y"] \arrow[d, "1_X\otimes 1_Y\otimes ev_{X\otimes Y}"'] \arrow[dr, phantom, "V"] & X\otimes Y\otimes Y^\star\otimes\mathbb{1}\otimes Y \arrow[d, "1_X\otimes 1_Y\otimes r_{Y^\star}\otimes 1_Y"] \arrow[dr, phantom, "VI"] & X\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes Y \arrow[l, "1_X\otimes db_Y\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes 1_Y"'] \arrow[d, "1_X\otimes r_{\mathbb{1}}\otimes 1_Y"] \\
X\otimes Y\otimes\mathbb{1} \arrow[dr, "r_{X\otimes Y}"'] & X\otimes Y\otimes Y^\star\otimes Y \arrow[l, "1_X\otimes 1_Y\otimes ev_Y"] \arrow[d, phantom, "VII"] & X\otimes\mathbb{1}\otimes Y \arrow[l, "1_X\otimes db_Y\otimes 1_Y"] \arrow[dl, "r_X\otimes 1_Y"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Os diagramas II e V comutam em virtude da definição de $db_{X\otimes Y}$ e $ev_{X\otimes Y}$, respectivamente. IV comuta trivialmente. Pela naturalidade de l^{-1}, tem-se que:

$$(1_{\mathbb{1}}\otimes ev_X)(l^{-1}_{X^\star}\otimes 1_X) = (1_{\mathbb{1}}\otimes ev_X)l^{-1}_{X^\star\otimes X} = l^{-1}_{\mathbb{1}}\circ ev_X = r^{-1}_{\mathbb{1}}\circ ev_X$$

Logo, III comuta. Para ver que VI comuta, lembramos que, pela naturalidade de r, $db_Y\circ r_{\mathbb{1}} = (1_Y\otimes r_{Y^\star})(db_Y\otimes 1_{\mathbb{1}})$. Assim,

$$\begin{aligned}
(1_X\otimes 1_Y\otimes r_{Y^\star}\otimes 1_Y)(1_X\otimes db_Y\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes 1_Y) &= 1_X\otimes((1_Y\otimes r_{Y^\star})(db_Y\otimes 1_{\mathbb{1}}))\otimes 1_Y \\
&= 1_X\otimes(db_Y\otimes r_{\mathbb{1}})\otimes 1_Y \\
&= (1_X\otimes db_Y\otimes 1_Y)(1_X\otimes r_{\mathbb{1}}\otimes 1_Y)
\end{aligned}$$

Já que $1_X \otimes r_Y = r_{X\otimes Y}$ e $r_Y(1_Y \otimes ev_Y)(db_Y \otimes 1_Y) = l_Y$, tem-se que VII comuta:

$$\begin{aligned} r_X \otimes 1_Y &= 1_X \otimes l_Y \\ &= 1_X \otimes (r_Y \otimes (1_Y \otimes ev_Y)(db_Y \otimes 1_Y)) \\ &= (1_X \otimes r_Y)(1_X \otimes 1_Y \otimes ev_Y)(1_X \otimes db_Y \otimes 1_Y) \\ &= r_{X\otimes Y}(1_X \otimes 1_Y \otimes ev_Y)(1_X \otimes db_Y \otimes 1_Y) \end{aligned}$$

Analogamente obtém-se o outro diagrama da definição de dual à esquerda. $\square$

2.4 Categorias Quase Simétricas (ou Trançadas)

As demonstrações omitidas nesta e na próxima seção, bem como detalhes relacionados com categorias monoidais quase simétricas, podem ser vistas no Capítulo 1 de [BK].

De forma geral, dadas uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, os objetos $X \otimes Y$ e $Y \otimes X$ são distintos (ver Exemplo 2.1.2 (3)). Aqui vamos definir uma categoria monoidal quase simétrica como sendo aquela que admite um isomorfismo natural entre estes dois "funtores", sujeito a alguns axiomas. Nestas categorias podemos definir produto tensorial entre *objetos biálgebra*, o qual será útil no próximo capítulo.

Definição 2.4.1. *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Considere os funtores $T_1, T_2 : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, onde $T_1((X,Y)) = X \otimes Y$ e $T_2((X,Y)) = Y \otimes X$, e $\tau : T_1 \to T_2$, $\tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ um isomorfismo natural. $(\mathcal{C}, \tau)$ é dita uma categoria monoidal quase simétrica (ou trançada) e τ é dita uma quase simetria (ou trança) para $\mathcal{C}$, se os diagramas a seguir são comutativos, independentemente da escolha dos objetos X, Y e Z de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[rr, "\tau_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[dr, "1_X\otimes\tau_{Y,Z}"'] & & Z \otimes X \otimes Y \\ & X \otimes Z \otimes Y \arrow[ur, "\tau_{X,Z}\otimes 1_Y"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \otimes \mathbb{1} \arrow[rr, "\tau_{X,\mathbb{1}}"] \arrow[dr, "r_X"'] & & \mathbb{1} \otimes X \arrow[dl, "l_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[rr, "\tau_{X,Y\otimes Z}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & Y \otimes Z \otimes X \\ & Y \otimes X \otimes Z \arrow[ur, "1_Y\otimes\tau_{X,Z}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \otimes X \arrow[rr, "\tau_{\mathbb{1},X}"] \arrow[dr, "l_X"'] & & X \otimes \mathbb{1} \arrow[dl, "r_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Observação 2.4.2. *Embora enunciado aqui como axioma, a comutatividade dos dois triângulos que envolvem os isomorfismos left e right decorre da comutatividade dos outros dois (ver [JS]).*

Definição 2.4.3. *Uma categoria quase simétrica é dita simétrica se* $\tau_{X,Y} = \tau_{Y,X}^{-1}$, *para quaisquer* X, Y *em* $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.4.4.

1. *A categoria dos espaços vetoriais é simétrica, onde* $\tau_{V,W}$ *é o isomorfismo natural* $V \otimes W \cong W \otimes V$.

2. *Considere um anel comutativo* R. *É fácil verificar que a categoria* R*-Mod é simétrica. Neste caso,* $\tau_{M,N}$ *é o isomorfismo natural que existe entre* $M \otimes N$ *e* $N \otimes M$, *onde* M *e* N *são* R*-módulos.*

3. *Em geral, uma categoria quase simétrica não é simétrica. De fato, dada uma álgebra de Hopf* H, *podemos considerar a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre* H. *Estas categorias são quase simétricas, porém não são simétricas (em geral). O leitor interessado pode ver detalhes sobre módulos de Yetter-Drinfeld, por exemplo, na Seção 11.6 de [Ra].*

Observação 2.4.5. *Se* $(\mathcal{C}, \tau)$ *é uma categoria monoidal quase simétrica, então* $(\mathcal{C}^{op}, \tau^{op})$ *é a categoria monoidal quase simétrica oposta, onde* $\tau_{X,Y}^{op} := \tau_{Y,X}^{-1}$.

2.5 Biálgebras em Categorias Quase Simétricas

Na sequência introduziremos a noção de uma biálgebra em uma categoria monoidal qualquer. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Um *objeto álgebra* em $\mathcal{C}$ é uma tripla (A, m, u) composta por um objeto A e dois morfismos $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{1} \to A$ de $\mathcal{C}$, tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes A \arrow[r, "u \otimes 1_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "1_A \otimes u"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

É claro que uma álgebra no sentido ordinário é um objeto álgebra na categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo em questão.

Um *objeto coálgebra* na categoria $\mathcal{C}$ é uma tripla (C, Δ, ε), composta por um objeto

C e dois morfismos $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{1}$, que fazem comutar os diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "1_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes 1_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes C & C \arrow[l, "l_C^{-1}"'] \arrow[r, "r_C^{-1}"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes \mathbb{1} \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes 1_C"] \arrow[ur, "1_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Note que um objeto coálgebra na categoria dos espaços vetoriais é exatamente uma coálgebra, no sentido ordinário.

Se (A, m, u) e (A', m', u') são dois objetos álgebra e $f : A \to A'$ é um morfismo na categoria, este será dito um *morfismo de álgebras (ou morfismo de objetos álgebra)* se $f \circ m = m \circ (f \otimes f)$ e $f \circ u = u'$. Do mesmo modo, se (C, Δ, ε) e $(C', \Delta', \varepsilon')$ são dois objetos coálgebra e $g : C \to C'$ é um morfismo na categoria, este será dito um *morfismo de coálgebras (ou morfismo de objetos coálgebra)* se $(g \otimes g) \circ \Delta = \Delta' \circ g$ e $\varepsilon = \varepsilon' \circ g$.

Um *objeto biálgebra* em $\mathcal{C}$ é uma quíntupla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, onde (B, m, u) é um objeto álgebra, (B, Δ, ε) é um objeto coálgebra e Δ e ε são morfismos de álgebra (ou equivalentemente, m e u são morfismos de coálgebra) em $\mathcal{C}$. Os morfismos de biálgebra são exatamente os morfismos na categoria que são, simultaneamente, morfismos de álgebra e de coálgebra.

Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) dois objetos álgebra em uma categoria monoidal quase simétrica $(\mathcal{C}, \tau)$. Considere os morfismos $m_{A\otimes B} := (m_A \otimes m_B) \circ (1_A \otimes \tau_{B,A} \otimes 1_B)$ e $u_{A\otimes B} := (u_A \otimes u_B) \circ r_{\mathbb{1}}^{-1}$. A comutatividade dos diagramas seguintes (e um similar ao segundo) prova que $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ é um objeto álgebra na categoria $\mathcal{C}$.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[rr, "1_{A\otimes B\otimes A}\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_B"] \arrow[dd, "1_A\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_{B\otimes A\otimes B}"'] & & A \otimes B \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[r, "1_{A\otimes B}\otimes m_{A\otimes B}"] \arrow[dl, "1_A\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_{A\otimes B\otimes B}"'] \arrow[dd, "1_A\otimes\tau_{B,A\otimes A}\otimes 1_{B\otimes B}"] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[dd, "1_A\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_B"] \arrow[dddd, bend left, "m_{A\otimes B}"] \\
& A \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[dr, "1_{A\otimes A}\tau_{B,A}\otimes 1_{B\otimes B}"] & & \\
A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[ur, "1_{A\otimes A\otimes B}\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_B"] \arrow[rr, "1_{A\otimes A}\otimes\tau_{B\otimes B,A}\otimes 1_B"'] \arrow[dd, "m_A\otimes m_B\otimes 1_{A\otimes B}"'] & & A \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[r, "1_A\otimes m_A\otimes 1_B\otimes m_B"'] \arrow[d, "m_A\otimes 1_A\otimes m_B\otimes 1_B"] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[dd, "m_A\otimes m_B"] \\
& & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[dr, "m_A\otimes m_B"] & \\
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[urr, "1_A\otimes\tau_{B,A}\otimes 1_B"] \arrow[rrr, "m_{A\otimes B}"'] & & & A \otimes B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes A \otimes B \arrow[r, "l_A^{-1} \otimes 1_B"] \arrow[dr, "1_{\mathbb{1}\otimes A} \otimes l_B^{-1}"] \arrow[ddr, bend right, "l_{A\otimes B}"'] & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes A \otimes B \arrow[r, "u_A \otimes u_B \otimes 1_{A\otimes B}"] \arrow[d, "1_A \otimes \tau_{\mathbb{1},A} \otimes 1_B"] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[d, "1_A \otimes \tau_{B,A} \otimes 1_B"] \\
& \mathbb{1} \otimes A \otimes \mathbb{1} \otimes B \arrow[r, "u_A \otimes 1_A \otimes u_B \otimes 1_B"] \arrow[dr, "l_A \otimes l_B"] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[d, "m_A \otimes m_B"] \\
& & A \otimes B
\end{tikzcd}
$$

De fato, como τ é uma quase simetria (e em particular uma transformação natural) nota-se que cada área interna aos diagramas é comutativa, e assim, que o perímetro de cada um é comutativo.

