

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Laura Dalmolin

**MODELO MATEMÁTICO PARA ANALISAR O CONTROLE
DE INSETOS-PRAGA EM CONSÓRCIO DE CULTURAS
COM ANTIBIOSE**

Santa Maria, RS
2017

Laura Dalmolin

**MODELO MATEMÁTICO PARA ANALISAR O CONTROLE DE
INSETOS-PRAGA EM CONSÓRCIO DE CULTURAS COM ANTIBIOSE**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Diomar Cristina Mistro

Santa Maria, RS

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dalmolin, Laura
Modelo matemático para analisar o controle de insetos-praga em consórcio de culturas com antibiose / Laura Dalmolin.- 2017.
129 p. ; 30 cm

Orientadora: Diomar Cristina Mistro
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2017

1. Modelos discretos 2. Dinâmica de populações 3. Consórcio de culturas 4. Antibiose 5. Redes de Mapas Acoplados I. Mistro, Diomar Cristina II. Título.

Laura Dalmolin

**MODELO MATEMÁTICO PARA ANALISAR O CONTROLE DE
INSETOS-PRAGA EM CONSÓRCIO DE CULTURAS COM ANTIBIOSE**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

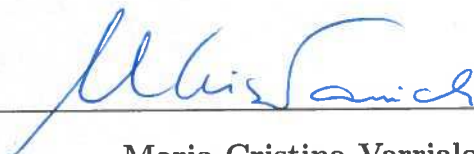
Aprovado em 13 de março de 2017:



Diomar Cristina Mistro, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)



Carolina Reigada, Dra. (ESALQ)



Maria Cristina Varriale, Dra. (UFRGS)

Santa Maria, RS

2017

DEDICATÓRIA

À minha família

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e por ter me guiado e dado forças para superar todos obstáculos encontrados.

À minha mãe, Inez Maria Cocco Dalmolin, e minha irmã Flavia Dalmolin Michelin, por todo amor, incentivo e apoio incondicional em todos os momentos. Não há palavras para expressar minha gratidão por tudo o que vocês fizeram (e fazem) por mim. Amo vocês.

Ao meu pai, Celso Vicente Dalmolin (*in memoriam*), que mesmo não estando mais presente fisicamente, sei que me deu forças para vencer os desafios encontrados durante esta caminhada. Seus ensinamentos são algo que levarei por toda minha vida.

À professora Diomar Cristina Mistro, pela orientação, paciência e todos conhecimentos transmitidos durante esta etapa.

Ao professor Luiz Alberto Díaz Rodrigues, pela disposição e ajuda na elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas do PPGMAT da UFSM, pelo companheirismo e amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À todos que de alguma forma contribuíram para conclusão desta etapa em minha vida, o meu muito obrigada.

RESUMO

MODELO MATEMÁTICO PARA ANALISAR O CONTROLE DE INSETOS-PRAGA EM CONSÓRCIO DE CULTURAS COM ANTIBIOSE

AUTORA: Laura Dalmolin

ORIENTADORA: Diomar Cristina Mistro

Neste trabalho, propomos um modelo do tipo Redes de Mapas Acoplados para analisar a dinâmica de um inseto-praga em um consórcio de uma cultura principal (alvo do herbívoro) com uma cultura secundária que apresenta resistência do tipo antibiose a este inseto. Analisamos dois fatores principais: os efeitos da área da cultura secundária e sua distribuição no domínio sobre a dinâmica do inseto-praga. A redução na densidade populacional dos insetos provocada por estes fatores é descrita através de um percentual de decréscimo da população. Por meio de um modelo discreto para uma única espécie, verificamos que a presença da cultura secundária reduz a densidade de indivíduos na cultura principal e que esta redução sofre alterações de acordo com a distribuição espacial e grau de resistência da cultura secundária, além do tipo de movimentação do inseto. Ao considerarmos um modelo discreto hospedeiro-parasitoide, observamos que a cultura secundária também reduz a densidade de parasitoides, de forma que a utilização desta estratégia de controle deve ser avaliada de acordo com o problema em estudo. De modo geral, a distribuição da cultura secundária em faixas foi o arranjo espacial que apresentou melhores resultados para o controle do inseto-praga.

Palavras-chave: Modelos discretos. Dinâmica de populações. Consórcio de culturas. Antibiose. Redes de Mapas Acoplados.

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODEL TO ANALYZE THE CONTROL OF PEST INSECTS IN INTERCROPPING SYSTEMS WITH ANTIBIOSIS

AUTHOR: Laura Dalmolin

ADVISOR: Diomar Cristina Mistro

In this work, we propose a Coupled Map Lattices model to analyze the dynamics of an insect-pest in intercropping of a main culture (target of the herbivore) with a secondary culture that presents antibiosis resistance to this insect. We analyzed two main factors: the effects of the secondary crop area and its distribution in the domain on the insect-pest dynamics. The reduction in the population density of insects caused by these factors is described by a percentage of the population decrease. By means of a discrete model for a single species, we verified that the presence of the secondary crop reduces the density of individuals in the main crop and that this reduction depends on the spatial distribution and degree of resistance of the secondary crop, besides the type of movement of the insect. When considering a discrete host-parasitoid model, we observed that the secondary culture also reduces the density of parasitoids, so that the use of this control strategy should be evaluated according to the problem under study. In general, the distribution of the secondary crop in stripes was the spatial arrangement that presented better results for the control of the insect-pest.

Keywords: Discrete models. Population dynamics. Intercropping systems. Antibiosis. Coupled Map Lattice.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1 CONCEITOS BIOLÓGICOS, DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	13
1.1 MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS	13
1.1.1 Métodos culturais	15
1.1.2 Resistência de plantas a insetos	16
1.2 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	17
1.3 MODELOS ESPACIALMENTE ESTRUTURADOS	19
1.3.1 Redes de Mapas Acoplados	23
2 MODELO DISCRETO PARA UMA ÚNICA ESPÉCIE EM UM CONSÓRCIO DE CULTURAS	27
2.1 DINÂMICA LOCAL	27
2.1.1 Soluções de equilíbrio	29
2.1.2 Análise da Estabilidade	29
2.2 MODELO ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO	31
2.2.1 Experimentos Computacionais	32
2.2.2 Cenário 1: Movimentação aleatória	37
2.2.3 Cenário 2: Movimentação dependente da densidade local (Antia- gregação)	49
2.2.4 Cenário 3: Movimentação dependente da densidade local (Agregação)	61
2.3 CONCLUSÕES	73
3 MODELO DISCRETO HOSPEDEIRO - PARASITOIDE EM UM CONSÓRCIO DE CULTURAS	77

3.1	DINÂMICA LOCAL	78
3.1.1	Soluções de equilíbrio	79
3.1.2	Estudo da Estabilidade	79
3.2	MODELO ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO	82
3.2.1	Cenário 1: Hospedeiros e parasitoides se movimentam aleatoriamente	86
3.2.2	Cenário 2: Movimentação dos hospedeiros aleatória e dos parasitoides dependente da densidade local de hospedeiros	95
3.2.3	Cenário 3: Hospedeiros apresentam comportamento de agregação e a movimentação dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros	104
3.2.4	Cenário 4: Hospedeiros apresentam comportamento de anti-agregação e a movimentação dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros	112
3.3	CONCLUSÕES	119
	CONCLUSÕES	123
	REFERÊNCIAS	126

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o conceito de controle de pragas na agricultura sofreu alterações. A aplicação desordenada de produtos químicos com o objetivo de controlar espécies herbívoras provocou o surgimento de diversos problemas como: resistência de pragas a diversos pesticidas, surtos de pragas até então consideradas secundárias, efeitos adversos sobre os inimigos naturais das pragas e outros animais presentes no ambiente e, efeitos prejudiciais dos produtos químicos ao homem no momento da aplicação ou por meio de resíduos deixados nos produtos consumidos posteriormente (GALLO et al., 2002).

Desta forma, justifica-se a importância da procura de novas técnicas para o controle de insetos herbívoros. Neste contexto, surgiu um novo conceito denominado Manejo Integrado de Pragas (MIP), o qual é caracterizado pelo uso de diversas técnicas que são empregadas simultaneamente visando o controle de uma determinada praga. Assim, o objetivo primário do MIP é reduzir as perdas causadas por pragas de modo efetivo, economicamente viável e ecologicamente compatível com o meio ambiente (DEGRANDE e VIVAN, 2012).

A modelagem matemática tem sido uma importante ferramenta de análise de métodos propostos pelo MIP, pois através destes modelos podemos descrever diversos tipos de interações entre espécies e explorar diferentes estratégias de controle da população de insetos-praga. Além disso, nestes modelos, podemos considerar a estrutura espacial, a qual é um componente essencial para descrever de forma mais realística o problema em estudo, visto que geralmente os habitats apresentam regiões com características distintas umas das outras interferindo diretamente na dinâmica das espécies.

A heterogeneidade espacial desempenha um importante papel na dinâmica entre plantas e herbívoros e entre herbívoros e seus inimigos naturais. Por exemplo, em alguns casos, constatou-se que o número de insetos-praga por área é maior em monoculturas do que em policulturas (CRAWLEY, 1983; STRONG et al., 1984). Desta forma, o plantio de

duas espécies de plantas em um habitat e os efeitos que cada planta exerce na dinâmica das espécies são importantes fatores a serem considerados como método de controle de insetos-praga.

Neste trabalho, iremos considerar um consórcio de duas culturas: uma principal, alvo de um inseto-praga, e uma cultura secundária que apresenta resistência do tipo antibiose a este inseto. Segundo Lara (1991), a resistência por antibiose ocorre quando o inseto se alimenta normalmente da planta, mas esta exerce um efeito adverso sobre a biologia do inseto. Dentre estes efeitos estão a mortalidade das formas jovens e a redução de tamanho e peso dos indivíduos.

O objetivo principal é analisar os efeitos da cultura com antibiose sobre a densidade dos insetos-praga na cultura principal. Para isso, vamos considerar dois aspectos importantes: a área (número de sítios) da cultura secundária e a sua distribuição espacial no habitat.

Além de analisar a densidade dos insetos-praga em consórcio de culturas, é importante verificar sua influência na interação destes com seus inimigos naturais presentes no habitat. Desta forma, iremos também estudar os efeitos da cultura com antibiose na densidade de hospedeiros considerando que uma espécie de parasitoide, naturalmente presente na plantação, interage com o hospedeiro em questão.

No Capítulo 1, descrevemos de maneira mais detalhada a situação-problema que será estudada neste trabalho. Iniciamos com um breve referencial teórico sobre o Manejo Integrado de Pragas e os métodos de controle cultural e de resistência de plantas. Ainda neste capítulo, fazemos uma descrição dos modelos espacialmente estruturados, dando ênfase ao modelo de Redes de Mapas Acoplados que será utilizado neste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos um modelo discreto para uma única espécie em um consórcio de culturas. Após realizarmos um estudo sobre a dinâmica local do inseto, incluímos a estrutura espacial via Redes de Mapas Acoplados. Neste momento, descrevemos como será incorporada no modelo a heterogeneidade espacial dada pela presença das duas culturas que compõem o consórcio. Através de simulações, verificamos os efeitos da área da cultura com antibiose, bem como de sua distribuição no domínio, na densidade de indivíduos na cultura principal.

No Capítulo 3, analogamente ao capítulo anterior, realizamos simulações para analisar a situação-problema proposta neste trabalho, porém, neste caso, iremos considerar

que uma espécie de parasitoide interage com o inseto-praga. Vale ressaltar que o parasitoide considerado está naturalmente presente nas plantações, ou seja, consideramos somente a dinâmica natural entre as espécies.

As conclusões finais são reservadas para uma discussão geral dos resultados obtidos.

Capítulo 1

CONCEITOS BIOLÓGICOS, DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo, apresentamos a situação-problema que será estudada neste trabalho. Iniciamos fazendo a descrição do problema biológico a ser abordado, apresentando o conceito de manejo integrado de pragas na agricultura e os tipos de controle de insetos. De modo especial, ressaltamos os métodos de controle conhecidos como método cultural e método de resistência de plantas. Em seguida, destacamos os modelos discretos espacialmente estruturados, os quais são utilizados para modelar vários problemas biológicos. Em particular, daremos ênfase aos modelos de Redes de Mapas Acoplados, que serão empregados neste trabalho.

1.1 MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS

A expressão “mundo em mudança” vem sendo citada direta ou indiretamente em muitos trabalhos científicos nos últimos anos. Em particular, na entomologia, tais mudanças estão associadas a problemas envolvendo surtos de pragas em plantações, invasões biológicas e o estabelecimento de espécies exóticas em novas áreas (LIMA et al., 2009).

Devido aos prejuízos causados nas plantações por surtos populacionais de pragas, algumas técnicas vêm sendo utilizadas para reduzir tais populações. O uso crescente de pesticidas em plantações e a crescente resistência de insetos a estes produtos químicos

têm se tornado uma das grandes preocupações da atualidade. Tal preocupação justifica-se pelos danos causados ao ambiente e à saúde humana provocados pelo uso indiscriminado de tais produtos. Desta forma, a busca por novas técnicas de controle de pragas tem se intensificado.

Neste contexto, visando a minimização destes problemas, surgiu um novo conceito de controle de pragas denominado Manejo Integrado de Pragas (MIP). Segundo Kogan (1998), o Manejo Integrado de Pragas consiste no uso de diversas táticas de controle, aplicadas isoladamente ou associadas simultaneamente, numa estratégia de manejo baseada em análises custo/benefício que levam em consideração o interesse e/ou impacto nos produtores, sociedade e ambiente.

De acordo com Norris et al. (2003) praga é toda população de organismos que causam prejuízo à cultura e são capazes de reduzir a produção (rendimento) ou a qualidade dos produtos. Em outras palavras, uma espécie somente é considerada uma praga quando sua presença na cultura causar danos econômicos ao produtor. Deste modo, o objetivo do MIP não é eliminar os indivíduos da cultura e sim controlar seu número, reduzir a uma densidade que não cause danos econômicos.

Conforme Gallo et al. (2002), para implementação do MIP é necessário:

1. Reconhecimento das pragas mais importantes (pragas-chave): consiste na identificação (identificação taxonômica e bionomia) do agente causador de um determinado sintoma na planta.
2. Avaliação dos inimigos naturais: consiste na verificação da mortalidade natural no agroecossistema. Nesta etapa, também consideram-se técnicas de criação (nutrição) de inimigos naturais para liberação e técnicas para produção de patógenos.
3. Estudo de fatores climáticos que afetam a dinâmica populacional da praga e de seus inimigos naturais.
4. Determinação dos níveis de dano econômico e de controle: define-se como nível de dano econômico (NDE) a menor densidade populacional do inseto capaz de causar prejuízo ao agricultor. Já o nível de controle (NC) corresponde à densidade populacional na qual medidas de controle devem ser efetivadas para que não ocorram os danos econômicos, ou seja, é o ponto onde deve ser iniciado o controle para evitar que seja atingido o NDE.

5. Avaliação populacional: consiste no monitoramento das densidades populacionais de pragas e de seus inimigos naturais através de amostragem.
6. Avaliação do(s) método(s) mais adequado(s) para incorporar num programa de manejo.

De acordo com as etapas descritas anteriormente, para que ocorra uma plena implementação do MIP é necessário um amplo conhecimento da cultura envolvida bem como do inseto-praga relacionado a ela e seus inimigos naturais. Desta forma, para a adoção do MIP é inevitável a integração de diversas áreas do conhecimento como entomologia, fitotecnia, fisiologia vegetal, matemática e economia.

Como última etapa de implementação do MIP está a seleção do(s) método(s) mais apropriados para o controle da praga. Dentre estes métodos estão (GALLO et al., 2002; PIKANÇO, 2010):

- Métodos culturais: consiste no emprego de certas práticas culturais para controle, baseando-se em conhecimentos ecológicos e biológicos das pragas. Dentre as práticas mais comuns citam-se: rotação de culturas, aração do solo, destruição de restos de cultura, poda e consórcio de culturas;
- Método de resistência de plantas: uso de plantas que devido às suas características genéticas sofrem menor dano quando atacadas por pragas;
- Métodos de controle biológico: controle realizado através da ação de inimigos naturais;
- Métodos químicos: consiste na aplicação de substâncias químicas que causam a mortalidade das pragas.

Em particular, neste trabalho vamos ressaltar o método cultural (dando ênfase ao consórcio de culturas) e a resistência de plantas.

1.1.1 Métodos culturais

O controle cultural baseia-se na manipulação do ambiente de cultivo com a finalidade de desfavorecer o desenvolvimento da praga. Pode ser dado através da redução da capacidade de suporte do habitat (poda, destruição e eliminação de restos culturais),

descontinuidade espacial (alterando o espaçamento das plantas, consórcio entre culturas) e ruptura da continuidade temporal (rotação de culturas) (PICANÇO, 2010).

De acordo com Hirakuri et al. (2012), o sistema em consórcio de culturas ou policultivo ocorre quando duas ou mais culturas ocupam a mesma área agrícola em um mesmo período de tempo.

São vários os estudos que analisam os efeitos do consórcio entre duas culturas. Fernandes (2013) analisou a dinâmica e distribuição espacial ao longo do tempo de diferentes espécies de pulgões e seu principal inimigo natural em um sistema de erva-doce consorciada com algodão de fibra colorida. Os resultados obtidos através de experimentos indicaram uma redução da população de pulgões em sistemas consorciados, sugerindo desta forma que esta pode ser uma alternativa para o controle desta espécie.

A redução da densidade populacional de pragas, geralmente observada em sistemas consorciados, pode possuir diversas justificativas. Por exemplo, a dificuldade de localização da planta hospedeira pelo herbívoro, bem como a maior quantidade de inimigos naturais em razão da maior diversidade de presas, hospedeiros, microhabitats e muitas fontes alternativas de alimentos disponíveis dentro de tais ambientes complexos, podem justificar esta redução (ALTIERI et al., 2003 apud CARVALHO e FILHO, 2009). Além disso, há também a diferença nutricional de cada planta, interferindo diretamente no desenvolvimento das espécies estudadas. A eficiência destes sistemas no controle de pragas se deve principalmente às espécies de plantas que compõem o consórcio e à forma com que estas culturas estão dispostas na plantação.

1.1.2 Resistência de plantas a insetos

A resistência de plantas a insetos consiste de uma característica hereditária da planta que lhe possibilita reprimir o crescimento de populações de insetos ou se recuperar de injúrias causadas por eles, fazendo com que se torne menos danificada que outras plantas nas mesmas condições (PICANÇO, 2010).

Lara (1991) destacou que a resistência é relativa, visto que uma planta pode ser considerada resistente quando comparada a outra que sofre maiores danos quando atacada pelo inseto ou suscetível se a outra sofrer menos danos. Além disso, ressaltou que a resistência está diretamente relacionada ao inseto, podendo a planta ser resistente a determinadas espécies e suscetível a outras.

Segundo Gallo et al. (2002) e Lara (1991), existem basicamente três tipos de resistência:

- Não-preferência ou antixenose: ocorre quando o cultivar é menos utilizado pelo inseto para alimentação, oviposição ou abrigo que outros cultivares em igualdade de condições. Isso ocorre devido a uma série de estímulos (de natureza química ou física) da planta que provocam uma cadeia de respostas do inseto. Ainda, uma das principais diferenças entre este tipo de resistência e os demais é que, nesse caso, existe uma resposta do inseto em relação à planta, enquanto que nos demais, existe uma resposta da planta à atividade do inseto;
- Antibiose: ocorre quando o inseto se alimenta normalmente da planta, mas esta exerce um efeito adverso sobre sua biologia. Este tipo de resistência pode ser causado por diversos fatores como a presença de substâncias químicas que provocam intoxicação aguda ou crônica do inseto, enzimas que inibem ou reduzem os processos normais de digestão do alimento ou compostos que interferem na reprodução, entre outros fatores;
- Tolerância: ocorre quando uma planta é menos danificada que as demais, sob um mesmo nível de infestação do inseto, sem que haja efeito no comportamento ou biologia deste. Entre as causas deste tipo de resistência, pode ser citada a maior capacidade da planta (em relação às não tolerantes) de compensar a área destruída por meio do crescimento ou regeneração dos tecidos atacados.

Ainda segundo Gallo et al. (2002), uma das principais vantagens da resistência de plantas a insetos é sua compatibilidade, de modo geral, com os demais métodos de controle, possibilitando assim sua inclusão nos sistemas de manejo de pragas.

1.2 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho, consideramos um consórcio entre duas culturas: uma principal, de interesse do produtor e alvo de uma espécie com potencial de se tornar praga, e uma cultura secundária que apresenta resistência a insetos. O objetivo é analisar os efeitos da cultura secundária no controle da população de insetos que acomete a cultura principal. Vale ressaltar que, neste trabalho, não será considerado que o inseto possua preferência

por uma das culturas que compõem o consórcio, isto é, ele se alimenta de ambas as plantas que integram o habitat.

A resistência escolhida para a segunda cultura será a antibiose. Cultivares de milho (VIANA e POTENZA, 2000) e de trigo (SILVA, 2011) são alguns exemplos que apresentam resistência do tipo antibiose a diferentes espécies de insetos.

Segundo Lara (1991), os efeitos da antibiose exercidos pela planta sobre o inseto podem ser: mortalidade das formas jovens, prolongamento do período de desenvolvimento, redução de tamanho e peso dos indivíduos, redução na fecundidade, alteração na proporção sexual e alteração no tempo de vida dos adultos.

Uma das principais questões sobre a inclusão de uma planta em um consórcio com outra cultura é sua disposição no habitat. O formato com que as plantas estão distribuídas pode alterar significativamente os efeitos que estas têm sobre a população de pragas (GARCIA et al., 2014; POTGIETER et al., 2015). Em outras palavras, arranjar as plantas em faixas simétricas, por exemplo, pode ser mais ou menos eficiente do que dispô-las em torno da cultura principal.

Assim, neste trabalho, serão analisados dois fatores importantes: os efeitos da área da cultura com antibiose e a influência de diferentes distribuições desta cultura no domínio, visando o controle da densidade de insetos na cultura principal. A forma como iremos considerar estes dois fatores é descrita com maiores detalhes no Capítulo 2 deste trabalho.

Além disso, interações do tipo recurso-consumidor (presa - predador, hospedeiro - parasitoide ou planta - herbívoro) são de grande importância em sistemas ecológicos e, em particular, em programas de controle biológico de pragas na agricultura. Parasitoides e predadores são alguns exemplos de inimigos naturais de insetos herbívoros que desempenham um papel relevante na redução e controle de insetos-praga, uma vez que podem promover uma diminuição do uso de agrotóxicos. Desta forma, a preservação e manutenção de inimigos naturais de herbívoros é altamente recomendável.

Neste sentido, muitos modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para compreender e explicar a dinâmica das interações recurso-consumidor. O modelo hospedeiro - parasitoide de Nicholson-Bailey (1935) foi um dos pioneiros a descrever este tipo de interação servindo de referência para diversos trabalhos futuros (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Neste contexto, em nosso trabalho também iremos examinar a influência do

consórcio de duas culturas (uma principal e uma com antibiose) na densidade de hospedeiros presentes na cultura principal, considerando que uma espécie de parasitoide, naturalmente presente nas plantações, interage com o hospedeiro em questão. Não consideramos liberações de parasitoides na cultura como ocorre em programas de controle biológico aumentativo. Assim, vamos analisar os efeitos do consórcio de culturas na dinâmica natural das espécies. É importante ressaltar que, apesar de enfatizarmos a relação hospedeiro-parasitoide, a dinâmica que vamos estudar é do tipo recurso-consumidor e poderia ser aplicada a muitos sistemas presa-predador e, com algumas adaptações, a sistemas planta-herbívoro (MURDOCH et al., 2003).

1.3 MODELOS ESPACIALMENTE ESTRUTURADOS

Diversas áreas da ciência como Física, Química, Engenharia e Biologia utilizam modelos matemáticos para descrever problemas reais complexos, como interações entre espécies em ecologia, propagação de uma doença em uma população, formação de padrões, vibrações mecânicas e sistemas de controle genético, entre outros (STROGATZ, 1994; EDELSTEIN-KESHET, 1988).

O objetivo em todas essas aplicações não é obter um modelo matemático que descreva todos os processos envolvidos, pois, mesmo se isso fosse possível, o modelo resultante traria pouca ou nenhuma visão sobre as interações cruciais dentro do sistema. Em vez disso, o objetivo é desenvolver modelos que capturem a essência de várias interações permitindo que seu resultado seja mais plenamente compreendido (MURRAY, 2002).

Os modelos matemáticos em Ecologia, são uma ferramenta que permite analisar padrões espaciais e temporais resultantes das interações entre espécies, em particular das relações presa-predador ou parasitoide-hospedeiro comumente observadas em programas de controle de pragas (LIMA et al., 2009).

Uma característica importante que deve ser considerada na formulação de modelos ecológicos, além das interações entre espécies, é a estrutura espacial. Devido a diversos fatores como condições naturais e até a ação do homem, os habitats apresentam regiões com características distintas umas das outras, o que pode afetar diretamente a dinâmica das espécies presentes nestas áreas. Ainda que o ambiente seja homogêneo, pode ocorrer

das populações possuem uma distribuição inicial heterogênea. Além disso, em geral, diferentes espécies apresentam diferentes taxas de movimentação, podendo ocasionar a formação de padrões, mesmo em meios homogêneos (SOLEÉ e BASCOMPTE, 2006; KOT, 2001).

Um exemplo clássico em que podemos notar a influência do espaço é o modelo hospedeiro-parasitoide de Nicholson-Bailey (1935). Este modelo apresenta um equilíbrio de coexistência das espécies que é instável para todos os valores dos parâmetros, o que não condiz com a observação destas interações na natureza. Porém, ao incluir explicitamente o espaço, as espécies persistem e diferentes padrões espaciais são observados (HASSELL et al., 1991).

O problema a ser estudado neste trabalho é marcadamente espacial. Como pretendemos analisar a distribuição espacial de plantas que apresentam antibiose com vistas a controlar uma possível praga de uma cultura, a variável espacial é essencial para nossa análise.

Dentre os modelos espacialmente estruturados, podemos citar: equações de reação-difusão, modelos metapopulacionais, equações a diferenças integrais, redes de mapas acoplados e autômatos celulares (RODRIGUES e MISTRO, 2007; KOT, 2001). A principal diferença entre tais modelos é a maneira como são tratadas (discretas ou contínuas) as variáveis de tempo, espaço e estado.

A escolha do modelo se deve principalmente às características das espécies envolvidas. Modelos que consideram o tempo discreto são mais adequados quando as espécies se reproduzem em intervalos fixos, enquanto que para aquelas que se reproduzem continuamente, seria mais apropriado considerar o tempo contínuo. Considerar a densidade contínua é uma idealização, visto que em uma população, os indivíduos são, de fato, discretos. Porém, para os objetivos da modelagem, é conveniente transformar uma população de indivíduos discretos em uma “nuvem” e considerar sua densidade espaço-temporal (RODRIGUES e MISTRO, 2007; KOT, 2001).

Em algumas situações, considerar o espaço discreto pode fornecer uma descrição melhor da realidade do que os modelos com o espaço contínuo, como nos casos em que as populações se movimentam em um conjunto de sítios discretos do habitat (SOLEÉ e BASCOMPTE, 2006).

A tabela 1.1 apresenta os diferentes modelos espacialmente estruturados de acordo

com a escolha (discreta ou contínua) das variáveis envolvidas.

Tabela 1.1: Modelos espacialmente estruturados.

Modelo	Espaço	Tempo	Estado
Equações de Reação-Difusão	Contínuo	Contínuo	Contínuo
Modelos Metapopulacionais	Discreto	Contínuo	Contínuo
Equações a Diferenças Integrais	Contínuo	Discreto	Contínuo
Redes de Mapas Acoplados	Discreto	Discreto	Contínuo
Autômatos Celulares	Discreto	Discreto	Discreto

Discorreremos brevemente sobre dois modelos matemáticos que abordam a manipulação do habitat: o primeiro utiliza Autômatos Celulares enquanto que o segundo é formulado por um sistema de Equações Diferenciais Parciais.

Em Garcia et al. (2014) foi realizado um estudo para investigar os efeitos da manipulação do habitat na densidade populacional de uma praga. Para a composição do habitat, foram consideradas quatro culturas: feijão, soja, batata e milho. Como inseto-praga, *Diabrotica speciosa*, o qual utiliza estas culturas como plantas hospedeiras.

Além de analisar o consórcio e o arranjo espacial das culturas que o compõem como ferramenta de controle da densidade do inseto, foram consideradas diferentes proporções das culturas e analisados os efeitos da heterogeneidade espacial na velocidade de dispersão da praga.

Para este estudo foi utilizado um modelo do tipo Autômato Celular que simulava as características fisiológicas e comportamentais do inseto e também as diferentes configurações espaciais da plantação. A dinâmica da população considerada é dada por um conjunto de regras estocásticas, utilizando parâmetros biológicos do inseto como taxa de mortalidade larval, taxa de desenvolvimento larva-adulto, taxa de oviposição e taxa de mortalidade do adulto, todos dependentes da planta hospedeira.

Através de simulações, os autores concluíram que a cultura do milho, associada a qualquer uma das demais culturas, foi o consórcio que apresentou melhores resultados quanto à densidade e dispersão dos insetos. Quanto ao arranjo entre as culturas, há dois pontos importantes que os autores consideraram: a posição e a proporção. No caso do milho, quanto mais alta a proporção no sistema, melhor é o controle da praga. Em relação à posição, quanto mais próximas forem inseridas as fileiras de milho da posição inicial dos insetos, melhor será o controle, pois estas fileiras assumem um papel de barreiras naturais

ao inseto (GARCIA et al., 2014).

Por outro lado, em Potgieter et al. (2015), foi escolhida uma única cultura a integrar o habitat, a da cana-de-açúcar. Devido ao longo tempo de maturação da cana-de-açúcar, a qual pode variar de 12 a 24 meses de acordo com o local, os fazendeiros possuem campos de diferentes épocas na fazenda. Desta forma, os autores consideraram a heterogeneidade da paisagem em termos da idade da cultura.

O modelo considerado neste estudo descreve a dinâmica da população de *E. saccharina*, uma das principais espécies de pragas que atacam a cana-de-açúcar. O domínio considerado é formado por campos de cana-de-açúcar de diferentes idades, cercados por áreas que não são consideradas possíveis habitats para a praga.

A dinâmica das sub-populações de *E. saccharina* em vários estágios (ovos, larvas dentro e fora dos caules de cana-de-açúcar, pupas e traças) é descrita por um sistema de equações de reação-difusão. Os parâmetros biológicos do inseto são influenciados pela idade da cultura em que estão inseridos. Aumentando a idade, aumentam os níveis de nutrição da praga e também a capacidade de suporte da cultura. Além disso, alteram-se também os parâmetros de mortalidade.

Através de simulações, os autores analisam fatores como proporção das áreas que compõem a paisagem, o arranjo espacial das culturas e variação na idade das culturas. Dentre os resultados obtidos referentes ao arranjo espacial das culturas, podemos citar a redução no nível de infestação média em campos de diferentes idades arrançadas em faixas ou listras quando comparados ao caso em que o domínio é dividido em mais regiões formando padrões de xadrez. Ainda, domínios em que os campos formaram padrões espaciais aleatórios apresentaram resultados melhores quando comparados aos domínios em que os campos foram agrupados de acordo com um padrão mais organizado.

Em outro cenário, os autores consideraram um domínio dividido em 4 campos de áreas iguais de duas diferentes maneiras: 4 quadrados de dimensões $100\text{m} \times 100\text{m}$ e em 4 retângulos de dimensões $50\text{m} \times 200\text{m}$ cada. Neste caso, a partição que minimizava o comprimento dos limites compartilhados entre os campos (divisão do domínio em quadrados), atingiu os menores níveis de infestação no final das simulações (POTGIETER et al., 2015).

Na subseção seguinte vamos descrever de maneira mais detalhada o modelo de Redes de Mapas Acoplados, que será empregado neste trabalho.

1.3.1 Redes de Mapas Acoplados

De acordo com o problema que iremos estudar, analisamos os tipos de variáveis de tempo, densidade e espaço que utilizaremos para formular o modelo. O crescimento de muitas espécies de insetos ocorre em períodos de tempo bem definidos. Assim, é razoável considerar, nestes casos, a variável de tempo discreta. Além disso, podemos discretizar também o espaço, considerando uma grade quadriculada de modo que cada célula represente uma planta ou um conjunto de plantas. Assim, o estudo deste problema será realizado via Redes de Mapas Acoplados.

Redes de Mapas Acoplados (Coupled Map Lattices - CML) são sistemas dinâmicos que consideram o tempo e o espaço como variáveis discretas enquanto que a densidade é considerada contínua. Foram formuladas pela primeira vez pelo físico Kunihiko Kaneko (KANeko, 1984), como um modelo para o estudo de caos espaço-temporal. Em estudos de Ecologia, o uso deste tipo de modelo surgiu no início da década de 90. Como um exemplo destes estudos pioneiros, podemos citar o modelo de Hassell et al. (1991) para uma dinâmica hospedeiro-parasitoide. Desde então, o número de trabalhos em Ecologia que utilizam redes de mapas acoplados vem aumentando rapidamente.

Nestes modelos, o espaço é discretizado em regiões denominadas *patches* ou sítios. A dinâmica local em cada *patch* é dada por um mapa, equação a diferenças, e a rede é um conjunto de mapas no qual a influência de um *patch* nos outros é dada por uma regra definida, o acoplamento (PONTES, 2008).

Assim, a dinâmica é constituída por duas etapas distintas: a fase de movimentação, na qual ocorre a dispersão espacial dos indivíduos e, após, uma fase de reação, em que ocorrem as interações intra e inter específicas.

Para a construção deste modelo, consideramos um espaço com domínio bidimensional dividido em $n \times n$ *patches*. Cada *patch* será identificado pela sua posição $x = (i, j)$, onde $1 \leq i, j \leq n$.

Estágio de dispersão

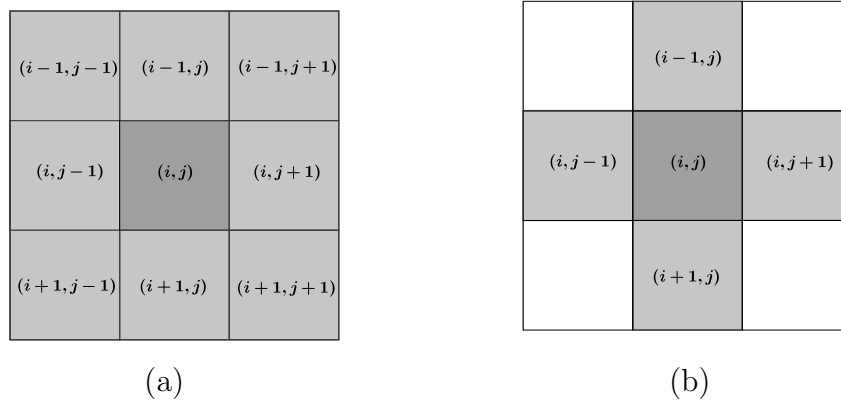
A movimentação ocorre da seguinte forma: a cada etapa discreta de tempo, uma fração μ ($0 \leq \mu \leq 1$) de indivíduos deixa o *patch* x e se dispersa de maneira equitativa para os *patches* pertencentes a uma vizinhança predeterminada, enquanto que a fração $1 - \mu$ representa a fração de indivíduos que permanecem no *patch* x . Na situação mais

simples, μ é considerada constante mas, dependendo do problema, μ pode variar com a densidade de uma ou mais espécies envolvidas no sistema.

Dentre as possíveis vizinhanças, existem duas que são mais usadas: a vizinhança de Moore e a de von Neumann.

A vizinhança de Moore consiste dos oito *patches* mais próximos, conforme ilustrado na Figura 1.1 (a). Por sua vez, a vizinhança de Neumann (Figura 1.1 (b)) considera os quatro vizinhos mais próximos, isto é, $V_x = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$, onde V_x denota a vizinhança do *patch* $x = (i, j)$.

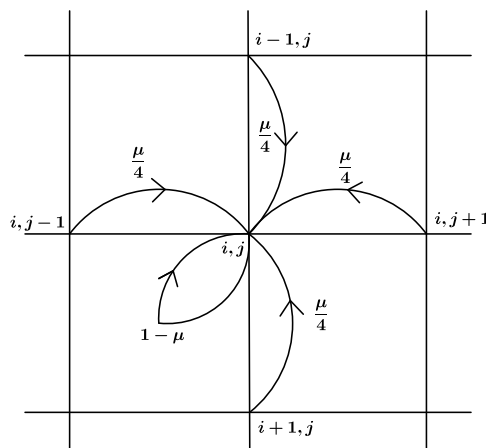
Figura 1.1: (a) Vizinhanças de Moore e (b) von Neumann. A cor cinza claro indica os sítios que compõem a vizinhança do sítio central (cinza escuro).



Fonte: da autora, gerado no software *GeoGebra 5.0*.

A Figura 1.2 ilustra o esquema de movimentação dos indivíduos considerando a vizinhança de von Neumann.

Figura 1.2: Esquema de movimentação dos indivíduos.



Fonte: da autora, gerado no software *GeoGebra 5.0*.

O estágio de dispersão, considerando a vizinhança de Neumann, é descrito pela equação:

$$H'_{x,t} = (1 - \mu)H_{x,t} + \sum_{y \in V_x} \frac{\mu}{4} H_{y,t}, \quad (1.1)$$

onde $H_{x,t}$ e $H'_{x,t}$ representam a densidade de indivíduos na posição x antes e depois da dispersão da geração t , respectivamente.

Para os *patches* que estão localizados nas fronteiras do domínio, é necessário especificar regras para a movimentação de acordo com o comportamento das espécies, formando o que se chama de “Condições de Fronteira”. Há três principais tipos de condições de fronteira:

- Fronteira reflexiva: ao chegarem na fronteira, os indivíduos retornam para o interior do domínio, ficando aí confinados. Pode ocorrer porque os indivíduos possuem algum mecanismo de percepção e decidem permanecer no domínio ou em razão do domínio impedir a movimentação para o exterior como, por exemplo, numa ilha;
- Fronteira absorvente: os indivíduos têm a possibilidade de ultrapassar a fronteira. Porém, não são mais contabilizados a partir do momento que deixam o domínio. Um exemplo em que ocorre esta situação é quando uma região torna-se desfavorável levando os indivíduos de uma população a abandoná-la;
- Fronteira cíclica: os indivíduos que ultrapassam a fronteira são automaticamente inseridos na fronteira oposta, tornando o domínio infinito periódico. Assim, a primeira e a última linha do reticulado tornam-se adjacentes e o mesmo ocorre com a primeira e a última coluna.

Estágio de reação

Após o estágio de dispersão, as interações entre os indivíduos ocorrem localmente, ou seja, dentro de cada *patch*. Assim, o estágio de reação é descrito por uma equação a diferenças ou um conjunto de equações a diferenças de acordo com o número de espécies envolvidas, dadas por

$$H_{x,t+1} = f(H'_{x,t}), \quad (1.2)$$

onde f é uma função que descreve a dinâmica da espécie.

Capítulo 2

MODELO DISCRETO PARA UMA ÚNICA ESPÉCIE EM UM CONSÓRCIO DE CULTURAS

Neste capítulo, analisamos os efeitos do consórcio de duas culturas (uma principal e outra com antibiose) na densidade populacional de uma espécie de inseto com potencial de se tornar uma praga.

Primeiramente, realizamos um estudo da dinâmica local do inseto através de um modelo discreto. Na Seção 2.1, apresentamos o modelo que descreve a dinâmica local do inseto, determinamos as soluções de equilíbrio e analisamos os critérios para estabilidade.

Na Seção 2.2, utilizando redes de mapas acoplados, incluímos a estrutura espacial e a heterogeneidade dada pelas culturas distintas que compõem o domínio. Através de simulações, verificamos os efeitos de diferentes arranjos espaciais (descritos na Subseção 2.2.1) na densidade total de insetos na cultura principal. Além disso, consideramos três tipos de comportamento de movimentação: aleatória (Subseção 2.2.2) e dependente da densidade local (Subseções 2.2.3 e 2.2.4).

2.1 DINÂMICA LOCAL

A dinâmica local do inseto será descrita através de uma equação a diferenças. Estas equações são adequadas para descrever situações em que o crescimento da população ocorre em intervalos de tempo bem definidos, podendo haver sobreposição de gerações ou

não.

Uma equação a diferenças de 1ª ordem em dinâmica de populações é da forma:

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.1)$$

onde x_t representa a densidade da população na geração t e a função f descreve a dinâmica da população.

Apesar de muitas espécies apresentarem, inicialmente, um crescimento exponencial, existem vários fatores que inibem este crescimento, como competição intra-específica ou falta de nutrientes. Desta forma, é razoável considerar uma taxa de crescimento que dependa da densidade de indivíduos. Neste trabalho, utilizaremos a função de crescimento de Ricker, a qual considera a taxa de crescimento dependente da densidade da população. Assim, a dinâmica do inseto é dada pela equação:

$$H_{t+1} = H_t e^\lambda e^{-\frac{H_t}{k}} = f(H_t), \quad (2.2)$$

onde $e^\lambda = f'(0)$ corresponde ao fator de crescimento máximo e $\frac{1}{k}$ é a inibição do crescimento causado pela superpopulação, de modo que $e^{-\frac{H_t}{k}}$ é um fator de mortalidade dependente da densidade (EDELSTEIN-KESHET, 1988; de VRIES et al., 2006). Ressaltamos que nesta parametrização do modelo, o parâmetro λ pode assumir valores negativos, implicando em um fator de crescimento $e^\lambda < 1$.

A fim de reduzir o número de parâmetros no modelo e obter agrupamentos de parâmetros relevantes para a dinâmica do sistema, faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$h_t = \frac{H_t}{k}, \quad (2.3)$$

obtendo assim a versão adimensional do modelo (KAWASAKI e SHIGESADA, 2007; RODRIGUES e MISTRO, 2013):

$$h_{t+1} = h_t e^{\lambda - h_t}, \quad (2.4)$$

onde h_t representa a densidade adimensional de insetos na geração t .

