UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍTICOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Francisco Helmuth Soares Dias

Santa Maria, RS, Brasil

2014

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍTICOS

Francisco Helmuth Soares Dias

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Luís Miotto

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dias, Francisco Helmuth Soares
Existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elíticos / Francisco Helmuth Soares Dias.-2014.
80 p.; 30cm

Orientador: Márcio Luís Miotto
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Problemas elíticos 2. Soluções fracas 3. Métodos Variacionais 4. Teorema do Passo da Montanha 5. Princípio Variacional de Ekeland I. Miotto, Márcio Luís II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍTICOS

elaborada por
Francisco Helmuth Soares Dias

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Márcio Luís Miotto

Márcio Luís Miotto, Dr.
(Orientador)

Rodrigo S. Rodrigues

Rodrigo da Silva Rodrigues, Dr. (UFSCar)

Taísa Junges Miotto

Taísa Junges Miotto, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 17 de fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho a minha mãe Alicia Soares.

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora Medianeira, por tudo o que tenho em minha vida, por todas as oportunidades e realizações.

Aos meus pais, em especial a minha mãe Alicia Soares por todo o seu amor, carinho, educação e confiança durante todos estes anos.

A minha namorada Lucélia Kowalski, pelo amor, companherismo, apoio, dedicação e confiança.

Ao professor Márcio Miotto, pela amizade e pelas orientações no mestrado e na graduação, sempre conduzindo os trabalhos com muita dedicação, eficiência, segurança e paciência. Além de um excelente exemplo de profissional que é, se mostrou um ótimo assador de churrasco.

Aos meus familiares, em especial ao meu vô Manoel Pedro, que mesmo não estando mais presente entre nós, sei que ainda zela e intercede por mim.

Aos professores da banca examinadora, pelas correções e sugestões, em especial a professora Taísa Miotto pelos ensinamentos e dedicação nas disciplinas da pós-graduação, nas quais tive o prazer de ser seu aluno.

Aos meus professores de mestrado, Marcio Ferreira, Diomar Mistro e Maurício Fronza, pelos ensinamentos e dedicação.

Aos meus professores de graduação, em especial os professores Antonio Bidel e Claudia Pansonato, pelas orientações, ensinamentos, dedicação e incentivo.

Aos amigos da pós-graduação e graduação pela convivência, amizade e troca de conhecimentos.

Ao coordenador Luiz Alberto, ao ex-coordenador João Lazzarin e a secretária Andréia que sempre se mostraram dispostos a ajudar os alunos do PPGMat.

A CAPES/FAPERGS pelo apoio financeiro.

A equipe Rolo Professor, que permitiu a prática de um futebol de alta qualidade e técnica nas tardes de sábados e quartas-feiras.

" Se lutarmos com fé estaremos duas vezes armados". (Platão)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍTICOS

AUTOR: FRANCISCO HELMUTH SOARES DIAS
ORIENTADOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 17 de fevereiro de 2014.

O objetivo deste trabalho é apresentar condições suficientes para a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elíticos, utilizando para isso métodos variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Palavras-chave: Problema Elítico. Multiplicidade de soluções. Teorema do Passo da Montanha. Princípio Variacional de Ekeland.

# ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF ELLIPTIC PROBLEMS

AUTHOR: FRANCISCO HELMUTH SOARES DIAS
ADVISOR: MÁRCIO LUÍS MIOTTO
Date and Location of Defense: Santa Maria, February 17, 2014.

The aim of this work is to give some sufficient conditions for the existence and multiplicity of the solutions for a class of elliptic problems, using for this variational methods, such as Montain Pass Theorem and the Ekeland Variational Principle.

Keywords: Elliptic Problem. Multiplicity of solutions. Montain Pass Theorem. Ekeland Variational Principle.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\doteq$ representa igualdade por definição;

$\to$ denota convergência forte;

$\rightharpoonup$ representa convergência fraca;

$\hookrightarrow$ significa imersão;

$\gneq$ simboliza $\geq$ e $\not\equiv$;

$A \subset\subset \mathbb{R}^N$ significa que A é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$;

$\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω;

$\partial\Omega$ é a fronteira de Ω;

$u_+ = \max\{0, u\}$ e $u_- = \max\{0, -u\}$;

$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$;

$|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u$ é continuamente k vezes diferenciável, $1 \leq k \leq \infty\}$;

$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); supp(u)$ é compacto em $\Omega\}$;

$\|u\|_\infty = \inf\{M > 0; |u| \leq M$ $q.t.p.$ em $\Omega\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u$ é mensurável e $\|u\|_\infty < \infty\}$;

$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p}$;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u$ é mensurável e $\|u\|_p < \infty\}$;

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;

$\Delta u = div(\nabla u)$;

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ é um multi-índice, com $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$;

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall \alpha$ com $|\alpha| \leq 1, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$;

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$;

$\langle\langle u,v\rangle\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx$ é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$;

$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx\right)^{1/2}$ representa a norma de $H_0^1(\Omega)$;

$H_0^{-1}(\Omega)$ denota o espaço dual de $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|)$, munido da norma $\|\cdot\|_{H_0^{-1}(\Omega)}$;

$p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, onde $1 \leq p < N$;

$\lambda_1 = \inf\left\{\dfrac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}; u \in H_0^1(\Omega), u \not\equiv 0\right\}$;

$S = \inf\left\{\dfrac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^2}; u \in H_0^1(\Omega), u \not\equiv 0\right\}$;

$L_{loc}^1(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{para todo } K \subset\subset \Omega, \int_K |u| \; dx < \infty\}$.

SUMÁRIO

Introdução

No presente trabalho obtemos resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas não triviais para a seguinte classe de problemas elíticos:

$$(P_{h,f}) \quad \begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano ($\Delta u = div(\nabla u)$), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem certas hipóteses, similarmente as apresentadas por Li, Wu e Zhou [17].

Em 1983, um trabalho pioneiro, semelhante ao nosso problema foi abordado por Brezis e Nirenberg [8]. Eles provaram, através de métodos variacionais, que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^p, \ x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p = \frac{N+2}{N-2}$, tem uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω.

Para problemas relacionados em domínios limitados mencionamos dentre outros, os trabalhos de Costa e Magalhães [10] e [26], ambos com $f(x,s)$ com crescimento subcrítico e o trabalho de Cao e Zhou [9] no qual considera-se o caso em que $f(x,s)$ tem crescimento crítico.

Um artigo importante a cerca de existência e multiplicidade de soluções para problemas envolvendo não lineariedades côncavas e convexas foi publicado por Ambrosetti, Brezis e Cerami [5] em 1994. Eles consideraram $f(x,s)$ como a soma de um termo sublinear e um superlinear em s, e provaram a existência de um $\lambda^* \in \mathbb{R}$ de modo que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, \ x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $0 < q < 1 < p$, tem uma solução se $0 < \lambda \leq \lambda^*$. No caso em que $p \leq \frac{N+2}{N-2}$, uma segunda solução é estabelecida para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Generalizando o trabalho anterior, De Figueiredo, Gossez e Ubilla [12], considerando não lineariedades mais gerais, provaram a existência de ao menos uma solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, \ x \in \Omega, \\ \quad 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, $0 < q < 1 < p$, $p \leq \frac{N+2}{N-2}$ e as funções $a, b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazem condições apropriadas.

Por sua vez, para problemas relacionados em domínios ilimitados destacamos os trabalhos de Gonçalves e Miyagaki [14] e Miotto e Miyagaki [19] para o caso em que $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico e Alves, Gonçalves e Miyagaki [2,3] e Miotto [18] para $f(x,s)$ com crescimento crítico.

No presente trabalho, para a obtenção de nossos resultados, utilizaremos argumentos variacionais. O método que empregaremos é baseado no Princípio Variacional de Ekeland e em uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

Além disso, os resultados desta dissertação cobrem os seguintes casos de crescimento de $f(x,s)$ na variável s; a saber, o caso em que $f(x,s)$ *é linear na variável* s, ou seja,

$$f(x,s) = \lambda s, \ \text{para algum } \lambda > 0;$$

o caso em que $f(x,s)$ *é assintoticamente linear em relação a variável* s *no infinito*,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \xi \in (\lambda_1, +\infty) \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega;$$

e ainda o caso em que $f(x,s)$ *é superlinear em relação a variável* s *no infinito*, isto é,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \infty \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega.$$

Este trabalho é organizado como segue, no Capítulo 1 exploramos alguns resultados preliminares para esta dissertação, apresentando uma introdução aos Métodos Variacionais, bem como alguns resultados que utilizaremos durante todo o nosso trabalho.

No Capítulo 2, abordamos o caso em que $f(x,s)$ é assintoticamente linear na variável s. Sob as hipóteses $(h1), (f1), (f2)$ (veja página 15) e $(h2)$ (confira página 22), mostramos através do Princípio Variacional de Ekeland que o problema $(P_{h,f})$ tem uma solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$, com nível de energia negativo. Posteriormente, consideramos somente as condições $(h1), (f1) - (f2)$ e através de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, garantimos a existência de uma solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$, com nível de energia positivo e consequentemente diferente da obtida no resultado anterior.

Já no Capítulo 3, trabalhamos o caso em que $f(x,s)$ é superlinear na variável s. Acrescentando a $(h1), (f1) - (f2)$, a condição $(f3)$ (veja página 33), através do Teorema do Passo da Montanha provamos a existência de uma solução não negativa para o nosso problema. Utilizando a mesma técnica demonstramos também, sob as hipóteses

$(h1), (f1)-(f2), (h2)$ e $(f2)'-(fF)$ (confira página 33) , um resultado de multiplicidade de soluções fracas não negativas para problema $(P_{h,f})$. Salientamos que para este caso de crescimento, não assumiremos a condição de Ambrosetti e Rabinowitz (confira a página 33), mas sim hipóteses mais fracas, em certo sentido, que a condição (AR), como pode ser visto nos Exemplos 1 e 2 das páginas 34 e 35.

No Capítulo 4, trabalhamos o caso em que $f(x,s)$ é linear na variável s, ou seja, discutimos alguns resultados de existência de soluções fracas não negativas para o problema

$$(P_{h,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + h(x)u^q, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad 0 \leq u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Concluímos o trabalho com um Apêndice, no qual listamos algumas desigualdades, bem como alguns resultados importantes envolvendo as teorias de Integral de Lebesgue, Distribuições, Espaços de Sobolev e Operadores Diferenciáveis. Além disso, exploramos certos resultados de Análise Funcional, o Princípio do Máximo Forte, propriedades do 1º autovalor do operador $-\Delta$, além de um destaque especial aos imprescendíveis Princípio Variacional de Ekeland e Teorema do Passo da Montanha.

Capítulo 1

Introdução aos métodos variacionais

1.1 Introdução

Apresentaremos nesta seção o problema, para o qual provaremos a existência e multiplicidade de soluções. No decorrer deste trabalho, consideremos a norma de $H_0^1(\Omega)$ denotada por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

e usaremos $\|\cdot\|_p$ para denotar a norma usual de $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$.

Consideremos o seguinte problema elítico semilinear

$$(P_{h,f}) \quad \begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem as condições:
$(h1)$ $h \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) \not\equiv 0$;
$(f1)$ $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$; $f(x,0) \equiv 0$; $f(x,s) \gneq 0$ $\forall s \geq 0, x \in \Omega$;
$(f2)$ $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0, \lambda_1)$; $\displaystyle\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} = \xi \in (\lambda_1, +\infty)$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω, isto é,

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}; u \in H_0^1(\Omega), u \not\equiv 0 \right\}.$$

Quando $\xi = \infty$, vamos supor $f(x,s)$ de crescimento subcrítico, ou seja,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = 0,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, onde k é uma constante tal que $k \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$ ou $k \in (1, \infty)$ se $N \geq 1, 2$.

1.2 Resultados preliminares

Começamos esta seção destacando uma notação muito utilizada nas nossas demonstrações, quando trabalhamos com quantidades infinitesimais. A notação de Bachman-Landau, $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_o$, será utilizada para designar que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Os métodos variacionais, são muito utilizados para resolver equações diferenciais parcias elíticas semilineares e também quasilineares. A ideia principal destes métodos é relacionar a existência de solução de uma equação à existência de um ponto crítico de um funcional associado a equação.

Se multiplicarmos a equação em $(P_{h,f})$ por uma função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e depois integrarmos por partes, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega h(x) u^q \varphi \, dx + \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.1 *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva (não negativa) para o problema $(P_{h,f})$ se $u > 0$ ($u \geq 0$) em Ω satisfaz a equação (1.1) para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Como queremos obter soluções fracas não negativas, associamos ao problema $(P_{h,f})$ o funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x) u_+^{q+1} \, dx - \int_\Omega F(x, u_+) \, dx, \tag{1.2}$$

onde $F(x,u) = \int_o^u f(x,s) \, ds$.

A partir das hipóteses $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$, mostramos (confira o Lema A.2) que o funcional $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e tem derivada $I'(u)$ em cada $u \in H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h(x) u_+^q \varphi \, dx - \int_\Omega f(x, u_+)\varphi \, dx, \tag{1.3}$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2 *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional I se $I'(u) = 0$ em $H_0^{-1}(\Omega)$, isto é, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale $\langle I'(u), \varphi\rangle = 0$.*

Podemos assim concluir que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico do funcional I se, e somente se, u_0 é uma solução fraca do problema $(P_{h,f})$. De fato, se u_0 é ponto crítico do funcional I, então pela Definição 1.2 temos para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\langle I'(u_0), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega h(x) u_{0+}^q \varphi \, dx - \int_\Omega f(x, u_{0+})\varphi \, dx = 0,$$

o que implica que

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega h(x) u_{0_+}^q \varphi \, dx + \int_\Omega f(x, u_{0_+})\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

e assim u_0 é solução fraca do problema $(P_{h,f})$. Reciprocamente, se u_0 é solução fraca do problema $(P_{h,f})$ então para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega h(x) u_{0+}^q \varphi \, dx + \int_\Omega f(x, u_{0+})\varphi \, dx,$$

e portanto $\langle I'(u_0), \varphi\rangle = 0$.

Para encerrar nossas considerações sobre a teoria dos métodos variacionais, enunciamos dois conceitos muito importantes para o nosso trabalho:

Definição 1.3 *Seja $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que o funcional I satisfaz a condição de:*
(i) *Palais-Smale no nível c (denotada por $(PS)_c$), se toda sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_n) = c + o(1)$ e $I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$, admite uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$;*
(ii) *Cerami no nível c (denotada por $(Ce)_c$), se toda sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_n) = c + o(1)$ e $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$, admite uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$.*

Observação 1.1 ***(i)*** *No caso em que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfaz as condições (i) ou (ii) da definição anterior, dizemos que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ ou uma sequência $(Ce)_c$ respectivamente. Em ambos os casos, o valor c é dito nível de energia do funcional I.*
(ii) *Toda sequência $(Ce)_c$ para o funcional I é também uma sequência $(PS)_c$ para o mesmo funcional.*
De fato, consideremos uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, tal que (u_n) é uma sequência $(Ce)_c$ para o funcional I. Logo, por definição (u_n) admite subsequência convergente e satisfaz $I(u_n) = c + o(1)$ e $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$. Resta mostrar que $I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$. Caso (u_n) seja limitada, então pelo fato de que $(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$, obtemos $\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$. Por outro lado, se (u_n) não é limitada, se supormos, por absurdo, que $\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \neq o(1)$, segue que $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \neq o(1)$, o

que contradiz a hipótese de (u_n) *ser uma sequência* $(Ce)_c$ *para o funcional* I*. Portanto,* $\|I'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$ *o que mostra que* (u_n) *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*.*
(iii) *Segue imediatamente da definição que se* (u_n) *é uma sequência* $(Ce)_c$ *para o funcional* I*, então para cada* $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\ dx - \int_\Omega F(x,u_{n+})\ dx = c + o(1), \tag{1.4}$$

$$\langle I'(u_n),\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi\ dx - \int_\Omega h(x)u_{n+}^{q}\varphi\ dx - \int_\Omega f(x,u_{n+})\varphi\ dx = o(1), \tag{1.5}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle = \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\ dx - \int_\Omega f(x,u_{n+})u_n\ dx = o(1). \tag{1.6}$$

(iv) *Se* (u_n) *é uma sequência* $(Ce)_c$ *limitada para o funcional* I*, então* (u_{n+}) *também é uma sequência* $(Ce)_c$ *para o funcional* I*.*
Com efeito, sendo $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *limitada, o mesmo ocorre com* (u_{n+}) *e* (u_{n-}) *em* $H_0^1(\Omega)$*. Além disso, para* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$*, considerando* $\varphi = u_{n-}$ *na expressão (1.5), decorre que*

$$\langle I'(u_n),u_{n-}\rangle = \|u_{n-}\|^2 - \int_\Omega f(x,u_{n+})u_{n-}\ dx = o(1).$$

Porém, considerando os conjuntos $A = \{x \in \Omega; u_n(x) \geq 0\}$ *e* $B = \{x \in \Omega; u_n(x) < 0\}$ *temos pela hipótese* $(f1)$ *que*

$$\int_\Omega f(x,u_{n+})u_{n-}\ dx = \int_A f(x,u_{n+})u_{n-}\ dx + \int_B f(x,u_{n+})u_{n-}\ dx = 0,$$

e consequentemente

$$\|u_{n-}\|^2 = o(1). \tag{1.7}$$

Pela definição de I*:*

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\ dx - \int_\Omega F(x,u_{n+})\ dx,\\ I(u_{n+}) &= \frac{1}{2}\|u_{n+}\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\ dx, - \int_\Omega F(x,u_{n+})\ dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u_{n+}) &= I(u_n) + \frac{1}{2}\|u_{n+}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n\|^2\\ &= I(u_n) + \frac{1}{2}\|u_{n+}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_{n+} - u_{n-}\|^2\\ &= I(u_n) - \frac{1}{2}\|u_{n-}\|^2\\ &= c + o(1). \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}\langle I'(u_{n+}),\varphi\rangle &= \int_\Omega \nabla u_{n+}\nabla\varphi\, dx - \int_\Omega h(x)u_{n+}^q\varphi\, dx - \int_\Omega f(x,u_{n+})\varphi\, dx\\ &= \int_\Omega \nabla u_{n}\nabla\varphi\, dx - \int_\Omega h(x)u_{n+}^q\varphi\, dx - \int_\Omega f(x,u_{n+})\varphi\, dx + \int_\Omega \nabla u_{n-}\nabla\varphi\, dx\\ &= \langle I'(u_n),\varphi\rangle + \int_\Omega \nabla u_{n-}\nabla\varphi\, dx,\end{aligned}$$

o que implica pela igualdade (1.7) *que*

$$I'(u_{n+}) = o(1), \tag{1.8}$$

Pela identidade (1.8) *como* (u_{n+}) *é limitada, segue que* $(1+\|u_{n+}\|)\|I'(u_{n+})\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$, *e portanto* (u_{n+}) *é uma sequência* $(Ce)_c$ *para o funcional* I.
(v) *Se* (u_n) *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I, *então* (u_{n+}) *também é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I.
De fato, pode-se justificar que (u_n) *é limitada e assim este resultado é consequência da observação anterior.*

Lema 1.1 *Para qualquer* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, *seja* $T_\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$T_\varphi(v) = \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi\, dx.$$

Então $T_\varphi \in H_0^{-1}(\Omega)$.

