

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Juliano Rafael Andrade

**ESTUDO DA TÉCNICA DE RÁDIO OCULTAÇÃO PARA  
SENSORIAMENTO REMOTO DA ATMOSFERA TERRESTRE**

Santa Maria, RS  
2021

**Juliano Rafael Andrade**

**ESTUDO DA TÉCNICA DE RÁDIO OCULTAÇÃO PARA SENSORIAMENTO REMOTO  
DA ATMOSFERA TERRESTRE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Elétrica**.

ORIENTADOR: Prof. Natanael Rodrigues Gomes

Santa Maria, RS  
2021



Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Tecnologia  
Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica



**DEFESA PÚBLICA: TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**NOME DO ALUNO:**..... Juliano Rafael Andrade .....

**TÍTULO DO TRABALHO:**..... Estudo da Técnica de Rádio Ocultação para Sensoriamento Remoto da  
Atmosfera Terrestre .....

**BANCA EXAMINADORA**

**PROFESSOR ORIENTADOR:** ( Natanael Rodrigues Gomes ..... ) **NOTA:** 9,0 ..  
(PRESIDENTE)

ASSINATURA.....

**SEGUNDO EXAMINADOR:** ( MSc em Engenharia Elétrica Vinicius Ludwig Barbosa ..... ) **NOTA:** 9,0 ..

ASSINATURA.....

**TERCEIRO EXAMINADOR:** ( MSc em Meteorologia Ivette Hernández Baños ..... ) **NOTA:** 9,0 ..

ASSINATURA.....

**MÉDIA FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** (..... 9,0 .....

**VISTO DO COORDENADOR DO TCC:**.....

SANTA MARIA, 17 DE Fevereiro DE 2021 .....

## DEDICATÓRIA

*Aos meus pais pelo apoio que sempre me deram.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para geração deste trabalho.*

*Se estudar fosse fácil todo mundo era Dr.*

*(Pardal)*

## RESUMO

# ESTUDO DA TÉCNICA DE RÁDIO OCULTAÇÃO PARA SENSORIAMENTO REMOTO DA ATMOSFERA TERRESTRE

AUTOR: Juliano Rafael Andrade

ORIENTADOR: Natanael Rodrigues Gomes

A técnica de rádio ocultação de sinais do sistema global de navegação por satélites, GNSS (*Global Navigation Satellite System*), possibilita obtenção de informações a cerca do estado da atmosfera terrestre, através da aquisição de dados de posição dos satélites, fase e desvio Doppler do sinal ao transitar pela atmosfera da Terra. Posteriormente perfis verticais de refratividade, ou refração, e ângulo de curvatura são obtidos por meio do processamento destes dados. Em um segundo nível de processamento pode-se obter perfis de temperatura, pressão e Vapor d'água. Esses perfis possuem potencial para a melhoria da qualidade das previsões do tempo a curto prazo, sendo uma das técnicas mais relevantes baseadas em satélites para reduzir o erro de previsões dos sistemas PNT (*Previsão Numérica de Tempo*). De outra forma, veem crescendo o número de satélites *Low Earth Orbit* dedicados a rádio ocultação, em especial nos próximos anos com os recursos da iniciativa privada no setor de meteorologia por satélite. Assim sendo, o estudo desta técnica torna-se indispensável para aproveitar de forma eficiente a quantidade e a qualidade desses dados, bem como mensurar o impacto dos mesmos no sistemas PNT e outras aplicações. Desta forma o objetivo deste trabalho é estudar a técnica de radio ocultação de sinais GNSS, para isso faz-se uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos do área, e posteriormente a implementação da transformada de Abel para obtenção desses perfis.

**Palavras-chave:** Rádio ocultação GNSS. Ângulo de curvatura. Perfis Atmosféricos. Previsão Numérica de Tempo. Satélite MetOp-A/B.

## ABSTRACT

### REMOTELY SENSING THE EARTH'S ATMOSPHERE: RADIO OCCULTATION TECHNIQUE

AUTHOR: Juliano Rafael Andrade  
ADVISOR: Natanael Rodrigues Gomes

The technique of radio occultation signals from the global navigation satellite system (GNSS) allows obtaining information about the state of the Earth's atmosphere through the acquisition of satellite position data, phase and Doppler effect of the signal when transiting the Earth's atmosphere. Later, vertical refractivity or refractive profiles and bending angle are obtained by processing this data. In a second processing level, temperature, pressure and water vapor profiles can be obtained. These profiles have the potential to improve the quality of short-term weather forecasts, being one of the most relevant satellite-based techniques to reduce the forecasting error of NWP systems. Moreover, the number of Low Earth Orbit satellites dedicated to radio occultation is growing, especially in the coming years with the resources of private initiative in the satellite weather sector. Therefore, the study of this technique becomes indispensable to efficiently take advantage of the quantity and quality of this data, as well as to measure its impact on Numerical Weather Prediction systems and other applications. Thus the objective of this work is to study the technique of radio occultation of GNSS signals, for this purpose a bibliographical review of the main works in the area is made, and later the implementation of Abel's transformation to obtain these profiles.

**Keywords:** Radio Occultation GNSS. Bending Angle. Atmospheric Profiles. Prediction of Numerical Weather. Satellite MetOp-A/B.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ocultações de GRAS/Metop-A/B 01/12/20 .....	14
Figura 1.2 – Visão geral de um evento de rádio ocultação (GNSS-RO) .....	15
Figura 1.3 – Níveis de processamento de dados para a Rádio Ocultação GNSS (GNSS-RO) .....	18
Figura 2.1 – Geometria de uma ocultação. ....	20
Figura 2.2 – Refração no percurso do raio: Neste esboço o índice de refração aumenta com a altura, as retas tracejadas representam as assíntotas, e o círculo tracejado a primeira camada após a atmosfera. ....	22
Figura 2.3 – Geometria do percurso do raio .....	27
Figura 3.1 – Solução da Eq. 3.6 para uma atmosfera com $H = 8 \text{ km}$ , $N_E = 300$ (linha vermelha), uma atmosfera com $H = 6 \text{ km}$ , $N_E = 400$ (linha azul), e uma com $\mu = 1$ (linha tracejada). ....	33
Figura 3.2 – Percurso do raio .....	34
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo para obter do ângulo de curvatura para um perfil exponencial. ....	40
Figura 4.2 – Fluxograma do algoritmo para obter o perfil de refração. ....	40
Figura 4.3 – Ângulo de curvatura e perfil de refração: $N_E = 350$ , $H_E = 8 \text{ km}$ . ....	41
Figura 4.4 – Fluxograma do algoritmo para obtenção do ângulo de curvatura .....	42
Figura 4.5 – Ângulo de Curvatura para Metop-B <i>Prf_MTPB.2015.074.01.00.G12_2016.0120</i> 43	43
Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo para obtenção do Perfil de refração .....	43
Figura 4.7 – Perfil de Refratividade para <i>atmPrf_MTPB.2015.074.01.00.G12_2016.0120</i> 44	44
Figura A.1 – Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas. ....	50
Figura A.2 – Inclinação da reta tangente. ....	51
Figura B.1 – Ilustração da Regra de Bouguer .....	54

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GPS	<i>Global Positioning System (EUA)</i>
ATS-6	<i>Applications Technology Satellite-6</i>
CHAMP	<i>Challenging Minisatellite Payload</i>
COMPASS/BeiDou	<i>Global Navigation Satellite System of China</i>
COSMIC	<i>Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, and Climate</i>
ECMWF	<i>European Centre for Medium-Range Weather Forecasting</i>
EUMETSAT	<i>European Organisation for the Exploitation of Meteorological Satellites</i>
EQUARS	<i>Equatorial Atmosphere Research Satellite</i>
GALILEO	<i>European GNSS constellation project</i>
GO	<i>Geometric optics</i>
GPS/MET	<i>Global Positioning System/Meteorology</i>
GRACE	<i>Gravity Recovery And Climate Experiment</i>
GRAS	<i>GNSS Receiver for Atmospheric Sounding</i>
JPL	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>
MetOp	<i>Meteorological Operational Polar satellite</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NOAA	<i>National Oceanic and Atmospheric Administration</i>
NetCDF	<i>Network Common Data Form</i>
NWP	<i>Numerical Weather Prediction</i>
PNT	<i>Previsão Numérica de Tempo</i>
SAF	<i>Satellite Application Facility (EUMETSAT)</i>
ROM SAF	<i>Radio Occultation Meteorology SAF</i>
GRAS SAF	<i>ROM SAF Former name</i>
RO	<i>Radio Occultation</i>
SAC-C	<i>Scientific Application Satellite - C</i>
SENH	<i>Solid Earth and Natural Hazards</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_m$	Parâmetro de impacto para o m-ésimo percurso do raio
$\alpha$	Ângulo de curvatura
$c$	Velocidade da luz no vácuo
$e_T$	Vetor unitário representando a direção do caminho a ser percorrido pelo sinal entre o transmissor e o receptor
$e_R$	vetor unitário representando a direção do caminho a ser percorrido pelo sinal entre o receptor e o transmissor
$f$	Frequência da portadora do GNSS
$f_d$	Frequência Doppler
$H$	Altura de escala
$h$	Altitude
$i_{m,n}$	Ângulo de incidência para o m-ésimo raio na n-ésima fronteira
$j$	Ângulo de refração para o m-ésimo raio na n-ésima fronteira
$k$	Quantidade de camadas
$\lambda$	Comprimento de onda eletromagnética
$L1$	Portadora GPS, 1575,42 MHz
$L2$	Portadora GPS, 1227,60 MHz
$\psi_{m,1}$	Ângulo cujo o m-ésimo raio deve ser curvado, a partir da primeira camada para que passe pelo ponto de tangência na m-ésima camada
$N$	Índice de refatividade
$N_E$	Refratividade na superfície da Terra
$\psi_e$	Densidade de elétrons
$\varphi$	Ângulo polar
$P$	Pressão atmosférica
$P_W$	Pressão parcial do vapor d'água
$R_E$	Raio da Terra
$r_{Om}$	Raio de ocultação/Raio Tangente
$r_t$	Raio de ocultação/Raio Tangente
$r$	Raio da camada

$r_T$	Raio do transmissor
$r_R$	Raio do receptor
$T$	Temperatura absoluta
$v$	Velocidade da Luz em um meio
$W$	Água líquida

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
1.1	PROBLEMA.....	15
1.2	DELIMITAÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO .....	16
1.3	JUSTIFICATIVA.....	16
1.4	ESTRUTURA DO DOCUMENTO.....	18
<b>2</b>	<b>OBTENÇÃO DO ÂNGULO DE CURVATURA E DO PERFIL DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO</b> .....	<b>19</b>
2.1	VISÃO GERAL DA RÁDIO OCULTAÇÃO .....	19
2.2	TÉCNICA DE CÁLCULO DO ÂNGULO DE CURVATURA .....	21
2.2.1	<b>Determinação de <math>\mu</math> e <math>r</math> para cada camada</b> .....	<b>24</b>
2.3	RELAÇÃO DO ÂNGULO DE CURVATURA COM O ÍNDICE DE REFRAÇÃO ....	26
2.3.1	<b>Obtenção do Perfil do Índice de Refração</b> .....	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA DE ABEL</b> .....	<b>31</b>
3.1	VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE IMPACTO E ÍNDICE DE REFRAÇÃO.....	31
3.2	ÂNGULO DA CURVATURA DO PERCURSO A PARTIR DE UM SISTEMA DE COORDENADAS POLARES .....	33
3.3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	36
3.3.1	<b>Integração Direta</b> .....	<b>36</b>
3.3.2	<b>Integração Inversa</b> .....	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>39</b>
4.1	PERFIL EXPONENCIAL .....	39
4.2	COMPARAÇÃO COM DADOS ATMPRF .....	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE A – OBTENDO A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE</b> .....	<b>50</b>
	<b>APÊNDICE B – REGRA DE BOUGUER</b> .....	<b>53</b>
	<b>APÊNDICE C – CÁLCULO DIFERENCIAL DO ÂNGULO DE INCIDÊNCIA <math>I</math> ...</b>	<b>55</b>
	<b>APÊNDICE D – CÁLCULO DIFERENCIAL DE <math>\varphi</math></b> .....	<b>56</b>
	<b>APÊNDICE E – CÁLCULO DIFERENCIAL DE <math>\alpha</math></b> .....	<b>57</b>
	<b>APÊNDICE F – CÁLCULO PARA OBTENÇÃO ÂNGULO DA CURVATURA DO PERCURSO A PARTIR UM SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.....</b>	<b>58</b>
	<b>APÊNDICE G – CÓDIGOS USADOS</b> .....	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE H – TRANSFORMADA INVERSA</b> .....	<b>69</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Quando a luz emitida por um corpo celeste “A” deixa de ser vista de um corpo “B” em razão da sobreposição de um corpo “C”, diz-se ter ocorrido uma Ocultação. Durante um evento de Ocultação, feixes de luz são propagados através de um meio, sendo este o vácuo ou a atmosfera do corpo “C”. Em vácuo, a amplitude (intensidade) luminosa é atenuada proporcionalmente à distância, sob a suposição de uma *fonte pontual*, que emite luz *isotropicamente* (HALLIDAY; RESNIZKY; WALKER, 2010),

$$I = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}} = \frac{P_s}{4 \cdot \pi \cdot r^2}. \quad (1.1)$$

em que  $P_s$  é a potência ou a taxa de energia emitida pela fonte e  $4 \cdot \pi \cdot r^2$  é a área da superfície esférica.

No caso de uma atmosfera, as modificações observadas no sinal, atrasos e desvios (curvatura) adicionados no percurso de propagação da luz, possibilitam a caracterização das condições e composições de tal atmosfera. Essa intensidade luminosa é atenuada de acordo com a *lei de Beer*

$$I = I_0 \cdot \exp(-k \cdot x), \quad (1.2)$$

na qual  $I_0$  é a intensidade do raio, ou do feixe incidente,  $k$  o chamado *coeficiente de atenuação*, é próprio do meio e do comprimento de onda da radiação e  $x$  é a distância em metros.

O fenômeno físico de maior relevância nesse evento é o índice de refração, pois varia a medida que o raio adentra na atmosfera do corpo “C”. Em uma atmosfera cujo o índice de refração decresce com a altitude, a luz é refratada por um ângulo cada vez maior à medida que o raio de luz aproxima-se da superfície do corpo “C”. Mais detalhes sobre eventos de ocultação podem ser encontrados em (BAÑOS, 2017 apud ELLIOT, 1979).

Por meio do evento de ocultação, foram realizadas sondagens atmosféricas em planetas do sistema solar. Posteriormente com a invenção dos satélites artificiais a técnica foi aprimorada, e passou-se a utilizar os sinais eletromagnéticos, pois estes são igualmente flexionados e atenuados ao passar por um meio que não o vácuo. Os primeiros experimentos de Rádio Ocultação, (RO), foram desenvolvidos na década de 1960, em conjunto com as primeiras viagens espaciais desenvolvidas pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), as missões *Mariners 3, 4 e 5*, em uma parceria entre cientistas da Universidade de Stanford e do JPL (*Jet Propulsion Laboratory*) se apontou um caminho para essas investigações através da extração de perfis de refração (KURSINSKY, 1997).

Na atmosfera terrestre, o índice de refração é muito próximo da unidade, na ordem de 1,0003. Assim para estudos das propriedades atmosféricas é conveniente expressá-lo em função de outro parâmetro chamado de refração. Neste contexto, portanto, um

perfil de refração é construído a partir de uma sequência de medidas de sinais, amplitude e fase, emitidos por um transmissor, os quais ao passarem através de uma atmosfera são desviados/curvados devido a refração, até serem capturados por um receptor. A partir dessas medições é possível usando a transformada de Abel, direta e inversa, calcular uma sequência de valores de ângulo de curvatura e índice de refração, em diferentes altitudes, permitindo traçar um perfil de refração da atmosfera.

Em julho de 1975 obteve-se a primeira medição de RO da atmosfera da Terra (RANGASWAMY, 1976) por meio da missão Apollo-Soyuz utilizando o satélite geoestacionário ATS-6 (*Applications Technology Satellite-6*), entretanto o custo elevado para implementar um sistema de aquisição de dados de RO da atmosfera terrestre inibiu o uso da técnica por quase duas décadas. Com o surgimento do GPS (*Global Positioning System*) em 1995, foram retomados os experimentos aplicados à atmosfera da Terra. Em princípio com receptores situados na superfície da Terra e posteriormente colocando estes receptores à bordo de um satélite LEO (*Low-Earth Orbit*). Dessa forma, nascia a técnica GNSS-RO (*Global Navigation Satellite System Radio Occultation*), a qual utiliza sinais do sistema GNSS para obter informações das camadas atmosféricas da Terra (KURSINSKY, 1997), (KURSINSKI et al., 2001).

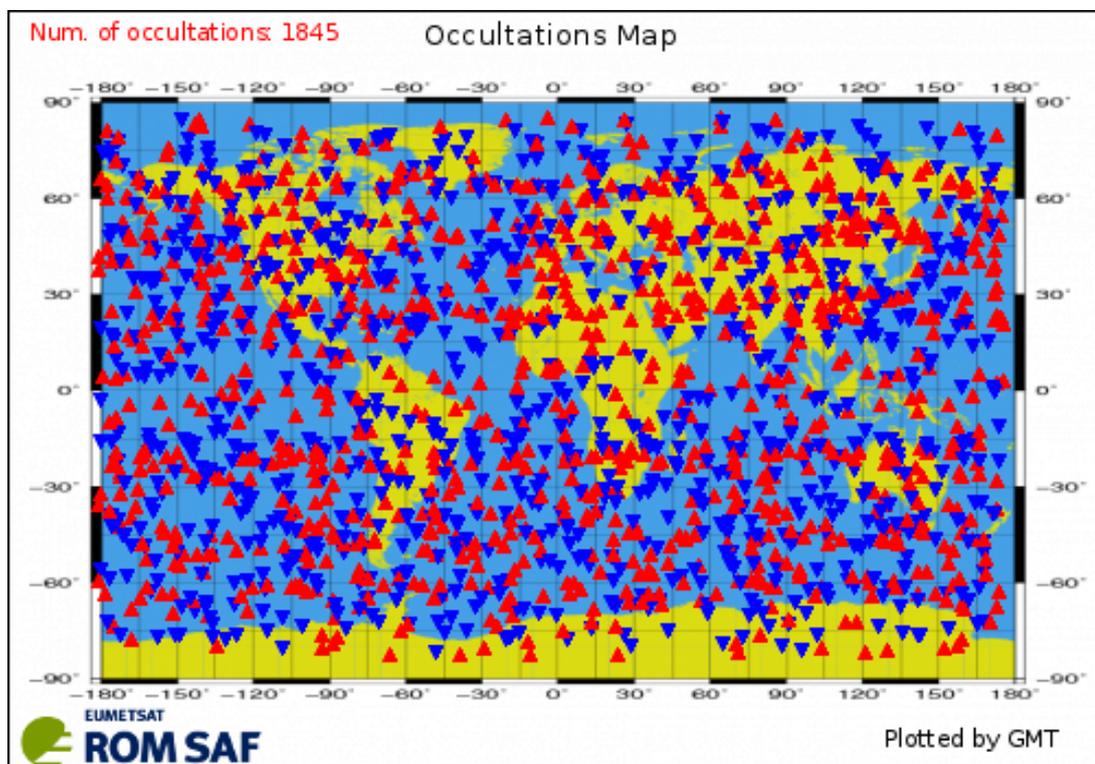
Uma Rádio Ocultação ocorre quando um satélite da constelação GNSS perde sua linha de visada ao satélite LEO com o qual tem estabelecido um enlace de comunicação. A perda de visada é uma consequência da trajetória de ambos os satélites e do posicionamento da terra entre transmissor e receptor desses satélites, além da atenuação do sinal pela maior densidade da atmosfera nas camadas próximas à superfície. (BAÑOS, 2017). Essa ocultação ocorre de duas formas: no modo descendente, quando o sinal decai de um determinado nível de potência ao nível de ruído, e no modo ascendente, quando o oposto é verificado, ou seja, o sinal cresce a partir do nível de ruído até um determinado valor de potência. O efeito dos elementos que compõem a atmosfera é observado na variação do índice de refração e no atraso inseridos na propagação do sinal no percurso entre os satélites (BAÑOS, 2017 apud BEVIS et al., 1992).

