

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE FÍSICA**

**ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA
EM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS**

TRABALHO FINAL DE GRADUAÇÃO II

Thalis José Girardi

**Santa Maria, RS, Brasil
2013**

ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA EM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS

por

Thalis José Girardi

Trabalho Final de Graduação II
apresentado ao Curso de Física Bacharelado
da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS)
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Orimar A. Battistel

Santa Maria, RS, Brasil

2013

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova o Trabalho Final de Graduação II

**ASPECTOS DA ELTRODINÂMICA QUÂNTICA
EM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS**

elaborado por
Thalis José Girardi

como requisito parcial para obtenção do grau de
Bacharel em Física

COMISSÃO EXAMINADORA

Orimar A. Battistel
(Presidente/Orientador)

Claudio de Oliveira Graça (UFSM)

Rogemar A. Riffel (UFSM)

Santa Maria, 04 de Março de 2013.

RESUMO

Trabalho Final de Graduação II
Curso de Física
Universidade Federal de Santa Maria

ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA EM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS

Autor: Thalís José Girardi

Orientador: Orimar A. Battistel

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 04 de Março de 2013.

Um cálculo explícito do tensor de polarização do vácuo na Eletrodinâmica Quântica pentadimensional (EDQ₅), que preserva todas as arbitrariedades intrínsecas envolvidas nesse tipo de problema, é apresentado. Os *momenta* internos são assumidos arbitrários com o intuito de preservar a possibilidade de dependência envolvida nesse tipo de escolha. Uma escala arbitrária é introduzida na separação dos termos com diferentes graus de divergência com intuito de preservar a possibilidade de ambiguidades de escala. Os efeitos da regularização são evitados nos passos intermediários com a utilização de uma estratégia adequada para tratar o problema das divergências em soluções perturbativas de teorias quânticas de campos. Com essa atitude podemos obter conclusões claras e amplas a respeito das condições de consistência envolvidas nos cálculos perturbativos em dimensão espaço-temporal $D=4+1$. Ao final obtemos resultados livres de ambiguidades e com simetrias preservadas permitindo a renormalização do propagador do fóton em nível 1-loop de aproximação. A simplicidade, aliada ao caráter geral do método, permite acreditar que este pode ser utilizado como alternativa aos métodos tradicionais de regularização, particularmente em cenários onde tais ferramentas possuem restrições de aplicabilidade ou produzem resultados inconsistentes. No contexto do referido procedimento não há restrições de aplicabilidade. Como mostrado no presente trabalho, ele pode ser aplicado em cálculos perturbativos associados a teorias formuladas em dimensões espaço-temporais extras, relativamente à dimensão física ($D=3+1$), produzindo resultados consistentes tanto em dimensões pares como ímpares, apesar do possível caráter não renormalizável de tais teorias.

ABSTRACT

Undergraduate Final Work II
Physics Course
Universidade Federal de Santa Maria

QUANTUM ELECTRODYNAMICS ASPECTS IN EXTRA SPACIAL DIMENSIONS

Author: Thalís José Girardi

Advisor: Orimar A. Battistel

Date and Place of the Defence: Santa Maria, March 04, 2013.

An explicit evaluation of the pentadimensional Quantum Electrodynamics (QED_5) vacuum polarization tensor is presented. The calculations are made preserving all the intrinsic arbitrariness involved in such type of problem. The internal momenta are assumed arbitrary in order to preserve the possibility of dependence on such kind of choice. An arbitrary scale is introduced in the separation of terms having different degree of divergences in order to preserve the possibility of scale ambiguities. In the performed steps it is avoided the effects of regularizations by using an adequate strategy to handle the problem of divergences in Quantum Field Theory perturbative calculations. Given this attitude it is possible to get clean and sound conclusions about the consistency requirements involved in perturbative calculations $D=4+1$ space-time dimension. At the final a symmetry preserving and ambiguities free result is obtained allowing the renormalization of the photon propagator at the one-loop level. The simplicity, added to the general character, of the adopted procedure, allows to believe that such a strategy can be used as an alternative to the traditional regularization procedures, in particular in situations where such methods present restrictions of applicability or leads to not consistent results. The referred procedure does not possess restrictions of applicability of any order and can be applied in perturbative calculations associated to theories formulated in a space-time having extra dimensions relative to the physical one ($D=3+1$), producing consistent results, in odd and in even dimensions, in spite of the possible nonrenormalizable character of such theories.

Sumário

1	O problema	14
1.1	A lagrangeana para a EDQ ₅	15
1.2	Regras de Feynman para a EDQ ₅	18
1.3	Auto-energia do fóton	19
2	Cálculo da amplitude física	23
2.1	Álgebra de Dirac	23
2.2	A estratégia para o tratamento das divergências	26
2.3	Solução da parte convergente	30
2.4	Amplitude física e ambiguidades	33
2.5	Consistência	35
2.6	Objetos divergentes e regularizações	36
2.7	Renormalização	41
3	Conclusões	45

Introdução Geral

No final do século XIX a Física havia alcançado um sucesso notável na descrição de uma ampla classe de fenômenos, através das teorias que são conhecidas hoje por Mecânica Clássica e Teoria Clássica do Eletromagnetismo, formuladas por Newton e Maxwell, respectivamente. Entretanto, as duas teorias seriam questionadas nos anos seguintes diante da necessidade de explicar novas fenomenologias vindas da escala atômica e da necessidade de adequar as teorias para que suas previsões não dependessem do observador. Associadas a estas necessidades surgiram a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Estas novas visões da Física mostraram as limitações das teorias clássicas, tanto na descrição de fenômenos em escala atômica ou menor quanto de fenômenos envolvendo valores de velocidades comparados à velocidade da luz.

A teoria necessária para a descrição de fenômenos em escala atômica ou menor é a MQ a qual foi desenvolvida, independentemente, por Schrödinger e Heisenberg. A prescrição de Schrödinger consiste em considerar a expressão para a energia total de uma partícula dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + U, \quad (1)$$

onde m é a massa da partícula, \vec{p} é seu momento linear e U é a função energia potencial, e aplicar a ela as associações

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (2)$$

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (3)$$

onde \hbar é a constante de Planck, transformando esta numa relação entre operadores diferenciais

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2 + U. \quad (4)$$

A dinâmica de uma partícula, nessa teoria, é descrita por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ que é função da posição \vec{r} e do tempo. Esta função de onda é solução da equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (5)$$

ou simplesmente

$$H\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t), \quad (6)$$

onde H é o operador hamiltoniano. As soluções aceitáveis desta equação devem ser tais que o módulo ao quadrado da função de onda deve ser uma distribuição. Esta exigência estabelece uma interpretação probabilística para as implicações da MQ a respeito de observáveis físicos. Nesse ponto, temos uma grande diferença entre a MQ e as teorias clássicas. Não é possível determinar um valor para um observável físico mas sim a probabilidade de um observável assumir certo valor em uma condição experimental específica. Com a prescrição de Schrödinger somada à interpretação probabilística, surge naturalmente o Princípio da Incerteza de Heisenberg o qual estabelece limitações para a precisão com que alguns observáveis físicos podem ser conhecidos simultaneamente (em um mesmo experimento) quando estes se referem a fenômenos na escala atômica ou menor. Essa limitação está diretamente relacionada ao comportamento ondulatório das partículas estabelecido na MQ.

Fenômenos envolvendo velocidades comparáveis à da luz no vácuo, passaram a ser descritos do ponto de vista da TRR, desenvolvida por Einstein. Na visão clássica, que utiliza o conceito de ação à distância, a transmissão de uma informação ocorre instantaneamente. Por exemplo, em um sistema composto por um próton e um elétron, se a posição relativa do elétron se altera, na visão clássica o próton reage imediatamente em decorrência das interações eletromagnéticas entre eles. Na Mecânica Relativística a informação a respeito da mudança na posição do referido elétron é transmitida para o próton em um tempo finito correspondente a uma velocidade que não pode superar a velocidade da luz no vácuo. Assim, por menor que seja o tempo de uma interação, ela não pode ser instantânea. Neste contexto, a adoção do conceito de campo permite que as interações sejam mediadas localmente. A TRR está fundamentada na exigência de que as leis físicas não devem depender da escolha do referencial inercial. Isso implica que as leis físicas devem ter formas matemáticas invariantes frente a mudanças de sistemas de referência

efetuadas por transformações de Lorentz.

Ao passo que as leis do eletromagnetismo permanecem invariantes frente a transformações de Lorentz a equação que desempenha papel de lei na MQ não satisfaz esta condição. Assim, tornou-se necessário contruir formalismos para a descrição da fenomenologia de partículas fundamentais que fossem consistentes com as idéias (bem sucedidas) da MQ e com as idéias (bem sucedidas) da TRR, ou seja, uma teoria capaz de descrever fenômenos em escala pequena envolvendo velocidades comparáveis à da luz. Essa teoria viria a ser a Mecânica Quântica Relativística (MQR). Para esse fim, a equação que descreve a dinâmica de partículas deve permitir uma interpretação análoga à Equação de Schrödinger e ser invariante frente transformações de Lorentz. A segunda condição só pode ser satisfeita se o tempo se transformar da mesma forma que as coordenadas espaciais, logo devemos ter derivadas de mesma ordem no tempo e no espaço.