Demonstração: A continuidade de T_φ é obtida diretamente do Lema A.2.
Para $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ decorre da leariedade da integral, da leariedade do gradiente e pelas propriedades de produto interno que

$$\begin{aligned}T_\varphi(v_1+\beta v_2) &= \int_\Omega \nabla(v_1+\beta v_2)\nabla\varphi\, dx\\ &= \int_\Omega (\nabla v_1+\beta\nabla v_2)\nabla\varphi\, dx\\ &= \int_\Omega \nabla v_1\nabla\varphi\, dx + \beta\int_\Omega \nabla v_2\nabla\varphi\, dx\\ &= T_\varphi(v_1)+\beta T_\varphi(v_2),\end{aligned}$$

o que conclui a justificativa.

■

Lema 1.2 *Suponhamos válidas as condições* $(h1)$, $(f1)$ *e* $(f2)$ *e que* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *é uma sequência* $(C_e)_c$ *limitada para o funcional* I. *Então* (u_n) *possui uma subsequência convergente em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo (confira o Teorema A.12), em virtude do Teorema A.2 e da Imersão Compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 2^*)$ (veja Teorema A.15), podemos supor que existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por (u_n), tal que

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \rightharpoonup & u & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ u_n & \to & u & \text{em} & L^p(\Omega), \\ u_n & \to & u & q.t.p. \text{ em} & \Omega. \end{array} \tag{1.9}$$

e pela Observação 1.1 $-$ (iv), podemos supor sem perda de generalidade que $u_n \geq 0$ e $u \geq 0$.

Como $(u_n - u) \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $T_\varphi \in H_0^{-1}(\Omega)$ (pelo Lema 1.1), decorre que $T_\varphi(u_n - u) \to 0$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla\varphi \, dx = 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A partir das convergências em (1.9) e do Teorema da Convergência Dominada (confira o Teorema A.5), resulta que

$$\int_\Omega h(x)[u_n^q - u^q]\varphi \, dx = o(1) \text{ e } \int_\Omega [f(x, u_n) - f(x, u)]\varphi \, dx = o(1).$$

Logo,

$$\langle I'(u_n) - I'(u), \varphi\rangle = o(1) \text{ em } H_0^{-1}(\Omega), \tag{1.10}$$

já que para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n) - I'(u), \varphi\rangle &= \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla\varphi \, dx - \int_\Omega h(x)[u_n^q - u^q]\varphi \, dx \\ &\quad - \int_\Omega [f(x, u_n) - f(x, u)]\varphi \, dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, considerando $\varphi = u_n$ na relação (1.10) obtemos que

$$\int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla u_n \, dx = o(1) \text{ em } H_0^{-1}(\Omega). \tag{1.11}$$

Por outro lado, tomando $\varphi = u$ na expressão (1.10) segue que

$$\int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla u \, dx = o(1) \text{ em } H_0^{-1}(\Omega). \tag{1.12}$$

Assim, somando as relações (1.11) e (1.12), podemos concluir que $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$ em $H_0^1(\Omega)$ e deste modo $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, u_n converge fortemente para u em $H_0^1(\Omega)$, o que finaliza a justificativa.

■

Observação 1.2 *Como toda sequência* $(C_e)_c$ *limitada para o funcional* I *é também uma sequência* $(PS)_c$ *limitada para o mesmo funcional, o Lema 1.2 é válido para sequências* $(PS)_c$*, ao invés de sequências* $(C_e)_c$.

Capítulo 2

O caso em que a função $f(x,s)$ é assintoticamente linear com relação a s no infinito

2.1 Introdução

Neste capítulo, trabalharemos o caso em que $f(x,s)$ é assintoticamente linear em relação a variável s no infinito. Inicialmente garantiremos, através do Princípio Variacional de Ekeland, a existência de pelo menos uma solução fraca não negativa para o problema $(P_{h,f})$, com nível de energia negativo. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Suponhamos que as condições $(f1)$ e $(f2)$ sejam válidas e também que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega h(x) v_+^{q+1}\, dx > 0. \tag{$h2$}$$

Então existe uma constante $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que para toda $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$ satisfazendo as hipóteses $(h1)$ e $(h2)$, o problema $(P_{h,f})$ tem uma solução $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, tal que $u_1 \geq 0$ e $I(u_1) < 0$. Além disso, se $h(x) \geq 0$, então $u_1 > 0$ q.t.p. em Ω.

Num segundo momento, através de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, demonstraremos a existência de uma solução fraca não negativa para o problema $(P_{h,f})$ diferente da obtida no resultado anterior. A seguir o nosso resultado a respeito da existência de soluções para o problema $(P_{h,f})$, com nível de energia positivo.

Teorema 2.2 *Suponhamos que as condições* $(f1)$ *e* $(f2)$ *sejam válidas. Então existe uma constante* $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que para toda* $h \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|h\|_\infty < \Lambda$ *satisfazendo a hipótese* $(h1)$*, o problema* $(P_{h,f})$ *tem uma solução não negativa* $u_2 \in H_0^1(\Omega)$*, com* $I(u_2) > 0$*. Além disso,* $u_2 > 0$ *q.t.p. em* Ω *se* $h(x) \geq 0$*.*

2.2 Resultados preliminares

Começamos esta seção obtendo alguns resultados auxiliares sobre as funções $f(x,s)$ e $F(x,s)$ baseados nas condições $(f1) - (f2)$.

Pela hipótese $(f2)$, temos $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu$ e assim dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $s \in \mathbb{R} \cap (0, \delta)$ vale $\left| \dfrac{f(x,s)}{s} - \mu \right| < \varepsilon$.

Mas, como $\left| \dfrac{f(x,s)}{s} \right| - |\mu| \leq \left| \dfrac{f(x,s)}{s} - \mu \right| < \varepsilon$, obtemos que

$$|f(x,s)| < (\mu + \varepsilon)s. \tag{2.1}$$

Por outro lado, de $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{f(x,s)}{s^k} = 0$, temos que existe $s_o \in \mathbb{R}$ tal que $\left| \dfrac{f(x,s)}{s^k} \right| < \varepsilon$, para todo $s \geq s_o$, e assim

$$|f(x,s)| < \varepsilon |s^k|, \text{ se } s \geq s_o. \tag{2.2}$$

Como pela condição $(f1)$, $f(x,s) \gneq 0$ para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$, segue das relações (2.1) e (2.2) que

$$f(x,s) \leq (\mu + \varepsilon)s + C_\varepsilon s^k,$$

onde $C_\varepsilon = C(\varepsilon, k, f, \Omega) > 0$. Integrando a desigualdade acima, segue que para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$

$$\int_o^s f(x,t)\, dt \leq \int_o^s (\mu + \varepsilon)t\, dt + C_\varepsilon \int_o^s t^k\, dt,$$

donde obtemos para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$ que

$$F(x,s) \leq \frac{(\mu + \varepsilon)}{2} s^2 + \frac{C_\varepsilon}{k+1} s^{k+1}, \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Como pela hipótese $(f2), \mu < \lambda_1$, podemos obter $\varepsilon_o > 0$ tal que

$$\mu + \varepsilon_o < \lambda_1, \tag{2.4}$$

e assim existe $C_o = C_o(k, \mu, f, \Omega) > 0$ tal que para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$

$$F(x,s) \leq \frac{(\mu + \varepsilon_o)}{2} s^2 + C_o s^{k+1}, \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Para finalizar, novamente pela condição $(f2)$ dado $\varepsilon > 0$, para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$ existe δ_0 tal que se $0 < s < \delta_0$ então

$$\frac{f(x,s)}{s} \geq \frac{\mu}{2}$$

e dessa forma $f(x,s) \geq \dfrac{\mu}{2}s$, Integrando a expressão na variável s, obtemos para cada $0 < s < \delta_0$ que

$$F(x,s) \geq \frac{\mu}{4}s^2. \tag{2.6}$$

O próximo lema, será essencial para garantirmos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, bem como para a demonstração da existência de uma solução através do Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 2.1 *Suponhamos que as as condições $(h1), (f1)$ e $(f2)$ sejam satisfeitas. Então existe uma constante $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que para qualquer $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$ temos que*

(i) *existem constantes $r > 0$ e $\alpha > 0$ tais que, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, com $\|u\| = r$*

$$I(u) \geq \alpha > 0;$$

(ii) *existe $e \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r$ tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração: *(i)* Notando que $h(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty$ e pela relação (2.5) segue que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_+^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2}\int_\Omega u^2\,dx - C_o\int_\Omega |u|^{k+1}\,dx. \end{aligned}$$

Pelas Imersões de Sobolev (veja Teorema A.14 e Teorema A.15), obtemos apartir da expressão acima que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q+1} - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2\lambda_1}\|u\|^2 - C_3\|u\|^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q+1} - C_3\|u\|^{k+1} \\ &= C_1\|u\|^2 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q+1} - C_3\|u\|^{k+1} \\ &= (C_1 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q-1} - C_3\|u\|^{k-1})\|u\|^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $C_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mu+\varepsilon_o}{2\lambda_1}\right) > 0, C_2 = C_2(q,N,\Omega) > 0$ e $C_3 = C_3(C_o,k,N,\Omega) > 0$.

Motivados por Gonçalves e Miyagaki [14] consideremos para cada $t \geq 0$ a função

$$Q(t) = C_2\|h\|_\infty t^{q-1} + C_3 t^{k-1}.$$

Logo,

$$Q'(t) = C_2(q-1)\|h\|_\infty t^{q-2} + C_3(k-1)t^{k-2},$$

donde fazendo $Q'(t_o) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} C_3(k-1)t_o^{k-2} &= C_2(1-q)\|h\|_\infty t_o^{q-2} \\ t_o^{k-q} &= \frac{C_2(1-q)}{C_3(k-1)}\|h\|_\infty \\ t_o &= \Big(C_4\|h\|_\infty\Big)^{\dfrac{1}{k-q}}, \end{aligned}$$

sendo $C_4 = \dfrac{C_2(1-q)}{C_3(k-1)}$.
Então,

$$\begin{aligned} Q(t_o) &= C_2\|h\|_\infty\Big(C_4\|h\|_\infty\Big)^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3\Big(C_4\|h\|_\infty\Big)^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= C_2 C_4^{\frac{q-1}{k-q}}\|h\|_\infty^{1+\frac{q-1}{k-q}} + C_3 C_4^{\frac{k-1}{k-q}}\|h\|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= \Big(C_2 C_4^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3 C_4^{\frac{k-1}{k-q}}\Big)\|h\|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= C_5\|h\|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}}, \end{aligned}$$

onde $C_5 = C_5(q, k, \mu, f, N, \Omega)$, e $\dfrac{k-1}{k-q} > 0$ pois, $0 < q < 1 < k$.
Assim, para qualquer $k > 1$ fixo, existe $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$ então $Q(t_o) < C_1$.

Portanto, se $\|h\|_\infty < \Lambda$ e escolhendo $r = t_o$, segue pela desigualdade (2.7) que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r$ e $\alpha = [C_1 - Q(t_o)]t_o^2 > 0$ que

$$I(u) \geq \alpha > 0,$$

o que justifica *(i)*.
(ii) A partir da condição $(f2)$, como $\lim\limits_{s\to\infty} s = \infty$, obtemos que $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s) = \infty$ e assim para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $s_1 \in \mathbb{R}, s_1 > 0$, tal que para todo $s > s_1$ temos $f(x,s) > \varepsilon$. Consequentemente,

$$\lim_{s\to\infty} F(x,s) = \lim_{s\to\infty}\int_o^s f(x,t)\, dt = \infty.$$

Utilizando a Regra de L'Hôspital, decorre da hipótese $(f2)$ que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \frac{\xi}{2},$$

ou seja, quando $s \to \infty$

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \to \frac{\xi}{2}, \qquad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Sendo $\lambda_1 < \xi < \infty$, para $s > 0,\ s > s_1$, podemos escolher $\tau > 0$ tal que

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \geq \frac{\xi - \tau}{2} > \frac{\lambda_1}{2}. \tag{2.8}$$

Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associda a λ_1. Para $t > 0$ suficientemente grande e notando que $0 < q < 1$ temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\|t\varphi_1\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(t\varphi_1)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,t\varphi_1)\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,t\varphi_1)\frac{t^2\varphi_1^2}{t^2\varphi_1^2}\, dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade (2.8) na expressão acima, decorre que

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx - \int_\Omega \frac{(\xi-\tau)t^2\varphi_1^2}{2}\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\left[\|\varphi_1\|^2 - \int_\Omega (\xi-\tau)\varphi_1^2\, dx\right] - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\left[\int_\Omega \lambda_1\varphi_1^2\, dx - \int_\Omega (\xi-\tau)\varphi_1^2\, dx\right] - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega [\lambda_1 - (\xi-\tau)]\varphi_1^2\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx \\ &= [\lambda_1 - (\xi-\tau)]\frac{t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\, dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela desigualdade (2.8) temos que $[\lambda_1 - (\xi - \tau)] < 0$ e como $t^2 > t^{q+1}$, quando $t \to \infty$ segue da desigualdade (2.9) que $I(t\varphi_1) < 0$. Logo, para $t_1 > 0$ suficientemente grande, escolhendo $e = t_1\varphi_1$ obtemos que existe $e \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r$ tal que $I(e) < 0$, concluindo a demonstração do Lema 2.1.

■

Apresentamos a seguir mais alguns fatos relevantes para o estudo do problema $(P_{h,f})$.

Seja (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$, tal que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}. \tag{2.10}$$

Claramente, w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 1$. Logo podemos supor, a menos de subsequência, que existe $w \in H_0^1(\Omega)$ onde

$$\begin{array}{cccll} w_n & \rightharpoonup & w & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ w_n & \to & w & \text{em} & L^p(\Omega), \\ w_n & \to & w & q.t.p. \text{ em} & \Omega, \end{array} \tag{2.11}$$

para cada $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$.
Analogamente, se considerarmos

$$w_{n+} = \frac{u_{n+}}{\|u_n\|}, \tag{2.12}$$

segue que

$$\begin{array}{cccll} w_{n+} & \rightharpoonup & w_+ & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ w_{n+} & \to & w_+ & \text{em} & L^p(\Omega), \\ w_{n+} & \to & w_+ & q.t.p. \text{ em} & \Omega, \end{array} \tag{2.13}$$

para todo $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$.