2.1.1 Soluções de equilíbrio

O conceito de equilíbrio está associado à ausência de mudanças em um sistema, isto é, soluções de equilíbrio são aquelas que permanecem constantes ao longo do tempo. (EDELSTEIN-KESHET, 1988). No contexto das equações a diferenças, as soluções de equilíbrio não sofrem variações da geração t para a geração $t + 1$, ou seja, \bar{x} é uma solução de equilíbrio se $x_t = x_{t+1} = \bar{x}$.

O modelo descrito em (2.4) admite duas soluções de equilíbrio, as quais serão representadas por \bar{h} . De acordo com a definição de solução de equilíbrio, \bar{h} deve satisfazer:

$$h_{t+1} = h_t = \bar{h}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \bar{h}e^{\lambda-\bar{h}}, \\ \bar{h}(1 - e^{\lambda-\bar{h}}) &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, uma solução de equilíbrio é $\bar{h}_1 = 0$, a qual corresponde à extinção da espécie, e a segunda solução é $\bar{h}_2 = \lambda$, com $\lambda > 0$ para que o ponto seja biologicamente viável. Observamos que para $\lambda < 0$, o único equilíbrio biologicamente viável é \bar{h}_1 .

2.1.2 Análise da Estabilidade

Analisaremos agora as condições que devem ser satisfeitas para garantirmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio obtidos anteriormente. Iremos utilizar o seguinte critério de estabilidade (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

O ponto de equilíbrio \bar{x} da equação a diferenças

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

é assintoticamente linearmente estável se, e somente se, $|f'(\bar{x})| < 1$, onde f' representa a derivada primeira da função f .

Aplicando o critério de estabilidade para a solução de equilíbrio \bar{h} do modelo (2.4),

vemos que o equilíbrio é estável se, e somente se,

$$|e^{\lambda - \bar{h}}(1 - \bar{h})| < 1. \quad (2.6)$$

Assim, $\bar{h}_1 = 0$ é estável se, e só se,

$$|e^\lambda| < 1, \quad (2.7)$$

isto é, $\lambda < 0$.

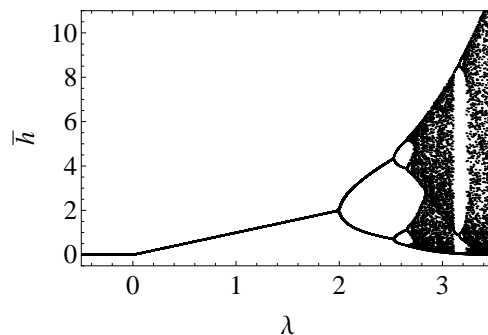
Do mesmo modo, $\bar{h}_2 = \lambda$ é estável se, e somente se,

$$|1 - \lambda| < 1, \quad (2.8)$$

ou seja, $0 < \lambda < 2$.

A Figura 2.1 mostra o diagrama de bifurcação para a equação (2.4) que representa graficamente os valores assintóticos que a solução assume em função de um parâmetro de interesse.

Figura 2.1: Diagrama de bifurcação do modelo (2.4) com relação a λ .



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Através do diagrama de bifurcação, podemos perceber que para $\lambda < 0$ o ponto de equilíbrio $\bar{h}_1 = 0$ é estável, enquanto que para $0 < \lambda < 2$ o equilíbrio $\bar{h}_2 = \lambda$ é estável, o que está de acordo com os resultados obtidos anteriormente. À medida que aumentamos o valor de λ , observamos o surgimento de uma cascata de duplicação de período. Ao considerarmos $\lambda = 2$, notamos que o equilíbrio \bar{h}_2 deixa de ser estável e há o surgimento de um ciclo de período 2, de modo que a solução oscila entre dois valores. Para maiores valores de λ surgem ciclos de período 4 e assim sucessivamente até que para valores de λ suficientemente grandes, um regime caótico é observado.

2.2 MODELO ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO

Nesta seção, consideramos a dinâmica do inseto em um meio espacialmente estruturado, modelado via Redes de Mapas Acoplados. Como ressaltamos anteriormente, o domínio será composto por duas culturas distintas: uma principal e outra com antibiose.

A heterogeneidade do habitat será incorporada no modelo através do parâmetro λ_x que irá assumir valores distintos de acordo com o *patch* $x = (i, j)$. Assim, definimos λ_x do seguinte modo:

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda, & \text{se } x \text{ for um } patch \text{ da cultura principal,} \\ \lambda_c, & \text{se } x \text{ for um } patch \text{ da cultura com antibiose, com } \lambda_c < \lambda. \end{cases} \quad (2.9)$$

Como descrito no Capítulo 1, a dinâmica em modelos de Redes de Mapas Acoplados é composta por dois estágios: movimentação e reação.

O estágio de movimentação é descrito pela equação:

$$h'_{x,t} = (1 - \mu)h_{x,t} + \sum_{y \in V_x} \frac{\mu}{4} h_{y,t}, \quad (2.10)$$

onde $h_{x,t}$ e $h'_{x,t}$ são a densidade de hospedeiros na posição $x = (i, j)$ antes e depois da dispersão da geração t , respectivamente, e μ é a fração de indivíduos que deixa o *patch* x e se dispersa para os *patches* pertencentes à vizinhança V_x dada por $V_x = \{(i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1), (i, j + 1)\}$.

Na natureza, podemos observar diferentes tipos de comportamento de movimentação dos indivíduos. Por exemplo, algumas espécies de insetos herbívoros utilizam o movimento aleatório como uma estratégia para encontrar alimentos (RODRIGUES, 1998). Já outros insetos tendem a permanecer em locais em que a densidade de indivíduos de sua espécie é alta.

Neste contexto, analisaremos três cenários diferentes, de acordo com a movimentação dos indivíduos:

- Cenário 1: assumiremos que os indivíduos se movimentam aleatoriamente, isto é, a movimentação não é influenciada por fatores como a densidade local dos indivíduos;
- Cenário 2: os indivíduos apresentam comportamento de antiagregação, ou seja, os insetos tendem a deixar os sítios com maior densidade de seus coespecíficos;

- Cenário 3: os indivíduos tendem a permanecer em sítios com maior densidade de insetos.

Os diferentes comportamentos de movimentação dos indivíduos serão incorporados no modelo através da fração μ de indivíduos que deixa um sítio, como descrito nas próximas subseções.

Já o estágio de reação é dado pela equação:

$$h_{x,t+1} = h'_{x,t} e^{\lambda_x - h'_{x,t}}. \quad (2.11)$$

Para as simulações deste capítulo e do Capítulo 3, iremos considerar diferentes configurações das duas culturas que compõem o consórcio. Tais configurações são descritas com maiores detalhes na subseção a seguir.

2.2.1 Experimentos Computacionais

Neste trabalho, analisaremos duas questões principais: a área (número de sítios) da cultura secundária que apresenta antibiose e sua distribuição espacial. Para cada um dos cenários de movimentação, realizamos os seguintes experimentos numéricos:

Experimento A) Dinâmica sem consórcio de culturas

Em um primeiro momento, analisaremos a dinâmica da espécie em um domínio de dimensões 40×40 *patches* composto somente pela cultura principal.

Experimento B) Efeitos da área da cultura com antibiose

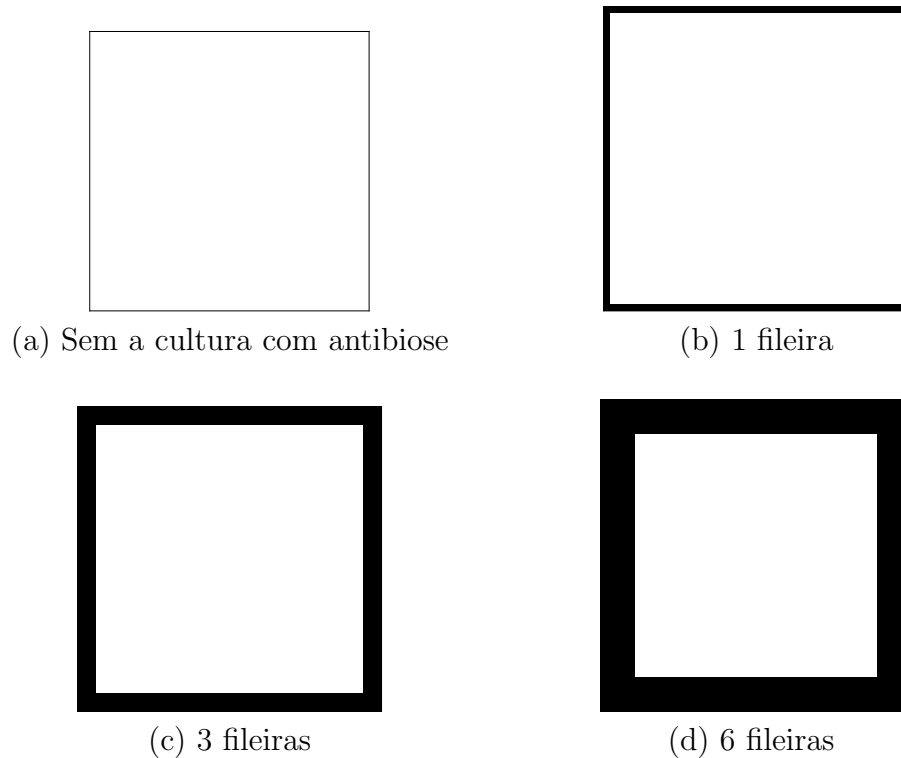
Neste experimento numérico, consideramos que a cultura com antibiose estará disposta em torno da cultura principal. Seguindo esta configuração, iremos aumentar gradativamente a área da cultura secundária, inserindo de uma até seis fileiras desta cultura, a fim de comparar os efeitos da área da cultura secundária sobre a densidade de insetos presentes na cultura principal.

É importante ressaltar que a área da cultura principal terá dimensões 40×40 *patches* em todos os casos analisados neste experimento, de modo que o domínio considerando a cultura com antibiose é maior e tem dimensões variáveis, de acordo com o número de fileiras da cultura secundária que são introduzidas. Desta forma, as dimensões

do domínio total variam de 42×42 até 52×52 sítios.

Na Figura 2.2, ilustramos alguns destes casos, onde a área branca representa a cultura principal e a área em preto a cultura secundária com antibiose. Na legenda, está especificado o número de fileiras da cultura secundária que foram inseridas no domínio.

Figura 2.2: Configuração espacial da cultura secundária (preto) em torno da cultura principal (branco)



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Experimento C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

Neste experimento numérico, a cultura principal possuirá aproximadamente a mesma quantidade de *patches*, isto é, vamos manter a área da cultura principal em torno de 1600 *patches*. Já a área da cultura secundária será aproximadamente 20% da área da cultura principal, distribuída de diferentes maneiras no domínio. Para isto, nas simulações, o domínio total terá dimensões 44×44 *patches*.

Serão considerados seis diferentes arranjos de acordo com a distribuição da cultura secundária:

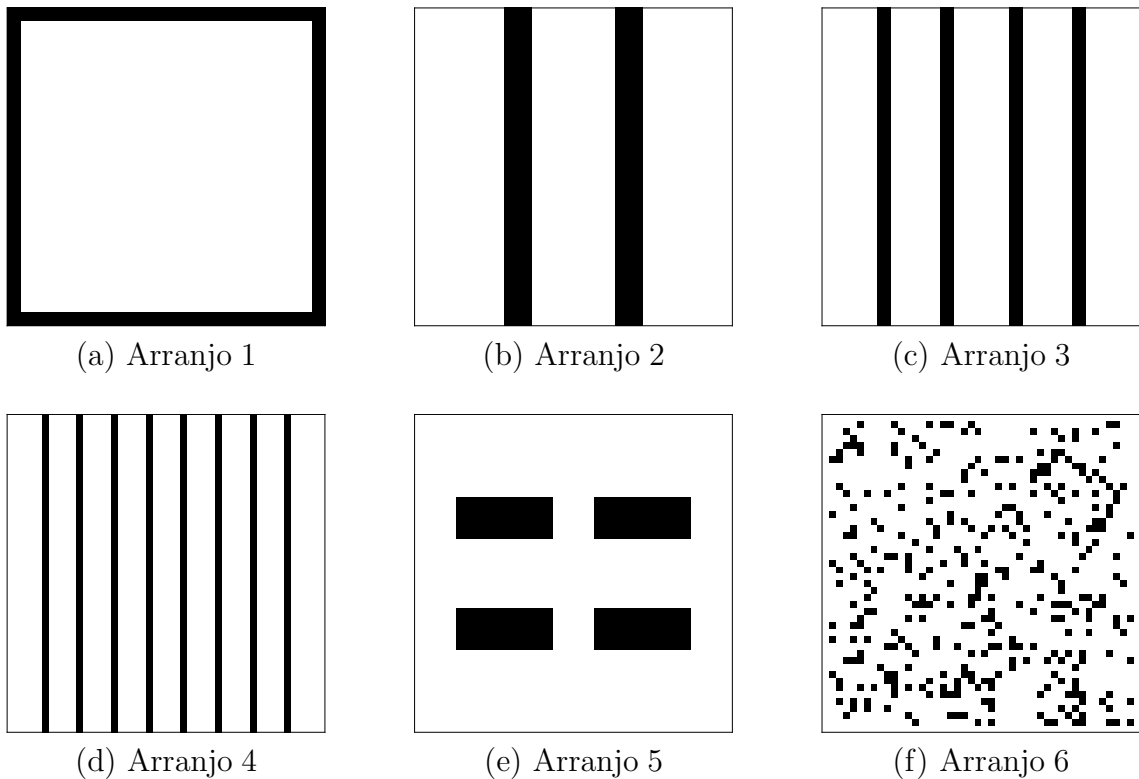
- Arranjo 1: corresponde a duas fileiras da cultura secundária adicionadas em torno da cultura principal. Neste arranjo, a área da cultura com antibiose é composta por

336 *patches*;

- Arranjo 2: a cultura secundária será disposta no domínio em forma de 2 listras com dimensões 4×44 *patches*, cada. Assim, a área da cultura com antibiose é constituída por 352 *patches*;
- Arranjo 3: distribuição da cultura secundária em 4 listras com dimensões 2×44 *patches* cada, totalizando 352 *patches*;
- Arranjo 4: distribuição da cultura secundária em 8 listras com dimensões 1×44 *patches* cada, totalizando 352 *patches*;
- Arranjo 5: distribuição da cultura secundária em 4 blocos com dimensões 6×14 *patches* cada, correspondendo a um total de 336 *patches*,
- Arranjo 6: a cultura secundária será distribuída de maneira aleatória pelo domínio. Neste caso, a área da cultura secundária é composta por 336 *patches*.

Estes diferentes arranjos estão ilustrados na Figura 2.3, onde o domínio é constituído pela cultura principal (cor branca) e pela cultura com antibiose (cor preta). Observamos que os arranjos de 1 a 5 levam em consideração a necessidade de efetuar a colheita da cultura principal, muitas vezes efetuada através de maquinário. Portanto, a distribuição espacial das culturas que compõem o consórcio deve ter uma forma geométrica simples. Além da importância teórica, o arranjo 6 poderia ser aplicado para diferentes cultivares de uma mesma espécie ou, alternativamente, a cultura secundária poderia ser um transgênico de uma mesma cultura (milho, por exemplo).

Figura 2.3: Diferentes configurações espaciais da cultura secundária (preto) com a cultura principal (branco)



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Medida de eficiência

É necessário uma forma de quantificar a eficiência que cada arranjo espacial oferece ao controle de uma população de pragas na cultura principal. Para isso, utilizaremos o percentual de decréscimo da população de pragas após t_f gerações. Este percentual é dado pela seguinte expressão:

$$E = \frac{\sum_{t=1}^{t_f} \sum_{x \in \Omega} \bar{h}_x^t - \sum_{t=1}^{t_f} \sum_{x \in \Omega} h_x^t}{\sum_{t=1}^{t_f} \sum_{x \in \Omega} \bar{h}_x^t}, \quad (2.12)$$

onde \bar{h}_x^t é a densidade de pragas no *patch* x e tempo t considerando o domínio homogêneo, isto é, composto somente pela cultura principal, h_x^t é a densidade de pragas no *patch* $x \in \Omega$ e tempo t mas com domínio composto pelas duas culturas e Ω é o domínio composto por *patches* da cultura principal (WILDER et al., 1994).

O valor E indica o percentual de redução que a presença da cultura com antibiose produz na população de insetos na cultura principal. Desta forma, quanto maior for a redução da população do caso homogêneo para o heterogêneo, maior será a eficiência deste consórcio.

Simulações

Vamos iterar as equações (2.10) e (2.11) em um domínio $n \times n$ cujas dimensões irão variar de acordo com a configuração da cultura secundária. Em todas as simulações, consideramos 600 gerações e o habitat com condições de fronteiras reflexivas. Como distribuição inicial, os insetos serão lançados apenas no *patch* $x_0 = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ com densidade $h_{x_0,0} = 0,1$; nos demais sítios, a densidade é inicialmente nula. Ainda, densidades que assumirem valores abaixo da ordem 10^{-12} serão definidas como zero.

O parâmetro λ na cultura principal será fixo em $\lambda = 0,1$ enquanto que na cultura com antibiose, usaremos os valores $\lambda_c = 0,01$ (representando uma resistência moderada) e $\lambda_c = -1$ (representando uma alta resistência). Os valores escolhidos para o parâmetro λ_c também correspondem a diferentes comportamentos da dinâmica local dos indivíduos, visto que para $\lambda_c = -1$ o equilíbrio $\bar{h}_1 = 0$ é estável, enquanto para $\lambda_c = 0,01$ o equilíbrio $\bar{h}_2 = \lambda$ é estável.

Para a fração de indivíduos que abandona cada *patch*, usaremos os valores $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,6$ dependendo do experimento, como será especificado. Os parâmetros relativos às movimentações dependentes da densidade serão apresentados oportunamente.

A Tabela 2.1 apresenta todos os valores dos parâmetros que serão utilizados neste capítulo.

Tabela 2.1: Parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valores	Descrição
λ	0,1	e^λ é o fator de crescimento máximo na cultura principal
λ_c	-1; 0,01	e^{λ_c} é o fator de crescimento máximo na cultura com antibiose
μ	0,1; 0,6	fração de indivíduos que deixa um sítio (no cenário 1)
$\bar{\mu}$	0,1; 0,6	fração migratória máxima dos indivíduos (nos cenários 2 e 3)

2.2.2 Cenário 1: Movimentação aleatória

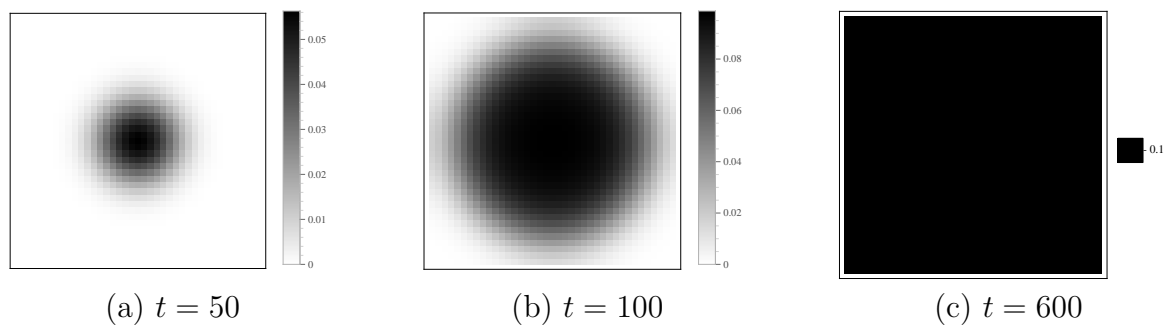
Neste primeiro caso, a fração μ será constante em todos os *patches* do domínio, ou seja, a fração de indivíduos que irá deixar o *patch* não levará em consideração fatores como a densidade local de indivíduos ou da cultura correspondente à sua posição. Este tipo de movimentação corresponde, na escala macroscópica, a um processo de difusão (PARIGI, 2013; RODRIGUES et al., 2013). Isto é, os indivíduos se dispersam aleatoriamente sem apresentar nenhum tipo de preferência ou tendência na movimentação.

Nas simulações dos experimentos (A) e (B), a fração de indivíduos que abandona cada *patch* será assumida $\mu = 0,6$. Já no experimento (C), usaremos dois valores para μ ($\mu = 0,1$ e $\mu = 0,6$).

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

Na Figura 2.4, estão ilustradas as distribuições espaciais dos insetos no domínio em três etapas de tempo. A densidade total dos insetos em todo domínio no decorrer das gerações está representada na Figura 2.5.

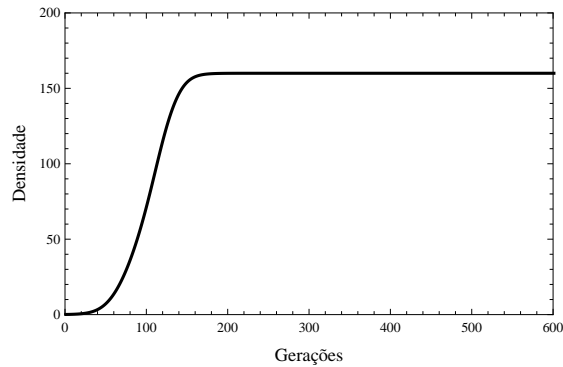
Figura 2.4: Distribuição espacial dos indivíduos na cultura principal em diferentes etapas de tempo. Parâmetros: $\lambda = 0,1$ e $\mu = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Observamos que cada um dos 1600 *patches* que compõem o domínio possui densidade 0,1 na última geração, este valor deve-se à dinâmica local da espécie, visto que para os valores dos parâmetros considerados, o equilíbrio $\bar{h}_2 = \lambda$ é estável. Desta forma, a densidade total de indivíduos assume valor máximo igual a 160, como pode ser observado na Figura 2.5.

Figura 2.5: Densidade total de indivíduos na cultura principal.

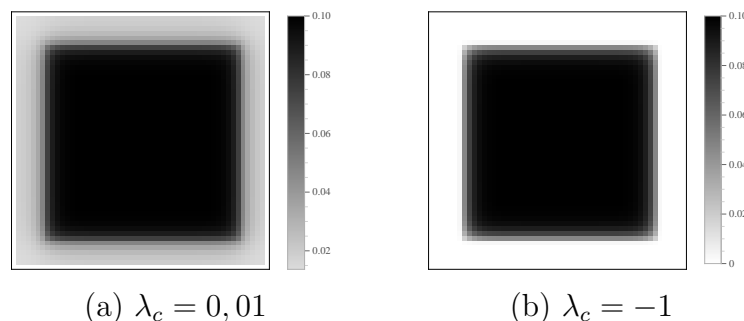


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

A Figura 2.6 ilustra a distribuição espacial dos indivíduos considerando os casos $\lambda_c = 0,01$ (Figura 2.6 (a)) e $\lambda_c = -1$ (Figura 2.6 (b)). O domínio considerado é composto pela cultura principal (dimensões 40×40 *patches*) e 6 fileiras da cultura com antibiose em torno desta, totalizando um domínio de dimensões 52×52 *patches*. As distribuições espaciais para as demais configurações (em que 1 até 5 fileiras da cultura secundária foram adicionadas ao domínio) serão omitidas, visto que a distribuição espacial dos indivíduos nas culturas apresentaram comportamento semelhante ao observado para o caso em que foram inseridas 6 fileiras.

Figura 2.6: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio heterogêneo na geração $t = 600$. Parâmetros: $\lambda = 0,1$ e $\mu = 0,6$.



(a) $\lambda_c = 0,01$

(b) $\lambda_c = -1$

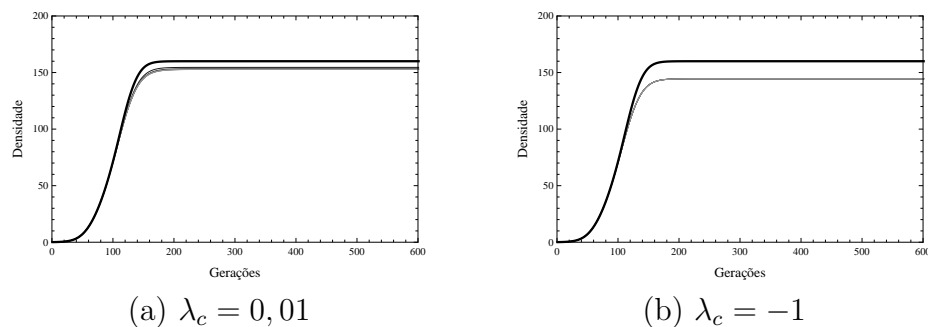
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Conforme a distribuição espacial dos indivíduos na última geração, notamos a diferença na densidade de insetos na cultura principal para a área da cultura secundária. Esta diferença deve-se ao fator de crescimento dos indivíduos ser menor na cultura que

apresenta resistência por antibiose ao inseto. Ainda, quanto maior o nível da resistência da cultura secundária (neste caso representado por $\lambda_c = -1$), menor é a densidade de indivíduos nesta região.

A comparação da densidade total de insetos presentes somente na cultura principal no caso em que a segunda cultura é ausente (cor preta) com casos em que a segunda cultura está presente (tons de cinza) está ilustrada na Figura 2.7. Os resultados para cada número de fileiras da cultura secundária estão representados através de diferentes tons de cinza, a tonalidade da cor diminui à medida que aumentamos a área da cultura secundária. Observamos que a densidade de insetos diminui com a inclusão da cultura com antibiose, porém a redução não depende do número de fileiras acrescentadas.

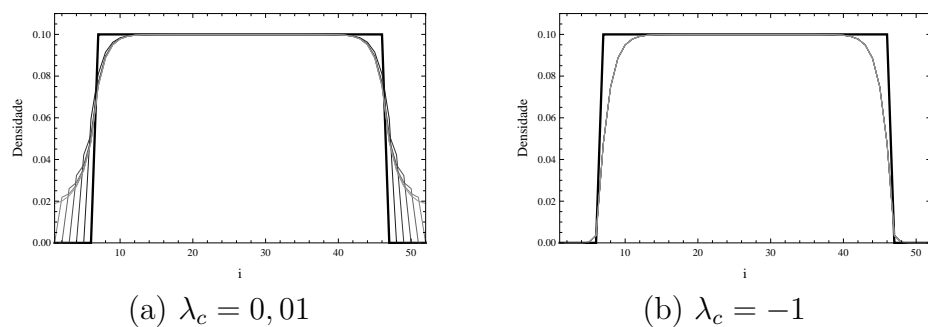
Figura 2.7: População total de indivíduos presentes na cultura principal, considerando o domínio composto somente pela cultura principal (preto) e com a presença da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A Figura 2.8 apresenta a densidade populacional ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na última iteração.

Figura 2.8: Corte na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio considerando o domínio sem a cultura com antibiose (em preto) e com a cultura com antibiose (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Podemos perceber através da Figura 2.8 (a) e (b) que há uma redução na densidade populacional na área da cultura principal ($7 \leq j \leq 46$) do caso em que não é usada

antibiose para os casos com a presença da cultura secundária. Notamos ainda que esta redução é maior no caso $\lambda_c = -1$ do que no caso $\lambda_c = 0, 1$.

Quantificamos a influência da antibiose da cultura secundária na densidade populacional dos indivíduos presentes na cultura principal através do percentual de decréscimo E da população dado pela expressão (2.12).

Para avaliar os efeitos do aumento da área da cultura secundária, utilizaremos o parâmetro γ , o qual representa a fração do número de sítios da cultura secundária pelo número de sítios da cultura principal. Por exemplo, o primeiro caso consiste de somente uma fileira da cultura secundária acrescentada em torno da cultura principal resultando, portanto, em um domínio total com dimensões 42×42 *patches*.

A quantidade s de *patches* que compõem a área da cultura secundária, para esta configuração, é dada pela seguinte expressão:

$$s = 4l^2 + 160l, \quad (2.13)$$

onde l é a quantidade de fileiras da cultura secundária adicionadas em torno da cultura principal.

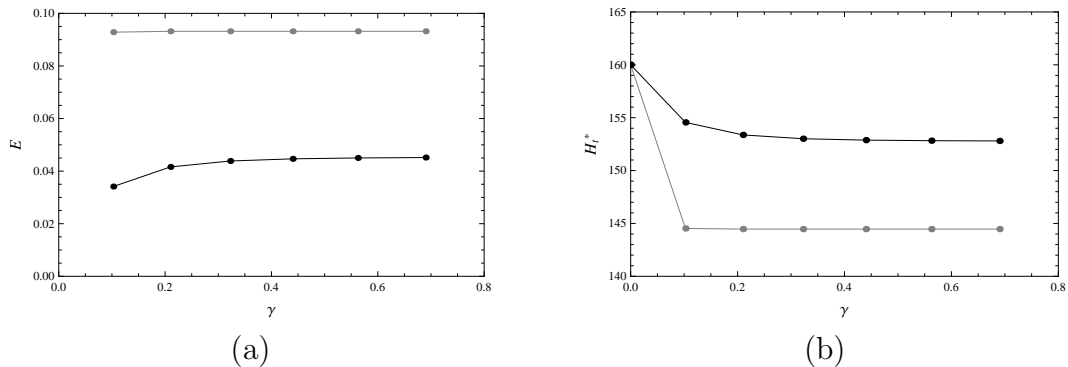
Desta forma, a cultura secundária é composta por 164 *patches* quando acrescentamos apenas uma fileira. Como descrito anteriormente, a área da cultura principal é mantida a mesma em todas as simulações, com dimensões 40×40 *patches*, o que corresponde a um total de 1600 *patches*. Assim, neste exemplo

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{164}{1600} \\ &\approx 0,103. \end{aligned}$$

Como acrescentamos seis diferentes áreas da cultura secundária (acrescentando de 1 até 6 fileiras em torno da cultura principal), o valor de γ assume valores entre 0,103 (caso de 1 fileira) até 0,69 (correspondente a 6 fileiras).

Na Figura 2.9 (a) está ilustrado o percentual de decréscimo da população E (definido na Subseção 2.2.1) obtido para as diferentes proporções de área da cultura secundária e considerando $t_f = 600$. Analisamos também a densidade total assintótica dos indivíduos aproximada por H_t^* para $t = 600$ (Figura 2.9 (b)). O caso $\gamma = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Figura 2.9: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica para $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

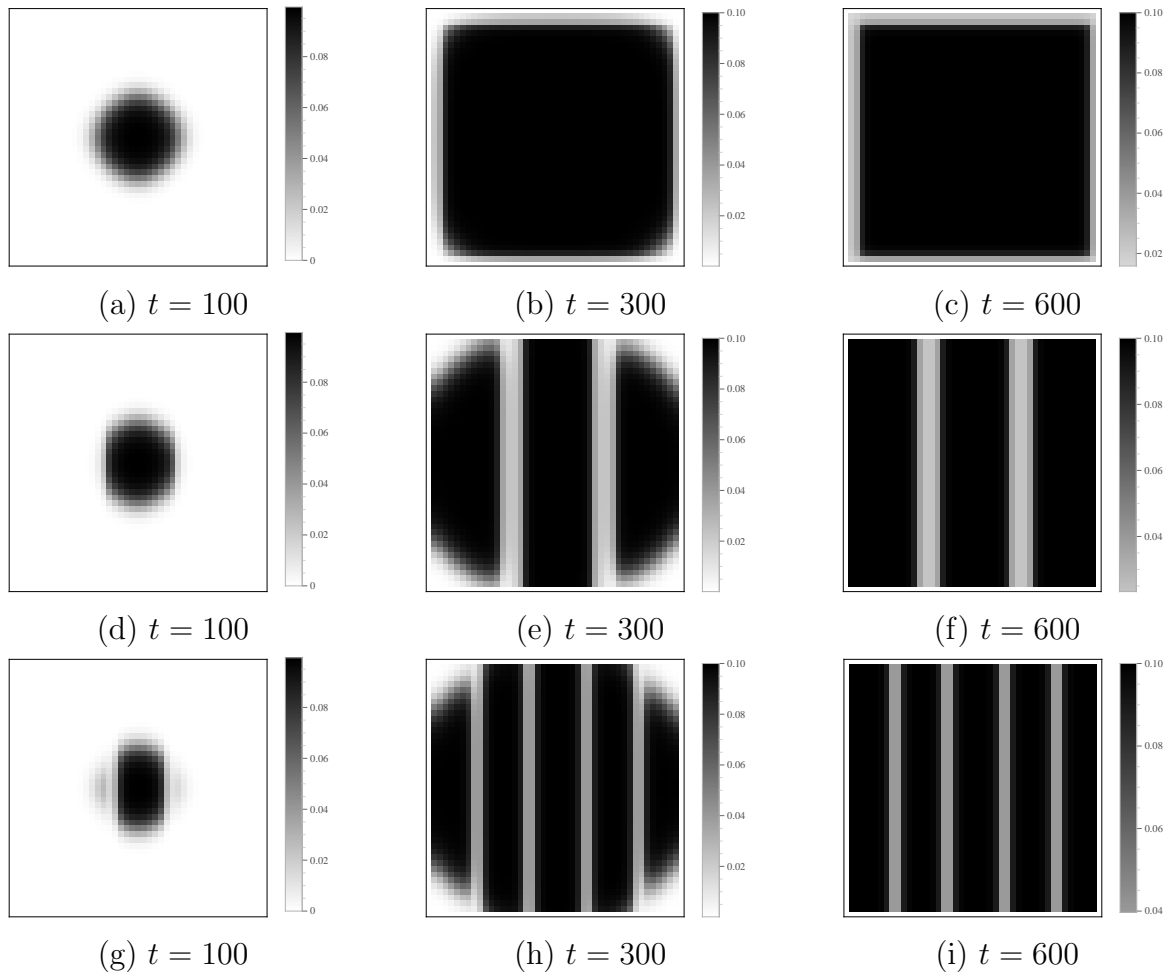
De acordo com os resultados obtidos através das simulações, podemos concluir que não há diferença significativa na densidade populacional dos indivíduos na cultura principal quando aumentamos a área da cultura secundária. Em outras palavras, acrescentar uma fileira da cultura secundária em torno da cultura principal terá aproximadamente os mesmos efeitos na população de indivíduos do que acrescentar seis fileiras desta cultura. O que influencia de fato a densidade populacional é o efeito que a cultura secundária tem sobre o crescimento dos indivíduos, representado pelo parâmetro λ_c . Quanto maior a resistência da planta ao inseto, maior será a redução na densidade da população.

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

- Resultados obtidos fixando o parâmetro $\lambda_c = 0,01$ e considerando os parâmetros de movimentação $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,6$.

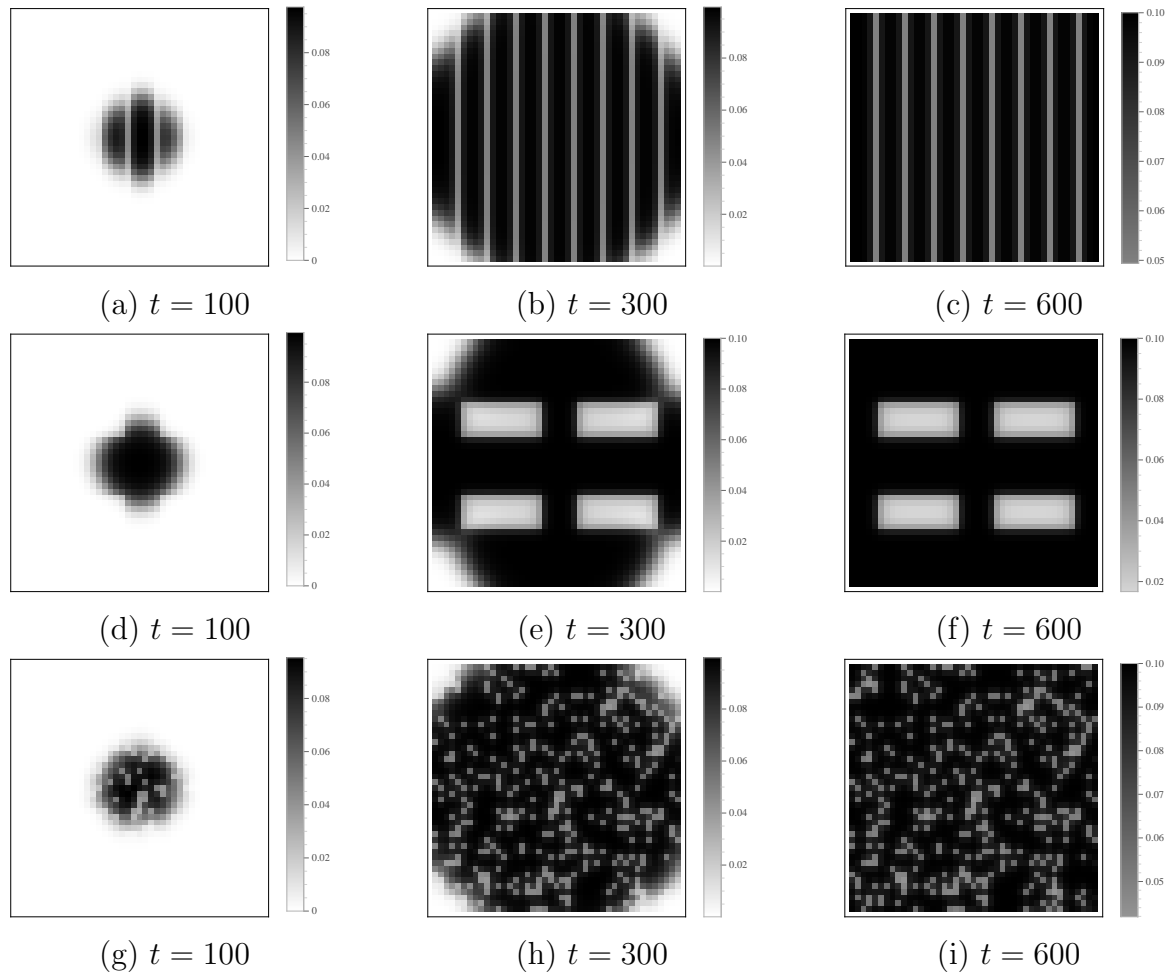
As Figuras 2.10 e 2.11 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos no domínio de dimensões 44×44 patches para os diferentes arranjos entre as culturas definidos em 2.2.1, considerando $\lambda_c = 0,01$ e $\mu = 0,1$.

Figura 2.10: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2 e (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\mu = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.11: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5 e (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\mu = 0,1$.

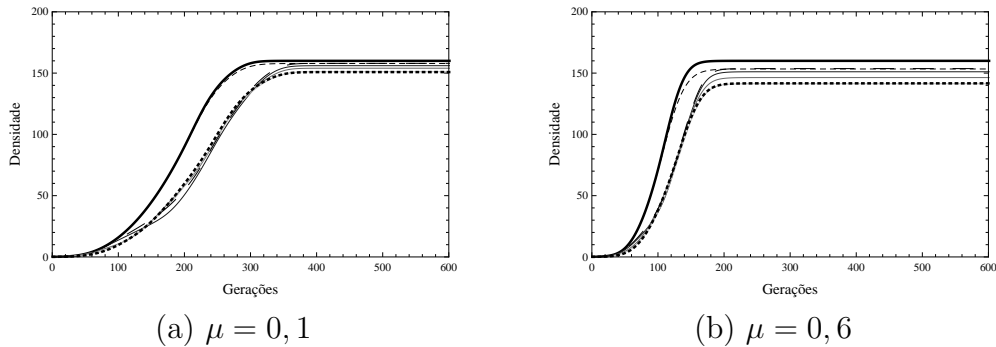


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.12 está ilustrada a densidade total dos insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos descritos na Subseção 2.2.1.

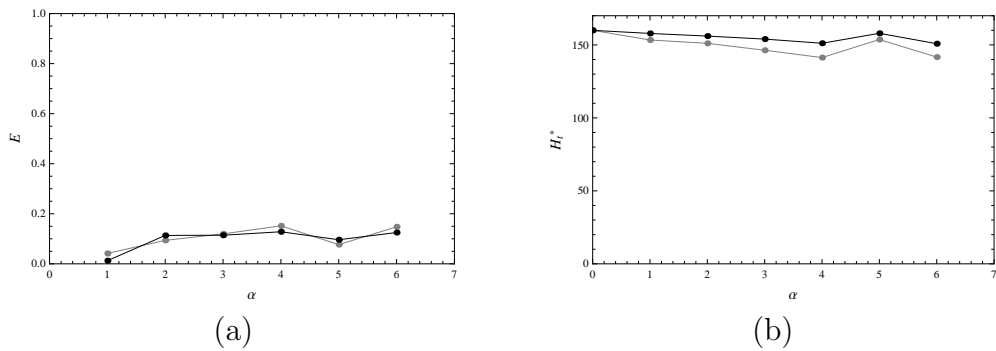
O percentual de decrescimento E e a densidade total assintótica dos indivíduos H_t^* estão ilustrados na Figura 2.13, onde o eixo α representa o arranjo das culturas considerado. Assim, $\alpha = 1$ corresponde ao Arranjo 1, $\alpha = 2$ corresponde ao Arranjo 2 e assim sucessivamente. Os pontos estão unidos para melhor visualização.

Figura 2.12: População total de indivíduos na cultura principal. Sem antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior), Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.13: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica da população. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\mu = 0,1$ (preto) e $\mu = 0,6$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Nota-se que a principal diferença na evolução da população total para os dois parâmetros de movimentação estudados é que, com $\mu = 0,6$ os indivíduos atingem a densidade de equilíbrio em cada *patch* do domínio mais rapidamente quando comparada ao parâmetro $\mu = 0,1$ (Figura 2.12). Além disso, a densidade total assintótica assume valores menores no caso $\mu = 0,6$, independente do arranjo das culturas, conforme mostra a Figura 2.13 (b).