Seguindo este raciocínio, Klein e Gordon propuseram uma equação, construída de modo análogo à de Schrödinger, que satisfaz a condição de invariância relativística [16]. A ideia de Klein e Gordon foi utilizar a expressão para a energia total relativística de uma partícula dada por

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (7)$$

onde m é a massa de repouso da partícula e c é a velocidade da luz no vácuo, e aplicar sobre esta equação a prescrição de Schrödinger, transformando esta igualdade na relação entre operadores diferenciais

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \left(-i\hbar \vec{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (8)$$

Assim é possível construir a equação de onda (relativística)

$$\left[\square^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Psi = 0, \quad (9)$$

onde introduzimos o operador D'lambertiano

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Existem dificuldades em interpretar as soluções desta equação de maneira análoga a interpretação das soluções da equação (não relativística) de Schrödinger, matematicamente

associadas à presença da segunda derivada temporal. Estas dificuldades podem ser contornadas com a interpretação da função de onda relativística como um campo o qual deve sofrer um procedimento de quantização (segunda quantização). Este campo então pode descrever consistentemente apenas para as propriedades de partículas de spin nulo livres.

A fim de contornar as dificuldades encontradas na interpretação das soluções da Equação relativística de Klein-Gordon, Dirac propôs então uma versão alternativa de equação com derivadas espaço-temporais de primeira ordem

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0, \quad (11)$$

onde γ^μ é um conjunto de matrizes obedecendo a uma álgebra não comutativa, a álgebra de Dirac. As soluções para esta equação mostraram-se bem sucedidas na descrição de propriedades fundamentais de partículas de spin $\frac{1}{2}$, particularmente o elétron. Posteriormente percebeu-se que a interpretação adequada para a solução da Equação de Dirac aparece quando esta é considerada um campo relativístico à luz da segunda quantização, tal qual para a solução da Equação de Klein-Gordon.

Deste modo ficou claro a impossibilidade de construir uma equação para a descrição de propriedades de qualquer partícula relativística. Ao invés disto, para cada spin tem-se uma equação diferente cuja forma é determinada pela invariância de Lorentz. As soluções destas equações descrevem apenas propriedades das partículas livres. As equações relativísticas para os campos livres, originalmente definidas em um espaço-tempo de dimensão $D = 3 + 1$ (três dimensões espaciais e uma dimensão temporal), podem ser naturalmente estendidas para um espaço-tempo de dimensão arbitrária através da invariância de Lorentz.

A descrição das interações entre partículas relativísticas exigiu a construção de um novo formalismo teórico: a Teoria Quântica de Campos (TQC) [19]. A ideia essencial é a de que as soluções das equações de onda relativísticas devem ser vistas como campos relativísticos. As partículas associadas a estes campos surgem da quantização destes. O procedimento de quantização implica em aplicar as regras de quantização similares às de Heisenberg da MQ para os campos e seus momentos canonicamente conjugados. Este procedimento já havia sido aplicado na década de 20 para campos de radiação. Nesse contexto, modos normais de vibração, que emergem naturalmente do procedimento, foram associados à pacotes de energia do campo eletromagnético [9].

A visão da teoria eletromagnética, como uma teoria de campo quantizada, cujas implicações devem descrever os fenômenos de natureza eletromagnética nos domínios relativístico e quântico recebeu o nome de Eletrodinâmica Quântica (EDQ). O sucesso desta TQC na concordância entre predição e experimento não encontra precedentes similares [12]. Isso levou naturalmente à tentativa de descrição das demais interações através de teorias construídas segundo o mesmo ponto de vista conceitual. Surgiram, neste contexto, a Cromodinâmica Quântica para a interação forte; a Teoria Eletrofraca, onde as interações fraca e eletromagnética foram unificadas, e então o Modelo Padrão, onde as três interações fundamentais citadas fazem parte de uma única TQC e representa a visão atual da física para as partículas e interações fundamentais [10]. Não há neste contexto uma teoria equivalente para as interações gravitacionais.

Ao escrevermos uma TQC vemos que as equações de movimento obtidas para os campos são em geral não lineares e acopladas. Na maior parte dos casos é necessário o uso de métodos perturbativos para resolvermos esse tipo de problema. A teoria de perturbação é um método capaz de descrever um fenômeno complicado (interação) em termos de soluções conhecidas para o caso simples (livre). Apenas em alguns casos bidimensionais podemos obter a solução exata. Nesse caminho nos deparamos com quantidades divergentes que contaminam as séries perturbativas para os processos físicos. Torna-se crucial separar estas divergências e removê-las de modo consistente para estabelecer as implicações fenomenológicas destas teorias. A tarefa consiste em separar as partes divergentes e as partes finitas e então, através da interpretação proporcionada pela renormalização, eliminar os efeitos dos infinitos nas amplitudes físicas.

As dificuldades surgem quando precisa-se regularizar as quantidades divergentes para permitir manipulações e cálculos posteriores. Regularizar por outro lado implica em modificar as expressões vindas da teoria segundo algum processo matemático. Somente após algum processo de expansão seguida de algum limite as quantidades calculadas voltariam a se identificar com aquelas vindas da teoria para o processo físico. Entretanto, isto somente seria válido se as operações de integração e tomada do tal limite comutassem o que a rigor somente é válido para integrais finitas e é inválido para integrais divergentes. Deste modo não se pode garantir que as implicações da regularização desapareçam completamente quando o limite envolvido é tomado.

Neste contexto as amplitudes podem depender do método específico de regularização

utilizado assim como da sequência específica de operações efetuadas nos passos intermediários. Frequentemente os resultados obtidos violam as simetrias implementadas na teoria que gerou as amplitudes perturbativas ou violam princípios fundamentais da Teoria Quântica de Campos tais como unitariedade, invariância de escala, homogeneidade do espaço-tempo, entre outras. As amplitudes ainda podem estar contaminadas com ambiguidades, que se manifestam na forma de dependência das amplitudes com escolhas arbitrárias feitas em passos intermediários. Isto evidentemente destrói o poder de predição da teoria, pois, deste modo, não é possível determinar um resultado único para os observáveis físicos. A situação relativa ao problema da regularização é resumível de modo simples; existem métodos que produzem resultados consistentes, mas não são de aplicabilidade geral e existem métodos que não possuem restrições de aplicabilidade, mas que não são livres de inconsistência.

Mesmo para a própria EDQ, quando formulada em dimensões extras em relação a dimensão física, usar uma regularização consistente para a EDQ em quatro dimensões não leva necessariamente a uma interpretação consistente dos resultados obtidos. Isso se deve ao fato de que graus mais severos de divergências estão associados a dimensões espaço-temporais maiores. Esses problemas se acentuam mais ainda para dimensões ímpares, onde o mais popular método de regularização falha. Consequentemente é muito difícil encontrar investigações sob estas circunstâncias; em especial para dimensões extras e ímpares, casos em que não são encontrados trabalhos publicados na literatura.

Em contrapartida, se torna cada vez mais necessária a formulação de uma teoria nesse contexto devido ao crescente interesse por investigações em dimensões extras. Este tópico se tornou alvo de discussões entre cientistas do mundo inteiro, em diferentes áreas, com a motivação adicional fornecida pela possibilidade de efetuar experimentos no Grande Colisor de Hádrons (LHC) envolvendo verificação de efeitos de dimensões extras. Além disso, os métodos matemáticos utilizados deveriam ser independentes da dimensão utilizada, pois esta é uma escolha.

O problema a ser discutido neste trabalho aparece no contexto da Eletrodinâmica Quântica pentadimensional (EDQ₅). Utilizaremos o método denominado Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP), desenvolvido por O. A. Battistel, proposto originalmente em [3], para separar as partes convergentes e divergentes das nossas equações. Este método é mais simples de ser utilizado, por se tratar do emprego direto de uma identidade para o

propagador (logo não altera as expressões provenientes das regras de Feynman da teoria), tem se mostrado consistente e não possui restrições de aplicabilidade.

O trabalho é organizado conforme segue. No primeiro capítulo descreveremos a teoria (EDQ₅) associada ao processo que queremos descrever, que é a auto-energia do fóton. Construiremos a lagrangeana para essa TQC e usaremos as chamadas regras de Feynman para associarmos uma função de Green à amplitude física para o processo. Discutiremos as propriedades que devem ser satisfeitas pela função de Green. No segundo capítulo calcularemos explicitamente a função de Green utilizando o CPP e verificaremos se as propriedades esperadas são realmente satisfeitas. Por fim faremos a renormalização do propagador do fóton.

Capítulo 1

O problema

Para o estabelecimento do problema devemos construir uma teoria. Para tal, especificamos os campos ϕ_i que farão parte da teoria e as simetrias que serão implementadas na construção do funcional que estabelecerá a teoria. Para escrever uma lagrangeana L (o funcional), separamos a mesma em duas partes distintas, uma associada à parte livre dos campos L_F e outra associada à parte de interação L_I

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = L_F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + L_I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (1.1)$$

Então definimos a ação

$$S \equiv \int d^5x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (1.2)$$

onde

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (1.3)$$

define a densidade lagrangeana $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$.