Lema 2.2 *Suponhamos válidas as hipóteses $(h1)$, $(f1)$, $(f2)$ e $(h2)$. Sejam (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$, tal que $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$, w_n e w dadas por (2.10) e (2.11) respectivamente. Então:*

(i) *$w \not\equiv 0$ em Ω;*
(ii) *$w(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração: *(i)* Suponhamos, por absurdo, que $w \equiv 0$. Então pela hipótese $(f1)$, pelas convergências em (2.13) e pelo Teorema da Convergência Dominada (veja o Teorema A.5), teríamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x, w_{n+})\, dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, w_{n+}) w_n\, dx.$$

Multiplicando a relação (1.6) por $\dfrac{1}{\|u_n\|^2}$ e utilizando a definição de w_n segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u_n\|^2}\|u_n\|^2\, dx - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega f(x, u_{n+}) u_n\, dx &= \frac{1}{\|u_n\|^2} o(1) \\ \|w_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega \frac{f(x, u_{n+})}{\|u_n\|^2} u_n\, dx &= o(1) \\ \|w_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega p(x, u_n) w_{n+}^2\, dx &= o(1), \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde

$$p(x,s) = \begin{cases} \dfrac{f(x,s_+)}{s_+} & \text{se} \quad s > 0, \\ 0 & \text{se} \quad s \leq 0. \end{cases}$$

Observemos que $p(x,s) = p(x,s_+) \geq 0$. Além disso, segue pelas condições $(f1)$ e $(f2)$ que existe $M > 0$ tal que para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ vale

$$\left| \frac{f(x,s_+)}{s_+} \right| \leq M,$$

e consequentemente,

$$|p(x,s)| \leq M, \ \forall \ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Como $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$, temos pela identidade (2.14) que

$$\|w_n\|^2 - \int_\Omega p(x,u_n) w_{n+}^2 \, dx = o(1),$$

mas as relações (2.13) e (2.15) implicam que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega p(x,u_n) w_{n+}^2 \, dx \right| &\leq \int_\Omega |p(x,u_n)| w_{n+}^2 \, dx \\ &\leq M \int_\Omega w_{n+}^2 \, dx = o(1). \end{aligned}$$

Assim, $\|w_n\|^2 = o(1)$, o que contradiz o fato de $\|w_n\| = 1$. Portanto, $w \not\equiv 0$.
(ii) Multiplicando a relação (1.5) por $\dfrac{1}{\|u_n\|}$ e aplicando o mesmo raciocínio utilizado para obter a expressão (2.14), temos para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \varphi \, dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x) w_{n+}^q \varphi \, dx - \int_\Omega p(x,u_{n+}) w_n \varphi \, dx = o(1) \tag{2.16}$$

Pela estimativa (2.15), existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que $p(x,u_n) \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega)$ e $0 \leq v(x) \leq M$ *q.t.p.* em Ω. Combinando isto com as convergências em (2.13), podemos inferir para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega p(x,u_n) w_{n+} \varphi \, dx = \int_\Omega v(x) w_+ \varphi \, dx + o(1),$$

o que juntamente com a relação (2.16) resulta, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega v(x) w_+ \varphi \, dx. \tag{2.17}$$

Considerando $\varphi = w_-$ na expressão anterior, obtemos que

$$\|w_-\|^2 = \int_\Omega |\nabla w_-|^2 \, dx = \int_\Omega v(x) w_+ w_- \, dx = 0.$$

Portanto $w_- = 0$ $q.t.p.$ em Ω e assim $w \equiv w_+ \geq 0$ $q.t.p.$ em Ω.

■

2.3 Existência de uma solução

Similarmente a Li e Zhou [16] , para $r > 0$ dado pelo Lema 2.1, definimos

$$\overline{B}_r = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq r\}, \; \partial B_r = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = r\},$$

e para $u, v \in \overline{B}_r$

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Como $\overline{B}_r$ é um conjunto fechado em $(H_0^1(\Omega), \| \cdot \|)$ que é um espaço de Banach, decorre que $(\overline{B}_r, d)$ é um espaço métrico completo.

Pelo Lema 2.1, temos que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \; \forall u \in \partial B_r. \tag{2.18}$$

Ainda, note que I é semicontínua inferiormente em $\overline{B}_r$, pois $I \in C^1(\overline{B}_r, \mathbb{R})$. Logo está bem definido o valor

$$c_1 = \inf\{I(u) : u \in \overline{B}_r\}. \tag{2.19}$$

Dado $h \in L^\infty(\Omega)$, consideremos $v \in C_c^\infty(\Omega)$ dada pela hipótese $(h2)$, ou seja, $v \in H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$\int_\Omega h(x) v_+^{q+1} \, dx > 0.$$

Então para $t > 0$ suficientemente pequeno, segue em virtude da relação (2.6) que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{2}\|tv\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(tv_+)^{q+1} \, dx - \int_\Omega F(x, tv_+) \, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x) v_+^{q+1} \, dx - \int_\Omega F(x, tv_+) \, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x) v_+^{q+1} \, dx - \frac{\mu}{4}t^2 \int_\Omega v_+^2 \, dx. \end{aligned}$$

Logo para $t \to 0^+$, obtemos $I(tv) < 0$, já que $t^{q+1} > t^2$ e $\int_\Omega h(x) v_+^{q+1} \, dx > 0$. Mas para t

suficientemente pequeno $tv \in \overline{B}_r$, o que implica pela definição de c_1 que

$$c_1 \leq I(tv) < 0,$$

e portanto $c_1 < 0$. Pelo Princípio Variacional de Ekeland (confira o Teorema A.18) vemos que para qualquer inteiro $n > 0$, existe $u_n \in \overline{B}_r$ tal que

$$c_1 \leq I(u_n) \leq c_1 + \frac{1}{n}, \tag{2.20}$$

e

$$I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|, \tag{2.21}$$

para todo $w \in \overline{B}_r$.

Afirmação 2.1 *Para $n \geq 1$ suficientemente grande, vale $\|u_n\| < r$.*

Com efeito, suponhamos por absurdo que $\|u_n\| = r$ para infinitos valores de n. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\|u_n\| \geq r$, $\forall n \geq 1$. Pela relação (2.18) temos $I(u_n) \geq \alpha > 0$ e fazendo $n \to \infty$ na expressão (2.20) obtemos que $c_1 > 0$, o que é uma contradição. Portanto $(u_n) \subset B_r$.

Afirmação 2.2 *$I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$.*

De fato, para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$ seja $w_n = u_n + tu$, onde $t \neq 0$. Assim para qualquer $n \geq 1$ fixo, temos para t suficientemente pequeno, próximo de zero, que

$$\|w_n\| = \|u_n + tu\| \leq \|u_n\| + |t| < r.$$

Logo da relação (2.21) segue que

$$I(w_n) = I(u_n + tu) \geq I(u_n) - \frac{|t|}{n}\|u\|,$$

o que implica

$$\frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{|t|} \geq -\frac{1}{n}\|u\| = -\frac{1}{n}.$$

Por conseguinte,

$$\langle I'(u_n), u\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n},$$

e

$$\langle I'(u_n), u\rangle = \lim_{t\to 0^-} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \leq \frac{1}{n}$$

o que nos permite concluir que

$$|\langle I'(u_n), u\rangle| \leq \frac{1}{n},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$. Portanto, $I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$.

Decorre da afirmação anterior e da expressão (2.20) que (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional I. Já da Afirmação 2.1, temos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo em virtude do Lema 1.2 existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, u_n converge fortemente para u_1 em $H_0^1(\Omega)$, e pela Observação 1.1-(v) $u_n \geq 0$ e $u_1 \geq 0$.

Pela continuidade do funcional I, segue que $I(u_1) = c_1 < 0$ e pela continuidade da derivada I' temos $I'(u_1) = 0$, isto é, u_1 é um ponto crítico do funcional I e consequentemente uma solução fraca do problema $(P_{h,f})$.

Considerando $h(x) \geq 0$, obtemos

$$\Delta u_1 = -(h(x)u_1^q + f(x, u_1)) \leq 0.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Forte (confira o Teorema A.17) existem duas possibilidades, ou $u_1 > 0$ em Ω ou $u_1 \equiv 0$ $q.t.p.$ em Ω. Entretanto, como $I(u_1) = c_1 < 0$ e $I(0) = 0$, segue que $u_1 > 0$ em Ω, o que prova o Teorema 2.1.

■

2.4 Existência da segunda solução

Já possuímos os argumentos necessários para demonstrar o segundo resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.2: Sejam r, α, e e Λ dados no Lema 2.1. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha (veja o Teorema A.20), com $X = H_0^1(\Omega)$ e $\varphi = I$ temos que para

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0,$$

existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que (u_n) é uma sequência $(Ce)_c$ para o funcional I.

Mostremos que a sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Suponhamos que isso não ocorra, isto é, $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Definindo w_n e w_{n+} pelas identidades (2.10) e (2.12) respectivamente, obtemos que as relações (2.11) e (2.13) permanecem válidas.

Assim, pelo Lema 2.2, temos que $w(x) \geq 0$ $q.t.p.$ em Ω, o que implica pela relação (2.17) que $w \geq 0$ é solução fraca do problema

$$-\Delta w = v(x)w_+.$$

Como $v \geq 0$ então $-\Delta w = v(x)w_+ \geq 0$ e de forma análoga ao que foi feito na prova do Teorema 2.1, temos pelo Princípio do Máximo Forte (confira o Teorema A.17) que $w(x) > 0$ $q.t.p.$ em Ω.

Agora, pela convergência dada em (2.13) segue que:

$$w_n(x) = \frac{u_n}{\|u_n\|} \to w(x) > 0 \ q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Mas por hipótese, assumimos que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$, o que implica pela expressão acima que $u_n \to \infty \ \ q.t.p.$ em Ω. Assim, pela definição da função $p(x,s)$ e pela hipótese $(f2)$, segue que

$$p(x, u_{n+}) = \frac{f(x, u_{n+})}{u_{n+}} = \xi + o(1).$$

Por sua vez, como $p(x, u_n) \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega)$, segue pela unicidade do limite, que $v(x) = \xi$ e assim pela expressão (2.17), obtemos

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \ dx = \int_\Omega \xi w_+ \varphi \ dx = \xi \int_\Omega w\varphi \ dx,$$

ou seja, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $w(x) > 0$ satisfaz a identidade

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \ dx = \xi \int_\Omega w\varphi \ dx.$$

Logo, pela igualdade anterior, temos que ξ é autovalor de $-\Delta$ em Ω com autofunção $w > 0$. Entretanto, λ_1 é o único autovalor de $-\Delta$ que possui autofunções que não mudam de sinal em Ω (veja o Teorema A.21). Assim $\xi = \lambda_1$ o que é uma contradição, pois por hipótese $\xi > \lambda_1$.

Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, pelo Lema 1.2 existe $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$, com $u_n \geq 0$ e $u_2 \geq 0$. Uma vez que o funcional $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, segue que $I(u_2) = c > 0$ e $I'(u_2) = 0$. Portanto u_2 é solução fraca não negativa do problema $(P_{h,f})$, com nível de energia positivo. Sendo $h(x) \geq 0$, da mesma forma que na demonstração do Teorema 2.1 obtemos $\Delta u_2 \leq 0$ e assim, pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema A.17), $u_2 > 0 \ q.t.p.$ em Ω, o que conclui a demonstração.

∎

Observação 2.1 *Para finalizar o estudo do caso em que $\xi \in (\lambda_1, \infty)$, sob as hipóteses do Teorema 2.2, obtemos que para $h(x) \geq 0$, existe $\Lambda > 0$ tal que para toda $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$, o problema $(P_{h,f})$ tem uma solução positiva u_2 com $I(u_2) = c > 0$, enquanto que pelo Teorema 2.1 encontramos $u_1 > 0$ com $I(u_1) = c_1 < 0$ o que implica $u_1 \neq u_2$, e assim o problema tem ao menos duas soluções positivas.*

Capítulo 3

O caso em que a função $f(x, s)$ é superlinear com relação a s no infinito

3.1 Introdução

Trabalharemos no presente capítulo o caso em que a função $f(x, s)$ é superlinear com relação a variável s no infinito, isto é,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \xi = \infty,$$

uniformemente em $x \in \Omega$.

Como iremos aplicar o Teorema do Passo da Montanha, é de costume utilizar uma condição técnica introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [5], a qual exige a existência de algum $\theta > 2$ e $M > 0$, de modo que

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s, \text{ para todo } |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega. \tag{AR}$$

No entanto, no presente trabalho vamos supor algumas condições mais fracas, em certo sentido, que a condição (AR), como mostraremos nos exemplos a seguir.

Para qualquer $\sigma \in (0, 1)$ e $\tau > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\sigma > q + (1 + q)\tau$, consideremos as seguintes condições sobre a função f :

$(f2)'$ $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \infty$ e $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\tau}} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$;

(fF) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} = \eta \in (0, \infty]$, uniformemente em $x \in \Omega$;

$(f3)$ $\displaystyle\frac{f(x,s)}{s}$ é não decrescente em $s > 0$.

Observação 3.1 ***(i)*** *Se $\xi < \infty$ na hipótese $(f2)$, então a condição (AR) não é satisfeita; Com efeito, se fosse válida a condição (AR), então existiriam $\theta > 2$ e $M > 0$, tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s, \text{ para todo } |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Isto implica que

$$0 < \theta \frac{F(x,s)}{s^2} \leq \frac{f(x,s)}{s}, \text{ para todo } |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Fazendo $s \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos que

$$0 \leq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\xi \leq 0,$$

o que é uma contradição pois $\theta > 2$ e $\xi > 0$.
Portanto (AR) não é satisfeita, quando $\xi < \infty$.
(ii) *Se a condição (AR) é satisfeita, então $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\theta'}} \neq 0$, para $\theta' > 0$.*
De fato, como vale a condição (AR), então para algum $\theta' > 0$ e $M > 0$,

$$0 < (2+\theta')F(x,s) \leq f(x,s)s, \text{ para todo } |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega,$$

e assim

$$0 < \frac{F(x,s)}{s^{2+\theta'}}(2+\theta') \leq \frac{f(x,s)}{s^{1+\theta'}}, \ \forall \ s > 0.$$

Mas $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^{2+\theta'}}(2+\theta') = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\theta'}}$. Logo para s suficientemente grande, temos que

$$F(x,s) = \frac{f(x,s)}{2+\theta'}s$$

e consequentemente

$$f(x,s) = k(x)s^{1+\theta'} > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\theta'}} \neq 0.$$

Terminadas estas considerações, daremos dois exemplos onde as nossas condições $(f1), (f2), (f3), (f2)'$ e (fF) são satisfeitas, entretanto a condição (AR) não o é.

Exemplo 1 *Para $\rho > 0$ e $0 < \lambda_1 < \xi < \infty$, consideremos*

$$f(x,s) \equiv f(s) = \begin{cases} \dfrac{\xi s^{\rho+1}}{1+s^\rho} & se \quad s \geq 0, \\ 0 & se \quad s \leq 0. \end{cases}$$

As hipóteses $(f1)-(f2)$, são facilmente verificadas, com

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{f(x,s)}{s}=0 \text{ e } \lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s}=\xi<\infty.$$

Além disso, para $0<s_1<s_2$:

$$\frac{f(x,s_2)}{s_2}-\frac{f(x,s_1)}{s_1}=\frac{\xi(s_2^\rho-s_1^\rho)}{(1+s_2^\rho)(1+s_1^\rho)}>0,$$

o que garante a condição $(f3)$. Quanto a hipótese (fF), podemos garantir a sua validade para $\rho\in(0,1-\sigma)$, já que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} &= \lim_{s\to\infty}\frac{\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}s-f(x,s)}{(1+\sigma)s^\sigma}\\ &= \frac{\xi\rho}{2(1+\sigma)}\lim_{s\to\infty}s^{(1-\sigma)-\rho}\\ &= \infty.\end{aligned}$$

Sendo $\xi<\infty$ na hipótese $(f2)$, decorre da Observação 3.1-(i) que a condição (AR) não é satisfeita.

Exemplo 2 *Consideremos a função*

$$f(x,s)\equiv f(s)=\begin{cases} s\ln(s+1) & se \quad s\geq 0,\\ 0 & se \quad s\leq 0.\end{cases}$$

Também aqui as hipóteses $(f1)-(f2)$ são facilmente verificadas, com

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{f(x,s)}{s}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s}=\infty.$$

Notemos que para $0<q<1$, $\sigma\in(0,1)$ e $\tau>0$ suficientemente pequeno de modo que $\sigma>q+(1+q)\tau$, obtemos $q<\sigma$ e $0<\tau<1$, e como consequência a condição $(f2)'$ pois,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s^{1+\tau}}=\frac{1}{1+\tau}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{1+\tau}+s^\tau}=0,$$

após aplicar a Regra de L'Hôspital.
Além disso,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} &= \lim_{s\to\infty}\frac{\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}s-f(x,s)}{(1+\sigma)s^\sigma}\\ &= \frac{1}{(1+\sigma)}\lim_{s\to\infty}s^{1-\sigma}\\ &= \infty,\end{aligned}$$

o que valida a hipótese (fF).
Por sua vez, a condição (AR) não é satisfeita, pois $\lim_{s\to\infty} \dfrac{1}{s^{1+\tau}+s^{\tau}} = 0$ (veja Observação 3.1-(ii)).