Agora vamos dar uma estrutura de coálgebra para o produto tensorial de dois objetos coálgebra na categoria monoidal quase simétrica $(\mathcal{C}, \tau)$. Para tal, sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ duas coálgebras em $\mathcal{C}$. Defina $\Delta_{C\otimes A} := (1_C \otimes \tau_{A,C}^{-1} \otimes 1_A)(\Delta_C \otimes \Delta_A)$ e $\varepsilon_{C\otimes A} := l_{\mathbb{1}} \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_A)$. A comutatividade dos diagramas seguintes (e um análogo ao segundo) garantem que $(C \otimes A, \Delta_{C\otimes A}, \varepsilon_{C\otimes A})$ é uma coálgebra em $\mathcal{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes A \arrow[r, "\Delta_C \otimes \Delta_A"] \arrow[d, "\Delta_C \otimes \Delta_A"] & C \otimes C \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_C \otimes \tau_{A,C}^{-1} \otimes 1_A"] \arrow[d, "\Delta_C \otimes 1_C \otimes \Delta_A \otimes 1_A"] & C \otimes A \otimes C \otimes A \arrow[d, "\Delta_C \otimes \Delta_A \otimes 1_C \otimes 1_A"] \\
C \otimes C \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_C \otimes \Delta_C \otimes 1_A \otimes \Delta_A"'] \arrow[d, "1_C \otimes \tau_{A,C}^{-1} \otimes 1_A"] & C^{\otimes^3} \otimes A^{\otimes^3} \arrow[r, "1_C \otimes 1_C \otimes \tau_{A\otimes A,C}^{-1} \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_C \otimes \tau_{A,C\otimes C}^{-1} \otimes 1_{A\otimes A}"] \arrow[dr, phantom, "(\star\star)"] & C \otimes C \otimes A \otimes A \otimes C \otimes A \arrow[d, "1_C \otimes \tau_{A,C}^{-1} \otimes 1_A \otimes 1_C \otimes 1_A"] \\
C \otimes A \otimes C \otimes A \arrow[r, "1_C \otimes 1_A \otimes \Delta_C \otimes \Delta_A"'] & C \otimes A \otimes C \otimes C \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_C \otimes 1_A \otimes 1_C \otimes \tau_{A,C}^{-1} \otimes 1_A"'] & (C \otimes A)^{\otimes^3}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes C\otimes A \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & & C\otimes A \arrow[ll, "l^{-1}_{C\otimes A}"'] \arrow[dl, "l_C^{-1}\otimes l_A^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta_C\otimes\Delta_A"] \\
 & \mathbb{1}\otimes C\otimes \mathbb{1}\otimes A \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}\otimes\tau^{-1}_{\mathbb{1},C}\otimes 1_A"] & C\otimes C\otimes A\otimes A \arrow[l, "\varepsilon_C\otimes 1_C\otimes\varepsilon_A\otimes 1_A"'] \arrow[d, "1_C\otimes\tau^{-1}_{A,C}\otimes 1_A"] \\
 & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes C\otimes A \arrow[uul, "1_{\mathbb{1}}\otimes l_C\otimes 1_A"] & C\otimes A\otimes C\otimes A \arrow[l, "\varepsilon_C\otimes\varepsilon_A\otimes 1_C\otimes 1_A"']
\end{tikzcd}$$

Observação 2.5.1. *1. A comutatividade de $\star$ é válida, pois :*

$$\begin{aligned}
l^{-1}_{C\otimes A}(l_C\otimes l_A)(1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{\mathbb{1},C}\otimes 1_A) &= (l_C^{-1}\otimes 1_A)(l_C\otimes l_A)(1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{\mathbb{1},C}\otimes 1_A)\\
&= (1_{\mathbb{1}}\otimes 1_C\otimes l_A)(1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{\mathbb{1},C}\otimes 1_A)\\
&= 1_{\mathbb{1}}\otimes[(1_C\otimes l_A)(\tau_{\mathbb{1},C})]\\
&= 1_{\mathbb{1}}\otimes[(r_C\otimes 1_A)(\tau_{\mathbb{1},C}\otimes 1_A)]\\
&= 1_{\mathbb{1}}\otimes l_C\otimes 1_A
\end{aligned}$$

2. A comutatividade de $\star\star$ é garantida pelo próximo lema.

3. Um objeto coálgebra é um objeto álgebra na categoria oposta.

Lema 2.5.2. *Seja $(\mathcal{C},\tau)$ uma categoria monoidal quase simétrica. Para quaisquer $X,Y,Z,W\in\mathcal{C}$, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
Y\otimes W\otimes X\otimes Z \arrow[r, "1_Y\otimes\tau^{-1}_{X\otimes Z,W}"] \arrow[d, "\tau^{-1}_{X,Y\otimes W}\otimes 1_Z"'] & Y\otimes X\otimes Z\otimes W \arrow[d, "\tau^{-1}_{X,Y}\otimes 1_Z\otimes 1_W"] \\
X\otimes Y\otimes W\otimes Z \arrow[r, "1_X\otimes 1_Y\otimes\tau^{-1}_{Z,W}"'] & X\otimes Y\otimes Z\otimes W
\end{tikzcd}$$

Dem.: Basta notar que este diagrama é exatamente o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
Y\otimes W\otimes X\otimes Z & Y\otimes X\otimes Z\otimes W \arrow[l, "1_Y\otimes\tau_{X\otimes Z,W}"'] \\
X\otimes Y\otimes W\otimes Z \arrow[u, "\tau_{X,Y\otimes W}\otimes 1_Z"] & X\otimes Y\otimes Z\otimes W \arrow[l, "1_X\otimes 1_Y\otimes\tau_{Z,W}"] \arrow[u, "\tau_{X,Y}\otimes 1_Z\otimes 1_W"']
\end{tikzcd}$$

Este é comutativo, pois cada triângulo do diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y \otimes W \otimes X \otimes Z & & Y \otimes X \otimes Z \otimes W \arrow[ll, "1_Y \otimes \tau_{X \otimes Z, W}"'] \\
& X \otimes Z \otimes Y \otimes W \arrow[ul, "\tau_{X \otimes Z, Y \otimes W}"] \arrow[ur, "\tau_{X \otimes Z, Y} \otimes 1_W"'] \arrow[dl, "1_X \otimes \tau_{Z, Y \otimes W}"'] \arrow[dr, "1_X \otimes \tau_{Z, Y} \otimes 1_W"] & \\
X \otimes Y \otimes W \otimes Z \arrow[uu, "\tau_{X, Y \otimes W} \otimes 1_Z"] & & X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[uu, "\tau_{X, Y} \otimes 1_Z \otimes 1_W"'] \arrow[ll, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z, W}"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Suponha que $(B, m_B, u_B, \Delta_B.\varepsilon_B)$ e $(C, m_C, u_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ são duas biálgebras em uma categoria monoidal quase simetrica $(\mathcal{C}, \tau)$. Então, $\Delta_{B \otimes C}$ e $\varepsilon_{B \otimes C}$ são morfismos de álgebra e, com isso, o produto tensorial de duas biálgebras em $\mathcal{C}$ segue sendo uma biálgebra em $\mathcal{C}$.

Observação 2.5.3. *Dada uma categoria quase simétrica $(\mathcal{C}, \tau)$, considere a subclasse de $\mathcal{C}$ constituída pelos objetos álgebra (resp. coágebra, biálgebra) de $\mathcal{C}$. É fácil provar que tal subclasse é uma subcategoria monoidal de $\mathcal{C}$, onde os morfismos são os morfismos de álgebra (resp. coágebra, biálgebra) em $\mathcal{C}$. É importante ressaltar que esta subcategoria nem sempre é cheia. Podemos fornecer exemplos de transformações lineares entre álgebras que não são morfismos de álgebra. Estes são:*

1. *Se G é um grupo finito e não abeliano, a transformação linear $\varphi : \Bbbk G \to \Bbbk G$, dada por $g \mapsto g^{-1}, g \in G$ não é um morfismo de álgebras.*

2. *Se G é um grupo finito, a transformação linear $\varphi : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk^G$, definida por $g \mapsto e_g, g \in \mathcal{G}$, onde $e_g(h) = \delta_{g,h},\ g, h \in G$, não é um morfismo de álgebras.*

Capítulo 3

Dualidade de Tannaka para biálgebras

Em todo este capítulo, $\mathcal{A}$ denotará uma categoria monoidal quase simétrica e abeliana e $\mathcal{A}_0$ a subcategoria de $\mathcal{A}$, cheia, formada pelos objetos de $\mathcal{A}$ que possuem dual à esquerda. Assumimos também que $\mathcal{A}$ é cocompleta (ver Seção 1.7). Por fim, assumiremos que o produto tensorial em $\mathcal{A}$ é compatível com colimites arbitrários em cada argumento. Um "modelo", e o principal exemplo, de categorias nas condições acima é a categoria dos espaços vetoriais $\mathcal{A} = Vec$, onde $\mathcal{A}_0 = vec$ é a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

Neste capítulo faremos a construção de um objeto biálgebra na categoria $\mathcal{A}$, a partir de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e um funtor monoidal $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$. Em particular, quando $\mathcal{A}$ é a categoria dos espaços vetoriais, este objeto biálgebra será exatamente uma biálgebra (no sentido ordinário).