Todos os termos da lagrangeana devem ser construídos de modo que sejam escalares de Lorentz. Impondo a condição de extremização à ação observamos que os campos obedecem à equação de Euler-Lagrange [14]. Através dessa equação somos capazes de obter uma equação diferencial para cada campo presente na teoria. Devemos quantizar os campos e então solucionar as equações diferenciais. A parte livre corresponde a uma solução na forma de uma equação de onda relativística. Com a presença da interação torna-se necessário resolver um conjunto de equações acopladas que podem ser não-lineares. Apenas em algumas teorias simples as equações acopladas possuem solução exata, logo somos levados à utilização de métodos perturbativos a fim de apreciarmos as consequências

dinâmicas de uma TQC.

1.1 A lagrangeana para a EDQ₅

Através de uma TQC investigamos as implicações de um conjunto de simetrias consideradas relevantes para a descrição da dinâmica de interação dos campos que dela participam [17]. Assim, se identificarmos as correntes que se conservam na teoria podemos entender as consequências das simetrias para um dado processo físico. Desse modo, os ingredientes necessários para escrevermos a lagrangeana são os campos e as simetrias que julgarmos relevantes. Esse será o nosso primeiro passo. No contexto da presente investigação, a teoria de interesse é a EDQ₅. Na EDQ queremos descrever a dinâmica do elétron que é um campo fermiônico de spin 1/2. Quando livre o elétron obedece a equação de onda relativística de Dirac [16], logo a parte livre da lagrangeana é determinada como sendo

$$L_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (1.4)$$

onde $\psi(x)$ é o campo spinorial associado ao elétron.

As simetrias podem ser classificadas em duas classes básicas [14], como simetrias globais e como simetrias locais ou simetrias de *gauge*. A lagrangeana L_F tem associada a si uma simetria global $U(1)$ correspondente a uma invariância frente uma transformação de fase, conforme indicam as transformadas

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

onde o parâmetro α é independente das coordenadas espaço-temporais, logo as transformações são as mesmas independentemente do ponto no espaço-tempo (é a isso que chamamos transformações globais). Se admitirmos que há dependência espaço-temporal, então obtemos simetria de *gauge*, logo temos as transformações

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

Temos que o termo que envolve derivadas em (1.4) se transforma como

$$\bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = [e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x)] \partial_\mu [e^{-i\alpha(x)} \psi(x)] \quad (1.7)$$

$$\bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) - i\bar{\psi}(x) [\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x) \quad (1.8)$$

Esse termo que possui derivada destroi a invariância da lagrangeana, pois se transforma de maneira diferente do caso global. Desse modo torna-se necessária a definição de um novo operador derivada D_μ , chamado derivada covariante, que satisfaça a condição de invariância. Esse operador deve obedecer a relação

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \quad (1.9)$$

para que esse termo seja invariante de *gauge* e vetor de Lorentz. A ação da derivada covariante não deve alterar as propriedades de transformação do campo. Para que isso ocorra é necessário que se admita a presença de um campo vetorial $A_\mu(x)$, chamado campo de *gauge*, tal que

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + ieA_\mu(x)] \psi(x) \quad (1.10)$$

onde e é identificado posteriormente como a carga do elétron, que desempenhará o papel de constante de acoplamento elétron-fóton. O campo vetorial está associado ao fóton.

Para que a lei de transformação da derivada covariante seja satisfeita o campo vetorial deve satisfazer

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (1.11)$$

Usando isso, obtemos por (1.4)

$$L'_F = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) - m\bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (1.12)$$

Para tornarmos o campo de *gauge* uma variável dinâmica, precisamos adicionar ao funcional acima um termo envolvendo a parte livre deste campo vetorial. Sabemos do eletromagnetismo que as equações de Maxwell podem ser escritas em termos do tensor $F_{\mu\nu}$. Portanto escrevemos o termo invariante de *gauge* correspondente a parte livre do

campo vetorial como

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

onde definimos o tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.14)$$

Queremos verificar explicitamente a invariância do tensor $F_{\mu\nu}$, assim temos

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (1.15)$$

ou ainda,

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \left[A_\nu(x) + \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(x) \right] - \partial_\nu \left[A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right], \quad (1.16)$$

o que fornece

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.17)$$

Além disso, temos a relação entre o tensor $F_{\mu\nu}$ e as derivadas covariantes

$$(ieF_{\mu\nu})\psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x). \quad (1.18)$$

Devido a invariância do tensor $F_{\mu\nu}$ escrevemos

$$F'_{\mu\nu}\psi'(x) = [F_{\mu\nu}\psi(x)]e^{-i\alpha(x)}. \quad (1.19)$$

Para facilitar os procedimentos de quantização é conveniente adicionarmos um termo de fixação de *gauge*, cuja escolha mais conveniente é

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu) \quad (1.20)$$

onde o parâmetro ξ é arbitrário e não traz consequências dinâmicas à teoria.

Por fim obtemos a lagrangeana da EDQ

$$L = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu). \quad (1.21)$$

Após escrevermos a lagrangeana o nosso objetivo seria a quantização dos campos, que

associaria os campos às partículas. Não daremos ênfase a essa etapa neste trabalho. Assim, vamos direto para a próxima etapa, que corresponde ao emprego das regras de Feynman.

1.2 Regras de Feynman para a EDQ₅

O nosso objetivo é descrever a dinâmica de interações e assim acabamos nos deparando com um conjunto de equações diferenciais acopladas que dependem dos campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ e $A_\mu(x)$. Como já mencionamos, para solucionar esse conjunto de equações devemos nos valer de métodos perturbativos. Neste contexto surgem naturalmente as chamadas regras de Feynman, as quais possibilitam escrever as amplitudes associadas aos processos físicos pertinentes a teoria em termos de expansões perturbativas. Para tal são consideradas todas as possíveis maneiras de um dado estado inicial evoluir para um dado estado final através da construção de diagramas, os denominados diagramas de Feynman.

Definimos um processo pelas suas linhas externas que são o seu estado inicial e o seu estado final. As interações que ocorrem no meio do processo são o que chamamos de linhas internas. As partículas que aparecem nas linhas internas são chamadas de virtuais e são elas que levam o sistema do estado inicial ao final.

Para construirmos os diagramas de Feynman usamos propagadores e vértices. O papel das regras de Feynman é fazer a associação entre as expressões matemáticas e os diagramas. Para o caso da EDQ₅ as regras de Feynman são as seguintes [14]:

I) O propagador do férmion está associado aos campos spinoriais $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$ e carrega um momento k e uma massa m . A equação que representa esse propagador é

$$iS(k) = \frac{i}{\not{k} - m} \quad (1.22)$$

onde $\not{k} = k^\mu \gamma_\mu$.

Ele é representado diagramaticamente por uma linha reta ligando dois pontos que correspondem aos dois campos spinoriais. Ao centro da linha temos uma seta. Quando a seta aponta para a direita temos uma partícula e quando aponta para a esquerda temos uma anti-partícula, que no caso deste trabalho são o elétron e o pósitron.

II) O propagador bosônico está associado a campos vetoriais. A expressão matemática associada a ele é

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \quad (1.23)$$

A representação diagramática de um propagador bosônico é uma linha ondulada. No caso da EDQ ela sempre representa um fóton.

III) Uma interação é representada por um vértice, que consiste na intersecção de dois propagadores fermiônicos e um bosônico. Para cada vértice atribui-se um fator $-ie\gamma_\mu$. É necessário impor a conservação do *pentamomentum* (do *momentum* e da energia) em cada vértice.

IV) Um *loop* é qualquer linha fechada que apareça em um diagrama. Em diagramas contendo *loop* devemos integrar sobre todos os possíveis valores de *momentum* da partícula

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5}.$$

Além disso, caso o *loop* seja puramente fermiônico devemos inserir um fator -1 .

V) Tirar o traço do produto dos propagadores quando este formar uma matriz;

VI) Em alguns casos permutações geram resultados equivalentes. Esses resultados devem ser contados apenas uma vez e por isso multiplicamos o diagrama pelo chamado fator de simetria.

1.3 Auto-energia do fóton

Existem infinitas possibilidades para o que acontece nas linhas internas de um processo e é papel da teoria determinar quais são essas possibilidades. Métodos perturbativos são usados para determinar todas essas possibilidades em termos de uma série. Vamos reconhecer os primeiros termos da série perturbativa para um processo sem efetuar os cálculos, ou seja, apenas escreveremos os diagramas. Após isso usaremos as regras de Feynman para associar equações a estes diagramas.

Estamos interessados na propagação de um fóton. Esse processo é representado por duas linhas bosônicas externas, conforme o primeiro diagrama da figura 1. As linhas internas foram representadas por uma circunferência nesse diagrama. O primeiro termo da série perturbativa corresponde a propagação livre do fóton e os seguintes correspondem a correções em ordem crescente na constante de acoplamento.