Apresentamos agora o primeiro resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.1 *Suponhamos que as condições* $(h1), (f1)$ *e* $(f2)$ *com* $\xi = \infty$ *sejam satisfeitas. Se* $h(x) \lneqq 0$ *e a hipótese* $(f3)$ *for válida, então o problema* $(P_{h,f})$ *tem pelo menos uma solução não negativa.*

Por outro lado, com o acréscimo e mudança de algumas hipóteses, temos o seguinte resultado de multiplicidade de soluções não negativas:

Teorema 3.2 *Suponhamos que as condições* $(h1), (f1)$ *e* $(f2)$ *com* $\xi = \infty$ *sejam válidas. Além disso, suponhamos que a condição* $(h2)$ *é satisfeita e que existem* $\sigma \in (0,1)$ *e* $\tau > 0$*, suficientemente pequeno, de modo que* $\sigma > q + (1+q)\tau$ *e valem as condições* $(f2)'$ *e* (fF)*. Então o problema* $(P_{h,f})$ *tem duas soluções não negativas* u_2 *e* u_3 *em* $H_0^1(\Omega)$*, satisfazendo* $I(u_2) < 0 < I(u_3)$*. Além do mais,* u_2 *e* u_3 *são positivas se* $h(x) \geq 0$*.*

3.2 Resultados preliminares

Começamos esta seção, com um resultado auxiliar análogo ao Lema 2.1, porém para o caso em que $\xi = \infty$. Este lema nos auxiliará a garantir as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.1 *Suponhamos que as condições* $(h1), (f1)$ *e* $(f3)$ *sejam satisfeitas, assim como* $(f2)$ *com* $\xi = \infty$*. Então existe uma constante* $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que para qualquer* $h \in L^\infty(\Omega)$*, com* $\|h\|_\infty < \Lambda$ *temos que*

(i) *existem constantes* $r > 0$ *e* $\alpha > 0$ *tais que, para todo* $u \in H_0^1(\Omega)$ *com* $\|u\| = r$

$$I(u) \geq \alpha > 0;$$

(ii) *existe* $e \in H_0^1(\Omega)$ *com* $\|e\| > r$ *tal que* $I(e) < 0$*.*

Demonstração: *(i)* Por meio das hipóteses $(f1)$ e $(f2)$ com $\xi = \infty$, temos (confira na página 23) que existe $C_o = C_o(k, \mu, f, \Omega) > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{(\mu + \varepsilon_o)}{2} s^2 + C_o s^{k+1}, \quad \text{para todo } s \geq 0 \ \text{ e } \ x \in \Omega.$$

Assim de modo semelhante a demonstração do Lema 2.1-(i) podemos obter através da expressão anterior que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2}\int_\Omega u^2\,dx - C_o\int_\Omega |u|^{k+1}\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q+1} - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2\lambda_1}\|u\|^2 - C_3\|u\|^{k+1} \\ &= (C_1 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q-1} - C_3\|u\|^{k-1})\|u\|^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $C_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu+\varepsilon_o}{2\lambda_1}\right) > 0, C_2 = C_2(q,N,\Omega) > 0$ e $C_3 = C_3(C_o,k,N,\Omega) > 0$.

Considerando $Q(t) = C_2\|h\|_\infty t^{q-1} + C_3 t^{k-1}$, temos para $t_o = \left(C_4\|h\|_\infty\right)^{\frac{1}{k-q}}$ que $Q(t_o) = C_5\|h\|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}}$, onde $C_4 = \frac{C_2(1-q)}{C_3(k-1)}, C_5 = C_5(q,k,\mu,f,N,\Omega)$, e $\frac{k-1}{k-q} > 0$ pois, $0 < q < 1 < k$.
Assim, para cada $k > 1$, existe $\Lambda = \Lambda(\mu,q,f,N,\Omega) > 0$, tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$ então $Q(t_o) < C_1$.

Portanto, se $\|h\|_\infty < \Lambda$, escolhendo $r = t_o$, segue pela relação (3.1) que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r$ e $\alpha = [C_1 - Q(t_o)]t_o^2 > 0$ que

$$I(u) \geq \alpha > 0.$$

(ii) Uma vez que a λ_1-autofunção é contínua e positiva, existem $\Omega_o \subset \overline{\Omega_o} \subset\subset \Omega$ com $|\Omega_o| > 0$ e $\beta > 0$ tal que

$$\min_{\overline{\Omega_o}} \varphi_1(x) \geq \beta > 0. \tag{3.2}$$

Assim, se $t \to \infty$, obtemos $t\varphi_1(x) \to \infty$ uniformemente em Ω_o.

Considerando a função $G(x,t) = f(x,t)t - 2F(x,t)$, para todo $x \in \Omega$ e $t \geq 0$, segue da condição $(f3)$ que

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(x,t)}{t}\right) = \frac{\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}t - f(x,t)}{t^2} = \frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\frac{1}{t^2}.$$

Portanto, $G(x,t)$ é não decrescente para $t > 0$ e assim como $G(x,0) = 0$, obtemos que

$$0 \leq 2F(x,t) \leq f(x,t)t, \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0.$$

Por sua vez, decorre da desigualdade acima que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right) = \frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{t^3} \geq 0,$$

e por consequência,

$$\frac{F(x,t)}{t^2} \text{ é não decrescente para } t > 0.$$

Uma vez que supomos $\xi = \infty$ na hipótese $(f2)$, temos para qualquer $x \in \Omega_o$ e $t > 0$ que quando $t \to \infty$,

$$\frac{F(x,t)}{t^2} \to \infty, \text{ uniformemente em } x \in \Omega_o.$$

Consequentemente, pelas condições anteriores segue que

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geq \frac{F(x,t\beta)}{t^2\beta^2} \to \infty, \text{ uniformemente em } x \in \Omega_o.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\beta,\varepsilon) > 0$ tal que, para cada $t \geq \delta$ e $x \in \overline{\Omega_o}$

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geq \varepsilon > 0. \tag{3.3}$$

Portanto, se escolhermos $0 < \dfrac{1}{2|\Omega_o|}\left(\dfrac{\|\varphi_1\|}{\beta}\right)^2 < \varepsilon$ suficientemente grande, para $t > \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2}\varphi_1^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx - \int_{\Omega_o} \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2}\varphi_1^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \varepsilon\int_{\Omega_o}\varphi_1^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \varepsilon\beta^2|\Omega_o| \\
&< 0,
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade decorre da relação (3.3) e a desigualdade subsequente segue da estimativa (3.2). Logo para t_1, suficientemente grande, tomando $e = t_1\varphi_1$, vale $I(e) < 0$ com $\|e\| > r$.

■

Antes do próximo lema, consideremos o seguinte.

Observação 3.2 *Sob as hipóteses $(f1), (f2)$ e $(f3)$, fixado $s \geq 0$, para cada $t \geq 0$ definimos $g(t) = \frac{1}{2}t^2 f(x,s)s - F(x,ts)$, então*

$$g'(t) \geq 0 \text{ se } t \leq 1 \quad e \quad g'(t) \leq 0 \text{ se } t \geq 1.$$

De fato, temos que $g'(t) = f(x,s)ts - f(x,ts)s$. Logo, se $0 < t \leq 1$, então $ts \leq s$ o que implica pela condição $(f3)$ que $\dfrac{f(x,ts)}{ts} \leq \dfrac{f(x,s)}{s}$. Multiplicando a desigualdade anterior *por t, obtemos $f(x,s)ts - f(x,ts)s \geq 0$, como queríamos. Analogamente para $t \geq 1$. O caso em que $t = 0$ é trivial.*

O próximo resultado será essencial para a demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.2 *Suponhamos que as hipóteses $(f1), (f2)$ e $(f3)$ são válidas, $h(x) \leq 0$ e que existe uma sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle = o(1).$$

Então para qualquer $t > 0$, extraindo uma subsequência conveniente, temos que

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2+1}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{1+q}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + I(u_n).$$

Demonstração: Por hipótese, podemos assumir que existe uma subsequência, ainda denotada por u_n tal que para todo $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \langle I'(u_n), u_n \rangle \leq \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{n} \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega f(x, u_{n+}) u_n\, dx \leq \frac{1}{n},$$

$$-\frac{1}{n} + \int_\Omega f(x,u_{n+}) u_{n+}\, dx \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx \leq \frac{1}{n} + \int_\Omega f(x,u_{n+}) u_{n+}\, dx. \quad (3.4)$$

Pela definição do funcional I, para qualquer $t > 0$ temos

$$I(tu_n) = \frac{t^2}{2}\|u_n\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, tu_{n+})\, dx$$

Utilizando as estimativas (3.4), segue que

$$\begin{aligned} I(tu_n) \leq\ & \frac{t^2}{2}\left[\frac{1}{n} + \int_\Omega f(x,u_{n+})u_{n+}\, dx + \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx\right] - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx \\ & - \int_\Omega F(x, tu_{n+})\, dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1} dx + \int_\Omega \left[\frac{t^2}{2} f(x,u_{n+})u_{n+} - F(x,tu_{n+})\right] dx. \quad (3.5)$$

Fixado $s \geq 0$, para cada $t \geq 0$ definimos $g(t) = \frac{1}{2}t^2 f(x,s)s - F(x,ts)$. Em virtude da Observação 3.2 temos que $t = 1$ é um máximo global de $g(t)$, ou seja, $g(t) \leq g(1)$, para todo $t > 0$. Dessa forma, pela relação (3.5), concluímos que

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x,u_{n+})u_{n+} - F(x,u_{n+})\right] dx. \tag{3.6}$$

Por outro lado, inicialmente através da desigualdade (3.4) e após pelo fato de que $h(x) \leq 0$, segue que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,u_{n+})\, dx \\ &\geq -\frac{1}{2n} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x,u_{n+})u_{n+} - F(x,u_{n+})\right] dx \\ &\geq -\frac{1}{2n} + \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x,u_{n+})u_{n+} - F(x,u_{n+})\right] dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Combinando as relações (3.6) e (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} I(tu_n) &\leq \frac{t^2}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x,u_{n+})u_{n+} - F(x,u_{n+})\right] dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + \frac{1}{2n} + I(u_n) \\ &\leq \frac{t^2+1}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx + I(u_n), \end{aligned}$$

o que conclui a nossa justificativa.

∎

3.3 Multiplicidade de soluções

Tendo de posse os Lemas 3.1 e 3.2, estamos preparados para realizar a demonstração dos resultados essenciais deste capítulo. Começamos pela justificativa do Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Sejam r, α e e, dados pelo Lema 3.1. Temos pelo Teorema do Passo da Montanha (confira o Teorema A.20) que existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que (u_n) é uma sequência $(Ce)_c$ para o funcional I, onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0.$$

Logo, pela Observação 1.1-(iii), são satisfeitas as seguintes relações, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,u_{n+})\, dx = c + o(1), \tag{3.8}$$

$$\langle I'(u_n), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega h(x) u_{n+}^q \varphi\, dx - \int_\Omega f(x, u_{n+})\varphi\, dx = o(1), \tag{3.9}$$

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega f(x, u_{n+}) u_n\, dx = o(1). \tag{3.10}$$

Mostremos então que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Para este propósito, argumentaremos por contradição.

Suponhamos que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \quad \text{e} \quad w_n = t_n u_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} u_n. \tag{3.11}$$

Claramente w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 2\sqrt{c} < \infty$. Extraindo uma subsequência, se necessário, podemos supor para cada $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$ que

$$\begin{array}{ccccccccc}
w_n & \rightharpoonup & w, & w_{n+} & \rightharpoonup & w_+ & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\
w_n & \to & w, & w_{n+} & \to & w_+ & \text{em} & L^p(\Omega), \\
w_n & \to & w, & w_{n+} & \to & w_+ & q.t.p. \text{ em} & \Omega.
\end{array} \tag{3.12}$$

Afirmação 3.1 *$w_+ \not\equiv 0$.*

Com efeito, supondo por absurdo, que $w_+ \equiv 0$, segue pelas convergências dadas em (3.12) que $w_{n+} \to 0$ em $L^2(\Omega)$, bem como $w_{n+} \to 0$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada (veja o Teorema A.5), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x, w_{n+}(x))\, dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I(w_n) &= \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, w_{n+})\, dx \\
&= \frac{1}{2}(2\sqrt{c})^2 + o(1) \\
&= 2c + o(1).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por outro lado, pela relação (3.11), segue que $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$ pois $\|u_n\| \to \infty$. Logo pelo Lema 3.2, obtemos que

$$\begin{aligned} I(w_n) &= I(t_n u_n) \\ &\le \frac{t_n^2+1}{2n} + \left[\frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^{q+1}}{1+q}\right]\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx + I(u_n) \\ &= \frac{t_n^2}{2n} + \frac{1}{2n} + \left[\frac{t_n^{1-q}}{2} - \frac{1}{1+q}\right]\int_\Omega h(x)w_{n+}^{q+1}\,dx + I(u_n) \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na expressão acima, segue que $I(w_n) \le c + o(1)$, o que contradiz (3.13), provando assim a Afirmação 3.1.

Por conseguinte, pela Afirmação 3.1, fica bem definida a seguinte divisão de Ω em duas partes, a saber

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; w_+(x) = 0\} \text{ e } \Omega_2 = \{x \in \Omega; w_+(x) > 0\}.$$

Combinando o fato de que $w_{n+} \to w_+$ *q.t.p.* em Ω com a expressão (3.11), podemos concluir que $u_{n+} \to \infty$ *q.t.p.* em Ω_2. Multiplicando a relação (3.9) por $\dfrac{1}{\|u_n\|}$ decorre que para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \varphi\,dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)w_{n+}^q \varphi\,dx - \int_\Omega p(x,u_{n+})w_{n+}\varphi\,dx = o(1),$$

onde $p(x,s) = \dfrac{f(x,s)}{s}\mathcal{X}_{(0,\infty)}(s)$, sendo $\mathcal{X}_{(0,\infty)}(s)$ a função característica do intervalo $(0,\infty)$. Escolhendo $\varphi = w_+$ na igualdade anterior temos que

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla w_+\,dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)w_{n+}^q w_+\,dx - \int_\Omega p(x,u_{n+})w_{n+}w_+\,dx = o(1) \qquad (3.14)$$

Fazendo $n \to \infty$ na identidade acima, obtemos pelo Lema de Fatou (confira o Teorema A.4) que

$$\begin{aligned} \|w_+\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f(x,u_{n+})}{u_{n+}}w_{n+}w_+\,dx \\ &\ge \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2} \frac{f(x,u_{n+})}{u_{n+}}w_{n+}w_+\,dx \\ &\ge \int_{\Omega_2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x,u_{n+})}{u_{n+}}w_{n+}\right]w_+\,dx. \end{aligned}$$

Mas $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(x,u_{n+})}{u_{n+}}w_{n+}\right] = \infty$ *q.t.p.* em Ω_2, o que nos permite concluir que $|\Omega_2| = 0$, pois já sabemos que $\|w_+\| < \infty$. Desse modo por $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ segue que $w_+ \equiv 0$ *q.t.p.* em Ω, o que é um absurdo, pois pela Afirmação 3.1, temos que $w_+ \not\equiv 0$. Logo (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Portanto $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência $(Ce)_c$ limitada para o funcional I. Sendo assim, através da Observação 1.1-(iv) podemos supor, sem perda de generalidade, que $u_n \geq 0$ e pelo Lema 1.2 temos que existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \geq 0$, tal que, a menos de subsequência, $u_n \to u_1$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo, como $I'(u_1) = 0$ temos que u_1 é solução fraca não negativa do problema $(P_{h,f})$, como queríamos.

■

Para finalizar este capítulo, procedemos a demonstração do Teorema 3.2. A existência da primeira solução u_2 com nível de energia negativo, será obtida de forma semelhante a feita no Teorema 2.1, enquanto que para a solução com nível de energia positivo u_3 utilizamos fortemente as hipóteses $(f2)'$ e (fF).

Demonstração do Teorema 3.2: Consideremos para $r > 0$, dado no Lema 3.1, a bola aberta

$$B_r = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| < r\}.$$

Equipado da métrica $d(u,v) = \|u - v\|$, o espaço métrico $(\overline{B}_r, d)$ é completo. Segue ainda do Lema 3.1 que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \ \forall u \in \partial B_r. \tag{3.15}$$

Pelo fato de que I é semicontínuo inferiormente em $\overline{B}_r$, podemos definir o valor

$$c_2 = \inf\{I(u) : u \in \overline{B}_r\}. \tag{3.16}$$

De forma análoga ao Teorema 2.1 mostramos agora, que $c_2 < 0$. Pela hipótese $(h2)$, existe $v \in C_c^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega h(x) v_+^{q+1}\, dx > 0$.
Assim sendo, pelo fato de que $F(x,s) \geq \dfrac{\mu}{2} s^2$, obtemos

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x) v_+^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, tv_+)\, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x) v_+^{q+1}\, dx - \frac{\mu}{4} t^2 \int_\Omega v_+^2\, dx. \end{aligned}$$

Logo quando $t \to 0^+$, podemos inferir através da desigualdade anterior que $I(tv) < 0$. Mas para t suficientemente pequeno temos $tv \in \overline{B}_r$, o que implica pela definição de c_2 que $c_2 < 0$.

Por meio do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema A.18), para todo $n > 0$, existe $u_n \in \overline{B}_r$ tal que para todo $w \in \overline{B}_r$

$$c_2 \leq I(u_n) \leq c_2 + \frac{1}{n}, \tag{3.17}$$

e

$$I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|. \tag{3.18}$$

Analogamente a Afirmação 2.1 (página 30) e a Afirmação 2.2 (página 30), obtemos para $n \geq 1$ que $\|u_n\| < r$ e $I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$. Sendo assim (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_2}$ limitada para o funcional I e pelo Lema 1.2, a menos de subsequência, existe $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$, com $u_n \geq 0$ e $u_2 \geq 0$ (vide Observação 1.1-(v)). Como consequência, temos $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_2) = c_2 < 0$ e através da continuidade de I' temos que u_2 é um ponto crítico do funcional I e deste modo uma solução fraca do problema $(P_{h,f})$. Pelo do Princípio do Máximo Forte, segue que $u_2 > 0$ $q.t.p$ em Ω. Provamos assim, a existência de uma solução fraca $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ com nível de energia negativo, como queríamos.

Agora, através do Teorema do Passo da Montanha mostremos que $(P_{h,f})$ tem uma solução u_3 com $I(u_3) > 0$. Semelhante ao Teorema 3.1, decorre do Lema 3.1 e do Teorema do Passo da Montanha (veja o Teorema A.20), que existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que (u_n) é uma sequência $(Ce)_{c_3}$ para o funcional I, onde

$$c_3 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0,$$

e também que para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, u_{n+})\, dx = c_3 + o(1), \tag{3.19}$$

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q} \varphi\, dx - \int_\Omega f(x, u_{n+})\varphi\, dx = o(1), \tag{3.20}$$

$$\|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1}\, dx - \int_\Omega f(x, u_{n+}) u_n\, dx = o(1). \tag{3.21}$$

Faremos agora várias estimativas (até a página 48) com o objetivo de provar que a sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada.