A primeira missão de GNSS-RO ocorreu em Abril de 1995, com o lançamento do satélite meteorológico GPS/MET (HAJJ et al., 2002). A missão coletou dados até Fevereiro de 1997 e validou o conceito de rádio ocultação aplicado à atmosfera terrestre. Posteriormente várias missões foram lançadas mundo afora entre estas, o satélite alemão CHAMP (*Challenging Minisatellite Payload*) teve seu lançamento em julho de 2000 (WICKERT et al., 2001) ficando em operação até 2010. A Argentina lançou seu satélite LEO chamado SAC-C (*Scientific Application Satellite-C*) em novembro de 2000 o qual ficou em operação até o ano de 2013, a missão GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) faz parte do programa SENH (*Solid Earth and Natural Hazards*) da NASA em parceria com o *Deutsche Forschungsanstalt für Luft-und Raumf (DLR)* foi lançada em 2003 (HEALY et al., 2007) todavia encontra-se ativa, seguida pelo MetOp-A e no ano seguinte o TerraSAR-X

(BEYERLE et al., 2011), os quais ainda encontram-se em operação.

A série MetOp, constituída de três satélites, é a contribuição europeia para um empreendimento cooperativo com os Estados Unidos dedicado a melhorar as previsões meteorológicas e monitorar o clima da Terra. O MetOp-A foi lançado em 19 de outubro de 2006. MetOp-B foi lançado em 17 de setembro de 2012 e MetOp-C juntou-se a eles em órbita em 7 de novembro de 2018 (ESA, 2021). A Figura 1.1 é um mapa das ocultações provenientes da missão Metop-A/B das 00:00 horas do dia 01/12/2020 até às 23:59, compreendendo, portanto, um período de 24 horas.

Figura 1.1 – Ocultações de GRAS/Metop-A/B 01/12/20



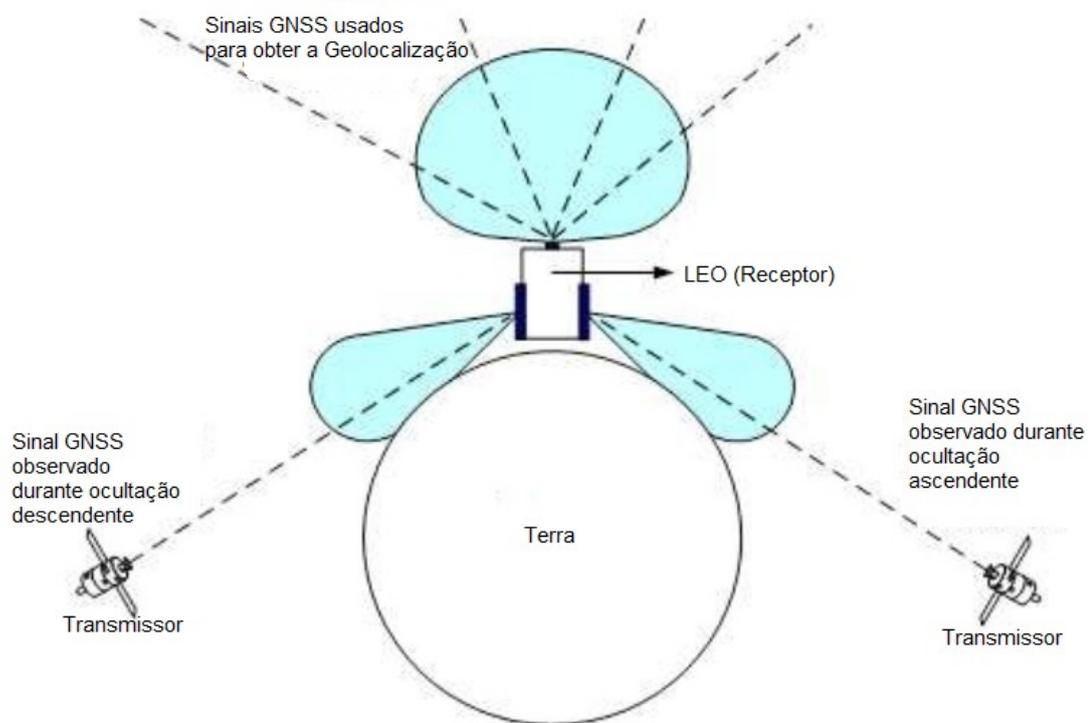
Fonte: ROM SAF

O Brasil lançará um satélite LEO que será o EQUARS (*Equatorial Atmosphere Research Satellite*) (INPE, 2020) com o qual se pretende fazer parte da constelação COSMIC. A Rádio Ocultação que utiliza sinais GNSS é uma técnica de sensoriamento remoto, desenvolvida para medir e caracterizar a atmosfera da Terra com base nas mudanças observadas no sinal GNSS durante um evento de ocultação (KURSINSKY, 1997), e utiliza como princípio o fenômeno de ocultação descrito anteriormente. A Figura 1.2 apresenta uma visão geral de um evento de RO, onde sinais eletromagnéticos transmitidos na banda L, frequências  $L_1 = 1575,42$  MHz e  $L_2 = 1227,6$  MHz, por satélites GNSS (transmissor), são desviados pela atmosfera da Terra e capturados por satélites LEO (receptor).

A aplicação da técnica de GNSS-RO fornece uma abordagem para o monitoramento em escala global dos perfis troposféricos/estratosféricos de temperatura, pressão e

umidade com alta resolução vertical, bem como perfis de densidade de elétrons na ionosfera, propriedades de cintilação e monitoramento de atividades geomagnéticas (RASCH, 2014). A GNSS-RO possui capacidade de operação em qualquer condição climática com alta resolução vertical (BARBOSA, 2019) e a NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) tem a meta de adquirir 20000 sondagens por dia, sendo que destas, 4000 ocultações são provenientes da segunda constelação do COSMIC-2 lançados em 2019 (Space News, 2020).

Figura 1.2 – Visão geral de um evento de rádio ocultação (GNSS-RO)



Fonte: Adaptado de (RASCH, 2014)

## 1.1 PROBLEMA

A recuperação de parâmetros atmosféricos desses perfis depende de medições precisas da amplitude e fase do sinal GNSS do transmissor amostradas no receptor e, da posição e velocidade do satélite em função do tempo. O sistema/instrumento de RO que realiza essas medidas, e processamento, é o GRAS (*GNSS Receiver for Atmospheric Sounding*), o qual viaja à bordo de um satélite LEO e rastreia sinais GNSS, ascendentes e/ou descendentes, veja a Figura 1.2, para juntamente com a geometria do problema derivar os perfis de ângulo de curvatura.

O GRAS é um instrumento/sistema receptor de sinais GNSS, direcionado de forma a monitorar as frentes de ondas que tangenciam a atmosfera terrestre. Este instrumento

mede o atraso de tempo dos sinais GNSS refratados enquanto o percurso do sinal contorna a atmosfera da Terra, no caminho a partir do satélite GNSS (transmissor) para o LEO (receptor). O dispositivo pode, receber sinais de cada satélite GNSS até 29 vezes ao dia (EUMETSAT, 2021).

Ao calcular precisamente a posição e velocidade do LEO e do satélite GNSS, o atraso de tempo medido é convertido para o ângulo de curvatura da trajetória do raio. Portanto, medindo o atraso de fase da portadora de sinal em duas frequências diferentes da banda L, faixa de frequências reservada a comunicação via satélite, o ângulo de curvatura devido a atmosfera neutra (isto é, com o desconto da contribuição da ionosfera) pode ser derivado (RASCH, 2014). Posteriormente, é possível determinar o perfil do índice de refração, ou refratividade, da atmosfera, e finalmente usando relações físicas fundamentais, como a relação entre refratividade e densidade do ar seco, a equação de estado e a equação de equilíbrio hidrostático os perfis de temperatura, pressão e de vapor de água (RASCH, 2014). Os perfis resultantes são funções de altura media acima do nível do mar, mais detalhes sobre o receptor GRAS podem ser encontrados em (EUMETSAT, 2021) e (BONNEDAL; CHRISTENSEN; BERG, 2010).

## 1.2 DELIMITAÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

O objetivo desta pesquisa é o estudo da técnica de Rádio Ocultação e sua aplicação para estimar o perfil de refratividade da atmosfera da Terra. Emprega-se para isso a transformada de Abel, uma transformada integral utilizada para funções que apresentam simetria esférica ou axial (Wikiwand, 2020).

Os resultados obtidos são comparados com aqueles apresentados na literatura e medições para que se possa avaliar a utilização desta ferramenta em análises mais aprofundadas, como por exemplo expandir o conhecimento sobre a dinâmica da ionosfera, a redução do *bias* nas medições assimiladas em sistema PNT, o monitoramento de cintilações ionosféricas baseadas em bolhas de plasma equatorial na camada F, nuvens esporádicas na camada E, e outras aplicações de GNSS-RO (BARBOSA, 2019).

## 1.3 JUSTIFICATIVA

Nos primeiros dias da operação do GPS, o atraso observado nos sinais nas estações terrestres devido às condições da atmosfera (por exemplo, vapor de água) indicava a oportunidade para outra aplicação viável: a medição da distribuição vertical das propriedades físicas da atmosfera para auxiliar a pesquisa em química atmosférica, previsão do tempo e monitoramento global das mudanças climáticas (BARBOSA, 2019 apud BEVIS et al., 1992).

Modelos matemáticos de previsão de tempo são uma aproximação do sistema real,

assim há uma dissociação entre a previsão e a evolução do sistema real (Velho, H. F. de C.; Cintra, R. S. C.; Furtado, H. C. M. , 2007). Portanto, é preciso “forçar” ou “induzir” o modelo de previsão a se aproximar da realidade. A assimilação de dados é o conjunto de técnicas empregadas para realizar adequadamente a inserção de dados de observVLB2019. Essa técnica também poderia contribuir para a investigação da camada externa da atmosfera, a ionosfera, pois a propagação por essa região também contribui parcialmente no atraso do sinal (COCO, 1991 apud BARBOSA, 2019).

Modelos matemáticos de previsão de tempo tão-somente são uma aproximação do sistema real, assim há uma dissociação entre a previsão e a evolução do sistema real (Velho, H. F. de C.; Cintra, R. S. C.; Furtado, H. C. M. , 2007). Portanto, é preciso “forçar” ou “induzir” o modelo de previsão a se aproximar da realidade. A assimilação de dados é o conjunto de técnicas empregadas para realizar adequadamente a inserção de dados de observação num sistema operacional de previsão. Os dados oferecidos pela técnica de rádio ocultação estão entre as cinco técnicas com maior impacto, seja na análise ou nas previsões, no processo de assimilação de dados da atmosfera para o sistema de Previsão Numérica de Tempo (PNT) (CARDINALI; HEALY, 2014).

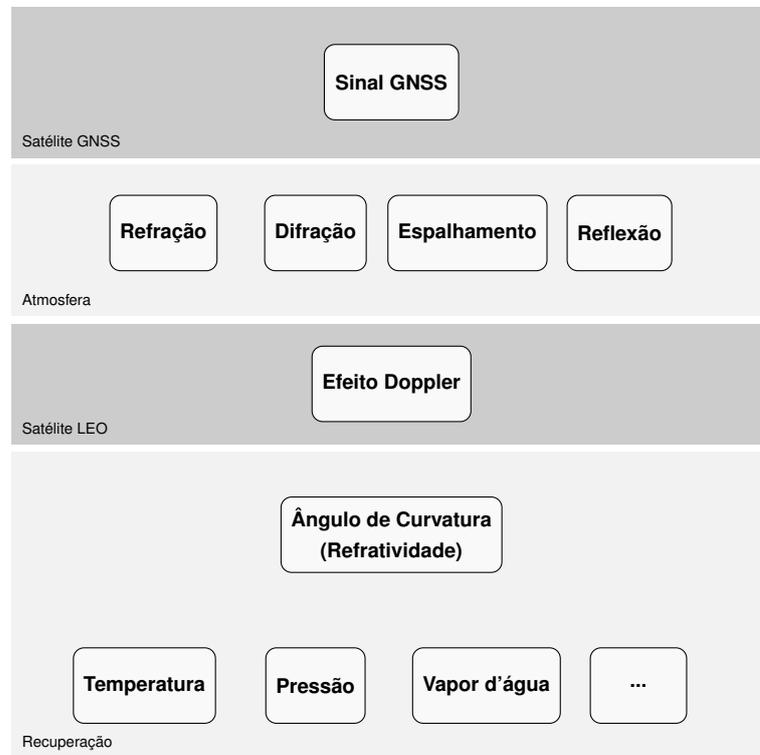
No teu caso, tu assume que o ângulo de curvatura conhecido, mas na verdade ele é obtido a partir da informação de amplitude e, principalmente, fase do sinal GNSS contido em arquivos atmPhs. No teu caso, tu assume que o ângulo de curvatura conhecido, mas na verdade ele é obtido a partir da informação de amplitude e, principalmente, fase do sinal GNSS contido em arquivos atmPhs.

As informações adquiridas por sensoriamento remoto da atmosfera terrestre, empregando a técnica GNSS-RO, requerem várias etapas de processamento. O quadro apresentado na Figura 1.3 resume essas etapas, cujo o objetivo final é a recuperação dos perfis atmosféricos de temperatura, pressão, vapor d'água, etc, obtido das medições de deslocamento Doppler do sinal emitido pelo GNSS, durante um evento de Rádio Ocultação, e adquiridos pelo GRAS no satélite LEO, e também, das posições de ambos os satélites. Estes são os dados iniciais, a partir dos quais é possível calcular, empregando a Transformada de Abel, uma sequência de valores de ângulos de curvatura. Em seguida, por meio da Transformada Inversa de Abel, é obtido o perfil de refração, e conseqüentemente de refratividade, em função da altitude. Finalmente, a partir deste é obtido os demais perfis, e sobre os quais há um maior erro associado em decorrência das etapas de processamento (BAÑOS, 2017).

Os perfis resultantes podem ser assimilados em modelos de previsão meteorológica para melhorar as previsões meteorológicas globais, regionais e locais. Além disso, os perfis atmosféricos muito precisos e estáveis são especialmente adequados para monitorar as mudanças no clima da Terra (EUMETSAT, 2021). Os dados do GNSS-RO são classificados como uma das técnicas mais relevantes baseadas em satélite para reduzir o erro de previsão do tempo a curto prazo, pois foram assimilados nos sistemas de PNT.

Com a disponibilidade de dados ao longo das últimas duas décadas, o monitoramento das mudanças climáticas e as novas análises dos modelos climáticos globais também se beneficiam do GNSS-RO (BARBOSA, 2019).

Figura 1.3 – Níveis de processamento de dados para a Rádio Ocultação GNSS (GNSS-RO)



Fonte: Adaptado de (BARBOSA, 2019)

#### 1.4 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Dada a introdução, composta pela apresentação do tema, definição do problema, justificativa e objetivos, o restante do documento é estruturado da seguinte forma: capítulo 2 é dedicado a descrever como se obtém o ângulo de curvatura e o índice de refração assumindo que o problema apresenta simetria esférica; No capítulo 3 é apresentado uma implementação numérica para o cálculo do ângulo de curvatura e do índice de refração; No capítulo 4 a análise desta implementação, resultados e discussões; E no capítulo 5 apresentam-se as conclusões sobre os resultados obtidos e trabalhos futuros.

## 2 OBTENÇÃO DO ÂNGULO DE CURVATURA E DO PERFIL DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO

A técnica de Rádio Ocultação foi desenvolvida para estudo de atmosferas planetárias do sistema solar por (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971). Estes cientistas foram pioneiros em experimentos de RO, ao aplicarem a técnica para o estudo da atmosfera de Vênus. O êxito nos resultados despertou o interesse de vários outros cientistas, especialmente na área de sensoriamento remoto da atmosfera terrestre. A técnica baseia-se no fato de que a atmosfera da Terra comporta-se como uma lente esférica para sinais cujo o comprimento de onda ( $\lambda$ ) tem a ordem de grandeza de centímetros, refletindo e inserindo atrasos na propagação. O efeito de lente é devido ao decréscimo exponencial da densidade atmosférica com a altitude. Dessa forma, com as posições dos satélites GNSS e LEO, que transmitem e recebem os sinais respectivamente, bem conhecidas, este atraso pode ser mensurado, determinando-se a refração Doppler do sinal, que por sua vez é utilizado para estimar a refratividade em função da altitude. Esta seção trata de uma revisão bibliográfica dos conceitos da técnica de RO, compreendendo um modelo para estimar o *índice de refração* e o *ângulo de curvatura* da atmosfera da Terra.

