UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Matheus Metz Correa

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

Santa Maria, RS
2020

Matheus Metz Correa

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Drª. Fabiane Cristina Höpner Noguti

Santa Maria, RS
2020

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Metz Correa, Matheus
PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA / Matheus Metz Correa.- 2020.
185 f.; 30 cm

Orientadora: Fabiane Cristina Höpner Noguti
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2020

1. Matemática Discreta 2. Resolução de Prroblemas 3. Ensino Superior 4. Ensino e Aprendizagem de Matemática I. Cristina Höpner Noguti, Fabiane II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, MATHEUS METZ CORREA, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Matheus Metz Correa

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 14 de agosto de 2020:

Fabiane C. Höpner Noguti

Fabiane Cristina Höpner Noguti, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Andresa M. Justulin

Andresa Maria Justulin, Dra. (UTFPR)

Luciane Gobbi Tonet

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)

Vânia

Vânia Bolzan Denardi, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e a Nossa Senhora da Conceição Aparecida por me permitir ter saúde e sabedoria para prosseguir minha trajetória acadêmica.

À minha mãe Lenir Metz, pelo amor a mim dedicado e por me fazer acreditar que sou capaz de realizar meus sonhos. Agradeço, também, por todos os conselhos dados nos momentos mais difíceis desta jornada.

À minha Orientadora, professora Fabiane Cristina Höpner Noguti, pela oportunidade de ser seu orientando, e todo o seu conhecimento a mim transmitido durante esses dois anos de jornada.

À Banca Examinadora, professoras Andresa Maria Justulin, Luciane Gobbi Tonet e Vânia Bolzan Denardi, profissionais entusiasmadas e capacitadas dentro do cenário brasileiro da Educação Matemática, por disporem de seus tempos para a leitura e contribuição na melhoria deste trabalho.

A todos os professores do PPGEMEF, por transmitirem seus conhecimentos comigo e pelos momentos de troca de saberes durante o período de Mestrado.

Às colegas do PPGEMEF, Geovânia, Iasmin, Juliana, Vartieli e Maiéli, pelo companheirismo e parceria durante essa caminhada e por todas as socializações de conhecimentos compartilhados nesses últimos anos.

À Universidade Federal de Santa Maria, pública e de qualidade, por me oportunizar fazer uma pós-graduação de excelência no campo da Educação Matemática.

Agradeço, também, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por me conceder uma bolsa de mestrado que possibilitou o desenvolvimento e a conclusão desse trabalho.

RESUMO

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

AUTOR: Matheus Metz Correa
ORIENTADORA: Fabiane Cristina Höpner Noguti

Esta dissertação apresenta uma investigação, na forma de um estudo de caso, realizado no segundo semestre de 2019, sobre o ensino da Progressão Geométrica (PG) utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no Ensino Superior. Os sujeitos eram licenciandos em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) matriculados na Disciplina Complementar de Graduação (DCG) intitulada Resolução de Problemas. A motivação para essa pesquisa ocorreu por conta de inquietações quanto à forma de se ensinar a Matemática nas escolas, na medida em que a memorização e repetição de exercícios e/ou fórmulas acarreta, ao discente, uma aprendizagem, muitas vezes, mecânica, onde a ele não é, em geral, permitido atribuição de significados. O objetivo central do trabalho é verificar quais as contribuições propiciadas ao ensino-aprendizagem da PG de licenciandos em Matemática por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011). A coleta de dados ocorreu em sete encontros sendo que cada um deles buscou contemplar um conceito específico da PG. A pesquisa tem caráter empírico e possui uma abordagem qualitativa, na qual foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: questionários, observações durante as atividades, diários de campo, gravações de áudios e dos registros dos alunos. Mediante os encontros elencaram-se três eixos de análise: Os conceitos prévios como agente desencadeador na aprendizagem de novos conhecimentos na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; O trabalho colaborativo e cooperativo na construção do conhecimento pessoal e profissional de licenciandos em Matemática da UFSM e Desafios e possibilidades no uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Apesar do trabalho colaborativo e cooperativo não ter sua essência presente em todos os encontros, ele foi parte fundamental para o processo de ensino-aprendizagem-avaliação dos licenciandos em Matemática, em especial ao conteúdo de PG. Através dessa metodologia os alunos puderam perceber que a memorização de fórmulas, teoremas e/ou axiomas não é sempre necessária no ensino da Matemática.

Palavras-chave: Matemática Discreta. Resolução de Problemas. Ensino Superior. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

GEOMETRIC PROGRESSIONS THROUGH PROBLEM-SOLVING: CONTRIBUTIONS TO THE UNDERGRADUATE IN MATHEMATICS

AUTHOR: Matheus Metz Correa
ADVISOR: Fabiane Cristina Höpner Noguti

This dissertation presents an investigation, as a case study, undertaken in the second semester of 2019, on the teaching of Geometric Progression (PG) using the Teaching-Learning-Evaluation Methodology of Mathematics through the Resolution of problems in higher education. The subjects were undergraduates in Mathematics from the Federal University of Santa Maria (UFSM) enrolled in the Complimentary Undergraduate Course (DCG) entitled Problem Solving. The motivation for this research was due to concerns regarding how to teach Mathematics in schools, as the memorization and repetition of exercises and/or formulas entails, to the students, a mechanical learning, to which, generally, they are not allowed to assign meanings. The main objective of the study is verifying what contributions are made to the teaching-learning of PG by the undergraduate students in Mathematics through the Methodology of Teaching-Learning – Evaluation of Mathematics through Problem Solving, proposed by Onuchic and Allevato (2011). The data collection occurred within seven meetings, each of which sought to contemplate a specific concept of PG. The research has empirical character and a qualitative approach, in which questionnaires, observations during activities, field diaries, audio recordings and registers of the students were used as data collection tools. From the meetings, three axes of analysis were listed: The previous concepts as a triggering agent in the learning of new concepts in the Teaching-Learning-Evaluation Methodology of Mathematics through Problem Solving, The collaborative and cooperative work in the construction of the personal and professional knowledge of undergraduates of Mathematics from UFSM, and Challenges and possibilities in the use of the Teaching-Learning-Evaluation Methodology of Mathematics through problem solving. Although the collaborative and cooperative work did not have its essence present in all the meetings, it was a fundamental part for the teaching-learning-evaluation process of the undergraduates in Mathematics, specially, the content of PG. Through this methodology, students were able to realize that memorizing formulas, theorems and/or axioms is not always necessary in the teaching of Mathematics.

Key words: Discreet Mathematics. Problem Solving. Higher Education. Mathematics teaching and learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAAE	Certificado de Apresentação de Apreciação Ética
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Apreciação Ética
DCG	Disciplina Complementar de Graduação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ESPCEX	Escola Preparatória de Cadetes do Exército
EUA	Estados Unidos da América
FGV	Fundação Getúlio Vargas
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
HTPC	Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas
MEAAMRP	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Ml	Mililitros
Mm	Milímetros
NCTM	National Council of Teachers of Mathematic
NDE	Núcleo Disciplinar Estruturante
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Org.	Organizador
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PIM	Princípio de Indução Matemática
PET	Programa de Educação Tutorial
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
PPGEMEF	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TASC	Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UCPel	Universidade Católica de Pelotas
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFN	Universidade Franciscana
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
u.m	Unidade de Medida
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
VUNESP	Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

> "*As pesquisas na Área de Ensino e Educação são, em geral, originadas por inquietações que nasceram em sala de aula. Elas são impulsionadas por problemas diversos e por questões a serem discutidas, investigadas e modificadas, cujos objetivos podem envolver a compreensão histórica como se dão [ou não] as mudanças na sala de aula, analisar as relações existentes nesse contexto e até propor metodologias diferenciadas para colaborar com o ensino e a aprendizagem escolar.*"
> *(Marcelo Borba, Helber Almeida e Telma Gracias)*

1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL

Minha[1] relação com a Matemática nem sempre foi de maneira amistosa. Recordo-me que até a 6ª série, hoje 7º ano do Ensino Fundamental, não conseguia perceber a beleza e a magnitude presentes nesta disciplina. Comecei a criar apreço por ela na 7ª série, atual 8º ano, a partir do momento que estudei o conteúdo de Porcentagem. Naquele instante, o ensino de Matemática me aparentou ter uma magia e significância inexplicável.

Comecei, então, a perceber o quanto a Matemática estava presente no meu dia a dia e a dar a devida importância e sentido para aquela disciplina tão temida por muitos, inclusive por mim. O encantamento e a empolgação que a professora transmitia pela disciplina em suas aulas e a sua forma de ensinar eram de uma riqueza ímpar. Ela tinha o dom de encantar a todos e deixar a Matemática mais bela.

Meu Ensino Médio foi um pouco conturbado devido às inúmeras greves e paralisações a que minha escola aderiu, assim como a constante falta de professores que acabava atrasando o ano letivo e, por muitas vezes, suprimindo conteúdos de diversas disciplinas. No entanto, o apreço pela Matemática e, principalmente, pela educação nunca deixaram de estar presente em meus pensamentos e concepções.

Por essas razões, em 2012, decidi ingressar no curso de Matemática Licenciatura[2] na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Tive um começo bem árduo e difícil, pois era uma realidade nova que eu estava vivendo.

De maneira geral, as graduações diferem em muitos pontos do Ensino Básico e um deles é o caminhar por si só, sendo esta uma realidade que não vivenciava diariamente no âmbito escolar. Essas dificuldades iniciais da graduação também ocorreram em função de

---

[1] Escrevo este item em 1ª pessoa por se tratar de minha trajetória antes do mestrado.
[2] A UFSM adota essa nomenclatura para o curso de Licenciatura em Matemática.

algumas lacunas de conteúdos no ensino escolar devido a fatores já expostos, que nem sempre são sanados na universidade.

No primeiro semestre tive a oportunidade de cursar a disciplina de Matemática Discreta onde pude ter meu primeiro contato com os conteúdos de Sequências, Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Esses conceitos eram, até então, desconhecidos pelo fato de durante meu Ensino Médio eles não terem sido trabalhados e explorados pelos professores.

De imediato tive um encantamento por esses conteúdos por perceber as diferentes formas que eles poderiam ser esmiuçados e debatidos com os alunos no ensino de Matemática, já que seus conceitos são de fácil contextualização e dinamização podendo envolver o cotidiano dos sujeitos.

No decorrer da minha graduação tive o prazer de fazer parte do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), por um período de dois anos. Através dessa experiência, tive a oportunidade de ver a escola não mais com o olhar do discente, mas sim, do docente preocupado com a educação.

Tive, então, minha primeira oportunidade de ministrar aulas e oficinas perante uma turma de alunos. Os dois anos em que fui bolsista do PIBID - Matemática foram de extrema aprendizagem e possibilitou me apaixonar ainda mais pela educação e ter a certeza que esse era o caminho que queria para minha vida profissional. Em consonância com essa ideia, Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 30) destacam a importância do PIBID para a formação acadêmica e profissional do licenciando.

> O PIBID, de certo modo, foi baseado em pesquisas que apontavam a necessidade de o professor, como licenciando, estar integrado à escola em sua formação. O PIBID também é (ou foi) um importante canal de entrelaçamento da pesquisa. Licenciandos buscam, na pesquisa, alternativas para sua prática em conjunto com os professores da escola. Por outro lado, eles trazem da escola preocupações e a própria vivência.

Em 2016, quase findando minha Licenciatura em Matemática, optei por trabalhar com os conteúdos de Sequências e PA no meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), muito pelo fato da minha afeição por eles, adquirida na disciplina de Matemática Discreta. Foi através dessa pesquisa que tive conhecimento sobre a teoria da Resolução de Problemas na ótica de Polya, exposta em seu livro intitulado a *Arte de Resolver Problemas*[3] (1995).

Para mim a ligação entre os conteúdos matemáticos e a teoria da Resolução de Problemas foi perfeita, pois assim seria oportunizado ao aluno compreender os conceitos

[3] Traduzido de *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (1945).

presentes na Matemática, sem a necessidade de memorizá-los de forma mecânica e entendendo o porquê de estar fazendo aquilo, no âmbito do desenvolvimento de atividades.

Durante meu TCC elaborei duas propostas de atividades envolvendo essas vertentes, que seriam aplicadas aos meus alunos do Estágio Supervisionado do Ensino Médio, cursantes do 2º ano. Devido a problemas com o tempo disponível até a defesa do TCC tive que desistir da ideia de trabalhar com os alunos e fiz, então, planos de aula com sugestões de aplicação das atividades para professores na visão de Polya sobre a Resolução de Problemas[4].

Em 2017, comecei a trabalhar com aulas de reforço em um curso preparatório em Santa Maria/RS, e eram bastante corriqueiras duas reclamações vindas dos alunos: não conseguir interpretar os problemas matemáticos e não visualizar como os conceitos e conteúdos estudados nas aulas de Matemática se relacionavam com o seu dia a dia. Essas reclamações me inquietaram e me instigaram a voltar aos meus estudos na perspectiva da Resolução de Problemas para, talvez, tentar amenizar certa frustração que os alunos ainda tinham com a Matemática.

No ano de 2018, após quase dois anos formado, optei por fazer o processo seletivo na área da Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF) na UFSM obtendo, ao final da seleção, a aprovação. Com o ingresso no Mestrado, eu pretendia continuar a pesquisa desenvolvida no TCC, com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Porém, ao contatar algumas escolas, no 1º semestre de 2019, percebemos[5] que o ensino dos conteúdos de Sequências e Progressões estavam ocorrendo entre o 1º e 2º trimestres do ano letivo, o que inviabilizava a aplicação devido ao prazo para a conclusão do mestrado.

Diante desse cenário, optamos por trabalhar no Ensino Superior com alunos do Curso de Matemática Licenciatura ainda no viés da Resolução de Problemas e delimitando a pesquisa ao conteúdo matemático de PG.

A elaboração de novos problemas direcionados para o Ensino Superior, objetiva instigar os futuros professores a, talvez, trabalhar com essa metodologia de ensino em sua prática escolar, e quiçá, a mim, sanar os questionamentos apontados pelos alunos nas aulas de reforço e desmistificar um pouco a Matemática.

---

[4] Correa (2016).

[5] Utilizo, a partir desse momento, a primeira pessoa do plural por se tratar do trabalho realizado para a elaboração dessa dissertação, processo compartilhado com minha orientadora.

1.2 A PESQUISA

Diante dos fatores expostos anteriormente, nossa pesquisa busca expandir o trabalho realizado durante o TCC, agora na perspectiva de utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas[6], proposta por Onuchic e Allevato (2011), em situações que abordem a PG no Ensino Superior.

1.2.1 Questão Investigativa/Problema

Quais contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proporciona a licenciandos em Matemática no estudo da PG?

1.2.2 Objetivo Geral

Investigar as contribuições no ensino-aprendizagem de licenciandos em Matemática ao utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no estudo da PG.

1.2.3 Objetivos Específicos

I) Selecionar e elaborar problemas geradores sobre a PG que possam ser trabalhados utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;

II) Identificar as possíveis dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação da PG ao utilizar essa metodologia em sala de aula;

III) Verificar quais as contribuições desta metodologia no ensino-aprendizagem-avaliação da PG nos licenciandos em Matemática;

IV) Promover nos futuros professores momentos de reflexão quanto ao uso desta metodologia em sala de aula, em particular no ensino da PG.

[6] Ao longo do texto ao nos referirmos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o faremos apenas como MEAAMRP.

1.2.4 Relevância da pesquisa

Com o intuito de justificar e mostrar a relevância da nossa pesquisa, foram realizados dois mapeamentos por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD)[7], de dissertações e teses, que trabalhassem na ótica da Resolução de Problemas e da PG. Um dos mapeamentos tinha o objetivo de verificar quais trabalhos exploravam alguma das diversas perspectivas abordadas na Resolução de Problemas na região Sul do Brasil e o outro buscava identificar pesquisas que tinham o enfoque no ensino da PG no âmbito da Matemática.

1.2.4.1 Trabalhos na Perspectiva da Resolução de Problemas

No mapeamento sobre a Resolução de Problemas definimos como descritores de busca: *Metodologia da Resolução de Problemas* e *Matemática*, no qual foi obtido, num primeiro momento, um total de 569 trabalhos[8], destes, 445 dissertações e 124 teses.

Com o intuito de selecionar apenas os trabalhos nas perspectivas que buscávamos, fizemos um novo refinamento, onde analisamos primeiramente os seus títulos, resumos, palavras-chaves e referenciais teóricos. Caso surgisse alguma dúvida quanto à presença de alguma das concepções da Resolução de Problemas, fazíamos a leitura do desenvolvimento da pesquisa. Chegamos, assim, a um número final de 140 trabalhos.

O *corpus*[9] das pesquisas foi definido de forma que todos os trabalhos deveriam apresentar contribuições para o ensino de Matemática para um dos níveis de ensino (Fundamental, Médio ou Superior) com a utilização da Resolução de Problemas em suas diversas perspectivas.

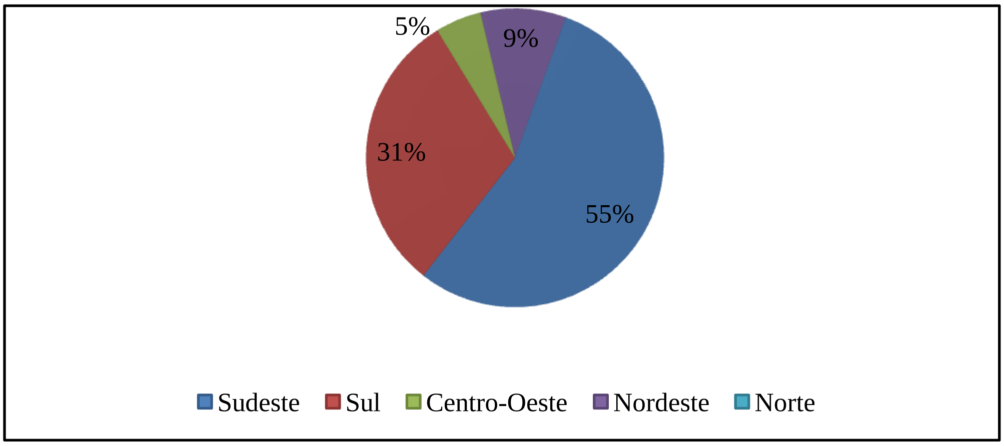
Optamos por tal refinamento, pois o termo *"Resolução de Problemas"* também é objeto de estudo de outras áreas de ensino como, por exemplo, a Ciência da Computação, a Física e a Química, desviando do objetivo dessa busca a qual versava sobre o ensino de Matemática.

Dos 140 trabalhos selecionados temos 77 pertencentes à região Sudeste, 43 à região Sul, sete à região Centro-Oeste e 13 ao Nordeste. Destacamos que na BDTD, na data pesquisada, não foi encontrado nenhum trabalho da região Norte. Os 140 trabalhos ficaram distribuídos percentualmente entre as regiões brasileiras conforme Figura 1.

---

[7] Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/.
[8] Acesso em: 03 jan. 2019.
[9] O conjunto dos documentos levados em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 2004, p. 90).

Figura 1 – Distribuição dos trabalhos por região brasileira



Fonte: Autores (2019)

Devido à quantidade de trabalhos no âmbito nacional, optamos por focalizar nosso mapeamento apenas nos 31% das dissertações e teses da região Sul, região de inquérito da pesquisa, que corresponde a 43 trabalhos. Disponibilizamos o *corpus* das pesquisas no Apêndice A.

Diante desses dados, pudemos identificar que 12 trabalhos tinham como público alvo os alunos do Ensino Fundamental, 17 pesquisas eram voltadas a alunos do Ensino Médio e nove a discentes do Ensino Superior, sendo sete destinados à formação de professores (três com enfoque na formação inicial e quatro na continuada). Além disso, três tinham destaque na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Havia também dois trabalhos que tinham como cenário entrevista com professores referentes à utilização da Resolução de Problemas em seu âmbito de ensino.

Com relação aos conceitos matemáticos envolvidos nas dissertações e teses, notamos uma grande variedade nas produções analisadas, sendo que os conteúdos mais presentes nas pesquisas foram Funções, de maneira geral (5), Afim (2), Quadrática (1), Logaritmo (2), Estatística (2), Matrizes (2), Fração (2), Grafos[10] (2), Probabilidade (2) e Derivadas (2).

No que tangencia aos autores da Resolução de Problemas mais evidenciados no transcorrer das pesquisas, tanto no referencial teórico quanto metodológico, destacamos Lourdes de La Rosa Onuchic (26), Norma Suely Gomes Allevato (20), Luiz Roberto Dante (7), George Polya (19) e Juan Ignácio Pozo (6), que possuem forte influência diante desse movimento da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo.

[10] Uma voltada para o Ensino Médio e outra para o Ensino Fundamental.

No horizonte dos Estados pertencentes à região Sul, detectamos que o Rio Grande do Sul possui certa predominância de trabalhos sobre a Resolução de Problemas com aproximadamente 83,7%, sendo que grande parte de suas produções (47,2%) é advinda da Universidade Franciscana (UFN), do município de Santa Maria. Os Estados do Paraná e de Santa Catarina têm, respectivamente, aproximadamente 14% e 2,3% das produções acadêmicas.

Um dado observado através dessa análise é que, diante do *corpus* de pesquisas consultadas, não há nenhuma tese de doutorado na região Sul com enfoque na Resolução de Problemas. Os 43 trabalhos acadêmicos citados são oriundos de dissertações de mestrados de diversos Programas de Pós-graduação dos três Estados pertencentes a esta região, sendo que, alguns deles também oferecem doutorado na área da Educação/Ensino de Matemática.

Esses dados nos mostram certa escassez de doutores formados para a pesquisa na perspectiva da Resolução de Problemas na região Sul, impossibilitando, por muitas vezes, a continuidade de novos trabalhos desenvolvidos através dessa forma de ensinar Matemática tão importante para a aprendizagem dos discentes e enriquecimento didático para os docentes.

Diante do cenário observado, podemos identificar que nossa pesquisa é relevante no que diz respeito à utilização da Resolução de Problemas, em especial da MEAAMRP no Ensino Superior, na medida em que das 43 pesquisas analisadas, apenas dois tem como foco esse nível de ensino e três na formação inicial de professores.

Outro fator relevante da pesquisa é que o estudo da PG, em concomitância com essa metodologia de ensino de Matemática, ainda é carente de averiguação nos Programas de Pós-graduação, uma vez que, com os descritores de busca escolhidos, foi identificada apenas uma pesquisa nesse panorama. No entanto, a PG foi apenas um dos diversos conteúdos trabalhados nessa dissertação, sendo que o enfoque dado a ela foi bastante simples.

1.2.4.2 Trabalhos com enfoque na Progressão Geométrica no ensino de Matemática

Para um maior esclarecimento de como pesquisas sobre o ensino de PG na disciplina de Matemática estão sendo realizadas, foi feito um novo mapeamento no mesmo banco de dados, porém com os descritores *Progressão Geométrica* e *Ensino de Matemática.* Numa primeira análise foram encontrados 24 trabalhos de dissertações e teses[11].

[11] Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/. Acesso em: 08 ago. 2019.

Após essa primeira busca, notamos que deveríamos fazer uma averiguação mais criteriosa já que muitos trabalhos não tinham o enfoque no ensino da PG e nem no ensino de Matemática, sendo que apenas faziam uso do conteúdo na resolução de alguma questão específica. Com isso, chegamos a um número final de nove dissertações e teses no qual este se configura como o nosso *corpus* de pesquisa, estruturado conforme Apêndice B. A seguir, apresentamos um breve resumo de cada um dos trabalhos e no Quadro 1 encontram-se os principais resultados, observados por nós, dessas pesquisas.