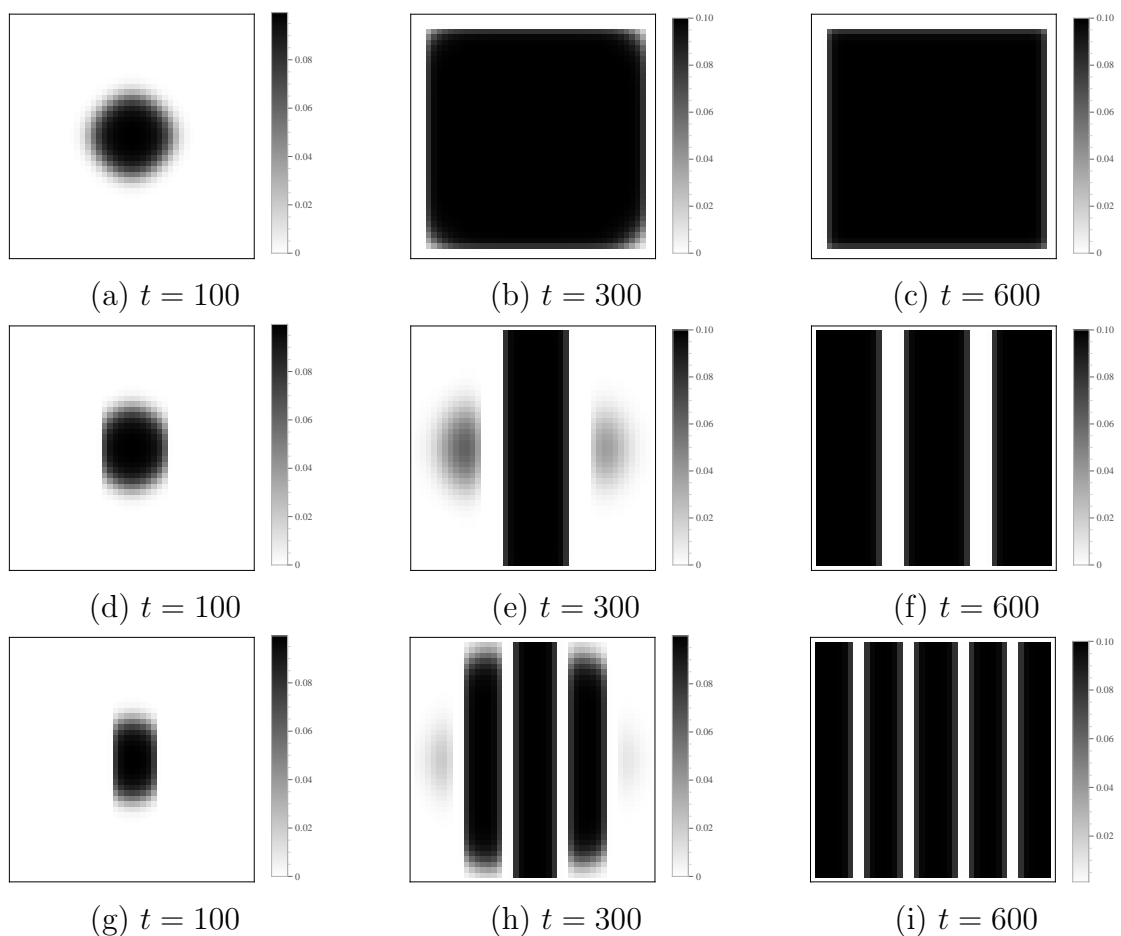
Analisando o percentual de decrescimento da população (Figura 2.13 (a)), percebemos que todos os arranjos apresentam percentuais baixos. No caso $\mu = 0,1$, os arranjos 4 (em que a cultura secundária está distribuída em 8 listras) e o arranjo 6 (distribuição de maneira aleatória) apresentaram melhores resultados quando comparados aos demais casos, ou seja, estas configurações espaciais foram as que mais reduziram a densidade de indivíduos na cultura principal. Resultado semelhante foi obtido nas simulações com $\mu = 0,6$, porém com percentuais de decrescimento um pouco maiores que o caso $\mu = 0,1$.

Uma justificativa para tais resultados seria a proximidade entre a área secundária e a posição da condição inicial, observada neste dois arranjos. Quanto menor a distância entre esses dois elementos, menos tempo é necessário para o inseto chegar na cultura com antibiose e portanto por mais tempo estaria exposto aos seus efeitos.

- Resultados obtidos fixando $\lambda_c = -1$ e parâmetros de movimentação $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,6$.

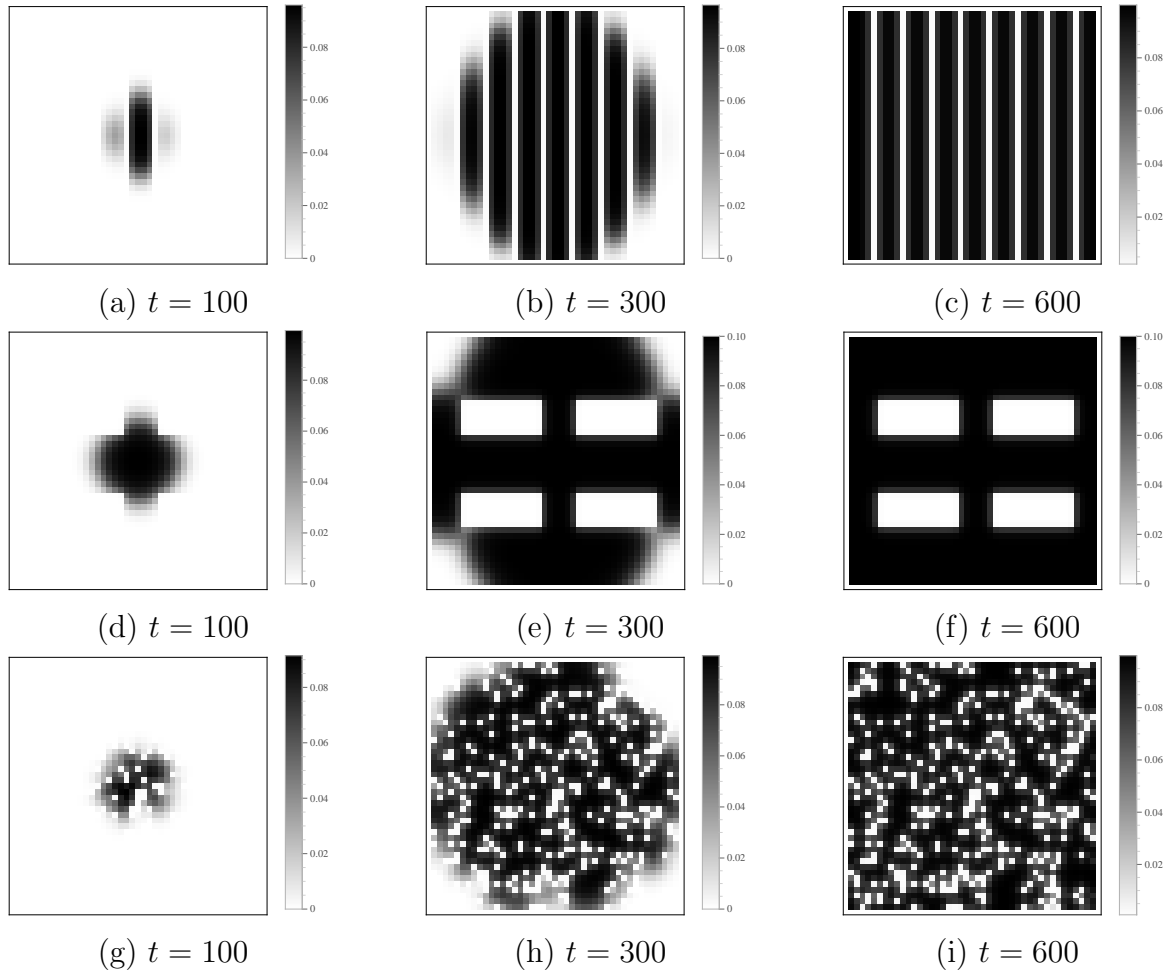
As Figuras 2.14 e 2.15 apresentam a distribuição espacial dos indivíduos no domínio nas gerações 100, 300 e 600, considerando diferentes arranjos das culturas e os parâmetros $\lambda_c = -1$ e $\mu = 0,1$.

Figura 2.14: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\mu = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.15: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5 e (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\mu = 0, 1$.

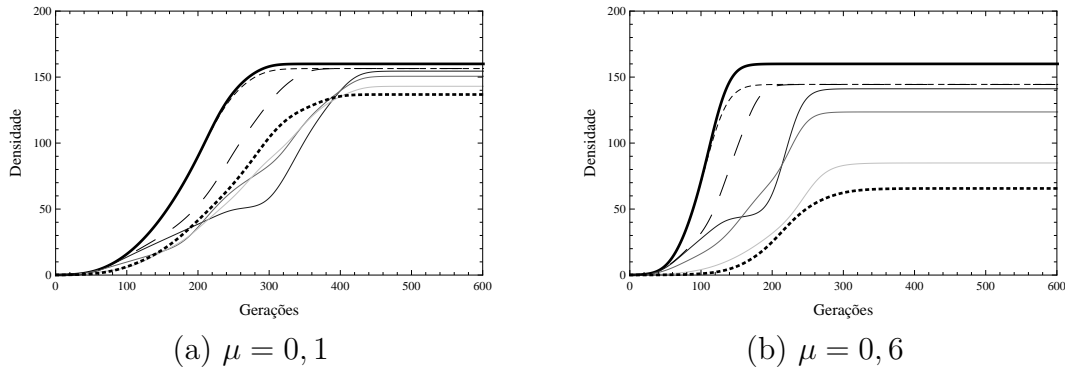


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.16 está ilustrada a densidade total dos insetos na cultura principal, considerando os diferentes arranjos das culturas principal e secundária.

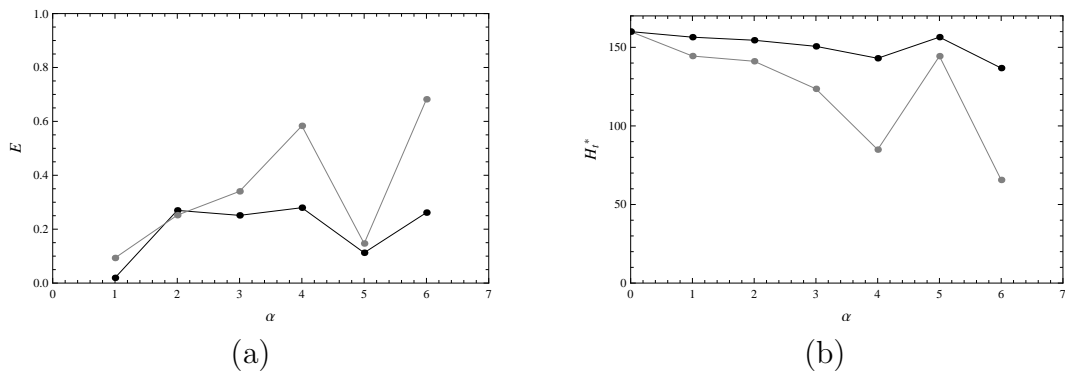
O percentual de decréscimo E e a densidade total assintótica dos indivíduos H_t^* estão ilustrados na Figura 2.17.

Figura 2.16: População total de indivíduos na cultura principal. Domínio composto somente pela cultura principal (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.17: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica dos indivíduos. Parâmetros: $\lambda_c = -1$, $\mu = 0, 1$ (preto) e $\mu = 0, 6$ (cinza).

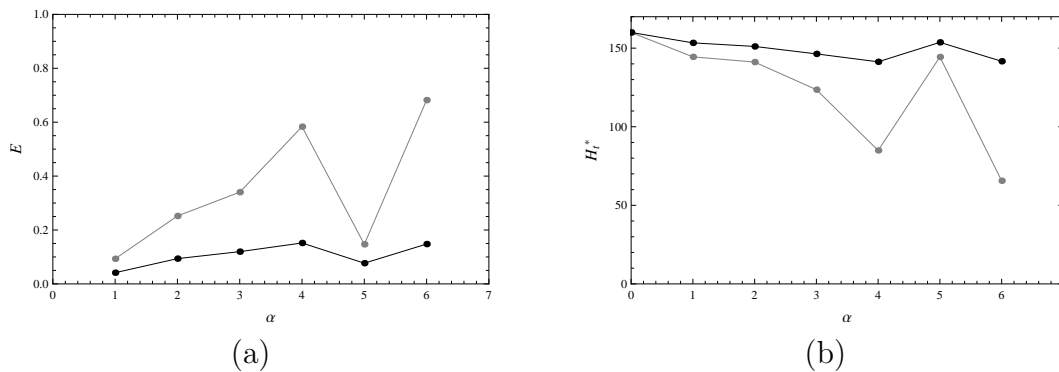


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com os resultados obtidos através das simulações, os arranjos 2, 3 e 4 (cultura secundária disposta em 2, 4 e 8 listras, respectivamente) e o arranjo 6 (cultura secundária distribuída de maneira aleatória) apresentaram percentuais de decrescimento da população semelhantes e maiores que os obtidos pelos arranjos restantes, no caso em que $\mu = 0, 1$. Já nas simulações considerando $\mu = 0, 6$, as configurações em que a segunda cultura está disposta de maneira aleatória e em 8 listras apresentaram os maiores percentuais de decrescimento. Em relação à densidade total assintótica dos indivíduos H_t^* , em todos os arranjos considerados, o caso $\mu = 0, 6$ obteve menores valores que o caso $\mu = 0, 1$.

- Comparação dos resultados obtidos fixando $\mu = 0, 6$ e parâmetros $\lambda_c = 0, 01$ e $\lambda_c = -1$.

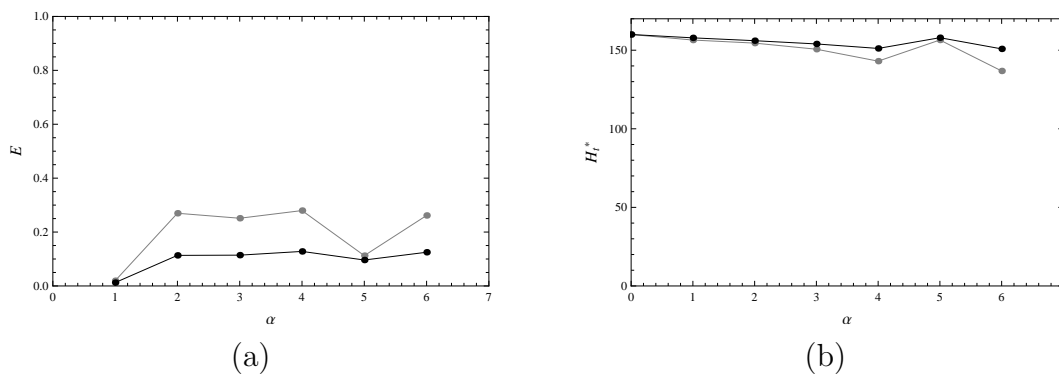
Figura 2.18: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica dos indivíduos. Parâmetros: $\mu = 0,6$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

- Comparação dos resultados obtidos fixando $\mu = 0,1$ e parâmetros $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$.

Figura 2.19: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica dos indivíduos. Parâmetros: $\mu = 0,1$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Através das Figuras 2.18 e 2.19, notamos que, em todos os arranjos estudados, o caso $\lambda_c = -1$ apresentou maiores percentuais de decrescimento E e a população assumiu menores valores para H_t^* , quando comparado ao caso $\lambda_c = 0,01$.

Ainda, os arranjos 4 e 6 foram os que obtiveram os maiores percentuais de decrescimento, quando consideramos $\mu = 0,6$. Já nas simulações com $\mu = 0,1$, os arranjos 2, 3, 4 e 6 apresentaram valores para E semelhantes mas superiores que os demais arranjos considerados.

Estes resultados sugerem que, considerando os arranjos estudados e a proporção entre as duas culturas escolhida, a melhor forma de reduzir a densidade populacional do inseto na cultura principal é dispor a cultura secundária em 8 listras ou de maneira aleatória. Estas distribuições apresentam maiores percentuais de decrescimento quando considerado o caso $\lambda_c = -1$ do que no caso $\lambda_c = 0,01$, visto que uma cultura com alto grau de resistência reduz mais a densidade de indivíduos que uma cultura com resistência moderada, e em casos que assumimos $\mu = 0,6$ comparado ao caso $\mu = 0,1$, já que indivíduos que possuem uma taxa de movimentação maior chegam mais rapidamente na cultura com antibiose.

2.2.3 Cenário 2: Movimentação dependente da densidade local (Antiagregação)

Nessa subseção, vamos considerar que a fração de indivíduos que deixa um *patch* e se desloca para os *patches* vizinhos depende da densidade local, de modo que, em um *patch* com baixa densidade de indivíduos, a fração que deixa este *patch* é baixa. Já em *patches* em que a densidade de indivíduos for suficientemente alta, a fração migratória atinge valores maiores. Ou seja, a fração de indivíduos que deixa o *patch* é maior em sítios onde há maior densidade de indivíduos.

Para incluir este tipo de movimentação no modelo, utilizaremos a função de Hill dada por

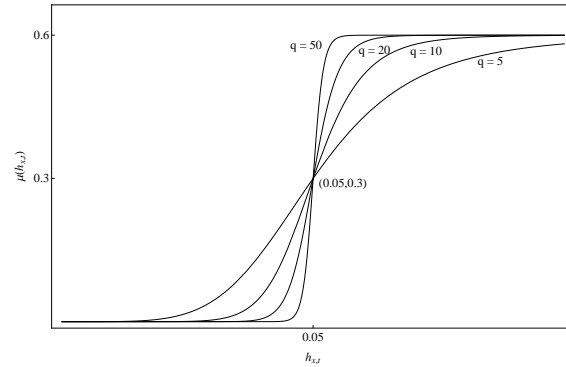
$$\mu(h_{x,t}) = \frac{\bar{\mu} \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q}, \quad (2.14)$$

onde $\bar{\mu}$ é a fração migratória máxima, $h_{x,t}$ é a densidade de insetos na posição x e geração t , q (inteiro maior que 1) é o parâmetro que regula a forma da função μ e A é a densidade populacional para a qual a função migratória atinge metade do seu valor máximo (GIORDANI, 2003). A Figura 2.20 mostra o comportamento da função $\mu(h_{x,t})$ para diferentes valores do parâmetro q . Podemos perceber que à medida que aumentamos o valor de q , a quantidade de indivíduos que migra de um *patch* para outro se aproxima da fração migratória máxima $\bar{\mu}$ de maneira mais abrupta. Assim, no limite quando $q \rightarrow +\infty$ temos

$$\mu(h_{x,t}) = \begin{cases} 0, & \text{se } h_{x,t} < A \\ \frac{\bar{\mu}}{2}, & \text{se } h_{x,t} = A \\ \bar{\mu}, & \text{se } h_{x,t} > A. \end{cases} \quad (2.15)$$

Em outras palavras, quando $q \rightarrow +\infty$, não há migração a partir do *patch* x se a densidade local de indivíduos for menor que A . Se a densidade de indivíduos for igual à A então a taxa de migração será metade da fração migratória máxima $\bar{\mu}$ e, se a densidade for maior que A , então a fração migratória será igual a $\bar{\mu}$.

Figura 2.20: Função $\mu(h_{x,t})$ com $A = 0,05$, $\bar{\mu} = 0,6$ e valores de q igual a 5, 10, 20 e 50.



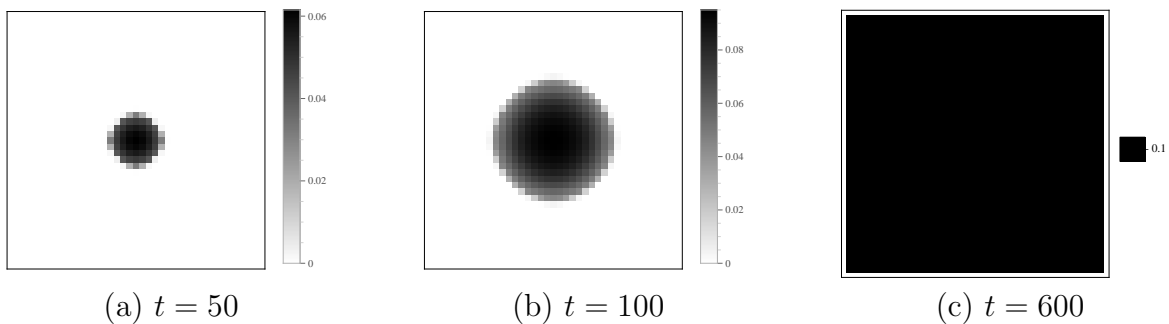
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Nas simulações dos experimentos **(A)** e **(B)** iremos considerar os parâmetros $\lambda = 0, 1$, $A = \frac{\lambda}{2}$, $q = 5$ e $\bar{\mu} = 0,6$ de maneira que a função $\mu(h_{x,t})$ se comporte conforme a curva correspondente na Figura 2.20. Já no experimento **(C)**, além dos valores apresentados, iremos considerar também o caso em que $\bar{\mu} = 0,1$.

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

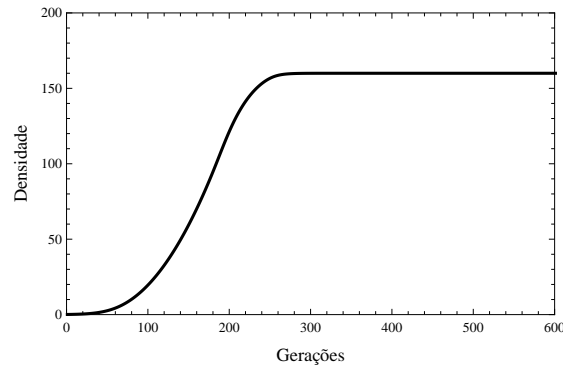
Na Figura 2.21 estão ilustradas as distribuições espaciais dos insetos no domínio em três etapas de tempo. A densidade total dos insetos em todo domínio, no decorrer das gerações, está representada na Figura 2.22.

Figura 2.21: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio composto somente pela cultura principal em diferentes etapas de tempo. Parâmetros: $\lambda = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.22: Densidade total de indivíduos no domínio composto pela cultura principal.



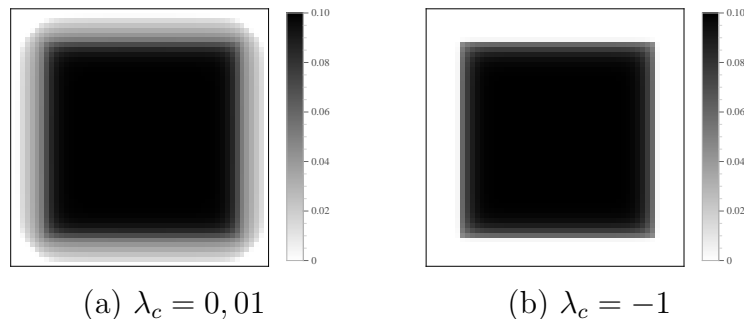
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Comparando a densidade total de indivíduos no caso em que a movimentação ocorre de maneira aleatória (Figura 2.5) ao caso em que a movimentação é dependente da densidade local (Figura 2.22), percebemos que são necessárias mais gerações para os indivíduos atingirem a densidade de equilíbrio em cada *patch* quando a movimentação representa um comportamento de antiagregação.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

A Figura 2.23 ilustra a distribuição espacial dos indivíduos, na geração $t = 600$, considerando os casos $\lambda_c = 0,01$ (Figura 2.23 (a)) e $\lambda_c = -1$ (Figura 2.23 (b)). O domínio considerado é composto pela cultura principal (40×40 *patches*) e 6 fileiras da cultura com antibiose em torno desta, totalizando um domínio de dimensões 52×52 *patches*.

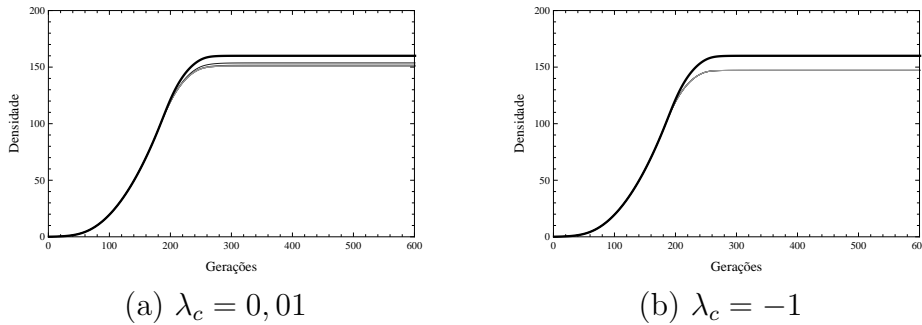
Figura 2.23: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio heterogêneo na geração $t = 600$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A comparação da densidade total de insetos presentes somente na cultura principal no caso em que o domínio é composto somente pela cultura principal (cor preta) para os casos em que a cultura secundária está presente (tons de cinza) está ilustrada na Figura 2.24.

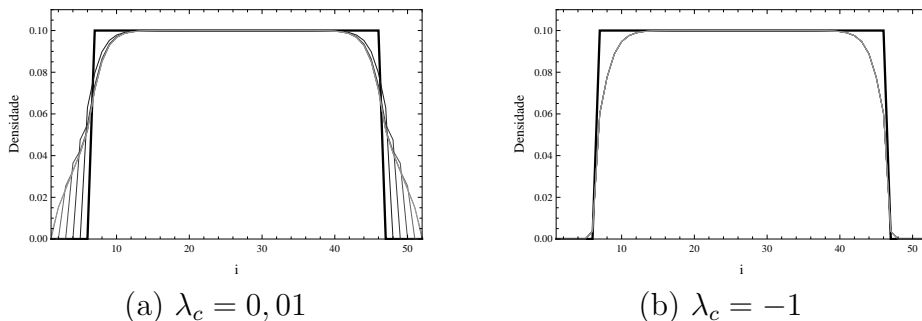
Figura 2.24: População total de indivíduos presentes na cultura principal, considerando o domínio composto somente pela cultura principal (preto) e com a presença da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Percebemos que a inclusão da cultura com antibiose ao domínio reduz a população total de indivíduos na cultura principal. Esta redução é maior quando assumimos que o nível de resistência apresentado nesta cultura secundária é maior, isto é, quando ela afeta o crescimento dos insetos com maior intensidade. Nas simulações, este caso é representado pelo parâmetro $\lambda_c = -1$. Este resultado também pode ser observado quando realizamos um corte na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na iteração 600, ilustrado na Figura 2.25.

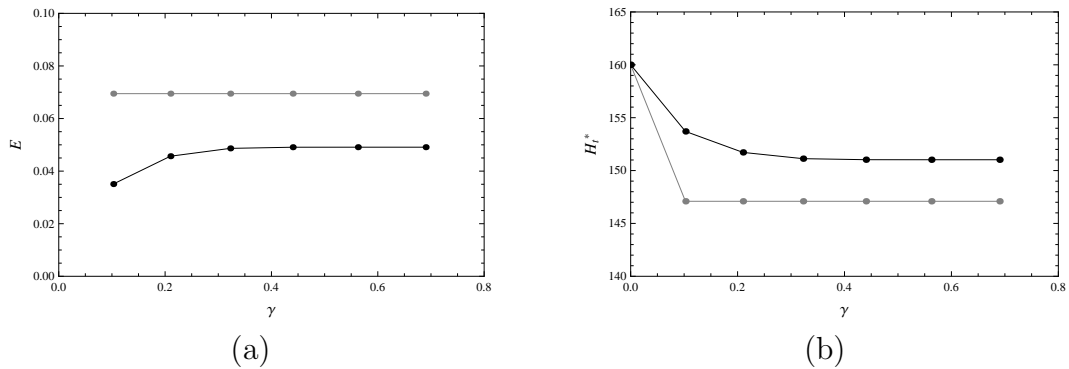
Figura 2.25: Corte na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio, considerando o domínio composto somente pela cultura principal (em preto) e com a presença da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.26 estão ilustrados o percentual de decréscimo E da população e a densidade total assintótica dos indivíduos (H_t^*) considerando 600 gerações. O caso $\gamma = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Figura 2.26: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica. Caso $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

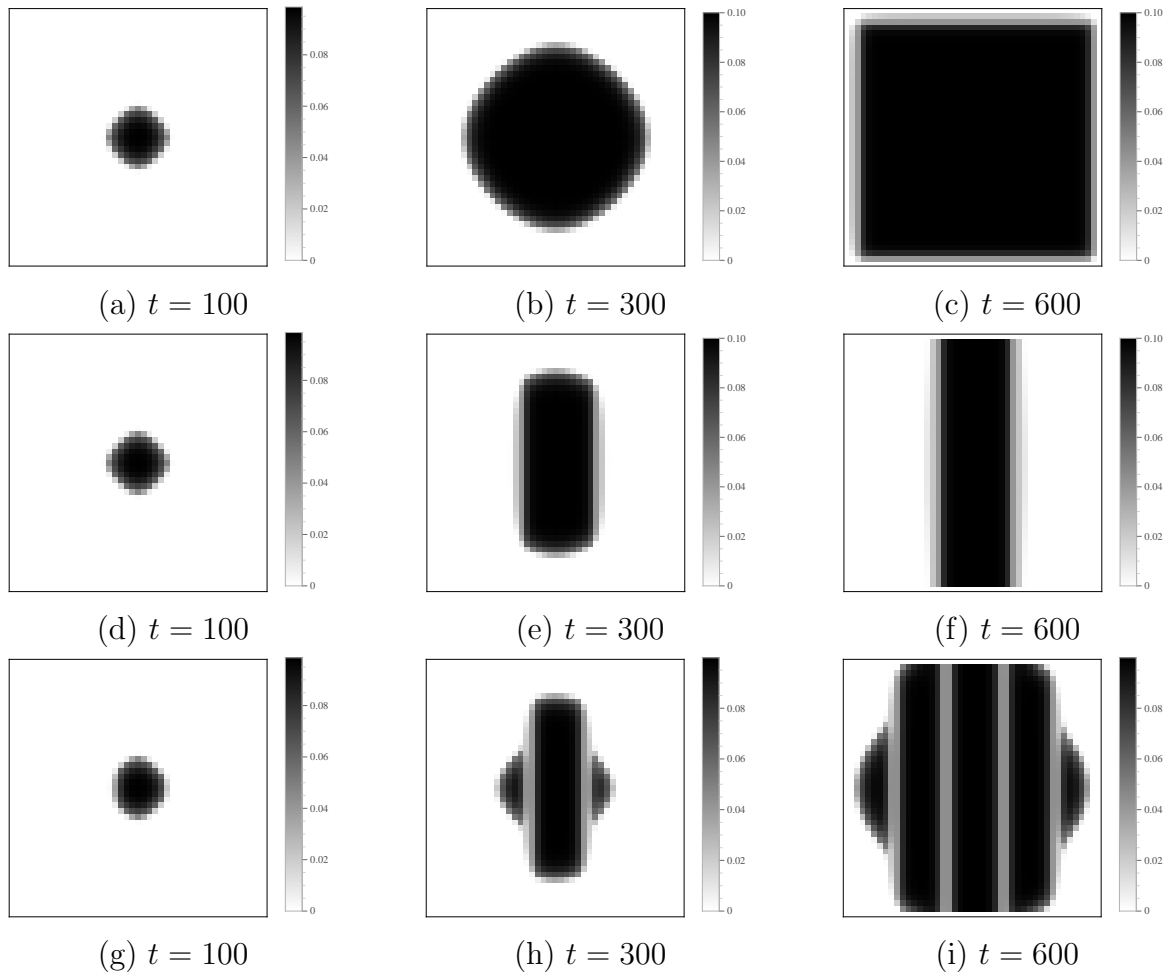
De acordo com os resultados obtidos nas simulações, concluímos que a densidade de indivíduos não sofre mudança significativa com a área da cultura secundária que é acrescentada, resultado este também observado no caso em que a movimentação dos indivíduos era de maneira aleatória. Novamente, o parâmetro λ_c exibiu maior influência nos resultados, sendo o caso $\lambda_c = -1$ o que apresenta maiores percentuais de decrescimento e menores valores para H_t^* .

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

- Resultados obtidos fixando $\lambda_c = 0,01$ e considerando os parâmetros de movimentação $\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.

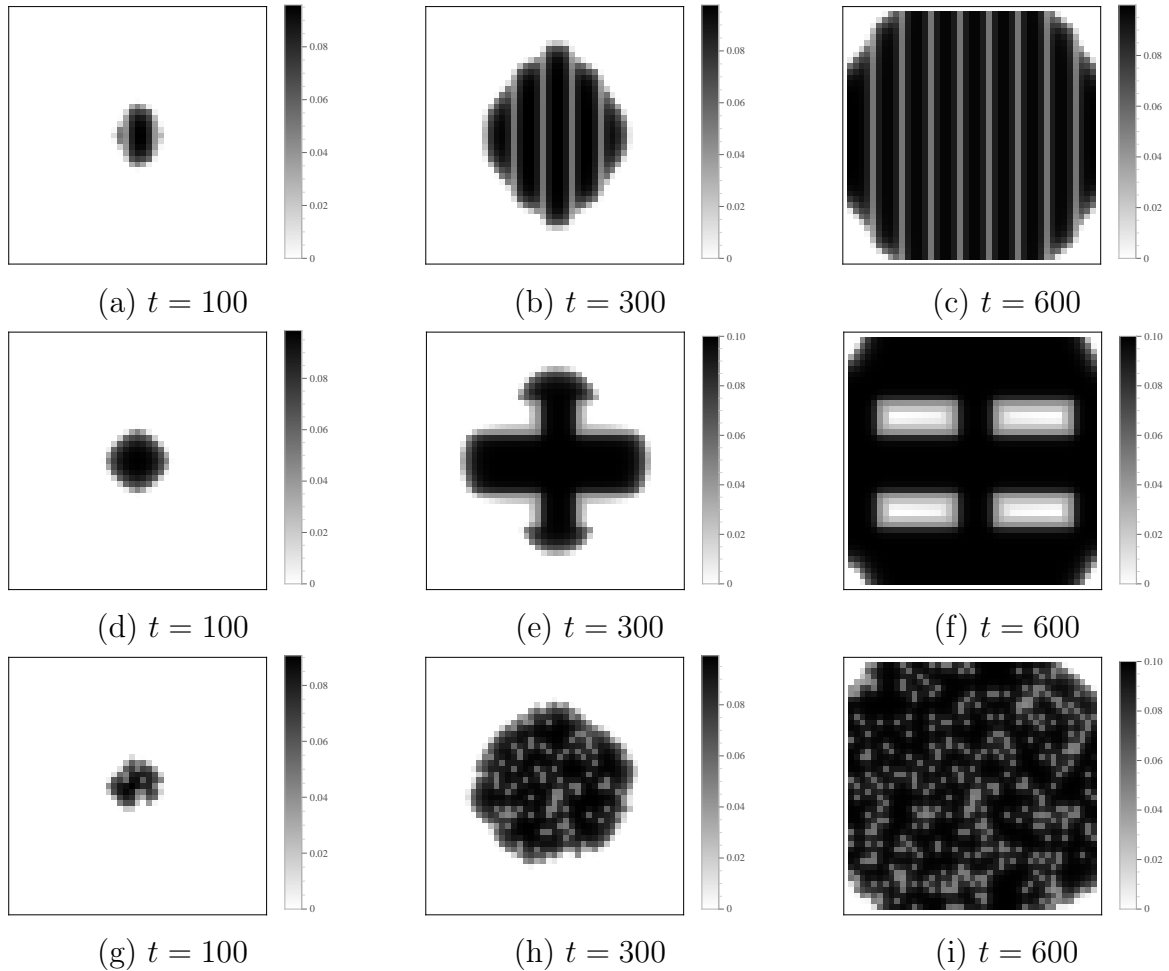
As Figuras 2.27 e 2.28 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos em um domínio de dimensões 44×44 patches para $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,1$.

Figura 2.27: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.28: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5 e (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,1$.

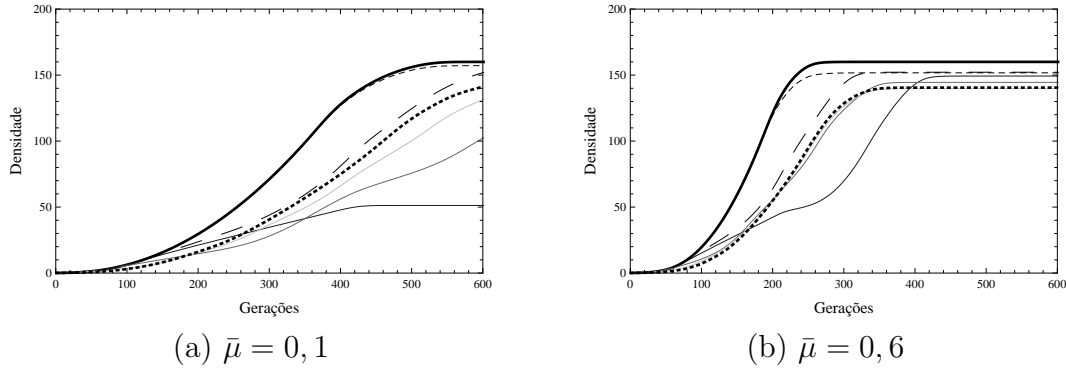


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.29 está ilustrada a densidade total de insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos.

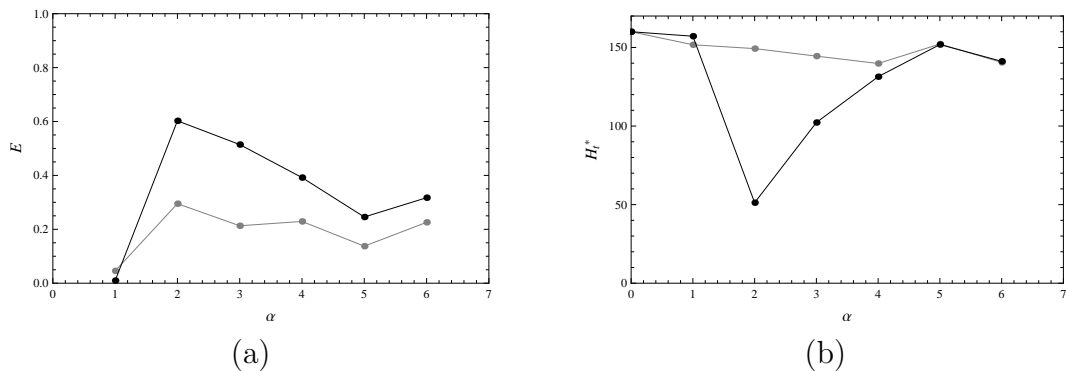
O percentual de decréscimo E e a densidade total assintótica dos indivíduos H_t^* estão ilustrados na Figura 2.30.

Figura 2.29: População total de indivíduos presentes na cultura principal. Domínio homogêneo (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.30: (a) Percentual de decréscimo e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ fixo, $\bar{\mu} = 0,1$ (preto) e $\bar{\mu} = 0,6$ (cinza).



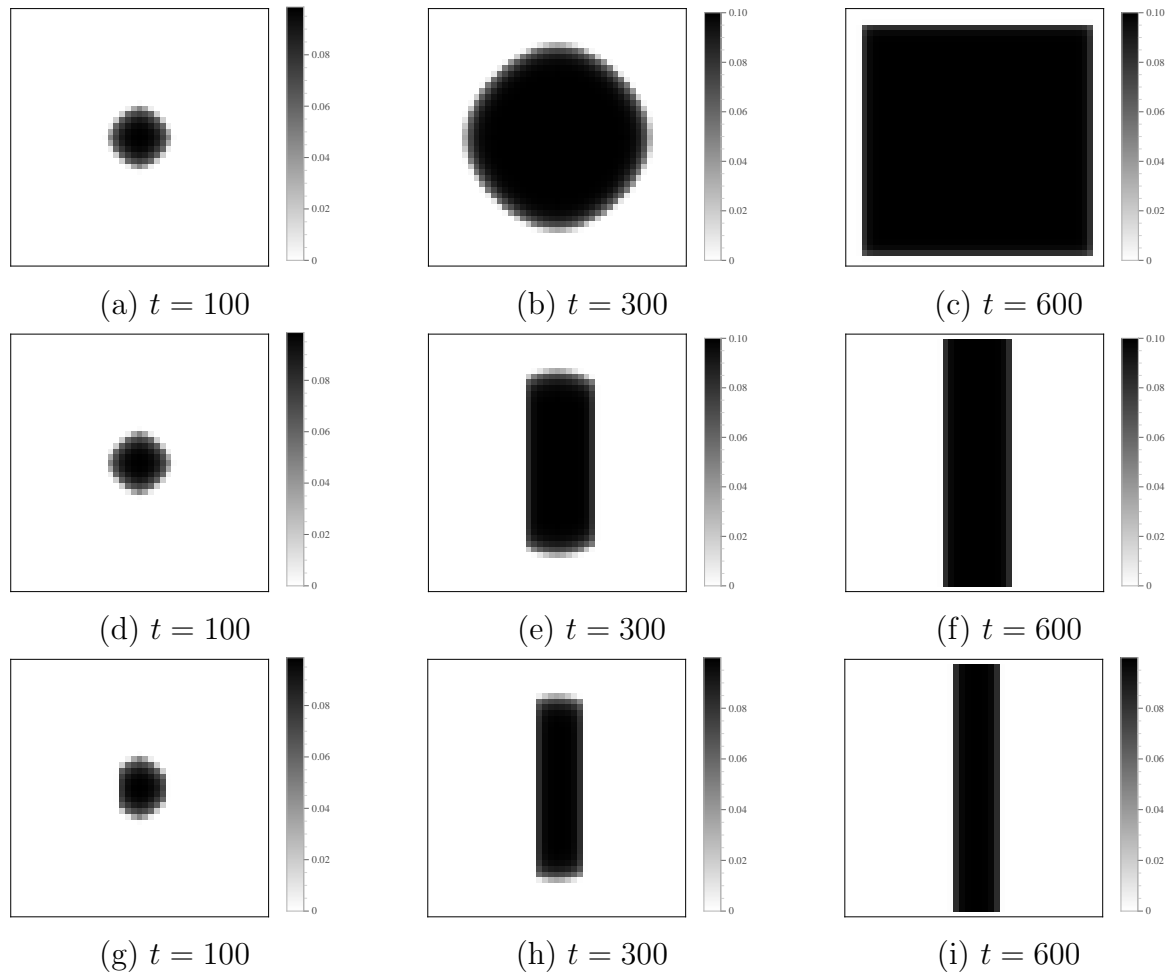
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com os resultados apresentados na Figura 2.30, podemos perceber que o arranjo 2 (cultura secundária disposta em 2 listras) apresentou maior percentual de decréscimo que os demais arranjos. Isto se deve ao fato de que as listras assumem um papel de barreiras naturais para os indivíduos, como pode ser observado na distribuição espacial (Figuras 2.27 e 2.28).