### 2.1 VISÃO GERAL DA RÁDIO OCULTAÇÃO

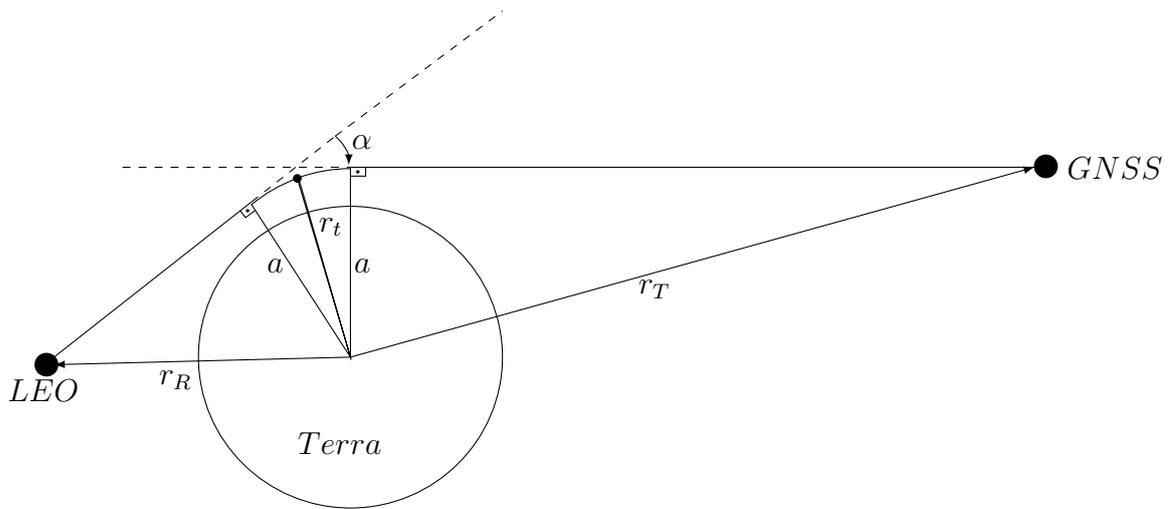
Sistemas Globais de Navegação por Satélite, GNSS, são sistemas capazes de proporcionar a geo-localização a nível global usando uma constelação de satélites. Atualmente, o serviço é oferecido por diferentes sistemas: o Norte Americano GPS, O Russo GLONASS, o Europeu GALILEO e o Chinês COMPASS/BeiDou. O sistema GPS (precursor) foi inicialmente desenvolvido com fins militares de auxílio à navegação, todavia a sociedade civil aproveitou suas potencialidades para muitas aplicações adicionais de alta precisão, dentre as quais o estudo da atmosfera (KURSINSKY, 1997).

Os satélites do GNSS estão posicionados em órbitas circulares, inclinadas, com altitudes superiores à 19000 km, e um período entre 11 e 14 horas. Já os satélites LEO estão postos em órbitas circulares, quase polares, com altitudes que variam de 200 a 2000 km, e um período entre 1 a 3 horas. Uma representação simplificada da geometria da ocultação é apresentado na Figura 2.1.

Da perspectiva de observação a partir de um satélite LEO, uma ocultação ocorre sempre que um satélite do GNSS surge ou se põe e o caminho do raio (onda eletromagnética) atravessa diferentes camadas atmosféricas da Terra. As ocultações GNSS-LEO são realizadas no modo de varredura atmosférica, onde a varredura vertical é viabilizada pelo movimento relativo entre os satélites GNSS e LEO, e conseqüentemente, o deslocamento do ponto tangencial  $r_t$  (KURSINSKY, 1997).

Na aproximação pela Óptica Geométrica (GO, *Geometric Optics*), um raio que passa

Figura 2.1 – Geometria de uma ocultação.



Fonte: Autor

pela atmosfera é refratado de acordo com a *Lei de Snell*

$$\mu_1 \cdot \sin i = \mu_2 \cdot \sin j, \quad (2.1)$$

$\mu$  é o índice de refração,  $i$  e  $j$  são os ângulos de incidência e refração respectivamente, devido ao gradiente vertical de densidade do ar, portanto, ao índice de refração ( $\mu = c/v$ ,  $c$  é a velocidade de propagação da luz no vácuo e  $v$  a velocidade de propagação da luz no meio). O efeito da atmosfera pode ser caracterizado por um ângulo de curvatura total ( $\alpha$ ) pelo parâmetro de impacto ( $a$ ) e um raio tangente ( $r_t$ ) (KURSINSKY, 1997) definido na Figura 2.1, ilustra a geometria de um evento de ocultação entre os satélites GNSS e LEO..

O efeito da curvatura atmosférica no sinal GNSS recebido no receptor LEO, pode ser medido como um desvio adicional na frequência Doppler em relação ao esperado para um caminho dada a propagação no vácuo (KURSINSKY, 1997). Os dados de vários transmissores GNSS podem ser usados para estabelecer as posições e velocidades precisas dos satélites GNSS e LEO e para calcular o deslocamento Doppler na ausência de vácuo. A contribuição atmosférica para o deslocamento Doppler é derivada da subtração entre os desvios teórico e medido, que pode ser combinado com o conhecimento da posição e da velocidade do satélite para fornecer uma estimativa do ângulo de curvatura em função do parâmetro de impacto.

Os satélites GNSS transmitem sinais continuamente de forma geral em duas frequências da banda L,  $L_1 = 1575,42$  MHz e  $L_2 = 1227,6$  MHz, cujo o comprimento de onda é de  $\lambda_1 = 19,0425$  cm e  $\lambda_2 = 24,4379$  cm, respectivamente. Nesta esta ordem de grandeza, as ondas atravessam com facilidade as nuvens e gotículas de água, o que é considerado vantajoso nesse processo de obtenção de informações a cerca da atmosfera da Terra sob qualquer condição climática (KURSINSKI et al., 2001).

Para utilizar as informações atmosféricas contidas nesses sinais, um receptor GNSS embarcado no LEO deve ser capaz de medir a fase e a amplitude de ambas as portadoras. A disponibilidade de medições em multi-portadoras é fundamental para realizar a separação das contribuições ionosféricas e da atmosfera neutra (VOROB'EV; KRASIL'NIKOVA, 1994), (SYNDERGAARD, 2000).

## 2.2 TÉCNICA DE CÁLCULO DO ÂNGULO DE CURVATURA

A partir desta seção, até o final deste capítulo, será apresentado o modelo elaborado por (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971), no qual supõe-se uma atmosfera em que o índice de refração aumenta com a altitude. Esta suposição não está de acordo com o comportamento do índice de refração na atmosfera da Terra, na qual o índice de refração decresce com a altura (JIN; JIN; LIU, 2019), mas permite entender o mecanismo de cálculo do ângulo de curvatura “ $\alpha$ ” e do índice de refração “ $\mu$ ”.

Durante as medições das ocultações, a refração nesta atmosfera perturba a frequência e a amplitude de um sinal que se propaga através dela. Estas perturbações podem ser descritas a partir do ângulo de refração  $\alpha$ , e do parâmetro de impacto ( $a$ ). Para fins de simplificação, o planeta pode ser considerado uma esfera perfeita. Neste caso, o parâmetro de impacto é definido como a distância a partir do centro de massa do planeta até a assíntota do percurso do raio (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971).

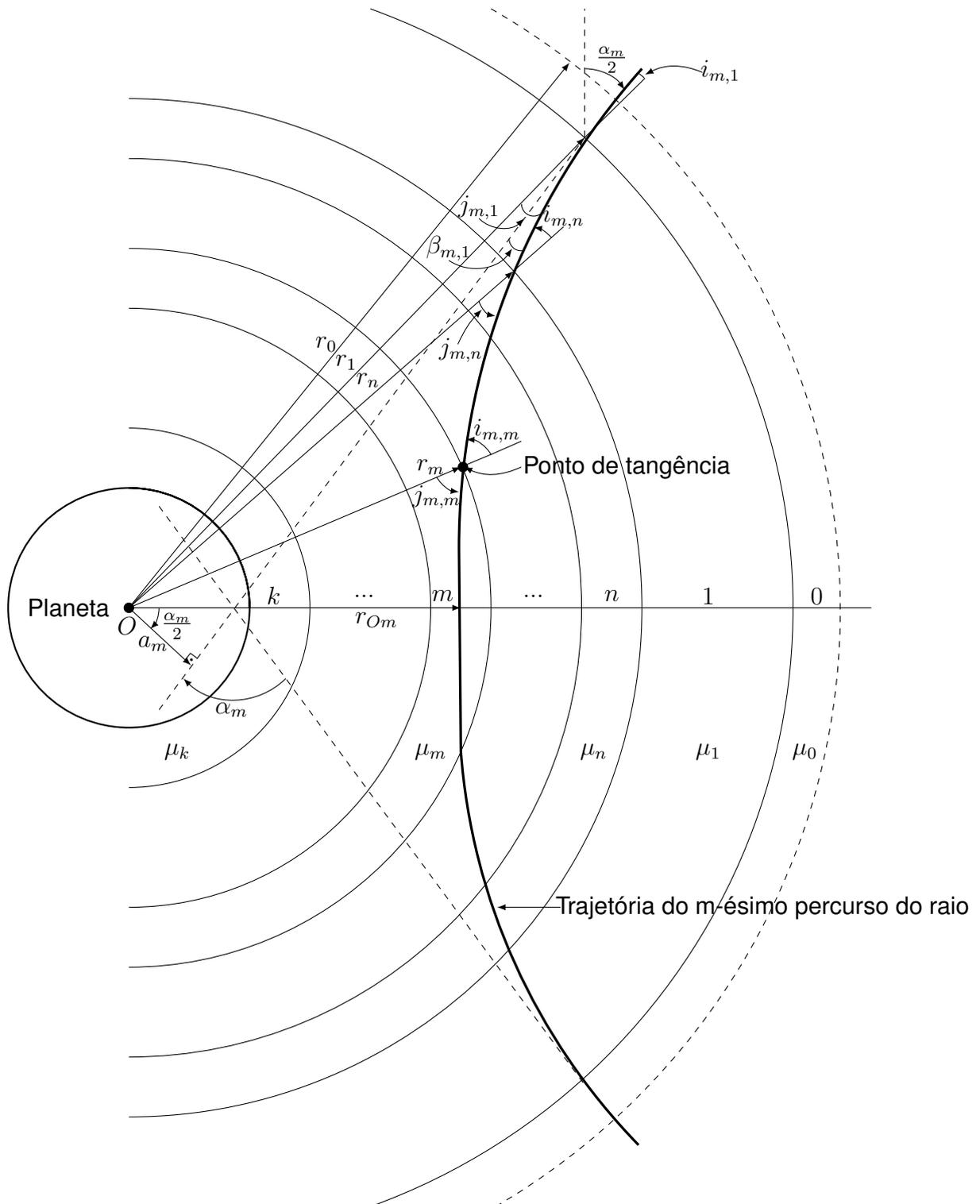
Assumindo que a distribuição da refratividade nesta atmosfera apresenta simetria esférica, a atmosfera é dividida em  $k$  camadas de espessura constante, portanto a função  $\alpha(a)$  consiste de  $k$  pontos, que podem ser determinados a partir de dados de amplitude ou Doppler (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971). A Figura 2.2 é um esboço do percurso de um raio que está sendo refratado nesta atmosfera, e cujas as assíntotas, de entrada e saída, tem a mesma distância  $a$ , que refere-se a menor distância ao centro do planeta. Considerando uma camada  $m$ , para realizar os cálculos, este raio tangencia o centro dessa camada, e esta situação é análoga para outros percursos de raio nas demais camadas.

O raio da camada, referenciado por  $r_{0...k}$ , é a distância a partir do centro da esfera até o limite superior da camada. O índice de refração é indicado por  $\mu_{0...k}$ , logo  $r_m$  e  $\mu_m$  referem-se ao raio e ao índice de refração da camada  $m$ , respectivamente. Pela figura 2.2,  $r_{Om}$ , a distância da origem do sistema de coordenadas, até o ponto de maior aproximação no percurso do raio, ou a distância entre a tangente do raio na  $m$ -ésima camada ao centro da esfera, também referenciado por *raio tangente*, ( $r_t$ ), pode ser relacionado por  $r_m$  e  $r_{m+1}$ ,

$$r_{Om} = r_t = \frac{1}{2} \cdot (r_m + r_{m+1}). \quad (2.2)$$

O rastreamento do percurso do raio, é a técnica aqui empregada para calcular o perfil do índice de refração. Para tanto, é necessário determinar o ângulo de incidência

Figura 2.2 – Refração no percurso do raio: Neste esboço o índice de refração aumenta com a altura, as retas tracejadas representam as assíntotas, e o círculo tracejado a primeira camada após a atmosfera.



Fonte: Adaptado de (FJELDBO; KLIORÉ; ESHLEMAN, 1971)

$i_{m,n}$  e o ângulo de refração  $j_{m,n}$  em cada fronteira entre camadas. O ângulo  $\beta_{m,n}$  é o complemento de  $j_{m,n}$  em relação à  $i_{m,n}$ . O primeiro subscrito, ( $m$ ), refere-se a camada na qual o raio passa tangente ao centro e o segundo subscrito, ( $1\dots n$ ), ao número da fronteira. Empregando a lei dos senos e a *lei de Snell* na fronteira entre as camadas zero e um, e assumindo  $\mu_0 = 1$  na camada zero (vácuo), define-se as seguintes equações para o  $m$ -ésimo raio:

$$a_m = r_1 \cdot \text{sen } i_{m,1}, \quad (2.3)$$

$$\text{sen } i_{m,1} = \mu_1 \cdot \text{sen } j_{m,1}, \quad (2.4)$$

$$\alpha_{m,1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_m + i_{m,1} - j_{m,1}, \quad (2.5)$$

$$\alpha_{m,1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_m - \beta_{m,1}. \quad (2.6)$$

Onde  $a_m$  é o parâmetro de impacto, ou raio assintótico para o  $m$ -ésimo percurso de raio,  $\alpha_{m,1}$  é o ângulo cujo o  $m$ -ésimo raio deve ser curvado, a partir da primeira camada para que passe pelo ponto de tangência na  $m$ -ésima camada, definido na Figura 2.3, e  $\alpha_m$  é o ângulo total da curvatura produzido pela atmosfera ao longo da parte do percurso do raio que passa pela atmosfera, e dado por:

$$\alpha_m = \alpha_{m,1} + \alpha_{m,2} + \dots + \alpha_{m,n-1} + \alpha_{m,n}. \quad (2.7)$$

Generalizando as Equações (2.3)-(2.5) para a  $n$ -ésima fronteira, se tem:

$$r_{n-1} \cdot \text{sen } j_{m,n-1} = r_n \cdot \text{sen } i_{m,n}, \quad (2.8)$$

$$\mu_{n-1} \cdot \text{sen } i_{m,n} = \mu_n \cdot \text{sen } j_{m,n}, \quad (2.9)$$

$$\alpha_{m,n} = \alpha_{m,n-1} + i_{m,n} - j_{m,n}. \quad (2.10)$$

Para  $n = m$ , o ângulo  $\alpha_{m,n}$  é zero e as Equações do raio assumem a forma:

$$r_{m-1} \cdot \text{sen } \dot{j}_{m,m-1} = r_m \cdot \text{sen } \dot{i}_{m,m}, \quad (2.11)$$

$$\mu_{m-1} \cdot \text{sen } \dot{i}_{m,m} = \mu_m \cdot \text{sen } \dot{j}_{m,m}, \quad (2.12)$$

$$0 = \alpha_{m,m-1} + \dot{i}_{m,m} - \dot{j}_{m,m}, \quad (2.13)$$

$$r_{Om} = r_m \cdot \text{sen } \dot{j}_{m,m}. \quad (2.14)$$

Numa atmosfera com perfil do índice de refração conhecido, as equações acima podem ser usadas para rastrear um raio desde a primeira fronteira até o ponto de tangência, isto é até o ponto em que a trajetória do raio tangencia o centro da camada  $m$ . O mesmo procedimento é adotado quando se considera um outro percurso de raio atravessando outra parte da atmosfera (FJELDBO; KLIORÉ; ESHLEMAN, 1971).

### 2.2.1 Determinação de $\mu$ e $r$ para cada camada

A seguir, será descrito como  $\alpha(a)$  e as equações do raio podem ser usadas para determinar  $\mu$  e  $r$  para cada camada. Para os percursos de raios que passam acima da atmosfera, camada zero na Figura 2.2, o ângulo de curvatura é zero e a distância do centro da esfera até o percurso do raio é igual ao parâmetro de impacto. Para esta camada pode-se, portanto, definir

$$r_0 = \frac{1}{2} \cdot (a_0 + a_{-1}), \quad (2.15)$$

onde  $a_0$  e  $a_{-1}$  denotam os parâmetros de impacto para as dois raios que passam imediatamente acima da primeira camada atmosférica.

Empregando a Equação 2.2, pode-se agora determinar o raio da primeira camada como segue:

$$r_{O0} = \frac{1}{2} \cdot (r_0 + r_1) = a_0 \quad (2.16)$$

$$r_1 = 2 \cdot a_0 - r_0. \quad (2.17)$$

Considera-se que o percurso do raio tangencia o centro da primeira camada,  $m = 1$ , que  $\mu_0$  continua com seu valor unitário e ainda que  $\alpha_{1,0}$  é igual à  $\alpha_1/2$ . Aplicando esses

valores nas Equações 2.11 à 2.13 resulta em,

$$\text{sen } i_{1,1} = \frac{r_0 \cdot \text{sen } j_{1,0}}{r_1}, \quad (2.18)$$

$$\mu_1 = \mu_0 \cdot \frac{\text{sen } i_{1,1}}{\text{sen } j_{1,1}}, \quad (2.19)$$

$$j_{1,1} = \frac{\alpha_1}{2} + i_{1,1}, \quad (2.20)$$

portanto,

$$\mu_1 = \frac{r_0 \cdot \text{sen } j_{1,0}}{r_1 \cdot \text{sen} \left( \frac{\alpha_1}{2} + i_{1,1} \right)}. \quad (2.21)$$

Assumindo  $m = 1$ , a Equação 2.3 resulta em

$$a_1 = r_1 \cdot \text{sen } i_{1,1}, \quad (2.22)$$

e aplicando a função inversa obtém-se

$$i_{1,1} = \arcsen \left( \frac{a_1}{r_1} \right). \quad (2.23)$$

Substituindo Equação 2.23 em 2.21,

$$\mu_1 = \frac{r_0 \cdot \text{sen } j_{1,0}}{r_1 \cdot \text{sen} \left[ \frac{\alpha_1}{2} + \arcsen \left( \frac{a_1}{r_1} \right) \right]}. \quad (2.24)$$

E relacionando a Equação 2.11, ou a Equação 2.18, com 2.22 chega-se à,

$$a_1 = r_1 \cdot \text{sen } i_{1,1} = r_0 \cdot \text{sen } j_{1,0}. \quad (2.25)$$

Por fim, o índice de refração para a primeira camada é definido como

$$\mu_1 = \frac{a_1}{r_1 \cdot \text{sen} \cdot \left[ \frac{\alpha_1}{2} + \arcsen \left( \frac{a_1}{r_1} \right) \right]}. \quad (2.26)$$

A menor distância do centro de massa ao percurso da frente de onda que tangencia o centro da primeira camada, isto é  $r_{O1}$ , é dado pela equação 2.14. Esse resultado é aplicado à Equação 2.2, assumindo  $m = 1$ , para se obter o raio da segunda camada,  $r_2$ . Os demais raios são computados a partir do mesmo procedimento. Observa-se, por exemplo, que o raio  $r_m$  e o índice de refração  $\mu_m$  da  $m$ -ésima camada são determinados a

partir do  $m - 1$  raio da camada e do  $m$ -ésimo raio, respectivamente.