Marchetto (2017) tinha como objetivo verificar como o aluno visualizava e compreendia a relação entre as progressões e as funções por meio de gráficos utilizando o software *GeoGebra*[12]. Sua pesquisa apresenta roteiros de atividades para alunos do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola estadual. Durante a aplicação desses roteiros, foi requisitado aos alunos construir, verificar e interpretar seus próprios resultados, refletindo e analisando estratégias durante a edificação dos gráficos no *GeoGebra* para que fosse constatado, pelo pesquisador, se os alunos haviam conseguido relacionar a Função Afim com a PA e a Função Exponencial com a PG, respondendo sua questão norteadora.

Barbosa (2013) buscava em seu trabalho, com o auxílio de calculadoras simples ou com impressoras, investigar se e como os alunos observam a regularidade e a generalizam, de forma que construíssem expressões relativas às Progressões Geométricas. O trabalho foi realizado por meio de três sessões, com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de São Paulo. Cabe ressaltar que a pesquisadora não era a professora regente de Matemática dos alunos que eram sujeitos de pesquisa.

Arruda (2013) tinha como objetivo apontar quais eram as semelhanças, diferenças e relações presentes entre os conteúdos de PG, Juros Compostos e Função Exponencial considerando o ensino de seus conceitos através da resolução de problemas.

Lopes (2017) objetivava apresentar aos alunos do Ensino Médio um aprofundamento sobre o conteúdo de sequências habitualmente trabalhado no 1º ano, com um olhar especial na PG de segunda ordem. A pesquisa foi desenvolvida, separadamente, com alunos dos três anos escolares do Ensino Médio de uma escola particular de Maringá/PR. Posteriormente, foi expandida para o âmbito do Ensino Superior onde foi realizada uma oficina para discentes do curso de Engenharia de Software[13].

[12] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 08 ago. 2019.

[13] O autor não identifica em que universidade/instituto ocorreu à oficina.

Gonçalves (2007), através de sua pesquisa, se propunha a investigar como seria o aprendizado das Progressões Geométricas via Fractais e as suas influências sobre a construção do conhecimento desse assunto. A pesquisadora elaborou uma sequência de atividades fundamentadas na metodologia da Engenharia Didática. Esta sequência ocorreu via três blocos, a saber, construção de Fractais, Geometria Dinâmica para a representação dos Fractais e, por fim, um enfoque na generalização. Seus sujeitos de pesquisa foram alunos do Ensino Médio, sendo 26 alunos do 1º ano, 14 do 2º ano e 4 do 3º ano, de uma escola particular de Mauá/SP, que aceitaram o convite da pesquisadora em participar de oficinas.

Zanetti (2017) visava elaborar uma sequência didática explorando atividades práticas que auxiliassem os alunos no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de sequências, progressões geométricas e logaritmos. Sua pesquisa também foi baseada na metodologia da Engenharia Didática e seus sujeitos foram alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola de Ensino Integral do município de Cordeirópolis/SP.

Chiconato (2013) idealizou por meio de sua pesquisa auxiliar a compreensão do conteúdo de PG através de material didático, embasado na Engenharia Didática. Para tanto, desenvolveu uma sequência didática baseada na situação-problema da simulação de um rio poluído, e tinha por objetivo que os alunos determinassem um modelo matemático para prever o tempo da despoluição desse rio. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Ibitinga/SP. Destacamos que a pesquisa foi desenvolvida por meio de cinco encontros.

Malta (2019) propôs, por meio de seu trabalho, analisar quais as contribuições da aprendizagem cooperativa, com o auxílio de tecnologias digitais, no ensino de progressões em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Manaus/AM. O ambiente virtual *Google Classroom*[14] foi de extrema importância para a aplicação da proposta da autora, na medida em que, com a sua utilização, foi possível avaliar a aprendizagem dos alunos das turmas participantes.

Valmorbida (2018) elaborou uma proposta de atividades que tinha o propósito de auxiliar no ensino de Progressões Geométricas, por meio da construção de Fractais com a assistência do software GeoGebra. A aplicação da pesquisa ocorreu via oficina que teve como público 16 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Nova Erechim/SC.

[14] O Google Classroom é um serviço grátis para professores e alunos que os ajuda a organizar as tarefas, aumentar a colaboração e melhorar a comunicação. Disponível em: https://edu. google.com/products/classroom/. Acesso em: 08 ago. 2019.

Quadro 1 - Principais resultados das pesquisas

(continua)

Pesquisa	Principais Resultados
ARRUDA (2013)	➢ Por meio de sua análise percebeu, com relação aos conteúdos de PG, Juros Compostos e Função Exponencial, que alguns tópicos recomendados pelo CBC/MG (Currículo Básico Comum de Minas Gerais) e o PCN não eram abordados nos livros didáticos. ➢ Também verificou que esses conteúdos são trabalhados em capítulos distintos e raramente são correlacionados.
BARBOSA (2013)	➢ Segundo a autora, a calculadora serviu de alavanca para o ensino da PA e da PG, pois, através dela, permitiu-se que os alunos manipulassem os dados dos enunciados, compreendessem os padrões apresentados, estabelecessem relações e dessem sentido a elas.
CHICONATO (2013)	➢ Segundo a autora, as sequências didáticas devem fazer parte do cotidiano escolar e isso foi constatado mediante os dados positivos de sua pesquisa. ➢ Ressalta, também, que essas sequências didáticas devem ser um complemento das aulas expositivas para estabelecer uma possível aprendizagem eficiente seguindo esses dois vieses.
GONÇALVES (2007)	➢ Sua pesquisa verificou que os fractais confeccionados por meio de dobraduras, pelo dinamismo dos softwares ou pela observação do Tetra - Círculo, facilitaram a compreensão da auto-semelhança por parte dos alunos, sujeitos da pesquisa, uma vez que eles observaram as características que a pesquisadora pretendia. ➢ A autora também afirma que a auto-semelhança, verificada nos fractais, contribuiu para o processo de generalização das fórmulas da PG.
LOPES (2017)	➢ Seus resultados obtidos no Ensino Médio foram semelhantes ao do Ensino Superior na medida em que os alunos desconheciam o conteúdo de PG de ordem superior. ➢ Ambos os grupos tiveram dificuldade em trabalhar com a PG de segunda ordem, especificamente para obter o termo geral das mesmas.

Quadro 1 - Principais resultados das pesquisas

(conclusão)

MALTA (2019)	➢ Segundo a autora, através de sua pesquisa, o ensino de progressões tornou-se mais dinâmico e os alunos puderam utilizar seus conhecimentos prévios e intercalar com a aplicação das progressões no seu cotidiano. ➢ Ainda, das duas turmas envolvidas na pesquisa, constatou-se que "uma obteve um resultado bem melhor que a outra, pois esta demorou um pouco para ingressar no ritmo da aprendizagem cooperativa, mas, no final, ambas estavam correspondendo a um aprendizado significativo." (p. 50).
MARCHETTO (2017)	➢ A autora afirmou que, por meio do trabalho, os alunos conseguiram estabelecer as relações existentes entre PA e PG, com as funções afins e exponenciais, respectivamente. ➢ Ainda, os resultados satisfatórios devem-se em boa parte, pelas leituras dos diferentes tipos de representações, que o software *GeoGebra* proporcionou aos alunos. ➢ Estes resultados contribuíram para diminuir as defasagens, atribuindo significados aos conteúdos estudados e um avanço no ensino, bem como na aprendizagem dos alunos.
VALMORBIDA (2018)	➢ Para a autora, "afirmar que a oficina proporcionou a aprendizagem significativa em todos os estudantes é arriscado, por que a aprendizagem não se materializa de forma imediata. O que pode ser afirmado, é que as condições para a aprendizagem significativa dos conteúdos de PG foram dadas aos alunos, ao permitir que cada um se aproprie do conhecimento". ➢ Ainda, as atividades promoveram o espírito de colaboração, interação e comunhão entre os alunos participantes. Houve também, uma troca de experiências e distintas possibilidades de simular matematicamente situações da realidade. Além disso, o *GeoGebra* facilitou o entendimento dos conceitos envolvidos, pois por meio dele, foi possível criar e explorar as representações das atividades realizadas.
ZANETTI (2017)	➢ Sua pesquisa constatou que a sequência didática foi muito proveitosa, pois aconteceu uma melhoria no empenho dos alunos ao realizar as atividades, existindo certa satisfação por parte deles ao confeccionar os cartões fractais, havendo envolvimento durante o preenchimento da Ficha do Aluno disponibilizada durante as atividades. ➢ Também afirma que a dificuldade dos alunos o levou a ter uma maior interação com eles, de modo a auxiliar a visualização dos termos gerais das sequências encontradas.

Fonte: Autores baseados nas dissertações e teses.

Desta forma, podemos observar que apesar de a quantidade de trabalhos desenvolvidos com um olhar para a PG ainda ser tímida, há uma preocupação, diante dos resultados observados, em expor novas ferramentas para a melhoria do seu ensino nas aulas de Matemática. Nossa pesquisa também busca por colaborar nessa ótica.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, damos ênfase à introdução desta pesquisa, na qual é relatado um pouco sobre as experiências acadêmicas e profissionais do pesquisador. Também são destacados os objetivos e a questão norteadora/problema, como também, um mapeamento de trabalhos acadêmicos de Pós-graduação produzidos em dois vieses: Resolução de Problemas e PG.

No Capítulo 2, descrevemos o referencial teórico referente à Resolução de Problemas, enfatizando os embasamentos teóricos que sustentam esta dissertação. Neste sentido, optamos por fazer um pequeno histórico sobre a Resolução de Problemas, contendo suas principais características e a MEAAMRP. Ainda, realçamos como as pesquisas desenvolvidas no Ensino Superior vêm sendo trabalhadas em conjunto com a MEAAMRP fundamentadas em alguns autores (Ferreira, Silva e Martins, 2017; Justulin, 2014; Justulin e Noguti, 2017).

No Capítulo 3 são expostos dados referentes à PG, a saber, um breve histórico sobre ela, como está evidenciada nos documentos oficiais do Ensino Médio e Ensino Superior, e ainda, alguns dos seus conceitos presentes nesta pesquisa.

No Capítulo 4, são descritos os procedimentos metodológicos seguidos nesta dissertação. Nele são apresentados: a metodologia, o contexto, a contextualização dos sujeitos, a escolha das questões e os instrumentos de coleta de dados da pesquisa.

No Capítulo 5, enfatizamos o relato dos encontros descrevendo como eles ocorreram, dando ainda destaque a três eixos de análise (Os conceitos prévios como agente desencadeador na aprendizagem de novos conhecimentos na MEAAMRP; O trabalho colaborativo e cooperativo na construção do conhecimento pessoal e profissional de licenciandos em Matemática da UFSM e Desafios e possibilidades no uso da MEAAMRP) que achamos pertinentes durante nossa pesquisa. Por fim, no Capítulo 6, evidenciamos as Considerações Finais seguida das Referências, dos Anexos e dos Apêndices. Realçamos que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

CAPÍTULO 2 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> *“Considerada o ‘coração’ da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas.”*
> *(Norma Allevato e Lourdes Onuchic)*

Neste capítulo apresentamos um breve desenvolvimento histórico da Resolução de Problemas até sua organização como MEAAMRP e também, um estudo de como ela vêm sendo trabalhada no Ensino Superior.

2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas começou a ganhar importância, em particular, nos Estados Unidos, a partir dos anos 40 sendo que, nas últimas décadas, educadores matemáticos começaram a vê-la com mais atenção. (ONUCHIC, 1999).

Os primeiros estudos sobre a Resolução de Problemas na Educação Matemática surgiram neste país (EUA), após forte influência de George Polya com a publicação de seu livro *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Nele, o autor propõe o ato de resolver problemas fazendo uso de quatro passos, a saber, compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto analisando e discutindo a solução encontrada.

No início da década de 1970, a Resolução de Problemas passou a ser investigada sistematicamente na medida em que são averiguadas quais as implicações que sua utilização, nas aulas de Matemática, propiciava ao currículo escolar norte americano. A partir disso, no fim dos anos 70, muitos estudos começaram a ser desenvolvidos mundialmente validando, assim, a sua importância no ensino de Matemática. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

Nesta perspectiva, Onuchic e Allevato (2004) relatam que nos anos 80 o *National Council of Teachers of Mathematics*[15] (NCTM), propôs recomendações às escolas estadunidenses com o intuito de uma melhoria da Educação Matemática para todos. Dentre essas recomendações, a primeira indicava que resolver problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80 e, ainda, destacava que a habilidade em resolver problemas deveria ser trabalhada em constância durante toda a década de 1980.

[15] Traduzido para o português como *Conselho Nacional de Professores de Matemática*.

Onuchic (1999) também destaca que apesar dos estudos da década de 1980 estarem preocupados com o processo de resolução de problemas, este ainda estava preso à busca da solução do problema. Além disso, devido a pensamentos discordantes de pessoas e grupos sobre a Resolução de Problemas, ela acabou por não atingir o objetivo pretendido naquela década. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

Cabe destacar que, segundo Schroeder e Lester (1989 apud ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 37), a Resolução de Problemas possui três modos diferentes de ser abordada no ensino de Matemática: ensinar *para* a resolução de problemas, ensinar *sobre* a resolução de problemas e ensinar *através* da resolução de problemas. Nas próximas seções destacaremos cada uma dessas concepções com ênfase na MEAAMRP, a qual será utilizada neste trabalho.

2.1.1 O ensino de Matemática *sobre* a Resolução de Problemas

O centro desse tipo de abordagem no ensino de Matemática se refere a utilizar as estratégias de Resolução de Problemas que foram propostas por Polya (1945). Nessa concepção, tratamos a Resolução de Problemas como um conteúdo ou teoria nova.

Ao se trabalhar no horizonte dessa abordagem, o professor deve evidenciar com os alunos os quatro passos, interdependentes, no processo de resolver problemas destacados por Polya (1945). Estes passos permitem ao discente a compreensão do problema e também a reflexão sobre a solução encontrada durante a execução do plano ao fazer um retrospecto crítico sobre ela.

A heurística, ato de fazer descobertas, tem forte influência nesse tipo de abordagem visto que o professor segue uma orientação para com os alunos que objetiva estabelecer passos e processos gerais a serem seguidos, independente do conteúdo abordado. Para resolver o problema indicado, caberá ao aluno fazer descobertas e assimilar conteúdos, a fim de estabelecer e compreender a solução encontrada. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

2.1.2 O ensino de Matemática *para* a Resolução de Problemas

O eixo central dessa abordagem é basicamente de que, num primeiro momento, o aluno aprenda conceitos matemáticos e, na sequência, seja capaz de usá-los para resolver problemas rotineiros ou não rotineiros relativos a esses conceitos. Nessa abordagem, o que interessa ao professor é o fato de o aluno saber resolver o problema proposto utilizando os conceitos, regras e/ou fórmulas matemáticas ensinadas anteriormente.

Por muitas vezes, a Matemática é vista de maneira compartimentada no contexto escolar, no qual o conteúdo trabalhado na aula é seguido de atividades que tem o intuito de que o aluno ponha em prática, por meio de problemas ou não, os conhecimentos adquiridos anteriormente. Este tipo de abordagem ainda é uma preferência dos professores de Matemática em seus planejamentos de aulas, já que por muitas vezes considera-se a melhor forma de se aprender os conceitos e conteúdos da Matemática resolvendo problemas ou listas de exercícios.

Nesse enfoque de ensino, a Resolução de Problemas é tratada como uma aplicação de métodos, focada num compilado de atividades com objetivo de resolver problemas.

Ao fazer uso dessa concepção da Resolução de Problemas, o professor deve, inicialmente, explicitar o conteúdo e/ou conceito matemático para, posteriormente, desenvolver problemas com os alunos. Um exemplo disso, dentro do ensino da PG, é ensinar a fórmula do termo geral de uma PG a fim de que os discentes apliquem-na em problemas semelhantes durante a sua resolução. Diante dessa perspectiva, Allevato e Onuchic (2014, p. 38) reforçam que

> Não obstante as aplicações de Matemática tenham inquestionável relevância, um perigo dessa concepção é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo. Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a resolução de problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático.

Em geral, o docente apresenta, prévia e sucintamente, algum exemplo e resolve-o perante a turma, para depois passar uma lista de exercícios para os alunos solucionarem. Desta forma, o professor fornece técnicas e mecanismos para os alunos aplicarem em outros exercícios semelhantes. Ressaltamos que esse enfoque sobre a Resolução de Problemas também é importante para a aprendizagem do aluno, uma vez que cada indivíduo possui uma forma particular de aprender.

2.1.3 O ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas

Ao se ensinar através da Resolução de Problemas, o ponto de partida deve ser o problema, que tem um papel de extrema importância para a aprendizagem do aluno, visto que ele será seu agente desencadeador do processo de ensino-aprendizagem. O problema tem o propósito de fazer com que o aluno aprenda Matemática, e é através dele que o discente adquire novos conhecimentos matemáticos. Por isso, é chamado de *problema gerador*.

Diante dessa perspectiva, a Resolução de Problemas assume um caráter metodológico para o ensino de Matemática, na medida em que quem constrói seu próprio conhecimento, através da resolução do problema, é o aluno, e o professor tem a função de ser um auxiliador/mediador neste processo.

Nessa concepção de Resolução de Problemas, o enfoque é ensinar a Matemática através do problema, o que difere das concepções anteriores, onde o problema tem um caráter de complementar à compreensão de algum conceito da Matemática. Destacamos que o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser visto como uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática na Educação Básica.

No viés da relevância do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato (2004) destacam que esta metodologia pode proporcionar um melhor entendimento para o aluno nas aulas de Matemática, uma vez que

> [...] a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de: relacionar uma determinada ideia Matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos, relacionar um dado problema a um grande número de ideias Matemáticas implícitas nele, construir relações entre as várias ideias Matemáticas contidas num problema. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 242).

Cabe destacar que ao utilizar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, não há a necessidade de excluir as outras duas concepções. Pelo contrário, podemos fazer com que o ensino de Matemática seja compreensível para o aluno tanto ao reunir as três concepções da Resolução de Problemas, como as abordando separadamente, dependendo da proposta elaborada para a aula. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

2.1.4 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Num primeiro momento, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) trabalhava, com orientação da Prof.ª Drª. Lourdes de La Rosa Onuchic, com a perspectiva do Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Porém, ao perceberem que essa metodologia de ensino também propiciava a avaliação tanto dos alunos quanto dos professores, Onuchic e Allevato (2011), por meio de resultados apontados pelas pesquisas do GTERP, passaram a denominá-la de MEAAMRP. Segundo as autoras,

> ao considerar o Ensino-Aprendizagem-Avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver a resolução de problemas. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

A avaliação é um fator importante dentro dessa metodologia, que foi integrada ao processo de ensino-aprendizagem, pois através dela o aluno poderá potencializar seu desenvolvimento crítico e criativo, tornando-se um cidadão participativo socialmente, culturalmente e profissionalmente, e ainda, auxiliando-o no sucesso em Matemática. (PIRONEL; VALLILO, 2017).

Os autores evidenciam que:

> A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe que a avaliação deva acontecer durante todo o desenvolvimento da atividade proposta pelo professor. Por outro lado, o processo de avaliação deve ser iniciado antes mesmo do início da aula, quando o professor começa a elaborar o problema gerador ou decide adotar um problema existente. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 281).

Cabe ressaltar que, nesta metodologia, o ponto de partida para o ensino de Matemática também é um *problema gerador*. É por meio dele que o aluno deverá estabelecer conexões com conteúdos anteriores, produzindo e aprimorando novos conhecimentos, ou seja, o problema será o desencadeador do processo de ensino-aprendizagem do aluno e, ao professor, caberá auxiliá-los na construção desses nos conhecimentos.

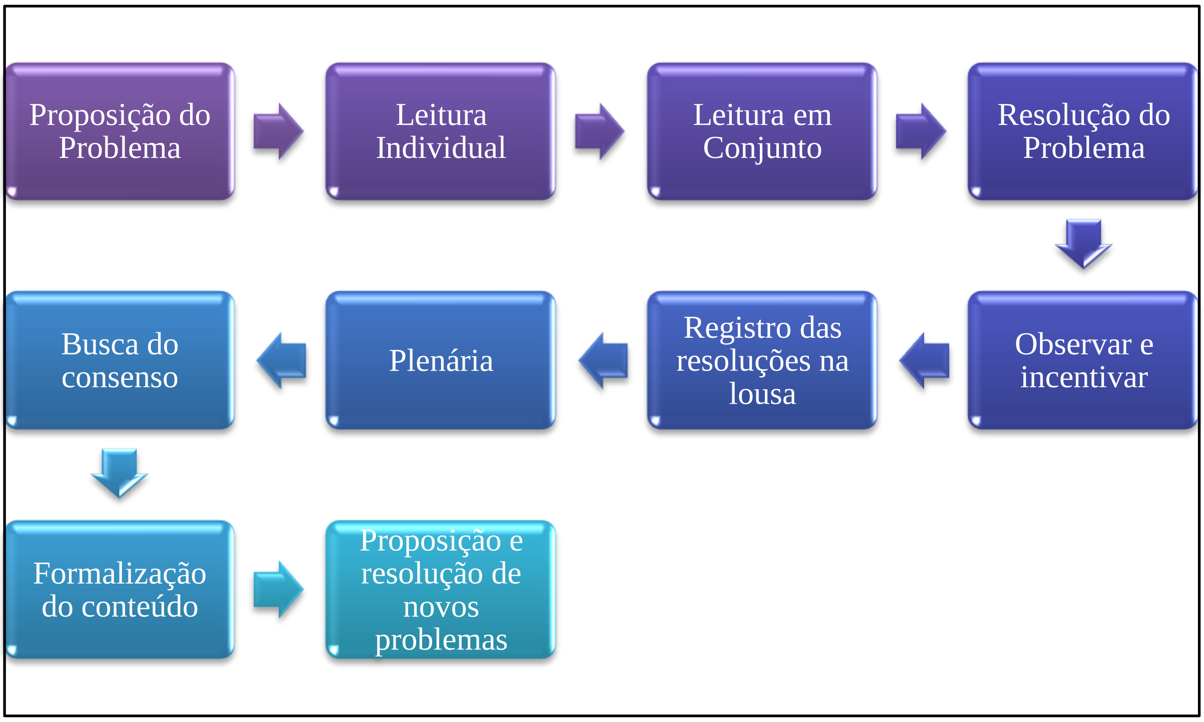
Reforçando a importância dessa metodologia nas aulas de Matemática, Allevato e Onuchic (2014, p. 47) argumentam que:

> Recomendando fortemente esse trabalho em sala de aula, Van de Walle (2001) defende que a resolução de problemas deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática. Ele chama a atenção para o fato de que esse trabalho começa sempre com os alunos, ao contrário de outras formas em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando o que os alunos trazem consigo e para a sala de aula. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. Nesse sentido é que a avaliação se realiza integrada ao ensino e à

> aprendizagem, pois nessa metodologia o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo, bem como os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas (ditas tradicionais).

Ainda segundo Allevato e Onuchic (2014), o professor ao utilizar essa abordagem metodológica nas aulas de Matemática, poderá organizar e planejar suas aulas utilizando 10 etapas, esquematizadas na Figura 2, que foram propostas como orientadoras do processo de utilização da MEAAMRP.

Figura 2 – As 10 etapas sugeridas para a MEEAMRP



Fonte: Autores (2019), baseado em Allevato e Onuchic (2014).