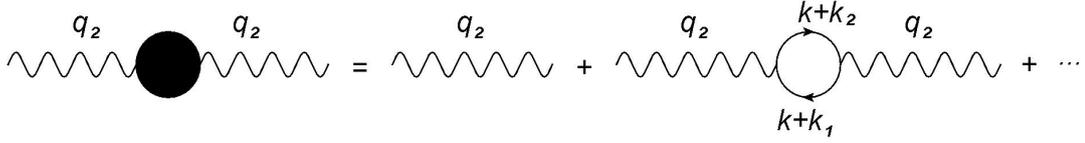


Figura 1 - Representação diagramática para a série perturbativa associada a propagação de um fóton.

Através das regras de Feynman associamos a seguinte amplitude

$$\Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma} = (-) (-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m) \quad (1.24)$$

à correção em nível *1-loop* de aproximação para a propagação do fóton, que corresponde ao último diagrama de Feynman da figura 1. Esta amplitude recebe o nome de tensor de polarização.

A função de Green bi-vetorial que aparece nessa última amplitude é definida por

$$T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m), \quad (1.25)$$

onde definimos a função de Green bi-vetorial para um único valor do momento do loop

$$t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m) \equiv Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (1.26)$$

A imposição da conservação do *pentamomentum* implica na relação entre o *momentum* externo e os *momenta* internos

$$q_2 = k_2 - k_1. \quad (1.27)$$

A amplitude $T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m)$ é uma quantidade divergente, como veremos com mais detalhe posteriormente. Antes de calcularmos explicitamente a amplitude vamos ver algumas propriedades que esperamos que ela satisfaça. Se contrairmos $t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2, m)$ com o *momentum* externo q_2^ν conseguimos relacioná-la com outras funções de Green, conforme segue

$$\begin{aligned} q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV} &= Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} (\not{k}_2 - \not{k}_1) \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} \\ &= Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\} - Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = t_\mu^V(k_1, m) - t_\mu^V(k_2, m), \quad (1.28)$$

onde definimos a função de Green um ponto vetorial, para um único valor do momento do loop,

$$t_\mu^V(k_i, m) \equiv Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \right\}. \quad (1.29)$$

Analogamente obtemos

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = t_\nu^V(k_1, m) - t_\nu^V(k_2, m). \quad (1.30)$$

Após integrarmos (1.28) e (1.30) obtemos relações entre amplitudes de um e dois pontos. Essas são as chamadas relações entre funções de Green.

Além disso, $T_{\mu\nu}^{VV}$ é um tensor de ordem dois simétrico que é construído através de um vetor independente, o *momentum* externo q_2 , e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Desse modo devemos ter a forma geral

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu} [F_1(q_2^2)] + q_{2\mu} q_{2\nu} [F_2(q_2^2)], \quad (1.31)$$

onde $F_1(q_2^2)$ e $F_2(q_2^2)$ são duas funções escalares arbitrárias.

De acordo com o teorema de Noether temos que, a cada simetria implementada na construção da lagrangeana de uma teoria devemos ter associada uma corrente conservada [13][4]. Na EDQ a invariância de *gauge* está associada a existência de uma corrente vetorial conservada dada por $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$. A conservação desta corrente pode ser vista facilmente, com a utilização da Equação de Dirac,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (1.32)$$

As implicações disso são as chamadas identidades de Ward e estão associadas a contrações dos *momenta* com o tensor de polarização

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = q_{2\mu} \{ [F_1(q_2^2)] + q_2^2 [F_2(q_2^2)] \} = 0 \quad (1.33)$$

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_{2\nu} \{ [F_1(q_2^2)] + q_2^2 [F_2(q_2^2)] \} = 0. \quad (1.34)$$

Isso estabelece que $F_1(q_2^2) = -q_2^2 F_2(q_2^2)$, logo o tensor de polarização deve ter o seguinte formato

$$T_{\mu\nu}^{VV} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) F_2(q^2). \quad (1.35)$$

Notemos então a existência de um limite de baixa energia:

$$F_1(q_2^2)|_{q_2^2=0} = -q_2^2 [F_2(q_2^2)]|_{q_2^2=0} = 0 \quad (1.36)$$

pois não se espera nenhum pólo em $F_2(q_2^2)$ em $q_2^2 = 0$. Esse limite deve ser satisfeito para que o fóton se mantenha sem massa.

Assim quando calcularmos explicitamente o tensor de polarização do vácuo, independentemente do fato de este ser uma quantidade divergente, esperamos que as propriedades acima sejam satisfeitas pela forma calculada deste.

Capítulo 2

Cálculo da amplitude física

Neste capítulo queremos calcular explicitamente a amplitude $\Pi_{\mu\nu}$ e, após isto, verificaremos as propriedades gerais apresentadas no final do capítulo anterior. Com este intuito primeiramente vamos calcular explicitamente a função de um ponto vetorial

$$T_{\mu}^V(k_i, m) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} t_{\mu}^V(k, k_i, m), \quad (2.1)$$

e a de dois pontos bi-vetorial

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} t_{\mu\nu}^{VV}(k, k_1, k_2, m). \quad (2.2)$$

2.1 Álgebra de Dirac

Nesta seção serão utilizadas duas propriedades das matrizes de Dirac:

$$Tr(\gamma_{\mu}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Para facilitar as operações podemos reescrever o propagador fermiônico como

$$\frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} = \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m}{(k + k_i)^2 - m^2} \equiv \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m}{D_i} \quad (2.5)$$

onde usamos (2.4) para mostrar que $(\not{k} + \not{k}_i)^2 = (k + k_i)^2$.

Assim, obtemos

$$t_\mu^V(k_i, m) = Tr \left\{ \gamma_\mu \left[\frac{1}{D_i} (\not{k} + \not{k}_i) + m \right] \right\} \quad (2.6)$$

e também

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = Tr \left\{ \gamma_\mu \left[\frac{1}{D_{12}} (\not{k} + \not{k}_1) + m \right] \gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \right\}, \quad (2.7)$$

onde definimos $D_{ij} \equiv D_i D_j$.

Sendo traço uma operação linear, obtemos que

$$t_\mu^V(k_i, m) = \frac{1}{D_i} \left\{ (k + k_i)^\nu Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) + m Tr(\gamma_\mu) \right\} \quad (2.8)$$

e também

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \frac{1}{D_{12}} \left\{ (k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) + m^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) + \right. \\ \left. + m (k + k_1)^\alpha Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) + m (k + k_2)^\beta Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta) \right\} \quad (2.9)$$

Usando as propriedades das matrizes de Dirac calculamos os traços envolvidos:

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) = Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta) = 0, \quad (2.11)$$

e

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) = 4(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}). \quad (2.12)$$

Assim teremos

$$t_\mu^V(k_i, m) = \frac{1}{D_i} (k + k_i)^\nu 4g_{\mu\nu} = 4 \left\{ \frac{k_\mu}{D_i} + k_{i\mu} \frac{1}{D_i} \right\} \quad (2.13)$$

e

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \frac{4}{D_{12}} \left\{ (k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) + m^2 g_{\mu\nu} \right\} \\ = \frac{4}{D_{12}} \left\{ (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu + (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu - \right. \\ \left. - [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] g_{\mu\nu} \right\}. \quad (2.14)$$

Nesse último passo foi feita a contração dos índices e uma reorganização dos termos. Vamos deixar a função de um ponto de lado por ora.

Reescrevendo o termo entre colchetes da função de dois pontos como

$$\begin{aligned} \frac{2}{D_{12}} [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] &= \frac{1}{D_{12}} \{ [(k+k_1)^2 - m^2] + [(k+k_2)^2 - m^2] - q_2^2 \} \\ &= \left\{ \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} - q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, abrindo os produtos no restante, podemos escrever

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= 4 \left\{ 2 \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}} + Q_\nu \frac{k_\mu}{D_{12}} + Q_\mu \frac{k_\nu}{D_{12}} + (k_{1\nu} k_{2\mu} + k_{1\mu} k_{2\nu}) \frac{1}{D_{12}} \right\} - \\ &\quad - 2g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} - q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde definimos $Q \equiv k_1 + k_2$.

Se definirmos as integrais de Feynman de um ponto como:

$$(I_1, I_{1\mu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} (i_1, i_{1\mu}), \quad (2.17)$$

onde definimos

$$(i_1, i_{1\mu}) \equiv \frac{(1, k_\mu)}{D_i}, \quad (2.18)$$

e de dois pontos como:

$$(I_2, I_{2\mu}, I_{2\mu\nu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} (i_2, i_{2\mu}, i_{2\mu\nu}), \quad (2.19)$$

onde definimos

$$(i_2, i_{2\mu}, i_{2\mu\nu}) \equiv \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu)}{D_{12}}, \quad (2.20)$$

então obtemos ao integrar (2.13) e (2.16) as expressões

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \{ I_{1\mu} + k_{1\mu} I_1 \} \quad (2.21)$$

e

$$T_{\mu\nu}^{VV} = 4 \{2I_{2\mu\nu} + Q_\mu I_{2\nu} + Q_\nu I_{2\mu} + (k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}) I_2\} - 2g_{\mu\nu} [I_1(k_1) + I_1(k_2) - q_2^2 I_2]. \quad (2.22)$$

Deste modo nosso objetivo se resume encontrar a solução das integrais de Feynman obtidas. É neste ponto que nos deparamos com as divergências.