- Resultados obtidos fixando $\lambda_c = -1$ e parâmetros de movimentação $\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.

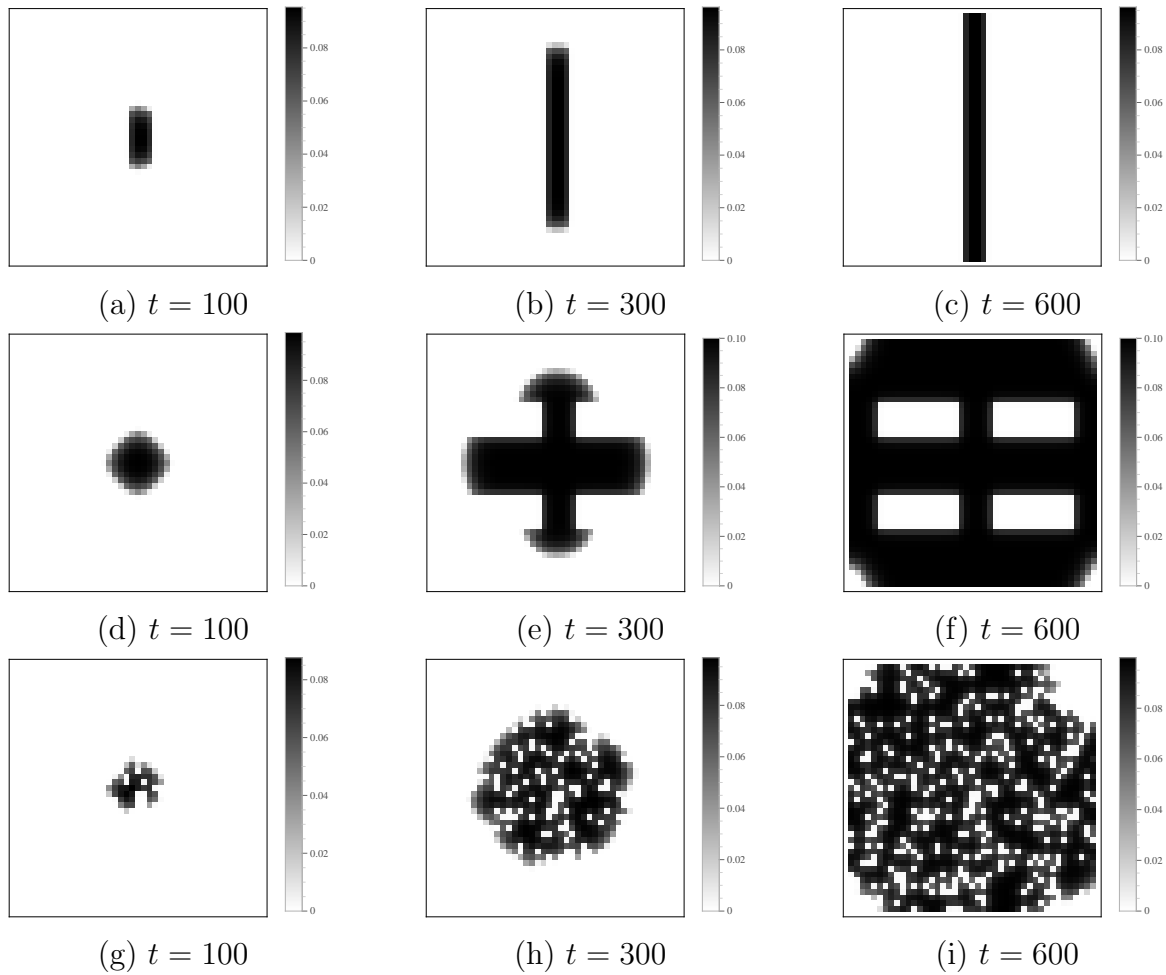
As Figuras 2.31 e 2.32 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos no domínio de dimensões 44×44 patches para $\lambda_c = -1$ e $\bar{\mu} = 0,1$.

Figura 2.31: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao arranjo 1, (d) - (f): arranjo 2, (g) - (i): arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\bar{\mu} = 0, 1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

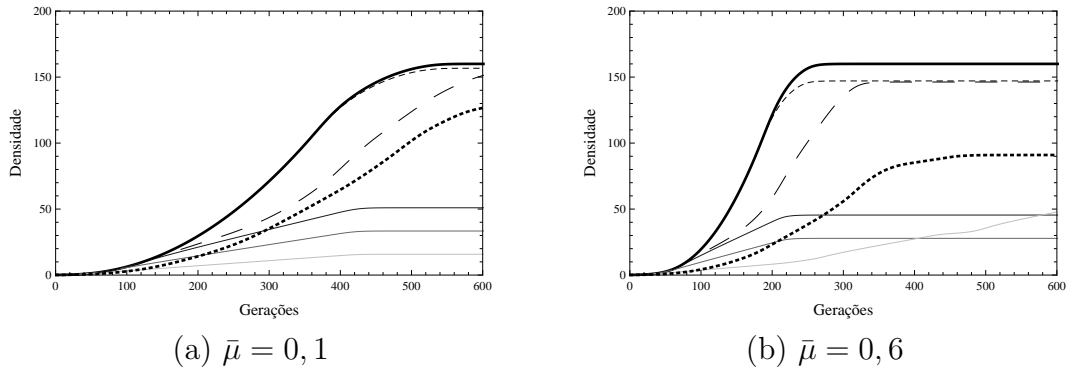
Figura 2.32: Distribuição espacial dos indivíduos em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao arranjo 4, (d) - (f): arranjo 5 e (g) - (i): arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.33 está ilustrada a densidade total de insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos.

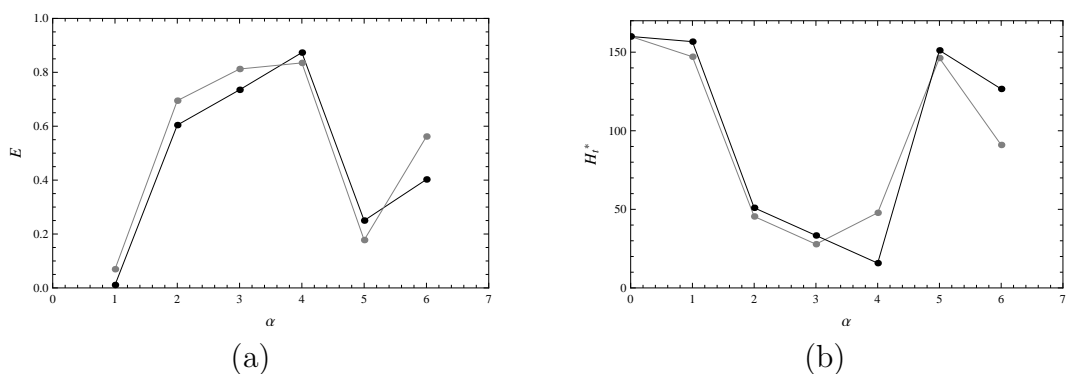
Figura 2.33: População total de indivíduos presentes na cultura principal. Domínio sem a cultura com antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

O percentual de decrescimento E e a densidade total assintótica de indivíduos H_i^* estão ilustrados na Figura 2.34. Podemos perceber que os percentuais de decrescimento e a densidade total assintótica possuem um comportamento semelhante tanto para $\bar{\mu} = 0,1$ quanto para $\bar{\mu} = 0,6$ com o parâmetro $\lambda_c = -1$ fixo. Para os dois valores da fração migratória máxima, o arranjo 4 (correspondente a cultura secundária disposta em 8 listras) apresentou maior percentual de decrescimento que os demais arranjos.

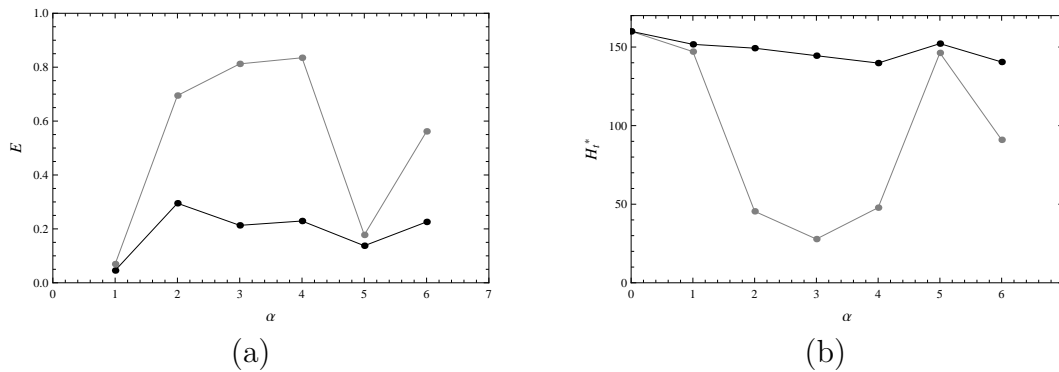
Figura 2.34: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\lambda_c = -1$, $\bar{\mu} = 0,1$ (preto), $\bar{\mu} = 0,6$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

- Comparação dos resultados obtidos fixando $\bar{\mu} = 0,6$ e parâmetros $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$.

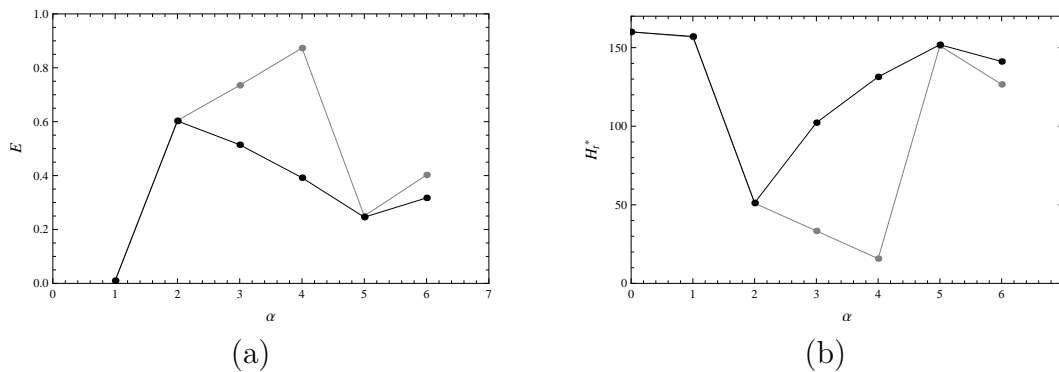
Figura 2.35: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu} = 0,6$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza)



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

- Comparação dos resultados obtidos fixando $\bar{\mu} = 0,1$ e parâmetros $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$.

Figura 2.36: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu} = 0,1$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza)



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Podemos perceber que o parâmetro λ_c afeta de maneira significativa os resultados obtidos. No caso $\lambda_c = 0,01$, o arranjo 2 apresentou maior percentual de decrescimento que os demais casos enquanto que no caso $\lambda_c = -1$, foi o arranjo 4. Estes resultados foram obtidos independentemente do parâmetro $\bar{\mu}$ fixado, porém no caso $\bar{\mu} = 0,1$ os valores obtidos foram superiores ao caso $\bar{\mu} = 0,6$.

2.2.4 Cenário 3: Movimentação dependente da densidade local (Agregação)

Consideraremos nesta subseção que a fração migratória μ irá depender da densidade local de acordo com a função

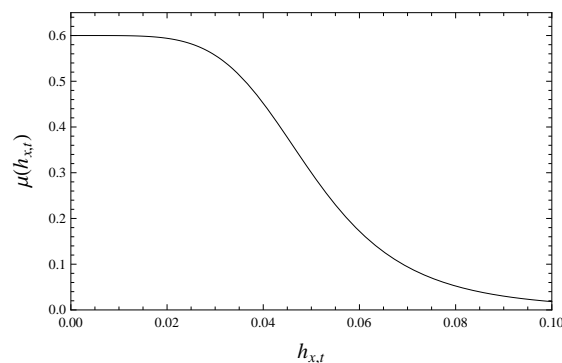
$$\mu(h_{x,t}) = \bar{\mu} - \frac{\bar{\mu} \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q} = \frac{\bar{\mu}A^q}{A^q + (h_{x,t})^q}, \quad (2.16)$$

onde $\bar{\mu}$ é a fração migratória máxima, $h_{x,t}$ é a densidade de indivíduos no *patch* x e geração t , q (inteiro maior que 1) é o parâmetro que regula a forma da função μ e A é a densidade populacional para a qual a função migratória atinge metade do seu valor máximo.

A função descrita em (2.16) possui comportamento diferente da função considerada na Subseção 2.2.3, visto que a fração de indivíduos que deixa um *patch* é inversamente proporcional à densidade local. Desta forma, esta função descreve um comportamento de agregação dos indivíduos, pois eles tendem a permanecer em *patches* com alta densidade.

Nas simulações dos experimentos **(A)** e **(B)** fixamos os parâmetros $\lambda = 0, 1$, $A = \frac{\lambda}{2}$, $q = 5$ e $\bar{\mu} = 0,6$ de maneira que a função $\mu(h_{x,t})$ se comporte conforme ilustrado na Figura 2.37. Já no experimento **(C)**, além dos valores apresentados, iremos considerar também o caso $\bar{\mu} = 0, 1$.

Figura 2.37: Função $\mu(h_{x,t})$ com $\lambda = 0, 1$, $A = \frac{\lambda}{2}$, $q = 5$ e $\bar{\mu} = 0,6$.

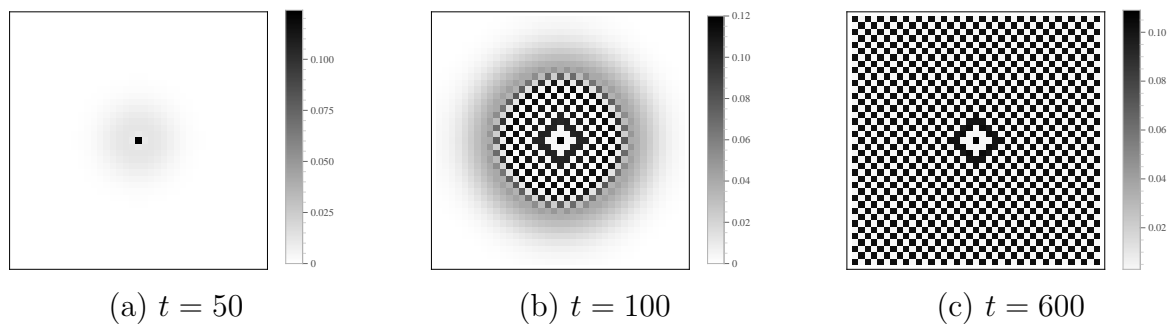


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

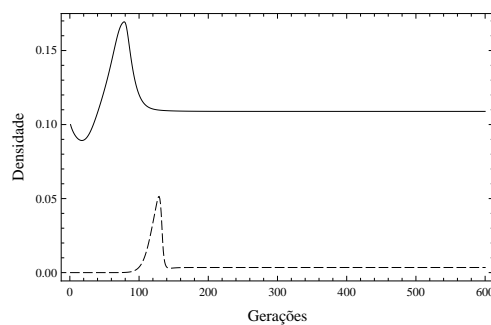
Na Figura 2.38 estão ilustradas as distribuições espaciais dos insetos no domínio em três etapas de tempo, com a fração migratória máxima $\bar{\mu} = 0,6$. Notamos a formação de um quadriculado que não se altera com o decorrer das gerações. Na Figura 2.39 está ilustrada a densidade populacional no *patch* de posição $(20, 20)$ do domínio (preto) e no *patch* de posição $(20, 1)$ (tracejado), ao longo de 600 gerações. Observamos que, após os transientes, a densidade permanece constante em cada *patch*.

Figura 2.38: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio composto somente pela cultura principal em diferentes etapas de tempo. Parâmetros: $\lambda = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

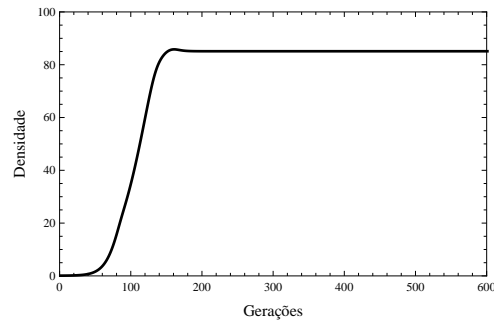
Figura 2.39: Densidade de indivíduos ao longo de 600 gerações no *patch* de posição $(20, 20)$ (preto) e no *patch* de posição $(20, 1)$ (tracejado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Através da Figura 2.40, percebemos que a densidade total assintótica, com este tipo de movimentação, é consideravelmente menor quando comparado aos casos em que a movimentação era aleatória ou quando representava um comportamento de antiagregação dos indivíduos.

Figura 2.40: Densidade total de indivíduos em um domínio composto somente pela cultura principal.

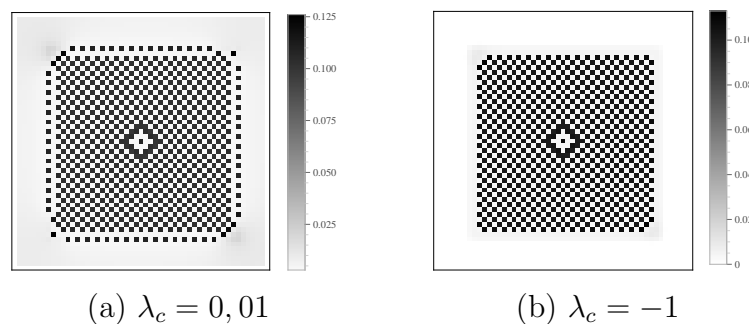


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

A Figura 2.41 ilustra a distribuição espacial dos indivíduos considerando os casos $\lambda_c = 0,01$ (Figura 2.41 (a)) e $\lambda_c = -1$ (Figura 2.41 (b)) e 6 fileiras da cultura com antibiose em torno da cultura principal. Percebemos que, mesmo com a presença da cultura secundária, ocorre a formação de um padrão quadriculado na cultura principal. Ainda, a densidade máxima de indivíduos na área com antibiose é ligeiramente menor quando consideramos $\lambda_c = -1$.

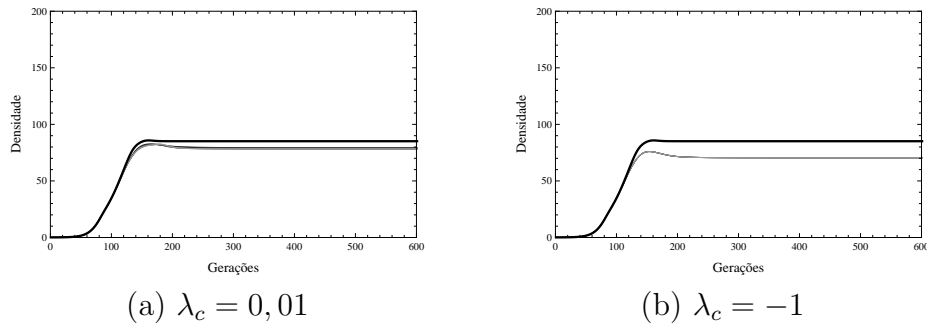
Figura 2.41: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio heterogêneo na geração $t = 600$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A densidade total de insetos presentes somente na cultura principal no caso sem a cultura com antibiose (cor preta) e com diferentes quantidades da cultura secundária (tons de cinza) está ilustrada na Figura 2.42. Foram consideradas de 1 a 6 fileiras da segunda cultura inseridas em torno da principal, que estão representadas na figura através de diferentes tons de cinza, onde a tonalidade da cor diminui à medida que aumentamos a área da cultura secundária.

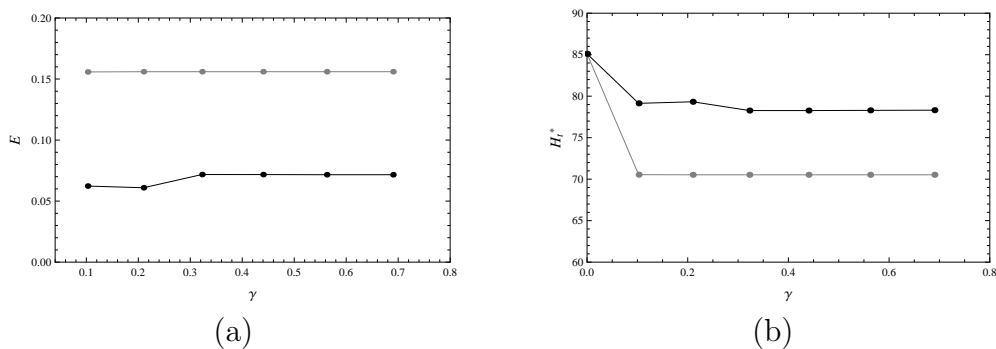
Figura 2.42: População total de indivíduos presentes na cultura principal. Considerando o domínio composto somente pela cultura principal (preto) e com a presença da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.43 estão ilustrados o percentual de decrescimento da população E e a densidade total assintótica dos indivíduos (H_t^*), considerando 600 gerações. O caso $\gamma = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Figura 2.43: (a) Percentual de decrescimento da população e (b) densidade total assintótica. Caso $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Como nos casos anteriores, a presença da cultura com antibiose reduz a densidade total de indivíduos na cultura principal, conforme observado nas Figuras 2.42 e 2.43 (b). Porém, o número de fileiras desta cultura que são adicionadas em torno da cultura principal não afeta significativamente os resultados obtidos, visto que o percentual de decrescimento observado para o caso de 1 fileira é aproximadamente o mesmo que o observado para o caso de 6 fileiras adicionadas (Figura 2.43 (a)). O que influencia de fato a redução na densidade de indivíduos é o parâmetro λ_c considerado, sendo que o caso $\lambda_c = -1$ apresentou maior percentual de decrescimento que o caso $\lambda_c = 0,01$.

Além disso, para ambos valores do parâmetro λ_c , este tipo de movimentação foi o que apresentou maiores percentuais de decrescimento da população, quando compa-

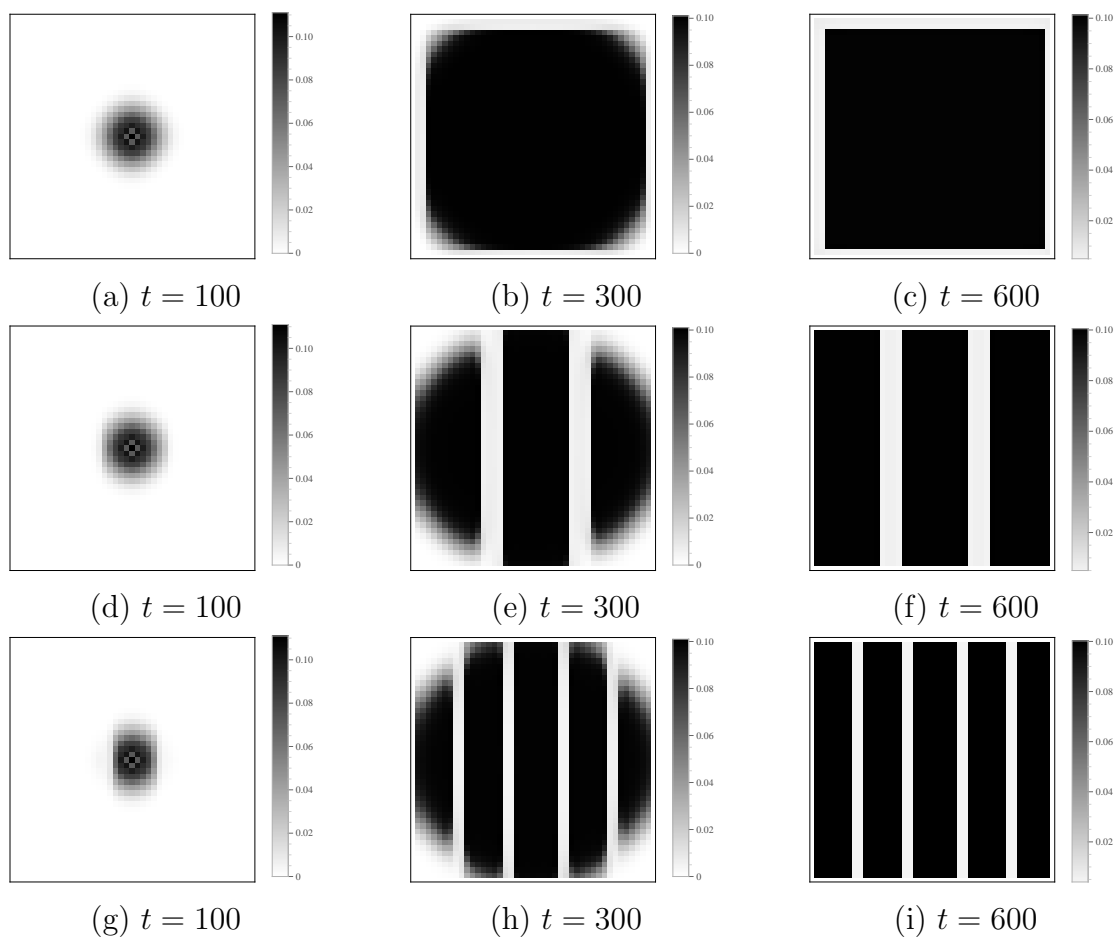
rado aos cenários em que a movimentação dos indivíduos era de maneira aleatória ou representava um comportamento de antiagregação.

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

- Resultados obtidos fixando $\lambda_c = 0,01$ e considerando a fração migratória máxima $\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.

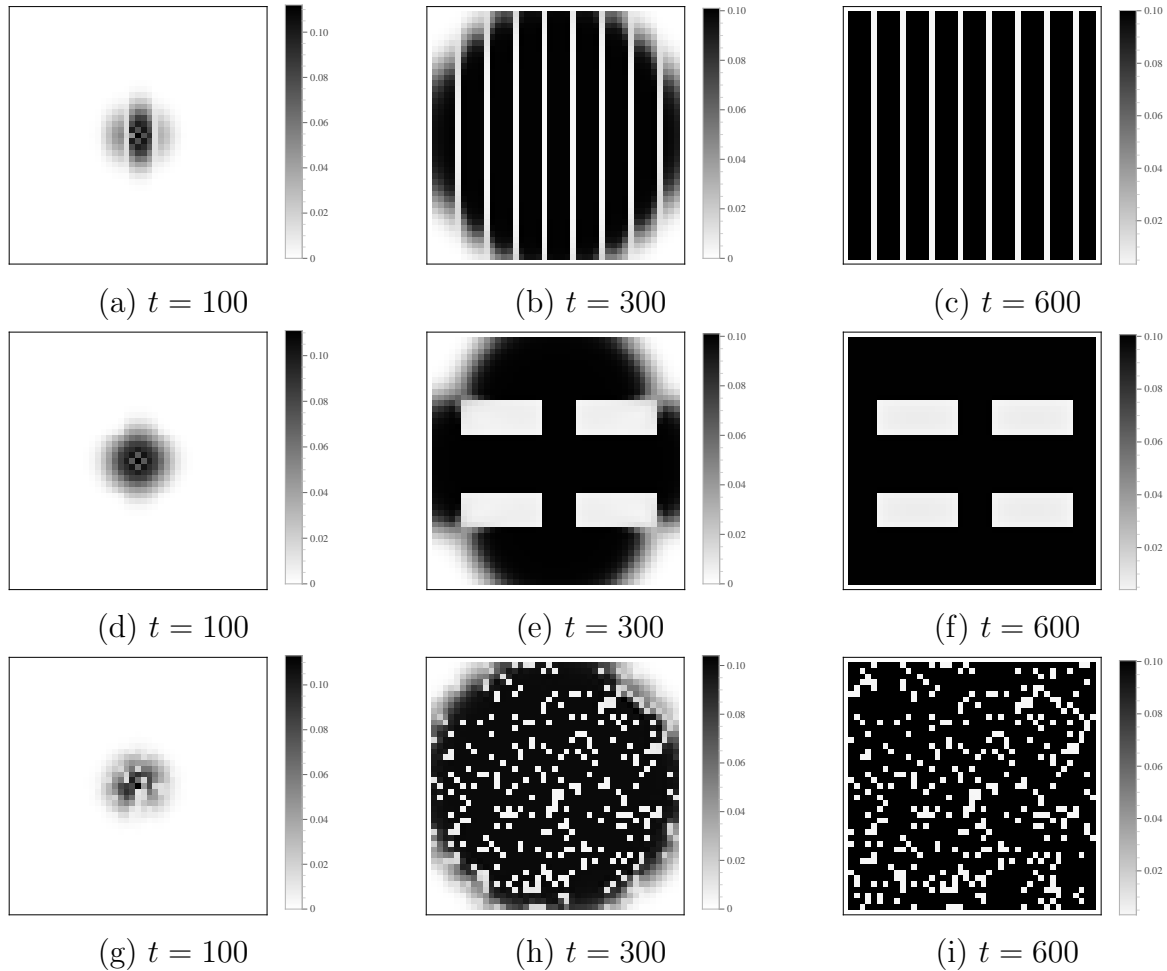
As Figuras 2.44 e 2.45 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos em um domínio de dimensões 44×44 *patches* para $\bar{\mu} = 0,1$, enquanto que a Figura 2.46 ilustra a distribuição espacial dos indivíduos na última iteração para $\bar{\mu} = 0,6$.

Figura 2.44: Distribuição espacial dos indivíduos considerando diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

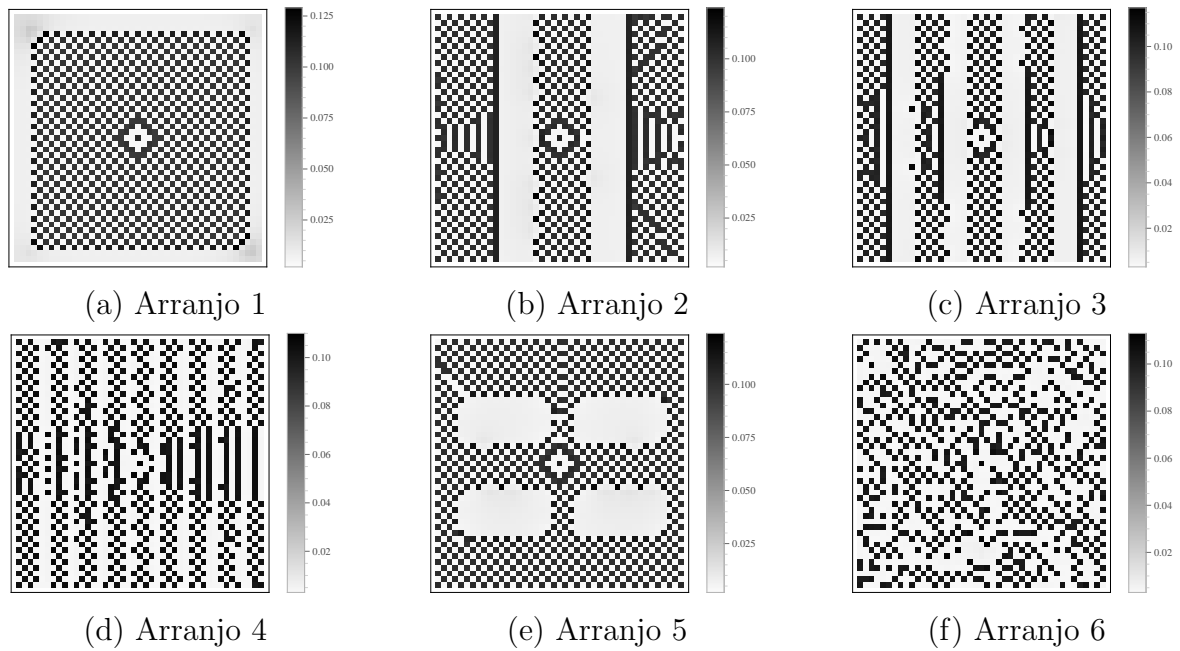
Figura 2.45: Distribuição espacial dos indivíduos considerando diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com a distribuição espacial dos indivíduos, percebemos que no caso $\bar{\mu} = 0,1$ (Figuras 2.44 e 2.45) não ocorre a formação de um quadriculado como observado para o parâmetro $\bar{\mu} = 0,6$ (Figura 2.46). Ainda, observamos que este padrão quadriculado sofre alterações com as diferentes distribuições da cultura com antibiose.

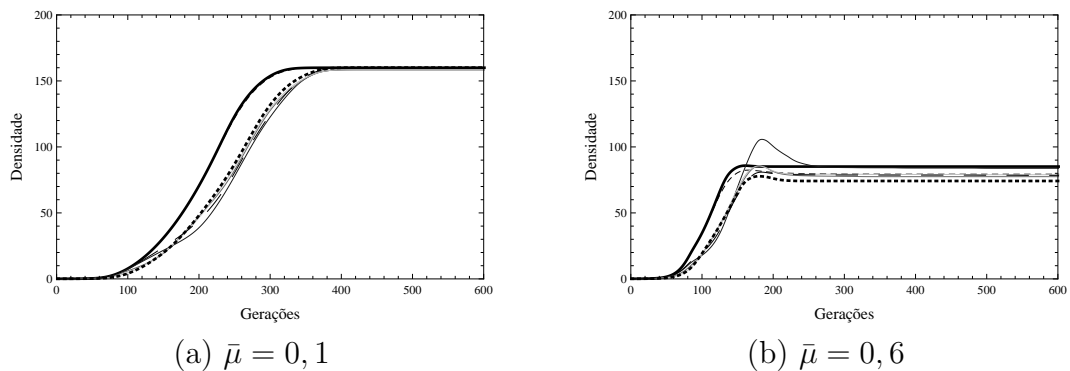
Figura 2.46: Distribuição espacial dos indivíduos na geração 600 considerando diferentes arranjos das duas culturas. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ e $\bar{\mu} = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.47 está ilustrada a densidade total de insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos.

Figura 2.47: População total de indivíduos presentes na cultura principal. Domínio homogêneo (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior), Arranjo 6 (pontilhado).

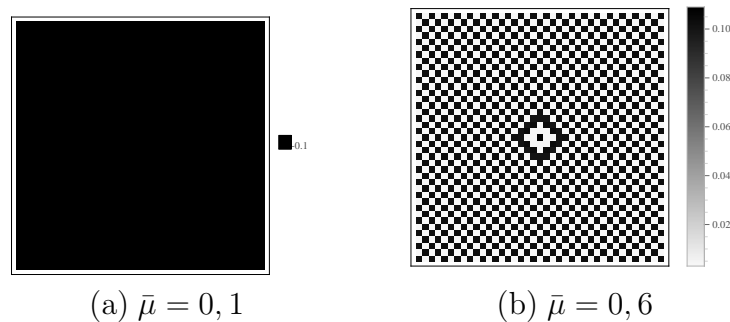


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Percebemos que a fração migratória máxima altera significativamente a densidade total dos indivíduos na cultura principal (Figura 2.47). Este resultado pode ser visualizado através das diferentes distribuições dos indivíduos na cultura principal, visto que no caso

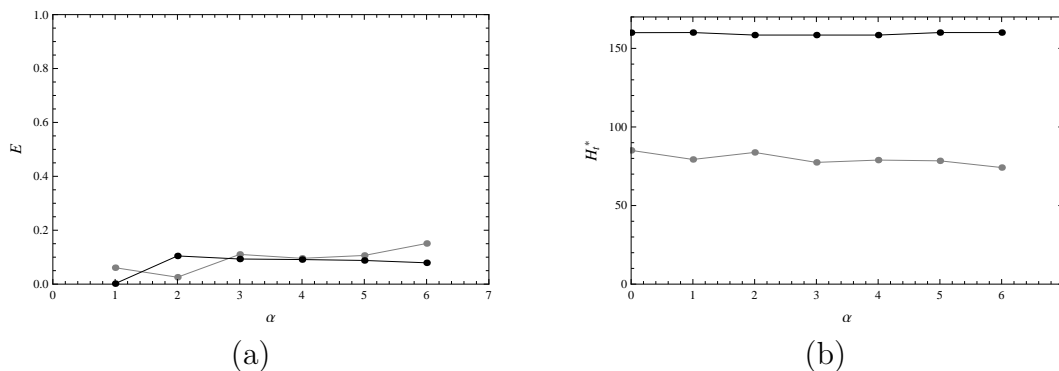
$\bar{\mu} = 0,6$ ocorre a formação de um quadriculado, em que há a alternância de *patches* com alta densidade de indivíduos e *patches* com baixa densidade (ver Figura 2.48 (b)), ao contrário do observado quando assumimos $\bar{\mu} = 0,1$, em que a densidade de todos os *patches* da cultura principal tende ao valor 0,1 (Figura 2.48 (a)). Esta diferença também pode ser observada através da densidade total assintótica dos indivíduos, apresentada na Figura 2.49 (b). O percentual de decrescimento E está ilustrado na Figura 2.49 (a).

Figura 2.48: Distribuição espacial dos indivíduos em um domínio composto somente pela cultura principal na geração $t = 600$. (a) $\bar{\mu} = 0,1$ e (b) $\bar{\mu} = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 2.49: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$ fixo, $\bar{\mu} = 0,1$ (preto) e $\bar{\mu} = 0,6$ (cinza).



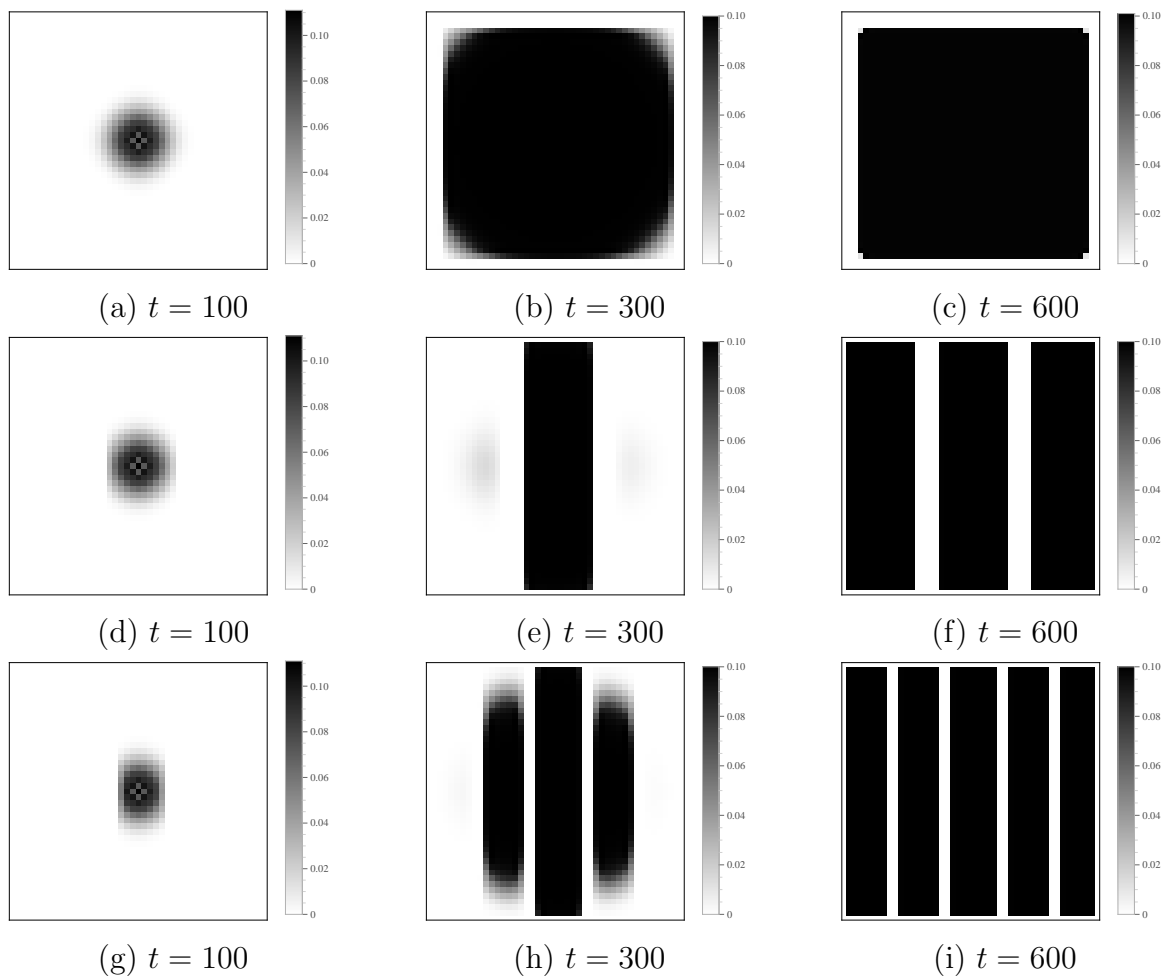
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com a Figura 2.49 (a), percebemos que todos os arranjos apresentaram percentuais de decrescimento da população baixos, sendo que no caso $\bar{\mu} = 0,1$, o arranjo 2 (distribuição em 2 listras) foi o que mais reduziu a população de indivíduos na cultura principal. Já no caso $\bar{\mu} = 0,6$, o arranjo 6 (distribuição de maneira aleatória) foi o que apresentou melhores resultados.

- Resultados obtidos fixando $\lambda_c = -1$ e parâmetros de movimentação $\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$.