Pela condição $(f2)'$, temos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $t \geq \delta_1$ e quase todo $x \in \Omega$

$$f(x,t) < \varepsilon t^{1+\tau}. \tag{3.22}$$

Já por (fF), existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $t \geq \delta_2$ e quase todo $x \in \Omega$

$$f(x,t)t - 2F(x,t) \geq \frac{\eta}{2} t^{1+\sigma} > 0. \tag{3.23}$$

Considerando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, para cada $n \geq 1$, definimos os conjuntos

$$A_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \geq \delta\} \text{ e } B_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \leq \delta\}.$$

Notemos agora que pelo fato de f ser contínua e $|B_n| < \infty$, existe alguma constante $K_o = K_o(\delta) > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_n} [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)] \, dx \right| &\leq \delta \int_{B_n} |f(x,u_n)u_n| \, dx + 2 \int_{B_n} |F(x,u_n)| \, dx \\ &\leq K_o, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-K_o \leq \int_{B_n} [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)] \, dx \leq K_o. \tag{3.24}$$

Além disso, decorre da relação (3.23) que se $x \in A_n$, então

$$f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n) \geq 0. \tag{3.25}$$

Agora pelas expressões (3.19) e (3.21), obtemos

$$\int_\Omega [f(x,u_{n+})u_{n+} - 2F(x,u_{n+})] \, dx = o(1) + 2c_3 + \left(\frac{2}{q+1} - 1 \right) \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1} \, dx.$$

Segue da igualdade anterior e das relações (3.23), (3.24) e (3.25) que

$$\begin{aligned} o(1) + 2c_3 + \left(\frac{2}{q+1} - 1 \right) \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1} \, dx &= \int_\Omega [f(x,u_{n+})u_{n+} - 2F(x,u_{n+})] \, dx \\ &\geq \int_{A_n} [f(x,u_{n+})u_{n+} - 2F(x,u_{n+})] \, dx - K_o \\ &\geq \int_{A_n} \frac{\eta}{2} \, u_{n+}^{1+\sigma} \, dx - K_o. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} \int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma} \, dx &\leq \left(\frac{2}{q+1} - 1 \right) \int_\Omega h(x) u_{n+}^{q+1} \, dx + K_o + 2c_3 + o(1) \\ &\leq \left(\frac{2}{q+1} - 1 \right) \|h\|_\infty \int_\Omega u_{n+}^{q+1} \, dx + K_o + 2c_3 + o(1) \\ &\leq \left(\frac{2}{q+1} - 1 \right) \|h\|_\infty C \|u_n\|^{q+1} + K_o + 2c_3 + o(1), \end{aligned}$$

esta última estimativa obtida, através da Imersão Compacta de Sobolev (confira o Teorema A.15). Sendo assim, existem constantes $K_1 = K_1(K_o, C, \eta) > 0$ e $K_2 = K_2(\eta, q, h)$, $K_2 > 0$, tais que

$$\int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma} \, dx \leq K_1 + K_2 \|u_n\|^{q+1} + o(1). \tag{3.26}$$

Por outro lado, como $q \in (0,1)$ e considerando $M = \dfrac{1+q}{q}$, $M > 2$, segue, pelas identidades (3.19) e (3.21) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[F(x,u_{n+}) - \frac{1}{M} f(x,u_{n+})u_{n+}\right] dx & \\
&= \int_\Omega F(x,u_{n+})\,dx - \frac{1}{M}\int_\Omega f(x,u_{n+})u_{n+}\,dx \\
&= \left(-\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\right)\|u_n\|^2 + \left(-\frac{1}{q+1}+\frac{1}{M}\right)\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx - c_3 + o(1) \\
&= \left(-\frac{q}{1+q}+\frac{1}{2}\right)\|u_n\|^2 + \left(-\frac{1}{q+1}+\frac{q}{1+q}\right)\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx - c_3 + o(1) \\
&= \frac{-q+1}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + \left(\frac{-1+q}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx - c_3 + o(1).
\end{aligned}$$

Se considerarmos $Q_1 = \dfrac{1-q}{2(1+q)}$ e $Q_2 = \dfrac{1-q}{(1+q)}$, segue pela igualdade acima que

$$Q_1\|u_n\|^2 - Q_2\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}dx - \int_\Omega \left[F(x,u_{n+}) - \frac{1}{M}f(x,u_{n+})u_{n+}\right]dx = c_3 + o(1). \quad (3.27)$$

Notemos também que de forma análoga a justificativa da relação (3.24), pela hipótese $(f1)$ e pela definição de B_n, existe $K_3 > 0$ tal que

$$-K_3 \le \int_{B_n}\left[F(x,u_{n+}) - \frac{1}{M}f(x,u_{n+})u_{n+}\right] dx \le K_3. \quad (3.28)$$

Então segue, respectivamente, pelas relações (3.27), (3.28) e (3.25) que

$$\begin{aligned}
Q_1\|u_n\|^2 &= o(1) + c_3 + \int_\Omega \left[F(x,u_{n+}) - \frac{1}{M}f(x,u_{n+})u_{n+}\right] dx + Q_2\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx \\
&\le o(1) + c_3 + K_3 + \int_{A_n}\left[F(x,u_{n+}) - \frac{q}{1+q}f(x,u_{n+})u_{n+}\right] dx \\
&\quad + Q_2\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx \\
&\le o(1) + c_3 + K_3 + \int_{A_n}\left[\frac{f(x,u_{n+})}{2}u_{n+} - \frac{q}{1+q}f(x,u_{n+})u_{n+}\right]dx \\
&\quad + Q_2\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}dx \\
&= o(1) + c_3 + K_3 + Q_1\int_{A_n} f(x,u_{n+})u_{n+}\,dx + Q_2\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx.
\end{aligned}$$

Utilizando as Imersões Compactas de Sobolev (veja o Teorema A.14) e a desigualdade

(3.22) com $\varepsilon = \dfrac{1}{Q_1} = \dfrac{2(1+q)}{1-q} > 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
Q_1\|u_n\|^2 &\leq o(1) + c_3 + K_3 + Q_1 \int_{A_n} f(x,u_{n+})u_{n+}\, dx + Q_2\|h\|_\infty \int_\Omega u_{n+}^{q+1}\, dx \\
&\leq o(1) + c_3 + K_3 + Q_1 \int_{A_n} f(x,u_{n+})u_{n+}\, dx + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \\
&\leq o(1) + c_3 + K_3 + Q_1 \int_{A_n} \frac{1}{Q_1} u_{n+}^{1+\tau} u_{n+}\, dx + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \\
&= o(1) + c_3 + K_3 + \int_{A_n} u_{n+}^{2+\tau}\, dx + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Observemos agora, que aplicando a desigualdade de Hölder (Teorema A.6) na integral $\int_{A_n} u_{n+}^{2+\tau}\, dx$ vem que

$$\int_{A_n} u_{n+}^{2+\tau}\, dx \leq \Big(\int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma}\, dx\Big)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}} \Big(\int_{A_n} u_{n+}^{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}\, dx\Big)^{\frac{\sigma-\tau}{\sigma+1}}. \qquad (3.30)$$

Combinando num primeiro momento as estimativas (3.29) e (3.30) e após a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$(com $p \in [1, 2^*)$), a desigualdade de Young (veja Teorema A.7) e finalmente a desigualdade (3.26), podemos inferir que

$$\begin{aligned}
Q_1\|u_n\|^2 &\leq o(1) + K_4 + \Big(\int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma}\, dx\Big)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}} \Big(\int_{A_n} u_{n+}^{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}\, dx\Big)^{\frac{\sigma-\tau}{\sigma+1}} + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \\
&\leq o(1) + K_4 + \Big(\int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma}\, dx\Big)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}} C'\|u_n\| + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \\
&\leq o(1) + K_4 + \frac{Q_1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{C'^2}{Q_2}\Big(\int_{A_n} u_{n+}^{1+\sigma}\, dx\Big)^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}} + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \\
&\leq K_4 + \frac{Q_1}{2}\|u_n\|^2 + K_q\big(K_2\|u_n\|^{q+1} + K_1\big)^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}} + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1},
\end{aligned}$$

onde as constantes $K_4 = c_3 + K_3$ e $K_q = \dfrac{C'^2}{Q_2}$.
Logo, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
Q_1\|u_n\|^2 \;\leq\; & K_4 + \frac{Q_1}{2}\|u_n\|^2 + K_q\big(K_2\|u_n\|^{q+1} + K_1\big)^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}} \\
& + Q_2 C\|h\|_\infty \|u_{n+}\|^{q+1} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Considerando $a = K_2\|u_n\|^{q+1}$, $b = K_1$ e $k = 2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}$ na desigualdade auxiliar (A.18) (confira o Apêndice), obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(K_2\|u_n\|^{q+1}+K_1\right)^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}} &\leq 2^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}-1}\left[K_2^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}}\left(\|u_n\|^{q+1}\right)^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}}+K_1^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}}\right] \\
&= K_5\|u_n\|^{2\frac{(1+q)(1+\tau)}{1+\sigma}}+K_6,
\end{aligned}
$$

sendo $K_5=2^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}-1}K_2^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}}$ e $K_6=2^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}-1}K_1^{2\frac{(1+\tau)}{1+\sigma}}$ constantes positivas.
Voltando na estimativa (3.31) obtemos que

$$
Q_1\|u_n\|^2 \leq K_4+\frac{Q_1}{2}\|u_n\|^2+K_qK_5\|u_n\|^{2\frac{(1+q)(1+\tau)}{1+\sigma}}+K_qK_6+Q_2C\|h\|_\infty\|u_{n+}\|^{q+1}
$$

e por conseguinte,

$$
\frac{Q_1}{2} \leq (K_4+K_qK_6)\|u_n\|^{-2}+K_qK_5\|u_n\|^{2\frac{(1+q)(1+\tau)}{1+\sigma}-2}+Q_2C\|h\|_\infty\|u_{n+}\|^{q-1}
$$

Estamos prontos agora para mostrar que u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Para este intuito, suponhamos que (u_n) é ilimitada e consideremos a seguinte função auxiliar para $t>0$

$$
p(t)=(K_4+K_qK_6)t^{-2}+K_qK_5t^{2\frac{(1+q)(1+\tau)}{1+\sigma}-2}+Q_2C\|h\|_\infty t^{q-1}.
$$

Como $q\in(0,1)$, $\dfrac{(1+q)(1+\tau)}{1+\sigma}<2$ segue que

$$
\lim_{t\to\infty}p(t)=0,
$$

o que implica que

$$
\frac{Q_1}{2}=\frac{1-q}{4(1+q)}\leq 0
$$

o que é uma contradição, pois $\dfrac{1-q}{4(1+q)}>0$. Logo (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Desta forma $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência $(Ce)_{c_3}$ limitada para o funcional I e pelo Lema 1.2, a menos de subsequência, existe $u_3\in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u_3$ em $H_0^1(\Omega)$, com $u_n\geq 0$ e $u_3\geq 0$ (vide Observação 1.1-(v)). Uma vez que $I\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ temos $I(u_3)=c_3>0$ e u_3 é um ponto crítico do funcional I e consequentemente, uma solução fraca do problema $(P_{h,f})$. Pelo do Princípio do Máximo Forte, segue que $u_3>0$ $q.t.p.$ em Ω. Provamos assim, a existência de uma solução fraca $u_3\in H_0^1(\Omega)$ com nível de energia positivo.

Portanto, obtemos duas soluções fracas positivas u_2 e u_3 em $H_0^1(\Omega)$ para o problema $(P_{h,f})$, com $I(u_2)<0<I(u_3)$, o que conclui a demostração.

■

Capítulo 4

O caso em que a função $f(x,s)$ é linear com relação a s no infinito

4.1 Introdução

Mostraremos agora que o nosso método também funciona para o problema $(P_{h,f})$ no caso em que $f(x,s) = \lambda s$, com $\lambda > 0$. Mais precisamente, estamos interessados em obter soluções fracas não triviais do seguinte problema

$$(P_{h,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + h(x)u^q, & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano ($\Delta u = div(\nabla u)$), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s) = \lambda s$ satisfazem condições apropriadas.

Da mesma forma que no Capítulo 1, já que utilizaremos métodos variacionais, associamos ao problema $(P_{h,\lambda})$ o seguinte funcional, definido em $H_0^1(\Omega)$:

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_+^{q+1}\, dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_+^2\, dx \tag{4.1}$$

Sabemos que um ponto crítico do funcional I é essencialmente uma solução fraca não negativa para o problema $(P_{h,\lambda})$. Pelo Lema A.2, temos que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com derivada $I'(u)$ em cada $u \in H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega h(x)u_+^q \varphi\, dx - \lambda \int_\Omega u_+ \varphi\, dx \tag{4.2}$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Os resultados de existência de solução para o problema $(P_{h,\lambda})$ podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 4.1 ***(i)*** *Se $h(x) \gneq 0$ e $h \in L^\infty(\Omega)$, então para cada $0 < \lambda < \lambda_1$ o problema $(P_{h,\lambda})$ tem ao menos uma solução positiva;*
(ii) *Se $h(x) \lneq 0$, $h \in L^p(\Omega)$ para algum $\frac{2^*}{2^*-1-q} \leq p \leq \infty$ e, além disso, existe $\delta > 0$ tal que $h(x) \leq -\delta$, então para $\lambda > \lambda_1$ o problema $(P_{h,\lambda})$ possui uma solução não negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ com $I(u) > 0$;*
(iii) *Se $h(x) \equiv 0$, então o problema $(P_{h,\lambda})$ admite solução positiva somente se $\lambda = \lambda_1$.*

Em contraste aos resultados de existência mencionados acima, provaremos também um resultado de não existência de soluções.

Teorema 4.2 ***(i)*** *Se $h(x) \gneq 0$, então para todo $\lambda \geq \lambda_1$ o problema $(P_{h,\lambda})$ não tem solução positiva;*
(ii) *Se $h(x) \lneq 0$, então para cada $0 < \lambda \leq \lambda_1$, o problema $(P_{h,\lambda})$ não admite solução positiva.*

4.2 Resultados preliminares

Os resultados auxiliares que demonstraremos nesta seção, são obtidos de forma similar aos apresentados no Capítulo 2. Prezando pela completude do nosso trabalho, apresentaremos de forma detalhada suas justificativas.

Lema 4.1 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1-(i) sejam válidas. Então existem constantes $r_1 > 0$ e $\alpha_1 > 0$ tais que, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r_1$ temos*

$$I(u) \geq \alpha_1 > 0.$$

Demonstração: De fato, segue pela definição do funcional I e pelas Imersões de Sobolev (Teoremas A.14 e A.15), que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_+^2\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}C_1\|u\|^{q+1} - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\right) - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}C_1\|u\|^{q-1}\right]\|u\|^2. \end{aligned}$$

Consideremos $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\right) - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}C_1 t^{q-1}.$$

Escolhendo $t_1 = \left[\dfrac{(\lambda - \lambda_1)(q+1)}{4\lambda_1 C_1 \|h\|_\infty}\right]^{\frac{1}{q-1}} > 0$, vemos que $g(t_1) > 0$ e consequentemente, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r_1 = t_1 > 0$, temos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda_1}\right) - \frac{\|h\|_\infty}{q+1} C_1 \|u\|^{q-1}\right]\|u\|^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda_1}\right) - \frac{\|h\|_\infty}{q+1} C_1 r_1^{q-1}\right] r_1^2 \\ &= g(r_1) r_1^2 \\ &\doteq \alpha_1 > 0, \end{aligned}$$

o que conclui a justificativa de nosso resultado.