Destacamos que, dentre as diferentes formas de se abordar a Resolução de Problemas, a MEAAMRP foi a escolhida para o desenvolvimento e aplicação das atividades propostas nesta dissertação.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO SUPERIOR

Segundo nosso levantamento, destacado anteriormente no Capítulo 1, as pesquisas de Pós-graduação que envolvem a Resolução de Problemas e que possuem como participantes discentes do Ensino Superior ainda são pequenas na região Sul, tanto com sujeitos dos cursos de Matemática Licenciatura quanto de outros cursos que possuem conteúdos de Matemática superior, como por exemplo, as disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, presentes nos cursos de Engenharias.

Quanto a Resolução de Problemas no curso de Matemática Licenciatura, Rodrigues, Silva e Ferreira (2016, apud FERREIRA; SILVA; MARTINS, 2017, p. 188) evidenciaram, através de um mapeamento, que a Resolução de Problemas aparece em diversas ementas dos Projetos Político-Pedagógicos dos cursos de graduação de Matemática Licenciatura no Brasil, porém, ela não é vista como uma disciplina. Segundo os autores, a Resolução de Problemas aparece como um recurso metodológico presente em outras disciplinas das áreas da Educação e da Matemática.

Nossa pesquisa se diferencia do que foi apontado pelos autores, pelo fato de que o curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM adotou a Resolução de Problemas como uma Disciplina Complementar de Graduação (DCG) até 2019/2 e disciplina obrigatória a partir 2020/1.

Ferreira, Silva e Martins (2017) destacam que a Resolução de Problemas em pesquisas no âmbito do Ensino Superior, tanto na formação inicial de professores quanto na abordagem em outros cursos, pode ser trabalhada em duas vertentes:

> i) Com conteúdos da Educação Básica: Neste caso, a Resolução de Problemas é trabalhada com conteúdos do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Em geral, esses conteúdos são abordados em disciplinas de Matemática Elementar, dadas no início de Graduação (Licenciatura ou outros), ou em outras disciplinas como Didática, Estágio Supervisionado, etc.
> ii) Matemática Superior: Nesta abordagem, a Resolução de Problemas é trabalhada em disciplinas de nível superior, como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata, Análise Real, Equações Diferenciais, etc. (FERREIRA; SILVA; MARTINS, 2017, p. 191).

Diante disso, nossa dissertação possui a abrangência descrita no item (i), destacado pelos autores supracitados, uma vez que pretendemos com ela proporcionar uma abordagem metodológica diferenciada para o ensino da PG no Ensino Superior, em especial no curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM.

Porém essa pesquisa também pode ser expandida para as disciplinas de Matemática do Ensino Superior que possuam esse conteúdo matemático em suas ementas como, por exemplo, a Matemática Discreta, vista nos cursos de Engenharias e da área da Computação.

Reforçando a relevância desta metodologia de ensino para a futura prática docente dos licenciandos em Matemática, envolvidos na pesquisa, destacamos o que foi evidenciado por

Ferreira, Silva e Martins (2017, p. 215) quanto ao uso da MEAAMRP para conteúdos da Educação Básica, como a PG, nos cursos de Licenciatura em Matemática.

> É notória uma presença mais acentuada da metodologia da RP em cursos de Licenciatura em Matemática com o uso de conteúdos da Educação Básica abordando conteúdos da Matemática Elementar. Observamos que as pesquisas convergem para a preocupação em formar um professor reflexivo e preparado para atuar na docência, mesmo com o uso de conteúdos básicos de Matemática. Nesse movimento de repensar a prática docente, abordando conteúdos básicos de forma diferenciada na Licenciatura em Matemática, criam-se novos caminhos, novas possibilidades em Educação Matemática, sempre priorizando o aluno como protagonista do seu aprendizado. E as pesquisas têm mostrado que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem se apresentado como um caminho viável para atingir esses propósitos.

Corroborando com a importância desta metodologia nos cursos de Matemática Licenciatura, Justulin (2014, p. 77-8) reforça que

> [...] os futuros professores, ainda alunos do curso de Licenciatura em Matemática, passaram por aproximadamente 12 anos de escolaridade e apresentam uma concepção sobre o trabalho com resolução de problemas. Discutir suas experiências e apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mostra-se importante ao futuro professor.

Ainda nesse panorama, Justulin e Noguti (2017) apresentam um mapeamento de dissertações e teses na BDTD, com o intuito de analisar de que forma e como os pesquisadores estavam abordando a formação de professores e a Resolução de Problemas, concomitantemente, em suas pesquisas. As autoras, ao utilizarem os descritores *Resolução de Problemas* e *Formação de Professores*, encontraram um total de 96 trabalhos, no entanto após uma análise mais criteriosa estabeleceram como *corpus* de seu mapeamento 17 trabalhos, sendo seis teses e onze dissertações. (JUSTULIN; NOGUTI, 2017).

Por meio de suas análises, as autoras identificaram que a principal maneira de trabalho com a Resolução de Problemas na formação de professores ocorreu no contexto de uma disciplina (33%), seguido de encontros de formação na universidade (11%), encontros em formação na HTPC[16] (11%), grupos de estudo em HTPC (11%), grupos de estudo na universidade (11 %) e oficinas (11%). (JUSTULIN; NOGUTI, 2017).

Assim, é necessário possibilitar que os licenciandos em Matemática possam refletir sobre sua formação inicial e buscar caminhos metodológicos diferentes para sua futura prática docente, de forma a oportunizar aos seus alunos a construção de seu próprio conhecimento

---

[16] Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo – nomenclatura utilizada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

tornando-os seres pensantes e reflexivos, tanto no contexto escolar quanto como cidadãos críticos.

Nosso trabalho também propicia para que futuros pesquisadores se disponham a averiguar as contribuições no ensino-aprendizagem-avaliação dos discentes por meio da MEAAMRP no âmbito das disciplinas de Ensino Superior e que através dela, possam contribuir para um ensino onde o aluno é agente ativo na construção do conhecimento e o professor um auxiliador na sua aprendizagem.

CAPÍTULO 3 - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

> *"Enquanto a população humana cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética."*
> *(Thomas Malthus)*

Neste capítulo apresentamos um caminho histórico da PG, sua inserção nos documentos oficiais que norteiam a educação brasileira e, também, os conceitos que serão abordados nos problemas deste trabalho que culminam nas relações da PG com os fractais.

3.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Historicamente, a procura por padrões na Matemática já é antiga. Povos como os babilônicos e egípcios, por exemplo, procuravam a todo o momento por padrões em seu cotidiano. Um exemplo disso é a busca de regularidades pelos egípcios relativas às enchentes do rio Nilo, há cerca de 5000 anos atrás. (LOPES, 2017). Através desse estudo, os povos sabiam qual era a melhor época para fazer o plantio e a colheita de seus alimentos.

> Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita. (LOPES, 2017, p. 1).

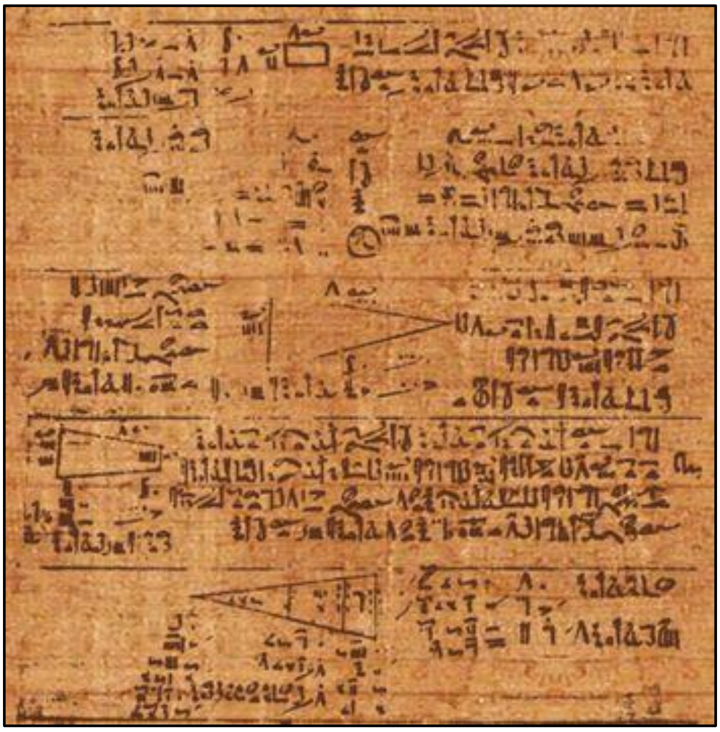
Uma fonte rica de conhecimento sobre a Matemática deixada pelos povos egípcios foram os Papiros, sendo que alguns resistiram por mais de três milênios. Em um desses Papiros encontrado em Kahun[17], datado de 1950 a.C., encontram-se alguns problemas teóricos sobre as progressões. Outro papiro que possuiu extrema importância para o conhecimento da Matemática egípcia antiga foi descoberto por Rhind (ou Ahmes), como mostra a Figura 3. Nele, deparam-se alguns problemas que versam sobre o conteúdo de progressões. (BOYER, 1974).

Um de seus problemas mais conhecidos é o de número 79, que tem seu enunciado bastante simples, porém sua interpretação pode ser rica na concepção e na construção da PG embutida no problema. O referido problema afirma: "S*ete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041*

---
[17] Vila na cidade de Faium do Egito.

espigas de trigo, 16807 hectares". (BOYER, 1974). Cabe ressaltar que o Papiro de Rhind tinha como uma de suas características o ato de instigar a mente com enigmas e recreações matemáticas.

Figura 3 - Papiro de Rhind



Fonte: Internet[18].

Podemos observar que esse problema se trata de uma PG, no qual a problemática do escriba pode ser interpretada da seguinte maneira: cada uma das sete casas possui sete gatos, no qual cada gato comeu sete ratos, e eles comeram sete espigas de trigo que, por sua vez, produziram sete grãos, cada. (BOYER, 1974). Temos assim, por meio desse problema, uma sequência definida por (7, 49, 343, 2041, 16807) que se caracteriza por ser uma PG finita de razão sete.

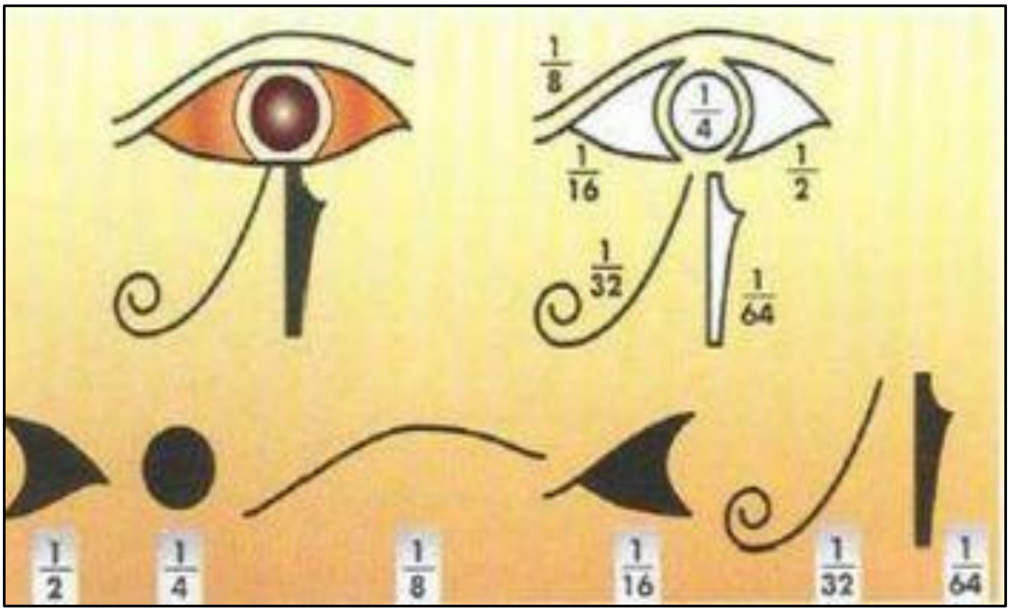
O enunciado simples e vago desse problema nos permite interpretá-lo tanto de maneira prática, ao questionar o número de medidas de grãos poupados por ter sete gatos em cada casa, quanto não prática, como saber a soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medida de grão. (BOYER, 1974, p. 12).

[18] Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049. Acesso em: 21 abr. 2019.

Nesse mesmo Papiro apresenta-se outro problema relacionado à PG, bastante conhecido como sendo o problema das frações dos olhos do deus Hórus. Segundo esse papiro o olho de Hórus é representado pela sequência fracionária $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$, em que cada parte de seu olho é representada por uma dessas frações, conforme Figura 4.

Podemos observar que esta sequência é uma PG finita de razão $\frac{1}{2}$, na qual o "valor" do seu olho é formado pela soma dessa progressão.

Figura 4 - Olho de Hórus



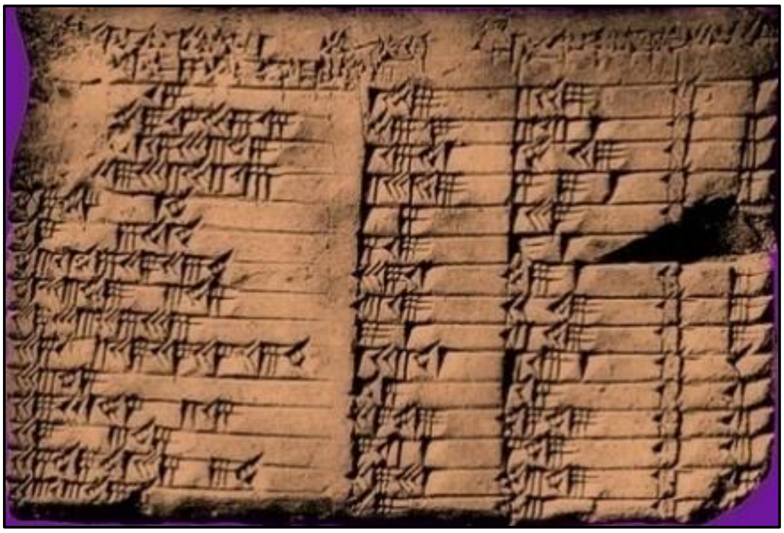
Fonte: Internet[19].

Nesta mesma época, na Mesopotâmia, surge outra grande fonte de conhecimento matemático dos povos antigos denominada de Tabletas Babilônicas, ilustradas nas Figuras 5 e 6. Dentre as diversas Tabletas existentes, a Plimpton 322 desenvolvida de 1900 a 1600 a.C., foi fundamental para a compreensão da matemática desenvolvida pelos povos antigos. (BOYER, 1974).

No meio das diversas Tabletas havia algumas que falavam sobre as progressões. Em uma delas é escrita a soma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$ cujas parcelas estão em PG. Para Boyer (1974, p. 27), existia a possibilidade de os povos babilônicos terem conhecimento das fórmulas gerais da soma de uma PG finita.

[19] Disponível em: https://2012easylusoesde1profecia.blogspot.com/2014/04/olho-de-horus-representado-na-pharmacia.html. Acesso em: 21 abr. 2019.

Figura 5 – Tableta Plimpton 322



Fonte: Internet[20].

Apesar das Tabletas babilônicas e dos Papiros egípcios serem semelhantes no sentido de só apresentarem casos específicos, sem se preocupar com a sua generalização, alguns pontos caracterizavam certos distanciamentos quanto ao nível da Matemática presente em cada uma.

Figura 6 – Tableta sobre Trigonometria.

Fonte: Internet.[21]

[20] Disponível em: https://icommercepage.blogspot.com/2013/07/plimmpton-322.html. Acesso em: 21 abr. 2019.
[21] Disponível em: http://revistapesquisa.fapesp.br/2017/09/22/trigonometria-em-tablete-de-3-700-anos-da-babilonia/. Acesso em: 21 abr. 2019.

Um dos possíveis motivos para esse distanciamento é o fato do Egito Antigo ser isolado geograficamente dos outros povos, enquanto a Mesopotâmia era o caminho de rotas de navios e, por consequência, ao seu povo lhes era oportunizado uma troca de saberes com outras culturas e civilizações. (BOYER, 1974). Concluímos então, que tanto os Papiros quanto as Tabletas foram de extrema importância para a Matemática e, consequentemente, para as progressões.

Outra obra de fundamental importância para o estudo da PG foi "Os Elementos de Euclides", de Euclides de Alexandria (século III a.C.). Apesar de esse livro estar associado à Geometria, ele contém importantes estudos nas áreas de Álgebra e Aritmética. No livro IX, Euclides enuncia a proposição 35 que nos traz a ideia da fórmula da soma da PG.

> Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como o excesso do segundo está para o primeiro, assim o excesso do último estará para todos os antes dele mesmo. (BICUDO, 2009, p. 348).

A referida obra também era constituída por problemas, alguns deles se referindo a PG. Dentre eles está o de número 21 do Livro IV, enunciado da seguinte forma: "Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre os dois quaisquer deles é um quadrado". (LOPES, 2017, p. 3).

Atualmente a PG têm sido, ainda que timidamente, evidenciada em dissertações e teses, no âmbito nacional, em suas mais distintas concepções e metodologias de ensino, conforme já exposto anteriormente.

Na próxima seção destacamos a importância dada a PG nos documentos oficiais do Ensino Médio, bem como nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) de Matemática Licenciatura, frisando quais disciplinas do curso de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) da UFSM são abordadas em suas ementas.

3.2 A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DO ENSINO MÉDIO

Até meados de 2018, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) era o principal documento que regia a educação brasileira. Nele se evidencia a importância do ensino de PG durante o Ensino Médio, em especial da PG infinita. Nesse documento é destacado que

> O estudo da Progressão Geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e de infinito. Essas idéias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas seqüências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às seqüências seus gráficos e relacionar os conceitos de seqüência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as idéias envolvidas, ao mesmo tempo em que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma seqüência sem precisar decorar informações. (BRASIL, 2000, p. 121).

Atualmente, junto com o PCN, um dos documentos que norteiam o ensino de Matemática, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Fundamental, é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Assim como no PCN, a BNCC também ressalta, no campo da Matemática e suas Tecnologias, a relevância do ensino da PG no transcorrer do Ensino Médio.

A BNCC organiza a Matemática e suas Tecnologias em cinco competências específicas, destacando em cada uma delas habilidades diversas que devem ser atendidas no ensino de Matemática.

A competência específica de número cinco tem como objetivo, contribuir para que o aluno desenvolva sua capacidade de investigação e de formulação de explicações, assim como de argumentos que podem emergir de experiências empíricas. (BRASIL, 2018, p. 540).

Dentre as inúmeras habilidades destacadas nesta competência, uma única está relacionada ao ensino da PG, o qual se apresenta associado às Funções Exponenciais. A saber, "(EM13MAT508) - Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas." (BRASIL, 2018, p. 541). Diante das unidades destacadas na BNCC, esta habilidade se enquadra no ensino de Números e Álgebra.

Evidencia-se, então, o destaque dado para os conteúdos de Sequências e PG nos documentos oficiais brasileiros no que se refere ao ensino de Matemática. Diante desse panorama, as pesquisas na área da Educação Matemática com enfoque nesse conteúdo, ainda que a passos lentos, também poderão sofrer certa expansão, na medida em que os pesquisadores, por muitas vezes, estão inquietados buscando metodologias alternativas para o ensino desse conteúdo matemático. Salientamos que nossa pesquisa também tem essa inquietação, porém com um olhar voltado para o Ensino Superior, em especial ao curso de Matemática Licenciatura da UFSM.

3.3 A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NAS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

As DCN, documento que norteia o Curso de Matemática Licenciatura, não enfatizam a PG de forma explícita. No entanto, ao destacar os conteúdos comuns a todos os cursos, afirma que:

> Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, *os conteúdos da Educação Básica*, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, *bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.* (BRASIL, 2002, p. 6, grifo nosso).

Conforme já ressaltado anteriormente, a PG tem importância nos documentos referenciados (PCN e BNCC). Por isso, ela se faz presente nos conteúdos comuns da Matemática Licenciatura.

No tocante aos conteúdos comuns a Matemática Licenciatura, que devem ser inclusos na matriz curricular desse curso de graduação, ressaltamos que é dado destaque aos conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise. (BRASIL, 2002, p. 6).

Dessa forma, é possível aferir, implicitamente, a importância dada ao ensino da PG nas Licenciaturas em Matemática, pois, conforme a BNCC, as habilidades referentes a este conteúdo estão enquadradas nos campos de Números e Álgebra.

Com relação às disciplinas da matriz curricular do curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM, evidenciamos que a abordagem dada a PG, em suas ementas, ainda é feita de forma tímida. No que se refere a esse conteúdo matemático, apenas a disciplina de Matemática Discreta A, ministrada no 3º semestre da grade do Noturno[22], discorre de forma explícita a PG, na Unidade 1, que versa sobre as Relações de Recorrência e as Sequências.

3.4 FUNDAMENTAÇÃO CONCEITUAL

Nessa seção apresentamos um breve estudo da PG com base em alguns autores (DANTE, 2010; RIBEIRO, 2010; SOUZA, 2010) e também conceitos relacionados, abarcados nesta dissertação.

---

[22] Versão 2019.

3.4.1 Princípio da Indução Matemática

As sequências, de forma geral, são fortemente atreladas ao Princípio da Indução Matemática (PIM), uma vez que esse procedimento torna possível a demonstração de propriedades/fórmulas presentes na Matemática Discreta. Dentre elas as envoltas nas progressões aritméticas e geométricas, como por exemplo, o termo geral e a soma finita de ambas.

Neste contexto faz-se necessário a apresentação, antes dos conceitos da PG, deste recurso matemático nesta dissertação. Seguiremos assim, a definição dada por Lima et al. (2006) que traremos neste trabalho como forma de um axioma.

Axioma 1: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha-se que:

(i) $P(1)$ é válida.

(ii) Para todo, $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

(iii) Então, $P(n)$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Evidenciamos que é dado ênfase a esse axioma nessa subseção da fundamentação conceitual, pois, direta ou indiretamente, ele estará presente em algumas resoluções feitas pelo pesquisador e/ou alunos para os problemas propostos.

3.4.2 Progressão Geométrica

Denominamos de PG toda sequência numérica, não nula, na qual o quociente entre um termo, a partir do segundo, e o seu antecedente, é constante. Esta constante é chamada de razão a qual representamos pela letra q (quociente). (RIBEIRO, 2010).

Uma PG pode ser ***finita,*** quando conhecemos do primeiro (a_1) ao último termo (a_n) da sequência, como, por exemplo, (5, 10, 20, 40, ⋯, 320), ou ***infinita*** quando o último termo da sequência não está explícito: (5, 10, 20, 40, ⋯).

De maneira geral, a PG é classificada de quatro formas. Esta categorização se deve, principalmente, por conta da razão (q) e do primeiro termo (a_1) da sequência.

i) Chamamos de PG ***crescente*** aquelas sequências numéricas que tenham seus termos positivos e $q > 1$, ou negativos e com $0 < q < 1$.

ii) A PG é dita ***decrescente*** quando seus termos são positivos e $0 < q < 1$, ou negativos e $q > 1$.

iii) As Progressões Geométricas ***alternantes*** são aquelas em que $q < 0$.

iv) Quando $q = 1$ dizemos que esta sequência é uma PG ***constante***.