3.1 A categoria $\mathfrak{C}$

Fixada a categoria $\mathcal{A}$, considere a categoria $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathcal{A})$ cujos objetos são os pares do tipo $(\mathcal{C}, \omega)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria e $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ é um funtor. Dados $(\mathcal{C}, \omega), (\mathcal{D}, \gamma) \in \mathfrak{C}$, considere o conjunto $M_{\omega,\gamma} = \{(\mathcal{F}, \zeta);\ \mathcal{F} \in Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})\ e\ \zeta \in Nat(\omega, \gamma\mathcal{F})\}$. Defina em $M_{\omega,\gamma}$ a seguinte relação: $(\mathcal{F}, \zeta), (\mathcal{G}, \nu) \in M_{\omega,\gamma}$, $(\mathcal{F}, \zeta) \sim (\mathcal{G}, \nu)$ se, e somente se, existe um isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, tal que o seguinte diagramam comuta:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \gamma\mathcal{F} \arrow[dl, "\gamma(\varphi)"] \\ & \gamma\mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

É fácil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em $M_{\omega,\gamma}$. Denotaremos por $[\mathcal{F},\zeta]$ a classe de equivalência do par $(\mathcal{F},\zeta)$. Definimos o conjunto de morfismos de $(\mathcal{C},\omega)$ para $(\mathcal{D},\gamma)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência $[\mathcal{F},\zeta]$, para cada $(\mathcal{F},\zeta)\in M_{\omega,\gamma}$. Dados dois morfismos $[\mathcal{F},\zeta]\in Mor_{\mathfrak{C}}((\mathcal{C},\omega),(\mathcal{D},\gamma))$ e $[\mathcal{G},\nu]\in Mor_{\mathfrak{C}}((\mathcal{D},\gamma),(\mathcal{E},\theta))$, definimos a sua composição por:

$$[\mathcal{G},\nu]\circ[\mathcal{F},\zeta] := [\mathcal{G}\mathcal{F},\nu_{\mathcal{F}(\textvisiblespace)}\zeta].$$

Note que esta composição está bem definida, pois se $(\mathcal{F}',\zeta')\in[\mathcal{F},\zeta]$ e $(\mathcal{G}',\nu')\in[\mathcal{G},\nu]$, então existem isomorfismos naturais $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ e $\beta:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$, tais que $\gamma(\alpha)\circ\zeta=\zeta'$ e $\theta(\beta)\circ\nu=\nu'$. Defina $\varphi:\mathcal{G}\mathcal{F}\to\mathcal{G}'\mathcal{F}'$ como sendo o isomorfismo natural que tem cada componente dada por $\varphi_X := \beta_{\mathcal{F}'(X)}\circ\mathcal{G}(\alpha)$, para cada $X\in\mathcal{C}$ e veja que o seguinte diagrama comuta, visto que $\beta_{\mathcal{F}'(\textvisiblespace)}\circ\mathcal{G}(\alpha)=\mathcal{G}'(\alpha)\circ\beta_{\mathcal{F}(\textvisiblespace)}$.

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\zeta'"'] & \gamma\mathcal{F} \arrow[r, "\nu_{\mathcal{F}(\textvisiblespace)}"] \arrow[dl, "\gamma(\alpha)"] \arrow[d, "\nu'_{\mathcal{F}(\textvisiblespace)}"] & \theta\mathcal{G}\mathcal{F} \arrow[dl, "\theta(\beta_{\mathcal{F}(\textvisiblespace)})"] \arrow[dd, "\theta\mathcal{G}(\alpha)"] \\
\gamma\mathcal{F}' \arrow[d, "\nu'_{\mathcal{F}'(\textvisiblespace)}"'] & \theta\mathcal{G}'\mathcal{F} \arrow[dl, "\theta\mathcal{G}'(\alpha)"] & \\
\theta\mathcal{G}'\mathcal{F}' & & \theta\mathcal{G}\mathcal{F}' \arrow[ll, "\theta(\beta_{\mathcal{F}'(\textvisiblespace)})"]
\end{tikzcd}$$

Logo $[\mathcal{G},\nu]\circ[\mathcal{F},\zeta]=[\mathcal{G}',\nu']\circ[\mathcal{F}',\zeta']$.

Notação: Eventualmente denotaremos o par $(\mathcal{C},\omega)\in\mathfrak{C}$ apenas por ω, deixando implícita a categoria $\mathcal{C}$.

3.2 $\mathfrak{C}$ é monoidal

Nesta seção daremos uma estrutura monoidal à categoria $\mathfrak{C}$, construindo um produto tensorial "associativo", o qual admite um "elemento neutro"segundo os morfismos left e right.

Se $(\mathcal{C},\omega),(\mathcal{D},\gamma)\in\mathfrak{C}$, definimos o funtor $\omega\otimes\gamma:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{A}_0$ por:

$$\omega\otimes\gamma := \otimes\circ(\omega\times\gamma).$$

O produto tensorial da estrutura monoidal de $\mathfrak{C}$ é definido pelo funtor:

$$((\mathcal{C},\omega),(\mathcal{D},\gamma)) \mapsto (\mathcal{C},\omega)\bigotimes(\mathcal{D},\gamma) := (\mathcal{C}\times\mathcal{D}, \omega\otimes\gamma) \quad e$$

$$([\mathcal{F},\zeta],[\mathcal{G},\nu]) \mapsto [\mathcal{F},\zeta]\bigotimes[\mathcal{G},\nu] := [\mathcal{F}\times\mathcal{G}, \zeta\otimes\nu].$$

A transformação natural $\zeta\otimes\nu$ está definida na Proposição 2.1.4, a qual nos garante, também, que $\zeta\otimes\nu$ é isomorfismo natural.

Seja $\mathcal{U}$ a categoria discreta que possui apenas um objeto, o qual denotaremos por $\star$. Considere o funtor $\mu : \mathcal{U} \to \mathcal{A}_0$ que associa o objeto $\star$ ao objeto $\mathbb{1} \in \mathcal{A}_0$ e associa o morfismo $1_\star \in Mor(\mathcal{U})$ ao morfismo $1_{\mathbb{1}} \in Mor(\mathcal{A}_0)$. Definimos $\mathbf{1} := (\mathcal{U},\mu) \in \mathfrak{C}$. Considerando os funtores $\pi_{\mathcal{C}}$ e $\pi_{\mathcal{D}}$, conforme o item (9) do Exemplo 1.2.3, definimos o isomorfismo natural $\mathbb{L} : \mathbf{1}\bigotimes \_ \to \_$ por:

$$\mathbb{L}_{(\mathcal{C},\omega)} := [\pi_{\mathcal{C}}, l_{\omega(\_)}] : \mathbf{1}\bigotimes(\mathcal{C},\omega) \to (\mathcal{C},\omega).$$

Para simplificar a notação, escreveremos $\mathbb{L}_{(\mathcal{C},\omega)} = \mathbb{L}^\omega$. Veja que, se $[\mathcal{F},\zeta] \in Mor_{\mathfrak{C}}((\mathcal{C},\omega),(\mathcal{D},\gamma))$, então $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor e $\zeta : \omega \to \gamma\mathcal{F}$ é um isomorfismo natural. Além disto, temos:

$$\mathbf{1}\bigotimes(\mathcal{C},\omega) = (\mathcal{U}\times\mathcal{C}, \mu\otimes\omega) \quad e \quad \mathbf{1}\bigotimes(\mathcal{D},\gamma) = (\mathcal{U}\times\mathcal{D}, \mu\otimes\gamma).$$

Então, definimos $id_\mu\otimes\zeta : \mu\otimes\omega \to (\mu\otimes\gamma)(Id_{\mathcal{U}}\times\mathcal{F})$ por:

$$(id_\mu\otimes\zeta)_{(\star,X)} = 1_{\mathbb{1}}\otimes\zeta_X : \mathbb{1}\otimes\omega(X) \to \mathbb{1}\otimes\gamma\mathcal{F}(X).$$

Note que $\mathbb{L}^\gamma \circ [Id_{\mathcal{U}}\times\mathcal{F}, id_\mu\otimes\zeta] : (\mathcal{U}\times\mathcal{C}, \mu\otimes\omega) \to (\mathcal{D},\gamma)$ é a classe $[\mathcal{J}_1, \alpha^1]$, onde $\mathcal{J}_1(\star, X) = \mathcal{F}(X)$ e $\alpha^1 : \mu\otimes\omega \to \gamma\mathcal{J}_1$ é dado por $\alpha^1_{(\star,X)} = \zeta_X \circ l_{\omega(X)}$, $\forall X \in \mathcal{C}$. Por outro lado, $[\mathcal{F},\zeta]\circ[\pi_{\mathcal{C}}, l_{\omega(\_)}] = [\mathcal{J}_2, \alpha^2]$, com $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ e $\alpha^1 = \alpha^2$. Portanto, para qualquer morfismo $[\mathcal{F},\zeta] : (\mathcal{C},\omega) \to (\mathcal{D},\gamma) \in Mor(\mathfrak{C})$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\bigotimes(\mathcal{C},\omega) \arrow[r, "{[id\times\mathcal{F},\mu\otimes\omega]}"] \arrow[d, "\mathbb{L}^\omega"'] & \mathbf{1}\bigotimes(\mathcal{D},\gamma) \arrow[d, "\mathbb{L}^\gamma"'] \\
(\mathcal{C},\omega) \arrow[r, "{[\mathcal{F},\zeta]}"'] & (\mathcal{D},\gamma)
\end{tikzcd}$$

Com isto temos que $\mathbb{L} : \mathbf{1}\bigotimes \_ \to \_$ é uma tranformação natural. Sem dificuldades se prova que $\mathbb{L}$ é um isomorfismo natural. Esta construção nos forneceu o isomorfismo "left". A construção do isomorfismo "right"é inteiramente análoga, onde:

$$\mathbb{R} : \_\bigotimes \mathbf{1} \to \_ \text{ é definido por } \mathbb{R}^{\omega} := [\pi_{\mathcal{C}}, r_{\omega(\_)}], \text{ para cada } (\mathcal{C}, \omega) \in \mathfrak{C}.$$

O isomorfismo de associatividade $\mathbb{A} : (\_\bigotimes\_)\bigotimes\_ \to \_\bigotimes(\_\bigotimes\_)$, é definido por

$$\mathbb{A}_{\omega,\gamma,\theta} := [Id, a_{\omega(\_),\gamma(\_),\theta(\_)}]$$

onde "a"denota a associatividade de $\mathcal{A}_0$. O axioma do pentágono em $\mathfrak{C}$ decorre do axioma do pentágono em $\mathcal{A}_0$. A comutatividade do axioma do triângulo pode ser checada com a seguinte computação:

$$\begin{array}{rcl} (1_{\omega}\bigotimes \mathbb{L}_{\gamma}) \circ \mathbb{A}_{\omega,\mu,\gamma} & = & ([Id_{\mathcal{C}}, Id_{\omega}]\bigotimes[\pi_{\mathcal{D}}, l_{\gamma(\_)}]) \circ [Id, a_{\omega(\_),\mu(\_),\gamma(\_)}] \\ & = & [Id_{\mathcal{C}} \times \pi_{\mathcal{D}}, Id_{\omega} \otimes l_{\gamma(\_)}] \circ [Id, a_{\omega(\_),\mu(\_),\gamma(\_)}] \\ & \overset{(*)}{=} & [\pi_{\mathcal{C}} \times Id_{\mathcal{D}}, r_{\omega(\_)} \otimes 1_{\gamma}] \\ & = & [\pi_{\mathcal{C}}, r_{\omega(\_)}]\bigotimes[1_{\mathcal{D}}, 1_{\gamma}] \\ & = & \mathbb{R}_{\omega}\bigotimes 1_{\omega}. \end{array} .$$

Em $(*)$ usamos o axioma do triângulo da estrutura monoidal de $\mathcal{A}_0$. Pelo que vimos até agora, é válido o próximo resultado.