As expressões gerais têm a seguinte forma:

$$r_m = 2 \cdot r_{Om-1} - r_{m-1}, \quad (2.27)$$

$$\mu_m = \mu_{m-1} \cdot \frac{r_{m-1} \cdot \text{sen } j_{m,m-1}}{r_m \cdot \text{sen} \left[ \alpha_{m,m-1} + \arcsen \left( \frac{r_{m-1}}{r_m} \cdot \sin j_{m,m-1} \right) \right]}. \quad (2.28)$$

Para fins de generalização, o método de inversão de rastreamento de raios pode incluir casos em que o índice de refração dentro de cada camada varia tanto na direção vertical quanto na horizontal. No entanto, quando apenas uma única ocultação é observada, é necessário especificar as alterações horizontais antes que os dados possam ser utilizados para determinar o perfil do índice de refração vertical. (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971).

### 2.3 RELAÇÃO DO ÂNGULO DE CURVATURA COM O ÍNDICE DE REFRAÇÃO

O propósito da seção atual é descrever a transformada integral que relaciona o *ângulo de curvatura*, ou *refração*, ( $\alpha(a)$ ) com o *índice de refração*, ( $\mu(r_0)$ ). O resultado desta formulação é um caso especial do problema matemático que foi resolvido por Abel em 1826 (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971).

A partir da substituição da Equação 2.4 em 2.3, tem-se

$$a_m = \mu_1 \cdot r_1 \cdot \text{sen } j_{m,1}. \quad (2.29)$$

Assumindo  $n = 2$  na Equação 2.8, pode-se escrever 2.29 em função de  $\mu_1$ ,  $r_2$  e  $i_{m,2}$  da seguinte forma:

$$a_m = \mu_1 \cdot r_2 \cdot \text{sen } i_{m,2}. \quad (2.30)$$

Em função da simetria adotada, pode-se generalizar a Equação 2.30 para a  $n$ -ésima camada como

$$a_m = \mu_{n-1} \cdot r_n \cdot \text{sen } i_{m,n}. \quad (2.31)$$

Ao tornar o número de camadas infinitamente grande, reduzindo a espessura, pode-se aplicar esta fórmula a uma atmosfera onde  $\mu$  é uma função contínua de  $r$ , e neste caso tem

$$a = \mu \cdot r \cdot \text{sen } i, \quad (2.32)$$

onde os subscritos foram omitidos. Esta Equação é conhecida como *Regra de Bourguer* (BORN et al., 1999). A figura 2.3 mostra o ângulo de incidência  $i$ , no ponto de maior aproximação da frente de onda ao centro, onde

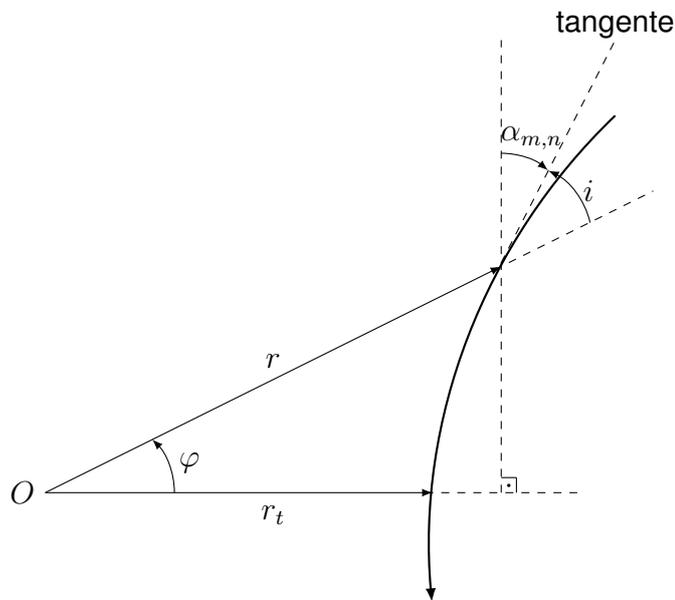
$$a = \mu(r_t) \cdot r_t. \quad (2.33)$$

Na figura 2.3, o ângulo de incidência  $i$  pode ser relacionado às coordenadas polares do percurso do raio  $(r, \varphi)$  por

$$\operatorname{tg} i = r \cdot \frac{d\varphi}{dr}. \quad (2.34)$$

O método para chegar a essa relação está descrito no apêndice A.

Figura 2.3 – Geometria do percurso do raio



Fonte: Adaptado de (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971).

A soma dos três ângulos  $\varphi$ ,  $i$ , e  $\alpha$  definidos na figura 2.3 é igual a  $\pi/2$ . Os diferenciais destes três ângulos são, portanto, relacionados por

$$d\alpha = -di - d\varphi. \quad (2.35)$$

Uma expressão para  $di$  pode ser obtida aplicando a função inversa na Equação 2.32

$$i = \arcsen\left(\frac{a}{\mu \cdot r}\right), \quad (2.36)$$

e diferenciando com relação a  $r$  da seguinte forma:

$$\frac{di}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\mu \cdot r}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{a}{\mu \cdot r}\right) \quad (2.37)$$

$$\frac{di}{dr} = \frac{\mu \cdot r}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} - a \cdot \left[ \frac{\mu + r \cdot \frac{d\mu}{dr}}{(\mu \cdot r)^2} \right] \quad (2.38)$$

$$di = \frac{-a \cdot \left(\mu + r \cdot \frac{d\mu}{dr}\right)}{\mu \cdot r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \cdot dr. \quad (2.39)$$

Combinando as Equações 2.34 com 2.32 e eliminando  $i$ ,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\text{sen}(i)}{\cos i} \quad (2.40)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\text{sen} \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]}{\cos \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]} \quad (2.41)$$

$$d\varphi = \frac{a \cdot dr}{r \cdot \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (2.42)$$

As Equações 2.35, 2.39 e 2.42 permitem relacionar  $d\alpha/dr$  e  $r$ :

$$d\alpha = -di - d\varphi \quad (2.43)$$

$$d\alpha = \frac{a \cdot \left(\mu + \frac{d\mu}{dr} \cdot r\right) \cdot dr}{\mu \cdot r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} - \frac{a \cdot dr}{r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (2.44)$$

$$d\alpha = \frac{a}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{dr}{\mu}. \quad (2.45)$$

A integração de  $d\alpha$  ao longo de todo o percurso do raio produz a curvatura total do feixe,

$$\alpha = \alpha(a) = 2 \cdot a \cdot \int_{r=r_0}^{r=\infty} \frac{d\mu}{\mu \cdot dr} \cdot \frac{dr}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (2.46)$$

### 2.3.1 Obtenção do Perfil do Índice de Refração

O emprego de técnicas matemáticas na Equação 2.46 possibilita invertê-la para encontrar o perfil do índice de refração em função do ângulo de curvatura. Primeiro faz-se uma substituição de variável, trocando-se o produto  $\mu \cdot r$  por  $x$  e substituindo-o na integração

$$\alpha(a) = 2 \cdot a \cdot \int_{x=a}^{x=\infty} \frac{d\mu}{\mu dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx. \quad (2.47)$$

Em seguida, por  $a_1$  denota-se o parâmetro de impacto, ou raio assintótico, para um percurso de raio cujo a distância do ponto de aproximação mais perto do planeta é  $r_{O1}$ . Agora multiplica-se ambos os lados da Equação 2.47 por  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - a_1^2}}$  e integra-se em relação a  $a$  de  $a_1$  até o  $\infty$ . Essa manipulação produz

$$\int_{a=a_1}^{a=\infty} \frac{\alpha(a)}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} da = \int_{a=a_1}^{a=\infty} \frac{2 \cdot a}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \cdot \left[ \int_{x=a}^{x=\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \right] da \quad (2.48)$$

$$= \int_{x=a_1}^{x=\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} \cdot \left[ \int_{a=a_1}^{a=x} \frac{2 \cdot a \cdot da}{\sqrt{a^2 - a_1^2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}} \right] dx \quad (2.49)$$

$$= \int_{x=a_1}^{x=\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} \cdot 2 \cdot \left[ \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{a^2 - a_1^2}{x^2 - a_1^2}} \right]_{a=a_1}^{a=x} dx \quad (2.50)$$

$$= \pi \cdot \int_{x=\mu(r_{O1})r_{O1}}^{x=\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} dx \quad (2.51)$$

$$= -\pi \cdot \ln \mu(r_{O1}). \quad (2.52)$$

O termo à esquerda da igualdade pode ser integrado por partes. Esta operação produz a seguinte fórmula:

$$\mu(r_{O1}) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha=\alpha(a_1)}^{\alpha=0} \ln \left( \frac{a(\alpha)}{a_1} + \sqrt{\left( \frac{a(\alpha)}{a_1} \right)^2 - 1} \right) \cdot d\alpha \right] \quad (2.53)$$

A Equação 2.53 pode ser usada para calcular o índice de refração da atmosfera a uma distância  $r_{O1}$  do centro da esfera. Aqui  $r_{O1}$  é dado por

$$r_{O1} = \frac{a_1}{\mu(r_{O1})}. \quad (2.54)$$

Devido à refração na ionosfera, o integrando da Equação 2.53 é uma função de valores múltiplos de  $\alpha$ . Portanto, para facilitar a visualização da relação com o parâmetro

de impacto ( $a$ ), reorganiza-se a Equação 2.53 como segue

$$\mu(r_{01}) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{a=a_1}^{a=\infty} \ln \left( \frac{a}{a_1} + \sqrt{\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 - 1} \right) \cdot \frac{d\alpha}{da} \cdot da \right]. \quad (2.55)$$

O próximo capítulo apresentará um método de integração numérica para obtenção do perfil de refração a partir da Equação 2.54.

### 3 IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA DE ABEL

Nesse capítulo, antes de discutir o processo de implementação da transformada de Abel para a inversão dos perfis de interesse, discute-se o que esperar do comportamento do índice de refração ( $\mu$ ) na atmosfera terrestre, analisando como as propriedades atmosféricas influenciam  $\mu$ . Na atmosfera neutra, isto é, em até aproximadamente 60 km,  $\mu$  está muito próximo da unidade, de tal forma que é conveniente expressá-lo em termos de outra grandeza: o índice refratividade  $N$ , este pode ser definido pelas contribuições de quatro componentes principais: os componentes secos na atmosfera neutra, vapor de água, elétrons livres na ionosfera, e partículas de água. Esta nova relação é utilizada para estudar a variação do parâmetro de impacto ( $a$ ) com diferentes raios tangentes ( $r_t$ ), em condições diversas.

#### 3.1 VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE IMPACTO E ÍNDICE DE REFRAATIVIDADE

O índice de refração  $\mu$  é definido como a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo ( $c$ ) e velocidade  $v$  da luz em um meio material, expresso por

$$\mu = \frac{c}{v}. \quad (3.1)$$

Na atmosfera terrestre esta razão é muito próximo da unidade, na ordem de 1,0003. Devido a isso expressa-se o índice de refração em função de outro parâmetro, chamado de refratividade (JIN; JIN; LIU, 2019), que é definido como:

$$N = (\mu - 1) \cdot 10^6. \quad (3.2)$$

Para fins de derivação das propriedades atmosféricas dos perfis recuperados, é necessário saber como esses diferentes fatores influenciam  $\mu$  (KURSINSKY, 1997). A refratividade para frequências típicas de enlaces GNSS contém contribuições de quatro componentes principais, que são elas, em ordem de importância: a atmosfera neutra(seca), vapor d'água, elétrons livres na ionosfera e partículas (principalmente água líquida), e pode ser expressa em primeira ordem como função da temperatura atmosférica absoluta ( $T$ ), em graus Kelvin, da pressão do ar seco (ou pressão atmosférica) ( $P$ ) e da pressão parcial do vapor d'água ( $P_W$ ), em milibares ( $mb$ ), da densidade de elétron ( $n_e$ ), em elétrons por metro cúbico ( $el/m^3$ ), da frequência ( $f$ ) do transmissor, em Hertz ( $Hz$ ), e da água líquida ( $W$ ), em gramas por metro cúbico( $g/m^3$ ) (KURSINSKY, 1997), da seguinte forma:

$$N = 77,6 \cdot \frac{P}{T} + 3,73 \cdot 10^5 \cdot \frac{P_W}{T^2} - 4,03 \cdot 10^7 \frac{n_e}{f^2} + 1,4W. \quad (3.3)$$

Os termos da Equação 3.3 são usualmente referidos como: termo seco, termo úmido,

termo ionosférico e termo de dispersão, respectivamente.

A refratividade seca é proporcional à densidade molecular e é dominante abaixo de 60 – 90 km. Esse termo é devido a capacidade de um campo elétrico incidente induzir um dipolo nas moléculas (JIN; CARDELLACH; XIE, 2014). O termo úmido é devido principalmente ao momento de dipolo do vapor de água e torna-se significativo na parte inferior da troposfera, especialmente nos trópicos (KURSINSKI et al., 2001). O termo ionosférico da equação 3.3 inclui uma aproximação de primeira ordem ( $1/f^2$ ) para a Equação de *Appleton-Hartree* (JIN; CARDELLACH; XIE, 2014 apud PAPAS, 1965), que se deve principalmente aos elétrons livres na ionosfera e se torna importante acima de 60 – 90 km. O termo de dispersão dado na Equação 3.3 é devido a gotículas de água líquida suspensa na atmosfera, o termo de dispersão é pequeno em comparação com os outros termos e, portanto, é negligenciado na maioria das aplicações de RO (JIN; JIN; LIU, 2019).

Em geral a pressão e a umidade decrescem exponencialmente com a altitude, portanto em condições “normais” da atmosfera,  $N$  decai com a altitude seguindo aproximadamente uma lei exponencial dada pela equação 3.4 (POEYS, 2004) do seguinte modo:

$$N(h) = N_E \cdot \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (3.4)$$

em que  $h$  é altura a partir da superfície da Terra, ou altitude,  $N_E$  a refratividade na superfície da Terra e  $H$  é a altura de escala, ou distância vertical sobre a qual a densidade e a pressão caem por um fator de  $1/e$  (Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln, 2020). Desta forma, isolando  $\mu$  na equação 3.2 chega-se a Equação 3.5 que relaciona o índice de refração em “ $r$ ” por uma função exponencial da refratividade a qual esperaria-se para uma atmosfera “ideal” (RASCH, 2014). Portanto tem-se

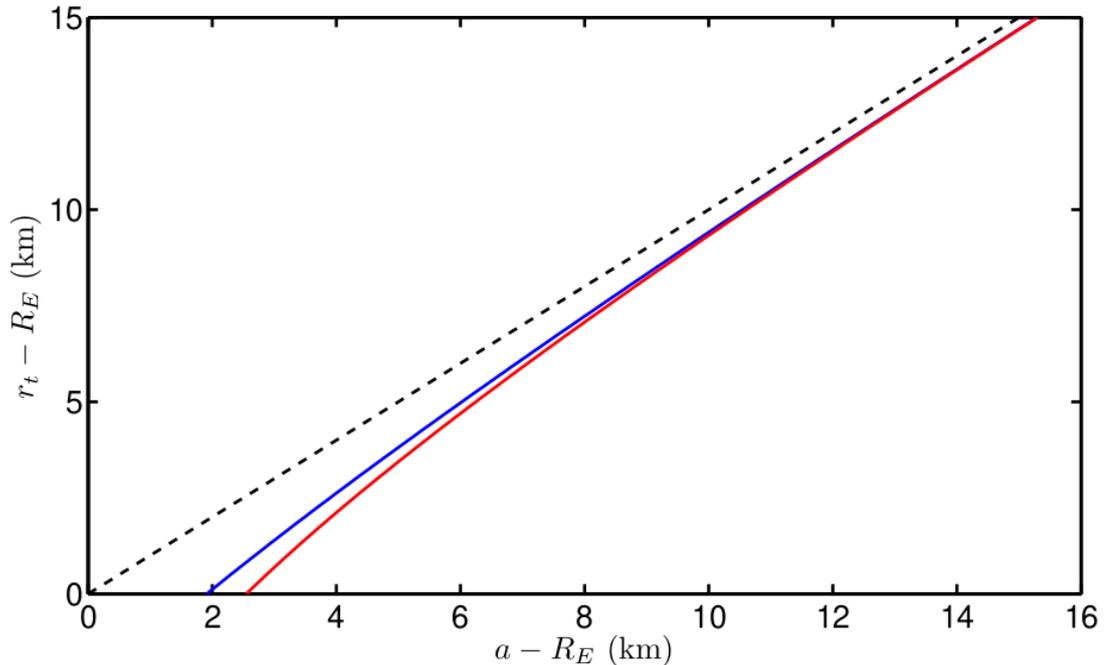
$$\mu(r) = 1 + 10^{-6} \cdot N_E \cdot \exp\left(-\frac{r - R_E}{H}\right), \quad (3.5)$$

onde  $R_E$  é o raio da Terra (em geral 6371 km),  $H$  é normalmente em torno de 6 a 8 km (KURSINSKI et al., 2001). Substituindo 3.5 em 2.33 tem-se:

$$r_t \cdot \left(1 + 10^{-6} \cdot N_E \cdot \exp\left(-\frac{r_t - R_E}{H}\right)\right) = a. \quad (3.6)$$

O gráfico da solução para esta Equação é mostrado na figura 3.1 para algumas atmosferas diferentes. Há três informações interessantes a notar. Primeiro, para cada valor de  $a$  há um valor correspondente para  $r_t$ . Segundo, quanto mais baixo o valor de  $a$ , maior será a penetração do raio na atmosfera. Terceiro, o parâmetro de impacto mais baixo é cerca de 2 km (correspondente a uma altura tangente igual ao raio da Terra) (RASCH, 2014).