Reforçamos que em uma PG denotada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q, partindo do 1º termo, a_1, para avançar um termo, basta multiplicar a_1 pela razão q ($a_2 = a_1\, q$); para avançar dois termos, basta multiplicar a_1 pelo quadrado da razão q ($a_3 = a_1 q^2$); para avançar três termos, basta multiplicar o 1º termo pelo cubo da razão q ($a_4 = a_1 q^3$); e assim sucessivamente. (DANTE, 2010). De maneira geral temos,

$$
\begin{gathered}
a_1 = a_1 q^0 \\
a_2 = a_1 q^1 \\
a_3 = a_2 q^1 = (a_1 q^1)q = a_1(q^1.q) = a_1 q^2 \\
a_4 = a_3 q^1 = (a_1 q^2)q = a_1(q^2.q) = a_1 q^3 \\
a_5 = a_4 q^1 = (a_1 q^3)q = a_1(q^3.q) = a_1 q^4 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Teorema 1[23]: Dada uma PG qualquer, com razão q e primeiro termo a_1, o enésimo termo (a_n) dessa sequência é concebido por $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Demonstração: A fim de provar o Teorema 1, utilizaremos o Axioma 1, citado nessa seção. Assim, para $n = 1$, temos

$$a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1 q^0 = a_1$$

Sendo esta uma sentença logicamente verdadeira. Suponhamos, por hipótese de indução, que $a_n = a_1 q^{n-1}$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, para $n + 1$ teremos, pela definição de PG, que $a_{n+1} = a_n q$. Por conseguinte, pela hipótese de indução,

$$
\begin{gathered}
a_{n+1} = (a_1 q^{n-1})q \\
a_{n+1} = a_1 q^{n-1+1} \\
a_{n+1} = a_1 q^n
\end{gathered}
$$

Em vista disto, a sentença $a_n = a_1 q^{n-1}$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

[23] Esse teorema é usualmente conhecido como termo geral da PG.

Ainda nesse horizonte, dada uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$, que seja uma PG, qualquer termo da sequência corresponde à Média Geométrica[24] do seu antecessor pelo seu sucessor, ou seja, $a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}} \Rightarrow a_n{}^2 = a_{n-1}.a_{n+1}$.

Além disso, seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, a_{n+1})$, uma PG finita, temos que os termos equidistantes, que estão a uma mesma distância do termo central, possuem o mesmo produto. De maneira geral,

$$a_n{}^2 = a_{n-1}.a_{n+1} = a_{n-2}.a_{n+2} = a_{n-3}.a_{n+3} = a_{n-4}.a_{n+4} = \cdots = a_{n-k}.a_{n+k}$$

Teorema 2: A soma dos *n* primeiros termos de uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n)$, com razão $q \neq 1$, é dada por: $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$.

Demonstração[25]: Consideramos a PG finita $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ e seja S_n a soma de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad (I)$$

Ao multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão q, logramos: $qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + a_4q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq$ que pode ser representado, devido à definição de PG, por

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_nq \qquad (II)$$

Subtraindo (II) de (I), obtemos $qS_n - S_n = a_nq - a_1$. Como $a_n = a_1q^{n-1}$, teremos: $S_n(q-1) = a_nq - a_1 = (a_1q^{n-1})q - a_1 = a_1(q^{n-1}q) - a_1 = a_1(q^n - 1)$.

Logo, $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}, \forall q \neq 1$. ■

Ainda, a fim de calcular o limite[26] da soma dos termos de uma PG infinita de razão q, com $-1 < q < 1$, utilizamos a seguinte relação: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

[24] Para mais informações sobre a Média Geométrica sugerimos a leitura de Ferreira (2017).
[25] Demonstração adaptada de Dante (2010).
[26] Nesta dissertação não iremos nos ater as definições e exemplos de limite, para tal sugerimos a leitura de Anton, Bivens e Davis (2007, p. 101).

Por fim, precisamos evidenciar que existem progressões de ordem superior tanto nas progressões aritméticas quanto geométricas. Ao nos aferirmos aquela relacionada à PG, quando a sucessão dos quocientes $\nabla b_n = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ de uma sequência[27] (b_n) resultar em uma PG dizemos que essa sequência é uma PG de segunda ordem. (ESCADA, 2012).

Um exemplo de uma PG de segunda ordem é a sequência (5, 15, 315, 46305, $\cdots$), na medida em que as divisões entre cada termo e seu antecessor, $\nabla b_n \cdot$, originam a sequência (3, 21, 147, $\cdots$) que é uma PG com razão $q = 7$. (LOPES, 2017).

Além disso, seja $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ uma PG de primeira ordem e $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ uma PG de segunda ordem, podemos definir o termo geral da PG de segunda ordem através da equação, $a_n = a_1 {b_1}^{\binom{n-1}{1}} q^{\binom{n-1}{2}}$, em que $q_1 = b_1$, e $q_2 = q$ é a razão da PG de primeira ordem. (LOPES, 2017)[28].

Evidenciamos que a PG de segunda ordem possui pouco material didático disponível para consulta tanto física quanto virtualmente. Desta forma não foi possível explorá-la demasiadamente em nosso trabalho. Ressaltamos também que os problemas da pesquisa que envolvem esse conteúdo matemático foram elaborados pelos autores, justamente pelo pouco recurso que estava à disposição.

3.4.3 Geometria Fractal

Intitulamos de Fractal toda figura e/ou objeto onde sua imagem, por mais reduzida que esteja, representa o seu todo, sendo esse fenômeno denominado de autossimilaridade. Benoit Mandelbrot[29] aferiu esse nome a estas figuras e/ou objetos que no latim representa quebrar (criar fragmentos irregulares). (SILVA, 2015b).

Ainda segundo o autor, antigamente os Fractais eram considerados como "monstros matemáticos" devido a sua Geometria, pois não era possível descrever equações simples para representá-los. Desta forma um conjunto *F* é dito Fractal se atender as seguintes condições:

- ❖ *F* deve possuir alguma forma de autossimilaridade ainda que aproximada ou estatística;
- ❖ A dimensão Fractal, definida de alguma forma, deve ser maior que a sua dimensão topológica;

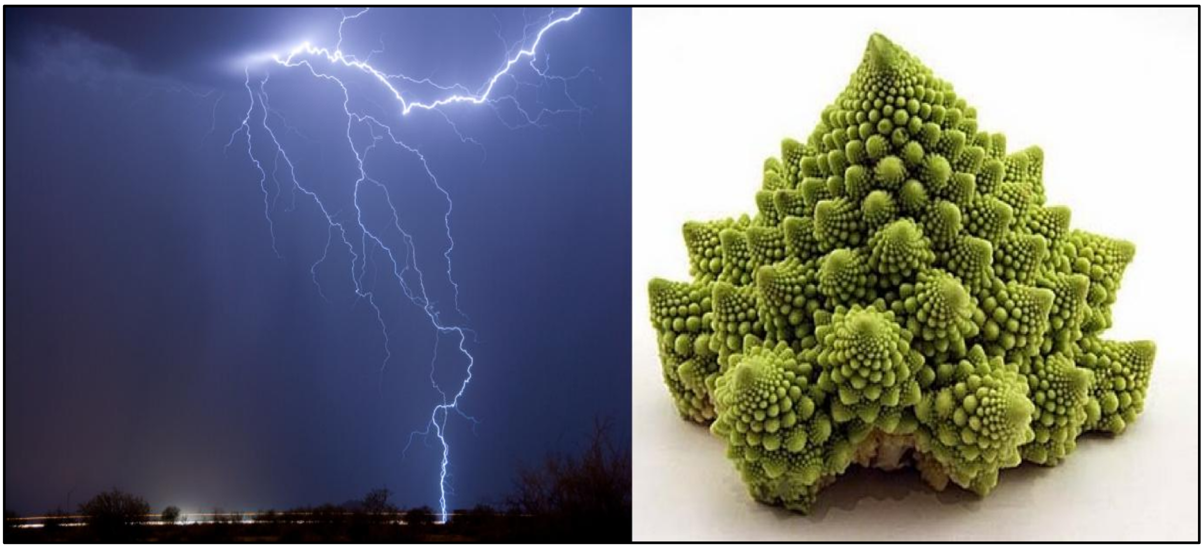
---

[27] Denotaremos por ∇ o resultado do quociente entre um termo sucessor pelo termo antecessor em uma progressão.
[28] Para a demonstração dessa equação sugerimos a leitura de Lopes (2017, p. 42).
[29] Matemático francês conhecido pelos seus estudos sobre os fractais.

❖ O conjunto *F* deve ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (SILVA, 2015b).

Destacamos que podemos encontrar fractais na natureza como, por exemplo, nos brócolis romanescos e relâmpagos (Figura 7), girassóis e nas dálias e babosas.

Figura 7 – Os Fractais na natureza

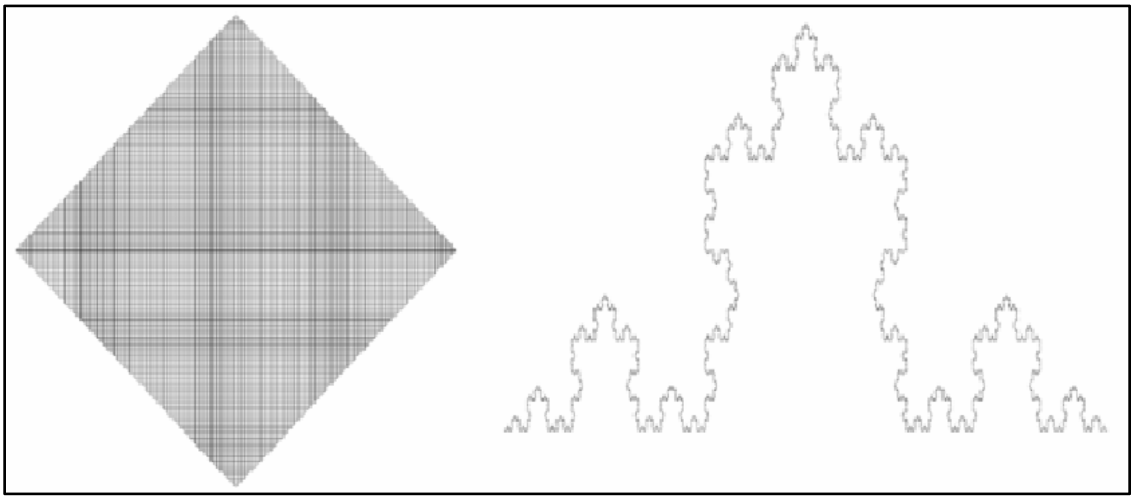


Fonte: Internet[30].

Também conseguimos representar os Fractais de forma geométrica ou aleatoriamente por processos repetitivos (conhecidos por iterações). Alguns exemplos disso são: As curvas de Koch e Peano (Figura 8) e o Triângulo de Sierpinsk.

[30] Disponível em: https://www.infoescola.com/meteorologia/relampago/e http://biogilmendes.blogspot.com/2012/04/brocoli-romanesco-uma-variedade-exotica.html. Acesso em: 15 mai. 2019.

Figura 8 – Fractais “produzidos”



Fonte: (SILVA, 2015b).

É possível observar que a PG está diretamente atrelada a Geometria Fractal, uma vez que as iterações de sua composição, tanto as da natureza quanto aquelas arquitetadas, se comportam exponencialmente, assim como a PG.

CAPÍTULO 4 - CAMINHOS METODOLÓGICOS

> *"O pesquisador precisa de um tempo para ele, para refletir acerca do que a produção e a análise de seus dados estão lhe indicando. Embora o compartilhamento de sua pesquisa possa indicar novos horizontes; o refletir sobre esses dados é um momento ímpar em uma pesquisa."*
> *(Marcelo Borba, Helber Almeida e Telma Gracias)*

Neste capítulo apresentamos a caracterização da pesquisa e apontamos os caminhos utilizados para o planejamento e obtenção dos dados a serem analisados. Indicamos o contexto em que ocorreu a pesquisa delimitando um perfil dos sujeitos participantes. Finalizamos citando os instrumentos utilizados para a coleta de dados.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Uma característica bastante predominante nas pesquisas desenvolvidas na área da Educação, em particular em Educação Matemática, é elas serem, em sua grande maioria, de cunho qualitativo, pois suas investigações estão preocupadas tanto com os seus resultados quanto com a interpretação dos dados obtidos.

Definimos nossa pesquisa, quanto à abordagem do problema, baseado em Lüdke e André (2015), como sendo de cunho qualitativo, por nos preocuparmos com os significados dados pelos sujeitos ao analisar os instrumentos de coleta de dados decorridos da pesquisa, sempre buscando evidenciar seus pontos de vista. Ainda, com relação aos procedimentos técnicos, classificamos nossa pesquisa como do tipo estudo de caso e natureza empírica.

No que se refere às pesquisas de estudo de caso, Lüdke e André (2015) reforçam que esse tipo de pesquisa possui algumas características que precisam ser destacadas e evidenciadas durante seu desenvolvimento. Segundo os autores, essas pesquisas visam a descoberta, enfatizam a "interpretação em contexto", buscam retratar a realidade de maneira integral e profunda, usam uma variedade de fontes de informação, revelam experiência substituta e permitem generalizações naturalísticas, procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social. (LÜDKE; ANDRÉ, 2015).

Ainda, Yin (2001) classifica o estudo de caso como uma pesquisa empírica que busca investigar um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real. E, também, define esse tipo de pesquisa como uma investigação que tem uma situação tecnicamente única, em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados, sendo que o resultado se baseia em várias fontes de evidências. (YIN, 2001, p. 32).

Neste estudo de caso, especificamente, buscamos analisar de que forma os estudantes do curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM, matriculados na DCG – Resolução de Problemas[31] resolveram problemas envolvendo a PG na perspectiva da MEAAMRP, com o propósito de identificar os procedimentos adotados, bem como, acompanhar as diferentes formas de raciocínio apresentadas pelos estudantes na tentativa da resolução dos problemas propostos.

4.2 CONTEXTO DA PESQUISA

O curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM foi criado em 1995, onde a primeira turma teve ingresso no 2º semestre de 1996. A matriz curricular do curso foi baseada na graduação já existente de Matemática Licenciatura/Diurno, criada em 1961, desta mesma universidade. No curso noturno, as disciplinas foram alocadas em 10 semestres letivos, dois a mais que do período diurno.

Como supracitado, a pesquisa foi desenvolvida no 2º semestre de 2019, na DCG – Resolução de Problemas, do curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM. A disciplina foi estruturada em 30 encontros, de duas horas cada, organizados no transcorrer do semestre letivo totalizando uma carga horária de 60 horas.

Ressaltamos que a coleta de dados da pesquisa não ocorreu durante todas as 30 aulas. Reservamos sete encontros para a aplicação das atividades relacionadas à coleta de dados, organizadas e realizadas conforme Quadro 2.

Quadro 2 – Organização dos encontros planejados da disciplina

Encontro	Conteúdo Pretendido
Aula 23	Conceitos iniciais da Progressão Geométrica
Aula 24	Termos equidistantes da Progressão Geométrica
Aula 25	Termo geral da Progressão Geométrica
Aula 26	Soma finita da Progressão Geométrica
Aula 27	Soma infinita da Progressão Geométrica
Aula 28	Progressão Geométrica de segunda ordem
Aula 29	Geometria Fractal associada à Progressão Geométrica

Fonte: Autores (2019).

[31] O pesquisador realizou sua docência orientada nessa disciplina com supervisão da orientadora do trabalho.

A escolha por esse quantitativo de encontros ocorreu devido ao conteúdo programático da disciplina e, também, pelo máximo de horas permitidas para a docência orientada, especificamente 30% da carga horária da disciplina (nove aulas).

A disciplina de Resolução de Problemas, até o segundo semestre de 2019, no curso de Matemática Licenciatura/Noturno da UFSM foi ofertada por meio de uma DCG. No entanto, após uma reforma na matriz curricular do curso, a partir do 1º semestre de 2020 esta disciplina se tornou obrigatória, sendo intitulada Resolução de Problemas A e alocada no 8º semestre da graduação de Matemática Licenciatura/Noturno.

Após a referida reforma, a ementa da disciplina passou por pequenas alterações, tanto na sua bibliografia básica quanto no seu conteúdo programático, visando abarcar novos olhares sobre a Resolução de Problemas e vislumbrando um trabalho com uma gama maior de conteúdos matemáticos.

Quanto ao programa previsto nas ementas das duas disciplinas, os quais constam nos Anexos A e B, suas mudanças foram um pouco mais sucintas comparadas às realizadas na bibliografia básica. Antes, na conjectura prevista na DCG, a disciplina possuía três unidades de ensino, a saber, entendimentos de Resolução de Problemas, estratégias para Resolução de Problemas e Resolução de Problemas. No entanto, a partir de 2020, foi acrescida uma nova unidade denominada por *A Pesquisa em Resolução de Problemas*, uma vez que as pesquisas na área da Educação Matemática com enfoque na Resolução de Problemas seguem em grande expansão, conforme detectado no mapeamento já exposto.

4.3 CONTEXTUALIZAÇÃO DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos da pesquisa foram seis licenciandos do curso de Matemática Licenciatura/Noturno matriculados na DCG de Resolução de Problemas. Evidenciamos que havia, originalmente, treze discentes matriculados na disciplina, no entanto apenas seis alunos frequentavam as aulas regularmente até o início da nossa pesquisa.

Cabe ressaltar que, no decorrer do semestre letivo da disciplina, era possível visualizar, em determinadas aulas, o descontentamento por parte de alguns alunos ao resolverem os problemas propostos para aquele encontro, talvez pelo fato de não os atrair e/ou motivar, ou também, por não estar disposto naquele dia a resolvê-lo, ou ainda, por estarem acostumados a serem agentes passivos na construção do conhecimento.

Neste olhar, Allevato e Onuchic (2014, p. 45) reforçam que “[...] um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema”.

Foi perceptível, também, o grande índice de faltas dos alunos[32] durante as aulas da disciplina, na medida em que eram poucos encontros onde, por diferentes fatores, todos os sujeitos da pesquisa se faziam presentes.

Para conhecer um pouco do perfil dos estudantes que foram sujeitos da pesquisa, elaboramos e aplicamos um questionário inicial, disponível no Apêndice C. Por meio dele tinha-se o intuito de evidenciar dados socioeconômicos dos sujeitos e também verificar, superficialmente, quais eram seus conhecimentos sobre a Resolução de Problemas e a PG, no âmbito do Ensino Superior e Ensino Médio. Além disso, pretendeu-se averiguar quais foram seus motivos pelo ingresso na graduação em Matemática e sua perspectiva para o seu futuro na prática docente.

Destacamos que, por medida ética, nosso projeto de dissertação foi registrado, através da Plataforma Brasil, e aprovado no Comitê de Ética de Pesquisas (CEP) da UFSM tendo o Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE)[33] sob o número de 27358119.0.0000.5346.

4.3.1 Perfil dos sujeitos

As idades dos sujeitos da pesquisa, três homens e três mulheres, variaram de 20 a 30 anos. Apesar de a disciplina ser originalmente ofertada para o noturno, constatamos que dois alunos eram oriundos da Matemática Licenciatura/Diurno.

Para um melhor entendimento do perfil de cada sujeito, optamos por fazer um breve resumo sobre cada um deles, com base nos questionários aplicados inicialmente. Ressaltamos que os nomes fictícios foram escolhidos pelos próprios sujeitos.

Fermat é licenciando em Matemática, na UFSM, desde o segundo semestre de 2015. Sua previsão de formatura é 2020/2. No entanto, depois de formado, não tem a pretensão de seguir na carreira do magistério, o que se mostrou bastante evidente em suas participações em aula. Seu principal objetivo após a obtenção do diploma é ingressar no serviço público em busca de um salário mais atrativo. Segundo ele, sua motivação para o ingresso no curso de

[32] Inclusive um dos nossos sujeitos de pesquisa (Marcelle) acabou reprovando por frequência ao findar a disciplina.
[33] É o identificador do Projeto, servindo de respaldo para o pesquisador e segurança para as pessoas envolvidas na pesquisa, de acordo com a legislação.

Matemática se deu pelo baixo ponto de corte exigido para essa graduação. Optou pela matrícula na disciplina de Resolução de Problemas por que necessitava de uma DCG.

No período da aplicação da pesquisa, o aluno Fermat era estagiário em um órgão público de Santa Maria/RS, possuía bolsa de iniciação científica e também dava aulas de reforço quando necessário.

Baraka ingressou no curso de Matemática Licenciatura/Diurno em 2015. Por conta do serviço militar obrigatório, necessitou trancar o curso por um período de um ano e meio, reingressando no segundo semestre de 2017, no Noturno. Baraka vislumbra, depois de formado, exercer a profissão de professor, pois acredita que por meio dela possa auxiliar na construção de um mundo melhor. Sua matrícula na disciplina de Resolução de Problemas ocorreu por que ela se encaixava em sua grade de horários.

Durante a coleta de dados da pesquisa, Baraka trabalhava em uma empresa particular de Santa Maria/RS. Nas aulas era perceptível seu interesse em participar das atividades propostas na disciplina. Identificamos nele a satisfação em resolver os problemas propostos.

Beija-Flor ingressou no primeiro semestre de 2016 no curso diurno e se formou em 2019/2. No transcorrer do semestre, foi aprovado em um mestrado em Educação Matemática. Era bolsista de tutoria na UFSM e, também, dava aulas particulares de reforço quando solicitado. Sua pretensão é seguir na carreira do magistério por acreditar ser sua vocação. Seu interesse por cursar a disciplina em destaque ocorreu por que precisava de DCG para se formar e, também, por razão de seu contato com esta metodologia em certo momento da graduação e acreditar que, ao cursá-la, teria mais aporte teórico e/ou metodológico sobre a Educação Matemática.

Beija-Flor relatou no decorrer de determinados encontros, que utilizou alguns dos problemas propostos na disciplina em seu Estágio Supervisionado do Ensino Médio, ocorrido no mesmo semestre da aplicação das atividades dessa pesquisa.

Joana iniciou o curso de Matemática Licenciatura/Diurno no primeiro semestre de 2012 e também concluiu o curso em 2019/2. No decorrer do curso teve que trancá-lo por quatro semestres devido a sua gravidez. Sua matrícula na disciplina ocorreu da necessidade por horas complementares e, também, por ter curiosidade sobre a Resolução de Problemas. Segundo ela, os estágios fizeram com que ela tivesse certeza de que estava no campo profissional correto.

Joaquim ingressou no curso de Matemática no segundo semestre de 2014 e precisou se afastar da graduação por conta de sua gravidez[34], fazendo o trancamento por dois semestres letivos. Durante a realização da pesquisa atuava como professora de reforço em uma escola municipal de Santa Maria/RS e em aulas particulares. Optou por cursar a disciplina de Resolução de Problemas, pois precisava de horas complementares e a disciplina se enquadrava na sua grade de horários.

Marcelle[35] é a que está a menos tempo no curso, tendo ingressado no segundo semestre de 2018. Era estagiária em uma escola municipal de Santa Maria/RS. Durante, aproximadamente, nove meses foi bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática/UFSM. Pretende seguir na carreira do magistério. Matriculou-se na disciplina de Resolução de Problema, pois foi a única disciplina ofertada em seu Portal do Aluno[36].

4.3.2 Conhecimentos dos sujeitos

Seus conhecimentos quanto a Resolução de Problemas eram limitados. Apenas um aluno (Beija-Flor) já havia estudado algo sobre esta metodologia em disciplinas como a Didática da Matemática e Educação Matemática. Com o propósito de diagnosticar, de maneira sucinta, o conhecimento dos sujeitos com relação à PG, buscamos fazer alguns questionamentos onde se desejava saber se em algum momento do seu ensino, tanto no nível superior quanto no médio, havia estudado esse conteúdo.