■

O próximo lema, será utilizado para garantirmos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha bem como do Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 4.2 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1-(ii) sejam satisfeitas. Então*

(i) *existem constantes $r_2 > 0$ e $\alpha_2 > 0$ tais que, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r_2$ vale*

$$I(u) \geq \alpha_2 > 0;$$

(ii) *existe $e \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r_2$ tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração: *(i)* Uma vez que $q+1 < 2 < 2^*$ segue primeiramente da desigualdade de Interpolação (veja o Teorema A.8) e após pela desigualdade de Young (confira o Teorema A.7) que para todo $\varepsilon > 0$, com $a = \dfrac{2(2^*-q-1)}{(q+1)(2^*-2)}$ e $b = \dfrac{2(2^*-q-1)}{2(2^*-q-1)-(q+1)(2^*-2)}$ expoentes conjugados

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2\, dx &\leq \left(\int_\Omega u^{q+1}\, dx\right)^{\dfrac{1}{a}} \left(\int_\Omega u^{2^*}\, dx\right)^{\dfrac{1}{b}} \\ &= \left(\|u\|_{q+1}^{q+1}\right)^{\dfrac{1}{a}} \left(\|u\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\dfrac{1}{b}} \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{q+1}^{q+1} + \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{(a\varepsilon)^{b/a} b}. \end{aligned}$$

Logo, utilizando a desigualdade anterior e após a hipótese de que $\exists\ \delta > 0$ tal que $h(x) \leq -\delta$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_+^{q+1}\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_+^2\,dx\\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\delta}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\lambda}{2}\varepsilon\|u_+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{\lambda\|u_+\|_{2^*}^{2^*}}{2(a\varepsilon)^{b/a}b}\\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda\|u_+\|_{2^*}^{2^*}}{2\lambda^{-b/a}\left(\dfrac{2a\delta}{q+1}\right)^{b/a}b}\\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - 2\left(\frac{2a\delta}{q+1}\right)^{-b/a}\lambda^b b^{-1}\|u_+\|_{2^*}^{2^*},
\end{aligned}
$$

para $\varepsilon = \dfrac{2\delta}{\lambda(q+1)} > 0$.
Através das Imersões de Sobolev (veja o Teorema A.13), decorre que

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - 2\left(\frac{2a\delta}{q+1}\right)^{-b/a}\lambda^b b^{-1}S\|u\|^{2^*}\\
&= \left[\frac{1}{2} - C_2\|u\|^{2^*-2}\right]\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

onde $C_2 = 2\left(\dfrac{2a\delta}{q+1}\right)^{-b/a}\lambda^b b^{-1}S > 0$. Definindo a função auxiliar

$$
g(t) = \frac{1}{2} - C_2 t^{2^*-2},
$$

para $r_2 = \left(\dfrac{1}{4C_2}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} > 0$, obtemos $g(r_2) > 0$. Logo, elegendo $\alpha_2 = g(r_2)r_2^2 > 0$, segue para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r_2$ que

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \left[\frac{1}{2} - C_2\|u\|^{2^*-2}\right]\|u\|^2\\
&= \left[\frac{1}{2} - C_2 r_2^{2^*-2}\right]r_2^2\\
&= g(r_2)r_2^2\\
&= \alpha_2,
\end{aligned}
$$

o que conclui a verificação de *(i)*.
(ii) Como por hipótese $h \in L^p(\Omega)$ para algum $\frac{2^*}{2^*-1-q} \leq p \leq \infty$ e $q \in (0,1)$, segue para a λ_1-autofunção $\varphi_1 > 0$ que

$$
\left|\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx\right| < \infty
$$

e
$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx\right]=0.$$
Então, para $t>0$ obtemos pelas igualdades anteriores e pelo fato de que $\lambda>\lambda_1$ que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2-\lim_{t\to\infty}\frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega \varphi_1^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2-\frac{\lambda}{2\lambda_1}\int_\Omega \nabla\varphi_1^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\varphi_1\|^2\\
&< 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, existe $t_2>0$ tal que $\|t_2u\|>r_2$ e $I(t_2u)<0$. Escolhendo $e=t_2u>0$, concluímos a justificativa do resultado.

$\blacksquare$

4.3 Existência de soluções

Provaremos agora o Teorema 4.1. Sua verificação será semelhante a realizada no Teorema 2.1 e no Teorema 2.2, como já mencionamos anteriormente.

Demonstração do Teorema 4.1: *(i)* Consideremos $r_1>0$ dado pelo Lema 4.1 e definimos
$$B_{r_1}=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|<r_1\}.$$
Temos que $(\overline{B}_{r_1},d)$ equipado da métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$ de $H_0^1(\Omega)$ é um espaço métrico completo. Novamente pelo Lema 4.1 temos para cada $u\in\partial B_{r_1}$ que
$$I(u)\geq\alpha_1>0. \tag{4.3}$$
Sendo I semicontínuo inferiormente, podemos considerar o valor real
$$c_1=\inf\{I(u):u\in\overline{B}_{r_1}\}. \tag{4.4}$$

Mostremos que $c_1<0$. Fixado $v\in H_0^1(\Omega)$, uma vez que para $t>0$ suficientemente pequeno temos $tv\in\overline{B}_{r_1}$ e também que $I(tv)<0$ pois, $h\gneq 0$ e
$$I(tv)\;=\;\frac{t^2}{2}\|tv\|^2-\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v_+^{q+1}\,dx-\frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega v_+^2\,dx,$$
obtemos $c_1\leq I(tv)<0$ e consequentemente $c_1<0$.

Segue pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema A.18), que para todo inteiro $n>0$, existe $u_n\in\overline{B}_{r_1}$ tal que

$$c_1 \leq I(u_n) \leq c_1 + \frac{1}{n}, \tag{4.5}$$

e

$$I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\| \tag{4.6}$$

para todo $w \in \overline{B}_{r_1}$.

Afirmação 4.1 *Para $n \geq 1$, $(u_n) \subset B_{r_1}$.*

De fato, se fosse $\|u_n\| \geq r_1$, $\forall n \geq 1$, temos a partir da relação (4.3) que $I(u) \geq \alpha_1 > 0$ e fazendo $n \to \infty$ na expressão (4.5) obtemos $c_1 > 0$, o que é um absurdo.

Afirmação 4.2 *$I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$.*

Com efeito, para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$ seja $w_n = u_n + tu$, onde $t \neq 0$. Assim para qualquer $n \geq 1$ fixo, temos para t suficientemente pequeno, próximo de zero, que

$$\|w_n\| = \|u_n + tu\| \leq \|u_n\| + |t| < r.$$

A partir da desigualdade (4.6) segue que

$$I(w_n) = I(u_n + tu) \geq I(u_n) - \frac{|t|}{n}\|u\|,$$

o que implica

$$\frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{|t|} \geq -\frac{1}{n}\|u\| = -\frac{1}{n}.$$

Por conseguinte,

$$\langle I'(u_n), u\rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n},$$

e

$$\langle I'(u_n), u\rangle = \lim_{t \to 0^-} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \leq \frac{1}{n}$$

o que nos permite concluir que

$$|\langle I'(u_n), u\rangle| \leq \frac{1}{n},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$. Portanto, $I'(u_n) = o(1)$ em $H_0^{-1}(\Omega)$.

Combinando a Afirmação 4.2 com a relação (4.5) obtemos que (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional I. Sendo (u_n) limitada em $H_0^1(\Omega)$, temos pelo Lema 1.2, a menos de subsequência, que $\|u_n - u_1\| = o(1)$ em $H_0^1(\Omega)$ e a partir da Observação 1.1-(iv) que $u_n \geq 0$ e $u_1 \geq 0$.

Pela continuidade do funcional I, segue que $I(u_1) = c_1 < 0$ e pela continuidade da derivada I' que $I'(u_1) = 0$, ou seja, u_1 é uma solução fraca de $(P_{h,\lambda})$.

Uma vez que $h(x) \gneq 0$ e $0 < \lambda < \lambda_1$ obtemos que

$$Lu_1 = \Delta u_1 = -(h(x)u_1^q + \lambda u_1) \leq 0.$$

Assim, pelo Princípio do Máximo Forte (confira o Teorema A.17) existem duas possibilidades, ou $u_1 > 0$ em Ω ou $u_1 \equiv 0$ *q.t.p.* em Ω. Entretanto, como $I(u_1) = c_1 < 0$ e $I(0) = 0$, segue que $u_1 > 0$ em Ω, o que conclui prova o item (i).
(ii) Pelo Lema 4.2, existem $r = r_2, \alpha = \alpha_2$ e $e = t_2\varphi_1$, de modo que as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema A.20) são satisfeitas. Portanto existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ a qual é uma sequência $(Ce)_{c_2}$ para o funcional I, com

$$c_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0.$$

Isto implica, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_{n+}^2\,dx = c_2 + o(1), \tag{4.7}$$

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi\,dx - \int_\Omega h(x)u_{n+}^q\varphi\,dx - \lambda\int_\Omega u_{n+}\varphi\,dx = o(1), \tag{4.8}$$

$$\|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)u_{n+}^{q+1}\,dx - \lambda\int_\Omega u_{n+}^2\,dx = o(1). \tag{4.9}$$

Mostremos então que a sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$
Para tanto, suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e consideremos

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \quad \text{e} \quad w_{n+} = \frac{u_{n+}}{\|u_n\|}. \tag{4.10}$$

Aplicando o mesmo raciocínio que nas convergências dadas por (2.11) e (2.13), teremos para cada $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$ que

$$\begin{array}{lllll} w_n & \rightharpoonup & w & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ w_n & \to & w & \text{em} & L^p(\Omega), \\ w_n & \to & w & q.t.p. \text{ em} & \Omega. \end{array} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{array}{lllll} w_{n+} & \rightharpoonup & w_+ & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ w_{n+} & \to & w_+ & \text{em} & L^p(\Omega), \\ w_{n+} & \to & w_+ & q.t.p. \text{ em} & \Omega. \end{array} \tag{4.12}$$

Claramente $w \not\equiv 0$, pois se ocorresse o contrário, multiplicando a relação (4.9) por

$\dfrac{1}{\|u_n\|^2}$ teríamos que

$$\|w_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x) w_{n+}^{q+1}\, dx - \lambda \int_\Omega w_{n+}^2\, dx \;=\; o(1),$$

o que implicaria $\|w_n\| = o(1)$, o que é uma contradição, pois $\|w_n\| = 1$.

Além disso, afirmamos que vale $w(x) > 0$. De fato, como $h \in L^p(\Omega)$, com $\frac{2^*}{2^*-1-q} \leq p \leq \infty$ e (w_{n+}) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x) w_{n+}^q \varphi\, dx \right] = 0. \tag{4.13}$$

Por sua vez, multiplicando a identidade (4.8) por $\dfrac{1}{\|u_n\|^2}$ decorre que

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \varphi\, dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x) w_{n+}^q \varphi\, dx - \lambda \int_\Omega w_{n+} \varphi\, dx \;=\; o(1)$$

que combinando com as relações (4.13), (4.11) e (4.12) implicam

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\, dx - \lambda \int_\Omega w_+ \varphi\, dx = 0. \tag{4.14}$$

Se considerarmos $\varphi = w_-$ na expressão acima concluímos que $\|w_-\|^2 = 0$ e por sua vez $w \equiv w_+$. Via o Princípio do Máximo Forte, $w > 0$ $q.t.p.$ em $H_0^1(\Omega)$ o que prova a nossa conjectura.

Sendo $w > 0$ segue da expressão (4.14) que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\, dx = \lambda \int_\Omega w \varphi\, dx,$$

o que contradiz o fato de termos $\lambda > \lambda_1$. Portanto (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Logo, sendo (u_n) uma sequência $(C_e)_{c_2}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$ podemos supor, a menos de subsequência, pelo Lema 1.2 que $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$, com $u_n, u_2 \geq 0$. Utilizando o fato de $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ obtemos que u_2 é uma solução fraca não negativa de $(P_{h,\lambda})$ com $I(u_2) = c_2 > 0$, o que conclui a demonstração do item *(ii)*.

(iii) Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução positiva de $(P_{h,\lambda})$, com $h(x) \equiv 0$. Então, por definição, para a λ_1-autofunção, φ_1 temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1\, dx = \lambda \int_\Omega u \varphi_1\, dx,$$

que por sua vez implica

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = 0.$$

Como $u > 0$ e $\varphi_1 > 0$, então $\lambda_1 - \lambda = 0$. Portanto $\lambda_1 = \lambda$, o que finaliza a demonstração do Teorema 4.1.

■

Para finalizar o capítulo, realizamos a prova do Teorema 4.2. cuja essência é utilizar redução ao absurdo.

Demonstração do Teorema 4.2: *(i)* Suponhamos que o problema $(P_{h,\lambda})$ tem uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para $\lambda \geq \lambda_1$. Logo para a λ_1-autofunção, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q\varphi_1 \, dx + \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \, dx.$$

ou seja,

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q\varphi_1 \, dx > 0,$$

pois $u > 0, h(x) \gneq 0$ e $\varphi_1 > 0$. Portanto $(\lambda_1 - \lambda) > 0$ o que contradiz o fato de $\lambda \geq \lambda_1$. Sendo Assim, $(P_{h,\lambda})$ não tem solução positiva para $\lambda \geq \lambda_1$.

(ii) De forma análoga ao item (i), suponhamos que o problema $(P_{h,\lambda})$ tem uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para $\lambda \leq \lambda_1$. Então:

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q\varphi_1 \, dx + \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \, dx.$$

onde $u > 0, h(x) \lneq 0$ e $\varphi_1 > 0$.

Portanto.

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q\varphi_1 \, dx < 0,$$

e consequentemente $\lambda_1 < \lambda$ o que é um absurdo, pois $\lambda \leq \lambda_1$, o que conclui a prova do Teorema 4.2.

■

Conclusão

Como podemos perceber, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, a ideia principal dos métodos variacionais é relacionar a existência de soluções de uma equação à existência de pontos críticos de um funcional associado a equação. Podemos notar também, que a busca de pontos críticos do funcional, é uma tarefa um tanto quanto complicada, que exige um estudo amplo acerca do comportamento do referido funcional.

Em nosso trabalho, em todos os casos considerados de crescimento da função $f(x,s)$ (com relação a segunda variável) obtemos uma solução fraca com nível de energia negativo, cuja justificativa pode ser vista no Teorema 2.1, Teorema 3.2 e Teorema 4.1-(i). Para cumprir este propósito, foi inprescindível a utilização do Princípio Variacional de Ekeland.

Concomitantemente, nos casos em que a função $f(x,s)$ era assintoticamente linear, superlinear ou linear com relação a variável s no infinito, obtemos soluções fracas não negativas com nível de energia positivo, através de uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

Porém, no Capítulo 3, quando consideramos $f(x,s)$ superlinear na variável s, enfrentamos dificuldades maiores para obter pontos críticos para o funcional I, devido ao fato de que a não lineariedade $f(x,s)$ não satisfazer a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Com o intuito de tornar o Teorema 3.2 mais geral, consideramos as condições $(f2)', (fF)$ e $(f3)$, que são mais fracas, num certo sentido, que a condição (AR), como pode ser visto nos Exemplos 1 e 2 (confira as páginas 34 e 35). Portanto, o objetivo de provar que o problema $(P_{h,f})$ ainda tem soluções, quando $\xi = \infty$, sem assumir a condição (AR) foi atingido.

Como perspectiva de trabalho futuro, a curto prazo, pretende-se analisar o problema $(P_{h,f})$, considerando o operador p-Laplaciano ($\Delta_p = div(|\nabla|^{p-2}\nabla u)$), e substituindo a condição $(f2)$ por

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = a(x); \ \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = b(x)$$

uniformemente em $x \in \Omega$, onde as funções $a, b \in L^\infty(\Omega)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces.** New York: Academic Press, 2003.

[2] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical exponents.**Nonlinear Anal.**, v. 34, p. 593-615, 1998.

[3] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. On elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with critical exponents. **Electron. J. Differential Equations**, v. 71, p. 1-10, 1997.

[4] AMBROSETTI, A.; BREZIS, H.; CERAMI, G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. **J. Funct. Anal.**, v. 122, p. 519-543, 1994.

[5] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical points theory and aplications. **J. Funct. Anal.**, v. 14, p. 349-381, 1973.

[6] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure.** New York: Wiley Classics Library , 1995.

[7] BREZIS, H. **Análisis funcional, Teoría y aplicaciones.** Versão espanhola de Juan Ramón Esteban. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[8] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 36, p. 437-477, 1983.

[9] CAO, D. M.; ZHOU, H. S. On the existence of multiple solutions of inhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponents. **Z. Angew. Math. Phys.**, v. 47, p. 89-97, 1996.

[10] COSTA, D. G.; MAGALHÃES, C. A. Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. **Nonlinear Anal.**, v. 23, p. 1401-1412, 1994.

[11] DE FIGUEIREDO, D. G. **Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.** Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

[12] DE FIGUEIREDO, D. G.; GOSSEZ, J. P.; UBILLA, P. Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. **J. Funct. Anal.**, v. 199, p. 452-467, 2003.

[13] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations.** Providence: American Mathematical Society, 1998.

[14] GONÇALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving subcritical exponents. **Nonlinear Anal.**, v. 32, p. 41-51, 1998.

[15] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[16] LI, G. B.; ZHOU, H. S. The existence of a weak solution of inhomogeneous quasilinear elliptic equation with critical growth conditions. **Acta Math. Sinica (N.S.)**, v. 11, p. 146-155, 1995.

[17] LI, S.; WU, S.; ZHOU, H. S. Solutions to Semilinear Elliptic Problems with Combined Nonlinearities. **Journal of Differential Equations**, v. 185, p. 200-224, 2002.

[18] MIOTTO, M. L. Multiple solutions for elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent and weight function. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 9, p. 233-248, 2010.

[19] MIOTTO, M. L.; MIYAGAKI, O. H. Multiple positive solutions for semilinear Dirichlet problems with sign-changing weight function in infinite strip domains. **Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications**, v. 71, p. 3434-3447, 2009.

[20] RABINOWITZ, P. H. **Minimax Methods in critical point theory with applications to diifferential equations.** Providence: American Mathematical Society, 1986.

[21] RUDIN, W. **Functional Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1921.

[22] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1970.

[23] SCHECHTER, M. A variation of the Mountain Pass lemma and applications. **Journal London Math. Soc.**, v. 44, p. 491-502, 1991.

[24] VÁZQUEZ, J. L. A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations. **Applied Mathematics and Optimization**, v. 12, p. 191-202, 1984.

[25] WILLEM, M. **Minimax Theorems.** Boston: Birkhäuser, 1996.

[26] WU, T. On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 318, p. 253-270, 2006.

Apêndice A

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados e conceitos importantes utilizados no desenvolvimento deste trabalho, que se fazem necessários para uma melhor leitura e compreensão do mesmo.