Figura 3.1 – Solução da Eq. 3.6 para uma atmosfera com  $H = 8 \text{ km}$ ,  $N_E = 300$  (linha vermelha), uma atmosfera com  $H = 6 \text{ km}$ ,  $N_E = 400$  (linha azul), e uma com  $\mu = 1$  (linha tracejada).



Fonte: (RASCH, 2014), p. 104.

### 3.2 ÂNGULO DA CURVATURA DO PERCURSO A PARTIR DE UM SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

O ângulo de curvatura do percurso é obtido a partir da transformada de Abel. Em uma atmosfera caracterizada por camadas esféricas, o índice de refração é função apenas da distância a partir do centro da Terra e, sob condições que possibilita a aplicação da Óptica Geométrica GO (*Geometric Optics, GO*), pode-se aplicar a *Regra de Bouguer* para descrever o percurso da frente de onda (BORN et al., 1999). Assim, tem-se

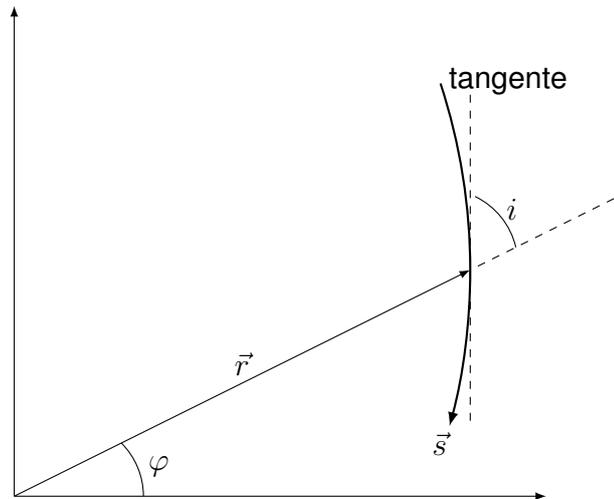
$$\mu(r) \cdot r \cdot \sin i = \text{constante}, \quad (3.7)$$

onde  $\mu$  é o índice de refração definido na seção anterior,  $r$  é a distância a partir do centro da Terra e  $i$  é o ângulo entre a tangente do percurso da frente de onda e um vetor projetado do centro da Terra para o caminho das frentes de onda, de acordo com a Figura 3.2.

Para o percurso de uma frente de onda lançada do espaço em direção a superfície da Terra, têm-se na camada zero,  $r = r_0$ , e  $i = i_{m0}$ , e ainda para tal camada  $\mu \approx 1$ , portanto

$$\text{constante} = r_0 \cdot \sin i_{m0} \equiv a. \quad (3.8)$$

Figura 3.2 – Percurso do raio



Fonte: Adaptado de (RASCH, 2014)

Onde  $a$  é o parâmetro de impacto (KURSINSKY, 1997), ou raio assintótico *miss-distance* (FJELDBO; KLIORE; ESHLEMAN, 1971).

O percurso do sinal é determinado pelas condições de lançamento da frente de onda a partir do GNSS, isto é, a frente de onda entra na atmosfera com um ângulo  $i$  tal que

$$\mu(r) \cdot r \cdot \sin i = a. \quad (3.9)$$

Se o percurso da frente de onda entrar na atmosfera com um ângulo que não conduza a impacto com a superfície da Terra, a trajetória da frente de onda será ligeiramente curvada, e no ponto de maior aproximação, daqui em diante referido como a altura tangente, ou raio tangente, à Terra, onde  $r = r_t$ , e  $i = \pi/2$ , se tem:

$$\mu(r_t) \cdot r_t = a. \quad (3.10)$$

Desta forma, frentes de ondas lançadas com diferentes parâmetros de impacto,  $a$ , terão alturas tangentes diferentes. Isto nos permite analisar a estrutura da atmosfera, observando a curvatura das diferentes frentes de onda.

A curvatura,  $k$ , do percurso  $s$  é dada por

$$k = \left| \frac{d\hat{s}}{ds} \right|, \quad (3.11)$$

onde  $\hat{s}$  é um vetor unitário tangente ao percurso da frente de onda, e  $ds$  um segmento de comprimento ao longo do percurso dessa frente de onda.

Da óptica geométrica Born et al. (1999), sabe-se que a equação diferencial que

descreve os percursos das frentes de onda é

$$\frac{d}{ds}(\mu \cdot \hat{s}) = \nabla \mu. \quad (3.12)$$

O que significa que

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \nabla \mu - \frac{d\mu}{ds} \cdot \hat{s} \right]. \quad (3.13)$$

Agora, observando o percurso  $s$  e a geometria da figura 3.2, tem-se

$$\hat{s} = -\cos i \cdot \hat{r} - \sin i \cdot \hat{\varphi} \quad (3.14)$$

E no caso em que  $\mu$  é apenas uma função do raio, tem-se

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} = -\cos i \cdot \frac{d\mu}{dr} \quad (3.15)$$

Usando  $\nabla \mu = \hat{r} \cdot d\mu/dr$  têm-se:

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \hat{r} \cdot \frac{d\mu}{dr} + \cos i \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot (-\hat{r} \cdot \cos i - \hat{\varphi} \sin i) \right], \quad (3.16)$$

e usando a identidade trigonométrica  $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$ , chega-se a Eq. 3.17

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot [\hat{r} \cdot \sin^2 i - \hat{\varphi} \cdot \cos i \cdot \sin i]. \quad (3.17)$$

Como  $\hat{r} \cdot \sin i - \hat{\varphi} \cdot \cos i = 1$ , conseqüentemente

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{s}}{ds} \right| = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \sin i \quad (3.18)$$

Retornando a Equação 3.17 vê-se que a variação incremental na direção do percurso do raio após um passo incremental é:

$$|d\hat{s}| = ds \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \sin i. \quad (3.19)$$

Isolando  $ds$  na Equação 3.15 obtém a seguinte expressão:  $ds = -dr/\cos i$ . Logo

$$|d\hat{s}| = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\sin i}{\cos i} \cdot dr. \quad (3.20)$$

Agora usando a Equação 3.9 e, retomando que da geometria do problema  $\mu(r) \cdot r \cdot \cos i = \sqrt{\mu^2 \cdot r^2 - a^2}$ , finalmente pode-se chegar a uma expressão para a mudança de ângulo do

vetor unitário na direção do raio, isto é  $d\alpha \equiv |d\hat{s}|/|\hat{s}|$  (RASCH, 2014). Portanto

$$d\alpha = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 \cdot \mu^2 - a^2}} \cdot dr. \quad (3.21)$$

Integrando  $d\alpha$  entre 0 e  $\alpha_t$ , encontra-se a mudança angular do raio quando este atinge o ponto tangente

$$\int_0^{\alpha_t} d\alpha = \alpha_t = - \int_{r_0}^{r_t} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 \cdot \mu^2 - a^2}} \cdot dr \quad (3.22)$$

A mudança angular na saída da atmosfera é novamente  $\alpha_t$ , assim  $-2 \cdot \alpha_t = \alpha$ , logo

$$\alpha = -2 \cdot a \cdot \int_{r_t}^{r_0} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 \cdot \mu^2 - a^2}} \cdot dr. \quad (3.23)$$

Desde  $\mu = 1$ , e  $d\mu/dr = 0$  quando  $r = r_0 \rightarrow \infty$  pode-se usar

$$\alpha = -2 \cdot a \cdot \int_{r_t}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 \cdot \mu^2 - a^2}} \cdot dr \quad (3.24)$$

No cálculo da integral acima haverá alguns problemas numéricos, e a integração próxima à singularidade  $r_t \cdot \mu(r_t) = a$  terá de ser realizada com algum cuidado. Um método para fazer isto é descrito na próxima seção.

### 3.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A presença de singularidades na Equação 3.24 torna a integração numérica problemática, especialmente no termo do integrando que contém a raiz quadrada. Ocorre que, de acordo com a Equação 3.10, na altura tangente  $\mu(r_t) \cdot r_t = a$ , a raiz quadrada assume o valor zero, o que leva a uma indefinição matemática. No entanto com algumas aproximações, pode-se obter bons resultados.

#### 3.3.1 Integração Direta

Em razão das singularidades faz-se uma mudança na variável de integração para  $x = r \cdot \mu(r)$  na Equação 3.24, obtendo-se

$$\alpha = -2 \cdot a \cdot \int_{x=a}^{\infty} \frac{d \ln \mu}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx. \quad (3.25)$$

Agora, próximo à singularidade, durante um pequeno intervalo em  $x$ , a fração no integrando crescerá muito rapidamente, devido principalmente a mudança em  $x$ . Pode-se aproximar os termos como constantes (RASCH, 2014) em que  $[i]$  indica a  $i$ -ésima posição num vetor

que representa dados reais discretos. Dessa forma obtém-se, para cada parâmetro de impacto  $a$ :

$$I_i = \frac{\ln \mu[i+1] - \ln \mu[i]}{x[i+1] - x[i]} \cdot \left[ \operatorname{arccosh} \left( \frac{x[i+1]}{a} \right) - \operatorname{arccosh} \left( \frac{x[i]}{a} \right) \right]. \quad (3.26)$$

Com o ângulo de curvatura dado por:

$$\alpha(a) \approx -2 \cdot a \cdot \left[ \sum_{i=j}^M I_i + A \right], \quad (3.27)$$

onde

$$A = \frac{\ln \mu[j] - \ln \mu[j-1]}{x[j] - x[j-1]} \cdot \left[ \operatorname{arccosh} \left( \frac{x[j]}{a} \right) - \operatorname{arccosh} \left( \frac{x[j-1]}{a} \right) \right], \quad (3.28)$$

e  $i = j$  é o ponto no vetor  $\mu[j] \cdot r[j]$  que está mais próximo acima de  $a$  e  $M$  é o comprimento do vetor  $x$ .

### 3.3.2 Integração Inversa

A partir de equação 2.52 obtém-se

$$\mu(a_1) = \exp \left( \frac{1}{\pi} \cdot \int_{a_1}^{\infty} \frac{\alpha(a)}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \cdot da \right). \quad (3.29)$$

A Equação acima tem os mesmos problemas associados com a singularidade da Equação 3.24. Uma maneira de contornar esse problema é usar uma interpolação linear para  $\alpha$ , e integrar a função de acordo com esta interpolação (RASCH, 2014).

A integral com singularidade é:

$$I = \int_{a_1}^{\infty} \frac{\alpha(a)}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \cdot da, \quad (3.30)$$

e utilizando a interpolação linear em  $\alpha$ , obtêm-se

$$\alpha(a_i \leq a \leq a_{i+1}) \approx \alpha(a_i) + (a - a_i) \cdot \frac{\alpha(a_{i+1}) - \alpha(a_i)}{a_{i+1} - a_i} = A_i + a \cdot B_i, \quad (3.31)$$

onde,

$$A_i = \frac{\alpha(a_i) \cdot a_{i+1} - a_i \cdot \alpha(a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}, \quad (3.32)$$

$$B_i = \frac{\alpha(a_{i+1}) - \alpha(a_i)}{a_{i+1} - a_i}. \quad (3.33)$$

Dessa forma

$$I_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{A_i + a \cdot B_i}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \cdot da, \quad (3.34)$$

cujo o processo de integração resulta em:

$$I_i = A_i \cdot \left[ \operatorname{arccosh} \left( \frac{a_{i+1}}{a_1} \right) - \operatorname{arccosh} \left( \frac{a_i}{a_1} \right) \right] + B_i \cdot \left[ \sqrt{a_{i+1}^2 - a_1^2} - \sqrt{a_i^2 - a_1^2} \right]. \quad (3.35)$$

Portanto pode-se obter numericamente

$$I = \sum_{j=i+1=2}^{M-1} I_j + C \quad (3.36)$$

com

$$C = A_1 \cdot \operatorname{arccosh} \left( \frac{a_2}{a_1} \right) + B_1 \cdot \sqrt{a_2^2 - a_1^2} \quad (3.37)$$

onde  $i = j$  é o próximo ponto no vetor  $a[i]$  acima de  $a_1$ , ou seja,  $j = 2$ .

Ao realizar o procedimento descrito acima para cada parâmetro de impacto, percorrendo o vetor  $\alpha$ , pode-se obter, conseqüentemente, o perfil de refração da atmosfera.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados serão apresentados da seguinte forma: primeiramente apresenta-se a solução para o caso de uma atmosfera ideal, cujo o índice de refração segue um comportamento exponencial, e na segunda parte do capítulo compara-se os perfis obtidos através da implementação desenvolvida neste trabalho, utilizando a linguagem Python, com os perfis presentes no arquivo atmPRF (*atmospheric profiles*) os quais são derivados das medições dos satélites MetOp-A/B disponibilizados pelo CDAAC (*COSMIC Data Analysis and Archive Center*), centro de processamento e análise de diferentes constelações de RO responsável pela distribuição dos produtos atmosféricos para pesquisadores e centros operacionais em todo o mundo. A constelação Meteorológicos Operacionais (MetOp) é satélites LEO em órbita polar à 817 km de altura. Pertencem ao projeto *EUMETSAT Polar System*, (EPS), constituída pelos satélites MetOp-A, lançado em outubro de 2006, o primeiro satélite de órbita polar da Europa dedicado à meteorologia operacional, pelo MetOp-B, segundo satélite da série, lançado em 17 de setembro de 2012, o qual opera em conjunto com o MetOp-A para aumentar ainda mais a confiabilidade dos dados, e o terceiro e último satélite, o MetOp-C, foi lançado em 2018 do centro espacial de Kourou na Guiana Francesa. O Programa MetOp é um empreendimento europeu cujo o objetivo é fornecer de dados meteorológicos para monitoramento de mudanças climáticas e redução de erros em previsões meteorológicas.

### 4.1 PERFIL EXPONENCIAL

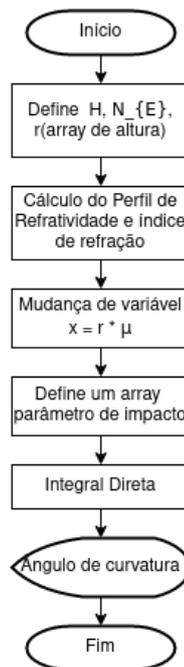
A integração numérica descrita nas seções 3.3.1, e 3.3.2 foi desenvolvida na linguagem *Python*. Um diagrama de blocos desta implementação aplicado a uma atmosfera na qual o perfil de refração segue a lei exponencial dada pela equação 3.5, está apresentado nas Figuras 4.1, a qual descreve a solução da integral direta para obtenção do ângulo de curvatura, e 4.2, referente à integral inversa para obtenção do perfil de refração.

Para a obtenção do ângulo de curvatura, previamente define-se  $N_E = 350$  e  $H = 8$  km, em função de um vetor, ou lista em *Python*, de raios tangentes ( $r_t$ ), também referido como altura ( $h$ ), a partir de 0 até 1000 km com passo de 30 metros. Seguindo o desenvolvimento do algoritmo, calcula-se a refatividade e o índice de refração utilizando as Equações 3.4 e 3.5, respectivamente. O próximo passo é troca de variável  $x = r \cdot \mu(r)$  e a definição de um vetor referente ao parâmetro de impacto iniciando em  $x[0]$  até 80 km. Finalmente usando a Equação 3.27 o bloco principal do algoritmo é executado para realizar o cálculo do ângulo de curvatura.

O algoritmo para obtenção do perfil do índice de refração (integração inversa) utiliza como entrada de dados o parâmetro de impacto definido anteriormente, e o ângulo de curvatura resultante da transformada direta. Esses dados são manipulados por meio da

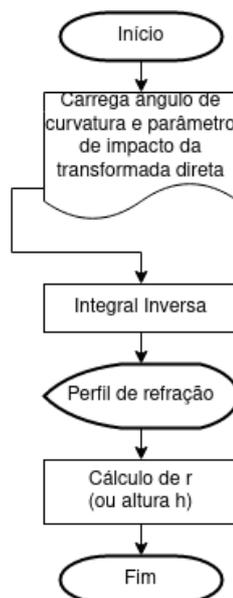
equação 3.36. O resultado corresponde a solução da Equação 3.29, a qual é relacionada com  $r_t$  pela Equação 3.10. Os gráficos que apresentam os perfis de ângulo de curvatura da atmosfera terrestre, considerando uma lei exponencial dada pela equação 3.5, são apresentados na figura 4.3.

Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo para obter do ângulo de curvatura para um perfil exponencial.



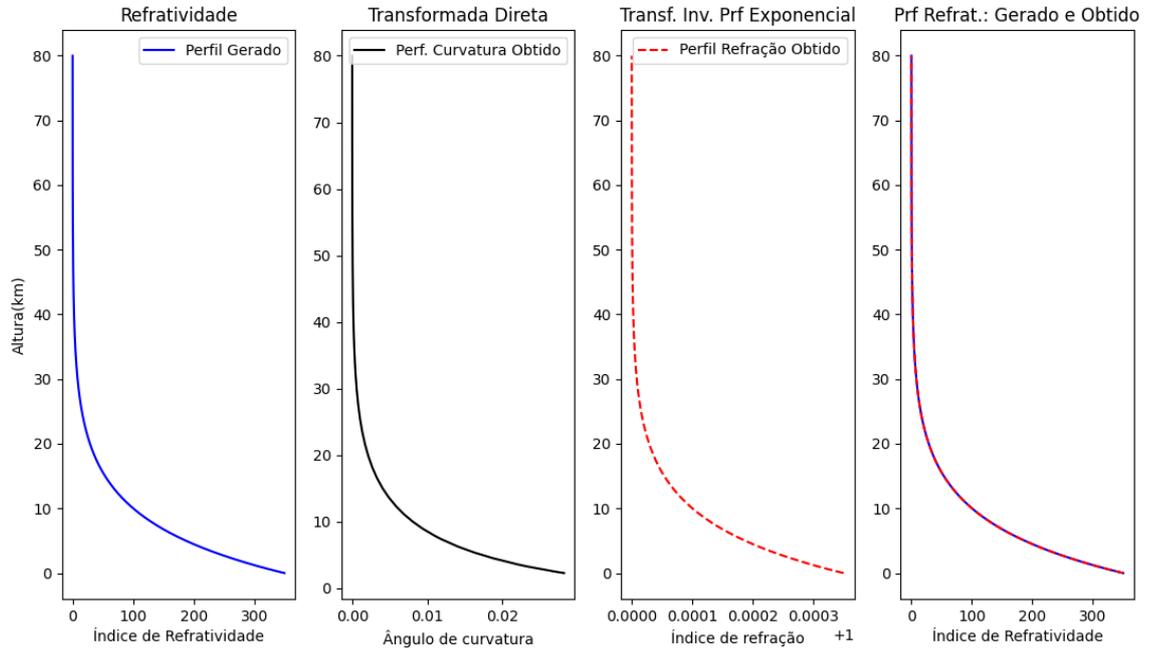
Fonte: Autor

Figura 4.2 – Fluxograma do algoritmo para obter o perfil de refração.