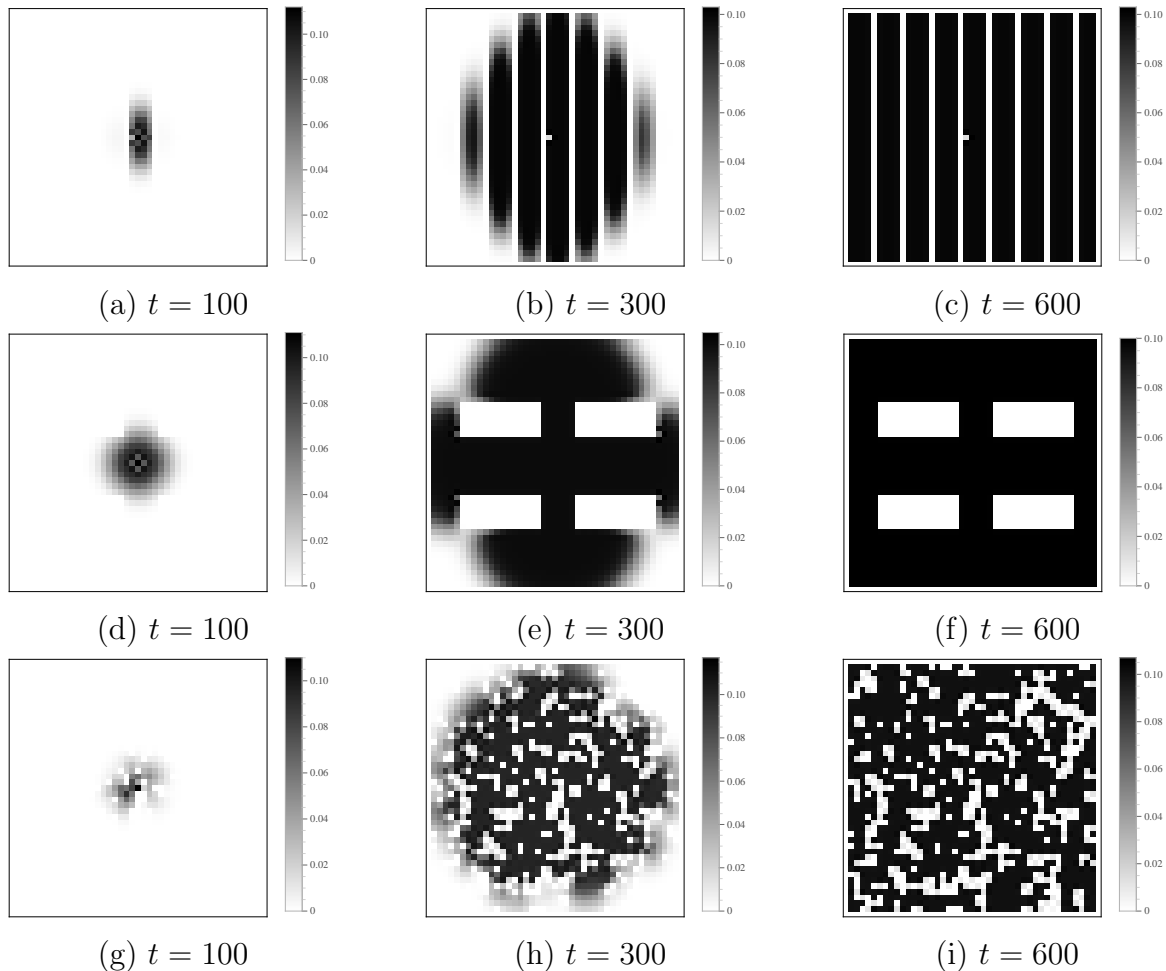
As Figuras 2.50 e 2.51 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos em um domínio de dimensões 44×44 *patches*.

Figura 2.50: Distribuição espacial dos indivíduos considerando diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

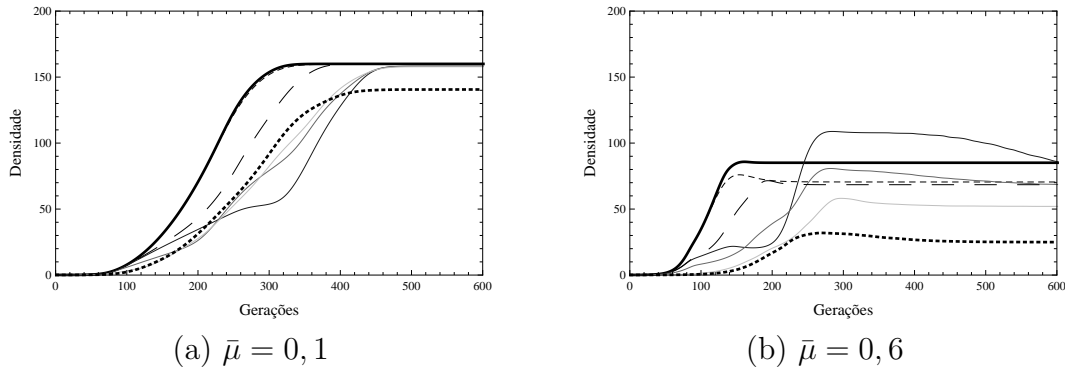
Figura 2.51: Distribuição espacial dos indivíduos considerando diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = -1$ e $\bar{\mu} = 0,1$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 2.52 está ilustrada a densidade total de insetos na cultura principal. Dentre os diferentes comportamentos da população total para os diferentes arranjos entre as culturas, observamos um aumento na densidade de indivíduos após as primeiras 300 gerações, quando consideramos o arranjo 2 e assumimos o parâmetro $\bar{\mu} = 0,6$. Este aumento observado deve-se principalmente ao fato que, inicialmente a distribuição dos indivíduos na cultura principal localizada após as duas faixas da cultura secundária é dada de maneira homogênea. Com o decorrer das gerações, observamos a formação de um padrão quadriculado nestas áreas, de maneira que a densidade total diminui e na última geração fica abaixo da curva correspondente ao domínio composto somente pela cultura principal.

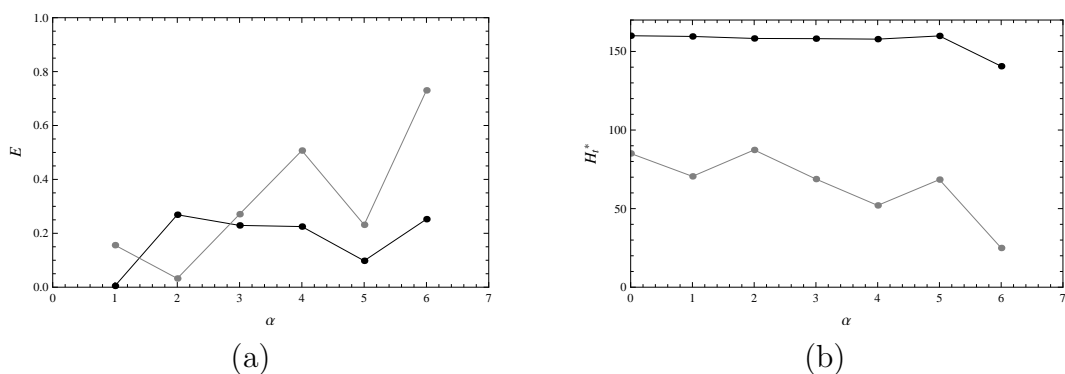
Figura 2.52: População total de indivíduos presentes na cultura principal. Domínio homogêneo (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior), Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

O percentual de decrescimento E e a densidade total assintótica de indivíduos H_t^* estão ilustrados na Figura 2.53. Percebemos que ao fixarmos o parâmetro $\lambda_c = -1$, o arranjo 6 obteve o maior percentual de decrescimento da população entre todos os arranjos estudados, no caso em que a fração migratória máxima assumida foi $\bar{\mu} = 0,6$. Ao assumirmos $\bar{\mu} = 0,1$, os arranjos 2 e 6 foram os que mais reduziram a densidade de indivíduos na cultura principal.

Figura 2.53: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\lambda_c = -1$, $\bar{\mu} = 0,1$ (preto) e $\bar{\mu} = 0,6$ (cinza).



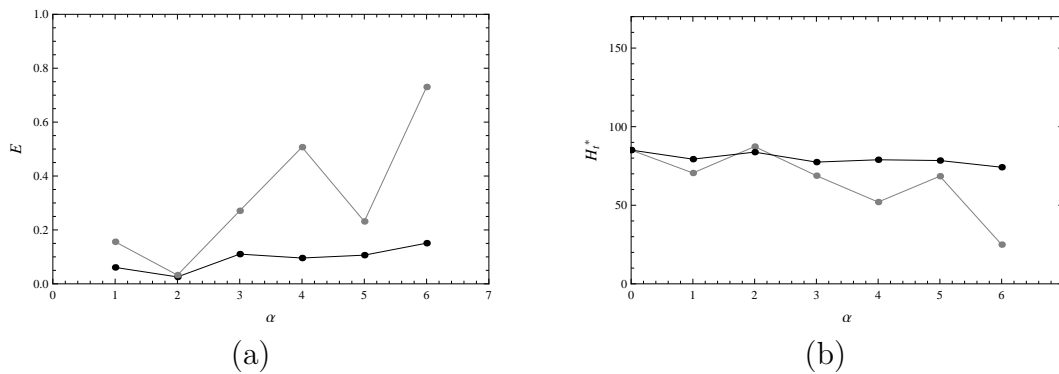
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Vale ressaltar que estes resultados podem sofrer alterações se consideramos menos gerações, visto que a redução na densidade total de indivíduos quando consideramos o arranjo 2 só foi observada nas gerações iniciais (Figura 2.52). Analisando a densidade total assintótica (Figura 2.53 (b)), podemos perceber que para ambos os valores de $\bar{\mu}$, o

arranjo 6 apresentou menores valores para H_t^* que os demais arranjos.

- Resultados obtidos fixando $\bar{\mu} = 0,6$ e parâmetros $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$.

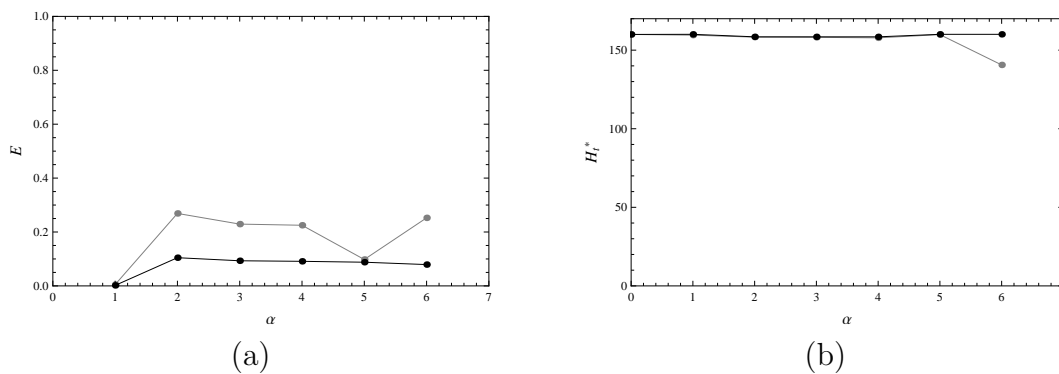
Figura 2.54: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu} = 0,6$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

- Comparação dos resultados obtidos fixando $\bar{\mu} = 0,1$ e parâmetros $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$.

Figura 2.55: (a) Percentual de decrescimento e (b) densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu} = 0,1$, $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza)



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Através dos resultados apresentados nas Figuras 2.54 e 2.55 podemos concluir que no caso em que fixamos $\bar{\mu} = 0,6$, o arranjo 6 (cultura secundária disposta de maneira aleatória no domínio) apresentou maior percentual de decrescimento e menor valor para H_t^* que os demais arranjos, independentemente do valor assumido pelo parâmetro λ_c . Já nos casos em que o parâmetro $\bar{\mu} = 0,1$ foi fixado, os arranjos 2, 3, 4 e 6 apresentaram percentuais de decrescimento da população semelhantes.

2.3 CONCLUSÕES

Nas simulações realizadas neste capítulo, analisamos os efeitos do consórcio da planta principal com uma cultura que apresenta antibiose, sobre a densidade de insetos na cultura principal. Foram abordados dois fatores principais: a área da cultura com antibiose e sua distribuição espacial.

Além dos diferentes arranjos espaciais das culturas, exploramos dois diferentes graus de resistência da cultura secundária, através da variação do parâmetro λ_c . Assim, uma planta com alta resistência é representada por $\lambda_c = -1$ e, uma resistência moderada por $\lambda_c = 0,01$. Ainda, foram considerados três diferentes tipos de movimentação dos indivíduos: movimentação aleatória, movimentação dependente da densidade local representando um comportamento de antiagregação dos indivíduos e uma descrevendo um comportamento de agregação.

Em relação à área da cultura com antibiose, foram inseridas de 1 até 6 fileiras da cultura secundária em torno da cultura principal. Percebemos, em todos os tipos de movimentação considerados, que a presença da cultura com antibiose reduz levemente (em torno de 5%) a densidade de indivíduos na cultura principal. Esta redução é maior (em torno de 10%) quando utilizamos uma cultura secundária com alto grau de resistência, isto é, com $\lambda_c = -1$. No que se refere à área da cultura secundária adicionada, observamos que este fator não influencia significativamente a densidade de indivíduos quando a cultura com antibiose é acrescentada ao redor da cultura principal. Assim, inserir uma fileira desta cultura produz aproximadamente o mesmo efeito sobre a densidade de insetos na cultura principal que inserir seis fileiras.

Além disso, o percentual de decréscimo da população assumiu maiores valores (em torno de 15% para $\lambda_c = -1$ e de 7% para $\lambda_c = 0,01$) quando consideramos que os indivíduos têm comportamento de agregação. Neste caso, a densidade total assintótica dos indivíduos na cultura principal também atingiu os menores valores quando comparado aos outros tipos de movimentação analisados.

Ressaltamos, porém, que estes resultados sobre a área apenas valem para esta configuração espacial em particular e para plantas que não atraem os insetos. Aumentos da área em outro tipo de configuração podem levar a resultados diferentes. Da mesma forma, para consórcios com plantas que exercem atração sobre o inseto, deveríamos usar

uma movimentação por taxia, o que pode alterar também os resultados.

Em relação à configuração espacial da cultura com antibiose, mantivemos a área da cultura secundária aproximadamente constante porém distribuída de 6 maneiras distintas no domínio (descritas na Subseção 2.2.1). Observamos novamente, em todos tipos de movimentação, que culturas com alta resistência ao inseto apresentam maiores percentuais de decréscimo quando comparadas a culturas com grau de resistência moderado.

No cenário em que a movimentação é dada de maneira aleatória, foram analisados dois valores para a fração de indivíduos que deixa um sítio ($\mu = 0,1$ e $\mu = 0,6$) e dois valores para o parâmetro λ_c ($\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$), com a finalidade de explorar diferentes graus de resistência da cultura secundária e seus efeitos sobre as espécies com diferentes graus de movimentação.

Ao assumir $\lambda_c = 0,01$, os arranjos 4 (distribuição da cultura secundária em 8 listras) e 6 (distribuição de maneira aleatória) foram os que exibiram maiores percentuais de decréscimo da população. Este resultado foi observado para os dois valores da fração μ , sendo maior no caso $\mu = 0,6$. Realizamos a mesma análise porém tomando $\lambda_c = -1$. Neste cenário, também foram os arranjos 4 e 6 que mais reduziram a densidade de indivíduos na cultura principal, para $\mu = 0,6$. Enquanto que no caso $\mu = 0,1$, os arranjos 2, 4 e 6 apresentaram percentuais semelhantes mas superiores que os demais arranjos.

Tais resultados podem ser justificados pela maior proximidade entre a posição da condição inicial e a área da cultura com antibiose, observada nos arranjos 4 e 6 quando comparadas aos demais arranjos. Desta forma, os indivíduos chegam na cultura com antibiose mais rapidamente e, conseqüentemente, ficam sujeitos aos seus efeitos por mais tempo.

No cenário em que os indivíduos apresentam comportamento de antiagregação, analisamos dois valores para a fração migratória máxima: $\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$. Neste caso, ao considerarmos uma resistência moderada da cultura secundária ($\lambda_c = 0,01$) observamos, para ambos valores de $\bar{\mu}$, que o arranjo 2 (cultura com antibiose disposta em duas listras) foi o que mais reduziu a densidade de indivíduos na cultura principal. Já no caso $\lambda_c = -1$, o arranjo 4 foi o que obteve maior percentual de decréscimo da população, independente do valor assumido por $\bar{\mu}$.

No caso em que os indivíduos tendem a permanecer em sítios com alta densidade

de sua espécie, isto é, possuem um comportamento de agregação, exploramos novamente dois valores para a fração migratória máxima ($\bar{\mu} = 0,1$ e $\bar{\mu} = 0,6$) e dois valores para o parâmetro λ_c ($\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$). Nas simulações em que assumimos $\bar{\mu} = 0,1$, percebemos que os arranjos 2, 3, 4 e 6 apresentaram percentuais de decréscimo semelhantes, no caso $\lambda_c = -1$. Enquanto que ao assumirmos $\lambda_c = 0,01$, todos os arranjos, com exceção do arranjo 1, obtiveram resultados muito próximos. Ao considerarmos $\bar{\mu} = 0,6$, o arranjo 6 foi o que mais reduziu a população de indivíduos na cultura principal, tanto para $\lambda_c = 0,01$ como para $\lambda_c = -1$.

Comparando todos os tipos de movimentação analisados neste trabalho, e analisando somente o arranjo que mais reduziu a densidade da população em cada caso, o cenário que descreve um comportamento de antiagregação dos indivíduos foi o que obteve percentuais de decréscimo mais elevados. Este resultado foi observado para ambos valores do parâmetro λ_c . Isto significa, de acordo com nossos resultados, que o consórcio de uma cultura de interesse com uma cultura que apresenta antibiose à praga que acomete a primeira, promoverá melhores resultados (em termos de redução da população de pragas) se os insetos apresentarem comportamento de antiagregação.

A Tabela 2.2 apresenta o arranjo das culturas que mais reduziu a densidade de indivíduos na cultura principal, de acordo com o cenário de movimentação dos indivíduos, do valor assumido por λ_c e do valor assumido pela fração μ ou $\bar{\mu}$.

Tabela 2.2: Arranjo mais eficiente juntamente com a respectiva redução (em %).

Movimentação	$\lambda_c = 0,01$		$\lambda_c = -1$	
	μ ou $\bar{\mu} = 0,1$	μ ou $\bar{\mu} = 0,6$	μ ou $\bar{\mu} = 0,1$	μ ou $\bar{\mu} = 0,6$
Cenário 1	Arranjo 4 (13%)	Arranjo 4 (15%)	Arranjo 4 (28%)	Arranjo 6 (68%)
Cenário 2	Arranjo 2 (60%)	Arranjo 2 (30%)	Arranjo 4 (87%)	Arranjo 4 (83%)
Cenário 3	Arranjo 2 (10%)	Arranjo 6 (15%)	Arranjo 2 (27%)	Arranjo 6 (73%)

Capítulo 3

MODELO DISCRETO HOSPEDEIRO - PARASITOIDE EM UM CONSÓRCIO DE CULTURAS

Dentre os organismos que atuam como agentes de controle biológico, estão os parasitoides. Segundo Gallo et al. (2002), um parasitoide é um organismo que mata seu hospedeiro e exige somente um indivíduo para completar seu desenvolvimento. Além disso, o parasitismo pode ocorrer em diversas fases de desenvolvimento da praga, existindo portanto parasitoides de ovos, larvas (ou ninfas), pupas e adultos.

Neste capítulo, analisaremos os efeitos da cultura com antibiose na densidade de insetos-praga presentes na cultura principal, considerando um sistema hospedeiro-parasitoide, onde os hospedeiros representam a espécie a ser controlada. Inicialmente, estudamos a dinâmica local obtendo as soluções de equilíbrio e aplicando os critérios de estabilidade. Em seguida, analisamos a dinâmica hospedeiro-parasitoide em um meio espacialmente estruturado, descrito via Redes de Mapas Acoplados.

Além de simular diferentes configurações espaciais das culturas envolvidas no consórcio, consideramos diferentes tipos de movimentação tanto do hospedeiro quanto do parasitoide, a fim de analisar a dependência da movimentação das espécies envolvidas na escolha dos melhores arranjos das culturas.

3.1 DINÂMICA LOCAL

Consideremos uma dinâmica hospedeiro-parasitoide na qual os hospedeiros, na ausência dos parasitoides, crescem segundo o modelo de Ricker, ou seja, a taxa de crescimento depende da densidade dos indivíduos. Já os parasitoides, na ausência de hospedeiros, vão à extinção. Assim, esta interação entre hospedeiros e parasitoides é descrita pelo seguinte sistema de equações a diferenças:

$$\begin{cases} H_{t+1} = H_t e^{\lambda} e^{-\frac{H_t}{k} - cP_t} \\ P_{t+1} = aH_t P_t \end{cases} \quad (3.1)$$

onde H_t e P_t são as densidades de hospedeiros e parasitoides na geração t , respectivamente, e^{λ} é o fator de crescimento constante dos hospedeiros, $\frac{1}{k} > 0$ é a inibição do crescimento dos hospedeiros causado pela superpopulação na ausência do parasitoide, $c > 0$ é a eficiência de captura do parasitoide e $a > 0$ corresponde ao coeficiente de conversão do parasitoide. Ressaltamos que o parâmetro λ pode assumir valores negativos, implicando em um fator de crescimento dos hospedeiros $e^{\lambda} < 1$.

Através de uma mudança de variáveis apropriada, podemos reduzir a quantidade de parâmetros do sistema (3.1) e obter agrupamentos adimensionais de parâmetros relevantes que possibilitem uma melhor compreensão da dinâmica do sistema.

Desta forma, vamos adimensionalizar o sistema (3.1) através das variáveis adimensionais:

$$h_t = \frac{H_t}{k} \quad \text{e} \quad p_t = cP_t. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) no sistema (3.1), obtemos as seguintes equações adimensionais:

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= h_t e^{\lambda - h_t - p_t}, \\ p_{t+1} &= d h_t p_t, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $d = ak$ é um parâmetro adimensional e, h_t e p_t são, respectivamente, as densidades adimensionais de hospedeiros e parasitoides.

3.1.1 Soluções de equilíbrio

O modelo (3.3) admite três soluções de equilíbrio, as quais serão representadas por (\bar{h}_m, \bar{p}_m) , com $m = 0, 1, 2$. De acordo com a definição de solução de equilíbrio, \bar{h}_m e \bar{p}_m devem satisfazer:

$$\begin{cases} h_{t+1} = h_t = \bar{h}_m, \\ p_{t+1} = p_t = \bar{p}_m. \end{cases} \quad (3.4)$$

Desta forma, substituindo (3.4) em (3.3), obtemos as seguintes soluções de equilíbrio:

- $(\bar{h}_0, \bar{p}_0) = (0, 0)$, o qual corresponde à extinção das duas espécies;
- $(\bar{h}_1, \bar{p}_1) = (\lambda, 0)$, que corresponde à extinção dos parasitoides e é biologicamente viável para $\lambda > 0$;
- $(\bar{h}_2, \bar{p}_2) = \left(\frac{1}{d}, \lambda - \frac{1}{d}\right)$, que corresponde à coexistência das espécies e é biologicamente viável quando $d > 0$ e $\lambda > \frac{1}{d}$.

3.1.2 Estudo da Estabilidade

Analisamos a estabilidade das soluções de equilíbrio obtidas anteriormente através do critério de estabilidade para sistemas de duas equações a diferenças estabelecido pelo seguinte teorema (ALLEN, 2007):

Teorema 1. *Considere as funções $f(h, p)$ e $g(h, p)$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em h e p em um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 que contenha o ponto (\bar{h}, \bar{p}) . Então o ponto de equilíbrio (\bar{h}, \bar{p}) do sistema não linear*

$$\begin{cases} h_{t+1} = f(h_t, p_t) \\ p_{t+1} = g(h_t, p_t), \end{cases} \quad (3.5)$$

é localmente (assintoticamente) estável se os autovalores λ da matriz jacobiana J aplicada ao equilíbrio satisfizerem $|\lambda_i| < 1$. Esta condição é válida se, e somente se,

$$|Tr(J)| < 1 + det(J) < 2. \quad (3.6)$$

No caso em estudo, temos

$$\begin{aligned} f(h_t, p_t) &= h_t e^{\lambda - h_t - p_t} \\ g(h_t, p_t) &= dh_t p_t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, a matriz Jacobiana do sistema (3.3) aplicada ao ponto de equilíbrio (\bar{h}, \bar{p}) é dada por

$$J_{(\bar{h}, \bar{p})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial h_t}(\bar{h}, \bar{p}) & \frac{\partial f}{\partial p_t}(\bar{h}, \bar{p}) \\ \frac{\partial g}{\partial h_t}(\bar{h}, \bar{p}) & \frac{\partial g}{\partial p_t}(\bar{h}, \bar{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \bar{h})e^{\lambda - \bar{h} - \bar{p}} & -\bar{h}e^{\lambda - \bar{h} - \bar{p}} \\ d\bar{p} & d\bar{h} \end{bmatrix}.$$

Para o ponto de equilíbrio $(\bar{h}_0, \bar{p}_0) = (0, 0)$, a matriz jacobiana é

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é estável se $|e^\lambda| < 1$, ou seja, $\lambda < 0$.

Para o ponto de equilíbrio $(\bar{h}_1, \bar{p}_1) = (\lambda, 0)$, a matriz jacobiana é dada por

$$J_{(\lambda,0)} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\lambda \\ 0 & d\lambda \end{bmatrix}.$$

Neste caso, os autovalores da matriz Jacobiana são $\lambda_1 = 1 - \lambda$ e $\lambda_2 = d\lambda$. Assim, pelo teorema 1, o ponto de equilíbrio será estável se $|1 - \lambda| < 1$ e se $|d\lambda| < 1$, o que equivale a $0 < \lambda < 2$ e $\lambda < \frac{1}{d}$.

A matriz jacobiana para o ponto de coexistência $(\bar{h}_2, \bar{p}_2) = \left(\frac{1}{d}, \lambda - \frac{1}{d}\right)$ é

$$J_{\left(\frac{1}{d}, \lambda - \frac{1}{d}\right)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{d} & -\frac{1}{d} \\ d\lambda - 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $Tr(J) = 2 - \frac{1}{d}$ e $det(J) = 1 + \lambda - \frac{2}{d}$.

Da desigualdade (3.6) temos:

$$\left|2 - \frac{1}{d}\right| < 2 + \lambda - \frac{2}{d} < 2. \quad (3.8)$$

Analisando separadamente a desigualdade

$$\left|2 - \frac{1}{d}\right| < 2 + \lambda - \frac{2}{d} \quad (3.9)$$

obtemos, para $d > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{d} &< 2 + \lambda - \frac{2}{d}, \\ \frac{1}{d} &< \lambda \end{aligned} \quad (3.10)$$

e, para $d < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} -2 + \frac{1}{d} &< 2 + \lambda - \frac{2}{d}, \\ -4 + \frac{3}{d} &< \lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Da desigualdade

$$2 + \lambda - \frac{2}{d} < 2, \quad (3.12)$$

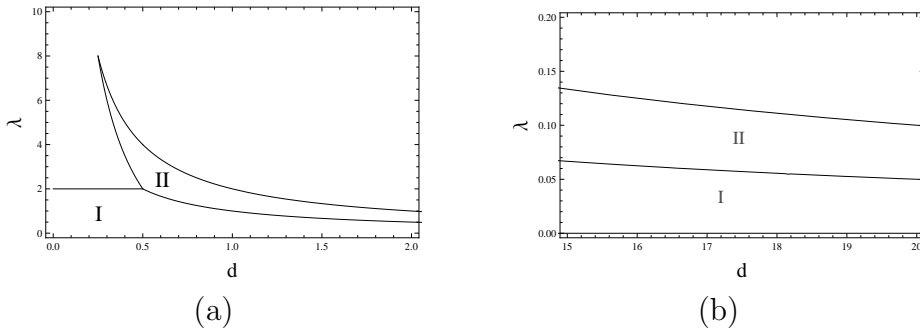
temos

$$\lambda < \frac{2}{d}. \quad (3.13)$$

Assim, se $d < \frac{1}{2}$ então o equilíbrio será estável para valores de λ satisfazendo $-4 + \frac{3}{d} < \lambda < \frac{2}{d}$ e, se $d > \frac{1}{2}$ então $\frac{1}{d} < \lambda < \frac{2}{d}$.

Através das desigualdades obtidas anteriormente, podemos determinar as regiões (Figura 3.1) no espaço dos parâmetros d e λ em que os pontos de equilíbrio (\bar{h}_1, \bar{p}_1) e (\bar{h}_2, \bar{p}_2) são estáveis. Na figura, a área I representa a região de estabilidade de (\bar{h}_1, \bar{p}_1) e a área II representa a região de estabilidade do equilíbrio de coexistência.

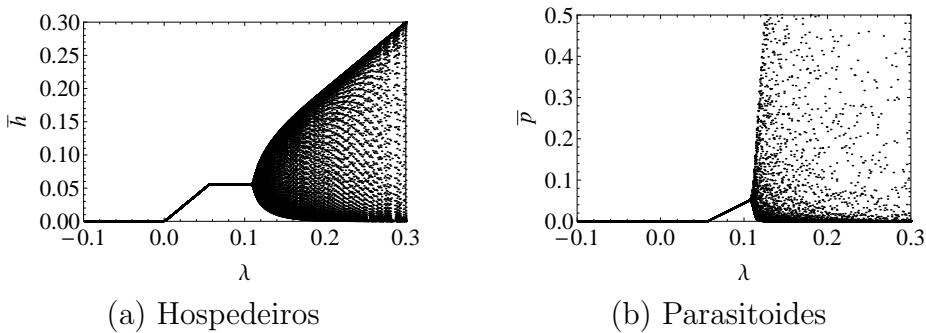
Figura 3.1: Regiões no espaço de parâmetros (d, λ) em que os pontos de equilíbrio (\bar{h}_1, \bar{p}_1) e (\bar{h}_2, \bar{p}_2) do sistema são estáveis. (a) $0 < d < 2$ e $0 < \lambda < 10$ e (b) $15 < d < 20$ e $0 < \lambda < 0,2$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Os diagramas de bifurcação para os hospedeiros e parasitoides com relação a λ estão ilustrados na Figura 3.2.

Figura 3.2: Diagramas de bifurcação em relação ao parâmetro λ com $d = 18$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com os diagramas de bifurcação apresentados, percebemos os intervalos do parâmetro λ para os quais os pontos de equilíbrio são estáveis. Neste caso, para $d = 18$, o ponto de extinção $(0, 0)$ é estável para $\lambda < 0$, para $0 < \lambda \lesssim 0,055$ o equilíbrio $(\lambda, 0)$ torna-se estável e, para $0,055 \lesssim \lambda \lesssim 0,111$ o equilíbrio de coexistência é estável. Para $\lambda \gtrsim 0,111$ são observadas soluções oscilatórias.

3.2 MODELO ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO

Nesta seção, estudamos a dinâmica hospedeiro-parasitoide em um meio espacialmente distribuído, modelado via Redes de Mapas Acoplados. O domínio considerado será composto por duas culturas (uma principal e uma secundária com antibiose) e nosso objetivo é analisar os efeitos da configuração espacial das culturas sobre a densidade de hospedeiros na cultura principal, na presença de um parasitoide.

Como a antibiose afeta o crescimento dos indivíduos, a heterogeneidade espacial dada pela presença das duas culturas será incluída no modelo através do parâmetro λ_x , definido da seguinte forma:

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda, & \text{se } x \text{ for um } patch \text{ da cultura principal,} \\ \lambda_c, & \text{se } x \text{ for um } patch \text{ da cultura com antibiose, com } \lambda_c < \lambda. \end{cases} \quad (3.14)$$

No modelo em estudo, o estágio de movimentação é descrito pelas equações:

$$h'_{x,t} = (1 - \mu_h)h_{x,t} + \sum_{y \in V_x} \frac{\mu_h}{4} h_{y,t}, \quad (3.15)$$

$$p'_{x,t} = (1 - \mu_p)p_{x,t} + \sum_{y \in V_x} \frac{\mu_p}{4} p_{y,t}, \quad (3.16)$$

onde $h_{x,t}$ e $p_{x,t}$ representam, respectivamente, a densidade de hospedeiros e parasitoides na posição x no início da geração t ; $h'_{x,t}$ e $p'_{x,t}$ representam, respectivamente, a densidade de hospedeiros e parasitoides na posição x após a dispersão; μ_h e μ_p são, respectivamente, a fração de hospedeiros e parasitoides que deixa o sítio x durante a movimentação e V_x é a vizinhança de Neumann do sítio x .

Já o estágio de reação é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$h_{x,t+1} = h'_{x,t} e^{\lambda_x - h'_{x,t} - p'_{x,t}}, \quad (3.17)$$

$$p_{x,t+1} = dh'_{x,t} p'_{x,t}, \quad (3.18)$$

onde $h_{x,t+1}$ e $p_{x,t+1}$ são, respectivamente, as densidades de hospedeiros e parasitoides na posição x , no início da geração $t + 1$.

Os indivíduos biológicos e, em particular os insetos, apresentam comportamentos de movimentação variados, dependendo de seu sistema sensorial ou estratégia de busca de recursos e de sobrevivência. Em muitos casos, os indivíduos são capazes de perceber gradientes de concentração de recursos (ou substâncias tóxicas) e serem atraídos (repelidos) para locais de maior concentração. Este tipo de movimentação é chamado de *taxia* (RODRIGUES, 1998).

Ainda, alguns insetos possuem a tendência de se agregar em regiões com maior densidade de indivíduos de sua espécie, como é o caso do percevejo *Nezara viridula* que é uma das principais pragas da soja e possui o hábito de aglomerar-se sobre a planta (GALLO et

al., 2002). Já a fêmea do parasitoide *Trissolcus basalus*, tende a localizar a massa de ovos do hospedeiro através de movimentos aleatórios ou de quimiotaxia (CORRÊA-FERREIRA, 1993).

Como os resultados dos modelos podem ser fortemente impactados pelo tipo de movimentação dos indivíduos, esta informação deve ser considerada em modelos espacialmente estruturados. Como estamos trabalhando com um modelo teórico, vamos considerar as seguintes combinações de tipos de movimentação para hospedeiros e parasitoides, as quais chamaremos de cenários:

- Cenário 1: Hospedeiros e parasitoides se movimentam aleatoriamente. Isto é, os indivíduos, de ambas as espécies, se movimentam independentemente de sua densidade ou da densidade da outra espécie;
- Cenário 2: Hospedeiros se movimentam aleatoriamente enquanto que o movimento dos parasitoides depende da densidade local de hospedeiros. Isto é, consideramos que os parasitoides percebem a densidade de hospedeiros presentes no sítio em que se encontram e permanecem em sítios de maiores densidades;
- Cenário 3: Hospedeiros tendem a permanecer em sítios com maior densidade de sua espécie, representando um comportamento de agregação. Os parasitoides, por sua vez, permanecem nos sítios de maior densidade de hospedeiros;
- Cenário 4: Hospedeiros apresentam comportamento de antiagregação, isto é, os indivíduos deixam os sítios com maior densidade de seus coespecíficos. Os parasitoides, como no caso anterior, preferem permanecer nos sítios com altas densidades de hospedeiros.

Como a descrição dos cenários sugere, os diferentes tipos de movimentação serão incluídos no modelo através da fração μ de indivíduos que deixa um *patch*.

Simulações

Vamos analisar os efeitos da área e da distribuição espacial da cultura com antibiose sobre a densidade da espécie hospedeira através de simulações numéricas do sistema (3.15) - (3.18) em um domínio Ω cujas dimensões $n \times n$ irão variar de acordo com a configuração da cultura secundária. Em todas as simulações, consideraremos 600 gerações e o

domínio com condições de fronteira reflexivas. Como distribuição inicial, os insetos estarão presentes apenas em uma região Ω_0 de dimensões 3×3 aproximadamente no centro do domínio Ω , com densidade $h_{x,0} = 0,055$ e $p_{x,0} = 0,044$, com $x \in \Omega_0$. Ainda, densidades dos hospedeiros que assumirem valores abaixo da ordem 10^{-12} serão definidas como zero.

O parâmetro da cultura principal será fixo em $\lambda = 0,1$, enquanto que na cultura com antibiose, usaremos os valores $\lambda_c = 0,06$ (que indica uma resistência leve), $\lambda_c = 0,01$ (resistência moderada) e $\lambda_c = -1$ (que corresponde a uma alta resistência). Em todas simulações, assumiremos o parâmetro $d = 18$, visto que para este valor o equilíbrio de coexistência das espécies é estável na cultura principal.

Os parâmetros de movimentação serão assumidos como $\mu_h = 0,1$ e $\mu_p = 0,6$ uma vez que, em muitos casos, os parasitoides se movimentam mais que os hospedeiros. A Tabela 3.1 resume todos os valores dos parâmetros que serão utilizados neste capítulo.

Tabela 3.1: Parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valores	Descrição
d	18	parâmetro adimensional do modelo
λ	0,1	e^λ é o fator de crescimento constante dos hospedeiros na cultura principal
λ_c	-1; 0,01; 0,06	e^{λ_c} é o fator de crescimento constante dos hospedeiros na cultura secundária
μ_h	0,1	fração de hospedeiros que deixa um sítio (cenários 1 e 2)
$\bar{\mu}_h$	0,1	fração migratória máxima de hospedeiros (cenários 3 e 4)
μ_p	0,6	fração de parasitoides que deixa um sítio (cenário 1)
$\bar{\mu}_p$	0,6	fração migratória máxima de parasitoides (cenários 2, 3 e 4)

Para cada um dos cenários, realizamos os seguintes experimentos numéricos:

A) Dinâmica sem consórcio de culturas: Análise da dinâmica da espécie em um domínio de dimensões 40×40 *patches* composto somente pela cultura principal;

B) Efeitos da área da cultura com antibiose: Neste experimento, serão inseridas de 1 até 6 fileiras de sítios da cultura secundária em torno da cultura principal (de dimensões 40×40 *patches*), de forma que o domínio total varia de 42×42 até 52×52 sítios, conforme descrito na Subseção 2.2.1 do Capítulo 2. Nas simulações deste experimento, serão considerados dois valores para o parâmetro λ_c ($\lambda_c = -1$ e $\lambda_c = 0,01$);

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose: Neste experimento, a cultura principal será composta por aproximadamente 1600 *patches*, enquanto a

área da cultura secundária corresponderá a aproximadamente 20% da área da cultura principal, distribuída conforme descrito na Subseção 2.2.1 do Capítulo 2. Nas simulações deste experimento, serão considerados três valores para o parâmetro λ_c ($\lambda_c = -1$, $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$).

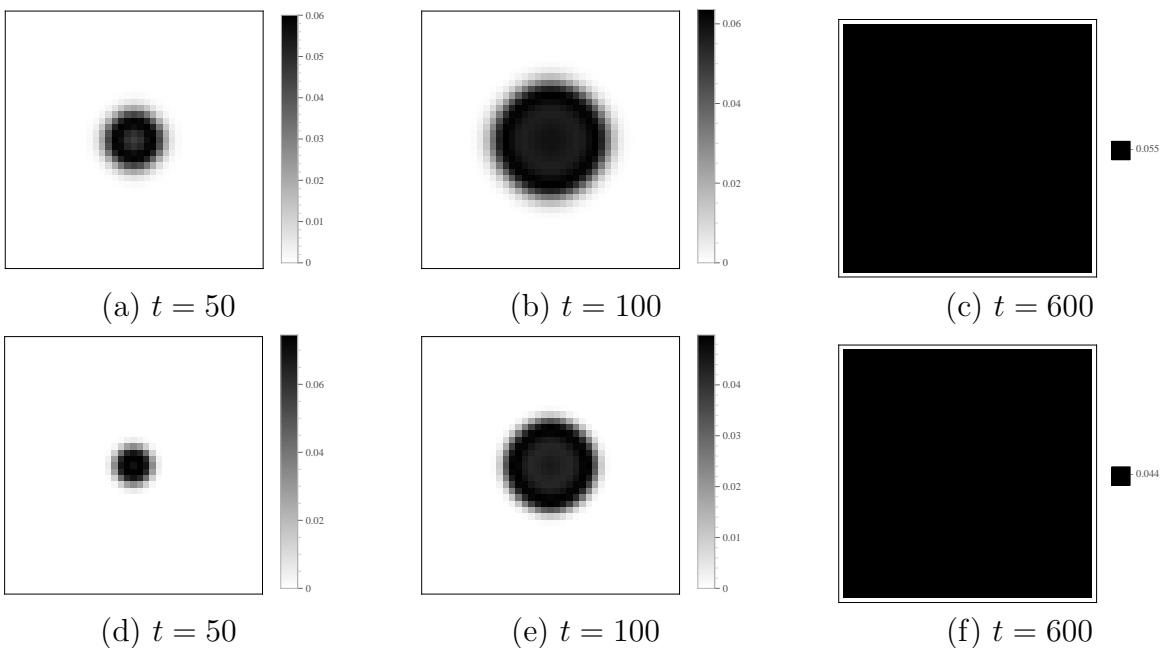
3.2.1 Cenário 1: Hospedeiros e parasitoides se movimentam aleatoriamente

Neste primeiro cenário, ambos os parâmetros de movimentação μ_h e μ_p serão assumidos constantes ($\mu_h = 0,1$ e $\mu_p = 0,6$). Assim, a fração de indivíduos, de cada espécie, que abandona um *patch* independe da densidade das espécies envolvidas. Como mencionado no Capítulo 2, este tipo de movimentação corresponde, em uma escala macroscópica, a um processo de difusão clássica (PARIGI, 2013).

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

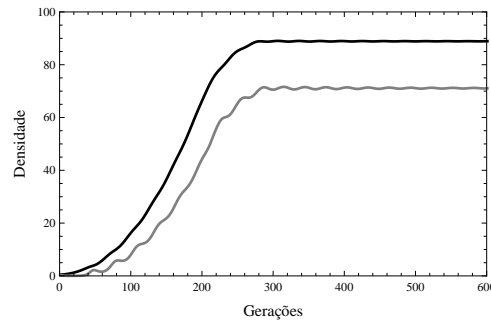
Na Figura 3.3, estão ilustradas as distribuições espaciais das espécies no domínio em três etapas de tempo. A densidade total dos hospedeiros e parasitoides em cada geração está representada na Figura 3.4.