2.2 A estratégia para o tratamento das divergências

É simples observar se uma integral é convergente ou divergente. Basta efetuar uma contagem de potências. Para mostrar isto usaremos a integral I_1 como exemplo. Nesta integral temos cinco potências de k no numerador e duas no denominador da integral, assim vemos que essa integral diverge como $k^5 k^{-2} = k^3$, ou seja, a integral tem divergência cúbica. Usando esse método vemos que todas as integrais de Feynman definidas na seção anterior divergem. Além disso, a função de dois pontos diverge cubicamente e a função de um ponto diverge quarticamente.

Devido às limitações dos métodos de regularização tradicionais utilizaremos um método alternativo para tratar das divergências. Este método é o Cálculo Perturbativo Preditivo, uma evolução formal da chamada Regularização Implícita. Ele elimina completamente o papel da regularização em cálculos perturbativos de TQC's [3]. As partes divergentes das amplitudes são separadas automaticamente em objetos padronizados. Para os propósitos da renormalização apenas propriedades gerais dos objetos são necessárias, logo não precisamos integrá-los. Neste procedimento as quantidades físicas jamais aparecem em uma expressão matematicamente indefinida. O referido método além de gerar ganhos conceituais significativos [1] por eliminar a necessidade de regularização, permite uma descrição transparente e universal das anomalias [2][7]. As ambiguidades são automaticamente eliminadas e as amplitudes são obtidas preservando as simetrias da teoria original e o método não possui quaisquer limitações de aplicabilidade. Torna-se possível promover investigações conclusivas em situações onde a utilização de regularizações usuais geram resultados conflitantes. O problema pertinente ao presente trabalho é um exemplo deste tipo de situação por ser formulado em uma dimensão espaço-temporal extra e ímpar.

Com intuito de utilizarmos esse método dividimos a implementação das regras de

Feynman em duas etapas de modo conveniente. Para a primeira etapa escrevemos todas as operações implicadas pelas regras de Feynman com exceção da regra que manda integrar sobre os *momenta* dos *loops*. Com esta atitude separamos a operação que estabelece o caráter divergente das amplitudes e, portanto, o caráter de indefinição matemática. Então identificamos o grau superficial de divergência das integrais de Feynman e buscamos uma representação adequada para os propagadores internos. A representação adequada será aquela que uma vez substituída nas integrais, após a introdução do sinal de integração para o momento do *loop*, não tornará divergente nenhum termo que contenha a dependência nos momentos internos. Nas integrais divergentes obtidas não deverá aparecer nenhuma quantidade física. Isto é possível de ser obtido reescrevendo o propagador fermiônico com o auxílio da identidade

$$\frac{1}{D_i} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} D_i}, \quad (2.23)$$

onde N deve ser maior ou igual ao grau superficial de divergência da integral de Feynman. As partes divergentes e finitas serão naturalmente separadas. Aqui nós introduzimos o parâmetro λ , que é um parâmetro arbitrário e com dimensão de massa. Posteriormente veremos que esse parâmetro conecta as partes divergentes e convergentes de maneira precisa. Como λ é arbitrário as amplitudes físicas não podem depender dele.

Utilizando o recurso apresentado separamos completamente as partes convergentes e divergentes das integrais de Feynman.

Assim, obtemos para os integrandos de um propagador

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - (\lambda^2 - m^2) \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\ &+ k_1^\alpha k_1^\beta \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\ &+ (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} - (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\ &- 12k_1^\mu k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
i_{1\mu} = & -k_1^\nu \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right] - k_{1\mu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right] \\
& + (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_1^\nu \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
& + (\lambda^2 - m^2) k_{1\mu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
& - \frac{1}{3} k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta \left[\frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\beta} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\nu} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\alpha} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right] \\
& - k_{1\mu} k_1^\alpha k_1^\beta \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
& - 6k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} + 8k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
& + 32k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^5} - \frac{k_\mu A_1^5}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_1 \tag{2.25}
\end{aligned}$$

e para os integrandos de dois propagadores

$$\begin{aligned}
i_2 = & \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 \\
& + \frac{2k_1^\mu k_\mu A_2}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 - (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} D_2 + \frac{A_1^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} D_{12} \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{2\mu} = & -\frac{1}{2} Q^\nu \left\{ \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \right\} \\
& + 2(2k_2^\nu + k_1^\nu) (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{k_\mu A_2^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 - \frac{2k_1^\nu k_\mu k_\nu A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 \\
& + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{k_\mu A_2}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 + 4k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 - \\
& - \frac{4k_1^\nu k_1^\alpha k_\mu k_\nu k_\alpha A_2}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 \frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 - \frac{k_\mu A_1^3}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_{12} \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{2\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right] + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right] \right\} \\
& - \frac{1}{2} (\lambda^2 - m^2) g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] - \\
& - \frac{1}{4} \{ (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) + (k_2^2 + \lambda^2 - m^2) \} \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] + \\
& + \frac{1}{6} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) \left\{ \left[\frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\beta} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right. \right. \\
& \left. \left. - g_{\mu\nu} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\alpha} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right] \right. \\
& \left. + g_{\mu\nu} \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{6} (2k_1^\alpha k_{1\mu} + 2k_2^\alpha k_{2\mu} + k_2^\alpha k_{1\mu} + k_1^\alpha k_{2\mu}) \left[\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
& - \frac{1}{12} g_2^2 g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] + \\
& + \frac{1}{6} \{ 2k_{2\mu} k_{2\nu} + 2k_{1\mu} k_{1\nu} + (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) \} \left[\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
& - 4 \left\{ 3k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_1^\beta + 2k_1^\alpha k_2^\beta \right\} (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^5} + \frac{k_\mu k_\nu A_2^4}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 + \\
& + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \{ (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \\
& - (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2)^3 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) k_\mu k_\nu A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 + \frac{2k_1^\alpha k_\mu k_\nu k_\alpha A_2^3}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 + \\
& + 4k_1^\alpha k_1^\beta \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 - 4k_1^\alpha (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha A_2}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 + \\
& + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_2 + 8k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta k_\rho A_2}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 - \\
& - 12k_1^\alpha k_1^\beta (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 - (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^3 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 - \\
& - 6k_1^\alpha (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 + \frac{k_\mu k_\nu A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_{12} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$A_i \equiv 2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m^2. \tag{2.29}$$

Agora devemos avaliar essas integrais. Tendo em vista as expressões acima torna-se

conveniente definirmos os seguintes objetos divergentes:

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (2.30)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) &\equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (2.33)$$

$$I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (2.34)$$

Esses objetos podem ser classificados em duas categorias. $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$ e $I_{cub}^{(5)}(\lambda^2)$ são objetos divergentes irreduzíveis. Os objetos restantes são combinações de integrais com um mesmo grau de divergência, mas com estruturas tensoriais distintas. Os últimos podem ser reduzidos em termos dos objetos irreduzíveis com o uso das relações entre integrais [19]

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} f(k^2) k_\mu k_\nu = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} f(k^2) k^2 \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \quad (2.35)$$

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} f(k^2) k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} f(k^2) k^4 \frac{g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}}{2\omega(2\omega + 2)}, \quad (2.36)$$

onde $f(k^2)$ é uma função arbitrária.

Agora que separarmos as integrais podemos resolver as partes convergentes sem restrições, mantendo as partes divergentes sem alterações.

2.3 Solução da parte convergente

Observando as expressões obtidas para as integrais de Feynman na seção anterior podemos identificar alguns aspectos gerais. O mais imediato é que todas as integrais divergentes tem o formato

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{(1, k_\mu k_\nu, k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta, \dots)}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha}, \quad (2.37)$$

enquanto que as convergentes o integrando envolve as formas

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_i} \quad (2.38)$$

e

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_{12}}. \quad (2.39)$$

onde α é inteiro. Podemos usar o recurso conveniente das parametrizações de Feynman para reescrever os integrandos antes de proceder a integração nos momentos. Como tal temos as seguintes parametrizações

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2} \quad (2.40)$$

e

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^3} \quad (2.41)$$

As quantidades a , b e c podem ser identificados como os propagadores D_i e $(k^2 - \lambda^2)$. É importante perceber que diferentes escolhas levam a diferentes formas para os integrandos. Porém estas formas podem ser convertidas uma na outra através de uma mudança de variáveis.

Derivando (em função dos parâmetro) ambos os lados das equações (2.40) e (2.41) podemos obter outras parametrizações. A constante que multiplica a integral e a potência da quantidade do denominador seriam alteradas e apareceria uma função de z e y no numerador. Os termos colocados entre colchetes das parametrizações não seriam alterados.

Isso não é o suficiente para que obtenhamos o formato da equação (2.37). Para este fim é necessário reescrevermos os termos entre colchetes através de um deslocamento na variável k .