Fonte: Autor

Figura 4.3 – Ângulo de curvatura e perfil de refração:  $N_E = 350$ ,  $H_E = 8$  km.



Fonte: Autor

## 4.2 COMPARAÇÃO COM DADOS ATMPRF

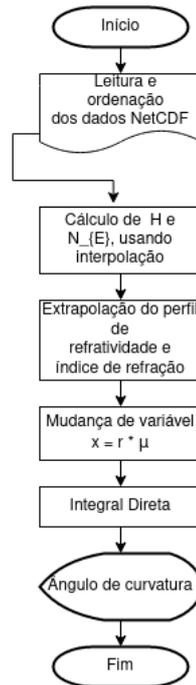
O resultado da implementação foi comparado com dados do satélite Metop-B, os quais foram obtidos no site (CDAAC, 2019). Neste site a disponibilização de dados é realizada através de arquivos NetCDF (Network Common Data Form) que é um padrão comunitário para o compartilhamento de dados científicos. Contém perfis de parâmetros físicos como pressão seca, temperatura seca, refratividade, ângulo de curvatura, parâmetro de impacto, entre outros, em função da altura geométrica média acima do nível do mar.

Os fluxogramas das figuras 4.4 e 4.6 referem-se ao algoritmo desenvolvido para comparação da implementação, desenvolvida nesse trabalho, com os dados obtidos a partir das medições do satélite Metop-B. Para a obtenção do ângulo de curvatura, o fluxo se dá da seguinte forma: faz-se a leitura e ordenação dos dados de refratividade, parâmetro de impacto, ângulo de curvatura e também da altura dos arquivos NetCDF. O segundo passo é utilizar interpolação para calcular os valores de  $N_E$  e  $H$  da seguinte forma:

$$H_E = \frac{r(i_f - 1) - r(i_f)}{\frac{\ln N(i_f)}{N(i_f - 1)}}, \quad (4.1)$$

$$N_E = N(i_f) \cdot \exp\left(\frac{r(i_f)}{H_E}\right), \quad (4.2)$$

Figura 4.4 – Fluxograma do algoritmo para obtenção do ângulo de curvatura

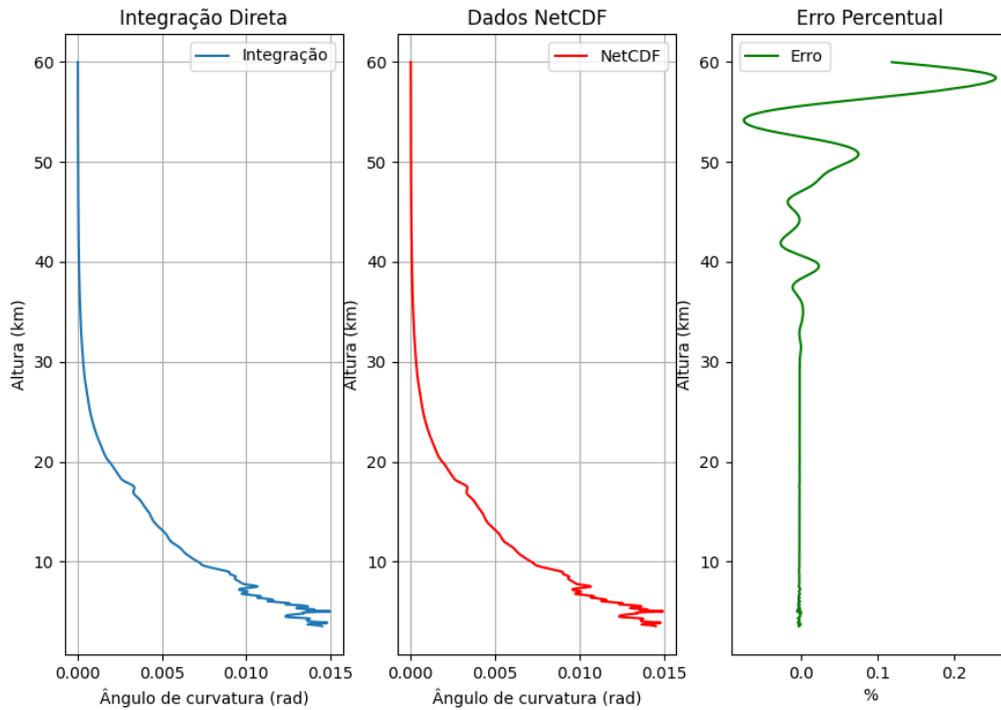


Fonte: Autor

onde  $i_f$  é o ponto de máxima altura disponível nos dados. Em seguida a altura, ou raio, é extrapolado para além de 60 km, que é último valor de altura para o qual os arquivos NetCDF possuem informações. Nesta implementação, em razão de limitação de *hardware*, a altura máxima do perfil de refratividade, usado no cálculo da transformada direta e inversa, é de 300 km com passo de 20 m. Esses perfis, de refratividade e refração, portanto, são extrapolado de acordo com as equações 3.4 e 3.5, respectivamente. Então faz-se a troca de variável e executa o bloco principal do programa para calcular o ângulo de curvatura. A figura 4.5 exhibe o gráfico da solução, desta implementação, e também o perfil do ângulo de curvatura contido no arquivo *atmPrf\_MTPB.2015.074.01.00.G12\_2016.0120*, adquirido pelo satélite Metop-B do dia 15/03/2015.

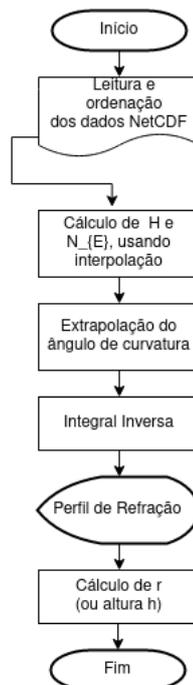
O algoritmo da integral inversa segue os mesmos passos descritos acima, exceto que agora a extrapolação se dá no vetor do parâmetro de impacto e do ângulo de curvatura, os quais formam o conjunto de dados de entrada para o cálculo do perfil de refração. Após este cálculo usa-se a equação 2.33 para encontrar raio tangente ( $r_t$ ) em cada ponto. A figura 4.7 exhibe o gráfico da solução, da integral inversa, e também o perfil refratividade do arquivo *atmPrf\_MTPB.2015.074.01.00.G12\_2016.0120*, adquirido pelo satélite Metop-B do dia 15/03/2015.

Figura 4.5 – Ângulo de Curvatura para Metop-B Prf\_MTPB.2015.074.01.00.G12\_2016.0120

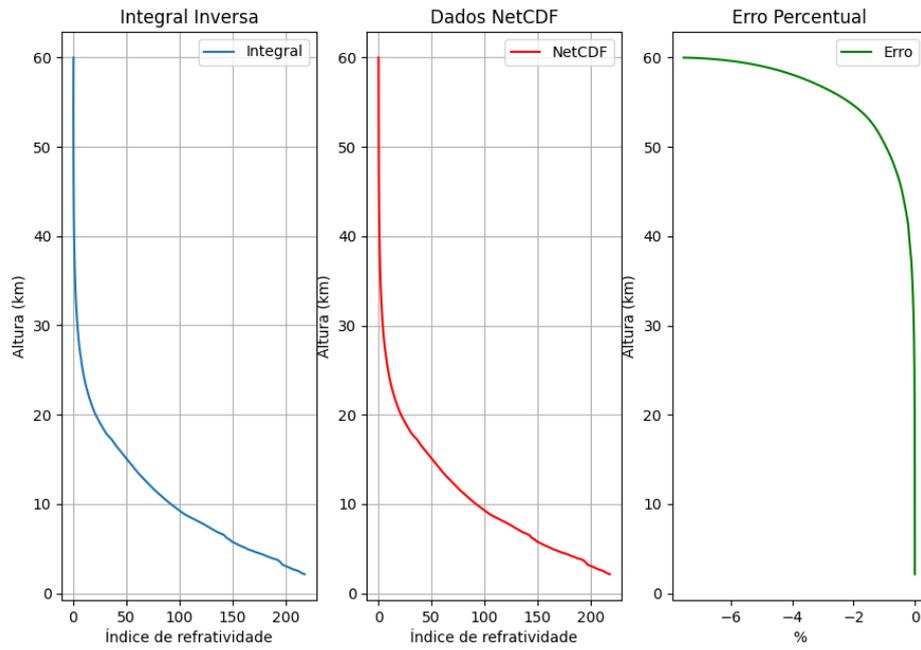


Fonte: Autor

Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo para obtenção do Perfil de refração



Fonte: Autor

Figura 4.7 – Perfil de Refratividade para *atmPrf\_MTPB.2015.074.01.00.G12\_2016.0120*

Fonte: Autor

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesse trabalho foi estudada a técnica de radio ocultação como método para obter os perfis de índice de refração e do ângulo de curvatura para uma frente de onda ao passar através da atmosfera da terra. Esse perfil é importante pois, através dele, podem ser obtidas remotamente informações a cerca do estado da atmosfera terrestre do instante que essas frentes transitam pela atmosfera. A equação 2.46 permite obter o ângulo de curvatura  $\alpha$  a partir do ângulo  $\alpha_i$  de cada camada  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  em que é subdividida a atmosfera terrestre. A partir de  $\alpha$ , utilizando a equação 2.55 é possível obter o perfil de refração da atmosfera.

Os termos da equação 3.3 sendo estes: seco, úmido, ionosférico e de dispersão, representam as propriedades atmosféricas que alteram o índice de refração. Portanto a retirada, ou a inserção, de termos altera o modelo da atmosfera tornando o menos ou mais preciso, respectivamente. Para fins de desenvolvimento da implementação supos-se um comportamento exponencial para a refratividade na atmosfera terrestre da pela equação 3.4, sob esse comportamento analisou-se a variação do parâmetro de impacto em função dos raio tangentes, sendo que o menor parâmetro de impacto é entorno de 2 km.

A partir de um sistema de coordenadas polares, empregando a *Regra de Bourguer* foi derivadas as relações matemática para a integral de *Abel*, e posteriormente a implementação numérica. Dessa forma, portanto, foi possível obter o perfil do ângulo de curvatura para a atmosfera com perfil de refratividade exponencial, e empregando a transformada inversa de *Abel* a recuperação deste perfil. Posteriormente faz-se uma comparação do algoritmo desenvolvido com os dados do satélite MetOp, e observou-se que o erro percentual se acentua acima de  $\approx 40$  km.

A implementação da transformada de Abel, direta e inversa, cria a possibilidade para explorar, por exemplo, o problema de *bias* ionosférica em medições realizadas por satélites LEO. Dada a geometria de um evento de ocultação, parte do percurso percorrido pelo sinal GNSS é dado na ionosfera. Mais especificamente em dois momentos: na entrada do sinal na atmosfera até o ponto tangencial; e na saída do sinal, entre o ponto tangencial e o satélite LEO. A ionosfera possui propriedade dispersiva, sinais em diferentes frequências são sujeitos a diferentes refratividades. Consequentemente, o ângulo de curvatura acumulado nas medições realizadas nas frequências  $L_1$  e  $L_2$  são distintos. Assumindo a aplicação das medições realizadas com rádio ocultação na obtenção de parâmetros meteorológicos da atmosfera neutra, a contribuição da ionosfera precisa ser obrigatoriamente mitigada.

Uma correção feita através da combinação linear dos ângulos de curvatura nas frequências  $L_1$  e  $L_2$  é procedimento padrão para a correção de grande parte da propagação ionosférica, correspondendo ao termo de segunda ordem da refratividade ionosférica (VOROB'EV; KRASIL'NIKOVA, 1994). Esse procedimento é efetivo até 35 km, ponto onde

a atmosfera neutra se torna significativamente mais densa. Acima de 35 km, a contribuição ionosférica dada pelos termos de terceira e quarta ordem são predominantes (SYNDERGAARD, 2000), e a *bias* ionosférica não é desprezível em aplicações climatológicas (DANZER; SCHERLLIN-PIRSCHER; FOELSCHE, 2013). Diferentes métodos foram investigados para a correção dos termos de alta ordem por (HEALY; CULVERWELL, 2015) e (LIU et al., 2020), ambos empregando, em adição às medições de rádio ocultação, índices geomagnéticos e de atividade solar para realizar a correção.

Uma abordagem empregando medições em uma terceira frequência, potencialmente na banda  $L_5$  (WANG et al., 2005), poderia ser inicialmente investigada usando modelos de refratividade, perfis de densidade de elétron e a transformada de Abel. Uma avaliação de um conjunto de medições englobando diferentes condições ionosféricas (baixa e alta atividade solar, tempestades geomagnéticas, etc.) pode validar a contribuição da adição de uma terceira medição na correção e redução da *bias* ionosférica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: bookman, 2014. v. 2, 663 p.

Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln. **Scale Height Planetary Atmospheres**: Definition of scale height. University of Nebraska-Lincoln, 2020. Acessado em 07 julho 2020. Disponível em: <[https://astro.unl.edu/naap/scaleheight/sh\\_bg1.html](https://astro.unl.edu/naap/scaleheight/sh_bg1.html)>.

BARBOSA, V. L. **Effects of Small-Scale Ionospheric Irregularities on GNSS Radio Occultation Signals: Evaluations Using Multiple Phase Screen Simulator**. Karlskrona, 2019. 116 p. Disponível em: <<https://bth.diva-portal.org/smash/get/diva2:1370308/FULLTEXT02.pdf>>.

BAÑOS, I. H. **Assimilação de Perfis de Rádio Ocultação GPS no Modelo Global de PNT do CPTEC**. 2017. 147 p. Dissertação (Mestrado em Meteorologia) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017. Disponível em: <<http://mtc-m21b.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.03.10.32/doc/publicacao.pdf>>.

BEVIS, M. et al. Gps meteorology: Remote sensing of atmospheric water vapor using the global positioning system. **Journal of Geophysical Research: Atmospheres**, v. 97, n. D14, p. 15787–15801, 1992. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/92JD01517>>.

BEYERLE, G. et al. First results from the gps atmosphere sounding experiment tor aboard the terrasar-x satellite. **Atmospheric Chemistry and Physics**, v. 11, n. 13, p. 6687–6699, 2011. Disponível em: <<https://acp.copernicus.org/articles/11/6687/2011/>>.

BONNEDAL, M.; CHRISTENSEN, J.; BERG, A. Metop-gras in-orbit instrument performance. **GPS Solutions**, v. 14, n. 1, p. 109–121, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10291-009-0142-3>>.

BORN, M. et al. **Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light**. 7. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.

CARDINALI, C.; HEALY, S. Impact of gps radio occultation measurements in the ecmwf system using adjoint-based diagnostics. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 140, n. 684, p. 2315–2320, 2014. Disponível em: <<https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.2300>>.

CDAAC. **RO Missions: Data Access**. UCAR, 2019. Acesso em 17 Janeiro 2020. Disponível em: <<https://cdaac-www.cosmic.ucar.edu/cdaac/index.html>>.

COCO, D. Gps : Satellites of opportunity for ionosphere monitoring. **GPS World**, v. 2, n. 9, p. 47–50, 1991. Disponível em: <<https://ci.nii.ac.jp/naid/10029017929/en/>>.

DANZER, J.; SCHERLLIN-PIRSCHER, B.; FOELSCHE, U. Systematic residual ionospheric errors in radio occultation data and a potential way to minimize them. **Atmospheric Measurement Techniques**, v. 6, n. 8, p. 2169–2179, 2013. Disponível em: <<https://amt.copernicus.org/articles/6/2169/2013/>>.

ELLIOT, J. L. Stellar occultation studies of the solar system. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 17, n. 1, p. 445–475, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.aa.17.090179.002305>>.

ESA. **MetOp Mission**. European Space Agency, 2021. Acesso em 20 mar. 2021. Disponível em: <[http://earth.esa.int/eogateway/missions/metop?sortBy=NEWEST\\_FIRST](http://earth.esa.int/eogateway/missions/metop?sortBy=NEWEST_FIRST)>.

EUMETSAT. **Gras**. EUMETSAT, 2021. Acesso em 20 mar. 2021. Disponível em: <<https://www.eumetsat.int/gnss-gras>>.

FJELDBO, G.; KLIORE, A. J.; ESHLEMAN, V. R. The Neutral Atmosphere of Venus as Studied with the Mariner V Radio Occultation Experiments. , v. 76, p. 123, mar. 1971. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1971AJ.....76..123F>>.

HAIJ, G. et al. A technical description of atmospheric sounding by gps occultation. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 64, n. 4, p. 451–469, 2002. ISSN 1364-6826. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682601001146>>.

HALLIDAY, D.; RESNIZKY, S.; WALKER, J. **FUNDAMENTOS DE FISICA, V.4: OTICA E FISICA MODERNA**. [S.l.]: LTC, 2010. ISBN 978-85-216-3210-8.

HEALY, S. B.; CULVERWELL, I. D. A modification to the standard ionospheric correction method used in gps radio occultation. **Atmospheric Measurement Techniques**, v. 8, n. 8, p. 3385–3393, 2015. Disponível em: <<https://amt.copernicus.org/articles/8/3385/2015/>>.

HEALY, S. B. et al. Combined forecast impact of grace-a and champ gps radio occultation bending angle profiles. **Atmospheric Science Letters**, v. 8, n. 2, p. 43–50, 2007. Disponível em: <<https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asl.149>>.

INPE. **Equars**. INPE, 2020. Acesso em 22 ago. 2020. Disponível em: <<http://www.dae.inpe.br/equars/>>.

JIN, S.; CARDELLACH, E.; XIE, F. **GNSS Remote Sensing**. New Delhi: Springer, Netherlands, 2014. v. 19. 286 p. (Remote Sensing and Digital Image Processing, v. 19).

JIN, S.; JIN, R.; LIU, X. **GNSS Atmospheric Seismology: Theory, Observations and Modeling**. Singapore: Springer, Singapore, 2019. 315 p. (GNSS Atmospheric Seismology).

KURSINSKI, R. et al. The gps radio occultation technique. **Terrestrial, Atmospheric and Oceanic Sciences**, v. 11, p. 53–114, 01 2001. Disponível em: <10.3319/TAO.2000.11.1.53(COSMIC)>.

KURSINSKY, E. R. **The GPS Radio Occultation Concept: Theoretical Performance and Initial Results**. 1997. 374 p. Tese (Doctor of Philosophy) — California Institute of Technology, Pasadena, California, 1997. Disponível em: <<https://resolver.caltech.edu/CaltechTHESIS:01282013-095417825>>.