No que se refere ao ensino da PG no Ensino Médio, três sujeitos da pesquisa afirmaram ter estudado no 2º ano, enquanto dois não a estudaram e um não recordava. Já no Ensino Superior, cinco sujeitos afirmaram ter visto, em especial na disciplina de Matemática Discreta uma vez que, conforme já evidenciado, esse assunto faz parte de seu conteúdo programático.

Ainda no campo da PG, foi perguntado se eles consideravam o conteúdo importante para o aprendizado dos alunos no Ensino Médio. Apresentamos a seguir algumas respostas dadas pelos participantes.

> Sim, por ser um conteúdo importante para modelar situações como, por exemplo, juros compostos, e também para entender um pouco, ter uma ideia de limites no infinito. (Fermat).

---

[34] Escolheu seu nome fictício do sexo masculino.
[35] Destacamos que Marcelle participou de apenas um de nossos encontros.
[36] Portal online de matrículas para alunos da UFSM.

> Sim, é importante o ensino de PG no Ensino Médio, pois quando o seu entendimento é alcançado, possibilita o entendimento na vida; em produção de alimentos, crescimento populacional. (Baraka).
>
> Honestamente eu não sei, pois não aprendi direito e não consegui ver uma aplicação mais prática pelo fato do conteúdo ter sido passado muito rápido na disciplina, até por questões de tempo. No entanto, acredito que seja e pretendo pesquisar e entender mais sobre a PG, tanto para meu conhecimento quanto para minha atuação docente. (Marcelle).
>
> Sim, porque pode ser associado a vários outros temas da Matemática, como em Funções Exponenciais e Matemática Financeira. (Joana).

Cabe ressaltar que após a leitura dos questionários, algumas repostas serviram de estímulo para o desenvolvimento desta pesquisa na medida em que os conhecimentos, sobre a PG, dos sujeitos apresentam-se ainda limitados o que nos propiciava um melhor campo de estudo utilizando a MEAAMRP.

4.3.3 Quanto ao seu futuro profissional

Ainda, buscando uma visão quanto ao seu futuro profissional, lhes foi perguntado se pretendiam seguir na carreira docente. Um dos sujeitos, o aluno Fermat, afirmou não ansiar seguir profissionalmente no âmbito do magistério, pois acredita não ser "talhado" a ser professor. Evidenciamos, a seguir, algumas respostas de alunos que aspiram seguir na carreira.

> O que me motiva, é que quando formado, poderei e terei o poder de ensinar crianças, para que um dia possam ajudar a mudar o mundo. (Baraka).
>
> À vontade e desejo de sempre ser professor me motiva a seguir o magistério. (Marcelle).
>
> Ver que faço a diferença na sociedade, trabalhar ensinando e aprendendo com inúmeras pessoas diferentes. (Beija-Flor).
>
> Sempre me identifiquei com a docência e a experiência com estágio me motivou um pouco mais para isso. (Joana).
>
> Motiva, além do meu amor pela matemática em si (aquela que estudamos e que eu vou ensinar nas escolas), tenho uma vontade imensa de fazer com que meus futuros alunos não sintam medo ao precisar estudar matemática. Sintam prazer em aprender. (Joaquim).

Por fim, foram questionados sobre quais eram suas opiniões com relação ao ensino de Matemática em que o professor busca utilizar diferentes metodologias, como a estudada durante esta pesquisa. Foi constatado que todos compreendem que o professor deve ter conhecimento de diversas metodologias e que a sua utilização é benéfica ao aluno, independentemente de seu ano escolar. A seguir destacamos algumas de suas argumentações.

> Cada aluno aprende de forma diferente, sendo assim uma possibilidade para alcançar um maior número de aluno. (Joana).
>
> A Matemática está presente em diversas situações da vida humana, e às vezes parece muito abstrata, pelo modo ‘tradicional’ que é dado em sala de aula, o que também pode dificultar a compreensão desta pelos alunos. Com isso, aplicando outras metodologias de ensino de Matemática, acredito ser possível integrar mais os alunos, professores e os conteúdos, tornando a disciplina/ciência mais dinâmica e acessível para as diferentes realidades dos sujeitos envolvidos. (Marcelle).
>
> Com certeza! A matemática costuma ser o ‘bicho papão’ de todos, e infelizmente, na maior parte isso se dá pelo jeito que ela é ensinada. Tornar a matéria prazerosa será meu objetivo inicial. (Joaquim).

Por meio do questionário inicial, pudemos ter um panorama maior do perfil dos sujeitos dessa pesquisa e, de certa forma, nos orientar quanto à aplicação dos problemas sobre a PG, em consonância com a MEAAMRP, e também, ter uma noção, superficial, do conhecimento dos alunos sobre este conteúdo com relação ao seu estudo no Ensino Médio e/ou Ensino Superior.

4.4 ESCOLHA DAS QUESTÕES

Os encontros, com as aplicações das atividades, foram idealizados buscando seguir as 10 etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) para a MEAAMRP (destacado na página 30 dessa dissertação). Nesse âmbito, selecionamos questões que permitissem colocá-las em prática e que possibilitassem ao aluno pensar e formular ideias para solucionar o problema e gerar discussões com o intuito de formalizar o conteúdo pretendido, por mais que ele já fosse de conhecimento de alguns sujeitos.

Por se tratar de uma pesquisa onde os sujeitos são estudantes de nível superior, selecionamos problemas, referentes à PG, um pouco mais complexos do que os habitualmente trabalhados no Ensino Médio. Nesta perspectiva, destacamos o que é evidenciado por Pironel e Vallilo (2017) quanto à escolha do problema, por parte do professor, ao se trabalhar através desta metodologia de ensino.

> Quando o professor decide que o problema pode ser um ponto de partida para a construção de um novo conhecimento para o aluno, ele precisa se debruçar sobre a tarefa da escolha ou da elaboração de uma atividade que esteja alicerçada num problema ou numa situação-problema, cuja resolução seja o fio condutor da aprendizagem de determinado conteúdo pelo aluno. Nesse sentido, os objetivos almejados devem estar alinhados com os objetivos curriculares propostos para determinado conteúdo matemático. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 285).

Ainda nesta perspectiva os autores fundamentam que,

> Após ter definido qual seria o problema gerador, o professor deve iniciar um exame minucioso sobre a validade da atividade para que sejam alcançados os objetivos propostos. O professor precisa resolver o problema e tentar chegar à solução por diversos caminhos procurando vislumbrar, durante esse processo, possibilidades de erros ou de obstáculos que o aluno possa cometer ou enfrentar, com a finalidade de antecipar possíveis intervenções durante a resolução do problema. Precisa certificar-se de que os alunos sejam capazes de resolver o problema utilizando apenas conceitos, operações e propriedades previamente concebidas. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 286).

Neste horizonte optamos por problemas disponíveis nos bancos de questões das seleções de ingresso de diversas universidades brasileiras e das Forças Armadas. Ainda, priorizamos, também, pelos bancos de provas do ENEM e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

4.5 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Conforme evidenciado anteriormente, pesquisas do tipo estudo de caso necessitam de diferentes fontes de informação para averiguar os resultados e mostrar coerência diante da análise dos dados coletados na pesquisa desenvolvida. Nesse horizonte, destacamos como instrumentos de coleta de dados que foram utilizados na nossa investigação: dois questionários (final e inicial); diários de campos do pesquisador; registros de aulas; áudios; fotografias; folhas de registros das soluções dos problemas apresentadas pelos alunos e documentos iniciais.

Quanto ao emprego dos questionários, evidenciamos que ambos foram de grande relevância já que eles nos permitiram ter um olhar panorâmico sobre os sujeitos da nossa pesquisa. O questionário inicial buscou conhecer o perfil dos alunos, assim como destacar, superficialmente, sua noção sobre a Resolução de Problemas e a PG (em nível médio e/ou superior). O final, que apresentava questões abertas, ambicionou verificar quais as contribuições que os discentes tiveram, em nossa pesquisa, ao trabalhar a PG por meio da

MEAAMRP e também, suas constatações sobre o trabalho em grupo durante as resoluções dos problemas.

Ainda nessa conjuntura, ao término de cada aula o pesquisador elaborou um diário de campo com o intuito de assinalar o máximo possível de informações relevantes observadas durante aquele encontro. Esse diário de campo é essencial nas análises qualitativas, pois ele possibilita evidenciar as percepções do pesquisador durante a realização da pesquisa.

Por fim, a folha de registros das soluções dos problemas apresentadas pelos alunos é parte fundamental da análise dos dados da pesquisa, na medida em que nelas ficam registrados os encaminhamentos matemáticos seguidos pelos grupos para resolvê-los.

E, ainda, através dos áudios conseguimos retratar, mais fielmente, o ponto de vista dos sujeitos ao resolver determinado problema, uma vez que apenas com a observação podemos deixar de evidenciar algum aspecto importante que passou despercebido.

A opção por esta diversidade de instrumentos vem de acordo ao que é destacado por Yin (2001), a qual argumenta que, durante a coleta de dados, as pesquisas do tipo estudo de caso devem ter três princípios básicos: utilizar diversas fontes de evidência, criar um banco de dados para o estudo de caso e manter o encadeamento das evidências.

CAPÍTULO 5 - RELATO DOS ENCONTROS

> *"O papel do professor é justamente buscar situações problemáticas que tenham o potencial de adicionar novas perspectivas ao conhecimento do aluno, conduzindo-o a um novo estado de viabilidade. Uma situação será problemática quando tiver o potencial de desequilibrar os saberes viáveis, aos quais o sujeito recorre ao resolver situações problemáticas."*
> *(Beatriz D'Ambrósio)*

Neste capítulo faremos os relatos dos encontros apresentando algumas das discussões ocorridas durante o desenvolvimento do projeto e as resoluções comentadas das atividades dos alunos e, também, evidenciamos algumas categorias de análise que achamos pertinentes e que foram percebidas durante a aplicação dos problemas. Neste contexto, buscamos por uma resposta para nossa pergunta inicial.

5.1 OS ENCONTROS

Seguindo a orientação indicada por Allevato e Onuchic (2014), estruturamos nossa sequência didática de maneira que a folha de atividades apresentasse problemas que permitissem, aos discentes, gerar conhecimento e desenvolver seu processo de ensino-aprendizagem de Matemática, assim como a avaliação por parte deles e do pesquisador.

Evidenciamos que o objetivo a ser atingido com a elaboração desta sequência didática foi utilizar uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, em especial da PG, de forma que a MEAAMRP possibilitasse aos alunos construir conceitos, discutir e conjecturar ideias na busca de soluções para os problemas propostos.

Destacamos que, durante a discussão dos grupos referente às folhas de atividades, o pesquisador não interferiu na resolução dos problemas de maneira assertiva, sendo que cada pergunta foi respondida através de novos questionamentos que permitissem aos sujeitos refletirem e serem agentes ativos de seu próprio conhecimento. Conforme já evidenciado anteriormente, por meio dessa metodologia o professor deve assumir um papel secundário, de auxiliador no processo de ensino-aprendizagem.

Reforçamos que na disciplina havia seis alunos, sendo que a partir do segundo encontro um dos alunos (Marcelle) não compareceu mais, por isso em alguns momentos da pesquisa ela não é evidenciada. Dessa forma optamos por, em cada encontro, separá-los, sempre que possível, em dois grupos para que resolvessem os problemas propostos na qual era de livre escolha dos discentes a composição de cada um.

Com base nas primeiras aulas da disciplina preferimos por organizar nossos encontros com um máximo de três problemas uma vez que era notável que eles não resolveriam mais que esse quantitativo durante o tempo disponível.

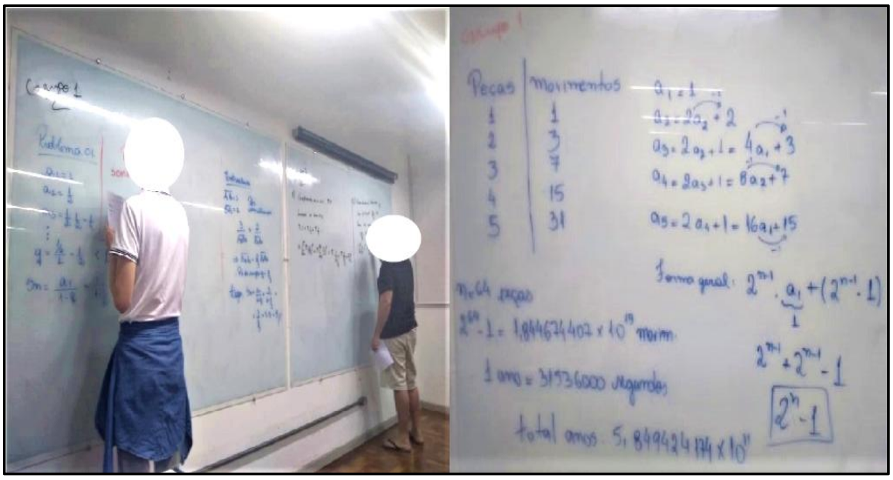
Como na DCG já trabalhávamos a Resolução de Problema na ótica da MEAAMRP, seguindo as 10 etapas propostas por Allevato e Onuchic (2014), os alunos já estavam cientes que era necessário explanar, no quadro, os caminhos que foram percorridos para chegar à solução do problema.

Consoante ao que já foi citado no capítulo anterior, o progresso da pesquisa foi registrado em áudios e fotografias, além da folhas de resoluções produzidas pelos grupos no transcorrer dos encontros, assim como diários de campo do pesquisador. Destarte, alguns momentos das conversas entre o pesquisador e os alunos estão relatados nessa seção, bem como, algumas fotografias, realizadas durante a plenária, e imagens das folhas de resoluções dos problemas apresentadas pelos alunos.

Para resguardar o nome dos participantes, sua identificação, quando forem citados, ocorrerá conforme o apelido fictício atribuído por eles próprios durante a aplicação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), Apêndice H, e descrito no Capítulo 4.

Na Figura 9 elucidamos como aconteceu a plenária de um dos encontros, no qual, geralmente, um membro de cada grupo utilizava um dos quadros para apresentar suas resoluções para os problemas com o objetivo de discuti-las. A parte à esquerda exemplifica como era realizada o registro das resoluções na lousa (etapa sugerida por Allevato e Onuchic (2014) para a MEAAMRP) e, à direita, como o quadro estava ao final desse momento.

Figura 9 – Momento do registro das resoluções na lousa e o quadro com a resolução de um dos problemas



Fonte: Dados da pesquisa.

Destacamos que no terceiro, quarto, sexto e sétimo encontro não houve uma exposição no quadro, visto que foi possível formar apenas um grupo (terceiro) ou então os alunos não terminariam todos os problemas na aula (quarto e sexto), tendo acontecido oralmente a plenária.

5.1.1 Primeiro Encontro

Num primeiro instante, fizemos a leitura do TCLE com os sujeitos da pesquisa, para que tivessem ciência de como iria ocorrer à coleta de dados da pesquisa e que sua participação era voluntária, deixando claro que poderiam retirar-se a qualquer momento. Deixamos aberto para questões referentes à pesquisa, porém isso não ocorreu.

Neste encontro os alunos assinaram o TCLE e escolheram os codinomes que seriam empregados durante a análise da pesquisa, a saber, Baraka, Fermat, Joaquim, Joana, Beija-Flor e Marcelle. Combinamos com eles que todos os encontros seriam gravados e fotografados para um diagnóstico futuro, sendo que nenhum dos sujeitos foi contrário a essas ações. Ressaltamos também, a eles, que, em momento algum, seus rostos e nomes verdadeiros apareceriam no transcorrer dos relatos dos encontros e/ou análise.

Após esse momento, pedimos para os alunos se reunirem em dois grupos para começarmos a trabalhar com o problema proposto para aquele dia. Neste encontro estavam presentes todos os seis sujeitos da pesquisa, formando assim dois trios.

O problema desta aula tinha como objetivo abordar os conceitos iniciais da PG. Para isso foi selecionada uma atividade em que fosse possível trabalhá-los por meio de um material manipulável, especificamente a Torre de Hanói, pois acreditamos que esse tipo de abordagem facilita a compreensão da Matemática.

E ainda, com relação ao público dessa pesquisa, foi uma forma de apresentar, para esses futuros professores, novas alternativas para o ensino da Matemática durante sua futura prática escolar. Nesse contexto, Silva (2015a, p. 13) corrobora que

> No jogo Torre de Hanói podemos desenvolver várias habilidades que estão intimamente vinculadas aos objetivos do ensino de Matemática, entre as principais podemos citar: planejamento das próximas jogadas, capacidade de generalização, criação do modelo matemático que dá a quantidade mínima de jogadas em função do número de discos.

Para o desenvolvimento do problema proposto, demonstrado na Figura 10, foi entregue a cada grupo uma Torre de Hanói com o objetivo de auxiliá-los na resolução e compreensão da atividade.

Figura 10 – Problema 1 do primeiro encontro

PROBLEMA 1 - (WATANABE – 2004): Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges:

"Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá à pó, e com um estrondo de trovões o mundo acabará."

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos, na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar?

Fonte: (WATANABE, 2004).

Após a entrega da folha com o problema e da Torre de Hanói, pudemos identificar o entusiasmo e a motivação dos alunos para resolver o que foi proposto. Acreditamos que este evento ocorreu pelo fato de que lhes foi possibilitado trabalhar com uma nova "ferramenta" de ensino e, também, por que o problema trazia uma situação mais "prática" do que as que vinham sendo trabalhadas nas aulas da disciplina.

Cabe destacar que dois alunos não conheciam e nunca haviam manipulado a Torre de Hanói. Diante desse cenário explicamos, brevemente, como ela é constituída e oportunizamos um tempo para que eles a manipulassem antes de começar a resolução do problema.

Figura 11 - Alunos manuseando a Torre de Hanói

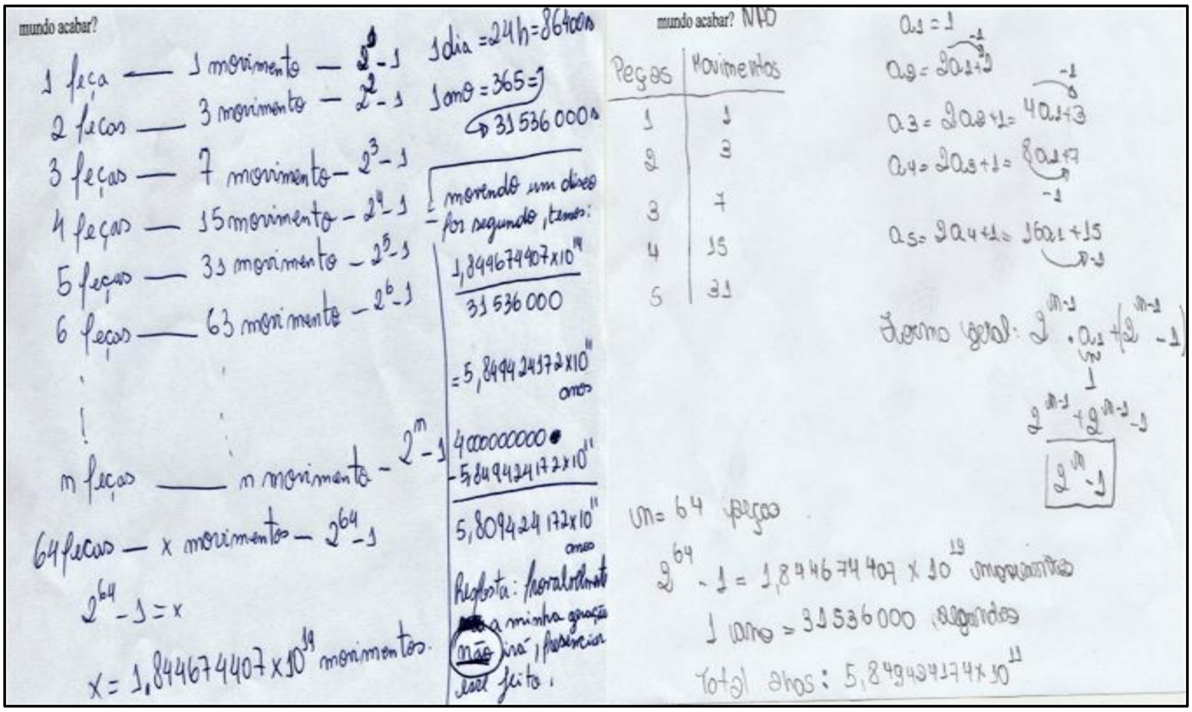
Fonte: Dados da pesquisa.

Após esse momento, foi solicitado que eles dessem início à resolução do problema, seguindo as etapas sugeridas nessa metodologia de ensino. Primeiro eles fizeram a leitura individual, na sequência seguiram para a leitura em grupo, na qual o pesquisador a fez junto com os alunos e, por fim, iniciaram as estratégias para a sua resolução.

Durante a resolução do problema, era perceptível a cooperação e o diálogo entre os sujeitos de cada grupo, a fim de conjecturar uma maneira para encontrar a solução do problema. Como havia alunos que desconheciam a Torre de Hanói, os grupos se apoiaram em diferentes eixos de trabalho, enquanto um membro manipulava-a, existia outro que contava o número de movimentos dados para que juntos conseguissem criar estratégias para resolver uma solução para o problema.

Questionamentos do tipo *"Professor você quer a resposta numérica?", "É um número tão grande assim?", "Como isso se "torna" uma PG?"*, ocorreram durante o andamento da aula e na busca pela resolução da atividade. Após discussões e conversas entre eles para solucionar o problema, os dois grupos conjeturaram e resolveram-no de forma bastante similar, conforme Figura 12.

Figura 12 – Resoluções dos grupos para o problema 1 do primeiro encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

A plenária ocorreu de forma tranquila, uma vez que os alunos de certa maneira, já estavam acostumados a irem ao quadro explanar e discutir suas ideias por conta da estrutura trabalhada durante a DCG. Como os caminhos seguidos foram bem similares, essa plenária ocorreu mais rápido que o habitual, já que a solução encontrada foi correta em ambos os grupos. Diante desse cenário, o pesquisador propôs algumas perguntas para serem debatidas a fim de gerar um momento de reflexão quanto ao seu futuro profissional.

Essas questões buscavam incitar discussões quanto à utilização dessa metodologia, em conjunto com a Torre de Hanói, numa turma regular de Ensino Médio mais numerosa do que a que estávamos trabalhando na DCG.

Alguns dos questionamentos foram: "*Seria possível trabalhar com esse problema e material manipulável em uma turma do Ensino Médio?", "Sem os conhecimentos prévios sobre a PG, o tempo disponível seria hábil?*", "*Como poderíamos administrar a atenção dada a cada grupo de uma turma com mais alunos que a nossa?"*, dentre outras.

Diante destas perguntas ficou evidente que os alunos perceberam que essa metodologia requer um bom planejamento do professor para ser utilizada em sala de aula, uma vez que diversos fatores irão contribuir para o sucesso (ou fracasso) do ensino-aprendizagem-avaliação do aluno no conteúdo proposto e o máximo de hipóteses, antes da aplicação dos problemas, devem ser levantadas para um bom rendimento em sala de aula.

Após o término das discussões da plenária, foi entregue uma folha a cada membro do grupo com a formalização desse encontro, conforme Apêndice F.

5.1.2 Segundo Encontro

Neste encontro estavam presentes quatro alunos (Baraka, Joaquim, Fermat e Joana) e os problemas tinham como objetivo revisar os conteúdos vistos na aula anterior e abordar o conceito de termos equidistantes da PG, ainda pouco explorado no Ensino Médio. Diante do quantitativo de alunos, eles se organizaram em duas duplas. Entregamos a folha de atividades correspondente àquele encontro. O problema 1, exposto na Figura 13, tinha a finalidade de relembrar os conceitos estudados na aula anterior.