Assim, para o caso com dois parâmetros obtemos integrandos do tipo

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_i} = \int_0^1 \frac{dz}{(k'^2 + Q_z)^2} \quad (2.42)$$

onde deslocamos a variável k de modo que $k' = k + k_i z$ e definimos

$$Q_z \equiv k_i^2 z (1 - z) + (\lambda^2 - m^2) z - \lambda^2 \equiv -H^2 (k_i^2, \lambda^2, m^2). \quad (2.43)$$

Já para o caso com três parâmetros obtemos integrandos do tipo

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_{12}} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{(k'^2 + Q_{yz})^3} \quad (2.44)$$

onde deslocamos a variável k de modo que $k' = k + k_1 y + k_2 z$ e definimos

$$Q_{yz} \equiv (k_1^2 - m^2 + \lambda^2) y + (k_2^2 - m^2 + \lambda^2) z - \lambda^2 - (k_1 y + k_2 z)^2. \quad (2.45)$$

Nos limites em que $y = 1 - z$ e $y = 0$ vemos que

$$Q_{yz} (y = 1 - z) = q^2 z (1 - z) - m^2 = -H^2 (q^2, m^2) \quad (2.46)$$

$$Q_{yz} (y = 0) = k_2^2 z (1 - z) + (\lambda^2 - m^2) z - \lambda^2 = -H^2 (k_2^2, \lambda^2, m^2). \quad (2.47)$$

Ao usarmos o CPP para separarmos as partes convergentes e divergentes das integrais nos deparamos com termos contendo a quantidade A_i . Após feito o deslocamento na variável k , podemos associar estes termos com as derivadas das funções Q_z e Q_{zy} .

Uma vez que podemos sistematizar todas as integrais que aparecem nas funções de Green em um único forma de integral nos momentos (2.37), nosso objetivo passa ser a solução dessa.

A solução da integral convergente com a unidade no numerador é dada por

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (2.48)$$

onde B deve ser feito igual à zero (para obtermos o formato desejado) e a dimensão 2ω e o parâmetro α devem ser especificados. No lado direito Γ é a função de Euler, que é definida apenas para argumentos não-negativos. A demonstração dessa equação pode ser encontrada em [8], [17] e [13]. Essa solução não é válida para o caso divergente pois na demonstração é assumido que $\alpha > \omega$.

Derivando ambos os lados de (2.48) em função das componentes de B podemos encontrar as soluções das integrais com outras potências de k no numerador. De modo

geral, aparecem termos dependentes de B nas soluções e isso traz algumas complicações. Entretanto, ao fixarmos $B = 0$, as integrais assumem sua forma mais simplificada. É por esse motivo que colocamos as integrais no formato de (2.37). Nesse caso, quando temos potências ímpares de k no numerador as integrais se anulam. Já quando temos potências pares obtemos

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (2.49)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega - 1}}, \quad (2.50)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\xi}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{4} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\xi} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\xi} + g_{\nu\mu} g_{\lambda\xi}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega - 2}} \quad (2.51)$$

e assim por diante.

Usando estes recursos estamos aptos à determinar a parte convergente das integrais de Feynman e, conseqüentemente, escrever a função de um ponto vetorial e a função de dois pontos bi-vetorial.

2.4 Amplitude física e ambigüidades

Substituindo os valores encontrados para as integrais de Feynman em (2.21) e (2.22) e solucionando a parte convergente obtemos os resultados

$$T_\mu^V(k_i, m) = 4 \left\{ -k_i^\alpha \Delta_{2;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) + (k_i^2 + \lambda^2 - m^2) k_i^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{1}{3} k_i^\rho k_i^\alpha k_i^\beta \square_{4;\mu\rho\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \right\} \quad (2.52)$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \left\{ \frac{4}{3} I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\pi^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \right\} + \\ &\quad + S_{\mu\nu}^{(5)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde definimos a integral convergente

$$Z_k^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \equiv \int_0^1 dz (z)^k \left\{ [Q_z(q_2^2, m^2)]^{1/2} - [-\lambda^2]^{1/2} \right\} \quad (2.54)$$

e o objeto divergente

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu}^{(5)} &= 4\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) - [Q^2 + q_2^2 + 4(\lambda^2 - m^2)] \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + \\
&+ \frac{1}{3} (q_2^\alpha q_2^\beta + 3Q^\alpha Q^\beta) \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) - 2Q_\nu Q^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) + \\
&- \frac{2}{3} g_{\mu\nu} q_2^\alpha q_2^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{2}{3} q_{2\mu} q_2^\alpha \Delta_{3;\nu\alpha}^{(5)}(\lambda^2). \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Uma característica importante do uso de métodos perturbativos é a presença de ambiguidades. Nesta investigação elas se manifestam através de duas quantidades; o fator de escala e a soma dos *momenta* internos [13]. A função de um ponto vetorial depende dessas duas quantidades. Para o tensor de dois pontos toda a ambiguidade está no objeto $S_{\mu\nu}^{(5)}$, que pode ser separado em duas partes

$$[S_{\mu\nu}^{(5)}]_{momentum} = -Q^2 \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + Q^\alpha Q^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) - 2Q_\nu Q^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) \tag{2.56}$$

que depende das escolhas para o *momentum* e para a escala e

$$\begin{aligned}
[S_{\mu\nu}^{(5)}]_{escala} &= 4\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) - [q_2^2 + 4(\lambda^2 - m^2)] \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + \\
&+ \frac{1}{3} q_2^\alpha q_2^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} q_2^\alpha q_2^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{2}{3} q_{2\mu} q_2^\alpha \Delta_{3;\nu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) \tag{2.57}
\end{aligned}$$

que depende apenas da escala arbitrária.

Isso mostra a necessidade de usarmos valores arbitrários para os *momenta* internos. Diferentes escolhas levariam a diferentes resultados para a mesma amplitude perturbativa. Vamos usar dois exemplos para ilustrar:

Fixando $k_1 = 0$ e $k_2 = q_2$ obtemos

$$[S_{\mu\nu}^{(5)}]_{momentum} = -q_2^2 \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + q_2^\alpha q_2^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) - 2q_{2\nu} q_2^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2). \tag{2.58}$$

Fixando $k_1 = -\frac{q_2}{2}$ e $k_2 = \frac{q_2}{2}$ obtemos

$$[S_{\mu\nu}^{(5)}]_{momentum} = 0. \tag{2.59}$$

Os termos que são dependentes das escolhas para as linhas internas violam a homo-

geneidade do espaço-tempo porque uma translação nos *momenta* traria consequências físicas. Além disso, diferentes escolhas na escala também levariam a resultados diferentes. Estes termos são violadores de simetrias.

Dizer que toda a ambiguidade do tensor de polarização está no termo $S_{\mu\nu}^{(5)}$ implica em que a quantidade

$$[T_{\mu\nu}^{VV}]_{NA} = (g_{\mu\nu}q_2^2 - q_{2\mu}q_{2\nu}) \left\{ \frac{4}{3}I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{i}{4\pi^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \right\} \quad (2.60)$$

não depende do fator de escala. Para comprovarmos isso devemos derivar este termo em função de λ^2 .

Ao derivarmos $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$ obtemos uma quantidade convergente que pode ser integrada com o auxílio de (2.49)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^2} I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) = 2 \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2i\lambda} \quad (2.61)$$

e derivando os termos finitos obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] = \left[\int_0^1 dz (1 - 2z^2) \right] \frac{\partial}{\partial\lambda^2} (-\lambda^2)^{1/2} = -\frac{1}{6} \frac{1}{i\lambda} \quad (2.62)$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^2} [T_{\mu\nu}^{VV}]_{NA} = 0. \quad (2.63)$$

Assim, como deveria ser, o resultado não depende do parâmetro arbitrário de escala. A partir deste ponto podemos escolher qualquer valor para este parâmetro. O mais conveniente é a massa m .

2.5 Consistência

Como um teste mínimo de consistência observamos que as relações entre funções de Green são satisfeitas. Na contração com o *momentum* apenas o termo $S_{\mu\nu}^{(5)}$ sobrevive, logo devemos obter

$$q_2^\nu S_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m) \quad (2.64)$$

$$q_2^\mu S_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m). \quad (2.65)$$

Devido a forma como as soluções foram colocadas é fácil ver que essas relações são satisfeitas. O fato de elas serem satisfeitas antes e depois da integração implica que a linearidade da integração é preservada.

Agora, vamos pensar no formato esperado pelo tensor de polarização, que é dado por (1.35). Este formato só pode ser obtido se o objeto $S_{\mu\nu}^{(5)}$ for identicamente nulo. Além disso, para que as identidades de Ward sejam satisfeitas é necessário que $S_{\mu\nu}^{(5)}$ e a função de um ponto vetorial sejam identicamente nulos. Isso somente é satisfeito se os objetos divergentes divergentes $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$ forem identicamente nulos. Com isso as ambiguidades são eliminadas. Vamos falar sobre estes objetos na próxima seção.

Nessas condições temos o tensor de polarização

$$T_{\mu\nu}^{VV} = (g_{\mu\nu}q_2^2 - q_{2\mu}q_{2\nu}) \left\{ \frac{4}{3}I_{lin}^{(5)}(m^2) + \frac{i}{4\pi^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right] \right\} \quad (2.66)$$

onde o termo entre chaves é a função $F_2(q^2)$.

Nos resta provar apenas que o limite de baixa energia é satisfeito

$$\left\{ q_2^2 \left[\frac{4}{3}I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{i}{4\pi^2} 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - \frac{i}{4\pi^2} Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \right\}_{q_2^2=0} = 0. \quad (2.67)$$

É imediato perceber que este limite é obtido satisfeito para qualquer forma regularizada de $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$.