Teorema 3.2.1. $(\mathfrak{C}, \bigotimes, \mathbf{1}, \mathbb{A}, \mathbb{L}, \mathbb{R})$ *é uma categoria monoidal.*

3.3 $coend(\omega)$ é um objeto coálgebra em $\mathcal{A}$

Dado $(\mathcal{C}, \omega) \in \mathfrak{C}$, associamos o bifuntor $\omega(\_)^{\star} \otimes \omega(\_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$. Nesta seção mostraremos que o coend associado ao bifuntor $\omega(\_)^{\star} \otimes \omega(\_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ é um objeto coálgebra na categoria $\mathcal{A}$. Para simplificar a notação, eventualmente denotaremos o coend do bifuntor acima por $coend(\omega)$ ao invés de $\int^{X\in\mathcal{C}} \omega(X)^{\star} \otimes \omega(X)$. Mais ainda, como $\mathcal{A}_0$ é uma subcategoria cheia de $\mathcal{A}$, eventualmente enunciaremos algum resultado envolvendo objetos e morfismos da categoria $\mathcal{A}$, os quais valem, em particular, para objetos da categoria $\mathcal{A}_0$. Iniciamos com alguns resultados relacionados sobre end's e coend's.

Lema 3.3.1. *Dois bifuntores naturalmente isomorfos compartilham end's.*

Dem.: Sejam $\omega, \gamma : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ dois bifuntores, $\varphi : \omega \to \gamma$ um isomorfismo natural e $E \in \mathcal{A}$. Se E é o end do bifuntor ω, existe uma transformação diagonalmente natural $\alpha : E \to \omega$, tal que (E, α) é um objeto terminal na categoria $W_s(\omega)$. Considere a transformação diagonalmente natural $\alpha' = \varphi \circ \alpha : E \to \gamma$. É claro que (E, α') é um objeto terminal na categoria $W_s(\gamma)$. Portanto, E é o end do bifuntor γ. $\square$

Proposição 3.3.2. *Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o conjunto das transformações naturais de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$. Então $Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \int_{X \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) \in Set$.*

Dem.: Para cada $Z \in \mathcal{C}$, defina $\mu_Z : Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Z), \mathcal{G}(Z))$ por $\mu_Z(\eta) = \eta_Z$. A naturalidade de η faz o seguinte diagrama comutar, para cada $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$:

$$\begin{tikzcd}
Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\mu_Y"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)\circ\textvisiblespace"] \\
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{G}(Y)) \arrow[r, "\textvisiblespace\circ\mathcal{F}(f)"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

Portanto, $(Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \{\mu_X : Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \mathcal{C}})$ é um wedge para $Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\textvisiblespace), \mathcal{G}(\textvisiblespace))$.

Seja $(E', \{\mu'_X : E' \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \mathcal{C}})$ um wedge para $Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\textvisiblespace), \mathcal{G}(\textvisiblespace))$. Para cada $\alpha \in E'$ e $Z \in \mathcal{C}$, denote $\alpha'_Z := \mu'_Z(\alpha)$. Da hipótese de que a família $\{\mu'_X : E' \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \mathcal{C}}$ é uma transformação diagonalmente natural, tem-se que para cada $f : X \to Y \in Mor(\mathcal{D})$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\alpha'_X"] \arrow[d, "\alpha'_Y"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)\circ\textvisiblespace"] \\
Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{G}(Y)) \arrow[r, "\textvisiblespace\circ\mathcal{F}(f)"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

Logo $\mathcal{G}(f) \circ \alpha'_X = \alpha'_Y \circ \mathcal{F}(f)$. Ou seja, $\alpha' = \{\alpha'_Z : \mathcal{F}(Z) \to \mathcal{G}(Z)\}$ é uma transformação natural. Com isto temos uma função $\gamma : E' \to Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, definida por $\gamma(\alpha) = \alpha'$. Mais ainda, note que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\mu'_X"] \arrow[ddr, bend right, "\mu'_Y"'] & & \\
& Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\mu_Y"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)\circ\textvisiblespace"] \\
& Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{G}(Y)) \arrow[r, "\textvisiblespace\circ\mathcal{F}(f)"'] & Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

Se $\gamma' : E' \to Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é outro morfismo que faz este diagrama comutar, então:

$$(\gamma(\alpha))_X = \mu_X \circ \gamma(\alpha) = \mu'_X(\alpha) = \mu_X \circ \gamma'(\alpha) = (\gamma'(\alpha))_X,$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, ou seja $\gamma'(\alpha) = \gamma(\alpha)$, para todo $\alpha \in E'$. Assim $\gamma = \gamma'$. Portanto $(Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \{\mu_X : Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \mathcal{C}})$ é um objeto terminal na categoria $W_s(Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\_), \mathcal{G}(\_)))$. Logo $Nat(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \int_{X \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$. $\square$

Definição 3.3.3. *Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to Set$ é dito representável quando é naturalmente equivalente ao funtor $Mor_{\mathcal{C}}(Z, \_)$ ou ao funtor $Mor_{\mathcal{C}}(\_, Z)$, para algum $Z \in \mathcal{C}$.*

Os funtores dos itens (2) e (3) no Exemplo 1.2.3 são *funtores representados* pelos objetos X e Z, respectivamente. Note que nem todo funtor é representável. Um exemplo de um funtor que não é representável é o funtor constante, partindo de uma categoria que possui objeto zero, à categoria Set, definido por um conjunto $S \in Set$ com dois ou mais elementos.

Proposição 3.3.4. *Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$. Os funtores $Mor_{\mathcal{C}}(X, \_)$ e $Mor_{\mathcal{C}}(Y, \_)$ são naturalmente equivalentes se, e somente se X e Y são isomorfos. O mesmo vale para os funtores $Mor_{\mathcal{C}}(\_, X)$ e $Mor_{\mathcal{C}}(\_, Y)$.*

Dem.: Se $\Psi : Mor_{\mathcal{C}}(X, \_) \to Mor_{\mathcal{C}}(Y, \_)$ é um isomorfismo natural, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "\Psi_Y^{-1}(1_Y)\circ_"'] & Mor_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[d, "\Psi_Y^{-1}(1_Y)\circ_"] \\
Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\Psi_Y"'] & Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)
\end{tikzcd}$$

Com isto prova-se que $\Psi_Y^{-1}(1_Y) \circ \Psi_X(1_X) = 1_Y$. Usando a naturalidade de Ψ^{-1} prova-se que $\Psi_X(1_X) \circ \Psi_Y^{-1}(1_Y) = 1_X$, ou seja, $\Psi_X(1_X) : Y \to X$ é um isomorfismo. Consequentemente, X e Y são isomorfos. A recíproca é imediata. $\square$

Agora relambramos um importante resultado sobre funtores contravariantes e representáveis, o qual pode ser visto em [Ma], Seções IX.5 e IX.6.

Proposição 3.3.5. *Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria monoidal rígida, $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um bifuntor que admite um coend e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to Set$ um funtor contravariante e representável. Então, $\mathcal{G}(\int^{X \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(X, X)) = \int_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{G}\mathcal{F}(X, X)$. Em outras palavras, funtores contravariantes e representáveis transformam coend's em end's.*

Observação 3.3.6. *Sejam $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}_0$ um funtor, $f : M \longrightarrow N \in Mor(\mathcal{A})$ um morfismo e $\eta \in Nat(\omega, \omega \otimes M)$ uma transformação natural, onde $\omega \otimes M : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ é* *o funtor definido por* $(\omega \otimes M)(X) = \omega(X) \otimes M$*. Então* $(1_\omega \otimes f) \circ \eta : \omega \to \omega \otimes N$ *é uma transformação natural, onde* $[(1_\omega \otimes f) \circ \eta]_X := (1_\omega(X) \otimes f) \circ \eta_X$*. De fato, seja* $\alpha : X \to Y \in Mor(\mathcal{C})$*. Considere o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\omega(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \omega(X) \otimes M \arrow[r, "1_{\omega(X)} \otimes f"] \arrow[d, "\omega(\alpha) \otimes 1_M"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \omega(X) \otimes N \arrow[d, "\omega(\alpha) \otimes 1_N"] \\
\omega(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & \omega(Y) \otimes M \arrow[r, "1_{\omega(X)} \otimes f"'] & \omega(Y) \otimes N
\end{tikzcd}$$

Observe que (1) comuta pela naturalidade de η *e que (2) comuta trivialmente. Portanto o diagrama comuta. Segue que* $(1_\omega \otimes f) \circ \eta$ *é uma transformação natural.*

Observação 3.3.7. *Seja* $Nat(\omega, \omega \otimes \text{\textvisiblespace}) : \mathcal{A} \longrightarrow Set$ *o funtor definido pela associação* $M \in \mathcal{A} \longmapsto Nat(\omega, \omega \otimes M)$*. Suponha que* $Nat(\omega, \omega \otimes \text{\textvisiblespace})$ *é um funtor representado por* $C \in \mathcal{A}$*. Então existe um isomorfismo natural* $\Psi : Mor_{\mathcal{A}}(C, \text{\textvisiblespace}) \to Nat(\omega, \omega \otimes \text{\textvisiblespace})$*. Se* $f : C \to M$ *é um morfismo em* $\mathcal{A}$*, então* $\Psi_M(f) = (1_\omega \otimes f) \circ \Psi_C(1_C)$*, pois o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
Mor(C, C) \arrow[r, "\Psi_C"] \arrow[d, "f \circ \text{\textvisiblespace}"'] & Nat(\omega, \omega \otimes C) \arrow[d, "(1_\omega \otimes f) \circ \text{\textvisiblespace}"] \\
Mor(C, M) \arrow[r, "\Psi_M"'] & Nat(\omega, \omega \otimes M)
\end{tikzcd}$$