Figura 13 – Problema 1 do segundo encontro

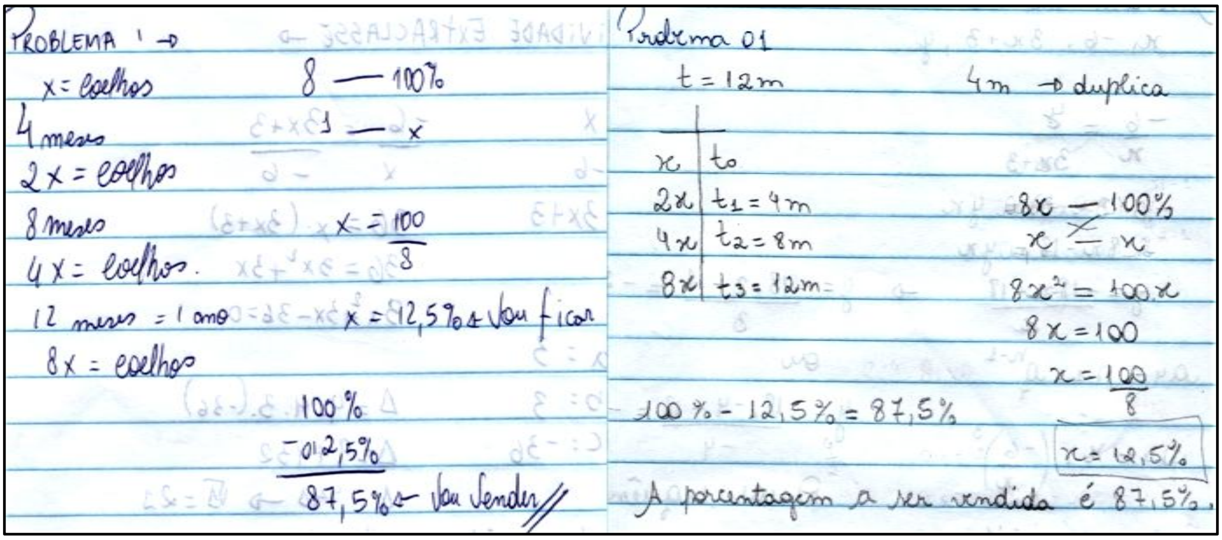
> **PROBLEMA 1 - (UFMG):** Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é?

Fonte: Internet[37].

Após a entrega do problema impresso, orientamos que, individualmente, fizessem a leitura para compreensão e, em seguida, realizassem-na em grupo. Num primeiro momento, nenhum aluno apresentou dificuldade quanto ao enunciado e a compreensão deste problema, partindo, então, para a troca de ideias para a sua resolução. Novamente, conforme Figura 14, os grupos optaram por estratégias bastante similares.

[37] Disponível em: https://www.stoodi.com.br/exercicios/ufmg/1997/questao/uma-criacao-de-coelhos-foi-iniciada-ha-exatamente-um-ano/. Acesso em: 20 jun. 2019.

Figura 14 – Resoluções dos grupos para o problema 1 do segundo encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à resolução do Grupo 1, percebemos que eles empregaram uma incógnita x para representar o número de coelhos referente ao primeiro mês, na medida em que a quantidade de coelhos iniciais não é fornecida pelo problema, também identificaram que ocorrerá três duplicações até o 12º mês.

Durante a resolução do problema, equivocadamente, definiram que a porcentagem de coelhos a ser vendida, no final de um ano, seria de 93,75%. Esse fato adveio por que o grupo havia, erroneamente, feito o seguinte cálculo: $x = \frac{100}{8} = \frac{25}{4} = 6{,}25$. Após um questionamento do pesquisador, notaram que haviam se equivocado em seus cálculos, corrigindo-os e chegando à solução prevista.

O Grupo 2 também representou o número de coelhos iniciais pela variável x. Em dado momento, os membros do grupo perguntam ao pesquisador qual era a fórmula do termo geral de uma PG. Imediatamente o pesquisador questionou sobre qual seria a necessidade desse conceito para solucionar este problema.

Desta forma, o grupo optou por resolver o problema por meio da regra de três simples por que, segundo eles, este seria o caminho mais fácil para determinar a porcentagem pedida. Ainda nesta ótica, Joaquim afirmou que, como desconhece os conceitos presentes na PG, também preferia seguir por esse caminho.

Com relação às estratégias identificadas pelo pesquisador para resolver esse problema, apresentadas no Apêndice D, ressaltamos que os grupos optaram por caminhos um pouco diferentes do que os ajuizado por ele. A diferença mais evidente é que o pesquisador utiliza a regra de três simples com o total que deve ser reduzido $(7x)$ chegando à porcentagem final diretamente, sem precisar descontar de 100%.

Por meio do problema 2, conforme a Figura 15, iniciamos o estudo de um dos conceitos na teoria da PG incumbido para aquele encontro. Este problema era um pouco mais complexo do que aqueles que vinham sendo trabalhados, justamente por introduzir uma propriedade que, por muitas vezes, não é vista no Ensino Médio.

Figura 15 – Problema 2 do segundo encontro

PROBLEMA 2 - (UCPEL-2015): Os números reais $n - 6$, $n - 4$ e $2n - 11$ são os três primeiros termos consecutivos de uma Progressão Geométrica crescente. O quarto termo dessa Progressão Geométrica é?

Fonte: Internet[38].

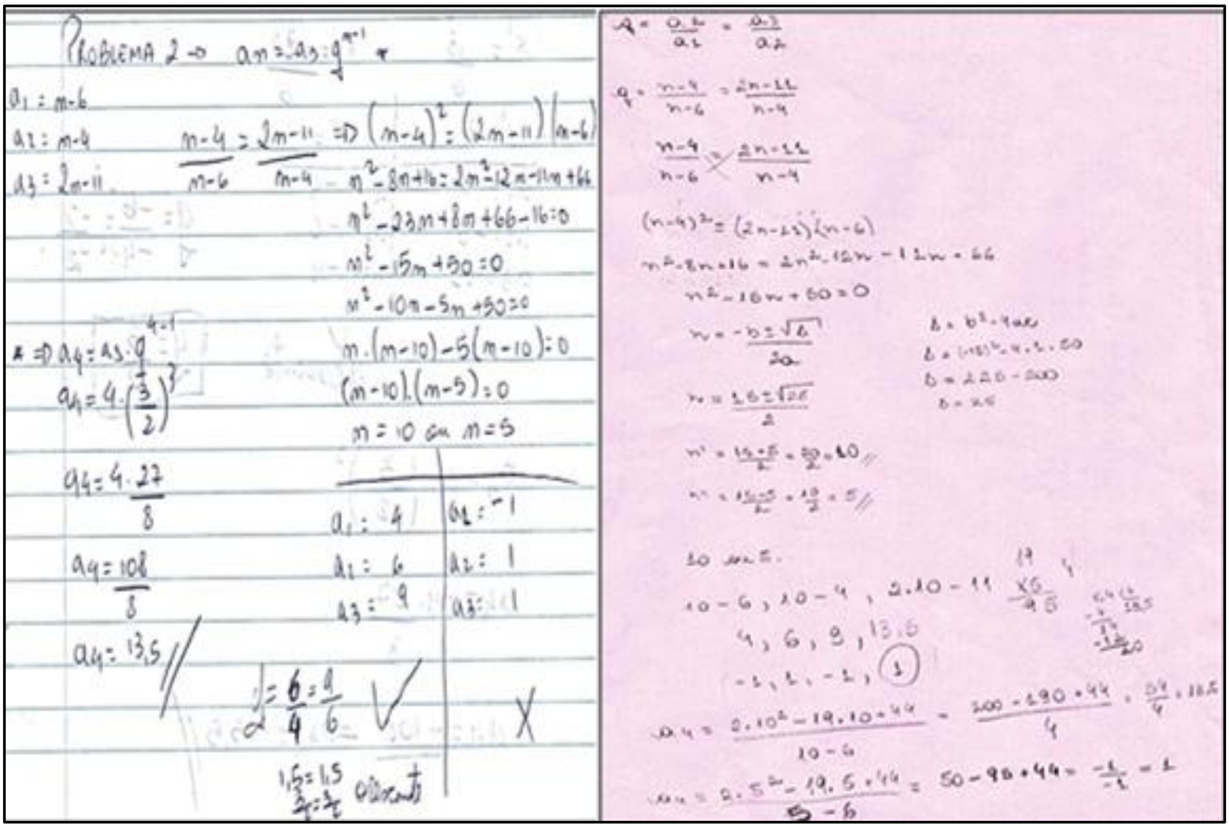
Dentre todos os problemas já trabalhados nos encontros da nossa pesquisa, esse foi o que os alunos tiveram mais dificuldade em interpretar e buscar estratégias para resolvê-lo. Acreditamos que isso ocorreu pelo enunciado ser bastante objetivo, sem dar muitas informações. O que se sabia é que a sequência dos números $n - 6,\ n - 4, 2n - 11$ deveria formar uma PG crescente.

Durante a resolução do problema, dúvidas como *“Precisa encontrar o valor de n?”, “Podemos definir o 4º termo utilizando o termo geral da PG?”,* surgiram em ambos os grupos, uma vez que esse problema estava tirando os alunos da zona de conforto que haviam adquirido durante a resolução dos problemas da disciplina.

Esse fator se tornou muito relevante para nossa pesquisa, pois eles começaram a buscar novas estratégias. De maneira similar ao problema 1 desse encontro, os caminhos seguidos pelos grupos, foram bem parecidos tendo apenas alguns pontos que se destoavam, conforme mostra a Figura 16.

[38] Disponível em: https://vestibular.ucpel.edu.br/wp-content/uploads/2015/09/Caderno_Prova_Verao2015_01.pdf. Acesso em: 22 jun. 2019.

Figura 16 – Resoluções dos grupos para o problema 2 do segundo encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Num primeiro momento, o Grupo 1 afirmava que para resolver esse problema precisar-se-ia determinar a solução de uma relação de recorrência. Após alguns poucos debates, entre eles, perceberam que poderiam utilizar a relação da razão de uma PG, trabalhada na primeira aula, onde ela pode ser representada por: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

Esta analogia permitiu que eles encontrassem dois valores para a incógnita n (10 e 5). Posteriormente verificaram qual(is) desses valores tornava a sequência $(n-6, n-4, 2n-11)$, em um PG crescente, conceito formalizado na aula anterior.

Ressaltamos que, durante a solução do problema, o grupo afirmava que não era necessário encontrar o valor de n para solucionar o mesmo, uma vez que se questionava sobre o 4º termo da sequência e não o valor atribuído à incógnita.

Em alguns momentos, os membros do grupo, utilizavam conceitos da PA como se fossem da PG, o que nos evidencia que esses dois conteúdos ainda estavam aferidos à aprendizagem mecânica e não os haviam compreendido totalmente, uma vez que, antes dos encontros da nossa pesquisa, a turma trabalhou, durante uma semana, só com problemas envolvendo a PA.

Em certo momento, houve equívocos de interpretação das respostas, como por exemplo, o aluno Fermat perguntou ao pesquisador se a sequência encontrada poderia ser uma PG estacionária, no caso quando $n = 5$, sendo respondido para que ele relesse o problema. No entanto, essa afirmação do aluno estava equivocada, já que a sequência encontrada para $n = 5$, $(-1, 1, -1, \dots)$, não era uma PG estacionária, mas sim uma PG alternante $(q < 0)$.

Outra afirmação do aluno Fermat foi que o problema não possuía solução, uma vez que quando $n = 5$ a sequência era "estacionária" e quando $n = 10$ a sequência $(4, 6, 9)$ não representava uma PG. Neste momento, o pesquisador interveio e perguntou aos grupos de que forma poderíamos comprovar que uma sequência numérica estava se comportando como uma PG, no qual o Grupo 2 respondeu que era por meio de sua razão. Assim, o Grupo 1 conseguiu concluir o problema e verificar que o único valor possível para n formar uma PG crescente era 10.

Pudemos constatar que, em diversos momentos, os membros do grupo trabalharam de maneira isolada, sem muito intercâmbio de diálogo e/ou ideias, diferindo do primeiro encontro. Uma evidência dessa situação é que o aluno Fermat resolveu primeiro o problema e depois foi auxiliar Baraka que estava com dificuldade para finalizá-lo. Destacamos que sempre foi reforçada a necessidade de conversas durante a resolução do problema, uma vez que a MEAAMRP busca por um trabalho cooperativo e colaborativo.

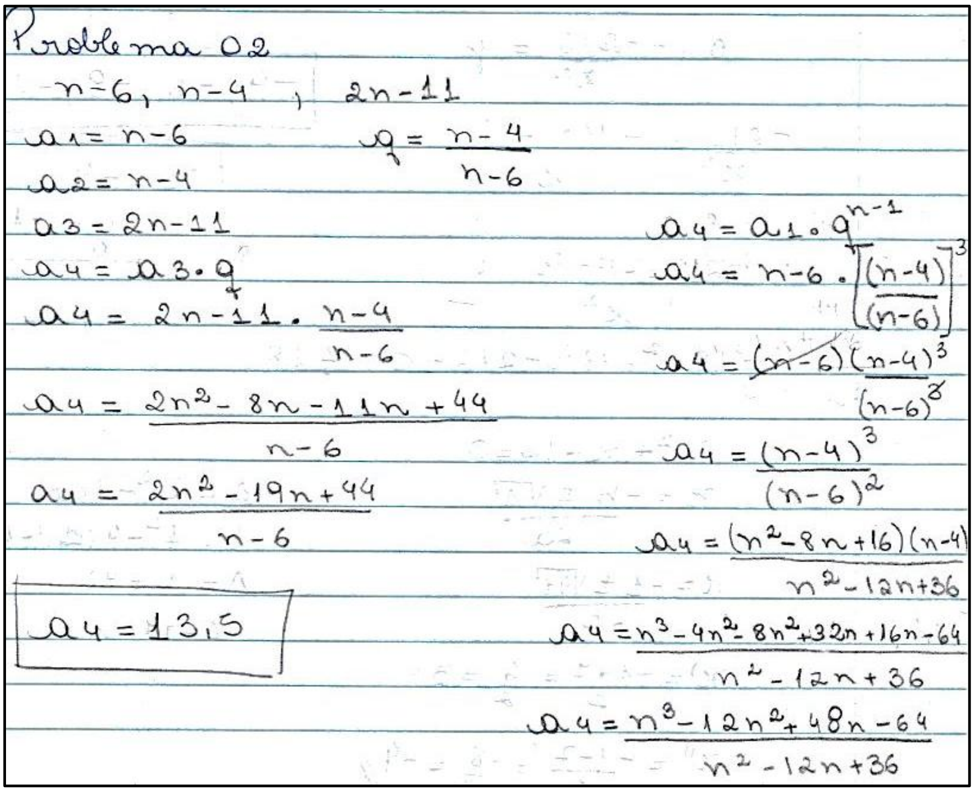
Para se certificarem que a solução estava correta, eles utilizaram a fórmula do termo geral da PG verificando se o termo a_4 condizia com sua resolução. Neste momento, durante a discussão, no grupo, Baraka perguntou se existiria uma fórmula diferente para o termo geral de uma PG decrescente, fazendo novamente, certa confusão com seus conceitos.

Com relação ao Grupo 2, diferindo do grupo anterior, para resolver esse problema optaram, num primeiro momento, por utilizar a definição da PG (o termo seguinte é o anterior multiplicado pela razão). No entanto o grupo não alcançou êxito fazendo desta maneira, pois não conseguiam resolver a parte algébrica oriunda deste procedimento.

Partiram, então, para uma segunda estratégia que foi a utilização do termo geral da PG, mas, assim como na antecedente, acharam apenas a configuração algébrica do a_4, como mostrado na Figura 17.

Diante desta perspectiva, Joaquim sugeriu a Joana resolver esse problema igualando as razões, ideia que prontamente foi aceita. Assim como o Grupo 1, Joaquim e Joana determinaram dois valores para n, 5 e 10, e também verificaram qual(is) n tornava(m) a sequência em uma PG crescente.

Figura 17 – Resolução algébrica do Grupo 2 para o problema 2 do segundo encontro


Problema 02

$n-6,\ n-4,\ 2n-11$

$a_1 = n-6 \qquad q = \frac{n-4}{n-6}$

$a_2 = n-4$

$a_3 = 2n-11 \qquad a_4 = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = a_3 \cdot q \qquad a_4 = n-6 \cdot \left[\frac{(n-4)}{(n-6)}\right]^3$

$a_4 = 2n-11 \cdot \frac{n-4}{n-6}$

$a_4 = \frac{\cancel{(n-6)}(n-4)^3}{(n-6)^{\cancel{3}}}$

$a_4 = \frac{2n^2-8n-11n+44}{n-6}$

$a_4 = \frac{(n-4)^3}{(n-6)^2}$

$a_4 = \frac{2n^2-19n+44}{n-6}$

$a_4 = \frac{(n^2-8n+16)(n-4)}{n^2-12n+36}$

$\boxed{a_4 = 13,5}$

$a_4 = \frac{n^3-4n^2-8n^2+32n+16n-64}{n^2-12n+36}$

$a_4 = \frac{n^3-12n^2+48n-64}{n^2-12n+36}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Por ser bastante similar ao anterior, o problema extraclasse[39], Apêndice F, foi resolvido pelos grupos rapidamente uma vez que haviam compreendido a estratégia abordada na solução do problema 2. Após a resolução dos três problemas, foi dado início a plenária, onde os grupos se dividiram para evidenciar, no quadro, suas soluções, para posteriormente, discuti-las.

Como os valores encontrados nos três problemas foram os mesmos, debatemos os diferentes caminhos que os grupos adotaram, com isso eles puderam perceber que apesar dos problemas terem uma resposta fechada, os encaminhamentos para resolvê-los eram bem amplos.

O pesquisador questionou aos grupos se eles não conheciam um jeito mais prático de resolver os problemas 2 e 3, utilizando alguma propriedade da PG. O aluno Fermat recordou

---

[39] Evidenciamos que, na grande maioria dos encontros, o problema extraclasse foi resolvido em sala de aula.

da propriedade dos termos equidistantes e comentou que por meio dela o problema seria resolvido mais rápido e facilmente.

O pesquisador comentou que resolveu os problemas 2 e 3 utilizando três direções: com a definição da PG, com a relação da razão e pelos termos eqüidistantes, deixando novamente explicitado que esses problemas não possuíam um único caminho para resolvê-los. Após a plenária foi realizada a formalização daquela aula (Apêndice E).

5.1.3 Terceiro Encontro

Este encontro tinha por finalidade adentrar no conceito do termo geral da PG. Neste dia estavam presentes apenas três alunos, Baraka, Joana e Fermat. Diante desse cenário organizamo-los em apenas um trio, já que a MEAAMRP propõe o trabalho em grupo e se tornaria impróprio um aluno ficar sozinho.

Após essa disposição, entregamos a cada discente uma folha de atividades que continha os problemas propostos para aquele encontro. O problema 1, exposto na Figura 18, proporcionava aos alunos associar a PG comum a possível situação do seu cotidiano, em específico, através da compra de um carro.

Figura 18 – Problema 1 do terceiro encontro

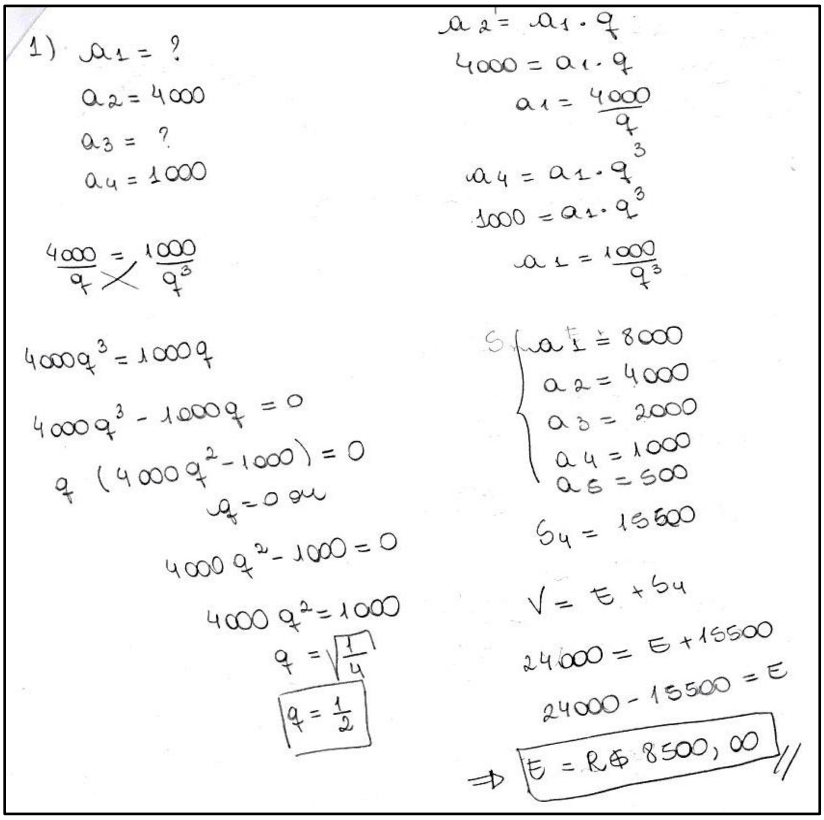
PROBLEMA 1 - (UEPA - 2002): Um carro, cujo preço à vista é R$24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em Progressão Geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$4.000,00 e a quarta parcela de R$1.000, 00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

Fonte: Internet[40].

Após a leitura individual e em conjunto, o grupo começou a pensar em estratégias para a resolução do problema (Figura 19). Durante certo momento, eles tiveram dificuldades para interpretar o problema corretamente, como, por exemplo, Joana adotou, erroneamente, que o valor da entrada seria o primeiro termo desta PG.

[40] Disponível em: https://comocalcular.com.br/exercicios/pg-exercicios-resolvidos/. Acesso em: 22 jun. 2019.

Figura 19 - Resolução do grupo para o problema 1 do terceiro encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Após dialogar com os demais membros, percebeu-se que a PG iniciava nas parcelas e não na entrada dada para a aquisição do carro. Ainda nesta perspectiva, Joana fez um questionamento que, num primeiro momento, fez levantar a legitimidade cotidiana desse problema.

> Joana: A gente está supondo que iremos pagar o mesmo preço a prazo?
> Fermat: Ah! É verdade.
> Joana: Não, só estou perguntando por que aparentemente parece que sim.
> Fermat: Parece que não tem lógica, eu pagar à vista ou a prazo o mesmo valor.
> Joana: É porque não tem nenhuma taxa de juros. Assim como vamos saber quanto iremos pagar a prazo.
> Fermat: Sim.
> Pesquisador: Mas será que não existem produtos onde o valor à vista e a prazo tem o mesmo valor?
> Joana: Verdade! Existem, sim, produtos que à vista e em 10 vezes possuem o mesmo valor.
> Baraka: Mas eu peço desconto...

Posteriormente a essa importante discussão, o grupo conseguiu ter um esclarecimento dos caminhos a serem tomados para a resolução do problema. Para isto, empregam a definição da PG com o propósito de determinar uma relação entre as diferentes representações que a_1 pode tomar.