2.6 Objetos divergentes e regularizações

Na seção precedente vimos que os objetos $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$ devem ser nulos para que sejam obtidos resultados consistentes. Por isso eles recebem o nome de Relações de Consistência. Nesta seção determinaremos explicitamente o valor destes objetos através de diferentes técnicas de regularização.

Vamos considerar inicialmente o recurso da continuação analítica para atribuir significado para os objetos divergentes tal qual é feito na Regularização Dimensional (RD) [6]. Neste contexto supomos que a solução da integral nos *momenta* dada por (2.48) também seja válida para o caso divergente. Para este fim admitimos que a integral é uma função

analítica da variável ω , que é contínua e complexa. Além disso, devemos substituir a função Gamma de Euler pela sua continuação analítica, a função Gamma de Weierstrass. Deste modo, as equações

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (2.68)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+1}} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha + 1) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (2.69)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\xi}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+2}} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{4} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\xi} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\xi} + g_{\nu\mu} g_{\lambda\xi}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha + 2) (-\lambda^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (2.70)$$

também são válidas para o caso divergente e então fica fácil estabelecer as relações

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (2.71)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &+ g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} + g_{\mu\beta} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Isso implica que $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = 0$. Assim, tanto a função de um ponto vetorial, quanto o termo $S_{\mu\nu}^{(5)}$ são nulos. Isso explica o sucesso obtido pela RD em eliminar as ambiguidades e os termos que violam simetrias. Ao reescrevermos os objetos divergentes como

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} \quad (2.74)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (2.75)$$

$$\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\}. \quad (2.76)$$

fica fácil ver a razão deles se anularem neste contexto. Eles devem ser nulos para que seja permitido fazer impunemente um deslocamento na variável de integração. Como sabemos quando uma integral possui grau de divergência superior ao logarítmico, ao efetuarmos um deslocamento da origem na variável de integração devemos compensar esta operação com os devidos termos de superfície. As formas acima mostram que as quantidades $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$ nada mais são do que termos de superfícies.

Assim o procedimento mostrado acima, anula os termos de superfície e portanto elimina os termos que dependem da escolha para os momentos das linhas internas dos loops.

Agora vamos olhar os objetos divergentes de outro modo, através de uma regularização pentadimensional. Para que nossos resultados sejam consistentes é necessário usarmos uma distribuição $G(k^2, \Lambda_i^2)$ tal que os objetos divergentes regularizados

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} \quad (2.77)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (2.78)$$

$$\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (2.79)$$

sejam identicamente nulos. Como exemplo vamos utilizar o método covariante de Pauli-Villars [15]. Neste método uma integral com um grau arbitrário de divergência pode ser regularizada ao fazermos

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} + \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{k^2 - \Lambda_i^2}. \quad (2.80)$$

Também podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{c_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \quad (2.81)$$

onde $c_i = 1$ e $\Lambda_i^2 = \lambda^2$.

O número de coeficientes c_i é fixado de acordo com o grau de divergência. Condições devem ser impostas para fixar estes coeficientes tais como:

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0 \quad (2.82)$$

$$\sum_{i=0}^N c_i \Lambda_i^2 = 0. \quad (2.83)$$

Um grau arbitrário de divergência nos leva a forma

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \frac{(\lambda^2 - \Lambda_1^2)(\lambda^2 - \Lambda_2^2) \cdots (\lambda^2 - \Lambda_N^2)}{(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2) \cdots (k^2 - \Lambda_N^2)}. \quad (2.84)$$

Se considerarmos que todos os parâmetros tem a mesma magnitude podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^N. \quad (2.85)$$

Este tipo de regularização modifica o integrando das amplitudes:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \rightarrow \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) \right\}. \quad (2.86)$$

Após inserirmos essa função a integral deveria ser solucionada e então deveríamos tomar o limite. Porém o limite e a integral não comutam, este processo seria válido apenas para casos em que a integral convergisse absolutamente. Chamamos

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) = 1 \quad (2.87)$$

de limite de conexão.

Usando este procedimento calculamos as integrais

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 = (\lambda^2 - \Lambda^2)^2 \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z) z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.88)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 = (\lambda^2 - \Lambda^2)^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{dz (z)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.89)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) = (\lambda^2 - \Lambda^2) \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.90)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) = (\lambda^2 - \Lambda^2) \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{dz (1-z)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.91)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) = (\lambda^2 - \Lambda^2) \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{24} g_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^3}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.92)$$

onde definimos $Q_\lambda \equiv (\lambda^2 - \Lambda^2) z - \lambda^2$ e $g_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Embora não tenhamos escrito explicitamente o limite deve ser efetuado. Observando essas equações podemos obter as relações

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 - \\ &- (\lambda^2 - \Lambda^2)^2 \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (z^2)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) - \\ &- (\lambda^2 - \Lambda^2) \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z) z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) + \\ &+ g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) + \\ &+ g_{\mu\beta} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} \left(\frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) - \\ &- (\lambda^2 - \Lambda^2) \frac{i}{32\pi^2} g^{(4)} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2 z}{[Q_\lambda]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Como consequência disso temos que $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$ e $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$. Isto pode ser visto claramente se colocarmos os objetos divergentes na forma de termos de superfície. Teremos

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} = -\frac{i(\lambda^2 - \Lambda^2)^2}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (z)^2}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.96)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} = -\frac{i(\lambda^2 - \Lambda^2)}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z)z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.97)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} = -\frac{i(\lambda^2 - \Lambda^2)}{32\pi^2} g^{(4)} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2 z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (2.98)$$

o que mostra o caráter não nulo destas quantidade na regularização de Pauli-Villars. O mesmo resultado seria obtido para qualquer outra função regularizadosra pentadimensional. Isso faz com que não seja possível eliminar as ambiguidades e os termos que violam simetrias no contexto de tais prescrições.

Como os objetos $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$, $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ e $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$ devem se anular (só assim podemos obter resultados consistentes) nós devemos admitir como aceitáveis apenas prescrições que satisfazem estas condições. Do contrário os resultados dependem das escolhas arbitrárias feitas nos passos intermediários e a teoria não tem poder de determinar nada. Assumindo então apenas a utilização de regularizações aceitáveis ou consistentes o tensor de polarização assume uma forma preditiva as identidades de Ward são satisfeitas.

2.7 Renormalização

Usamos teoria de perturbações para solucionarmos problemas que não sabemos resolver exatamente em termos de um problema cuja solução é conhecida. Como exemplo, em TQCs, podemos descrever interações em termos da dinâmica de partículas livres. A solução desejada é obtida em termos de uma série de potências em um dado parâmetro (muito pequeno), as chamadas séries perturbativas. Se pudéssemos somar todos os termos da série obteríamos a solução exata. Como o parâmetro perturbativo é muito pequeno cada novo termo da série terá uma contribuição menor, logo podemos aproximar a solução por alguns termos da série.

Após encontrarmos as soluções desejadas devemos ser capazes de interpretá-las. As quantidades que aparecem inicialmente na expressão para a teoria (na lagrangeana das

TQCs) não são de fato as quantidades físicas medidas em laboratório [10]. Chamamos essas quantidades de parâmetros físicos *nus*. Estes parâmetros são os coeficientes dos termos da lagrangeana, logo devemos ter tantos parâmetros quanto termos na lagrangeana. No caso da EDQ essas quantidades seriam as massas do elétron e do fóton, a carga do elétron (que é a constante de acoplamento entre campos), a normalização dos campos e o parâmetro de fixação de *gauge*. Quando adicionamos interações estes parâmetros tem seu significado alterado. Assim, conforme calculamos contribuições de ordem mais elevada no parâmetro perturbativo se torna necessária uma redefinição dos parâmetros encontrados na ordem anterior. Esses parâmetros redefinidos são identificados como observáveis físicos, os *inputs* da teoria. Eles são necessários para que a teoria tenha poder de predição.

É uma característica geral do uso desse tipo de método a necessidade de redefinir os parâmetros físicos. Mas, no caso particular das TQCs, esse processo tem uma função extra. Vamos observar a solução que nós encontramos para o tensor de polarização

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma} = & -\frac{4e^2}{3} (q_{2\mu}q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) \left\{ I_{lin}^{(5)}(m^2) + \right. \\ & \left. + \frac{3i}{(4\pi)^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Nessa equação $I_{lin}^{(5)}(m^2)$ deve ser considerado uma representação para a versão regularizada. O formato desse termo é estabelecido pela regularização utilizada. A presença desse termo implica que a amplitude física não é finita, logo não possui significado físico. Como os parâmetros físicos *nus* não são mensuráveis, podemos impor que eles contenham divergências. Assim podemos escolher essas divergências de modo que as divergências originadas nos diagramas de Feynman, que estão presentes na amplitude, sejam canceladas. Após estas divergências terem sido absorvidas pelos parâmetros *nus*, o que resta são os parâmetros físicos renormalizados (*vestidos*), que são finitos e mensuráveis [11]. Chamamos de renormalização o processo através do qual, após um número finito de redefinições de parâmetros, podemos tornar uma teoria finita a qualquer ordem da expansão perturbativa .