LIU, C. et al. New higher-order correction of gnss ro bending angles accounting for ionospheric asymmetry: Evaluation of performance and added value. **Remote Sensing**, v. 12, n. 21, 2020. ISSN 2072-4292. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2072-4292/12/21/3637>>.

PAPAS, C. H. **Theory of electromagnetic wave propagation**. 6. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.

POEYS, R. A. C. **Efeitos de multipercursos atmosféricos em enlaces de microondas em visibilidade**. 2004. 94 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.5788>>.

RANGASWAMY, S. Recovery of atmospheric parameters from the apollo/soyuz-ats-f radio occultation data. **Geophysical Research Letters**, v. 3, n. 8, p. 483–486, 1976. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/GL003i008p00483>>.

RASCH, J. **Theory and Implementation of an End-to-End Radio Occultation Simulator**. Gothenburg, Sweden, 2014. Technical Report, Earth and Space Sciences No. 10, 114 9.5. Acesso em 02 mar. 2020. Disponível em: <<https://research.chalmers.se/en/publication/203365>>.

Space News. **NOAA issues solicitation for commercial radio occultation data**. pocket Ventures LLC, 2020. Acesso em 19 ago. 2020. Disponível em: <<https://spacenews.com/noaa-rfp-radio-occultation/>>.

SYNDERGAARD, S. On the ionosphere calibration in gps radio occultation measurements. **Radio Science**, v. 35, n. 3, p. 865–883, 2000. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/1999RS002199>>.

Velho, H. F. de C.; Cintra, R. S. C.; Furtado, H. C. M. . **Curso de introdução à assimilação de dados**. LAC-INPE, 2007. Acesso em 26 mar. 2020. Disponível em: <[http://www.lac.inpe.br/~haroldo/Curso-DataAssimilation/Curso\\_Assim\\_Dados-INPE-2.pdf](http://www.lac.inpe.br/~haroldo/Curso-DataAssimilation/Curso_Assim_Dados-INPE-2.pdf)>.

VOROB'EV, V.; KRASIL'NIKOVA, T. Estimation of the accuracy of the atmospheric refractive index recovery from doppler shift measurements at frequencies used in the navstar system. **Izvestiya - Atmospheric Oceanic Physics**, v. 29, p. 602–609, 01 1994.

WANG, Z. et al. Triple-frequency method for high-order ionospheric refractive error modelling in gps modernization. **Journal of Global Positioning Systems**, v. 4, p. 291–295, 12 2005. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/228807689\\_Triple-Frequency\\_Method\\_for\\_High-Order\\_Ionospheric\\_Refractive\\_Error\\_Modelling\\_in\\_GPS\\_Modernization](https://www.researchgate.net/publication/228807689_Triple-Frequency_Method_for_High-Order_Ionospheric_Refractive_Error_Modelling_in_GPS_Modernization)>.

WICKERT, J. et al. Gps ground station data for champ radio occultation measurements. **Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy**, v. 26, n. 6, p. 503 – 511, 2001. ISSN 1464-1895. Proceedings of the First COST Action 716 Workshop Towards Operational GPS Meteorology and the Second Network Workshop of the International GPS Service (IGS). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1464189501000928>>.

Wikiwand. **Transformada de Abel**. Wikipedia, 2020. Acessado em 04 abril 2020. Disponível em: <[https://www.wikiwand.com/pt/Transformada\\_de\\_Abel#/overview](https://www.wikiwand.com/pt/Transformada_de_Abel#/overview)>.

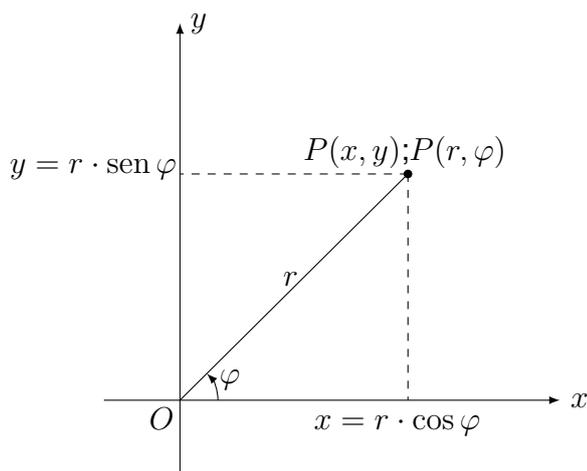
## APÊNDICE A – OBTENDO A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE

O objetivo neste apêndice é descrever o método para obter a relação do ângulo de incidência  $i$ , que está relacionado com as coordenadas do percurso dos raios polares  $(r, \varphi)$ .

### A.1 – CURVAS POLARES E RETAS TANGENTES

Um sistema de coordenadas polares em um plano consiste em um ponto  $O$  fixo, chamado de polo, ou origem, e de um raio que parte do polo, chamado de eixo polar. Em tal sistema de coordenadas podemos associar a cada ponto  $P$  no plano um par de coordenadas  $(r, \varphi)$ , onde  $r$  é a distância de  $P$  até o polo e  $\varphi$  é o ângulo entre o eixo polar e o raio  $OP$ .

Figura A.1 – Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.



Fonte: Autor

Sobrepondo um sistema de coordenadas retangulares  $xy$  ao sistema de coordenadas polares, as coordenadas de ambos os sistemas estão relacionadas pelas equações

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (\text{A.1})$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (\text{A.2})$$

Essas equações permitem encontrar  $x$  e  $y$  quando forem dados  $r$  e  $\theta$ . No entanto, para encontrar  $r$  e  $\varphi$  a partir de  $x$  e  $y$ , é preferível usar as identidades  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  e  $\text{tg } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  para escrever A.1 e A.2 como

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{A.4})$$

Para obter as inclinações das retas tangentes e curvas polares da forma  $r = f(\varphi)$ , em que  $r$  é uma função diferenciável de  $\varphi$ , e conforme mostramos acima, uma curva dessa forma pode ser expressa parametricamente em termos do parâmetro  $\varphi$  substituindo  $f(\varphi)$  no lugar de  $r$  nas equações A.1 e A.2. Derivando com relação a  $\varphi$ , obtêm-se

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi, \quad (\text{A.5})$$

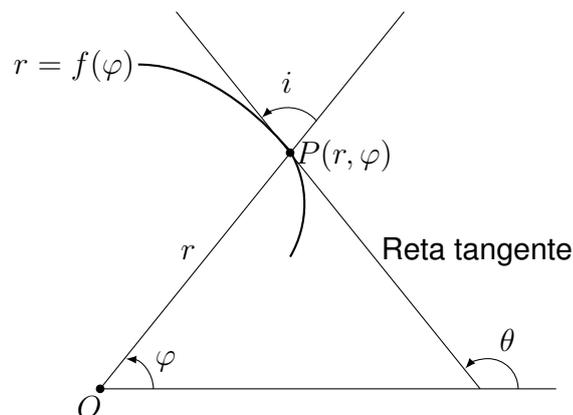
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi. \quad (\text{A.6})$$

Assim, se  $dx/d\varphi$  e  $dy/d\varphi$  forem contínuas e se  $dx/d\varphi \neq 0$ , então  $y$  é diferenciável como função de  $x$ , logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{r \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi}}{-r \cdot \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi}} \quad (\text{A.7})$$

Seja  $P(r, \varphi)$  um ponto na curva polar  $r = f(\varphi)$ , seja  $i$  o menor ângulo no sentido anti-horário que parte do raio estendido  $OP$  até a reta tangente.

Figura A.2 – Inclinação da reta tangente.



Fonte: Autor

Substituindo  $dy/dx$  por  $\text{tg } \theta$  na equação A.7 e aplicando a identidade trigonométrica

$$\text{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \theta \cdot \text{tg } \varphi}, \quad (\text{A.8})$$

têm que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(i) &= \operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \\
 &= \frac{\frac{r \cdot \cos\varphi + (dr/d\varphi) \cdot \operatorname{sen}\varphi}{-r \cdot \operatorname{sen}\varphi + (dr/d\varphi) \cdot \cos\varphi} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \left( \frac{r \cdot \cos\varphi + (dr/d\varphi) \cdot \operatorname{sen}\varphi}{-r \cdot \operatorname{sen}\varphi + (dr/d\varphi) \cdot \cos\varphi} \right) \cdot \left( \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \right)} = \frac{r \cdot d\varphi}{dr} \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

1

---

<sup>1</sup>As definições contidas neste apêndice foram retiradas do livro Cálculo volume II de (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014), capítulo 10.

## APÊNDICE B – REGRA DE BOUGUER

Na aproximação pela óptica geométrica (GO) para a propagação da radiação eletromagnética, o percurso de um raio que passa através de uma região de índice de refração variável é determinado globalmente pelo princípio de Fermat de menor tempo e localmente pela lei de Snell. Portanto, a equação diferencial do caminho dos raios pode ser descrita pela equação de Eikonal (BORN et al., 1999) como

$$\frac{d}{ds} \left( \mu \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} \mu, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição de um ponto,  $\vec{\nabla} \mu$  é o gradiente do índice de refração  $\mu$  e  $ds$  é o comprimento incremental ao longo do percurso do raio, assim dizendo

$$d\vec{r} = \vec{s} \cdot ds. \quad (\text{B.2})$$

Considerando a variação do vetor  $\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})$  ao longo do percurso do raio, têm

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})) = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \mu \cdot \vec{s} + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu \cdot \vec{s}), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})) = \vec{s} \cdot \frac{ds}{ds} \times \mu \cdot \vec{s} + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu \cdot \vec{s}), \quad (\text{B.4})$$

$$= \vec{s} \times \mu \cdot \vec{s} + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu \cdot \vec{s}), \quad (\text{B.5})$$

$$= \mu \cdot (\vec{s} \times \vec{s}) + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu \cdot \vec{s}), \quad (\text{B.6})$$

$$= \mu \cdot 0 + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu \cdot \vec{s}). \quad (\text{B.7})$$

Como

$$d\vec{r} = \vec{s} \cdot ds \Rightarrow \vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})) = \vec{r} \times \frac{d}{ds} \left( \mu \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \right), \quad (\text{B.9})$$

e da equação B.1

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})) = \vec{r} \times \vec{\nabla} \mu. \quad (\text{B.10})$$

A equação B.10 mostra que apenas a parte não radial do gradiente do índice de

refração contribui para mudanças em  $\vec{r} \times (\mu \cdot \vec{s})$ . Considerando um raio médio com simetria esférica, isto é, onde o índice de refração varia na direção radial. Esta é uma aproximação simples para a atmosfera da Terra quando a curvatura é levada em consideração,

$$\mu = \mu(\vec{r}). \quad (\text{B.11})$$

Portanto, têm-se

$$\vec{r} \times \mu(\vec{r}) \cdot \vec{s} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times \mu(\vec{r}) \cdot \vec{s}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \mu(\vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \times \frac{d}{ds} (\mu(\vec{r})) \cdot \vec{s}, \quad (\text{B.13})$$

$$= \vec{s} \times \mu(\vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \times \vec{\nabla} \mu, \quad (\text{B.14})$$

$$= \vec{r} \times \vec{\nabla} \mu, \quad (\text{B.15})$$

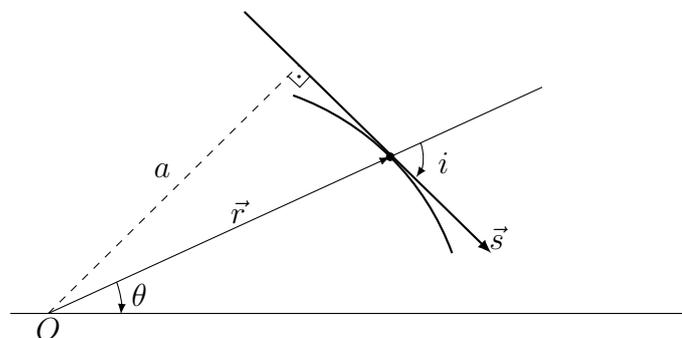
$$= \vec{r} \times \vec{r} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dr} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times \mu(\vec{r}) \cdot \vec{s}) = 0. \quad (\text{B.17})$$

Então,  $\vec{r} \times \mu \cdot \vec{s}$  é uma constante. Esta relação implica que todos os raios são curvas planas e ao longo de cada raio,

$$a = \mu \cdot r \cdot \sin i \quad (\text{B.18})$$

Figura B.1 – Ilustração da Regra de Bouguer



Fonte: Adaptado de (JIN; CARDELLACH; XIE, 2014)

## APÊNDICE C – CÁLCULO DIFERENCIAL DO ÂNGULO DE INCIDÊNCIA $I$

$$\frac{di}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\mu \cdot r}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{di}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\mu \cdot r)^2 - a^2}{(\mu \cdot r)^2}}} \cdot \left[ \frac{\frac{da}{dr} \cdot \mu \cdot r - a \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot r}{(\mu \cdot r)^2} \right] \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{di}{dr} = \frac{1}{\frac{1}{\mu \cdot r} \cdot \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \cdot \left[ \frac{\frac{da}{dr} \cdot \mu \cdot r - a \cdot r \cdot \frac{d\mu}{dr} - a \cdot \mu}{(\mu \cdot r)^2} \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{di}{dr} = \frac{\mu \cdot r}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} - a \cdot \left[ \frac{\mu + r \cdot \frac{d\mu}{dr}}{(\mu \cdot r)^2} \right] \quad (\text{C.4})$$

$$di = \frac{-a \cdot \left( \mu + r \cdot \frac{d\mu}{dr} \right)}{\mu \cdot r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \cdot dr. \quad (\text{C.5})$$

## APÊNDICE D – CÁLCULO DIFERENCIAL DE $\varphi$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \tan(i) \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\text{sen}(i)}{\cos(i)} \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\text{sen} \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]}{\cos \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{a}{\mu \cdot r}}{\cos \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\cos \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \left[ \arcsen \left( \frac{a}{\mu \cdot r} \right) \right]}} \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(\mu \cdot r)^2}}} \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{\mu^2 \cdot r^2 - a^2}}{\mu \cdot r}} \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{\mu \cdot r^2} \cdot \frac{\mu \cdot r}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{D.9})$$

$$d\varphi = \frac{a \cdot dr}{r \cdot \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{D.10})$$

## APÊNDICE E – CÁLCULO DIFERENCIAL DE $\alpha$

$$d\alpha = -di - d\varphi \quad (\text{E.1})$$

$$d\alpha = \frac{a \cdot \left( \mu + \frac{d\mu}{dr} \cdot r \right) \cdot dr}{\mu \cdot r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} - \frac{a \cdot dr}{r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{E.2})$$

$$d\alpha = \frac{a \cdot \left( \mu + \frac{d\mu}{dr} \cdot r \right) dr - \mu \cdot a \cdot dr}{\mu \cdot r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{E.3})$$

$$d\alpha = \frac{a \cdot \mu \cdot dr + a \frac{d\mu}{dr} r dr - \mu \cdot a \cdot dr}{\mu \cdot r \cdot \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{E.4})$$

$$d\alpha = \frac{a \cdot \mu \cdot dr + a \cdot r \cdot \frac{d\mu}{dr} - \mu \cdot a \cdot dr}{\mu r \sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \quad (\text{E.5})$$

$$d\alpha = \frac{a}{\sqrt{(\mu \cdot r)^2 - a^2}} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{dr}{\mu} \quad (\text{E.6})$$

**APÊNDICE F – CÁLCULO PARA OBTENÇÃO ÂNGULO DA CURVATURA DO  
PERCURSO A PARTIR UM SISTEMA DE COORDENADAS POLARES**

$$\frac{d}{ds}(\mu\hat{s}) = \nabla\mu \quad (\text{F.1})$$

$$\hat{s} \cdot \frac{d\mu}{ds} + \mu \cdot \frac{d\hat{s}}{ds} = \nabla\mu \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \nabla\mu - \hat{s} \cdot \frac{d\mu}{ds} \right] \quad (\text{F.3})$$

$$\hat{s} = -\hat{r} \cdot \cos i - \hat{\varphi} \cdot \text{sen } i \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{d\mu}{dr} \cdot \cos i \quad (\text{F.5})$$

$$\nabla\mu = \hat{r} \cdot \frac{d\mu}{dr} \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \hat{r} \cdot \frac{d\mu}{dr} - (\hat{r} \cdot \cos i + \hat{\varphi} \cdot \text{sen } i) \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \cos i \right] \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} [\hat{r} - \hat{r} \cdot \cos^2 i + \hat{\varphi} \cdot \text{sen } i \cdot \cos i] \quad (\text{F.8})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot [\hat{r} \cdot (\underbrace{1 - \cos^2 i}_{\cos^2 i + \text{sen } i^2 = 1}) - \hat{\varphi} \cdot \text{sen } i \cdot \cos i] \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot [\hat{r} \cdot \text{sen}^2 i - \hat{\varphi} \cdot \cos i \cdot \text{sen } i] \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot [\text{sen } i \cdot (\underbrace{\hat{r} \cdot \text{sen } i - \hat{\varphi} \cdot \cos i}_{=1})] \quad (\text{F.11})$$

$$\left| \frac{d\hat{s}}{ds} \right| = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \text{sen } i \quad (\text{F.12})$$

$$|d\hat{s}| = ds \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \text{sen } i \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{d\mu}{ds} = -\cos i \cdot \frac{dn}{dr} \quad (\text{F.14})$$

$$ds = \frac{d\mu}{-\cos i \cdot \frac{d\mu}{dr}} \quad (\text{F.15})$$

$$ds = \frac{d\mu \cdot dr}{-\cos i \cdot d\mu} \quad (\text{F.16})$$

$$ds = -\frac{dr}{\cos i} \quad (\text{F.17})$$

$$\mu(r) \cdot r \cdot \text{sen } i = a \quad (\text{F.18})$$

$$\text{sen } i = \frac{a}{\mu(r) \cdot r} \quad (\text{F.19})$$

$$|d\hat{s}| = -\frac{dr}{\cos i} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \text{sen } i \quad (\text{F.20})$$

$$|d\hat{s}| = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\text{sen } i}{\cos i} \cdot dr \quad (\text{F.21})$$

$$|d\hat{s}| = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{a}{\underbrace{\mu(r) \cdot r \cos i}_{\sqrt{\mu^2 \cdot r^2 - a^2}}} \quad (\text{F.22})$$

$$|d\hat{s}| = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{a}{\sqrt{\mu^2 \cdot r^2 - a^2}} \cdot dr \quad (\text{F.23})$$