Como Ψ *é um isomorfismo natural, dada uma transformação natural* $\varphi : \omega \to \omega \otimes M$*, existe um único morfismo* $f \in Mor(C, M)$ *tal que* $\Psi_M(f) = \varphi$*, o que equivale a dizer que existe um único morfismo* $f \in Mor(C, M)$ *tal que* $\varphi = (1_\omega \otimes f) \circ \Psi_C(1_C)$*.*

Lema 3.3.8. *Sejam* $(\mathcal{C}, \omega) \in \mathfrak{C}$ *e* $C \in \mathcal{A}$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $C \cong coend(\omega)$*;*

2. *o funtor* $Nat(\omega, \omega \otimes \text{\textvisiblespace}) : \mathcal{A} \to Set$ *é representável, e tem como representante o objeto* C*;*

3. *existe uma transformação natural* $\delta^\omega : \omega \to \omega \otimes C$*, tal que para cada* $M \in \mathcal{A}$ *e para cada transformação natural* $\varphi : \omega \to \omega \otimes M$ *existe um único morfismo* $f = f(\varphi) : C \to M \in Mor(\mathcal{A})$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[rr, "\delta^\omega"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \omega \otimes C \arrow[dl, "1_\omega \otimes f"] \\
& \omega \otimes M &
\end{tikzcd}$$

Dem.: (1 $\Leftrightarrow$ 2) Para cada $M \in \mathcal{A}$, sabemos que o funtor $Mor_{\mathcal{A}}(\omega(\_), \omega(\_) \otimes M)$ é equivalente ao funtor $Mor_{\mathcal{A}}(\omega(\_)^* \otimes \omega(\_), M)$, conforme a Proposição 2.3.6. Assim:

$$\begin{array}{rcl} Nat(\omega, \omega \otimes \_) & \cong & \int_{X \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{A}}(\omega(X), \omega(X) \otimes \_) \\ & \cong & \int_{X \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{A}}(\omega(X)^* \otimes \omega(X), \_) \\ & \cong & Mor_{\mathcal{A}}(\int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X), \_) \end{array}$$

onde a primeira equivalência (natural) decorre da Proposição 3.3.2, a segunda decorre da Proposição 2.3.6 e a terceira decorre da Proposição 3.3.5, visto que o funtor $Mor_{\mathcal{A}}(\_, Z)$ é contravariante e representável, para cada $Z \in \mathcal{A}$. Logo, $Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ é representado por C se, e só se $C \cong \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X)$, conforme a Proposição 3.3.4.
(2 $\Rightarrow$ 3) Seja $\Psi : Mor(C, \_) \to Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ um isomorfismo natural. Pela Observação 3.3.7, basta tomar $\delta^\omega := \Psi_C(1_C)$.
(3 $\Rightarrow$ 2) Para cada $M \in \mathcal{A}$, defina a função:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_M : Mor_{\mathcal{A}}(C, M) & \longrightarrow & Nat(\omega, \omega \otimes M) \\ f & \longmapsto & (1_\omega \otimes f) \circ \delta_\omega \end{array}$$

Se $\alpha : M \to N$ é um morfismo em $\mathcal{A}$ e dado $f \in Mor_{\mathcal{A}}(C, M)$, então:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_N(\alpha \circ f) & = & (1_\omega \otimes \alpha \circ f) \circ \delta^\omega \\ & = & (1_\omega \otimes \alpha) \circ (1_\omega \otimes f) \circ \delta^\omega \\ & = & [(1_\omega \otimes \alpha) \circ \_] \, (\Psi_M(f)) \end{array}$$

Logo $\Psi := \{\Psi_M\}_{M \in \mathcal{A}}$ é uma transformação natural entre os funtores $Mor_{\mathcal{A}}(C, \_)$ e $Nat(\omega, \omega \otimes \_)$. Da hipótese de que existe um único morfismo $f : C \to M$, tal que o diagrama comuta, concluímos que Ψ_M é uma bijeção, para todo $M \in \mathcal{A}$. Portanto Ψ é um isomorfismo natural. $\square$

Corolário 3.3.9. *Se $C \in \mathcal{A}$ é o coend do funtor $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ e $f, g : C \longrightarrow M \in Mor(\mathcal{A})$ são dois morfismos tais que $(1_\omega \otimes f) \circ \delta^\omega = (1_\omega \otimes g) \circ \delta^\omega$ então $f = g$.*

Dem.: Aplicação direta do item (3) do Lema 3.3.8 . $\square$

Seja $(\mathcal{C}, \omega) \in \mathfrak{C}$ um par que possui um coend $C \in \mathcal{A}$. Vamos utilizar o Lema 3.3.8 para definir dois morfismos, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{1}$, que darão uma estrutura de objeto coálgebra na categoria $\mathcal{A}$ para o objeto $C \in \mathcal{A}$. Para tal, defina Δ como sendo o único morfismo que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "\delta^\omega"] \arrow[d, "\delta^\omega"'] & \omega \otimes C \arrow[d, "1_\omega \otimes \Delta"] \\ \omega \otimes C \arrow[r, "\delta^\omega \otimes 1_C"'] & \omega \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

Analogamente, defina ε como sendo o único morfismo que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "\delta^\omega"] \arrow[dr, "r_\omega^{-1}"'] & \omega \otimes C \arrow[d, "1_\omega \otimes \varepsilon"] \\ & \omega \otimes \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

Proposição 3.3.10. *(C, Δ, ε) é um objeto coálgebra na categoria $\mathcal{A}$.*

Dem.: Primeiramente vejamos que Δ é coassociativa. De fato,

$$\begin{aligned} [1_\omega \otimes ((\Delta \otimes 1_C)\Delta)]\delta^\omega &= (1_\omega \otimes \Delta \otimes 1_C)(1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\ &= (1_\omega \otimes \Delta \otimes 1_C)(\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (((1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega) \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (((\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega) \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (\delta^\omega \otimes 1_C \otimes 1_C)(\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (\delta^\omega \otimes 1_C \otimes 1_C)(1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\ &= (\delta^\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\ &= (1_\omega \otimes 1_C \otimes \Delta)(\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (1_\omega \otimes 1_C \otimes \Delta)(1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\ &= [1_\omega \otimes ((1_C \otimes \Delta)\Delta)]\delta^\omega. \end{aligned}$$

Assim, $[1_\omega \otimes ((\Delta \otimes 1_C)\Delta)]\delta^\omega = [1_\omega \otimes ((1_C \otimes \Delta)\Delta)]\delta^\omega$. Utilizando o Corolário 3.3.9, concluímos que $(\Delta \otimes 1_C)\Delta = (1_C \otimes \Delta)\Delta$. Para o axioma da counidade, note que:

$$\begin{aligned} [1_\omega \otimes ((\varepsilon \otimes 1_C)\Delta)]\delta^\omega &= (1_\omega \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\ &= (1_\omega \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (((1_\omega \otimes \varepsilon)\delta^\omega) \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (r_\omega^{-1} \otimes 1_C)\delta^\omega \\ &= (1_\omega \otimes l_C^{-1})\delta^\omega. \end{aligned}$$

Assim, $[1_\omega \otimes ((\varepsilon \otimes 1_C)\Delta)]\delta^\omega = (1_\omega \otimes l_C^{-1})\delta^\omega$. Utilizando o Corolário 3.3.9, concluímos que $(\varepsilon \otimes 1_C)\Delta = l_C^{-1}$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
[1_\omega \otimes ((1_C \otimes \varepsilon)\Delta)]\delta^\omega &= (1_\omega \otimes 1_C \otimes \varepsilon)(1_\omega \otimes \Delta)\delta^\omega \\
&= (1_\omega \otimes 1_C \otimes \varepsilon)(\delta^\omega \otimes 1_C)\delta^\omega \\
&= (\delta^\omega \otimes \varepsilon)\delta^\omega \\
&= (\delta^\omega \otimes 1_{\mathbb{1}})r_\omega^{-1} \\
&= r_{\omega\otimes C}^{-1} \circ \delta^\omega \\
&= (1_\omega \otimes r_C^{-1})\delta^\omega
\end{aligned}$$

implica que $(1_C \otimes \varepsilon)\Delta = r_C^{-1}$. □

3.4 $coend(\omega)$ é um objeto álgebra em $\mathcal{A}$

Nesta seção mostraremos que $coend(\omega)$ é um objeto álgebra em $\mathcal{A}$, para qualquer par $(\mathcal{C}, \omega) \in \mathfrak{C}$ desde que $\mathcal{C}$ seja uma categoria monoidal e $(\omega, j, j_0) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_0$ seja um funtor monoidal.

Lembramos que o coend de um funtor está biunivocamente determinado por uma transformação natural com uma determinada propriedade universal (ver Lema 3.3.8). A próxima proposição nos dá uma caracterização de tal transformação natural para um produto tensorial de dois funtores.