Agora vamos renormalizar o propagador do fóton ao nível 1-*loop* de aproximação. Seja o propagador do fóton livre

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{q_2^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_{2\mu}q_{2\nu}}{q_2^2} \right]. \quad (2.100)$$

Então obtemos ao considerar essa correção, a série

$$D_{\mu\nu}(q_2) = D_{\mu\nu}(q_2) + D_{\mu\alpha}(q_2) [-i\Pi_{\alpha\beta}(q_2^2, m^2)] D_{\beta\nu}(q_2) + \\ + D_{\mu\alpha}(q_2) [-i\Pi_{\alpha\beta}(q_2^2, m^2)] D_{\beta\xi}(q_2) [-i\Pi_{\xi\eta}(q_2^2, m^2)] D_{\eta\nu}(q_2) + \quad (2.101)$$

Ao escrevermos o tensor de polarização no vácuo como

$$\Pi_{\alpha\beta} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q_2^2) \quad (2.102)$$

em que

$$\Pi(q_2^2) = -\frac{4e^2}{3} \left\{ I_{lin}^{(5)}(m^2) + \frac{3i}{(4\pi)^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right] \right\} \quad (2.103)$$

podemos somar a série perturbativa obtendo

$$[D_{\mu\nu}(q_2)]_{1-loop} = -\frac{1}{q_2^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_{2\mu}q_{2\nu}}{q_2^2} \right] \frac{1}{1 + \Pi(q_2^2)}. \quad (2.104)$$

Agora, considerando a forma explicita de $\Pi(q_2^2)$ podemos seguir com a renormalização. O tensor de polarização renormalizado pode ser escrito como

$$[\Pi_{\mu\nu}]_{REN} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) [\Pi_{REN}] \quad (2.105)$$

onde

$$[\Pi_{REN}] = -e^2 \left\{ \frac{4}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2) + \frac{i}{4\pi^2} \left[2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right] \right\} + \delta_A \quad (2.106)$$

deve ser finita e deve satisfazer a condição de renormalização

$$[\Pi_{REN}^{\gamma\gamma}]_{q_2^2 \rightarrow 0} = 0 \quad (2.107)$$

que é exatamente o limite de baixas energias.

Usando os resultados

$$Z_2^{1/2}(q_2^2 \rightarrow 0, m^2; \lambda^2) = 0 \quad (2.108)$$

e

$$Z_0^{1/2} (q_2^2 \rightarrow 0, m^2; \lambda^2) = 0, \quad (2.109)$$

encontramos

$$\delta_A = \frac{4e^2}{3} \left\{ I_{lin}^{(5)} (m^2) \right\}. \quad (2.110)$$

Desse modo o tensor de polarização renormalizado é dado por

$$[\Pi_{REN}^{\gamma\gamma}] = -\frac{ie^2}{4\pi^2} \left\{ 2Z_2^{1/2} (q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2} (q_2^2, m^2; m^2) \right\}. \quad (2.111)$$

Além disso, a constante multiplicativa de renormalização é dada por

$$Z_A = 1 + \frac{4e^2}{3} I_{lin}^{(5)} (m^2). \quad (2.112)$$

Após renormalizarmos a amplitude o limite de baixas energias é automaticamente satisfeito. Com isso através do procedimento utilizado obtivemos o resultado desejado para o tensor de polarização do vácuo de QED₅ tendo sido possível a renormalização sem que a utilização explícita de um método de regularização tenha sido utilizado explicitamente. Todas as formas de regularização aceitáveis levam à mesma forma renormalizada já que isto implicaria apenas em atribuir uma forma explicita particular para a quantidade $I_{lin}^{(5)} (m^2)$. Assim todas as formas de regularização aceitáveis estão contempladas na forma acima para o parâmetro de renormalização.

Capítulo 3

Conclusões

As equações que descrevem a dinâmica das partículas em uma TQC são em geral não lineares e acopladas. Na maioria dos casos devemos nos valer de métodos perturbativos para solucionarmos este tipo de problema. Os resultados obtidos são contaminados com divergências que aparecem nas integrais de Feynman. Para que possamos fazer previsões devemos interpretar adequadamente as amplitudes, de modo que seja possível contornar os problemas gerados pelos infinitos. Nesse ponto somos levados a usar regularizações. O método mais utilizado para isso é a regularização dimensional. Neste método a teoria é estendida para uma dimensão contínua e complexa, então os cálculos são efetuados e os resultados são expandidos em torno da dimensão espaço-temporal de interesse. As limitações desse método estão associadas a impossibilidade de estendermos o tensor de Levi-Civita para uma dimensão contínua e complexa. Isso impossibilita o uso deste método para investigações em dimensões ímpares. Outros métodos de regularização consistem em modificar as integrais de Feynman de modo que estas fiquem finitas e então efetuar os cálculos. Com este fim é necessário colocarmos uma função regularizadora dentro das integrais, entretanto os resultados dependeriam da função escolhida. Não há um método de regularização que possa ser aplicado sem restrições e que seja consistente.

Nessa investigação adotamos um procedimento consistente e sem restrições de aplicabilidade. Resolvemos um problema simples mas crucial para a EDQ₅. Através de uma identidade para o propagador separamos completamente as partes convergentes e divergentes de modo que não apareceu nenhuma quantidade física com os termos divergentes. Além disso, as divergências foram organizadas em objetos que foram identificados posteriormente como termos de superfície. Todos os passos efetuados são consequências diretas

do emprego das regras de Feynman. Assim, o uso de regularizações é evitado durante todo o procedimento. No final vemos que os métodos de regularização podem ser classificados em dois tipos: aqueles em que os termos de superfície se anulam e aqueles em que isso não acontece. Se assumirmos que apenas a primeira classe faz sentido, então as amplitudes se tornam preditivas uma vez que não há dependência das escolhas feitas em passos intermediários. Restam apenas objetos divergentes irreduzíveis que podem ser absorvidos através da renormalização sem ser necessária a especificação de um método de regularização, como vimos no caso considerado aqui.

Os resultados obtidos na presente investigação nos mostram que é possível renormalizar a QED pentadimensional ao nível um *loop*. Para tal é necessário calcular as amplitudes; a auto-energia do elétron, a correção de vértice, o decaimento fotônico e o espalhamento elástico de dois fótons, amplitudes ao nível um *loop* de aproximação com contagem de potências indicando divergência, verificar a consistência dos resultados e proceder a renormalização. Trabalho este que se encontra presentemente em andamento.

Referências Bibliográficas

- [1] BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G.; **A Systematization for One-Loop 4D Feynman Integrals-Different Species of Massive Fields**. Journal of Modern Physics, 2012, 3, 1408-1449.
- [2] BATTISTEL, O. A.; FONSECA, M. V. S.; DALLABONA, G.; **Anomalies in finite amplitudes: Two-dimensional single axial-vector triangle**. Physical Review D 85, 085007 (2012).
- [3] BATTISTEL, O. A.; **Uma estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências em TQC**. PhD Thesis: UFMG, 1999.
- [4] CARDOSO, L. T. **Estudo das divergências em Eletrodinâmica Quântica ao nível um laço com a utilização da Regularização Implícita**. Dissertação de Mestrado: CBPf, 2011.
- [5] DE AFARO, V. et al. **Currents in Hadron Physics**. Amsterdam: North-Holland, 1973.
- [6] DE WITT, B.; SMITH, J. **Field Theory in Particle Physics**. Amsterdam, North-Holland Physics Publishing, 1986.
- [7] FONSECA, M. V. S.; **Cálculos perturbativos, preditivos: Aspectos dimensionais da consistência em cálculos perturbativos de T.Q.C e de anomalias**. Tese de doutorado: CBPf, 2012.
- [8] GAMBIM, E. **Consistência no cálculo perturbativo: a Eletrodinâmica Quântica e a anomalia AVV**. Dissertação de Mestrado: UFSM, 2004.
- [9] GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica de Campos**. São Paulo: EDUSP, 2002.

- [10] HATFIELD, B. **Quantum Field Theory of Point Particles and Strings**. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] KAKU, M. **Quantum Field Theory - A Modern Introduction**. Oxford: Oxford University Press, 1993.
- [12] KINOSHITA, T. **Quantum Electrodynamics**. Singapore, World Scientific, 1990.
- [13] MAICÁ, A. E. **Aspectos dimensionais da consistência de cálculos perturbativos em Teoria Quântica de Campos**. Dissertação de Mestrado: CBPf, 2010.
- [14] MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum Field Theory**. Cambridge: Cambridge University Press 1984.
- [15] PAULI, W.; VILLARS, F. **On the invariant regularization in relativistic quantum theory**. Rev. Mod. Phys. 21, 439, 1949.
- [16] SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. Massachusetts: Addison Wesley reading, 1987.
- [17] STAUDT, E. **Consistência do cálculo perturbativo preditivo tridimensional em Teoria Quântica de Campos: a Eletrodinâmica Quântica**. Dissertação de Mestrado: UFSM, 2005.
- [18] TONG, D. **Quantum Field Theory**. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. Vols. I à III. Cambridge: Cambridge University Press 1995.