Figura 3.3: (a) - (c) Distribuição espacial dos hospedeiros e (d) - (f) distribuição espacial de parasitoides em diferentes etapas de tempo. Parâmetros: $d = 18$, $\lambda = 0,1$, $\mu_h = 0,1$ e $\mu_p = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.4: Densidade total de hospedeiros (preto) e parasitoides (cinza) em um domínio composto somente pela cultura principal. Parâmetros: $d = 18$, $\lambda = 0, 1$, $\mu_h = 0, 1$ e $\mu_p = 0, 6$.



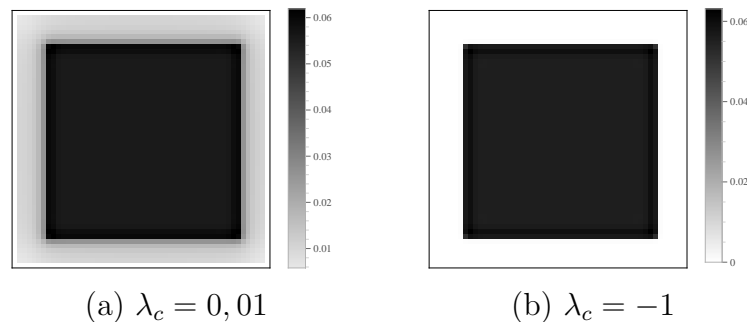
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Notamos que a presença do parasitoide reduz significativamente a densidade total assintótica de hospedeiros na cultura principal (Figura 3.4 comparada a curva em preto na Figura 2.12 (a)). A seguir, iremos acrescentar ao domínio a cultura secundária com o objetivo de verificar se a área desta cultura proporciona uma redução ainda mais acentuada na densidade de hospedeiros.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

As Figuras 3.5 e 3.6 mostram, respectivamente, a distribuição espacial dos hospedeiros e parasitoides na última iteração, considerando os casos $\lambda_c = 0, 01$ e $\lambda_c = -1$. O domínio considerado nas figuras é composto pela cultura principal (dimensões 40×40 patches) e 6 fileiras da cultura com antibiose em torno desta, totalizando um domínio de dimensões 52×52 patches.

Figura 3.5: Distribuição espacial dos hospedeiros em um domínio heterogêneo na geração $t = 600$.

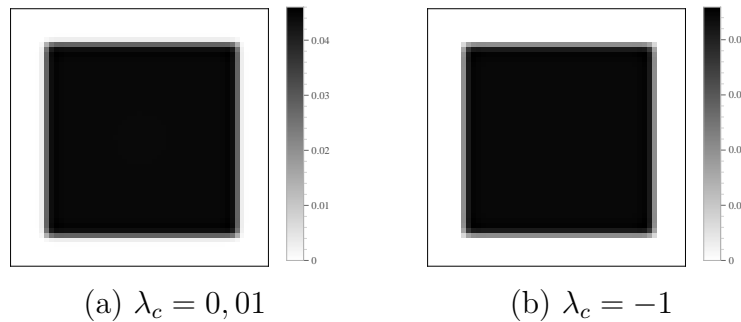


(a) $\lambda_c = 0, 01$

(b) $\lambda_c = -1$

Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.6: Distribuição espacial dos parasitoides em um domínio heterogêneo na geração $t = 600$.



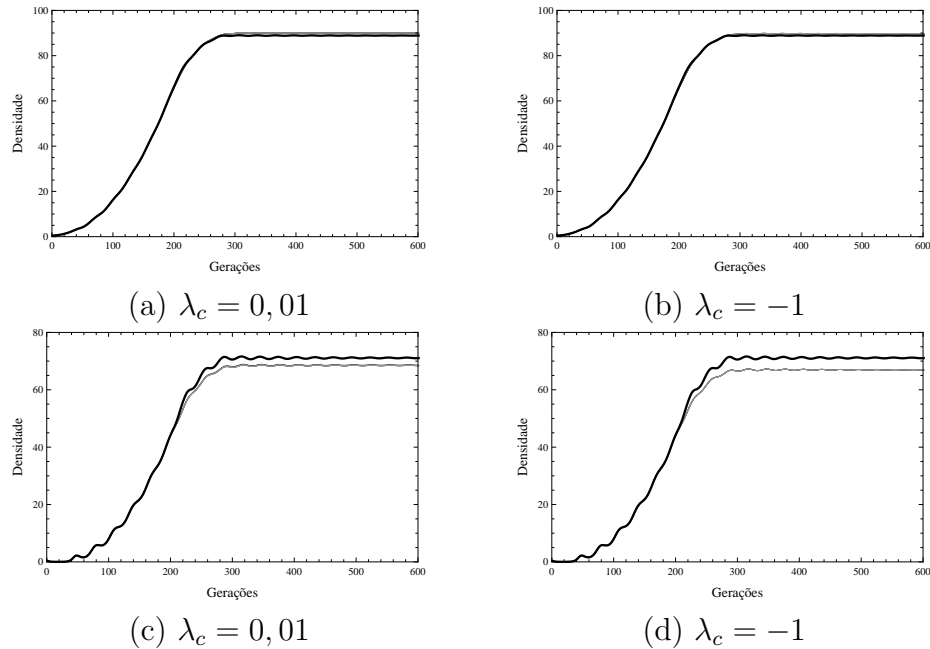
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Percebemos através da distribuição espacial dos indivíduos na última iteração que, na área da cultura com antibiose, a densidade de parasitoides assume valores muito próximos de zero, independente do valor de λ_c considerado. Enquanto que no caso dos hospedeiros, este comportamento é observado somente no caso $\lambda_c = -1$. Este resultado deve-se à dinâmica local das espécies, visto que para $\lambda_c = -1$ o ponto de equilíbrio correspondente à extinção das espécies é estável e, para $\lambda_c = 0,01$ o equilíbrio $(\lambda, 0)$ é estável. Isto é, pela dinâmica, os parasitoides vão à extinção na cultura com antibiose.

A comparação da densidade total dos hospedeiros e parasitoides presentes somente na cultura principal está ilustrada na Figura 3.7. Notamos que há uma redução na densidade de parasitoides do caso sem a cultura secundária para os casos com a presença desta cultura. Já a densidade de hospedeiros na cultura principal mantém-se aproximadamente a mesma.

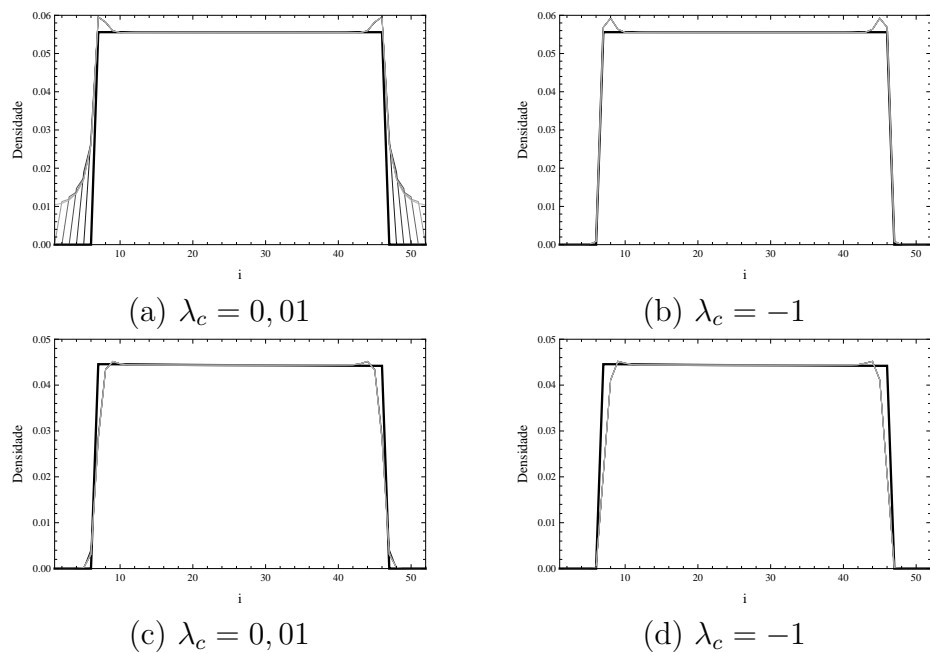
A Figura 3.8 apresenta a densidade populacional ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na última iteração. Através desta figura, observamos uma redução na densidade populacional de parasitoides do caso em que o domínio é composto somente pela cultura principal para os casos com a presença da cultura secundária, analisando somente a área da cultura principal ($7 \leq j \leq 46$). Já no caso dos hospedeiros, percebemos que a densidade aumenta na fronteira entre a cultura principal e a cultura secundária. Uma justificativa deste aumento seria a redução na densidade de parasitoides observada nesta região.

Figura 3.7: (a) e (b) População total de hospedeiros e (c) e (d) população total de parasitoides na cultura principal. Domínio composto somente pela cultura principal (em preto) e com as duas culturas (tons de cinza). A tonalidade da cor cinza diminui à medida que acrescentamos mais filas da cultura secundária em torno da principal.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.8: Densidade populacional na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na iteração 600. (a) e (b) densidade de hospedeiros e, (c) e (d) densidade de parasitoides considerando apenas a cultura principal (em preto) e considerando diferentes quantidades da cultura secundária (tons de cinza).

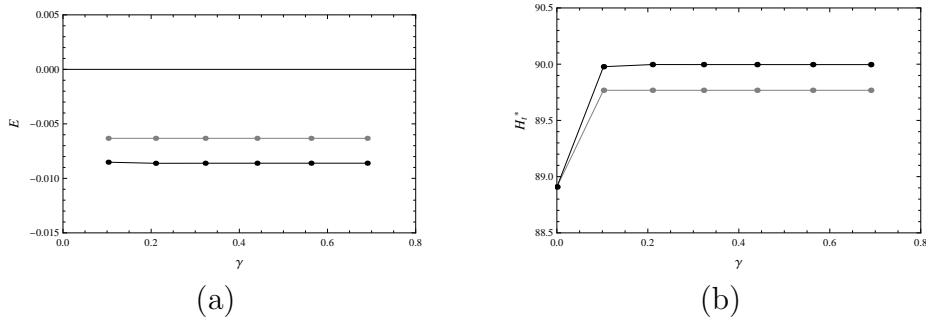


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 3.9 (a) está ilustrado o percentual de decréscimo dos hospedeiros E ,

obtido para as diferentes proporções de área secundária. Ainda, na Figura 3.9 (b) está ilustrada a densidade total assintótica dos hospedeiros (H_t^*).

Figura 3.9: (a) Percentual de decrescimento dos hospedeiros e (b) Densidade total assintótica de hospedeiros, para $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



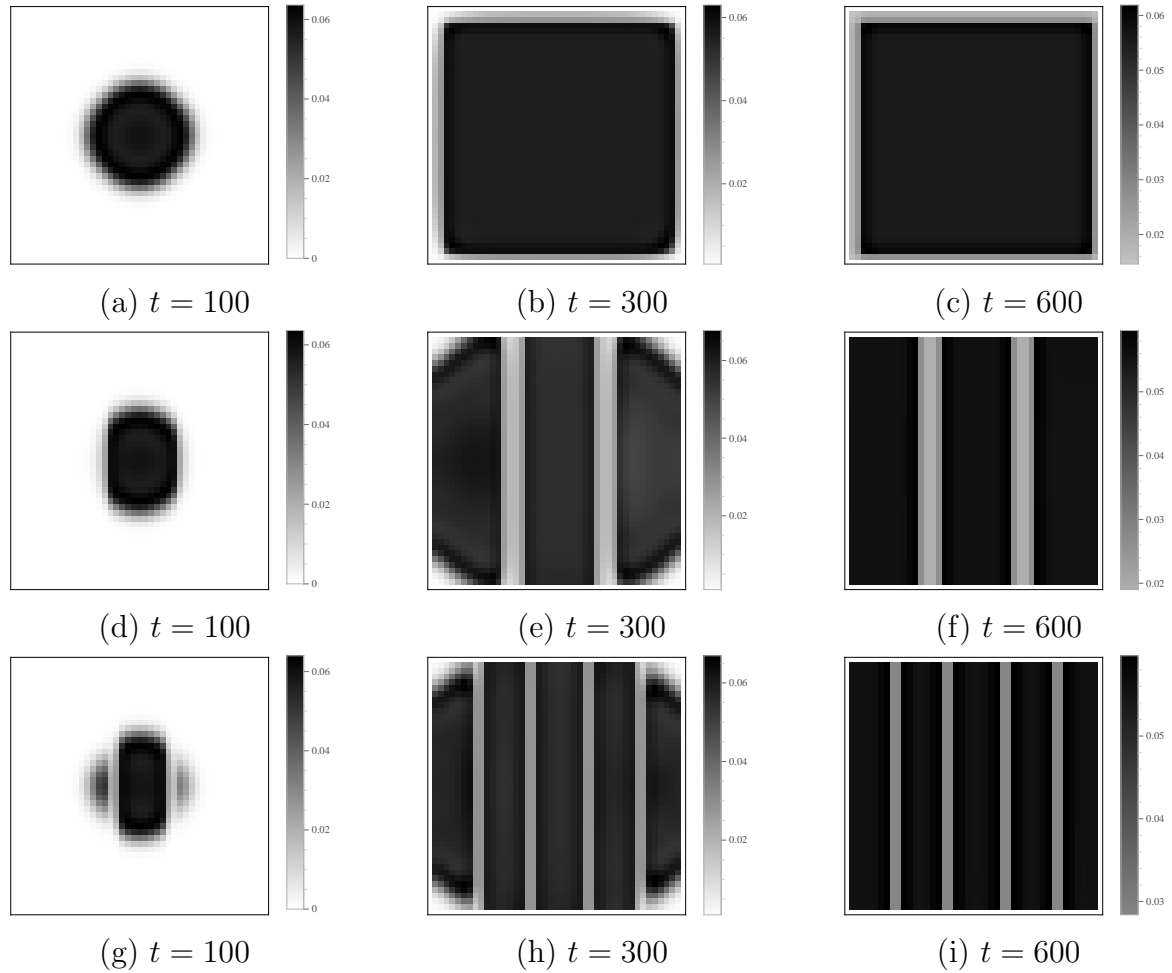
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

De acordo com os resultados obtidos, concluímos que, para estes valores de parâmetros, a presença da cultura com antibiose aumenta a densidade de hospedeiros na cultura principal, resultando assim em percentuais de decrescimento negativos. Ainda, percebemos que este resultado é devido ao aumento na densidade dos hospedeiros na fronteira entre as duas culturas, conforme observado nas Figuras 3.8 (a) e 3.8 (b).

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

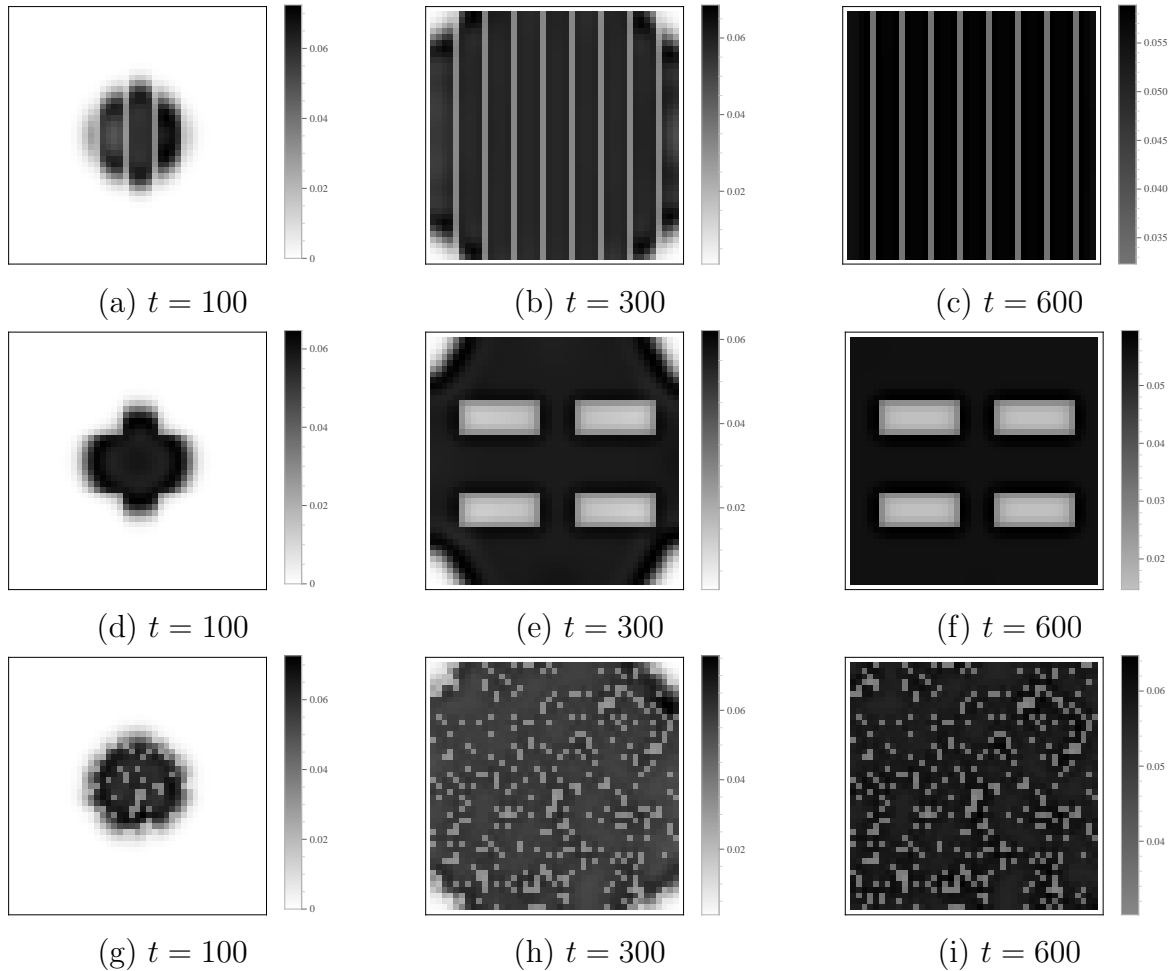
As Figuras 3.10 e 3.11 ilustram a distribuição espacial dos hospedeiros em um domínio de dimensões 44×44 patches com $\lambda_c = 0,01$. O Arranjo 1 corresponde ao caso em que a cultura secundária está disposta em torno da cultura principal, os Arranjos 2, 3 e 4 referem-se à distribuição da cultura secundária em forma de listras (2, 4 e 8 listras, respectivamente). O Arranjo 5 corresponde à distribuição em forma de blocos e o Arranjo 6, à distribuição aleatória.

Figura 3.10: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\mu_h = 0,1$ e $\mu_p = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.11: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\mu_h = 0,1$ e $\mu_p = 0,6$.

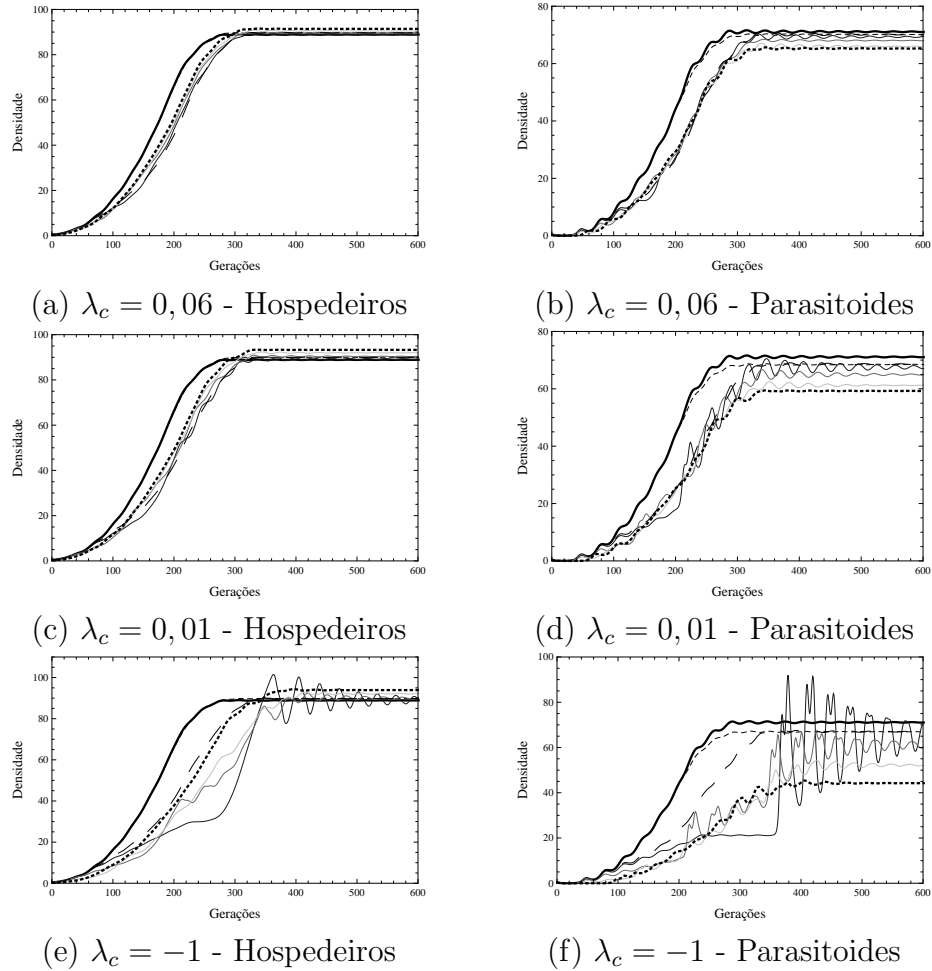


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 3.12 está representada a densidade total dos indivíduos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos das duas culturas. Observamos que algumas distribuições da cultura secundária reduzem significativamente a densidade de parasitoides ao longo das 600 gerações, enquanto que, no caso dos hospedeiros, esta redução só foi observada nas primeiras gerações. Além disso, observamos que ocorrem oscilações na população total de indivíduos quando assumimos $\lambda_c = -1$ e analisamos o arranjo 2. Estas oscilações possuem amplitude maior no caso dos parasitoides e tendem a diminuir com as gerações.

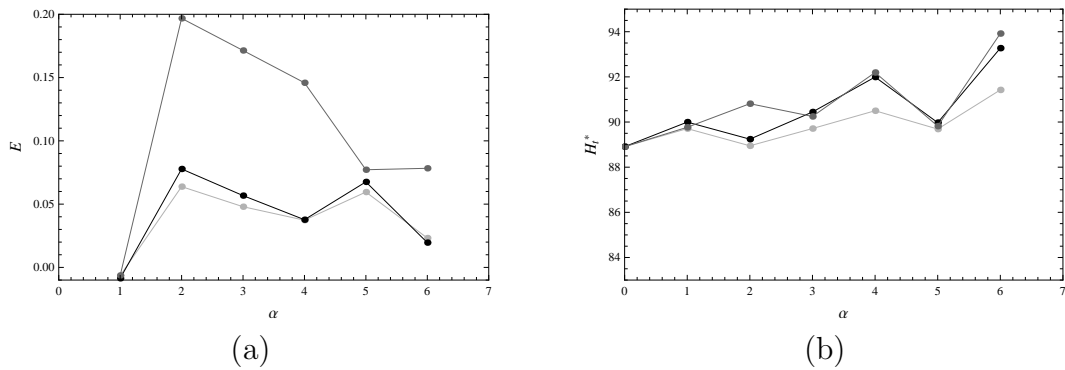
O percentual de decréscimo dos hospedeiros E e sua densidade total assintótica H_t^* estão ilustrados na Figura 3.13, onde o eixo α representa o arranjo das culturas considerado. O caso $\alpha = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Figura 3.12: População total de indivíduos presente na cultura principal. Domínio sem a cultura com antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.13: (a) Percentual de decréscimo da população de hospedeiros e (b) Densidade total assintótica dos hospedeiros. Parâmetros: $\mu_h = 0,1$, $\mu_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).

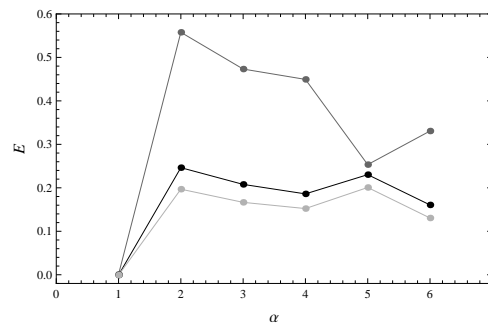


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Atráves da Figura 3.13 (a), podemos concluir que, considerando 600 gerações, o arranjo 2 apresentou maior percentual de decrescimento que os demais arranjos, no caso $\lambda_c = -1$. Já nos casos $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$, os arranjos 2 e 5 foram os que mais reduziram a densidade de hospedeiros na cultura principal.

De acordo com os gráficos da população total de indivíduos (Figura 3.12) observamos que o crescimento da densidade total de hospedeiros é mais lento nas primeiras gerações. Devido a este resultado e ao fato de que as culturas envolvidas no consórcio podem ser não perenes, sendo portanto mais apropriada uma análise do comportamento do sistema em intervalos curtos de tempo, analisamos os percentuais de decrescimento considerando somente as 300 primeiras gerações, conforme ilustrado na Figura 3.14.

Figura 3.14: Percentual de decrescimento da população de hospedeiros considerando 300 gerações. Parâmetros: $\mu_h = 0,1$, $\mu_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Deve-se ressaltar a grande influência que o número de gerações exerce sobre os resultados obtidos, visto que o crescimento dos hospedeiros é mais lento nos casos de consórcio de culturas, porém a densidade total assintótica dos hospedeiros é maior no caso em que o domínio é composto pelas duas culturas do que no caso em que é composto somente pela cultura principal ($\alpha = 0$), conforme mostra a Figura 3.13 (b). Desta forma, o percentual de decrescimento só assumiu valores positivos devido à redução da população observada nas gerações iniciais ser maior que o acréscimo observado nas gerações restantes.

3.2.2 Cenário 2: Movimentação dos hospedeiros aleatória e dos parasitoides dependente da densidade local de hospedeiros

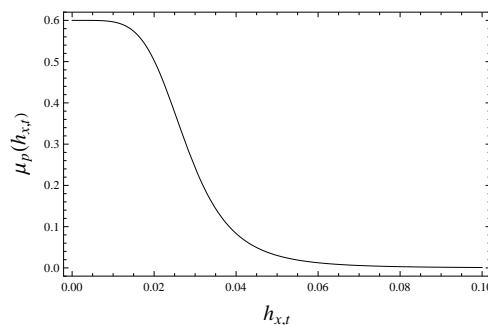
Neste cenário, a movimentação dos parasitoides ocorre em resposta à densidade local de hospedeiros. Já a movimentação dos hospedeiros dá-se de maneira aleatória, ou seja, não é influenciada pela densidade de hospedeiros ou de parasitoides no *patch* e nem mesmo pela distribuição das plantas. Desta forma, a fração de hospedeiros que deixa um *patch* será considerada constante com valor $\mu_h = 0,1$. Já a fração μ_p será dependente da densidade local de hospedeiros de acordo com a função:

$$\mu_p(h_{x,t}) = \bar{\mu}_p - \frac{\bar{\mu}_p \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q}, \quad (3.19)$$

onde $\bar{\mu}_p$ é a fração migratória máxima, $h_{x,t}$ é a densidade de hospedeiros no *patch* x e geração t , q é o parâmetro que regula a forma de $\mu_p(h_{x,t})$ e A é a densidade populacional para a qual a função migratória atinge metade do seu valor máximo.

Nesta série de simulações serão considerados os seguintes parâmetros: $d = 18$, $A = \frac{1}{2d} = \frac{1}{2}h_2$, $\bar{\mu}_p = 0,6$ e $q = 5$, de modo que a função $\mu_p(h_{x,t})$ comporta-se conforme mostra a figura 3.15. Observamos que este valor para A corresponde à metade do valor de equilíbrio de coexistência dos hospedeiros.

Figura 3.15: Função $\mu_p(h_{x,t})$ com $d = 18$, $A = \frac{1}{2d}$, $\bar{\mu}_p = 0,6$ e $q = 5$.



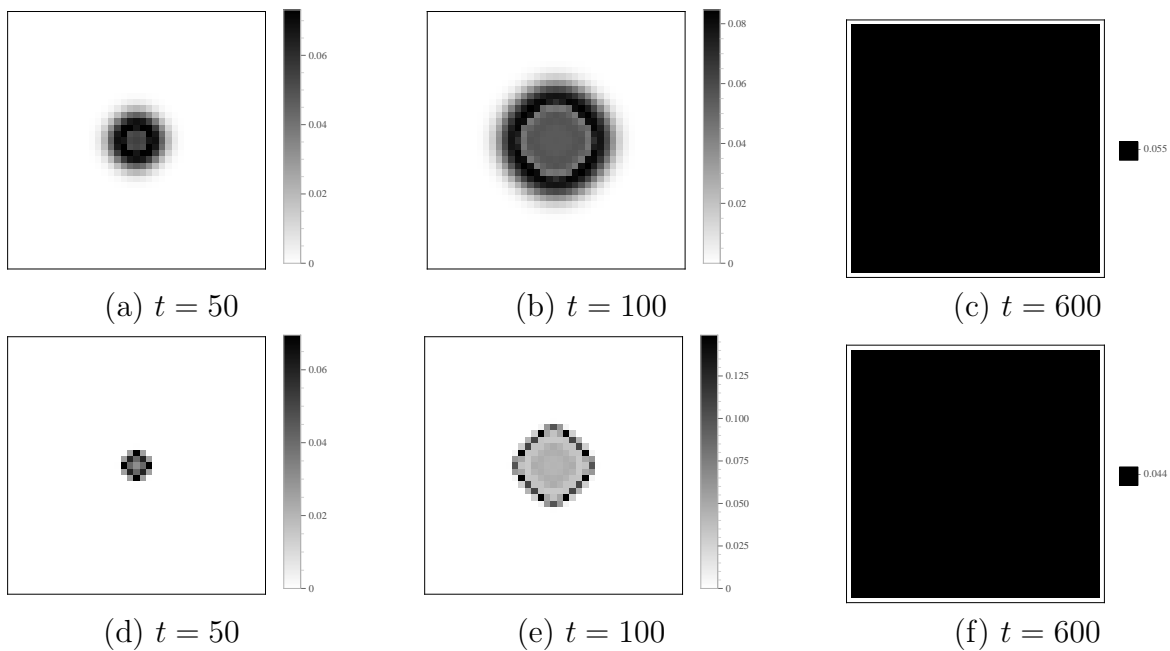
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

Na Figura 3.16 podemos observar as distribuições espaciais das espécies no domínio em três etapas de tempo. Notamos que a distribuição dos hospedeiros é dada por uma

frente com alta densidade. Atrás desta frente, há uma redução na densidade de hospedeiros, provocada pela presença dos parasitoides. Após os transientes, as duas espécies assumem uma distribuição homogênea no habitat.

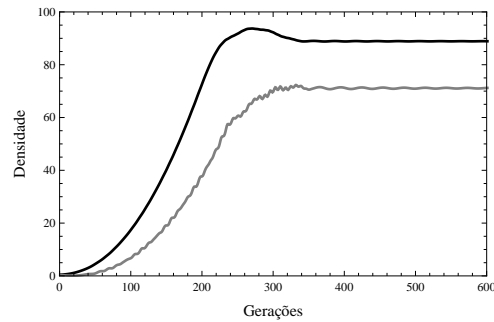
Figura 3.16: (a) - (c) Distribuição espacial dos hospedeiros e (d) - (f) distribuição espacial dos parasitoides em um domínio composto apenas pela cultura principal.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A densidade total das populações no decorrer de 600 gerações está representada na Figura 3.17. Comparando a densidade total dos hospedeiros no caso em que ambas espécies se movimentam aleatoriamente (Figura 3.4), notamos que a movimentação do parasitoide dependente da densidade local de hospedeiros provoca um ligeiro aumento na densidade de hospedeiros em torno da geração 260. Isto ocorre porque os parasitoides permanecem mais nos sítios de maior densidade de hospedeiros, o que permite que, no início do processo, os hospedeiros se desenvolvam em áreas (frente de onda) com menor densidade de parasitoides. Após os transientes, as densidades totais assintóticas de hospedeiros e parasitoides assumem aproximadamente os mesmos valores que no caso em que ambos indivíduos se movimentam aleatoriamente.

Figura 3.17: Densidade total dos hospedeiros (preto) e parasitoides (cinza) em um domínio composto pela cultura principal.

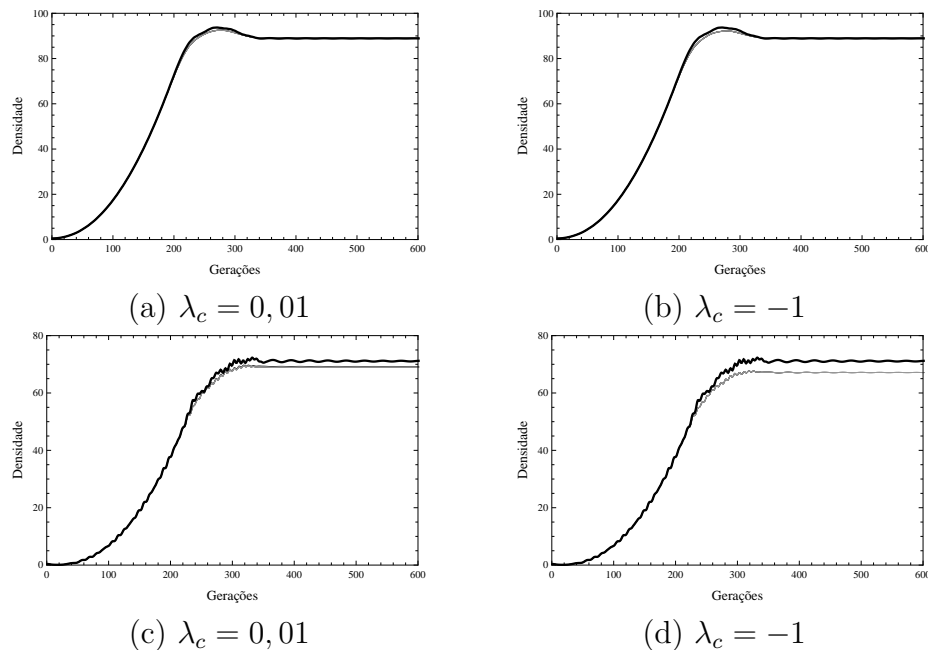


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

A densidade total dos hospedeiros e parasitoides na cultura principal está ilustrada na Figura 3.18. Percebemos que não há uma redução significativa na densidade de hospedeiros do caso em que o domínio é composto somente pela cultura principal para os casos com a presença da cultura com antibiose. Porém, no caso dos parasitoides há uma pequena redução, que é maior quando consideramos $\lambda_c = -1$.

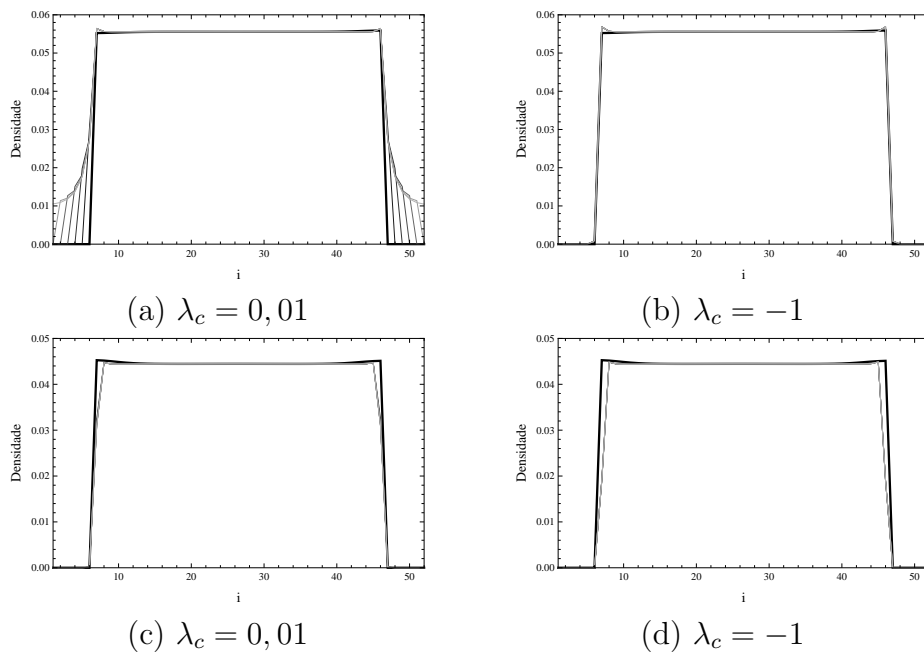
Figura 3.18: (a) e (b) População total de hospedeiros e (c) e (d) população total de parasitoides presentes na cultura principal considerando o domínio sem a cultura secundária (preto) e com a cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A Figura 3.19 apresenta a densidade populacional ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na iteração 600, considerando apenas a cultura principal (curva em preto) e com a presença da cultura secundária (curva em cinza). Observamos que a movimentação do parasitoide dependente da densidade local de hospedeiros reduz significativamente os picos de densidade do hospedeiro observados na fronteira entre as culturas no caso em que a fração de movimentação era constante (Figuras 3.8 (a) e 3.8 (b)).

Figura 3.19: Densidade populacional na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio, na iteração 600. (a) e (b) hospedeiros e (c) e (d) parasitoides, considerando apenas a cultura principal (em preto) e considerando diferentes quantidades da cultura secundária (tons de cinza).

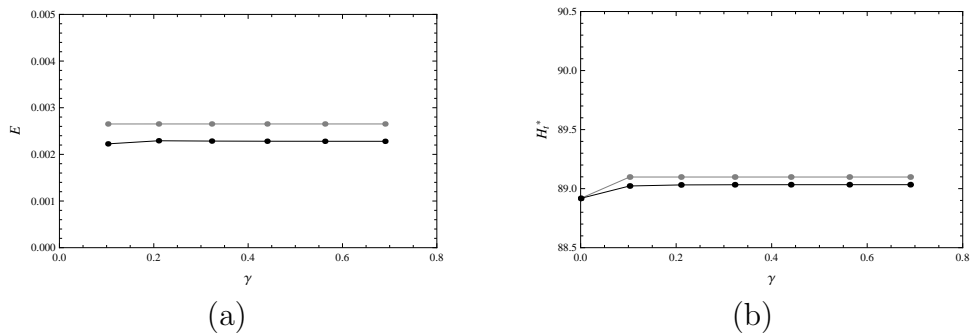


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

O percentual de decréscimo E e a densidade total assintótica dos hospedeiros, considerando 600 gerações, estão ilustrados na Figura 3.20. O caso $\gamma = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Através dos resultados obtidos, concluímos que este tipo de distribuição espacial da cultura secundária não altera significativamente a densidade de hospedeiros na cultura principal quando comparada ao caso em que o domínio é composto somente pela cultura principal (Figuras 3.18 e 3.19). Porém, constatou-se uma redução dos picos na densidade de hospedeiros observados na fronteira entre as duas culturas no caso em que ambas espécies se movimentam de maneira aleatória. Desta forma, a diferença entre a densidade total assintótica dos casos com a presença da cultura secundária para o caso em que esta é ausente ($\gamma = 0$), é menor que a observada no cenário 1.

Figura 3.20: (a) Percentual de decrescimento dos hospedeiros e (b) Densidade total assintótica de hospedeiros, para $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



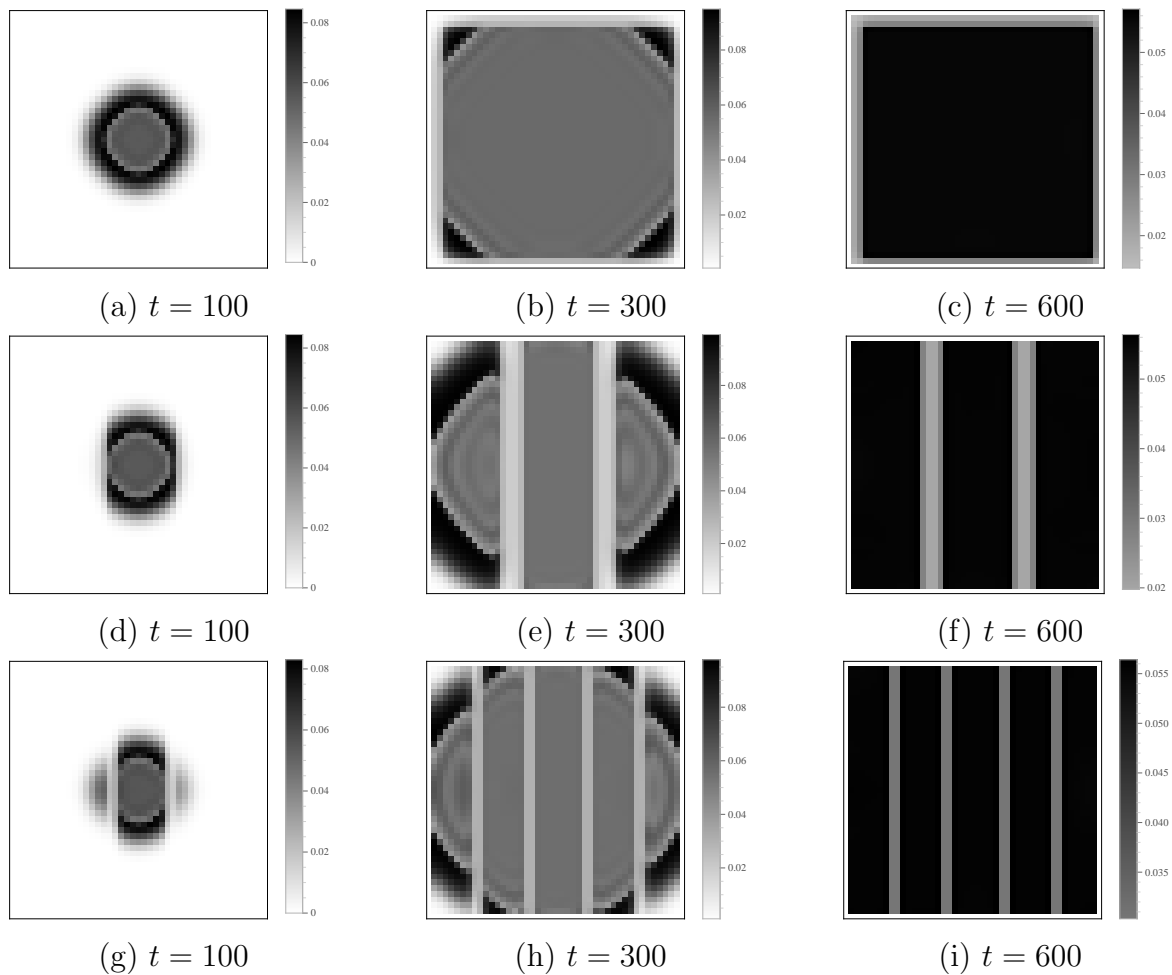
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Além disso, percebemos novamente que, para esta configuração espacial, a proporção da área da cultura que apresenta antibiose (γ) não afeta de modo expressivo o percentual de decrescimento da população de hospedeiros conforme observado na Figura 3.20 (a).