Proposição 3.4.1. *Sejam $(\mathcal{C}, \omega), (\mathcal{D}, \gamma) \in \mathfrak{C}$ e $C = coend(\omega)$ e $D = coend(\gamma)$. Então $\delta^{\omega\otimes\gamma} := (1_\omega \otimes \tau_{C,\gamma} \otimes 1_D)(\delta^\omega \otimes \delta^\gamma) : \omega \otimes \gamma \to \omega \otimes \gamma \otimes C \otimes D$ é uma transformação natural que possui a propriedade universal descrita no item (3) do Lema 3.3.8.*

Dem.: Ver [Sch], Lema 2.3.6. □

Observação 3.4.2. *A Proposição 3.4.1 nos diz que o coend do produto tensorial de dois funtores é isomorfo ao produto tensorial dos respectivos coend's.*

Lema 3.4.3. *Sejam X, Y, Z e W objetos de uma categoria monoidal quase simétrica $(\mathcal{A}, \tau)$. Então o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[r, "\tau_{X,Y}\otimes 1_Z \otimes 1_W"] \arrow[d, "1_X\otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Y \otimes X \otimes Z \otimes W \arrow[d, "1_Y \otimes \tau_{X\otimes Z, W}"] \\
X \otimes Y \otimes W \otimes Z \arrow[r, "\tau_{X, Y\otimes W}\otimes 1_Z"'] & Y \otimes W \otimes X \otimes Z
\end{tikzcd}$$

Dem.: Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[r, "\tau_{X,Y} \otimes 1_Z \otimes 1_W"] \arrow[d, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"'] & Y \otimes X \otimes Z \otimes W \arrow[d, "1_Y \otimes \tau_{X \otimes Z, W}"] \\
X \otimes Y \otimes W \otimes Z \arrow[r, phantom, "(2)"] & Y \otimes W \otimes X \otimes Z \\
X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[r, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"'] \arrow[u, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"] & X \otimes Y \otimes W \otimes Z \arrow[u, "\tau_{X, Y \otimes W} \otimes 1_Z"']
\end{tikzcd}$$

Note que (1) comuta se, e somente se, (2) comuta. Mais ainda, (2) comuta pois o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[rr, "\tau_{X,Y} \otimes 1_Z \otimes 1_W"] \arrow[dl, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"'] & & Y \otimes X \otimes Z \otimes W \arrow[dr, "1_Y \otimes \tau_{X \otimes Z, W}"] & \\
X \otimes Y \otimes W \otimes Z & & X \otimes Z \otimes Y \otimes W \arrow[ll, "1_X \otimes \tau_{Z, Y \otimes W}"] \arrow[rr, "\tau_{X \otimes Z, Y \otimes W}"] \arrow[ul, "1_X \otimes \tau_{Z,Y} \otimes 1_W"] \arrow[ur, "\tau_{X \otimes Z, Y} \otimes 1_W"'] \arrow[dl, "1_X \otimes \tau_{Z,Y} \otimes 1_W"'] \arrow[dr, "1_X \otimes \tau_{Z, Y \otimes W}"] & & Y \otimes W \otimes X \otimes Z \\
 & X \otimes Y \otimes Z \otimes W \arrow[rr, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"'] \arrow[ul, "1_X \otimes 1_Y \otimes \tau_{Z,W}"] & & X \otimes Y \otimes W \otimes Z \arrow[ur, "\tau_{X, Y \otimes W} \otimes 1_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, usando que $(\mathcal{A}, \tau)$ é quase simétrica. $\square$

Observação 3.4.4. *1. Note que $\Psi : Mor(\mathbb{1}, \_) \to Nat(\mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes \_)$, definido por $\Psi_X(f) = l_X^{-1} \circ f$, é um isomorfismo natural. O Lema 3.3.8 garante que $\mathbb{1} \cong coend(\mu)$ e que $\delta^\mu = l_{\mathbb{1}}^{-1} = \Psi_{\mathbb{1}}(1_{\mathbb{1}})$ é uma transformação natural tal que para cada $M \in \mathcal{A}$ e qualquer transformação natural $\varphi : \mathbb{1} \to \mathbb{1} \otimes M$, existe um único morfismo $f : \mathbb{1} \to M$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, "l_{\mathbb{1}}^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[dl, "1_{\mathbb{1}} \otimes f"] \\
 & \mathbb{1} \otimes M &
\end{tikzcd}$$

2. *A comutatividade do diagrama anterior implica que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, "l_{\mathbb{1}}^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "l_{\mathbb{1}}"] \arrow[dl, "1_{\mathbb{1}}\otimes f"] & \mathbb{1} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{1}\otimes M \arrow[rr, "l_M"'] & & M
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Logo $f = l_M \circ \varphi$.

3. *Se* C *é o coend do funtor* ω *e* $\varphi : \mathbb{1} \to \mathbb{1}\otimes C$ *é a transformação natural dada por* $(\mathsf{j}_0 \otimes 1_C)\circ\delta^{\omega}_{\mathbb{1}}\circ\mathsf{j}_0^{-1}$, *então* f *é o morfismo* $l_C\circ(\mathsf{j}_0\otimes 1_C)\circ\delta^{\omega}_{\mathbb{1}}\circ\mathsf{j}_0^{-1}$. *Note que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\mathsf{j}_0^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & \omega(\mathbb{1}) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{\mathbb{1}}"] & \omega(\mathbb{1})\otimes C \arrow[d, "\mathsf{j}_0\otimes 1_C"] \\
C & & \mathbb{1}\otimes C \arrow[ll, "l_C"]
\end{tikzcd}$$

Proposição 3.4.5. *Sejam* $(\mathcal{C},\omega)\in\mathfrak{C}$ *que possui um coend* $C\in\mathcal{A}$, $m : C\otimes C \longrightarrow C$ *o único morfismo que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\omega\otimes\omega\otimes\omega \arrow[r, "\delta^{\omega}\otimes\delta^{\omega}"] \arrow[d, "\mathsf{j}"] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_{\omega}\otimes\tau_{C,\omega}"] & \omega\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[d, "1_{\omega}\otimes 1_{\omega}\otimes m"] \\
\omega(_\otimes_) \arrow[r, "\delta^{\omega}"'] & \omega(_\otimes_)\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C"'] & \omega\otimes\omega\otimes C
\end{tikzcd}$$

comutar, e $u : \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ *o morfismo obtido, conforme o item 3 da Observação 3.4.4, pela seguinte composição:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\mathsf{j}_0^{-1}"] \arrow[d, "u"'] & \omega(\mathbb{1}) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{\mathbb{1}}"] & \omega(\mathbb{1})\otimes C \arrow[d, "\mathsf{j}_0\otimes 1_C"] \\
C & & \mathbb{1}\otimes C \arrow[ll, "l_C"]
\end{tikzcd}$$

Nestas condições, (C, m, u) *é um objeto álgebra na categoria* $\mathcal{A}$.

Dem.: Basta verificar que os dois morfismos cumprem os axiomas estabelecidos na definição de objeto álgebra. Começamos vendo que $m(1_C\otimes m) = m(m\otimes 1_C)$. Isto decorre do Lema 3.4.3, o qual garante que as composições nas partes superiores dos dois seguintes diagramas comutativos são iguais (visto que que $\mathsf{j}(1\otimes\mathsf{j}) = \mathsf{j}(\mathsf{j}\otimes 1)$):

$$\begin{tikzcd}
\omega\otimes\omega\otimes\omega \arrow[r, "\delta^\omega\otimes\delta^\omega\otimes\delta^\omega"] \arrow[d, "\mathsf{j}\otimes 1_\omega"] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C\otimes 1_\omega\otimes 1_C"] & \omega\otimes\omega\otimes C\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes 1_\omega\tau_{C\otimes C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega m\otimes\omega\otimes 1_C"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^3} \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m\otimes 1_C"] \\
\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\omega \arrow[r, "\delta^\omega\otimes\delta^\omega"] \arrow[d, "\mathsf{j}"] & \omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C\otimes 1_\omega\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] & \omega\otimes\omega\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^2} \arrow[dl, "id"] \\
\omega((\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\textvisiblespace) \arrow[d, "\delta^\omega"] & \omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_\omega\otimes 1_C\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^2} \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m"] & \\
\omega((\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C"'] & \omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_\omega\otimes 1_C"'] & \omega^{\otimes^3}\otimes C &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\omega\otimes\omega\otimes\omega \arrow[r, "\delta^\omega\otimes\delta^\omega\otimes\delta^\omega"] \arrow[d, "1_\omega\otimes\mathsf{j}"] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes C\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes 1_C\otimes 1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C\otimes 1_C"] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega\otimes\omega}"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_C\otimes 1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^3} \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes 1_\omega\otimes 1_C\otimes m"] \\
\omega\otimes\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace) \arrow[r, "\delta^\omega\otimes\delta^\omega"] \arrow[d, "\mathsf{j}"] & \omega\otimes C\otimes\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes 1_C\otimes\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega\otimes\omega}\otimes 1_C"] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega\otimes\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega\otimes\omega}"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^2} \arrow[dl, "id"] \\
\omega(\textvisiblespace\otimes(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)) \arrow[d, "\delta^\omega"] & \omega\otimes\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes C\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C\otimes\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m"] & \omega^{\otimes^3}\otimes C^{\otimes^2} \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_\omega\otimes 1_\omega\otimes m"] & \\
\omega(\textvisiblespace\otimes(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace))\otimes C \arrow[r, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C"'] & \omega\otimes\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_C"'] & \omega^{\otimes^3}\otimes C &
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que $m\circ(u\otimes 1_C) = l_C$, considere os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\omega \arrow[rr, "l_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes\delta^\omega"] \arrow[dr, "u\otimes\delta^\omega"] \arrow[ddd, "\mathsf{j}_0^{-1}\otimes 1_\omega"] & & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_C"] \arrow[dd, "1_{\mathbb{1}}\otimes u\otimes 1_\omega\otimes 1_C"] & \mathbb{1}\otimes\omega\otimes\mathbb{1}\otimes C \arrow[dd, "1_{\mathbb{1}}\otimes 1_\omega\otimes u\otimes 1_C"] \\
& C\otimes\omega\otimes C & (2) \qquad\qquad (3) & \\
& (1) & \mathbb{1}\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[ul, "l_C\otimes 1_\omega\otimes 1_C"'] \arrow[r, "1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, "\mathsf{j}_0^{-1}\otimes 1_C\otimes 1_\omega\otimes 1_C"] & \mathbb{1}\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[d, "\mathsf{j}_0^{-1}\otimes 1_\omega\otimes 1_C\otimes 1_C"] \\
\omega(\mathbb{1})\otimes\omega \arrow[rr, "\delta^\omega_{\mathbb{1}}\otimes\delta^\omega"] \arrow[d, "\mathsf{j}_{\mathbb{1},\textvisiblespace}"] & & \omega(\mathbb{1})\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_{\omega(\mathbb{1})}\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[u, phantom, "(4)"] & \omega(\mathbb{1})\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[d, "1_{\omega(\mathbb{1})}\otimes 1_\omega\otimes m"] \\
\omega(\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace) \arrow[rr, "\delta^\omega_{\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace}"'] \arrow[urr, phantom, "(5)"] & & \omega(\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[r, "J^{-1}_{\mathbb{1},\textvisiblespace}"'] & \omega(\mathbb{1})\otimes\omega\otimes C
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\omega \arrow[rr, "l_{\mathbb{1}}^{-1}\otimes\delta_\omega"] \arrow[d, "\mathrm{j}_0^{-1}\otimes 1_\omega"'] \arrow[dr, "l_\omega"] & \arrow[d, phantom, "(7)"] & \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_{\mathbb{1}}\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_C"] \arrow[dr, "1_{\mathbb{1}}\otimes l_\omega\otimes 1_C"'] & \mathbb{1}\otimes\omega\otimes\mathbb{1}\otimes C \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}\otimes 1_\omega\otimes l_C = 1_{\mathbb{1}}\otimes r_\omega\otimes 1_C"] \\
\omega(\mathbb{1})\otimes\omega \arrow[d, "\mathrm{j}_{\mathbb{1},\textvisiblespace}"'] \arrow[r, phantom, "(6)"] & \omega \arrow[r, "\delta^\omega"] & \omega\otimes C & \mathbb{1}\otimes\omega\otimes C \arrow[l, "l_\omega\otimes 1_C"] \arrow[d, "\mathrm{j}_0^{-1}\otimes 1_\omega\otimes 1_C"] \\
\omega(\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace) \arrow[ur, "\omega(l)"] \arrow[rr, "\delta^\omega_{\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace}"'] & & \omega(\mathbb{1}\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[u, "\omega(l)\otimes 1_C"] \arrow[r, "\mathrm{j}_{\mathbb{1},\textvisiblespace}^{-1}\otimes 1_C"'] & \omega(\mathbb{1})\otimes\omega\otimes C
\end{tikzcd}
$$