A.1 Análise Funcional

Daremos ênfase nesta seção para alguns resultados que envolvem convergência fraca em um espaço de Banach. As demonstrações destes fatos podem ser vistos em Brezis [7].

Definição A.1 *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$ uma sequência. Dizemos que (x_n) converge fracamente em X, se existe $x \in X$ tal que para toda $f \in X^*$*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle.$$

Denotaremos este fato por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema A.1 *Seja (x_n) uma sequência em um espaço vetorial normado X.*

(i) *se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em X;*
(ii) *se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então (x_n) é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$;*
(iii) *se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \to f$ em X^* então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Teorema A.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em X.*

A.2 Medida e Integração

Destacaremos aqui, proposições clássicas e muito úteis da teoria de Medida e Integração as quais podem ser consultadas em Rudin [22] e Bartle [6]. Consideraremos nesta seção $(A, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida constituído de um conjunto A, uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ e uma medida μ. Denotaremos por $\mathcal{M}^+(A, \mathcal{A})$ as funções $\mathcal{A}$-mensuráveis não negativas de A para $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Teorema A.3 (Teorema da Convergência Monótona) *Sejam $(A, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em A, e suponha que*

(i) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \leq \infty$, *q.t.p. em A;*
(ii) $f_n \to f$, *q.t.p. em A.*

Então f é mensurável, e

$$\int_A f_n \; d\mu \to \int_A f \; d\mu,$$

quando $n \to \infty$.

Teorema A.4 (Lema de Fatou) *Se $(f_n) \subset \mathcal{M}^+(A, \mathcal{A})$, então*

$$\int_A (\liminf f_n) \; d\mu \leq \liminf \int_A f_n \; d\mu.$$

Teorema A.5 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam $(A, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em A, tal que*

$$f_n \to f, \; q.t.p. \; em \; A.$$

Se existe uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \; q.t.p. \; em \; A,$$

então f é integrável e

$$\int_A f \; d\mu = lim \int_A f_n \; d\mu.$$

Definição A.2 *Sejam $(A, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$\|f\|_p = \left[\int_A |f|^p \; d\mu \right]^{1/p},$$

e $L^p(A)$ a coleção de todas as funções mensuráveis em A tais que

$$\|f\|_p < \infty.$$

Definimos também $L^\infty(A)$ como o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis f tais que $|f(x)| \leq M$ q.t.p. em A para algum $M > 0$. Definimos a norma $\|f\|_\infty$ em $L^\infty(A)$ por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0; |f| \leq M \; q.t.p. \; em \; A\}.$$

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder) *Consideremos* $(A, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $1 \leq p, q \leq \infty$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(A)$, $g \in L^q(A)$, *então* $fg \in L^1(A)$ *e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema A.7 (Desigualdade de Young com ε) *Sejam* $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $C = C(\varepsilon) > 0$ *de modo que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C b^q$$

Teorema A.8 (Desigualdade de Interpolação) *Sejam* $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ *e*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}.$$

Suponhamos também que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. *Então* $u \in L^r(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^{\theta} \|u\|_t^{1-\theta}.$$

Teorema A.9 (Teorema de Fubini) *Sejam* $(A, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(X, \mathcal{X}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos e seja* π *a medida produto de* μ *e* ν *em* $\mathcal{A} \times \mathcal{X}$. *Se a função* $F : A \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável com relação a* π, *então*

$$\int_A \left[\int_X F \, d\nu \right] d\mu = \int_{A \times X} F \, d\pi = \int_X \left[\int_A F \, d\mu \right] d\nu.$$

Teorema A.10 *Consideremos uma sequência* $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *de modo que* $\|f_n - f\|_p \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω, *com* $g \in L^p(\Omega)$.

A.3 Distribuições

Muitas vezes, quando queremos resolver uma equação diferencial parcial é de grande utilidade contar com o maior número possível de candidatos a solução. Entretanto para alcançar esse objetivo necessitamos derivar funções que num primeiro momento não são diferenciáveis. A presente seção será útil para esclarecer o que está por trás de conceitos como derivadas e soluções fracas, que são abordados no presente trabalho. Para maiores detalhes sobre este assunto pode-se consultar Hounie [15] e Rudin [21]. Nesta seção consideremos Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição A.3 *Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função-teste em Ω se $f \in C^{\infty}(\Omega)$ e se $supp(f)$ for um compacto em Ω. Denotaremos o espaço das funções-teste em Ω por $C_c^{\infty}(\Omega)$.*

Definição A.4 *Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se localmente integrável em Ω e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ se para todo compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f| \; dx < \infty.$$

Teorema A.11 *Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que vale*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi \; dx = 1, \;\; \phi \geq 0, supp(\phi) = B[0,1].$$

Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, definimos para $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - \varepsilon y)\phi(y) \; dy = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\phi(\frac{x-y}{\varepsilon}) \; dy.$$

Então
(i) *$f_\varepsilon \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$;*
(ii) *se $f(x) = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^N$, então $supp(f_\varepsilon) \subseteq A + B[0, \varepsilon]$;*
(iii) *se f é contínua e $supp(f) \subset\subset \mathbb{R}^N$, então $f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.*

Observação A.1 *O resultado acima justifica, denominarmos a familia de funções f_ε de regularizadas de f.*

Definição A.5 *Sejam $f, g \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que $supp(f) \subset\subset \mathbb{R}^N$ ou $supp(g) \subset\subset \mathbb{R}^N$. Definimos a convolução de f e g em $x \in \mathbb{R}^N$ como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) \; dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y) \; dy.$$

Definição A.6 *Um funcional linear contínuo $u : C_c^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

A definição de distribuição significa que se $\phi_1, \phi_2 \in C_c^{\infty}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$ e (ϕ_j) é uma sequência em $C_c^{\infty}(\Omega)$, então

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2)$$

e

$$(\phi_j) \longrightarrow 0 \text{ em } C_c^{\infty}(\Omega) \text{ implica que } u(\phi_j) \longrightarrow 0 = u(0).$$

Quando conveniente escreveremos $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Vamos agora, operar com distribuições. A soma e o produto por escalares são definidos de maneira natural. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle$$

e

$$\langle \lambda u_1, \phi \rangle = \lambda \langle u_1, \phi \rangle.$$

Para defininir mais operações em $\mathcal{D}'(\Omega)$ suponhamos que existam dois operadores lineares e contínuos $L, L^* : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o transposto formal de L^* e vice-versa se

$$\int_\Omega (L\phi)\psi \; dx = \int_\Omega \phi(L^*\psi) \; dx, \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Note que por hipótese temos $\phi, \psi, L\phi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$. Logo podemos estender o operador L a um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ definido por

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Temos que $\tilde{L}u$ está bem definido, é linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$ e $Lu = \tilde{L}u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 3 (Derivação) *Sejam $(x_1, ..., x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω e definimos $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Integrando por partes em relação a variável x_j obtemos*

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \psi \; dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \; dx.$$

Logo $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é o transposto formal de $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e podemos definir

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle.$$

De maneira análoga, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{A.1}$$

Feito este apanhado de operações com distribuições, para fechar esta seção vamos comparar as derivadas distribucionais com as derivadas no sentido clássico. Para funções regulares as derivadas no sentido usual e no sentido das distribuições dada pela equação (A.1) coincidem.

Suponhamos agora $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ e que os limites

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0^-), \; \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0^+),$$

existam e sejam finitos. Denotemos por $\{f'\}$ a função definida como $\frac{df}{dx}$ para $x \neq 0$ e não definida para $x = 0$ e suponhamos ainda que $\{f'\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Para calcular f' (a derivada de f no sentido das distribuições), consideremos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, com $supp(\phi) \subseteq [-M, M]$. Obtemos então

$$\langle f', \phi\rangle = [f(0^+) - f(0^-)]\phi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'\}\phi \; dx.$$

A.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção abordamos conceitos e resultados envolvendo os Espaços de Sobolev, relacionando estes espaços com os demais espaços de funções sobre $\mathbb{R}^N$ através das imersões contínuas e compactas. Maiores detalhes desta seção podem ser vistos nas referências Evans [13] e Brezis [7].

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

Definição A.7 *O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$ tem-se $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. De forma sucinta,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega); \forall\alpha \text{ com } |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \Big\}.$$

Definição A.8 *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por:*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty, \quad p = \infty.$$

Definição A.9 *Definimos o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Observação A.2 *Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.*

O próximo resultado nos garante que os espaços de Sobolev também tem uma boa estrutura matemática.

Teorema A.12 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Vejamos agora as imersões dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Lembremo-nos que o expoente crítico de Sobolev é dado por $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ onde $1 \leq p < N$.

Teorema A.13 *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, com $N \geq 3$. Então vale a seguinte imersão contínua*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega).$$

Em particular, vale a desigualdade de Sobolev

$$S = \inf\left\{\frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^2}; u \in H_0^1(\Omega), u \not\equiv 0\right\} > 0.$$

Teorema A.14 *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < p^*$;*
(ii) *se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$;*
(iii) *se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Teorema A.15 *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Então*

(i) *a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para $1 \leq p < p^*$.*
(ii) *existe uma constate C dependente de Ω e p tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O Lema abaixo, garante que a norma $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ definida em $H_0^1(\Omega)$ (confira a Seção 1.1 do Capítulo 1), é equivalente a norma $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2}$ induzida pelo espaço $W^{1,2}(\Omega)$.

Lema A.1 *Existem constantes C_o e C_1 tais que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$C_o\|u\| \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_1\|u\|.$$

Demonstração: De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2} \\
&\geq (\|\nabla u\|_2^2)^{1/2} \\
&= \|u\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema A.15 segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2} \\
&\leq (C^2\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2} \\
&= (C^2 + 1)^{1/2}\|\nabla u\|_2 \\
&= C_1\|u\|,
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|u\| \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_1\|u\|,$$

como queríamos.

■

A.5 Operadores Diferenciáveis

Abordaremos aqui, a ideia de diferenciabilidade de funcionais sobre um espaço de Banach diferente de $\mathbb{R}^N$. As definições e resultados aqui apresentados, podem ser encontrados em Willem [25].

Consideremos um espaço de Banach X e X^* o seu dual, $U \subset X$ um subconjunto aberto e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional.

Definição A.10 *Dizemos que o funcional φ é diferenciável à Gâteaux se para cada $u \in U$, existe grad $\varphi(u) \in X^*$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + tv) - \varphi(u) - \langle grad\ \varphi(u), tv\rangle] = 0,\ \forall\ v \in X.$$

Definição A.11 *Dizemos que o funcional φ é diferenciável à Fréchet se para cada $u \in U$, existe $\varphi'(u) \in X^*$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}[\varphi(u + v) - \varphi(u) - \langle \varphi'(u), v\rangle] = 0,\ \forall\ v \in X.$$

Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua em U.

Observação A.3 *Qualquer funcional diferenciável a Fréchet é também diferenciável a Gâteaux.*

Teorema A.16 *Se φ tem uma derivada de Gâteaux contínua em U então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Lema A.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $0 < q < 1$, $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazendo as condições (h_1), (f_1) e (f_2). Consideremos os funcionais $I_i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 3$, definidos por*

$$I_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx,\ \ I_2(u) = \int_\Omega h(x)u_+^{q+1}\ dx,\ \ I_3(u) = \int_\Omega F(x, u_+)\ dx,$$

onde $F(x,u) = \int_o^u f(x,s)\ ds$. Então $I_i \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}), 1 \leq i \leq 3$.

Demonstração: Dividimos esta demonstração em três partes.
Parte 1: $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
Com efeito, sabemos que

$$I_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\langle grad\ I_1(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2t\langle\langle u, v\rangle\rangle + t^2\|v\|^2}{t} \\
&= 2\langle\langle u, v\rangle\rangle \\
&\doteq 2\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle grad\ I_1(u), v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx.$$

Mostremos agora que $grad\ I_1(u)$ é contínua, ou seja,

$$\text{se } \|u_n - u\| = o(1), \text{ então } \|grad\ I_1(u_n) - grad\ I_1(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1).$$

Para todo, $v \in H_0^1(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
|\langle grad\ I_1(u_n) - grad\ I_1(u), v\rangle| &= |\langle grad\ I_1(u_n), v\rangle - \langle grad\ I_1(u), v\rangle| \\
&= 2|\langle\langle u_n, v\rangle\rangle - \langle\langle u, v\rangle\rangle| \\
&\leq 2\|u_n - u\|\|v\| \\
&\leq 2\|u_n - u\|.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\|grad\ I_1(u_n) - grad\ I_1(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle grad\ I_1(u_n) - grad\ I_1(u), v\rangle| \\
&\leq 2\|u_n - u\|.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos o resultado desejado. Portanto, $grad\ I_1(u)$ é contínua e pelo Teorema A.16, segue que $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Parte 2: $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
De fato, começaremos mostrando a existência da derivada de Gâteaux de I_2. Para isso, consideremos a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(s) = h(x)(u+stv)_+^{q+1}$, com $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Como g é diferenciável no intervalo $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\beta \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\beta)(1-0)$, ou seja,

$$h(x)(u+tv)_+^{q+1} - h(x)u_+^{q+1} = h(x)(q+1)tv(u+\beta tv)_+^q.$$

Dividindo a equação acima por $0 < |t| < 1$ e passando o limite obtemos, *q.t.p.* em Ω, que

$$\lim_{t \to 0} \left[h(x) \left(\frac{(u+tv)_+^{q+1} - u_+^{q+1}}{t} \right) \right] = h(x)(q+1)u_+^q v. \tag{A.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| h(x) \left(\frac{(u+tv)_+^{q+1} - u_+^{q+1}}{t} \right) \right| &\leq \|h\|_\infty (q+1)(|u| + \beta|t||v|)^q |v| \\ &\leq \|h\|_\infty (q+1)(|u| + |v|)^q |v| \\ &\leq \|h\|_\infty (q+1)(|u|^q + |v|^q)|v|, \end{aligned}$$

esta última desigualdade obtida por uma aplicação da estimativa A.19 (veja no Apêndice). Considerando $C_1 = \|h\|_\infty (q+1)$, segue da desigualdade acima que

$$\left| h(x) \left(\frac{(u+tv)_+^{q+1} - u_+^{q+1}}{t} \right) \right| \leq C_1 |u|^q |v| + C_1 |v|^{q+1}. \tag{A.3}$$

Uma vez que $v \in H_0^1(\Omega)$, segue da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 2^*)$ que $v \in L^{q+1}(\Omega)$.

Resta mostrarmos que $|u|^q |v| \in L^1(\Omega)$.

Ora, usando a desigualdade de Hölder (veja o Teorema A.6) com expoentes $\dfrac{q+1}{q}$ e $q+1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^q |v| \, dx &\leq \|u\|_{q+1}^q \|v\|_{q+1} \\ &\leq C_2 \|u\|^q C_3 \|v\|, \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade obtida através da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 2^*)$. Portanto, $|u|^q |v| \in L^1(\Omega)$, e por conseguinte,

$$\left| h(x) \left(\frac{(u+tv)_+^{q+1} - u_+^{q+1}}{t} \right) \right| \in L^1(\Omega).$$

Porém, pela relação (A.2) temos $q.t.p.$ em Ω, que

$$\lim_{t\to 0}\left[h(x)\left(\frac{(u+tv)_+^{q+1}-u_+^{q+1}}{t}\right)\right]=h(x)(q+1)u_+^q v,$$

e assim pelo Teorema da Convergência Dominada (veja o Teorema A.5), segue que

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_\Omega h(x)\left(\frac{(u+tv)_+^{q+1}-u_+^{q+1}}{t}\right)\right]=(q+1)\int_\Omega h(x)u_+^q v\ dx.$$

Portanto existe a derivada de Gâteaux para cada $u\in H_0^1(\Omega)$ e vale

$$\langle grad\ I_2(u),v\rangle=(q+1)\int_\Omega h(x)u_+^q v\ dx,\ \text{para toda } v\in H_0^1(\Omega).$$

Provaremos agora que $grad\ I_2(u)$ é contínua. Para isso, vamos mostrar que

$$\text{se } \|u_n-u\|=o(1),\ \text{então } \|grad\ I_2(u_n)-grad\ I_2(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}=o(1).$$

Seja $v\in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|v\|\leq 1$. Temos para n suficientemente grande que

$$\begin{aligned}|\langle grad\ I_2(u_n)-grad\ I_2(u),v\rangle| &\leq (q+1)\int_\Omega |h(x)||u_{n+}^q-u_+^q||v|\ dx\\ &\leq (q+1)\|h(x)\|_\infty\int_\Omega |u_{n+}^q-u_+^q||v|\ dx\\ &= C_1\int_\Omega |u_{n+}^q-u_+^q||v|\ dx\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $q+1$ e $\dfrac{q+1}{q}$ na expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned}|\langle grad\ I_2(u_n)-grad\ I_2(u),v\rangle| &\leq C_1\left(\int_\Omega |u_{n+}^q-u_+^q|^{\frac{q+1}{q}}\ dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\|v\|_{q+1}\\ &\leq C_4\left(\int_\Omega |u_{n+}^q-u_+^q|^{\frac{q+1}{q}}\ dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\|v\|,\end{aligned}$$

onde $C_4=C_1C>0$, após uma aplicação da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p\in[1,2^*)$. Precisamos agora mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação A.1 $\displaystyle\int_\Omega |u_{n+}^q-u_+^q|^{\frac{q+1}{q}}\ dx=o(1).$

Com efeito, pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p\in[1,2^*)$, podemos supor que existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por (u_n), tal que

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \to & u & \text{em} & L^p(\Omega), \\ u_n & \to & u & q.t.p. \text{ em} & \Omega, \\ |u_n| & \leq & j(x) & \text{para alguma} & j(x) \in L^p(\Omega). \end{array} \tag{A.4}$$

Consequentemente, $|u^q_{n+} - u^q_+| = o(1)$ $q.t.p.$em Ω.
Por sua vez, notemos que

$$\begin{aligned} \left(|u^q_{n+} - u^q_+|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2^*}{q+1}} &= (|u^q_{n+} - u^q_+|)^{\frac{2^*}{q}} \\ &\leq (u^q_{n+} + u^q_+)^{\frac{2^*}{q}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*-q}{q}}(u^{2^*}_{n+} + u^{2^*}_+) \\ &\leq 2^{\frac{2^*-q}{q}}(j(x)^{2^*} + u^{2^*}_+). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Logo, utilizando a estimava (A.5) segue que

$$\begin{aligned} \left(|u^q_{n+} - u^q_+|^{\frac{q+1}{q}}\right) &= \left[\left(|u^q_{n+} - u^q_+|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2^*}{q+1}}\right]^{\frac{q+1}{2^*}} \\ &\leq \left[2^{\frac{2^*-q}{q}}(j(x)^{2^*} + u^{2^*}_+) + +\right]^{\frac{q+1}{2^*}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*-q}{q}}(j(x)^{q+1} + u^{q+1}_+). \end{aligned} \tag{A.6}$$

Uma vez que $(j(x)^{q+1} + u^{q+1}_+) \in L^1(\Omega)$, segue do Teorema da Convergência Dominada (vaja o Teorema A.5) que $\displaystyle\int_\Omega |u^q_{n+} - u^q_+|^{\frac{q+1}{q}}\, dx = o(1)$, como queríamos.