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

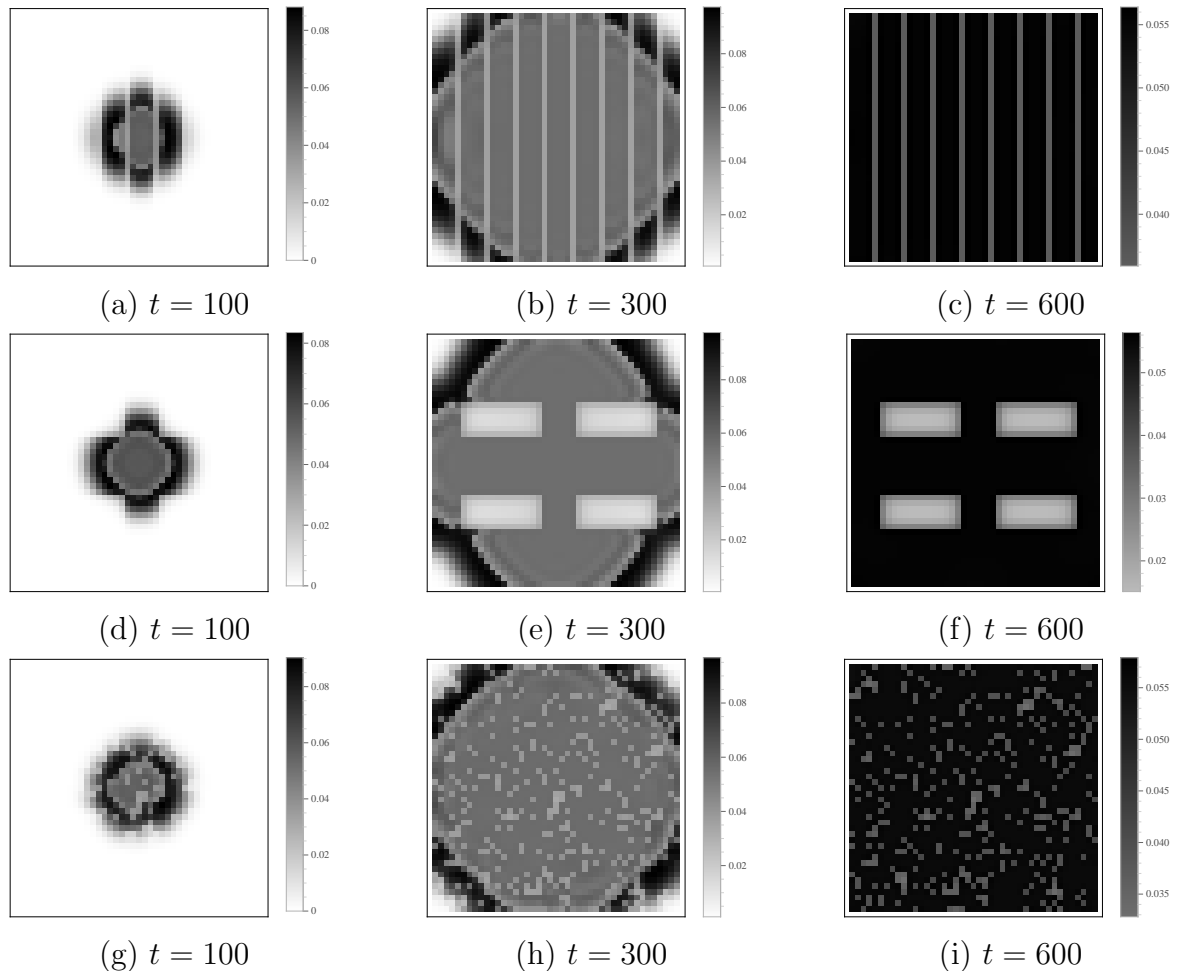
As figuras 3.21 e 3.22 ilustram a distribuição espacial dos hospedeiros em um domínio de dimensões 44×44 *patches* com os diferentes arranjos das culturas considerados e assumindo $\lambda_c = 0,01$.

Figura 3.21: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\mu_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.22: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\mu_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.

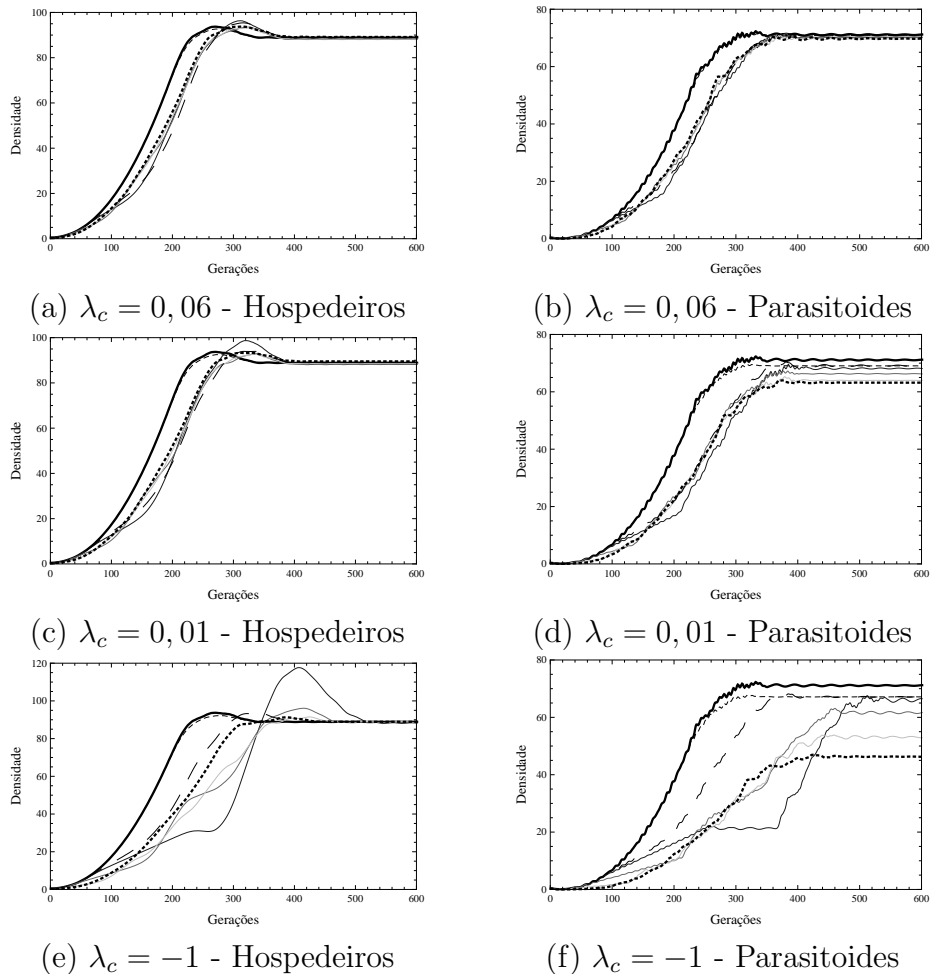


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 3.23 está representada a densidade total dos insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos das duas culturas enunciados anteriormente. Através desta figura, podemos perceber que as diferentes distribuições da cultura secundária afetam de modo mais expressivo a densidade total assintótica de parasitoides que a densidade de hospedeiros, como observado também no caso em que ambas espécies se movimentam de maneira aleatória.

Ainda, ao assumirmos $\lambda_c = -1$ e analisarmos o arranjo 2, observamos um aumento na densidade total de hospedeiros na cultura principal em torno da geração 360. Uma justificativa deste aumento seria a baixa densidade de parasitoides observada em torno desta geração na cultura principal localizada após as duas listras da cultura com antibiose.

Figura 3.23: População total de indivíduos presente na cultura principal. Domínio sem a cultura com antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).

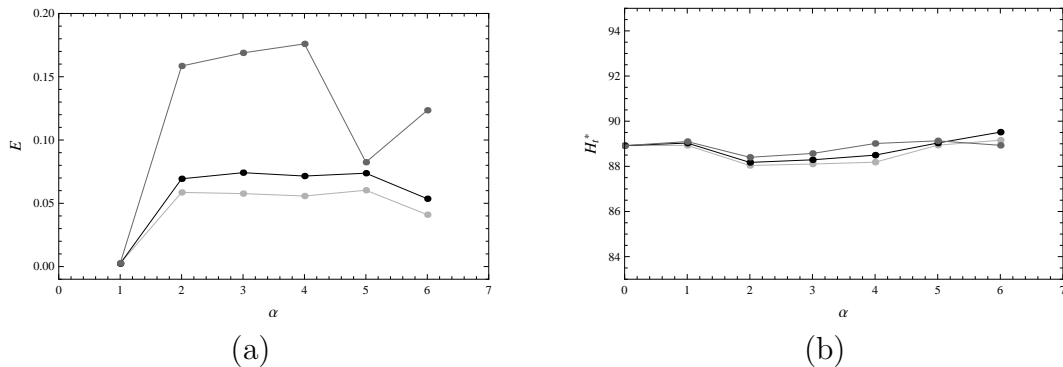


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

O percentual de decrescimento E e a densidade total assintótica dos hospedeiros H_t^* estão ilustrados na Figura 3.24, onde o eixo α representa os arranjos das culturas. De acordo com a figura, concluímos que quanto menor o valor do parâmetro λ_c considerado, ou seja, quanto maior o nível de resistência que a cultura apresenta em relação ao inseto, maior é a redução da população de hospedeiros na cultura principal, independentemente do arranjo entre as culturas escolhido, exceto para o arranjo 1 para o qual $E \approx 0$ para todos os valores de λ_c . Podemos justificar tal resultado pela densidade total de hospedeiros observada nas primeiras gerações para diferentes valores de λ_c (Figura 3.23).

Ainda, considerando 600 gerações, os arranjos em que a cultura secundária está disposta em listras forneceram maiores percentuais de decrescimento da população de hospedeiros quando comparados aos demais arranjos no caso $\lambda_c = -1$. Já nos casos

Figura 3.24: (a) Percentual de decréscimo da população de hospedeiros e (b) Densidade total assintótica dos hospedeiros. Parâmetros: $\mu_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).

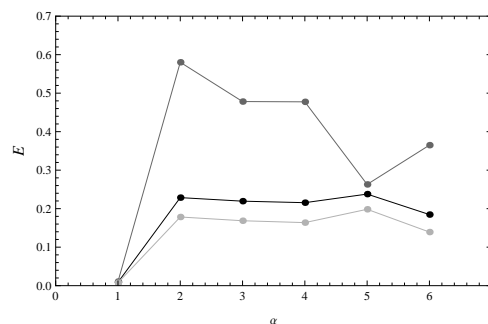


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

$\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$, além destes arranjos, o arranjo 5 (cultura secundária distribuídas em blocos) apresentou resultados semelhantes.

Considerando somente as primeiras 300 gerações (Figura 3.25), percebemos que, além dos percentuais de decréscimo serem maiores, há uma mudança no arranjo que mais reduz a população de hospedeiros no caso $\lambda_c = -1$. Enquanto que considerando 600 gerações o melhor arranjo era o arranjo 4, com 300 gerações, o arranjo 2 assume este papel.

Figura 3.25: Percentual de decréscimo da população de hospedeiros considerando 300 gerações. Parâmetros: $\mu_h = 0,1$, $\mu_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

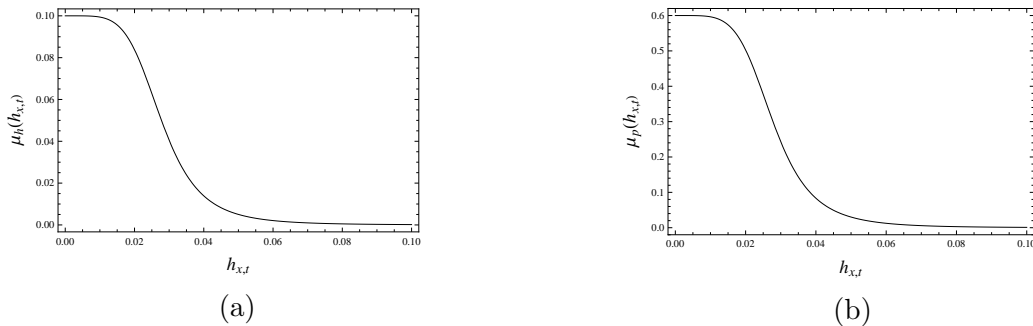
3.2.3 Cenário 3: Hospedeiros apresentam comportamento de agregação e a movimentação dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros

Neste cenário, tanto hospedeiros como parasitoides apresentam maior permanência nos sítios em que a densidade de hospedeiros é maior, os hospedeiros porque tendem a agregar-se e os parasitoides porque permanecem onde há mais hospedeiros. Desta forma, a fração de hospedeiros e parasitoides que deixam um sítio são dadas, respectivamente, por:

$$\mu_h(h_{x,t}) = \bar{\mu}_h - \frac{\bar{\mu}_h \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q} \text{ e } \mu_p(h_{x,t}) = \bar{\mu}_p - \frac{\bar{\mu}_p \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q}. \quad (3.20)$$

Na Figura 3.26 estão ilustrados os gráficos das funções μ_h e μ_p consideradas neste cenário.

Figura 3.26: (a) Função μ_h e (b) função μ_p . Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $q = 5$, $d = 18$ e $A = \frac{1}{2d}$.

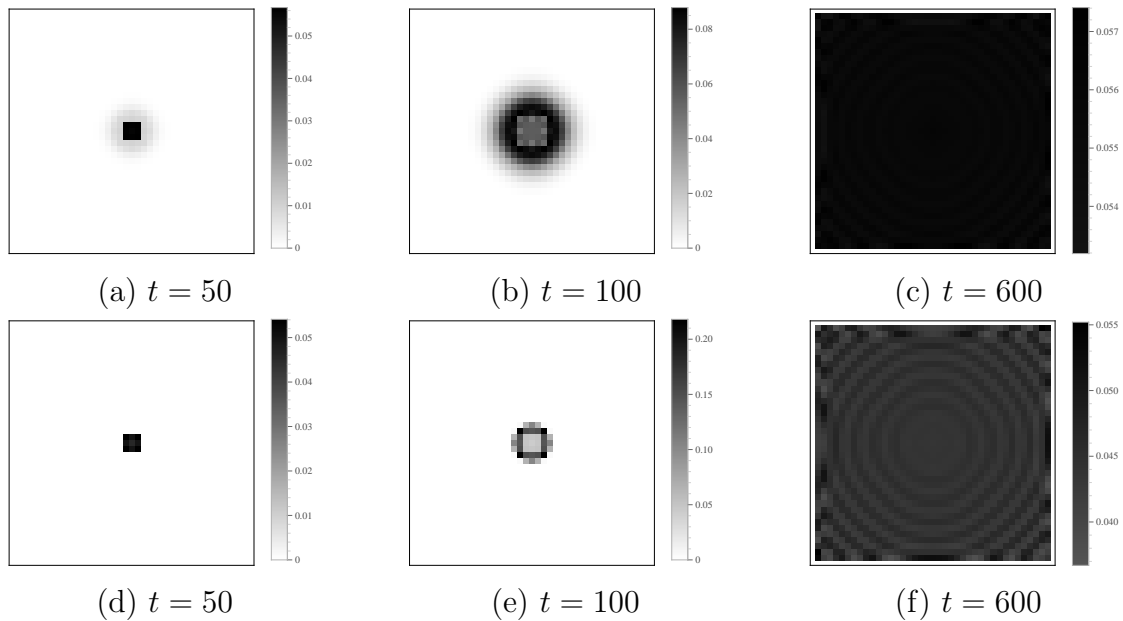


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

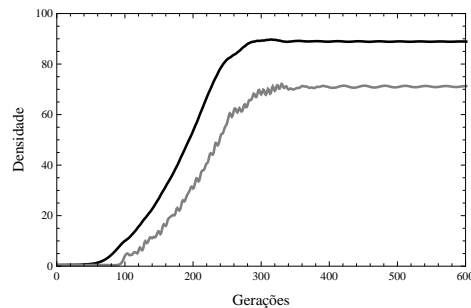
Na Figura 3.27, estão ilustradas as distribuições espaciais das espécies no domínio em três etapas de tempo. Podemos perceber através da distribuição dos indivíduos, que as movimentações consideradas neste cenário retardam a dispersão das espécies em relação à dispersão observada com as movimentações consideradas anteriormente (Figuras 3.3 e 3.16). Desta forma, na geração 600 ainda notamos regiões com diferentes densidades dos indivíduos, principalmente no caso dos parasitoides. A densidade total dos insetos em cada geração está representada na Figura 3.28.

Figura 3.27: (a) - (c) Distribuição espacial dos hospedeiros e (d) - (f) distribuição espacial dos parasitoides em um domínio composto apenas pela cultura principal.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.28: Densidade total de hospedeiros (preto) e parasitoides (cinza) na cultura principal.

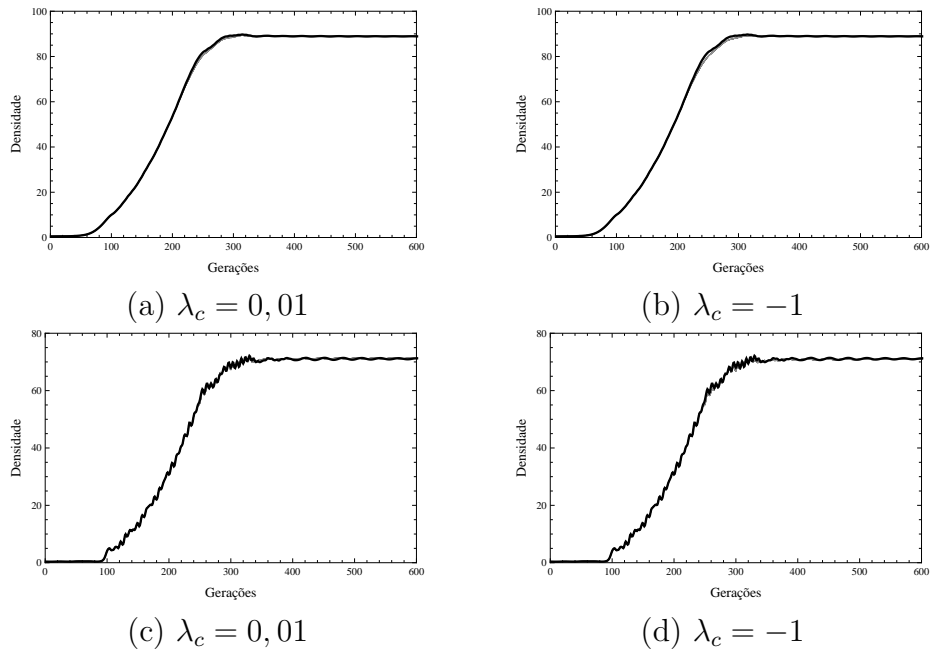


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

As densidades totais dos hospedeiros e parasitoides presentes na cultura principal, para as seis áreas da cultura secundária, estão ilustradas na Figura 3.29. Na figura, a tonalidade da cor cinza diminui à medida que aumentamos a área da cultura com antibiose em torno da cultura principal. Podemos perceber que a densidade total tanto de hospedeiros quanto de parasitoides na cultura principal não sofre alteração pela presença da segunda cultura. Este resultado independe da quantidade de cultura secundária adicionada e do valor do parâmetro λ_c assumido.

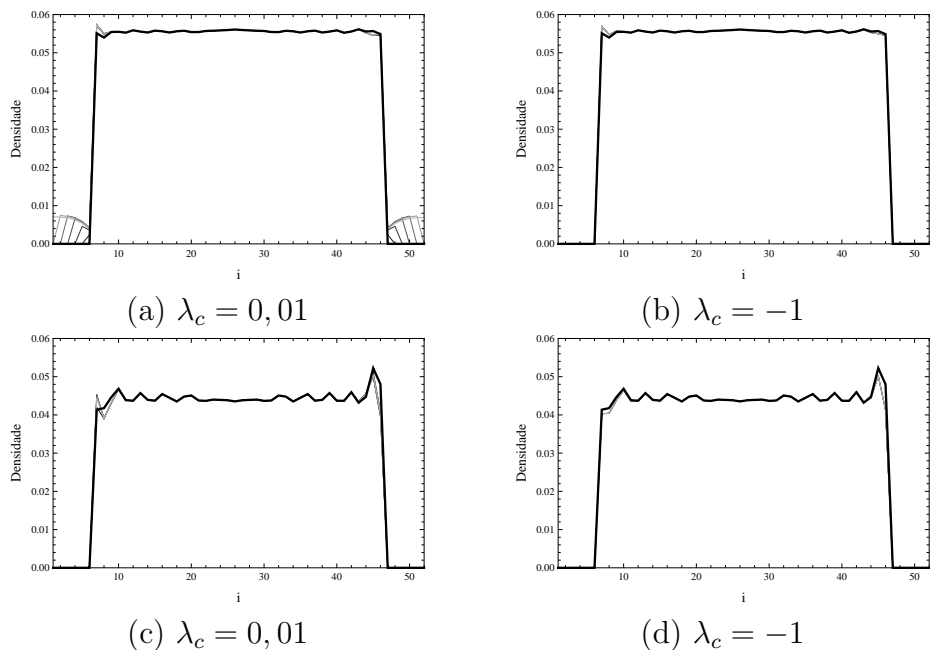
Figura 3.29: (a) e (b) População total de hospedeiros e (c) e (d) população total de parasitoides presentes na cultura principal considerando o domínio sem a cultura secundária (preto) e com a cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Este resultado também pode ser observado ao analisarmos a densidade populacional ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na última iteração (Figura 3.30).

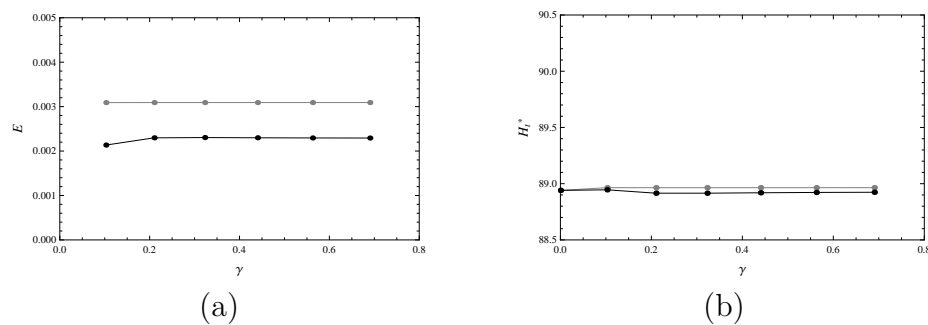
Figura 3.30: Densidade populacional na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio, na iteração 600. (a) e (b) hospedeiros e (c) e (d) parasitoides, considerando apenas a cultura principal (em preto) e considerando diferentes quantidades da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

O percentual de decréscimo da população de hospedeiros e sua densidade total assintótica estão ilustrados na Figura 3.31. O caso $\lambda_c = -1$, quando consideradas 600 gerações, apresentou maior percentual de decréscimo que o caso $\lambda_c = 0,01$. Através da Figura 3.31 (b), percebemos que a densidade total assintótica obtida para $\lambda_c = 0,01$ é aproximadamente a mesma da observada no caso $\lambda_c = -1$. Ainda, estes valores são muito próximos dos observados no caso em que o domínio é composto somente pela cultura principal ($\gamma = 0$).

Figura 3.31: (a) Percentual de decréscimo da população de hospedeiros e (b) Densidade total assintótica dos hospedeiros. Caso $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).

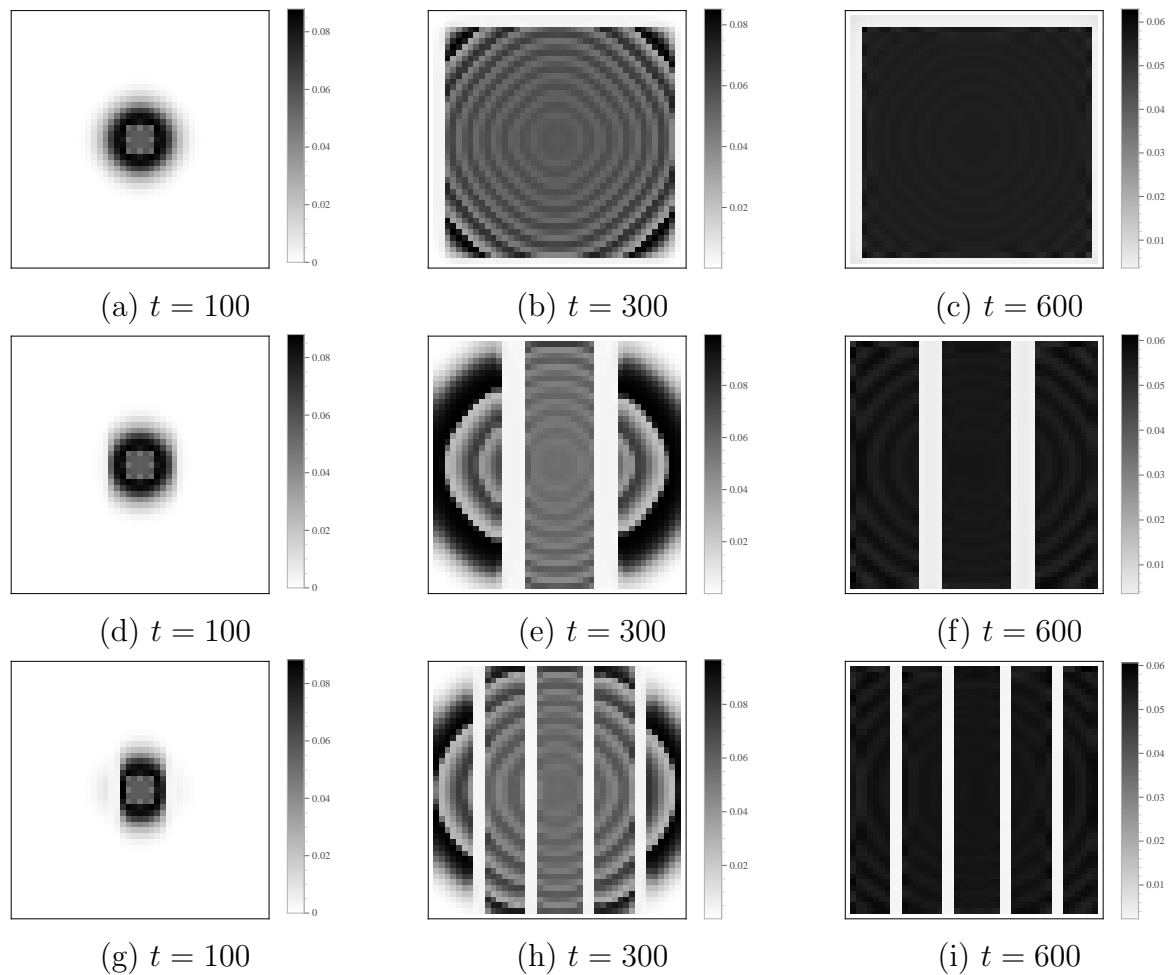


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

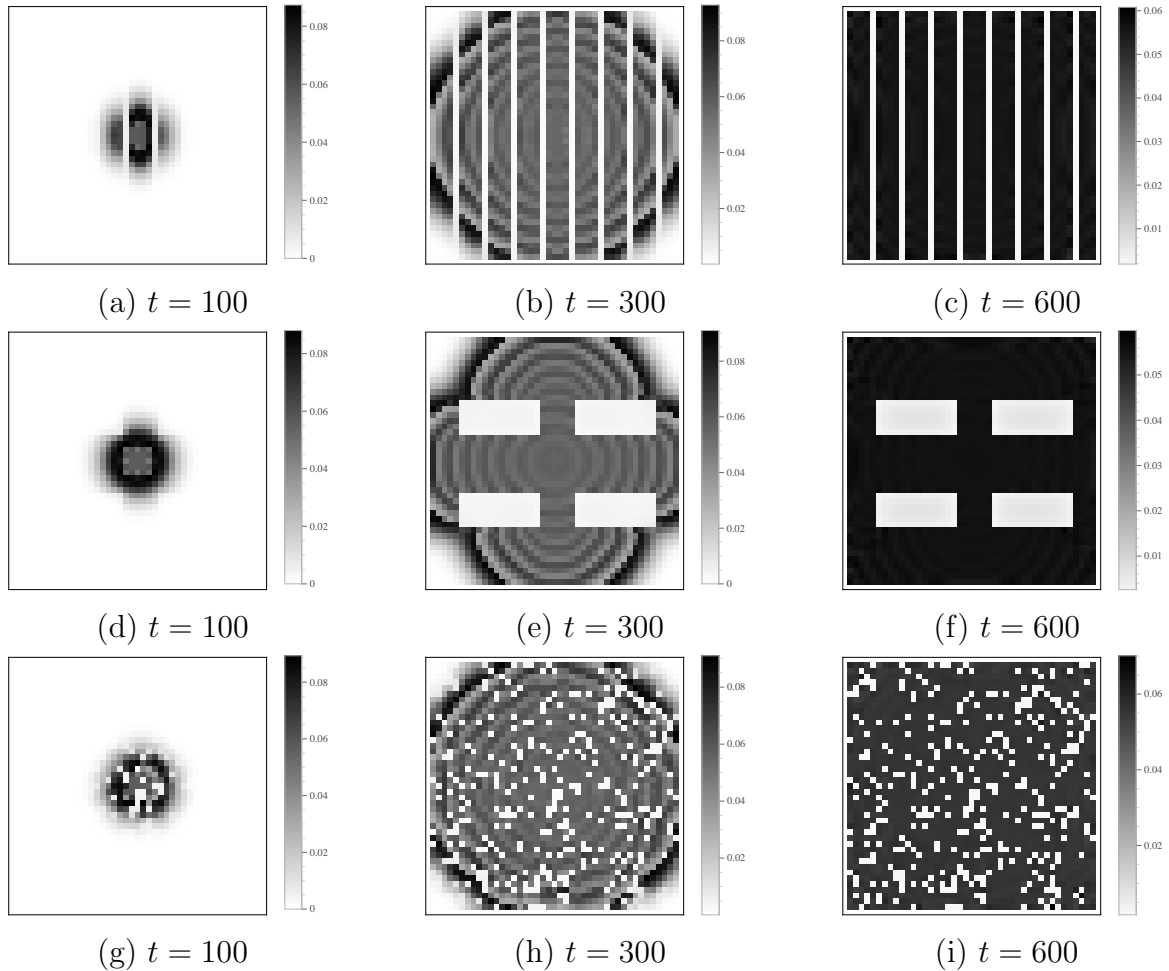
As Figuras 3.32 e 3.33 ilustram a distribuição espacial dos hospedeiros em um domínio de dimensões 44×44 *patches* composto pela cultura principal e pela cultura secundária e considerando $\lambda_c = 0,01$.

Figura 3.32: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\bar{\mu}_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.33: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\bar{\mu}_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.

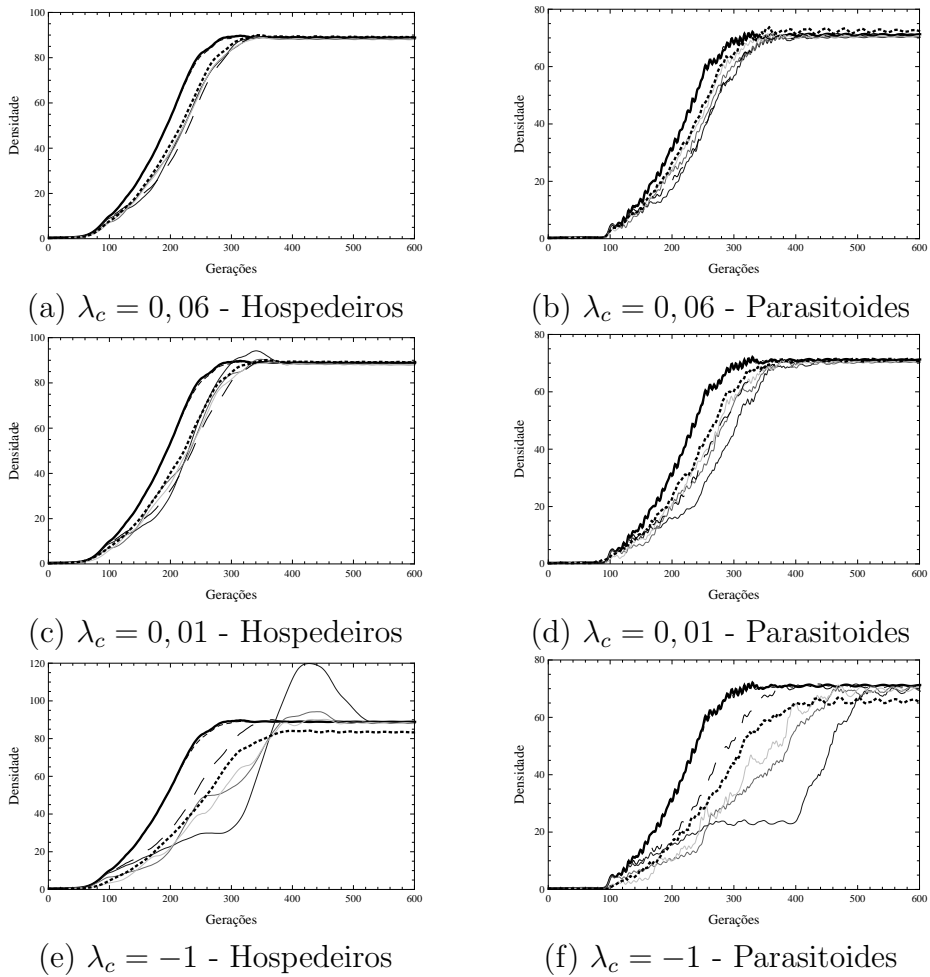


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 3.34 está representada a densidade total dos insetos na cultura principal, considerando os diferentes arranjos entre as duas culturas.

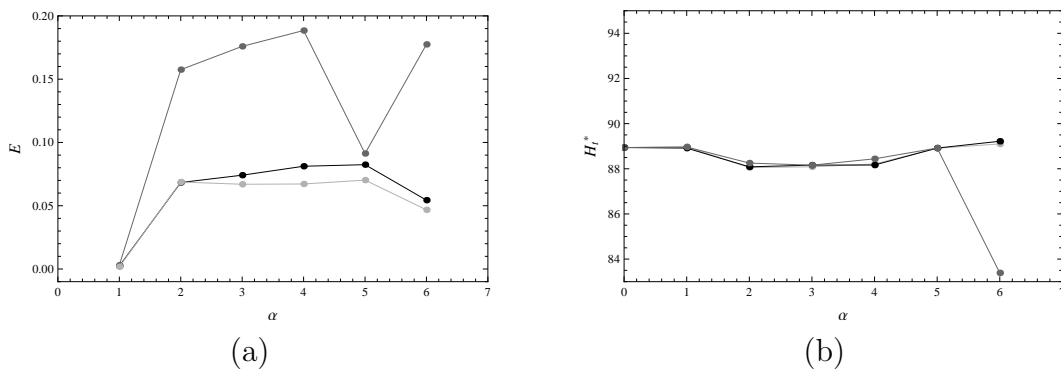
O percentual de decréscimo E da população de hospedeiros e sua densidade total assintótica H_t^* estão ilustrados na Figura 3.35, onde o eixo α representa os arranjos das culturas.

Figura 3.34: População total de indivíduos presente na cultura principal. Domínio sem a cultura com antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.35: (a) Percentual de decrescimento da população de hospedeiros e (b) Densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

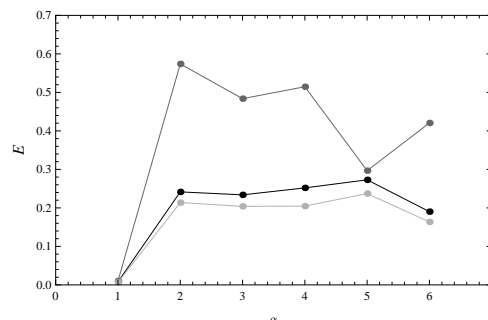
Segundo a Figura 3.35 (a), quanto menor o valor do parâmetro λ_c considerado, maior é o percentual de decréscimo da população de hospedeiros. Ainda, para o caso $\lambda_c = -1$, o arranjo 4 (cultura secundária distribuída em 8 listras) foi o que mais reduziu a população de hospedeiros. Já nos casos $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$ o arranjo 5 (cultura secundária distribuída em forma de blocos) foi o que mais reduziu a população de hospedeiros na cultura principal.

Novamente notamos que este resultado pode sofrer alteração com a quantidade de gerações consideradas, visto que, em cada arranjo, a densidade total assintótica assume valores muito próximos independente do valor de λ_c assumido. Somente o arranjo 6 no caso $\lambda_c = -1$ não segue este comportamento, pois apresenta uma densidade total assintótica inferior à obtida nos casos $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$.

Ao considerarmos somente as primeiras 300 gerações, obtemos aproximadamente o mesmo comportamento do percentual de decréscimo em relação aos arranjos para os casos $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$. Porém, no caso $\lambda_c = -1$, o arranjo 2 foi o que mais reduziu a população de hospedeiros (Figura 3.36), fornecendo uma redução de aproximadamente 60% da população de hospedeiros.

Desta forma, podemos concluir para este cenário de movimentação dos indivíduos, que os efeitos da cultura secundária na população de hospedeiros são maiores a curto prazo. Além disso, no caso em que a cultura apresenta uma resistência alta (representado nas simulações pelo caso $\lambda_c = -1$), a distribuição desta cultura na forma de 2 listras foi o arranjo que mais reduziu a população de hospedeiros na cultura principal quando consideramos somente as primeiras 300 gerações.

Figura 3.36: Percentual de decréscimo da população de hospedeiros considerando 300 gerações. Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



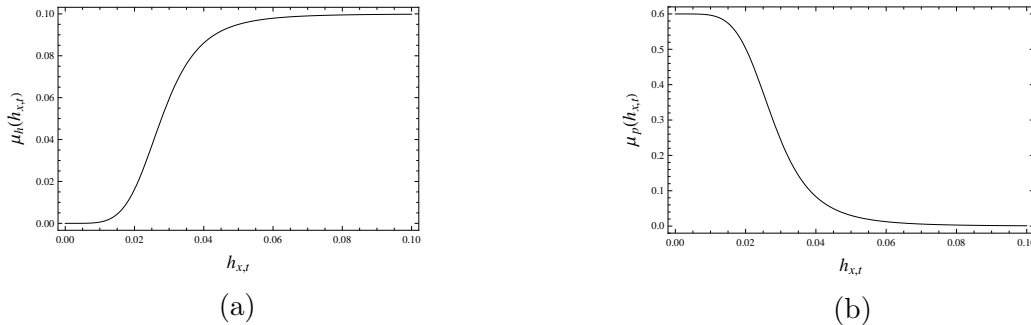
3.2.4 Cenário 4: Hospedeiros apresentam comportamento de antiagregação e a movimentação dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros

Neste cenário, os hospedeiros tendem a deixar os sítios com maior densidade de sua espécie, representando assim um comportamento de antiagregação dos indivíduos. Os parasitoides, por sua vez, tendem a permanecer em sítios com maior densidade de hospedeiros. Assim, a fração de hospedeiros e parasitoides que deixam um sítio são dadas, respectivamente, por

$$\mu_h(h_{x,t}) = \frac{\bar{\mu}_h \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q} \quad \text{e} \quad \mu_p(h_{x,t}) = \bar{\mu}_p - \frac{\bar{\mu}_p \times (h_{x,t})^q}{A^q + (h_{x,t})^q}. \quad (3.21)$$

A Figura 3.37 mostra o comportamento das funções μ_h e μ_p assumidas neste cenário.

Figura 3.37: (a) Função μ_h e (b) função μ_p . Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $q = 5$, $d = 18$ e $A = \frac{1}{2d}$.



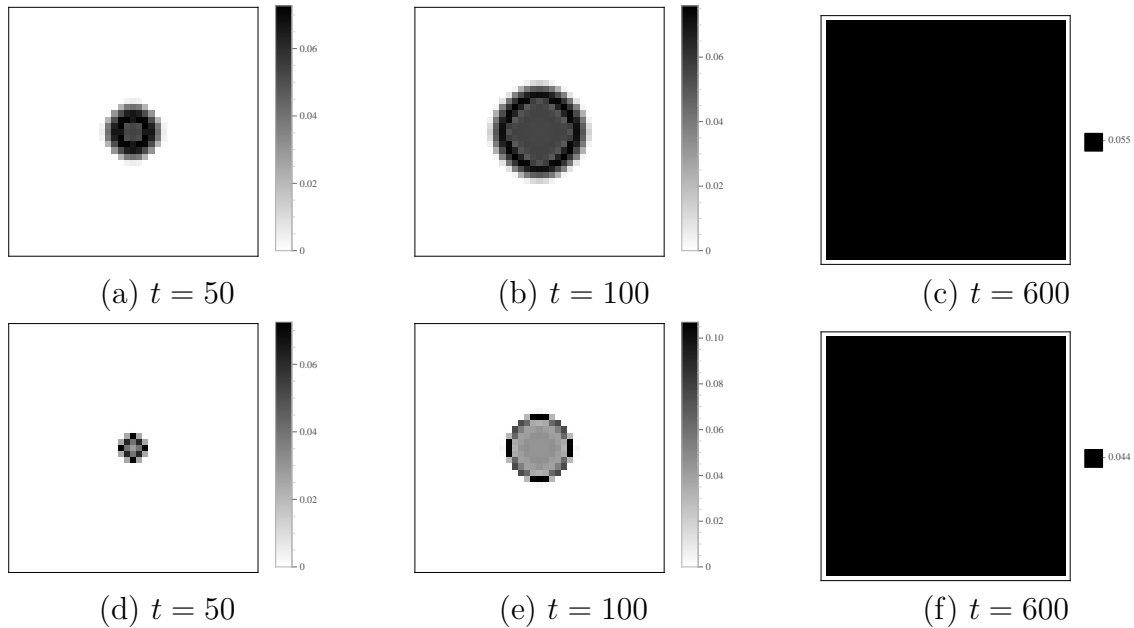
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

A) Dinâmica sem consórcio de culturas

Na Figura 3.38, estão ilustradas as distribuições espaciais dos insetos no domínio em três etapas de tempo. A densidade dos insetos em todo domínio no decorrer das gerações está representada na Figura 3.39.