Note que o item 3 da Observação 3.4.4 garante que (1) comuta. (2) comuta pela naturalidade de l, (3) e (4) comutam pela naturalidade de τ, (5) comuta pela definição de m, (6) comuta porque ω é monoidal, (7) comuta por que $(1_{\mathbb{1}}\otimes l_\omega) = r_{\mathbb{1}}\otimes 1_\omega = l_{\mathbb{1}}\otimes 1_\omega$, (8) comuta pela definição de τ, (9) comuta por que ω é monoidal e (10) comuta pela naturalidade de δ^ω. Identificando $\mu(\star) = \mathbb{1}$ e notando que $\delta^\mu = l_{\mathbb{1}}^{-1}$, o Lema 3.3.8 garante que $m\circ(u\otimes 1_C) = l_C$. Considerando que $l_{\mathbb{1}}^{-1} = r_{\mathbb{1}}^{-1}$, de modo análogo mostra-se que $m\circ(1_C\otimes u) = r_C$. $\square$

3.5 *coend*(ω) é um objeto biálgebra em $\mathcal{A}$

Finalmente, provaremos nesta seção que *coend*(ω) é um objeto biálgebra em $\mathcal{A}$ sob as mesmas hipóteses da seção anterior. Desde que que *coend*(ω) é um objeto álgebra e coálgebra em $\mathcal{A}$, resta mostrar que Δ e ε são morfismos de objetos álgebra de $\mathcal{A}$.

Teorema 3.5.1. *$(C, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é um objeto biálgebra em $\mathcal{A}$.*

Dem.: Provaremos que $\varepsilon : C \to \mathbb{1}$ é um morfismo de objetos álgebra de A. A prova de que $\Delta : C \to C\otimes C$ é um morfismo de objetos álgebra de A é similar e será omitida. Visto que $(\mathbb{1}, r_{\mathbb{1}}, 1_{\mathbb{1}})$ é um objeto álgebra em $\mathcal{A}$, ε é um morfismo de álgebras de $\mathcal{A}$ se, e somente se, $\varepsilon\circ m = r_{\mathbb{1}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)$ e $\varepsilon\circ u = 1_{\mathbb{1}}$. Primeiramente vejamos que $\varepsilon\circ m = r_{\mathbb{1}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)$. Para tal, considere os seguites diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
\omega\otimes\omega \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[d, "\mathrm{j}"'] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \omega\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[d, "1_{\omega\otimes\omega}\otimes m"] \\
\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "r^{-1}_{\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)}"'] & \omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes C \arrow[r, "\mathrm{j}^{-1}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_{\omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)}\otimes\varepsilon"] & \omega\otimes\omega\otimes C \arrow[d, "1_{\omega\otimes\omega}\otimes\varepsilon"] \\
 & \omega(\textvisiblespace\otimes\textvisiblespace)\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "\mathrm{j}^{-1}\otimes 1_{\mathbb{1}}"'] & \omega\otimes\omega\otimes\mathbb{1}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\omega\otimes\omega \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[dr, "r_\omega^{-1}\otimes r_\omega^{-1}"'] & \omega\otimes C\otimes\omega\otimes C \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{C,\omega}\otimes 1_C"] \arrow[d, "1_\omega\otimes\varepsilon\otimes 1_\omega\otimes\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & \omega\otimes\omega\otimes C\otimes C \arrow[d, "1_{\omega\otimes\omega}\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon"] \\
{} \arrow[ur, phantom, "(4)"] & \omega\otimes\mathbb{1}\otimes\omega\otimes\mathbb{1} \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes r_\omega"'] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & \omega\otimes\omega\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \arrow[d, "1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}}"] \\
& \omega\otimes\mathbb{1}\otimes\omega \arrow[r, "1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}"'] & \omega\otimes\omega\otimes\mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

Veja que (1) comuta pela definição do morfismo m, (2) comuta pela naturalidade de j^{-1}, (3) e (4) comutam pela definição do morfismo ε, (5) comuta pela naturalidade de τ e (6) comuta pela naturalidade de r. Para concluir esta etapa da prova, resta mostrar que $(1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega})\circ(1_\omega\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes r_\omega)\circ(r_\omega^{-1}\otimes r_\omega^{-1}) = (j^{-1}\otimes 1_{\mathbb{1}})\circ(r^{-1}_{\omega(\llcorner\otimes\llcorner)})\circ\mathsf{j}$, e aplicar diretamente o Lema 3.3.8. Note que:

$$\begin{aligned}
& (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_{\mathbb{1}})(r_\omega^{-1}\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_\omega)(r_\omega^{-1}\otimes 1_\omega\otimes 1_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_\omega)(1_\omega\otimes l_\omega^{-1}\otimes 1_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes(\tau_{\mathbb{1},\omega}\circ l_\omega^{-1})\otimes 1_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}\otimes 1_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}})(1_{\omega\otimes\omega}\otimes l_{\mathbb{1}}^{-1})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes(r_{\mathbb{1}}\circ l_{\mathbb{1}}^{-1}))(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_{\omega\otimes\omega}\otimes 1_{\mathbb{1}})(1_\omega\otimes r_\omega^{-1}) \\
= \ & 1_\omega\otimes r_\omega^{-1} \\
= \ & 1_\omega\otimes(\tau_{\mathbb{1},\omega}\circ l_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega})(1_\omega\otimes l_\omega^{-1}) \\
= \ & (1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega})(r_\omega^{-1}\otimes 1_\omega)
\end{aligned}$$

Com isto, e a naturalidade de $\mathsf{j}, r,\ e\ \tau$, tem-se que o seguinte diagrama é comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \omega(\text{\textvisiblespace} \otimes \text{\textvisiblespace}) \otimes \mathbb{1} \arrow[ddll, "\mathsf{j}^{-1}\otimes 1_{\mathbb{1}}"'] & & \omega(\text{\textvisiblespace} \otimes \text{\textvisiblespace}) \arrow[ll, "r^{-1}_{\omega(\text{\textvisiblespace}\otimes\text{\textvisiblespace})}"'] \\
 & & \omega \otimes \omega \otimes \mathbb{1} \arrow[u, "\mathsf{j}\otimes 1_{\mathbb{1}}"] \arrow[dll, "1_{\omega\otimes\omega\otimes\mathbb{1}}"'] & & \\
\omega \otimes \omega \otimes \mathbb{1} \arrow[ddd, "1_{\omega\otimes\omega\otimes\mathbb{1}}"'] & & & & \omega \otimes \omega \arrow[llll, "1_\omega\otimes r_\omega^{-1}"'] \arrow[uu, "\mathsf{j}"'] \arrow[ull, "r^{-1}_{\omega\otimes\omega}"'] \arrow[dll, "r_\omega^{-1}\otimes 1_\omega = 1_\omega \otimes l_\omega^{-1}"] \arrow[dd, "r_\omega^{-1}\otimes r_\omega^{-1}"] \\
 & & \omega \otimes \mathbb{1} \otimes \omega \arrow[ull, "1_\omega\otimes \tau_{\mathbb{1},\omega}"] & & \\
 & & \omega \otimes \omega \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[dll, "1_{\omega\otimes\omega}\otimes r_{\mathbb{1}}"'] & & \omega \otimes \mathbb{1} \otimes \omega \otimes \mathbb{1} \arrow[ll, "1_\omega\otimes\tau_{\mathbb{1},\omega}\otimes 1_{\mathbb{1}}"'] \arrow[d, "1_\omega\otimes 1_{\mathbb{1}}\otimes r_\omega"] \\
\omega \otimes \omega \otimes \mathbb{1} & & & & \omega \otimes \mathbb{1} \otimes \omega \arrow[llll, "1_\omega\otimes\mathbb{1}\otimes\omega"']
\end{tikzcd}
.
$$

Provaremos agora que $\varepsilon \circ u = 1_{\mathbb{1}}$. Para tal, observe que $(1_\omega \otimes \varepsilon) \circ \delta = r_\omega^{-1}$, logo, tem-se que $(1_{\omega(\mathbb{1})} \otimes \varepsilon) \circ \delta_{\mathbb{1}} = r^{-1}_{\omega(\mathbb{1})}$. Este fato, juntamente com a naturalidade de l e a definição de u, fazem com que o seguinte diagrama seja comutativo.

$$
\begin{tikzcd}
\omega(\mathbb{1}) \arrow[r, "\delta_{\mathbb{1}}"] & \omega(\mathbb{1}) \otimes C \arrow[r, "1_{\omega(\mathbb{1})}\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\mathsf{j}_0\otimes 1_C"] & \omega(\mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} \arrow[ddd, "\mathsf{j}_0\otimes 1_{\mathbb{1}}"] \\
 & \mathbb{1} \otimes C \arrow[ur, "\mathsf{j}_0^{-1}\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "l_C"] \arrow[ddr, "1_{\mathbb{1}}\otimes\varepsilon"] & \\
\mathbb{1} \arrow[uu, "\mathsf{j}_0^{-1}"] \arrow[r, "u"'] & C \arrow[d, "\varepsilon"] & \\
 & \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}"]
\end{tikzcd}
.
$$

Com isto,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \circ u &= l_{\mathbb{1}} \circ (\mathsf{j}_0 \otimes 1_{\mathbb{1}}) \circ ((1_{\omega(\mathbb{1})} \otimes \varepsilon) \circ \delta_{\mathbb{1}}) \circ \mathsf{j}_0^{-1} \\
&= l_{\mathbb{1}} \circ (\mathsf{j}_0 \otimes 1_{\mathbb{1}}) \circ r^{-1}_{\omega(\mathbb{1})} \circ \mathsf{j}_0^{-1} \\
&= \mathsf{j}_0 \circ r_{\omega(\mathbb{1})} \circ r^{-1}_{\omega(\mathbb{1})} \circ \mathsf{j}_0^{-1} \\
&= 1_{\mathbb{1}}
\end{aligned}
$$

$\square$

3.6 Exemplo

Seja G um grupo finito e seja vec_G a categoria dos espaços vetoriais G-graduados de dimensão finita. Se $V \in vec_G$, defina $\delta_V : V \to V \otimes \Bbbk G$ por $v \in V_g \mapsto v \otimes g$. Isto nos fornece uma transformação natural $\delta : \omega \to \omega \otimes \Bbbk G$, onde $\omega : vec_G \to vec_{\Bbbk}$ é o funtor esquecimento.