Concluem, assim, que o 1º termo pode ser concebido por $\frac{4000}{q}$ e também por $\frac{1000}{q^3}$, de forma que ao igualar essas duas frações, determinam a razão da PG presente no parcelamento a prazo.

Após descobrir o valor da razão, o grupo determinou cada uma das parcelas pagas nos meses seguintes. Com isso concluíram, corretamente, que a entrada concedida para a compra do carro foi de $R\$$ 8.500,00.

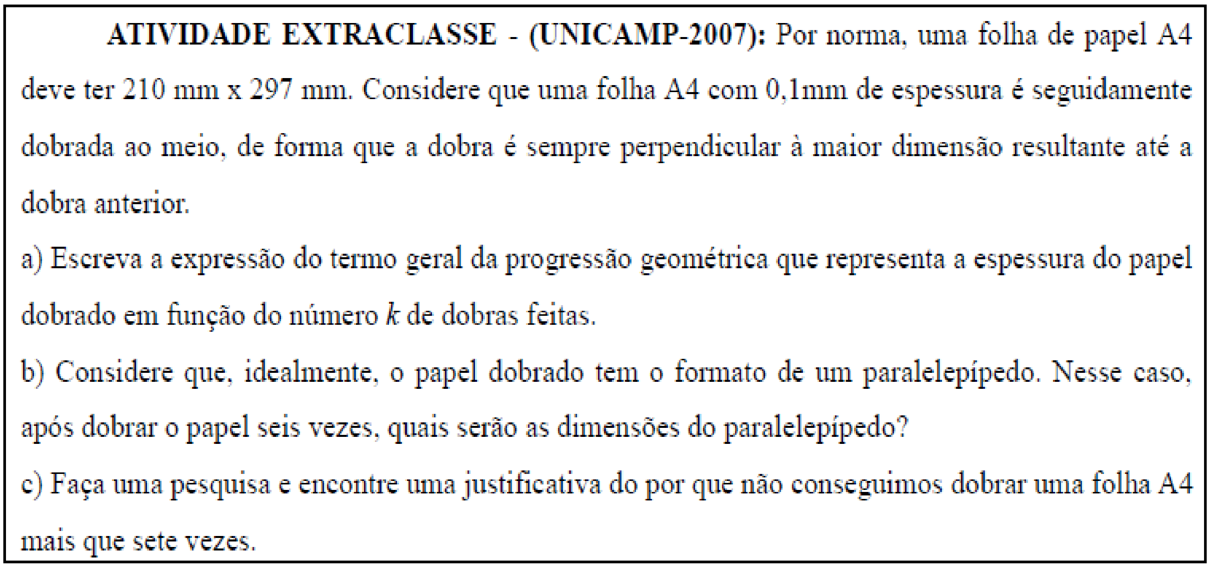
O problema 2[41], Apêndice E, visou aprofundar a aprendizagem do conceito de termo geral da PG. Nele foi solicitado, além de conjecturas, a prova de uma afirmação. Este fato ocorreu por que nosso público da pesquisa eram alunos de Ensino Superior do curso de Matemática Licenciatura, na qual a demonstração de afirmações se faz necessária em diversas disciplinas com a finalidade de mostrar que ela é válida para todo número natural (ou do universo do conjunto em que queremos). Neste sentido, Fiorentini e Oliveira (2013, p. 925) evidenciam que

> [...] a demonstração tem um papel central na produção do conhecimento matemático. Ela faz parte da investigação matemática. A demonstração nada mais é do que a tentativa do matemático justificar ou provar, com recursos lógico-matemáticos, que uma conjetura é válida. O professor precisa saber que uma demonstração não deve ser, necessariamente, sempre formal e fazer parte de um sistema axiomático. A exigência de rigor formal pode ser danosa, impedindo que o estudante (e, aqui, incluímos o futuro professor) possa fruir, explorar e experienciar o processo de criação da matemática. Há diversos modos de construir provas ou justificativas para as conjeturas. Alunos do ensino fundamental podem fazer pequenas demonstrações – isto é, construir justificativas e argumentações não formais e que podem ser aceitas como válidas no contexto de uma comunidade de aprendizagem matemática de sala de aula do Ensino Fundamental. Mas não é suficiente o futuro professor conhecer teoricamente, ou a partir da didática da matemática, como podem ser e funcionar as demonstrações em um ambiente exploratório-investigativo com a matemática. É preciso que ele possa experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da licenciatura, tais como: teoria dos números, cálculo diferencial e integral, álgebra, análise, geometria, fractais, teoria dos grafos.

O problema extraclasse, Figura 20, buscava retomar os conceitos presentes nos problemas anteriores. Como isso, originalmente, estava programado para ser feito em casa, o item c aspirava uma pesquisa extraclasse sobre o consenso de conseguirmos dobrar o papel apenas sete vezes. No entanto, como o grupo havia terminado os problemas anteriores e ainda restavam alguns minutos de aula, sugerimos que este item fosse discutido durante aquele encontro e que fosse buscassem uma justificativa cientifica para esse fato em casa.

[41] As resoluções dos problemas não discutidos nessa dissertação estão enfatizadas em Correa e Noguti (2020).

Figura 20 – Problema extraclasse do terceiro encontro


ATIVIDADE EXTRACLASSE - (UNICAMP-2007): Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210 mm x 297 mm. Considere que uma folha A4 com 0,1mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número *k* de dobras feitas.

b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

c) Faça uma pesquisa e encontre uma justificativa do por que não conseguimos dobrar uma folha A4 mais que sete vezes.

Fonte: Internet[42].

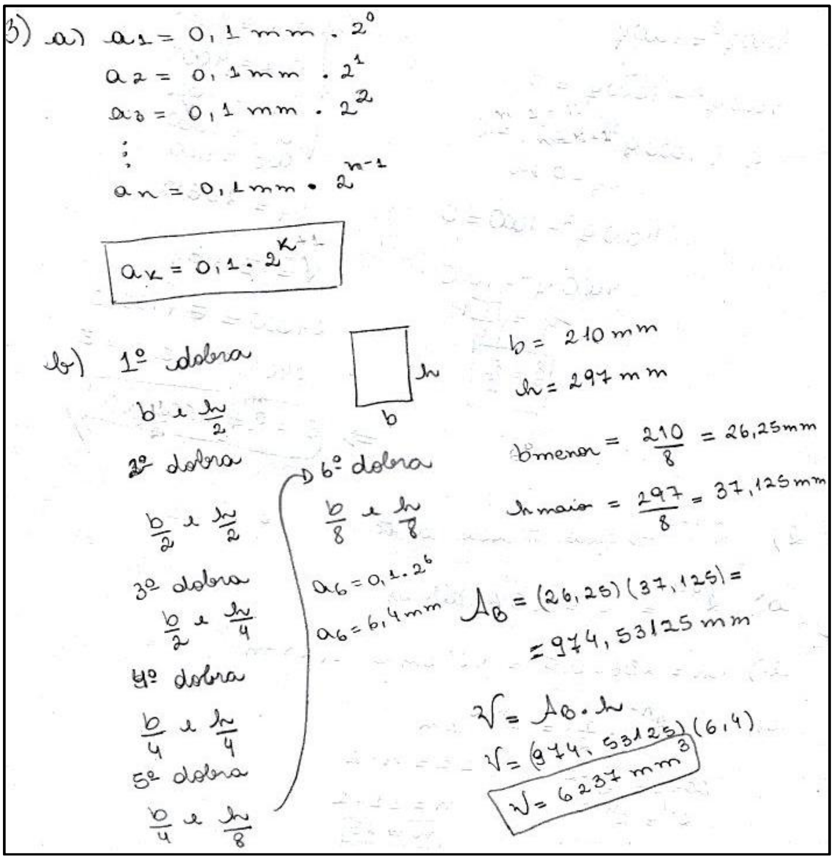
Para conjecturar o eixo central do item a, o grupo manipulou uma folha de papel A4, a fim de determinar a relação presente entre o número de dobras e a espessura do papel. Em certo momento, o aluno Fermat questionou seus colegas se o número de dobras do problema era equivalente a quantidade de dobras feitas, tendo recebido a resposta afirmativamente.

Durante a resolução do problema optaram, novamente, por não utilizar a relação do termo geral da PG, porém conseguiram conjecturar uma relação entre o número de dobras e a espessura da folha.

No item b, o grupo notou que os valores da largura e da altura deveriam ser divididos por 2^3 ao realizar a sexta dobradura, conforme Figura 21, determinando, assim, as dimensões pedidas no enunciado desse item. Em dado momento, os alunos focalizaram na busca do volume do paralelepípedo formado, supomos que esse fato ocorreu por acreditarem que a palavra *dimensão* estava atrelada ao cálculo do volume. Após algumas testagens, feitas por eles, concluíram que, independentemente da quantidade de dobras, o seu volume será sempre constante, neste caso, 6.237 mm^3.

[42] Disponível em: https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/unicamp/2007_2fase/4dia/unicamp2007_2fase_4dia_prova.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

Figura 21 – Resolução do grupo para o problema extraclasse do terceiro encontro


3) a) $a_1 = 0,1\ mm \cdot 2^0$

$a_2 = 0,1\ mm \cdot 2^1$

$a_3 = 0,1\ mm \cdot 2^2$

$\vdots$

$a_n = 0,1\ mm \cdot 2^{n-1}$

$\boxed{a_k = 0,1 \cdot 2^{k-1}}$

b) 1º dobra

b e $\frac{h}{2}$

2º dobra

$\frac{b}{2}$ e $\frac{h}{2}$

3º dobra

$\frac{b}{2}$ e $\frac{h}{4}$

4º dobra

$\frac{b}{4}$ e $\frac{h}{4}$

5º dobra

$\frac{b}{4}$ e $\frac{h}{8}$

6º dobra

$\frac{b}{8}$ e $\frac{h}{8}$

$a_6 = 0,1 \cdot 2^6$

$a_6 = 6,4\ mm$

$b = 210\ mm$

$h = 297\ mm$

$b_{menor} = \frac{210}{8} = 26,25\ mm$

$h_{maior} = \frac{297}{8} = 37,125\ mm$

$A_B = (26,25)(37,125) = 974,53125\ mm$

$V = A_B \cdot h$

$V = (974,53125)(6,4)$

$\boxed{V = 6237\ mm^3}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Por conta do tempo restante do encontro, o pesquisador orientou os alunos a averiguar em casa uma justificativa válida para o item *c*. Porém, durante a plenária, algumas hipóteses foram levantadas para esse evento ocorrer, como por exemplo, *“Deve ser por conta da espessura da folha”, “Acredito que essa afirmação não é 100% verdadeira, pois dependendo do material, eu acredito que isso pode ocorrer”, “Manualmente talvez não seja possível dobrar mais que sete vezes, mas será que mecanicamente isso não poderia ocorrer?”.*

Sugerimos, então que essas hipóteses levantadas fossem pesquisadas em casa e que no próximo encontro começaríamos por discuti-las. Após a plenária, realizamos a formalização do encontro, disponível no Apêndice F.

5.1.4 Quarto Encontro

O quarto encontro da nossa pesquisa continha problemas que possuíam o intuito de trabalhar a definição de soma finita de uma PG. Nesta data, estavam presentes quatro alunos, a saber, Baraka, Fermat, Joaquim e Beija-Flor. Assim, diante deste cenário, formamos duas duplas para a resolução dos problemas.

O problema 1, demonstrado abaixo na Figura 22 e adaptado da OBMEP, proporcionou dar ênfase em diferentes caminhos para o estudo da PG, dentre eles, generalizações e demonstrações de conjecturas.

Figura 22 – Problema 1 do quarto encontro

PROBLEMA 1 - (OBMEP– 2006 - Adaptada): No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1134 problemas.

a) Quantos problemas o grupo resolveu até o final de janeiro?

b) E em cada mês seguinte?

c) Determine uma generalização para a soma no mês n;

d) Mostre que essa generalização é válida $\forall n \geq 1$;

e) Se o grupo permanecer nesse ritmo de resolução de problemas, ao final do ano de 2006 quantos problemas foram resolvidos por eles? Seria possível esta quantidade de problemas resolvidos?

Fonte: Internet[43].

Após a entrega da folha com as atividades, conforme o habitual, cada membro dos grupos fez a leitura individual para, posteriormente, realizá-la em conjunto. Houve por parte dos alunos, uma dúvida com relação ao quantitativo de termos que havia no problema.

Essa questão foi apontada, pois, num primeiro momento, os alunos acreditavam que o número de problemas, resolvido por Tina e seus colegas, duplicava no início e no final de cada mês, por exemplo, fevereiro teria duplicações nos dias 1 e 28/29.

Nesta perspectiva, o pesquisador indagou aos grupos o porquê desse pensamento, uma vez que o problema deixava explícito que a duplicação transcorria a cada mês, ou seja, no final de 30/31 dias. Desta forma, os grupos refletiram e concluíram que realmente havia apenas uma duplicação em cada mês do ano.

Os integrantes do Grupo 1 tinham o hábito de trabalharem individualmente para apenas depois discutir as soluções encontradas por cada um, sendo que nesse encontro não foi

[43] Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1FHq4ZU2zsNyOmhmcVwgIGby2ro__9Ozu/view. Acesso em: 23 jun. 2019.

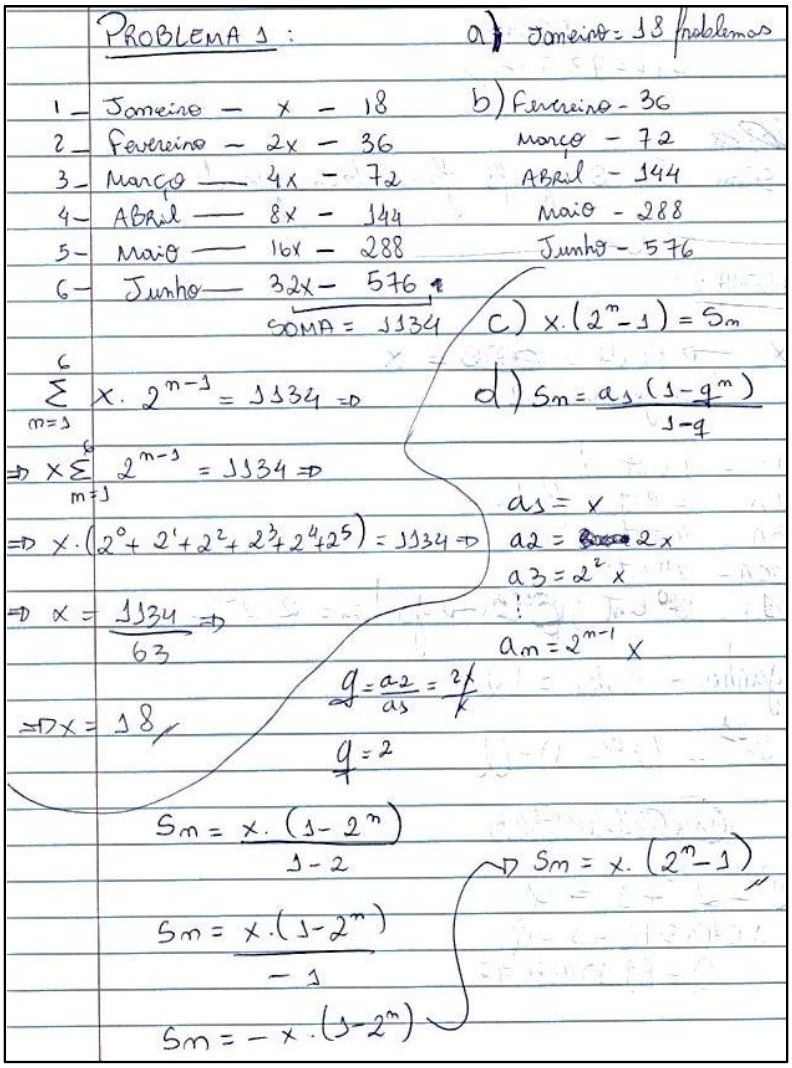
diferente. No entanto, o pesquisador sempre reforçava, nos encontros, a necessidade de haver um diálogo durante a resolução dos problemas e não somente, depois da conclusão encontrada por cada um, fazer a conferência das respostas.

No item a, o grupo adotou a incógnita x a fim de representar a quantidade de problemas resolvidos no mês de janeiro por Tina, onde eles duplicaram cada mês seguinte em função de x. Para determinar o valor dessa variável, preferiram utilizar a ideia de somatório e não, explicitamente, a que envolve a soma finita da PG. Esse acontecimento se mostra interessante uma vez que a adição de finitas parcelas em uma PG está diretamente ligada ao conceito de um somatório de parcelas finitas. Com isso, o grupo determinou que no mês de janeiro, Tina e seus colegas resolveram 18 problemas, conforme a Figura 23.

Com a intenção de definir a quantidade de problemas solucionados em cada mês seguinte, item b, eles optaram por utilizar o valor encontrado para x, entretanto eles concluíram, equivocadamente, que sua solução estava errada, pois, segundo eles, no mês de junho Tina e seus companheiros teriam que solucionar 1.134 problemas.

Desta forma não conseguiram progredir na resolução do problema e assim o grupo se viu forçado a trocar ideias, e destarte, após certo diálogo e debate, entre eles, notaram que 1.134 problemas não correspondiam ao quantitativo solucionado no último mês, mas sim, a soma de todos os problemas resolvidos por Tina e seus colegas, durante o período de seis meses.

Figura 23 – Resolução do Grupo 1 para os itens *a*, *b*, *c* e *d* do problema 1 do quarto encontro


PROBLEMA 1:

1 — Janeiro — x — 18
2 — Fevereiro — $2x$ — 36
3 — Março — $4x$ — 72
4 — Abril — $8x$ — 144
5 — Maio — $16x$ — 288
6 — Junho — $32x$ — 576

SOMA = 1134

$\sum_{n=1}^{6} x \cdot 2^{n-1} = 1134 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \sum_{n=1}^{6} 2^{n-1} = 1134 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 1134 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1134}{63} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 18$

a) Janeiro = 18 problemas

b) Fevereiro - 36
Março - 72
Abril - 144
Maio - 288
Junho - 576

c) $x \cdot (2^n - 1) = S_n$

d) $S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$

$a_1 = x$
$a_2 = 2x$
$a_3 = 2^2 x$
$\vdots$
$a_n = 2^{n-1} x$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2x}{x}$

$q = 2$

$S_n = \frac{x \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2}$

$S_n = \frac{x \cdot (1 - 2^n)}{-1}$

$S_n = -x \cdot (1 - 2^n)$

$\Rightarrow S_n = x \cdot (2^n - 1)$

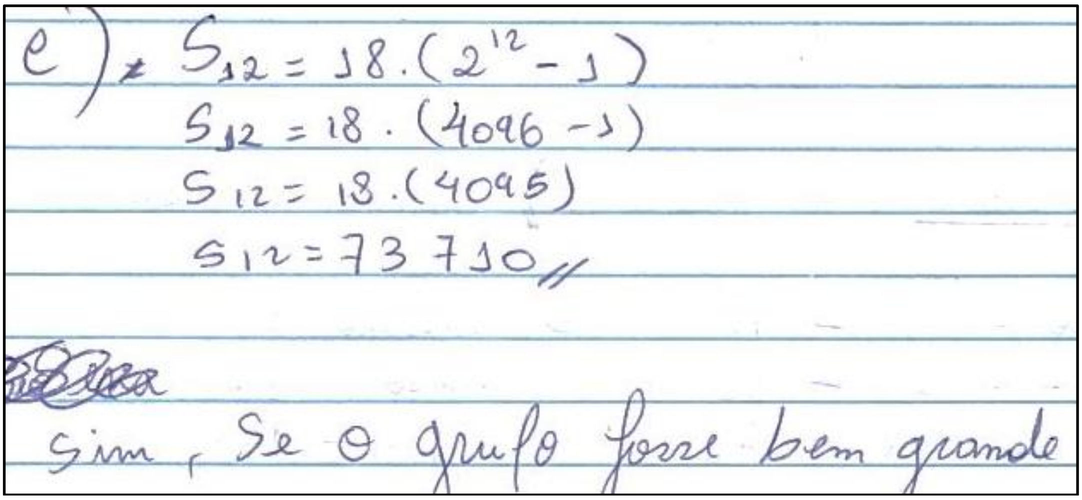
Fonte: Dados da pesquisa.

Como já haviam apontado uma relação ao resolverem o somatório na letra *a* para determinar a quantidade de problemas resolvidos em cada mês, optaram por conjecturar uma relação semelhante no item *c*, no qual era solicitada uma generalização para definir o somatório de problemas resolvido no enésimo mês. Acreditamos que eles tenham utilizado da ideia da soma finita da PG para defini-la, porém o grupo não deixa explícito como determinou essa relação.

Para provar/demonstrar essa conjectura, item *d*, o grupo apresentou certa dificuldade em encontrar uma estratégia que lhe permitisse evidenciar que sua relação era válida. Para isso concentram-se na ideia da soma finita da PG, onde “mostram” que, por meio dela, chega-se à mesma generalização definida por eles. Identificamos que o grupo optou por não seguir uma demonstração mais "formal", no qual apenas induzem que, por meio da soma finita da PG, a sua sentença é válida.

Na resolução do item *e*, Figura 24, o grupo preferiu utilizar o item conjecturado por eles na questão *c*, com a intenção de determinar a quantia de problemas resolvidos por Tina e sua turma, após o período de um ano (12 meses). Obtiveram, assim, que o somatório de problemas resolvidos durante esses meses foi de 73.710. Concluíram, ainda, que, se o grupo formado por Tina for relativamente grande, haverá a possibilidade de solucionar esse quantitativo de problemas durante o período de um ano.

Figura 24 – Resolução do Grupo 1 para o item *e* do problema 1 do quarto encontro



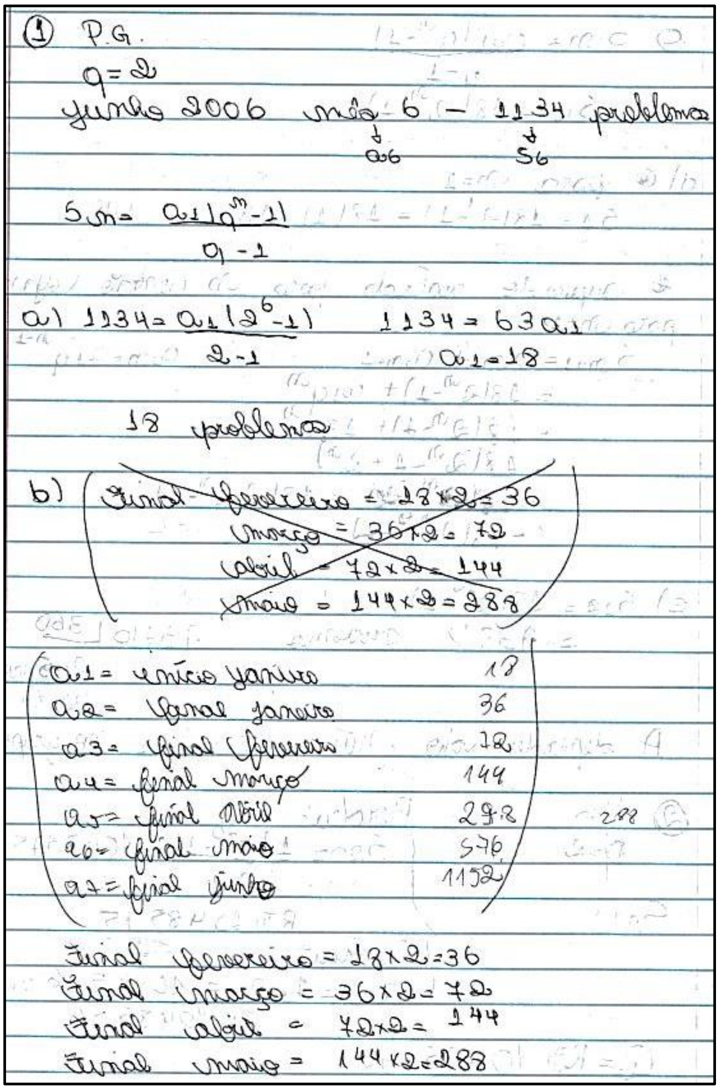
Fonte: Dados da pesquisa.