Assim, como

$$\begin{aligned} \|grad\ I_2(u_n) - grad\ I_2(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle grad\ I_2(u_n) - grad\ I_2(u), v\rangle| \\ &\leq C_4\left(\int_\Omega |u^q_{n+} - u^q_+|^{\frac{q+1}{q}}\, dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\|v\|, \end{aligned}$$

segue que $\|grad\ I_2(u_n) - grad\ I_2(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$, o que implica que $grad\ I_2(u)$ é contínua e pelo Teorema A.16, obtemos que $I_2 \in C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$.

Parte 3: $I_3 \in C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$.

Sejam $u, v \in H^1_0(\Omega)$. Definimos

$$r(v) = I_3(u+v) - I_3(u) - \int_\Omega f(x, u_+)v\, dx. \tag{A.7}$$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } \|v\| < \delta, \text{ então } |r(v)| \leq \varepsilon \|v\|. \tag{A.8}$$

Da expressão (A.7) temos que

$$r(v) = \int_\Omega [F(x,(u+v)_+) - F(x,u_+)]\, dx - \int_\Omega f(x,u_+)v\, dx.$$

Considerando a função $g(z) = F(x,(u+zv)_+)$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^1 g'(z)\, dz = F(x,(u+v)_+) - F(x,u_+),$$

e portanto,

$$F(x,(u+v)_+) - F(x,u_+) = \int_0^1 \frac{d}{dz} F(x,(u+zv)_+)\, dz.$$

Mas, $\dfrac{d}{dz} F(x,(u+zv)_+) = f(x,(u+zv)_+)v$ e consequentemente,

$$\int_0^1 \frac{d}{dz} F(x,(u+zv)_+)\, dz = \int_0^1 f(x,(u+zv)_+)v\, dz.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
r(v) &= \int_\Omega [F(x,(u+v)_+) - F(x,u_+)]\, dx - \int_\Omega f(x,u_+)v\, dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{d}{dz} F(x,(u+zv)_+)\, dz \right] dx - \int_\Omega f(x,u_+)v\, dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,(u+zv)_+)v\, dz \right] dx - \int_\Omega f(x,u_+)v\, dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,(u+zv)_+)v\, dz - \int_0^1 f(x,u_+)v\, dz \right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 [(f(x,(u+zv)_+) - f(x,u_+))v]\, dz \right] dx
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Fubini (veja o Teorema A.9), obtemos

$$r(v) = \int_0^1 \left[\int_\Omega [(f(x,(u+zv)_+) - f(x,u_+))v]\, dx \right] dz,$$

e por conseguinte,

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |(f(x,(u+zv)_+) - f(x,u_+))v|\, dx \right] dz, \tag{A.9}$$

Consideremos agora, $r = 2^*$ e $r' = \dfrac{2N}{N+2}$, onde $\dfrac{1}{2^*} + \dfrac{1}{r'} = 1$, para $N \geq 3$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, pela imersão cotínua de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$(confira o Teorema A.13), temos que $v \in L^r(\Omega)$.

Afirmação A.2 $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{r'}(\Omega)$.

Com efeito, como a função f é subcrítica, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^\theta,$$

onde $1 < \theta < \dfrac{N+2}{N-2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u)|^{r'}\, dx &\leq \int_\Omega \left(c_1 + c_2|u|^\theta\right)^{r'}\, dx \\
&\leq \int_\Omega 2^{r'-1}\left(c_1^{r'} + c_2^{r'}|u|^{\theta r'}\right)\, dx \\
&\leq 2^{r'-1}c_1^{r'}|\Omega| + 2^{r'-1}c_2^{r'}\int_\Omega |u|^{\theta r'}\, dx.
\end{aligned}$$

Como $1 < \theta < \dfrac{N+2}{N-2}$, então $1 < r' \leq \theta r' < 2^*$. Sendo assim, utilizando as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta r'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$, segue que $u \in L^{\theta r'}(\Omega)$.
Portanto,

$$\int_\Omega |f(x,u)|^{r'}\, dx < \infty,$$

o que implica $f \in L^{r'}(\Omega)$.

Pela estimativa (A.9) temos que

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |(f(x,(u+zv)_+) - f(x,u_+))v|\, dx\right] dz.$$

Uma vez que $v \in L^r(\Omega)$ e $f \in L^{r'}(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder na expressão acima obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|f(x,(u+zv)_+) - f(x,u_+)\|_{r'}\|v\|_r\, dz. \tag{A.10}$$

Afirmação A.3 *$f(x,(u+zv)_+) \to f(x,u_+)$ em $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$, uniformemente para $z \in [0,1]$, para todo $x \in \Omega$, quando $v \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.*

De fato, provar a afirmação acima é equivalente a mostrar que $f(x,(u+zv_n)_+) \to f(x,u_+)$ em $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$, uniformemente para $z \in [0,1]$, para todo $x \in \Omega$, quando $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$.

Pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$, vem que $v_n \to 0$ em $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$. Logo pelo Teorema A.10, existe uma subsequência de (v_n) (a qual ainda denotaremos por (v_n)) e $j \in L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$ de modo que

$$|v_n(x)| \leq j(x) \ q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

e

$$v_n \to 0 \ q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Logo,

$$|(u + zv_n)(x)| \leq (|u| + j)(x) \ q.t.p. \text{ em } \Omega, \tag{A.11}$$

e

$$(u + zv_n)(x) \to u(x) \ q.t.p. \text{ em } \Omega. \tag{A.12}$$

Combinando isto com a hipótese $(f1)$, segue que $f(x, (u+zv_n)_+) \to f(x, u_+)$ $q.t.p.$ em Ω, ou seja,

$$|f(x, (u + zv_n)_+(x)) - f(x, u_+(x))|^{\frac{r}{\theta}} \to 0 \ q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Por sua vez, através da condição de crescimento subcrítico da função f, a limitação dada em (A.11) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $j_o \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, (u + zv_n)_+(x)) - f(x, u_+(x))|^{\frac{r}{\theta}} \leq j_o(x),$$

donde segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f(x, (u + zv_n)_+(x)) - f(x, u_+(x))|^{\frac{r}{\theta}} \right) = 0,$$

o que implica pela Observação A.4-(i) que $f(x, (u + zv_n)_+) \to f(x, u_+)$ em $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$, o que prova a nossa afirmação.

Pela afirmação anterior, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|v\| < \delta$, então

$$\|f(x, (u + zv_n)_+) - f(x, u_+)\|_{\frac{r}{\theta}} < \varepsilon,$$

uniforme em $z \in [0, 1]$. Como $1 < r' < \dfrac{r}{\theta}$ e Ω é limitado, segue da imersão contínua de $L^{\frac{r}{\theta}}(\Omega)$ em $L^{r'}(\Omega)$ que se $\|v\| < \delta$, então

$$\|f(x, (u + zv_n)_+) - f(x, u_+)\|_{r'} < C\varepsilon, \tag{A.13}$$

uniforme em $z \in [0, 1]$, com $C > 0$. Substituindo a desigualdade(A.13) na estimativa (A.10) encontramos $|r(v)| \leq C\varepsilon\|v\|_r$. Assim, pela imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, resulta que $|r(v)| \leq C_5\varepsilon\|v\|$, onde $C_5 > 0$. Logo, se $\|v\| < \delta$, então $|r(v)| \leq C_5\varepsilon\|v\|$, o que prova a estimativa (A.8).

Portanto I_3 é Fréchet diferenciável para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com

$$\langle I_3'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u_+)v\, dx.$$

Vamos mostrar agora que I_3' é contínua. Da mesma forma que no item anterior, segue pelo Teorema de Convergência Dominada que para $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |f(x,(u+zv_n)_+(x)) - f(x,u_+(x))|^{\frac{r}{\theta}}\right) = 0.$$

Uma vez que $1 < r' < \dfrac{r}{\theta}$ e Ω é limitado então

$$\|f(x,(u+zv_n)_+) - f(x,u_+)\|_{r'} \to 0, \tag{A.14}$$

quando $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.
Por definição,

$$\|I_3'(u+v_n) - I_3'(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle I_3'(u+v_n) - I_3'(u), v\rangle|. \tag{A.15}$$

Por outro lado, observemos que

$$|\langle I_3'(u+v_n) - I_3'(u), v\rangle| \ \leq \ \int_\Omega \big|\big(f(x,(u+v_n)_+) - f(x,u_+)\big)v\big|\, dx.$$

Aplicando na expressão acima, num primeiro momento a desigualdade de Hölder, num segundo momento a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ e por fim o fato de que $\|v\| \leq 1$ obtemos que

$$\begin{aligned}
|\langle I_3'(u+v_n) - I_3'(u), v\rangle| &\leq \|f(x,(u+v_n)_+) - f(x,u_+)\|_{r'}\|v\|_{2^*}\\
&\leq C\|f(x,(u+v_n)_+) - f(x,u_+)\|_{r'}\|v\|\\
&\leq C\|f(x,(u+v_n)_+) - f(x,u_+)\|_{r'},
\end{aligned}$$

onde $C > 0$. Utilizando a convergência dada em (A.14) e a definição na relação (A.15), obtemos $\|I_3'(u+v_n) - I_3'(u)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} = o(1)$, o que conclui a prova do lema.

■

Observação A.4 ***(i)*** *Na verdade provamos que dada uma sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$, existe $(v_{n_k}) \subset (v_n)$ satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |f(x,(u+zv_{n_k})_+(x)) - f(x,u_+(x))|^{\frac{r}{\theta}}\right) = 0. \tag{A.16}$$

Afirmamos que o limite dado em (A.16) ocorre também para a sequência (v_n).
Com efeito, suponhamos, por absurdo, que isso não ocorra.
Logo existe $\varepsilon_o > 0$ *e* z_{n_k} *no intervalo* $[0,1]$ *tais que*

$$\|f(\cdot,(u+z_{n_k}v_{n_k})_+(\cdot)) - f(\cdot,u_+(\cdot))\|_{\frac{r}{\theta}} \geq \varepsilon_o,\ \forall\ n_k \in \mathbb{N}. \tag{A.17}$$

Repetindo os mesmos argumentos da Afirmação A.3, para z_{n_k}, *obteremos que a menos de subsequência, dado* ε_1, *existe* $n_o \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|f(\cdot,(u+z_{n_k}v_{n_k})_+(\cdot)) - f(\cdot,u_+(\cdot))\|_{\frac{r}{\theta}} < \varepsilon_1,\ \forall\ n_k \geq n_o,$$

o que contradiz a relação (A.17).
(ii) *Nas etapas 2 e 3 da demostração do Lema A.2, consideramos* $N \geq 3$. *Os casos* $N = 1$ *e* $N = 2$ *são feitos de forma análoga ao caso de* $N \geq 3$. *Para isto, se deve fazer algumas modificações nas imersões a serem consideradas, pois teremos para o caso em que* $N = 1$, $N < p = 2$ *e para o caso* $N = 2$, *vale* $N = 2 = p$.

A.6 Princípio do Máximo Forte

Apresentaremos nesta seção, um resultado que utilizaremos para obter soluções positivas. Para mais detalhes sobre esse assunto, confira Vázquez [24].

Teorema A.17 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*
(i) $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *no sentido das distribuições;*
(ii) $u \geq 0$ *q.t.p. em* Ω;
(iii) $\Delta u \leq \beta(u)$ *q.t.p. em* $\{x \in \Omega; 0 < u(x) < a\}$, *onde* a *é uma constante positiva e* $\beta : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua não decrescente, com* $\beta(0) = 0$. *Além disso, suponhamos que*

$$\beta(s) = 0,$$

para algum $s > 0$, *ou*

$$\int_0^{a/2} (\beta(s)s)^{-1/2}\, ds = \infty,$$

se $\beta(s) > 0$, *para* $s > 0$. *Então* $u \equiv 0$ *q.t.p. em* Ω *ou* u *é estritamente positiva em* Ω, *no sentido que para cada subconjunto compacto* $K \subset \Omega$, *existe uma constante* $C = C(K) > 0$ *tal que* $u \geq C$ *q.t.p. em* Ω.

A.7 O Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland

Veremos nessa seção dois resultados clássicos da teoria dos pontos críticos, a saber, o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

Começaremos enunciando agora o Princípio Variacional de Ekeland, bem como uma aplicação sua para funcionais definidos em Espaços de Banach. Ambas as demonstrações podem ser encontradas em De Figueiredo [11].

Teorema A.18 (Princípio Variacional de Ekelnad) *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ u_\epsilon \in X$ tal que*

$$\varphi(u_\epsilon) \leq \inf_X \varphi + \epsilon,$$

e

$$\varphi(u_\epsilon) < \varphi(u) + \epsilon d(u, u_\epsilon), \forall u \in X - \{u_\epsilon\}.$$

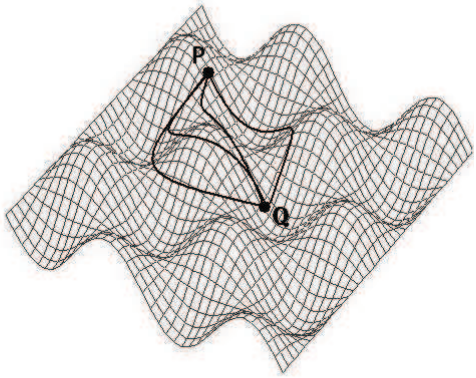
Teorema A.19 *Seja X um espaço de Banach e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Além disso, suponhamos que φ é Gâteaux diferenciável para todo $x \in X$. Então $\forall \epsilon > 0$, $\exists u_\epsilon \in X$ tal que*

$$\varphi(u_\epsilon) \leq \inf_X \varphi + \epsilon,$$

e

$$\|grad\ \varphi(u_\epsilon)\|_{X^*} \leq \varepsilon.$$

O resultado que enunciaremos a seguir, é o Teorema do Passo da Montanha (veja Schechter [23]). Sua geometria está bem associada ao seu nome. Suponha que estamos situados num ponto P a uma altura h_P no interior de uma montanha, e desejamos nos locomover até um ponto Q localizado a uma altura $h_Q < h_P$ do outro lado da montanha, conforme a figura abaixo.



Dentre todos os caminhos que ligam P à Q, o "melhor caminho"parece ser aquele que sobe uma altura mínima. Uma forma para encontrar esse "melhor caminho"é determinando o valor minimax, ou seja, avaliamos a altura máxima entre todos os caminhos ligando P e Q, e depois avaliamos o mínimo entre esses valores máximos.

Teorema A.20 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach real e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo:*

$$\max\{\varphi(0), \varphi(e)\} \leq \mu < \alpha \leq \inf_{\|u\|=r} \varphi(u),$$

para algum $\mu < \alpha$, $r > 0$ e $e \in X$ com $\|e\| > r$.
Então, existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo a condição $(C_e)_c$, onde $c \geq \alpha$ pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

A.8 Caracterização de λ_1

Nesta seção apresentaremos um resultado muito importante de caracterização do primeiro autovalor relacionado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano ($\Delta u = div(\nabla u)$), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto e limitado. Pode-se mostrar (confira [7]) que o problema acima possui uma sequência (λ_n) de autovalores reais positivos verificando

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Teorema A.21 *O primeiro autovalor de $-\Delta$ (λ_1) é o único que tem correspondente autofunção que não troca de sinal em Ω.*

A.9 Desigualdades Analíticas

A seguir, enunciamos duas desigualdades que utilizamos no decorrer do presente trabalho. Suas demonstrações podem ser encontradas em Adams e Fournier [1].

Consideremos $a, b \geq 0$, $s \in (0, 1]$ e $k, k' \geq 1$ expoentes conjugados. Então, valem as seguintes desigualdades:

$$(a + b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k); \tag{A.18}$$

$$(a + b)^s \leq (a^s + b^s). \tag{A.19}$$