É fácil verificar que $\Psi : Hom_{\Bbbk}(\Bbbk G, \_) \longrightarrow Nat(\omega, \omega \otimes \_)$, dada por $f \mapsto (1_\omega \otimes f) \circ \delta$ e Φ: $Nat(\omega, \omega \otimes \_) \to Hom_{\Bbbk}(\Bbbk G, \_)$, dada por $\eta \mapsto l_V \circ (\varepsilon \otimes 1_V) \circ \eta_{\Bbbk G}$, são transformações naturais. Se $f \in Hom_{\Bbbk}(\Bbbk G, V)$ e $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle (\Phi_V \circ \Psi_V)(f), g \rangle &= \langle \Phi_V((1_\omega \otimes f) \circ \delta), g \rangle \\
&= l_V \circ (\varepsilon \otimes 1_V) \circ (1_\omega \otimes f) \circ \delta_{\Bbbk G}(g) \\
&= l_V \circ (\varepsilon \otimes 1_V) \circ (1_\omega \otimes f)(g \otimes g) \\
&= l_V \circ (\varepsilon \otimes 1_V)(g \otimes f(g)) \\
&= l_V \circ (\varepsilon(g) \otimes f(g)) \\
&= l_V(1 \otimes f(g)) \\
&= f(g) \\
&= \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

Com isto mostramos que $\Phi_V \circ \Psi_V = 1_{Hom_{\Bbbk}(\Bbbk G, V)}$, para cada $V \in vec_{\Bbbk}$.

Se $V \in vec_{\Bbbk}$ e $\eta : \omega \to \omega \otimes V$ é uma transformação natural, existe $v \in V$, tal que $\eta_{\Bbbk}(1) = 1 \otimes v$. Se $W \in vec_G$, então, para cada $w \in W$, o morfismo $k_w : \Bbbk \to W$, definido por $1 \mapsto w$ é um morfismo em vec_G. Para $W \in vec_G$ e $w \in W$, temos:

$$\begin{aligned}
\eta_W(w) &= \eta_W \circ k_w(1) \\
&= (k_w \otimes 1_V) \circ \eta_{\Bbbk}(1) \\
&= (k_w \otimes 1_V) \circ (1 \otimes v) \\
&= w \otimes v \\
&= (1_\omega \otimes l_V)(w \otimes 1 \otimes v) \\
&= (1_\omega \otimes l_V)(w \otimes \eta_{\Bbbk}(1)) \\
&= (1_\omega \otimes l_V) \circ (1_\omega \otimes \eta_{\Bbbk}) \circ (\omega \otimes 1) \\
&= (1_\omega \otimes l_V) \circ (1_\omega \otimes \eta_{\Bbbk}) \circ r_W^{-1}(w) \\
&= (r_\omega \otimes 1_V) \circ (1_W \otimes \eta_{\Bbbk}) \circ r_W^{-1}(w)
\end{aligned}$$

Logo, $\eta_W = (r_\omega \otimes 1_V) \circ (1_W \otimes \eta_{\Bbbk}) \circ r_W^{-1}$, o que garante que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "r_\omega^{-1}"'] \arrow[dd, "\eta"'] & & \omega \otimes \Bbbk G \arrow[dl, "1_\omega \otimes \varepsilon"] \arrow[dd, "1_\omega \otimes \eta_{\Bbbk G}"] \\
& \omega \otimes \Bbbk \arrow[d, "1_\omega \otimes \eta_{\Bbbk}"] & \\
\omega \otimes V & \omega \otimes \Bbbk \otimes V \arrow[l, "r_\omega \otimes 1_V"] & \omega \otimes \Bbbk G \otimes V \arrow[l, "1_\omega \otimes \varepsilon \otimes 1_V"]
\end{tikzcd}$$

Como $\Psi_V \circ \Phi_V(\eta) = (1_\omega \otimes l_V) \circ (1_\omega \otimes \varepsilon \otimes 1_V) \circ (1_\omega \otimes \eta_{\Bbbk G}) \circ \delta$, temos que $\Psi \circ \Phi(\eta) = \eta$. Provamos com isto que $\Psi_V \circ \Phi_V = 1_{Nat(\omega, \omega \otimes V)}$, para cada $V \in vec_{\Bbbk}$. Isto nos permite concluir que Ψ é um isomorfismo natural, e portanto, que o funtor $Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ é representado por $\Bbbk G$. Mais ainda, concluímos que $\Bbbk G$ é o coend do funtor ω e que δ tem a propriedade universal descrita no Lema 3.3.8. Isto nos permite dar uma estrutura de biálgebra para o espaço vetorial $\Bbbk G$ via as Proposiçoes 3.3.10 e 3.4.5 e o Teorema 3.5.1 .

Proposição 3.6.1. *Se $(\Bbbk G, m_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ é a estrutura de biálgebra dada a $\Bbbk G$ pelas construções citadas acima, então $m = m_B$, $u = u_B$, $\Delta = \Delta_B$, $\varepsilon = \varepsilon_B$, onde $(\Bbbk G, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é a estrutura de biálgebra usual de $\Bbbk G$.*

Dem.: Basta notar, para o caso da multiplicação, que se V e W são dois espaços vetoriais $G-$graduados e $v \in V_g$ e $w \in W_h$, então $v \otimes w \in (V \otimes W)_{gh}$. O restante desta construção, assim como as demais, decorre facilmente do que foi discutido no texto. $\square$

Proposição 3.6.2. *Se G é um grupo finito, então as categorias vec_G e $\mathcal{M}^{\Bbbk G}$ são isomorfas.*

Dem.: Em [SM], Example 1.6.7, vemos que, se (ρ, V) é um $\Bbbk G-$comódulo, $v \in V$ e $\rho(v) = \sum_{g \in G} v'_g \otimes g$, então $\rho(v'_g) = v'_g \otimes g$. Com isto, defina $V'_g = \{v'_g, v \in V\}$. Se $s \in V'_g \cap V'_h$, então $s \otimes g = \rho(s) = s \otimes h$, logo $g = h$ ou $s = 0$. Se $v \in V$, então $v = (\varepsilon \otimes 1) \circ \rho(v) = \sum_{g \in G} v'_g$, e assim, $V = \bigoplus_{g \in G} V'_g$. Se $T : (\rho, V) \to (\eta, W)$ é um morfismo de $\Bbbk G-$comódulos, então $(T \otimes 1) \circ \rho = \eta \circ T$. Se $v'_g \in V'_g$, $\eta(T(v'_g)) = T(v'_g) \otimes g$, ou seja, $T(V'_g) \subset W'_g$. Portanto, T é um morfismo de espaços vetoriais $G-$graduados.

Reciprocamente, se $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, defina $\rho_V : V \to V \otimes \Bbbk G$ por $v \in V_g \mapsto v \otimes g$. Com isto, (ρ_V, V) é um $\Bbbk G-$comódulo. Agora, se $T : V \to W$ é um morfismo de espaços vetoriais $G-$graduados, é claro que T é um morfismo entre os $\Bbbk G-$comódulos (ρ_V, V) e (ρ_W, W).

Se (ρ, V) é um $\Bbbk G-$comódulo, então $V = \bigoplus_{g \in G} V'_g$ é um espaço vetorial G-graduado, onde V'_g é o subespaço $V'_g = \{v'_g, v \in V\}$, definido anteriormente. Então, (ρ_V, V) é um $\Bbbk G-$comódulo. Note que $\rho_V(v'_g) = v'_g \otimes g = \rho(v'_g)$, para cada $v'_g \in V'_g, g \in G$. Logo, $\rho_V = \rho$ e $(\rho_V, V) = (\rho, V)$.

Analogamente, se $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ é um espaço vetorial $G-$graduado, então (ρ_V, V) é um $\Bbbk G-$comódulo. Se $V'_g = \{v'_g, v \in V\}$, onde $\rho(v) = \sum v'_g \otimes g$, então $V'_g = V_g$, para cada $g \in G$. Com isto, o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{M}^{\Bbbk G} \to vec_G$, definido por $(\rho, V) \mapsto V = \bigoplus_{g \in G} V'_g$ e $T \mapsto T$, é um isomorfismo de categorias. $\square$

Esta proposição nos permite concluir que $\Bbbk G$ é o coend do par $(\mathcal{M}^{\Bbbk G}, \mathcal{U})$, onde $\mathcal{U} : \mathcal{M}^{\Bbbk G} \to vec_{\Bbbk}$ é o funtor esquecimento. Do acima discutido, recuperamos a biálgebra $\Bbbk G$ a partir da categoria monoidal $\mathcal{M}^{\Bbbk G}$ e do funtor monoidal $\mathcal{U}$.

Referências Bibliográficas

[A] S. Awodey, *Category Theory- 2 ed.*, Oxforf Logic Guides(2010).

[BK] B. Bakalov and A. Kirillov, *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, University Lecture Series Volume 21-AMS (2001).

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor Categories*. Disponível em : http://www-math.mit.edu/∼etingof/tenscat.pdf

[JS] A. Joyal and R. Street, *Braided Monoidal Categories*, Oxforf Logic Guides,Macquarie Mathematics Reports (1986).

[Ma] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Second Edition, Springer (1998).

[M] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Pure and Applied Mathematics Volume 17- Columbia University (1965).

[SM] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Volume 82, AMS (1992).

[Ra] D. E. Radford, *Hopf Algebras*, Series on Knots and Everything Volume 49- World Scientific (2012).

[R] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra* Second Edition, Graduate Studies in Mathematics Volume 114, Pearson Education (2010).

[Sch] P. Schauenburg, *Tannaka Duality for Arbitrary Hopf Algebras*, Algebra Berichte Volume 66- Verlag Reinhard Fischer (1991).

[Se] J. P. Serre, *Linear Representation of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics Volume 42-Springer(1977).

[W] S.H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithimetics*. Graduate Studies in Mathematics Volume 59. AMS (2000).