## APÊNDICE G – CÓDIGOS USADOS

### G.1 – TRANSFORMADA DIRETA PERFIL EXPONENCIAL PYTHON

```
1 #
   -----
2 # Esse programa calcula a transformada de Abel
   -----
3 #
   -----

4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import math
7 def T_Abel_Perfil_Exponecial():
8     No = 350
9     H = 8e3
10    r = np.arange(0,1000e3,30)
11    N = []
12    Ncomp = []
13    rComp = []
14    n = []
15    for i in range(len(r)):
16        # perfil da refratividade
17        N.append(No * math.exp(-r[i]/H))
18        if r[i] <= 80e3:
19            Ncomp.append(N[i])
20            rComp.append(r[i] * 1e-3)
21        # índice de refratividade
22        n.append(1 + (N[i] * 1e-06))
23    Re = 6371e3
24    r = r + Re
25    x = r * n
26    a = np.arange(x[0],80e3+Re,10)
27    A = 0
28    SI = 0
29    bangle = []
30    for j in range(len(a)):
31        aux = True
```

```

32     SI = 0
33     for jj in range(1, len(x) - 1):
34         if x[jj-1] >= a[j]:
35             I = ((math.log(n[jj+1]) - math.log(n[jj])) /
36                 (x[jj+1] - x[jj])) * (math.acosh(x[jj+1] / a[
37                     j]) -
38                     math.acosh(x[jj] / a[j]))
39             SI = SI + I
40             while aux:
41                 A = ((math.log(n[jj]) - math.log(n[jj-1])) /
42                     (x[jj] - (x[jj-1]))) * (math.acosh(x[jj]
43                         / a[j]))
44                 aux = False
45             bangle.append(- 2 * a[j] * (SI + A))
46
47     return (Re, r, rComp, N, Ncomp, n, a, bangle)
48
49 if __name__ == "__main__":
50     Re, r, rComp, N, Ncomp, n, a, bangle = T_Abel_Perfil_Exponencial
51     ()
52     a = (a-Re) * 1e-3
53     r = (r[:len(bangle)]-Re) * 1e-3
54     n = n[:len(bangle)]
55     def my_plotter(ax, data1, data2, param_dict):
56         """
57         A helper function to make a graph
58
59         Parameters
60         -----
61         ax : Axes
62             The axes to draw to
63
64         data1 : array
65             The x data
66
67         data2 : array
68             The y data
69
70         param_dict : dict
71             Dictionary of kwargs to pass to ax.plot

```

```

71     Returns
72     -----
73     out : list
74         list of artists added
75     """
76     out = ax.plot(data1, data2, **param_dict)
77     ax1.set_title("Transformada Direta")
78     ax2.set_title("Transformada Inversa")
79     ax1.set_xlabel('Ângulo de curvatura')
80     ax2.set_xlabel('Índice de refração')
81     ax1.set_ylabel('Parâmetro de impacto (km)')
82     ax2.set_ylabel('Altura (km)')
83     return out
84     fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
85     my_plotter(ax1, bangle, a, {})
86     my_plotter(ax2, n, r, {})
87     plt.show()

```

## G.2 – TRANSFORMADA INVERSA PERFIL EXPONENCIAL PYTHON

```

1  #
   -----
2  # Esse programa calcula a transformada Inversa de Abel
   -----
3  #
   -----
4
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import numpy as np
7  import math
8  import TransfAbelPerfilExponencial
9  def T_Inv_Abel_Perfil_Exponencial():
10
11     Re, h, hComp, N, Ncomp, n, a, bangle =
12     TransfAbelPerfilExponencial.T_Abel_Perfil_Exponencial()
13
14     Ai = []
15     Bi = []

```

```

16     I      = []
17     nInv  = []
18     NInv  = []
19     hInv  = []
20     Re = 6371e3
21
22     for j in range(len(bangle)-2):
23         Ii = []
24         for i in range(len(bangle)-2):
25             if j <= i:
26                 Ai.append((bangle[i+1] * a[i+2] - a[i+1] * bangle[i
27                     +2]) /
28                     (a[i+2] - a[i+1]))
29                 Bi.append((bangle[i+2] - bangle[i+1]) / (a[i+2] - a
30                     [i+1]))
31                 Ii.append(Ai[i] * (math.acosh(a[i+2] /
32                     a[j]) - math.acosh(a[i+1] / a[j
33                     ])) +
34                     Bi[i] * (math.sqrt(a[i+2]**2 - a
35                     [j]**2) -
36                     math.sqrt(a[i+1]**2 - a[j]**2))
37                     )
38                 Aj = (bangle[j] * a[j+1] - a[j] * bangle[j+1]) / (a[j+1] -
39                     a[j])
40                 Bj = (bangle[j+1] - bangle[j]) / (a[j+1] - a[j])
41                 C = (Aj * math.acosh(a[j+1] / a[j]) + Bj * math.sqrt(a[j
42                     +1]**2 -
43                     a[j
44                     ]**2)
45                     )
46                 I.append(sum(Ii) + C)
47                 nInv.append(math.exp((1 / math.pi) * I[j]))
48                 NInv.append((nInv[j] - 1) * 1e6)
49                 ErroRef = (N[j] - NInv[j]) * N[j]**-1
50                 hInv.append(((a[j] / nInv[j]) - Re) * 1e-3)
51                 ErroAlt = (h[j] - hInv[j]) * h[j]**-1
52
53     return (Re, h, hComp, N, Ncomp, n, a, bangle, hInv, nInv, NInv,
54           ErroRef,
55           ErroAlt)

```

```

48 if __name__ == "__main__":
49     Re, h, hComp, N, Ncomp, n, a, bangle, hInv, nInv, NInv, ErroRef
50     ,
51     ErroAlt = T_Inv_Abel_Perfil_Exponecial()
52     a = (a-Re) * 1e-3
53     h = (h[:len(bangle)]-Re) * 1e-3
54     n = n[:len(bangle)]
55     N = N[:len(bangle)]
56
57     def my_plotter(ax, data1, data2, param_dict):
58         """
59         A helper function to make a graph
60
61         Parameters
62         -----
63         ax : Axes
64             The axes to draw to
65
66         data1 : array
67             The x data
68
69         data2 : array
70             The y data
71
72         param_dict : dict
73             Dictionary of kwargs to pass to ax.plot
74
75         Returns
76         -----
77         out : list
78             list of artists added
79         """
80         out = ax.plot(data1, data2, **param_dict)
81         ax1.set_title('Refratividade')
82         ax2.set_title("Transformada Direta")
83         ax3.set_title("Transf. Inv. Prf Exponencial")
84         ax4.set_title("Prf Refrat.: Gerado e Obtido")
85         ax1.set_xlabel('Índice de Refratividade')
86         ax2.set_xlabel('Ângulo de curvatura')
87         ax3.set_xlabel('Índice de refração')
88         ax4.set_xlabel("Índice de Refratividade")
89         ax1.set_ylabel('Altura(km)')

```

```

89     ax1.legend(['Perfil Gerado'])
90     ax2.legend(['Perf. Curvatura Obtido'])
91     ax3.legend(['Perfil Refração Obtido'])
92     return out
93     fig, (ax1, ax2, ax3, ax4) = plt.subplots(1, 4, figsize=(14,7))
94     my_plotter(ax1, Ncomp, hComp, {'color':'blue'})
95     my_plotter(ax2, bangle, a, {'color':'black'})
96     my_plotter(ax3, nInv, hInv, {'color':'red', 'linestyle':'--'})
97     my_plotter(ax4, Ncomp, hComp, {'color':'blue'})
98     my_plotter(ax4, NInv, hInv, {'color':'red', 'linestyle':'--'})
99     plt.show()

```

### G.3 – TRANSFORMADA DIRETA

```

1  #
   -----
2  # Esse programa calcula a transformada de Abel
   -----
3  #
   -----
4
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import numpy as np
7  import math
8  from netCDF4 import Dataset
9
10 def ordenador_bolha(lista1, lista2, lista3, lista4):
11     '''Função bolha compara os elementos dois a dois colocando-
12         os em ordem'''
13     fim = len(lista1)
14
15     for i in range(fim-1, 0, -1):
16         for j in range(i):
17             #if lista1[j] > lista1[j+1]:
18                 lista1[j], lista1[j+1] = lista1[j+1], lista1[j]
19                 lista2[j], lista2[j+1] = lista2[j+1], lista2[j]
20                 lista3[j], lista3[j+1] = lista3[j+1], lista3[j]
21                 lista4[j], lista4[j+1] = lista4[j+1], lista4[j]
22     return (lista1, lista2, lista3, lista4)

```

```

22 def T_Abel():
23
24     dataset = Dataset('atmPrf_MTPB.2015.074.01.00.G12_2016.0120.nc'
25                       )
26     N, a, Bend_ang, MSL_alt = ordenador_bolha(
27         dataset.variables['Ref'][:,],
28         dataset.variables['Impact_height'
29                             ][:,],
30         dataset.variables['Bend_ang'][:,],
31         dataset.variables['MSL_alt'][:,])
32
33     N.mask = False
34     Bend_ang.mask = False
35     MSL_alt.mask = False
36     i_f = len(MSL_alt) - 1
37     He = (MSL_alt[i_f-1] - MSL_alt[i_f]) / (math.log(N[i_f]/N[i_f
38         -1]))
39     * 1e3
40     Ne = N[i_f] * math.exp(MSL_alt[i_f]* 1e3/He)
41     passo = (MSL_alt[i_f] - MSL_alt[i_f - 1]) * 1e3
42     r = np.arange(MSL_alt[i_f]*1e3 + passo,300e3,passo)
43     MSL_alt = np.append(MSL_alt * 1e3, r)
44     n = []
45     for i in range(len(r)):
46         N = np.append(N, Ne * math.exp(-r[i]/He))
47
48     n = 1 + (N * 1e-06)
49     Re = 6371e3
50     MSL_alt = MSL_alt + Re
51     x = MSL_alt * n
52     a = (a * 1e3) + Re
53     bangle = []
54     erroPercentual = []
55     for j in range(len(a)):
56         aux = True
57         SI = 0
58         for jj in range(1, len(x) - 1):
59             if x[jj-1] >= a[j]:
60                 I = ((math.log(n[jj+1]) - math.log(n[jj])) / (x[jj
61                     +1]
62                     - x[jj])) * (math.acosh(x[jj+1] / a[j]) -
63                     math.acosh(x[jj]
64                     / a[j]))

```

```

60         SI = SI + I
61         while aux:
62             A = ((math.log(n[jj]) - math.log(n[jj-1])) /
63                 (x[jj] - (x[jj-1]))) *
64                 (math.acosh(x[jj] / a[j]))
65             aux = False
66         bangle.append(- 2 * a[j] * (SI + A))
67         erroPercentual.append((Bend_ang[j] - bangle[j])
68                               / Bend_ang[j])
69
70     return (N, n, a, bangle, Bend_ang, MSL_alt,
71           Re, erroPercentual)
72
73 if __name__ == "__main__":
74     N, n, a, bangle, Bend_ang, MSL_alt, Re,
75     erroPercentual = T_Abel()
76     Bend_ang = Bend_ang[:len(a)]
77     a = (a-Re) * 1e-3
78     MSL_alt = MSL_alt * 1e-6
79     def my_plotter(ax, data1, data2, param_dict):
80         """
81         A helper function to make a graph
82
83         Parameters
84         -----
85         ax : Axes
86         The axes to draw to
87
88         data1 : array
89             The x data
90
91         data2 : array
92             The y data
93
94         param_dict : dict
95             Dictionary of kwargs to pass to ax.plot
96
97         Returns
98         -----
99         out : list
100             list of artists added
101         """

```

```

102     out = ax.plot(data1, data2, **param_dict)
103     ax1.set_title("Integração Direta")
104     ax2.set_title("Dados NetCDF")
105     ax3.set_title("Erro Percentual")
106     ax1.set_xlabel('Ângulo de curvatura (rad)')
107     ax2.set_xlabel('Ângulo de curvatura (rad)')
108     ax3.set_xlabel('%')
109     ax1.set_ylabel('Parâmetro de impacto (km)')
110     ax2.set_ylabel('Parâmetro de impacto (km)')
111     ax3.set_ylabel('Parâmetro de impacto (km)')
112     ax1.grid(True)
113     ax2.grid(True)
114     ax1.legend(['Integração'])
115     ax2.legend(['NetCDF'])
116     ax3.legend(['Erro'])
117     return out
118 fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(10.5, 7))
119 my_plotter(ax1, bangle, a, {})
120 my_plotter(ax2, Bend_ang, a, {'color': 'red'})
121 my_plotter(ax3, erroPercentual, a, {'color': 'green'})
122 plt.show()

```

## APÊNDICE H – TRANSFORMADA INVERSA

```
1 #
   -----
2 # Esse programa calcula a transformada Inversa de Abel
   -----
3 #
   -----
4
5 import matplotlib
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from matplotlib.gridspec import GridSpec
8 import numpy as np
9 import numpy.ma as ma
10 import math
11 import TransfAbel
12 from netCDF4 import Dataset
13 def ordenador_bolha(lista1, lista2, lista3, lista4):
14     '''Função bolha compara os elementos dois a dois colocando-os
15         em ordem'''
16     fim = len(lista1)
17     for i in range(fim-1, 0, -1):
18         for j in range(i):
19             lista1[j], lista1[j+1] = lista1[j+1], lista1[j]
20             lista2[j], lista2[j+1] = lista2[j+1], lista2[j]
21             lista3[j], lista3[j+1] = lista3[j+1], lista3[j]
22             lista4[j], lista4[j+1] = lista4[j+1], lista4[j]
23     return (lista1, lista2, lista3, lista4)
24 def T_Inv_Abel():
25     dataset = Dataset('/home/juliano/Documentos/EE/TCC/RO/Codigos/
26         OutraValidação/atmPrf_MTPB.2015.074.01.00.G12_2016.0120.nc')
27     N, a, Bend_ang, MSL_alt = ordenador_bolha(
28         dataset.variables['Ref'][:,],
29         dataset.variables['Impact_height'
30             ][:,],
31         dataset.variables['Bend_ang'][:,],
32         dataset.variables['MSL_alt'][:,])
33     N.mask = False
```

```

32     Bend_ang.mask = False
33     MSL_alt.mask = False
34     a.mask = False
35     i_f = len(a) - 1
36     He = (a[i_f-1] - a[i_f]) / (math.log(N[i_f]/N[i_f-1])) * 1e3
37     Ne = N[i_f] * math.exp((a[i_f]) / He)
38     a = a * 1e3
39     passo = a[i_f] - a[i_f - 1]
40     a_extrapolacao = np.arange(a[i_f] + passo,300e3,passo)
41     a = np.append(a, a_extrapolacao)
42     Bend_ang_extrapolacao = []
43     for i in range(len(a_extrapolacao)):
44         Bend_ang = np.append(Bend_ang, Ne * math.exp(-
45             a_extrapolacao[i]/He))
46         Bend_ang_extrapolacao.append(Ne * math.exp(-a_extrapolacao[
47             i]/He))
48
49     Re = 6371e3
50     a = a + Re
51     Ai = []
52     Bi = []
53     I = []
54     nInv = []
55     NInv = []
56     hInv = []
57
58     for i in range(len(Bend_ang)-2):
59         IIi = []
60         for j in range(len(Bend_ang)-2):
61             if i <= j:
62                 Ai.append((Bend_ang[j+1] * a[j+2] - a[j+1] *
63                     Bend_ang[j+2]) / (a[j+2] - a[j+1]))
64                 Bi.append((Bend_ang[j+2] - Bend_ang[j+1]) /
65                     (a[j+2] - a[j+1]))
66                 IIIi.append((Ai[j] * (math.acosh(a[j+2] / a[i]) -
67                     math.acosh(a[j+1] / a[i])) +
68                     Bi[j] * (math.sqrt(a[j+2]**2 - a[i]**2)
69                         -
70                             math.sqrt(a[j+1]**2 - a[i]**2)
71                     )))
72         Aj = (Bend_ang[i] * a[i+1] - a[i] * Bend_ang[i+1]) /
73             (a[i+1] - a[i])

```

```

70     Bj = (Bend_ang[i+1] - Bend_ang[i]) / (a[i+1] - a[i])
71     mau = math.acosh(a[i+1] / a[i])
72     C = Aj * mau + Bj * math.sqrt(a[i+1]**2 - a[i]**2)
73     aux1 = 0
74     for jj in range(len(IIi)):
75         aux1 += IIi[jj]
76     I.append(aux1 + C)
77     nInv.append(math.exp((1 / math.pi) * I[i]))
78     NInv.append((nInv[i] - 1) * 1e6)
79     hInv.append(((a[i] / nInv[i]) - Re) * 1e-3)
80
81     return (N, a, Bend_ang, MSL_alt, Re, hInv, nInv, NInv)
82
83
84 if __name__ == "__main__":
85     N, a, Bend_ang, MSL_alt, Re, hInv, nInv, NInv = T_Inv_Abel()
86     a = (a - Re) * 1e-3
87     a = a[:len(N)]
88     Bend_ang = Bend_ang[:len(N)]
89     hInv = (hInv[:len(N)])
90     nInv = (nInv[:len(N)])
91     NInv = (NInv[:len(N)])
92     MSL_alt = (MSL_alt[:len(N)])
93     n = 1 + (N * 1e-06)
94     n = (n[:len(N)])
95     erroPercentual = []
96     for i in range(len(n)):
97         erroPercentual.append((N[i] - NInv[i]) / N[i])
98     def my_plotter(ax, data1, data2, param_dict):
99         """
100         A helper function to make a graph
101
102         Parameters
103         -----
104         ax : Axes
105         The axes to draw to
106
107         data1 : array
108             The x data
109
110         data2 : array
111             The y data

```

```

112
113     param_dict : dict
114         Dictionary of kwargs to pass to ax.plot
115
116     Returns
117     -----
118     out : list
119         list of artists added
120     """
121     out = ax.plot(data1, data2, **param_dict)
122     ax1.set_title("Integral Inversa")
123     ax2.set_title("Dados NetCDF")
124     ax3.set_title("Erro Percentual")
125     ax1.set_xlabel('Índice de refração')
126     ax2.set_xlabel('Índice de refração')
127     ax3.set_xlabel('%')
128     ax1.set_ylabel('Altura (km)')
129     ax2.set_ylabel('Altura (km)')
130     ax3.set_ylabel('Altura (km)')
131     ax1.grid(True)
132     ax2.grid(True)
133     ax1.legend(['Integral'])
134     ax2.legend(['NetCDF'])
135     ax3.legend(['Erro'])
136     return out
137
138     fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(10.5, 7))
139     my_plotter(ax1, NInv, hInv, {})
140     my_plotter(ax2, N, MSL_alt, {'color': 'r'})
141     my_plotter(ax3, erroPercentual, MSL_alt, {'color': 'green'})
142     plt.show()

```