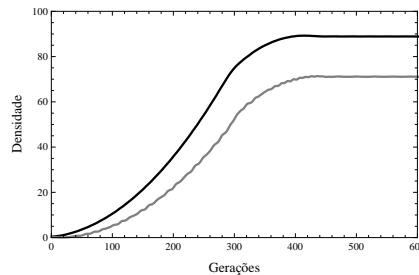
De acordo com a Figura 3.39 notamos que as movimentações dos hospedeiros e parasitoides consideradas neste cenário fazem com que os indivíduos levem mais tempo para atingir a sua densidade total assintótica comparado aos cenários de movimentação anteriores.

Figura 3.38: (a) - (c) Distribuição espacial dos hospedeiros e (d) - (f) distribuição espacial dos parasitoides em um domínio composto apenas pela cultura principal.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.39: Densidade total de hospedeiros (preto) e parasitoides (cinza) na cultura principal.

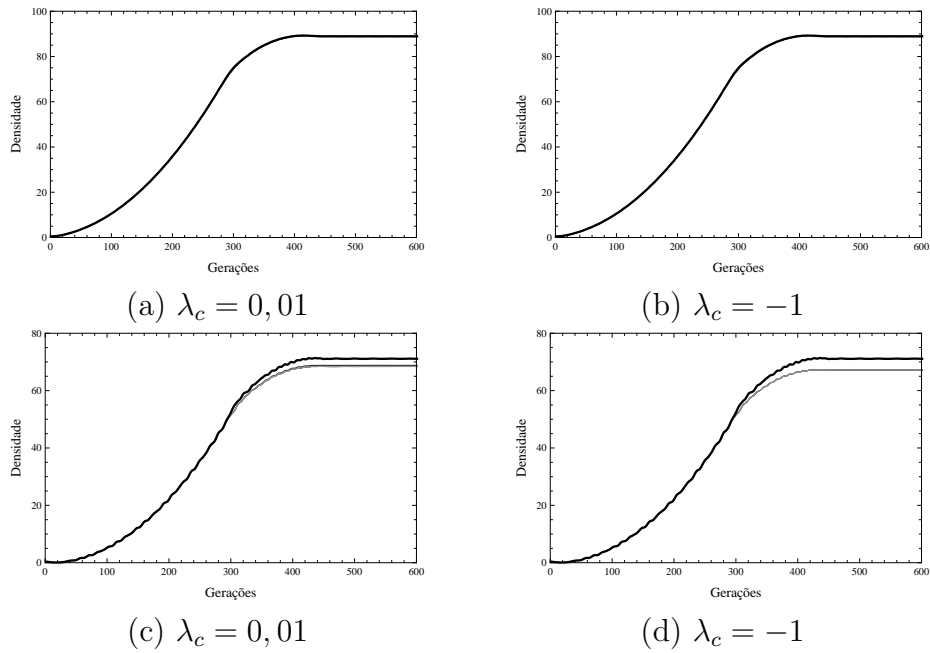


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

B) Efeitos da área da cultura com antibiose

As densidades totais dos hospedeiros e parasitoides presentes na cultura principal, para as seis áreas da cultura secundária, estão ilustradas na Figura 3.40. Na figura, a tonalidade da cor cinza diminui à medida que aumentamos a área da cultura secundária em torno da cultura principal. Podemos perceber que a densidade total de hospedeiros na cultura principal é aproximadamente a mesma em todos os domínios considerados, isto é, não sofre influência significativa da presença da cultura secundária. Este comportamento é observado tanto no caso $\lambda_c = 0,01$ quanto no caso $\lambda_c = -1$.

Figura 3.40: (a) e (b) População total de hospedeiros e (c) e (d) população total de parasitoides presentes na cultura principal considerando o domínio sem a cultura secundária (preto) e com a cultura secundária (tons de cinza).

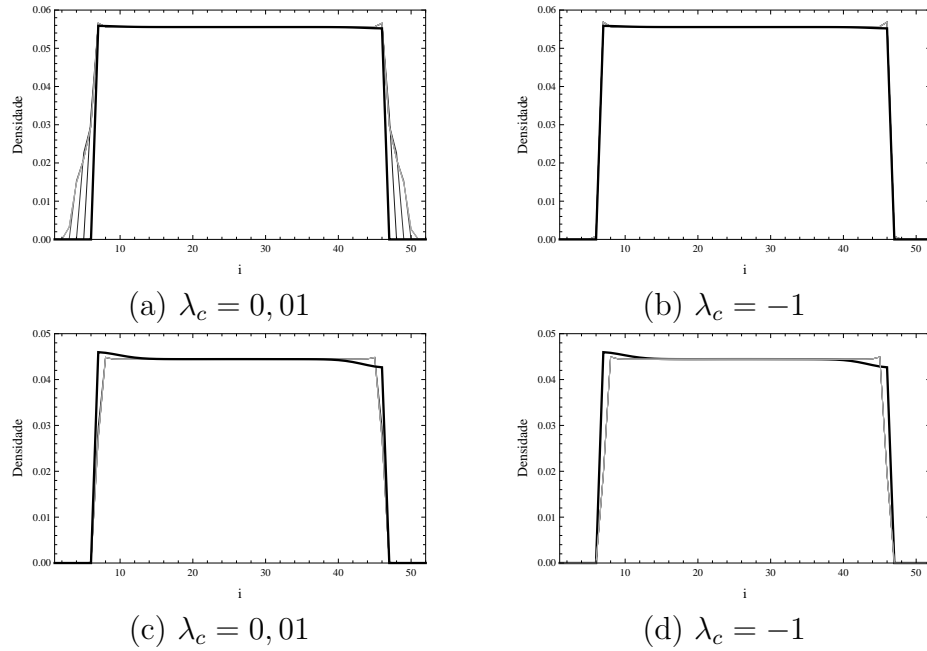


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

No caso dos parasitoides, observamos que sua densidade total na cultura principal é reduzida quando acrescentamos a cultura secundária em torno da principal. Estes resultados também podem ser observados na Figura 3.41, a qual apresenta a densidade populacional ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na última iteração

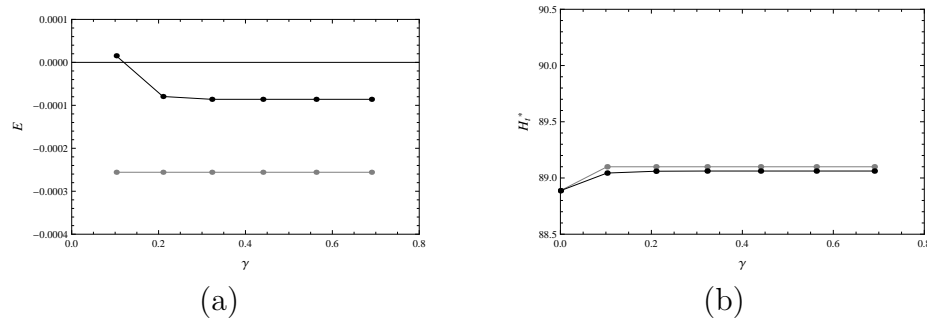
Na Figura 3.42 (a) está ilustrado o percentual de decréscimo da população de hospedeiros E obtido para as diferentes proporções de área secundária. Ainda, analisamos a densidade total assintótica dos hospedeiros (H_t^*) nas 600 gerações (Figura 3.42 (b)). O caso $\gamma = 0$ corresponde ao domínio composto somente pela cultura principal.

Figura 3.41: Densidade populacional na linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio, na iteração 600. (a) e (b) hospedeiros e (c) e (d) parasitoides, considerando apenas a cultura principal (em preto) e considerando diferentes quantidades da cultura secundária (tons de cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.42: (a) Percentual de decréscimo da população de hospedeiros e (b) Densidade total assintótica dos hospedeiros. Caso $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



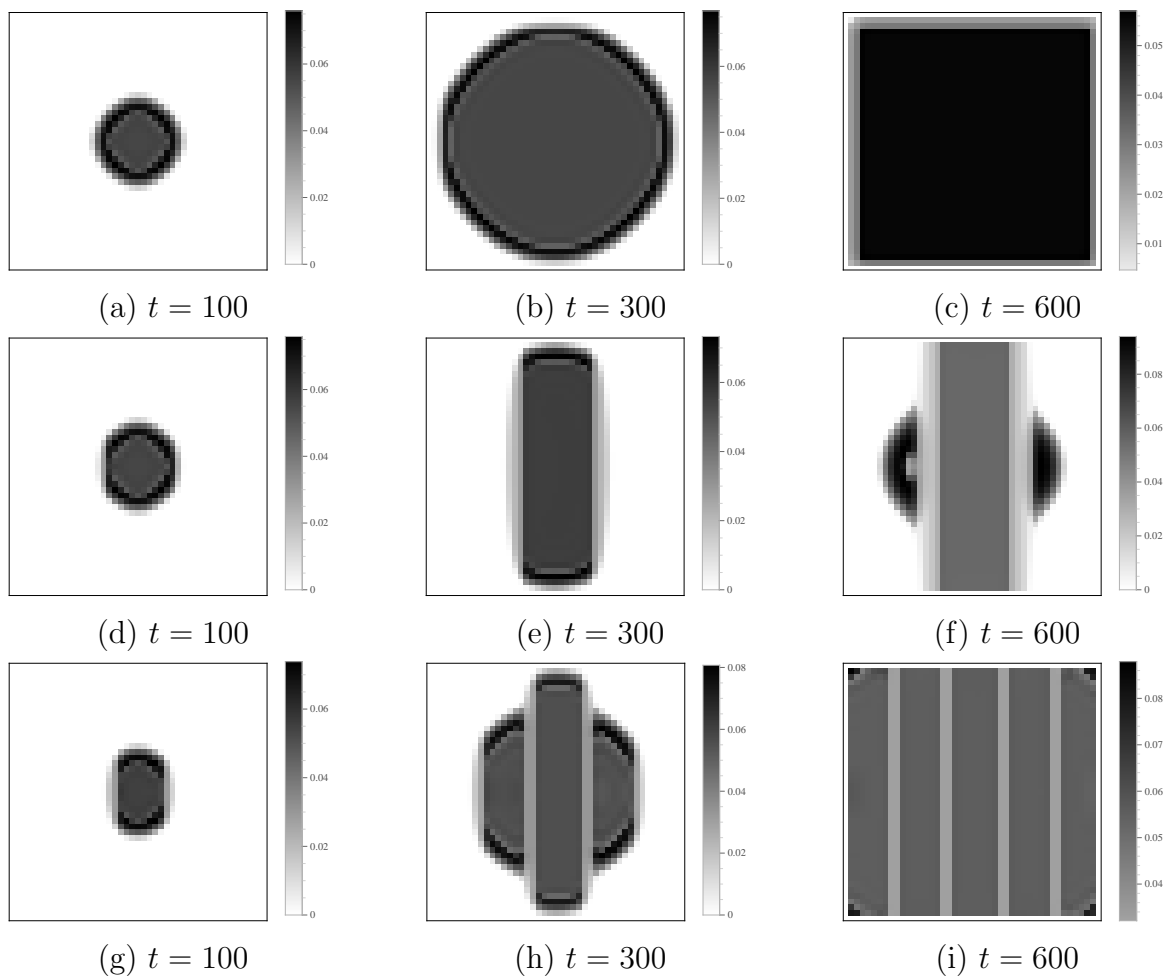
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Conforme os resultados apresentados na figura, percebemos que ocorre um pequeno aumento na densidade total da população de hospedeiros presentes na cultura principal nos casos com a presença da cultura secundária, o que resulta, dessa forma, em percentuais de decréscimo negativos. Este aumento pode ser observado na densidade total assintótica dos hospedeiros (Figura 3.42 (b)).

C) Efeitos da configuração espacial da cultura com antibiose

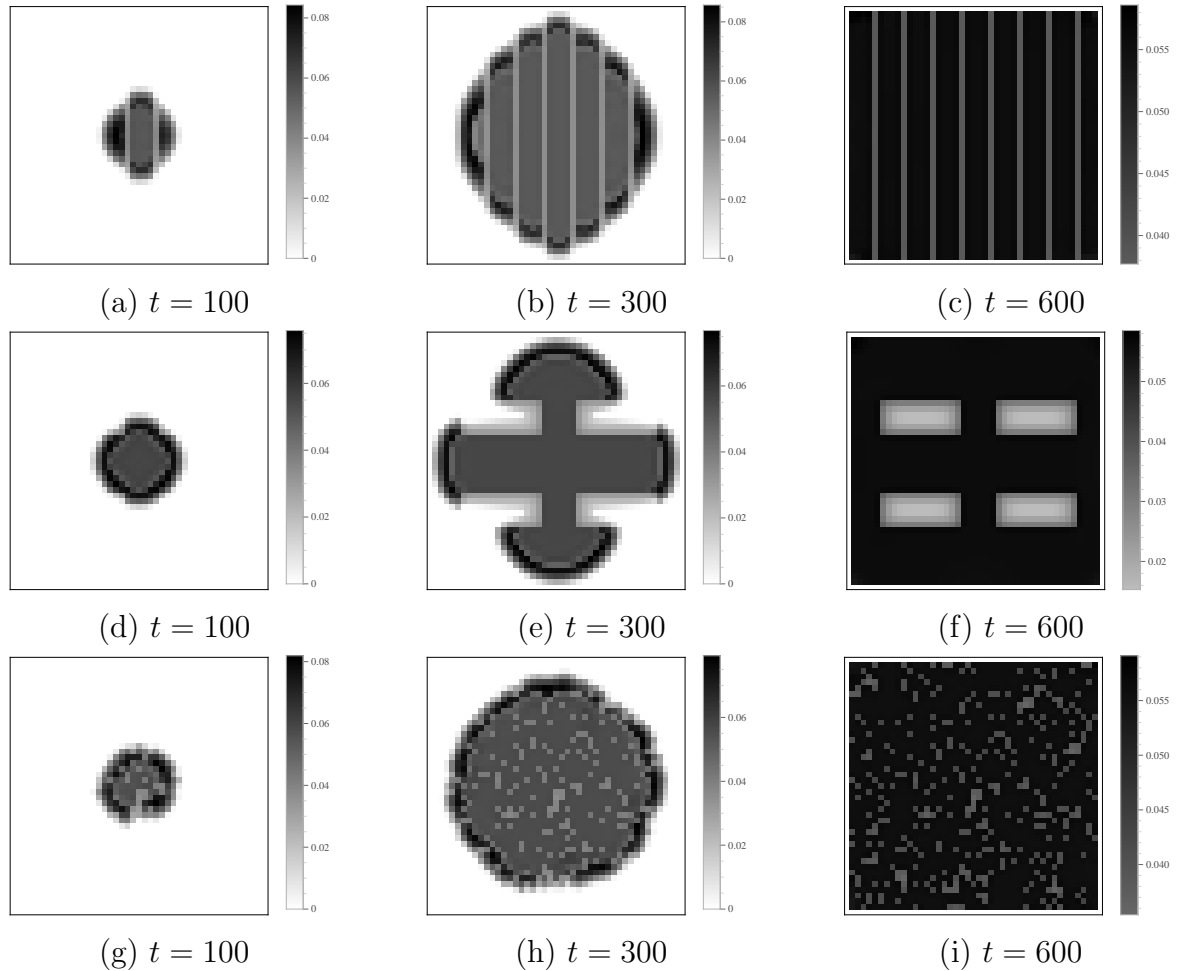
As Figuras 3.43 e 3.44 ilustram a distribuição espacial dos indivíduos em um domínio de dimensões 44×44 *patches* considerando diferentes arranjos entre as culturas e o parâmetro $\lambda_c = 0,01$ fixo.

Figura 3.43: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 1, (d) - (f): Arranjo 2, (g) - (i): Arranjo 3. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\bar{\mu}_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.44: Distribuição espacial dos hospedeiros em diferentes etapas de tempo e diferentes arranjos das duas culturas. (a) - (c) correspondem ao Arranjo 4, (d) - (f): Arranjo 5, (g) - (i): Arranjo 6. Parâmetros: $\lambda_c = 0,01$, $\bar{\mu}_h = 0,1$ e $\bar{\mu}_p = 0,6$.

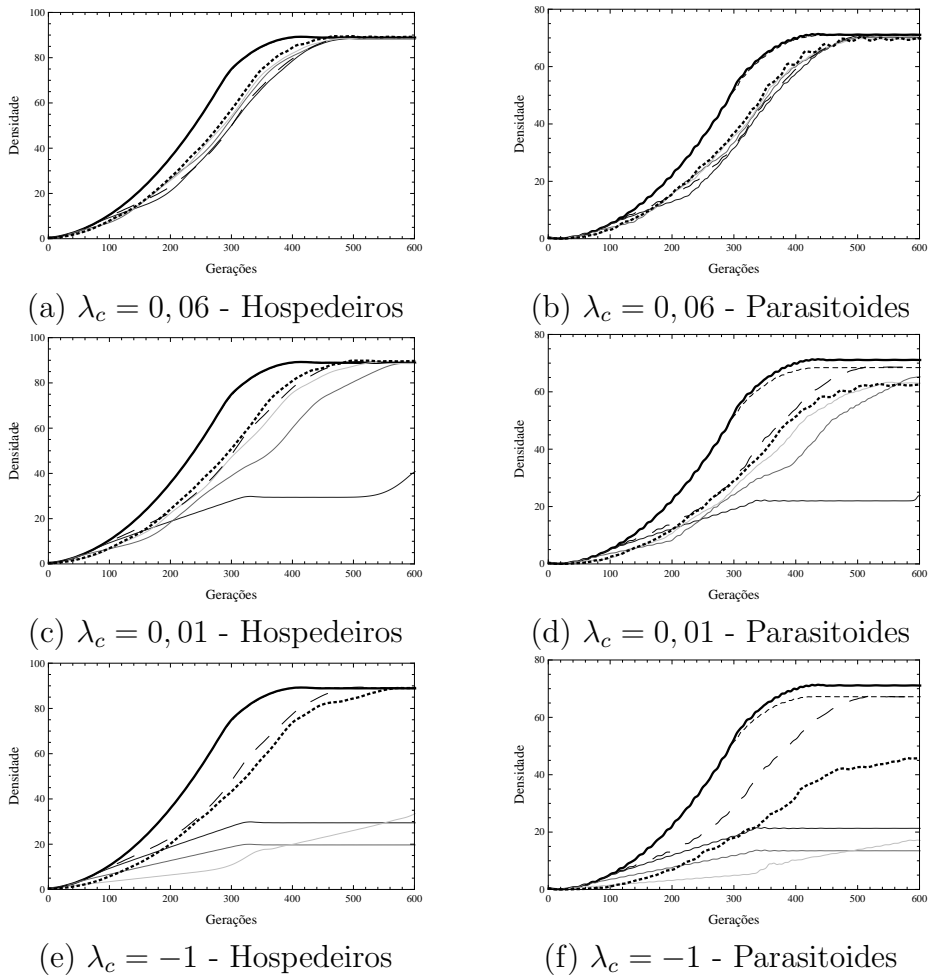


Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Na Figura 3.45 está representada a densidade total dos insetos na cultura principal, considerando todos os diferentes arranjos entre as duas culturas.

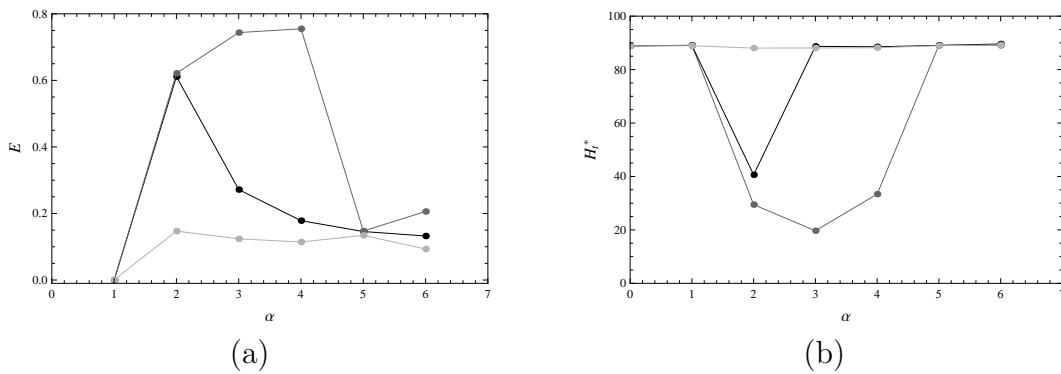
O percentual de decréscimo E da população de hospedeiros e a densidade total assintótica H_t^* estão ilustrados na Figura 3.46, onde o eixo α representa o arranjo entre as culturas considerado.

Figura 3.45: População total de indivíduos presente na cultura principal. Domínio sem a cultura com antibiose (preto), Arranjo 1 (tracejado), Arranjo 2 (cinza forte), Arranjo 3 (cinza médio), Arranjo 4 (cinza fraco), Arranjo 5 (tracejado maior) e Arranjo 6 (pontilhado).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Figura 3.46: (a) Percentual de decrescimento e (b) Densidade total assintótica. Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



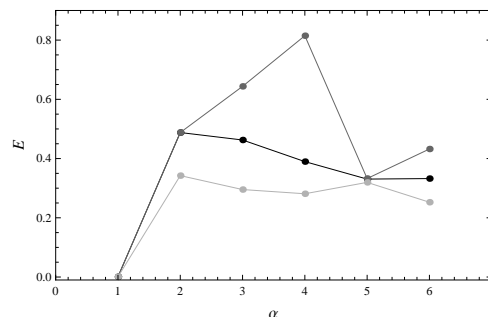
Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

Novamente percebemos que quanto menor o valor do parâmetro λ_c maior é o percentual de decrescimento da população de hospedeiros, independente do arranjo entre as duas culturas.

Para o caso $\lambda_c = -1$, o arranjo 4 (cultura secundária distribuída em 8 listras) apresentou o maior percentual de decrescimento da população de hospedeiros. Já no caso $\lambda_c = 0,01$ o arranjo 2 (cultura secundária distribuída em 2 listras) obteve este resultado. Quando consideramos $\lambda_c = 0,06$ percebemos que todos os diferentes arranjos, exceto o arranjo 1, apresentaram percentuais de decrescimento semelhantes.

Os arranjos que apresentaram os maiores percentuais de decrescimento da população de hospedeiros são os mesmos quando consideramos somente as primeiras 300 gerações, conforme observado na Figura 3.47.

Figura 3.47: Percentual de decrescimento da população de hospedeiros considerando 300 gerações. Parâmetros: $\bar{\mu}_h = 0,1$, $\bar{\mu}_p = 0,6$, $\lambda_c = 0,06$ (cinza claro), $\lambda_c = 0,01$ (preto) e $\lambda_c = -1$ (cinza).



Fonte: da autora, gerado no *Wolfram Mathematica 10.0*.

3.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo, analisamos a influência do consórcio de duas culturas (uma principal e uma com resistência do tipo antibiose) na densidade de hospedeiros na cultura principal, considerando que uma espécie de parasitoide interage com o hospedeiro em estudo.

Além de verificar os efeitos da área da cultura secundária e das suas diferentes distribuições no domínio, analisamos a influência da movimentação das espécies (modificando os parâmetros μ_h e μ_p) e de diferentes níveis de resistência da cultura secundária (através da manipulação do parâmetro λ_c).

Em relação aos efeitos da área da cultura com antibiose percebemos, em todos os

diferentes cenários de movimentação das espécies, que a presença da cultura secundária, disposta ao redor da cultura principal, não afeta de maneira expressiva a densidade total dos hospedeiros na cultura principal, de modo que os percentuais de decréscimo da população são próximos de zero. Isto é, em todos os casos analisados, constatou-se que o número de fileiras de *patches* da cultura secundária que são inseridas em torno da cultura principal, não exerce influência neste resultado, visto que o percentual de decréscimo para 1 fileira é aproximadamente o mesmo daquele obtido ao acrescentarmos 6 fileiras.

Através de uma análise na densidade populacional dos indivíduos ao longo da linha $i = \frac{n}{2}$ do domínio na última geração, observamos um aumento da densidade de hospedeiros na fronteira entre as duas culturas. Este aumento é mais expressivo quando consideramos que ambas espécies se movimentam aleatoriamente e decorre da diminuição de parasitoides nesta região.

Ao considerar diferentes distribuições da cultura secundária, conforme os arranjos descritos na Subseção 2.2.1 do Capítulo 2, analisamos três valores para o parâmetro λ_c ($\lambda_c = 0,06$, $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = -1$). Estes valores representam um nível de resistência baixo, moderado e alto da cultura secundária, respectivamente e, correspondem também a diferentes comportamentos da dinâmica local dos indivíduos.

No caso em que ambas espécies se movimentam aleatoriamente, o arranjo 2 (cultura secundária disposta em forma de 2 listras) obteve o maior percentual de decréscimo da população em relação aos demais arranjos, independentemente do valor assumido por λ_c .

Em um segundo cenário, em que a movimentação dos hospedeiros é aleatória e dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros, o arranjo 4 (cultura secundária disposta em 8 listras) foi o que mais reduziu a densidade de hospedeiros na cultura principal (em torno de 18%), quando consideramos $\lambda_c = -1$. Já para $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$, os arranjos 2, 3, 4 e 5 apresentaram percentuais de decréscimo semelhantes (em torno de 7% para $\lambda_c = 0,01$ e 6% para $\lambda_c = 0,06$) e superiores aos demais arranjos.

No cenário de movimentação 3, o arranjo 5 (cultura secundária distribuídas em blocos) obteve o maior percentual de decréscimo da população de hospedeiros, nos casos $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$. Enquanto que para $\lambda_c = -1$, o arranjo 4 foi o que obteve melhores resultados.

No último cenário, em que a movimentação dos hospedeiros representa uma

tendência de antiagregação da espécie e a movimentação dos parasitoides depende da densidade local dos hospedeiros, o arranjo 2 foi o que apresentou maiores percentuais de decrescimento em comparação com os demais arranjos, para $\lambda_c = 0,01$ e $\lambda_c = 0,06$. Já para $\lambda_c = -1$, o arranjo 4 exibiu os melhores resultados dentre os arranjos estudados.

Deve-se ressaltar que em todos os casos analisados, o crescimento dos hospedeiros ocorre de forma mais lenta nas gerações iniciais com a presença da cultura secundária. Desta forma, ao considerarmos apenas as primeiras 300 gerações, os percentuais de decrescimento assumiram valores maiores (podendo chegar em torno de 60% em alguns casos) que os obtidos considerando 600 gerações (que atingiu o máximo de 20%), considerando os cenários de movimentação 1, 2 e 3. Já no cenário 4, os percentuais assumiram valores em torno de 80% quando consideramos 300 gerações. Em relação à distribuição da cultura secundária considerando 300 gerações, notamos que os arranjos 2 e 5 foram os que apresentaram maiores percentuais de decrescimento da população. Assim, de acordo com os resultados obtidos, podemos concluir que esta estratégia de controle da população de hospedeiros na cultura principal dada pelo consórcio de duas culturas, é mais eficiente ao considerarmos culturas não perenes.

Ainda, de acordo com a densidade total dos insetos na cultura principal, observamos que a presença da cultura com antibiose afeta mais a densidade de parasitoides que a de hospedeiros. Em termos práticos, este cenário não é o ideal, visto que o objetivo do consórcio é reduzir a densidade somente dos hospedeiros na cultura principal e não prejudicar o crescimento dos parasitoides que auxiliam no controle da densidade destes indivíduos.

As Tabelas 3.2 e 3.3 apresentam o arranjo das culturas que mais reduziu a densidade de indivíduos na cultura principal de acordo com o cenário de movimentação dos indivíduos e do valor assumido por λ_c , considerando 600 e 300 gerações, respectivamente.

Tabela 3.2: Arranjo mais eficiente juntamente com a respectiva redução (em %), considerando 600 gerações.

Movimentação	$\lambda_c = 0,06$	$\lambda_c = 0,01$	$\lambda_c = -1$
Cenário 1	Arranjo 2 (6%)	Arranjo 2 (8%)	Arranjo 2 (20%)
Cenário 2	Arranjo 5 (6%)	Arranjo 3 (7%)	Arranjo 4 (18%)
Cenário 3	Arranjo 5 (7%)	Arranjo 5 (8%)	Arranjo 4 (19%)
Cenário 4	Arranjo 2 (15%)	Arranjo 2 (61%)	Arranjo 4 (76%)

Tabela 3.3: Arranjo mais eficiente juntamente com a respectiva redução (em %), considerando 300 gerações.

Movimentação	$\lambda_c = 0,06$	$\lambda_c = 0,01$	$\lambda_c = -1$
Cenário 1	Arranjo 5 (20%)	Arranjo 2 (25%)	Arranjo 2 (56%)
Cenário 2	Arranjo 5 (20%)	Arranjo 5 (24%)	Arranjo 2 (58%)
Cenário 3	Arranjo 5 (24%)	Arranjo 5 (27%)	Arranjo 2 (57%)
Cenário 4	Arranjo 2 (34%)	Arranjo 2 (49%)	Arranjo 4 (81%)

CONCLUSÕES

Neste trabalho propomos um modelo do tipo Redes de Mapas Acoplados para analisar a dinâmica de um inseto-praga em um consórcio de uma cultura principal (alvo do herbívoro) com uma cultura secundária que apresenta resistência do tipo antibiose a este inseto. Foram abordadas duas questões principais: os efeitos da área (número de sítios) e da distribuição espacial da cultura resistente no controle da densidade do inseto-praga na cultura principal.

Com este objetivo, primeiramente consideramos um modelo discreto para descrever a dinâmica de uma única espécie, a do inseto-praga e, em um segundo momento, consideramos que uma espécie de parasitoide interage com este inseto através de um modelo discreto hospedeiro-parasitoide.

No caso em que só consideramos uma espécie no ambiente, percebemos que a presença da cultura com antibiose reduz a densidade de indivíduos na cultura principal, sendo portanto, de acordo com nossos resultados, um método efetivo de controle do inseto-praga.

Em relação à área da cultura com antibiose, percebemos que, ao inseri-la em torno da cultura principal, os percentuais de decréscimo da população de indivíduos atingem valores baixos que variam de acordo com o tipo de movimentação do inseto (de 5% até 7% quando a cultura possui resistência moderada e de 7% até 15% quando ela possui uma alta resistência). Desta forma, podemos concluir, que dispor a cultura secundária em torno da cultura principal não apresenta grande impacto sobre a densidade de insetos-praga na cultura principal. Além disso, não há diferença em acrescentar uma ou mais fileiras em torno da cultura principal. Isto é, nesta configuração, a área da cultura com antibiose não altera a densidade de insetos na cultura principal. É importante ressaltar, no entanto, que este resultado pode sofrer alterações se considerarmos outro tipo de configuração espacial ou plantas com características diferentes, como por exemplo, que exercem atração sobre

o inseto.

Na maioria dos casos em que consideramos diferentes distribuições espaciais da cultura secundária no domínio, além do arranjo 2 (cultura distribuída em 2 listras), os arranjos 4 (cultura distribuída em 8 listras) e 6 (cultura distribuída de maneira aleatória) foram os que mais reduziram a densidade de insetos-praga na cultura principal. Estes resultados podem ser atribuídos à distância entre a posição inicial dos insetos e a área da cultura secundária, a qual é menor nos arranjos 4 e 6 quando comparadas às demais distribuições analisadas. Este resultado está de acordo com o observado por Garcia et al. (2014), no qual os autores concluíram que quanto mais próximas as fileiras de uma segunda cultura forem inseridas da posição inicial dos insetos, maior será o controle desta população.

No caso em que consideramos um parasitoide, naturalmente presente nas plantações, interagindo com o inseto-praga em estudo, observamos que a presença da cultura com antibiose reduz também a densidade de parasitoides. Desta forma, a utilização desta estratégia de controle da população de hospedeiros deve ser avaliada, quando a conservação dos inimigos naturais no habitat for um fator importante de controle de pragas ou quando o parasitoide ou predador estiver em risco.

Novamente, observamos que a área da cultura secundária, quando disposta em torno da cultura principal, não interfere significativamente na população de hospedeiros. Em algumas situações, de acordo com a movimentação das espécies, foram observados percentuais de decréscimo muito próximos de zero (o máximo atingido foi de 0,3%), enquanto que em outras situações os percentuais de decréscimo assumiram valores negativos. Assim, os resultados obtidos sugerem que, nas condições consideradas neste caso, esta distribuição da cultura com antibiose pode aumentar a densidade de hospedeiros na cultura principal ao invés de reduzir.

Em relação à distribuição da cultura secundária no habitat observamos, na maioria dos casos, que a distribuição em forma de 2 ou 8 listras ou em blocos foram as que mais reduziram a densidade de hospedeiros na cultura principal, quando consideramos que um parasitoide interage com o hospedeiro em estudo. Além disso, observamos que a redução na densidade total de hospedeiros na cultura principal é maior nas primeiras gerações, o que sugere que este método é mais eficiente quando consideramos culturas com ciclo de vida curto.

Um fator importante que influencia os resultados obtidos é o nível de resistência da cultura secundária. Na maioria dos casos analisados, considerar culturas com um nível de resistência maior foram mais efetivas no controle da espécie de inseto-praga que aquelas com um nível moderado. Uma das justificativas para este resultado é o fato da área da cultura com antibiose servir de barreira natural para a dispersão da espécie em casos que a resistência é alta, visto que nesta área há uma grande redução na densidade de indivíduos.

Outra questão importante analisada refere-se aos tipos de movimentação dos indivíduos. De maneira geral, os casos em que assumimos que os insetos-praga têm o comportamento de antiagregação foram os que apresentaram melhores resultados. Uma explicação seria a tendência destes insetos em permanecer na área da cultura com antibiose, uma vez que nestas regiões a densidade de indivíduos é menor.

Concluimos, portanto, que o uso de uma cultura com resistência do tipo antibiose em um consórcio com outra cultura considerada principal ao produtor, pode ser uma estratégia de controle de insetos-praga presentes na cultura principal. A partir dos nossos resultados vemos que a eficiência desta estratégia é influenciada pelo nível de resistência da cultura com antibiose, a distribuição espacial das culturas no habitat e também pelo tipo de movimentação das espécies envolvidas.

Vale ressaltar que apesar do modelo proposto neste trabalho ser bastante simples, ele pode ser modificado para descrever de forma mais detalhada as interações que ocorrem no habitat, incluindo por exemplo dados mais precisos das culturas envolvidas, bem como da movimentação das espécies no habitat. Além disso, outras técnicas poderiam ser integradas ao modelo, como o uso de uma cultura armadilha, aplicação de inseticidas ou de um controle biológico aumentativo, onde ocorre várias liberações de parasitoides ao longo do tempo no habitat.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, L. J. S. **An Introduction to Mathematical Biology**. Pearson Education, New Jersey, 2007.
- CARVALHO, L. M.; FILHO, M. M. **Efeito da consorciação do tomateiro com plantas aromáticas na produtividade**. Embrapa Tabuleiros Costeiros. Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento, 2009.
- CORRÊA-FERREIRA, B. S. **Utilização do parasitóide de ovos *Trissolcus basalís* (Wollaston) no controle de percevejos da soja**. EMBRAPA-CNPSO. Circular Técnica, 1993.
- CRAWLEY, M. J. **Herbivory: The Dynamics of Animal-Plant Interactions**. University of California Press, Berkeley, 1983.
- DEGRANDE, P. E.; VIVAN, L. M. **Tecnologia e Produção: Soja e Milho 2011/2012**. 2012.
- DE VRIES, G.; HILLEN, T.; LEWIS, M. MÜLLER, J.; SCHÖNFISCH, B. **A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods**. Siam, 2006.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. McGraw-Hill, New York, 1988.
- FERNANDES, F. S. **Dinâmica e distribuição espacial de diferentes espécies de pulgões e inimigos naturais em consórcio de erva-doce com algodão de fibra colorida**. 2013. 119 p. Dissertação (Mestrado em ciências) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Piracicaba, SP, 2013.
- GALLO, D.; NAKANO, O.; NETO, S. S.; CARVALHO, R. P. L.; BAPTISTA, G. C.; FILHO, E. B.; PARRA, J. R. P.; ZUCCHI, R. A.; ALVES, S. B.; VENDRAMIM, J. D.; MARCHINI, L. C.; LOPES, J. R. S.; OMOTO, C. **Entomologia Agrícola**. Piracicaba, FEALQ, 2002.
- GARCIA, A.; CÔNSOLI, F. L.; GODOY, W. A. C.; FERREIRA, C. P. **A mathematical approach to simulate spatio-temporal patterns of an insect-pest, the corn rootworm *Diabrotica speciosa* (Coleoptera: Chrysomelidae) in intercropping**

systems. Landscape Ecology, v. 29, n. 9, p. 1531-1540, 2014.

GIORDANI, F. T. **A Instabilidade causada pela migração dependente da densidade em metapopulações.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

HASSELL, M. P.; COMINS, N. H. and MAY, R. M. **Spatial Structure and Chaos in Insect Population Dynamics.** Nature, v. 353, p.255-248, 1991.

HIRAKURI, M. H.; DEBIASI, H.; PROCÓPIO, S. O.; FRANCHINI, J. C.; CASTRO, C. **Sistemas de Produção: conceitos e definições no contexto agrícola.** Londrina: Embrapa Soja, v. 14, 2012.

KANEKO, K. **Period-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Spatial Intermittency in Coupled Logistic Lattice.** Progress of Theoretical Physics, v. 72, p. 480-486, 1984.

KAWASAKI, K.; SHIGESADA, N. **An integrodifference model for biological invasions in a periodically fragmented environment.** Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, v. 24, n. 1, p. 3-15, 2007.

KOGAN, M. **Integrated pest management: historical perspectives and contemporary developments.** Annual review of entomology, v. 43, n. 1, p. 243-270, 1998.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology.** Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

LARA, F. M. **Princípios de resistência de plantas a insetos.** São Paulo: Ícone, 1991.

LIMA, E. A. B. F.; FERREIRA, C. P.; GODOY, W. A. C. **Ecological modeling and pest population management: a possible and necessary connection in a changing world.** Neotropical Entomology, v. 38, n.6, p. 699-707, 2009.

MURDOCH, W. W.; BRIGGS, C.J.; NISBET, R. M. **Consumer-Resource Dynamics.** Monographs in Population Biology. Princeton University Press, New Jersey, 2003.

MURRAY, J.D. **Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition.** University of Oxford and University of Washington, Washington, 2002.

NORRIS, R.F.; CASWELL-CHEN, E.P.; KOGAN, M. **Concepts in integrated pest management.** Pearson Education. New Jersey, 2003.

PARIGI, A. R. **Modelos de Redes de Mapas Acoplados para interações herbívoro-predador.** 2013. 92 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2013.

- PICANÇO, M. C. **Manejo integrado de pragas**: apostila. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2010, 144p.
- PONTES, J. C. A. **Dinâmica de Redes de Mapas Acoplados**. 2008. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2008.
- POTGIETER, L.; VAN VUUREN, J. H.; CONLONG, D. E. **The role of heterogeneous agricultural landscapes in the suppression of pest species following random walk dispersal patterns**. *Ecological Modelling*, v. 306, p. 240-246, 2015.
- RODRIGUES, L. A. D. **Acaso e a Decisão**: Modelos Matemáticos para Dispersão Populacional. 1998. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)- Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1998.
- RODRIGUES, L. A. D., MISTRO, D. C. **Modelos Discretos Espacialmente Distribuídos em Dinâmica Populacional**. XIV Congresso Latino-Americano de Biomatemática, Campinas-Brasil, 2007.
- RODRIGUES, L. A. D.; MISTRO, D. C. **Biological Invasions in Heterogeneous Environments**: The Coupled Map Lattice Framework. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, v. 8, n. 6, p. 96-106, 2013.
- RODRIGUES, L. A. D.; VARRIALE, M. C.; GODOY, W. A. C.; MISTRO, D. C. **Spatiotemporal dynamics of an insect population in response to chemical substances**. *Ecological Complexity*, v. 16, p. 51-58, 2013.
- SILVA, A. M. **Biologia e comportamento de *Sitobion avenae* (Hemiptera: Aphididae) em quatro cultivares comerciais de trigo (*Triticum aestivum* L.)**. 2011. Dissertação (Mestrado em Agronomia) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2011.
- SOLÉ, R.; BASCOMPTE, J. **Self-Organization in Complex Ecosystems**. Princeton University Press. New Jersey, 2006.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Perseus Books. United States, 1994.
- STRONG, D. R.; LAWTON, J. H.; SOUTHWOOD, R. **Insects on Plants**: Community Patterns and Mechanisms. Harvard University Press, Cambridge, 1984.
- VIANA, P. A.; POTENZA, M. R. **Avaliação de antibiose e não-preferência em cultivares de milho selecionados com resistência à lagarta-do-cartucho**. *Bragantia*, v. 59, n. 1, p. 27-33, 2000.
- WILDER, J. W.; CHRISTIE, I.; COLBERT, J. J. **Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of forest pests and their management**. *Ecological Modelling*, v. 82, p. 287-298, 1994.