Em contrapartida à resolução do primeiro grupo, o Grupo 2 utilizou a ideia da soma finita da PG para determinar o quantitativo de problemas resolvidos, no mês de janeiro, por Tina e seus colegas (Figura 25), uma vez que compreenderam que os 1.134 problemas resolvidos correspondiam à soma de problemas resolvidos durante os seis meses. Assim, também concluíram que, no mês de janeiro, foram resolvidos 18 problemas.

Evidenciamos que como o perfil dos nossos sujeitos era de nível de Ensino Superior, alguns deles já possuíam certos conhecimentos referentes à PG advindos do Ensino Médio, por isso tinham a noção da soma finita da PG.

No item *b*, assim como o grupo anterior, acreditavam ter resolvido errado o problema uma vez que, para eles, o valor de 1.134 problemas deveria ser a quantidade de problemas resolvidos no sexto mês.

Figura 25 – Resolução do Grupo 2 para os itens *a* e *b* do problema 1 do quarto encontro

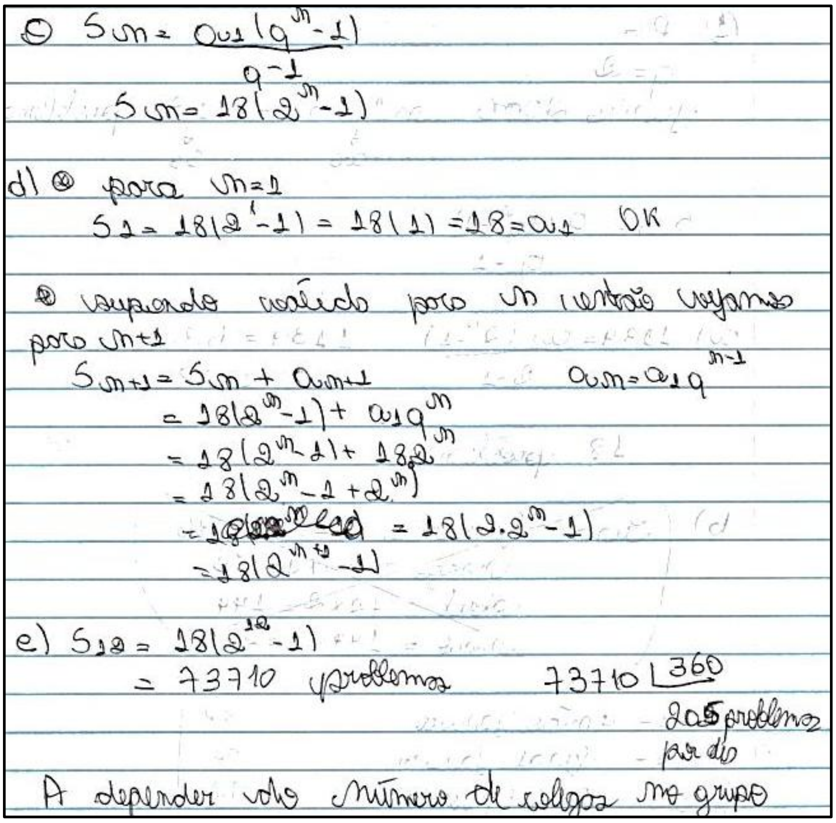

① P.G.
$q = 2$
junho 2006 mês 6 — 1134 problemas
a_6 S_6
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
a) $1134 = \frac{a_1(2^6 - 1)}{2 - 1}$ $1134 = 63a_1$ $a_1 = 18$
18 problemas
b) ~~final fevereiro = 18x2 = 36~~
~~março = 36x2 = 72~~
~~abril = 72x2 = 144~~
~~maio = 144x2 = 288~~
a_1 = início janeiro 18
a_2 = final janeiro 36
a_3 = final fevereiro 72
a_4 = final março 144
a_5 = final abril 288
a_6 = final maio 576
a_7 = final junho 1152
final fevereiro = 18x2 = 36
final março = 36x2 = 72
final abril = 72x2 = 144
final maio = 144x2 = 288

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse fato nos demonstra certa falta de cautela, por parte do grupo, ao ler o enunciado novamente na medida em que eles próprios já haviam afirmado, no item anterior, que esse valor correspondia ao somatório de problemas resolvidos transcorrido os seis meses, perdendo certo tempo nessa questão por conta disso. No entanto, após alguns debates, determinam corretamente o quantitativo de problemas resolvidos em cada mês, porém "esqueceram" de representar o último mês na folha de resolução.

No item *c*, Figura 26, que pede uma generalização de uma relação entre o mês e a quantia de problemas resolvidos, que seja válida para todo *n* natural, o grupo escolheu empregar a fórmula da soma finita da PG, já que esse era o caminho mais "seguro" uma vez que não haviam conjecturado nada anteriormente, como o Grupo 1.

Figura 26 – Resolução do Grupo 2 para os itens *c*, *d* e *e* do problema 1 do quarto encontro



c) $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

$S_n = 18(2^n-1)$

d) para $n=1$

$S_1 = 18(2^1-1) = 18(1) = 18 = a_1$ OK

supondo válido para n então vejamos para $n+1$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ $\quad a_n = a_1 q^{n-1}$

$= 18(2^n-1) + a_1 q^n$

$= 18(2^n-1) + 18 \cdot 2^n$

$= 18(2^n - 1 + 2^n)$

$= 18(2 \cdot 2^n - 1)$

$= 18(2^{n+1}-1)$

e) $S_{12} = 18(2^{12}-1)$

$= 73710$ problemas $\quad 73710 \,\underline{|\,360}$

205 problemas por dia

A depender do número de colegas no grupo

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a demonstração dessa conjectura, item *d*, fizeram uso de uma das ferramentas mais usuais nas demonstrações de Matemática Discreta, o PIM, onde questionam o pesquisador se a prova poderia ser feita por meio desse artifício, uma vez que nenhum dos membros estava presente na aula anterior na qual já havia sido afirmado que poderiam demonstrar da forma que achassem mais viável.

Após verificar a validade da generalização para $n = 1$, usam, como parte da demonstração, os conceitos de soma finita da PG, sendo esta a sua hipótese de indução, e a ideia de termo geral, já que assumiram que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Como podemos verificar ao resolver o item *e*, o grupo também optou por utilizar a conjectura relacionada na questão *c*, a fim de verificar qual era o quantitativo de problemas resolvido por Tina e seus colegas durante um ano. E concluíram, também, que a possibilidade de resolver esse quantitativo de problemas dependeria do número de colegas que Tina convidou para estudar junto com ela. Durante certo momento da resolução desse problema, um diálogo entre Beija-Flor e Joaquim nos entusiasmou, ainda mais, a seguir com o trabalho.

> Joaquim: Sabe que eu gostei disso. Não tive aula de PG no meu Ensino Médio e estou gostando da forma que está sendo trabalhado na disciplina.
> Beija-Flor: É um conteúdo legal que dá para trabalhar bastante coisa.

Neste encontro foi possível identificar um melhor entrosamento entre os membros desse grupo já que o diálogo sobre as resoluções dos problemas era raro em encontros passados, no qual cada um, geralmente, resolvia do seu jeito sem haver uma conversa sobre os caminhos a serem tomados.

Através do problema 2, Figura 27, buscamos trabalhar com dois conceitos da PG, de maneira simultânea, num mesmo problema, a saber, soma finita e termo geral da PG, vislumbrando, assim, reforçar sua aprendizagem e/ou realizar uma revisão dos conteúdos matemáticos.

Figura 27 – Problema 2 do quarto encontro

PROBLEMA 2 - (FATEC-1996): Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:

i) perde-se a quantia X apostada;
ii) recebe-se a quantia 2X.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21ª vez, ela ganhou.

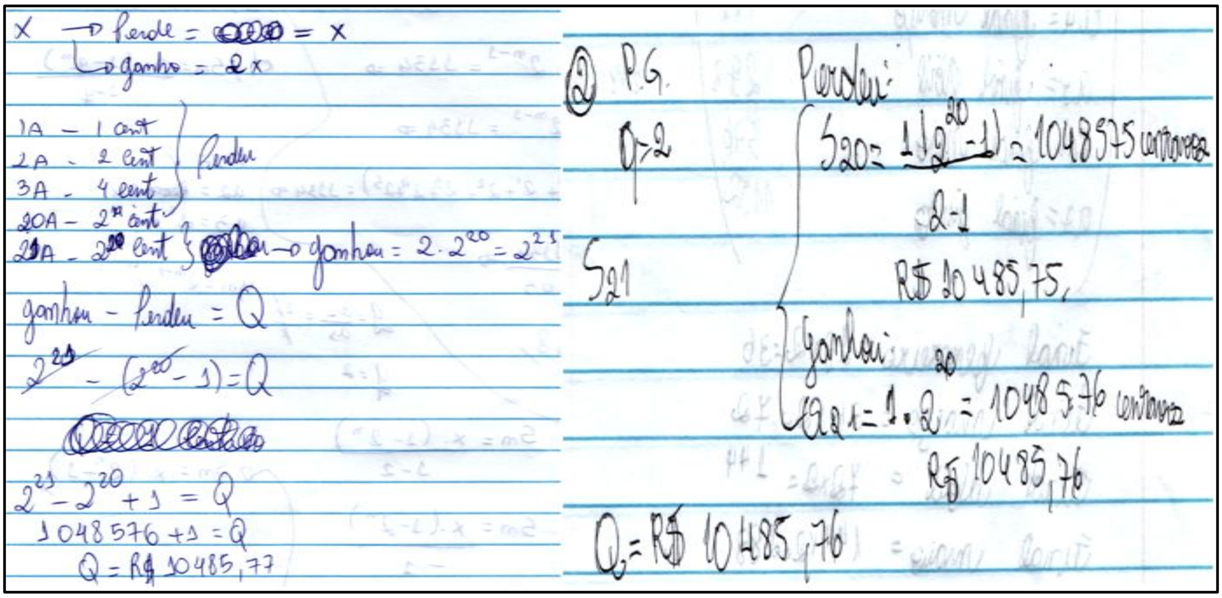
Comparando-se a quantia total T por ela desembolsada e a quantia Q recebida na 21ª jogada, tem-se que Q é igual a:

Fonte: Internet[44].

Neste problema, ambos os grupos seguiram por caminhos bastante similares, conforme observado na Figura 28. Os dois grupos utilizaram da relação estabelecida na soma finita da PG com a finalidade de determinar a quantidade de dinheiro perdido pela pessoa que fez a aposta. E, para definir o total ganho por ela, fazem uso da relação do termo geral da PG, seguindo, assim, o planejamento inicial pensado, pelo pesquisador, para essa questão (Apêndice D).

[44] Disponível em: https://www.portaldovestibulando.com/2016/09/progressao-geometrica-pg-questoes-de.html. Acesso em: 25 jun. 2019.

Figura 28 – Resolução dos grupos para o problema 2 do quarto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

O que dista do nosso planejamento é o fato de que queríamos uma relação algébrica entre as incógnitas Q e T, no entanto, ambos optaram por construí-la numericamente e foram erroneamente calculadas.

Durante a resolução da atividade, não víamos objeção em a resposta, do problema, ser numérica, no entanto pretendíamos que eles estabelecessem uma relação entre o total perdido, até o 20º dia, e o ganho no 21º dia.

Admitimos que esta questão possuiu dubiedade na sua interpretação, uma vez que foram extraídas, do problema original, as alternativas que induziam a resposta ser algébrica. Este fato foi notado apenas durante a análise das folhas de resoluções dos alunos.

Precisamos destacar dois pontos quanto à resolução numérica feita pelos alunos, em que ambas estavam erradas. Primeiro, o Grupo 1 adotou o valor de Q como sendo a diferença entre o total ganho e o perdido, o que nos leva a crer que houve uma má interpretação por parte desse grupo, uma vez que o enunciado deixava claro que Q é o dobro do total recebido na 21ª rodada. Esse fator fez com que o grupo obtivesse uma resposta numérica equivocada.

O segundo ponto a ser levantado é o fato de que, assim como o Grupo 1, o Grupo 2 interpretou erroneamente o valor a ser representado pela quantia ganha na aposta (Q) já que, conforme verificado na figura 28, eles não “dobram” o valor ganho pela pessoa que fez a aposta na 21ª jogada, originando, também, em uma resposta numericamente errônea, coincidentemente similar à do grupo anterior.

Pela primeira vez, desde o início dos nossos encontros, um dos grupos não finalizou a resolução dos três problemas em sala de aula. Um dos motivos para isso foi a extensão das discussões que fizeram com que avançássemos no horário daquele encontro. Sugerimos, então, que o Grupo 1 resolvesse em casa o problema extraclasse (Figura 29), e entregasse no encontro seguinte, o que não foi feito. Diante disso, só será evidenciada a resolução desse problema, que era um pouco mais complexa que as outras, feita pelo Grupo 2.

Figura 29 - Problema extraclasse do quarto encontro

ATIVIDADE EXTRACLASSE – (UNICAMP-2004): Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. Calcule:

a) O tempo necessário para que aquele aluno resolva todas as questões da prova.

b) O número total de questões da referida prova.

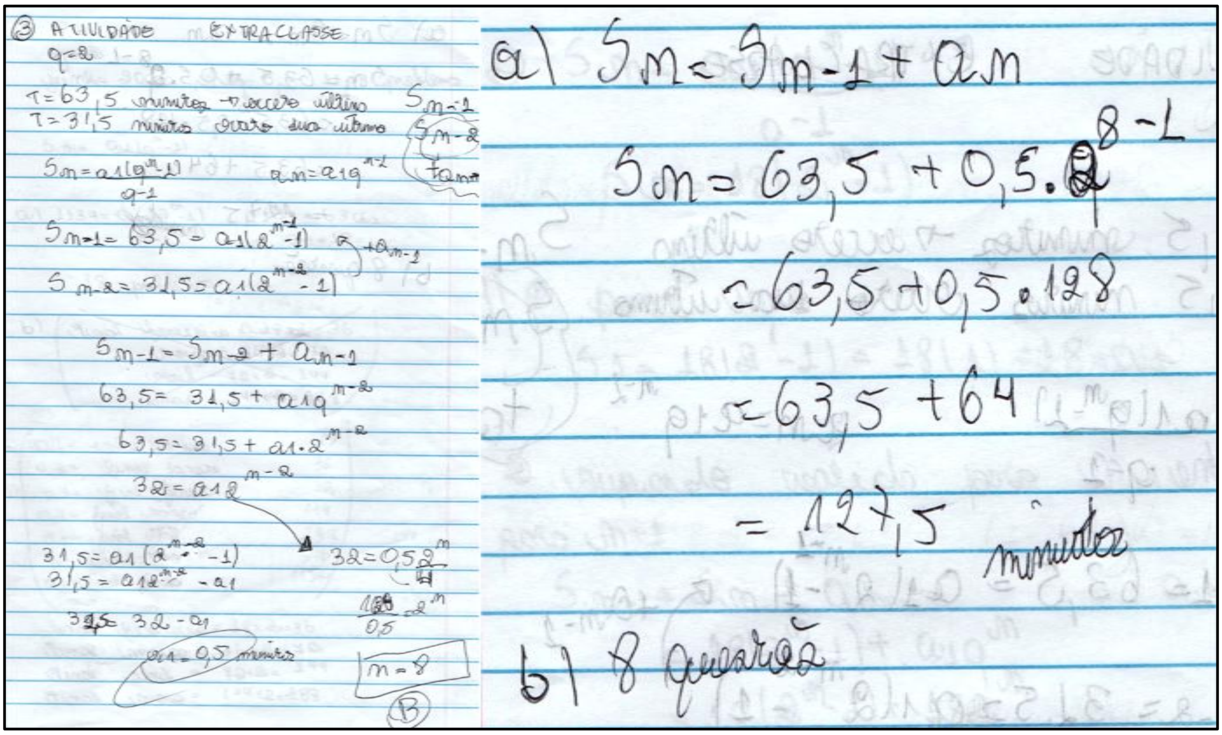
Fonte: Internet[45].

Durante a resolução deste problema, percebemos que foi o de maior dificuldade para o Grupo 2. Acreditamos que isso tenha ocorrido por que sua resolução seguia por caminhos mais adversos que os anteriores trabalhados em sala de aula.

Como representado na Figura 30, o grupo optou por utilizar diferentes relações da PG a fim de definir o tempo gasto, pelo aluno, para resolver a primeira questão da prova (a_1), sendo este, um fator essencial para a resolução dos itens *a* e *b*.

[45] Disponível em: https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/unicamp/2004_2fase/4dia/unicamp2004_2fase_4dia_prova.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

Figura 30 – Resolução do Grupo 2 para o problema extraclasse do quarto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste encontro, excepcionalmente, a plenária ocorreu um pouco diferente das anteriores, devido ao horário avançado que nos encontrávamos e desta forma, não houve a explanação e constatação das ideias dos grupos no quadro. Neste dia a plenária ocorreu de forma oral, na qual os grupos expressaram qual(is) o(s) caminho(s) que os levaram a resolver os problemas daquela maneira. Como o Grupo 1 não solucionou o problema extraclasse durante o encontro, este não foi discutido durante a plenária, uma vez que era para fazê-lo em casa.

Cabe destacar que, como havíamos resolvido o problema 2 de forma algébrica, acreditávamos, durante a realização da plenária, que os grupos haviam feito o problema extraclasse de maneira correta, uma vez que ambos encontraram o mesmo valor numérico para esse problema. Por isso, admitimos que houve uma falha, de nossa parte, na correção desse problema, em específico, durante a plenária.

Como supracitado, viemos a perceber esse equívoco apenas durante a análise dos dados da pesquisa. Após a plenária lhes foi entregue a folha contendo a formalização daquele encontro, que se encontra no Apêndice F, e realizada uma explanação e discussão da mesma.

5.1.5 Quinto Encontro

Neste encontro vislumbrávamos trabalhar com o conceito da soma infinita da PG com os alunos. Para esse fim, selecionamos problemas que envolvessem conhecimentos prévios de outros conteúdos matemáticos para a sua resolução como, por exemplo, algumas propriedades de Geometria, a ideia de triângulo isósceles e conceitos envoltos na Trigonometria.

Neste dia estavam presentes cinco alunos (Baraka, Beija-Flor, Joaquim, Joana e Fermat), os quais foram dispostos em um trio e uma dupla, sendo de livre escolha a composição de cada grupo.

Nesta ocasião, começamos o encontro questionando o Grupo 1 se eles haviam resolvido o problema pendente da aula anterior em casa. Recebendo a resposta negativa, alertamos aos grupos que apesar de ser uma atividade extraclasse, ela deveria ser resolvida a fim de auxiliar na sua aprendizagem.

Diante desse cenário discutimos, brevemente, os caminhos adotados pelo Grupo 2 para a sua resolução do problema, e afirmamos que iríamos disponibilizar no Moodle[46] as soluções de todos os problemas dos encontros anteriores.

Após esse momento, entregamos aos alunos uma folha de atividades correspondentes àquele encontro, na qual, como de rotina, os grupos fizeram a leitura individual e em conjunto para posteriormente começar a resolvê-los.

O problema 1, Apêndice E, permitiu um trabalho que envolvesse a ideia de uma soma infinita numa sequência que se comportava como uma PG, e que, também, era necessário o conhecimento de conceitos envolvendo os semicírculos. Em suas resoluções, os grupos partiram por estratégias bem similares.

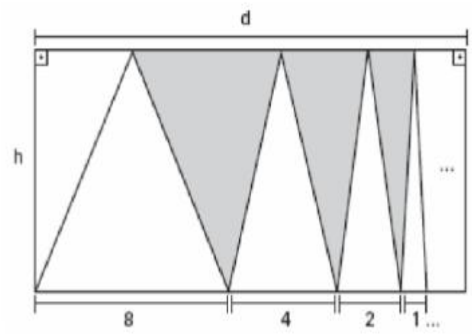
O problema 2, assim como o anterior, não afirma, no seu enunciado, que a sequência formada, neste caso, pelas medidas das bases dos triângulos isósceles era uma PG. Os alunos precisavam identificar essa relação.

Este problema, conforme a Figura 31, era um pouco mais complexo que o anterior já que, além dos conceitos da PG, necessitava-se de alguns relacionados aos triângulos isósceles, a área de figuras planas e ao triângulo retângulo. Diante desse cenário, este foi o problema que os alunos empregaram um maior tempo para sua resolução.

[46] Ambiente Virtual de Aprendizagem utilizado pela UFSM.

Figura 31 – Problema 2 do quinto encontro

PROBLEMA 2 - (FGV-2005): A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, $8, 4, 2, 1, \cdots$



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a?

Fonte: Internet[47].

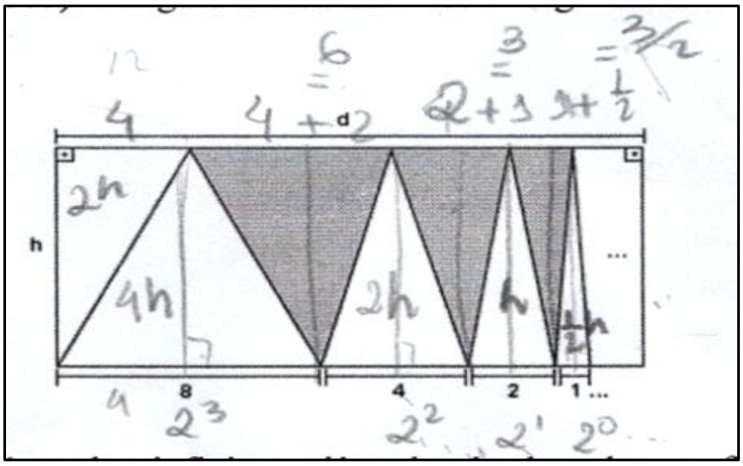
Para solucioná-lo, o Grupo 1 definiu que a medida de d poderia ser representada pela soma infinita da sequência (8, 4, 2, 1,…) que se comportava como uma PG, uma vez que este somatório estava do lado oposto a d, e por se tratar de um retângulo, eles eram iguais. Para definir a adição dessa sequência, utilizaram a fórmula da soma infinita da PG, pois sua razão está compreendida entre -1 e 1, determinando, assim, que o lado d correspondia a 16 unidades de medidas (u.m.).

Já com relação ao lado h, o grupo enfrentou mais dificuldade em definir uma estratégia a ser seguida para determiná-lo, uma vez que o retângulo não apresentava um caminho “explícito” para definir seu valor.

Após as discussões de diversas estratégias, que foram descartadas, notaram que poderiam obtê-lo por meio da área do retângulo, Figura 32, na medida em que ela era constituída pela soma das áreas do triângulo retângulo, dos triângulos hachurados e dos demais triângulos (que se comportavam como uma PG infinita). Assim, determinaram que a altura $h$correspondia a 8,5 u.m., e, consequentemente, a área do retângulo era 136 u.m.

[47] Disponível em: http://www.cocimperatriz.com.br/2007/doc/listaoexercicios/2lista_matematica_3ano.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

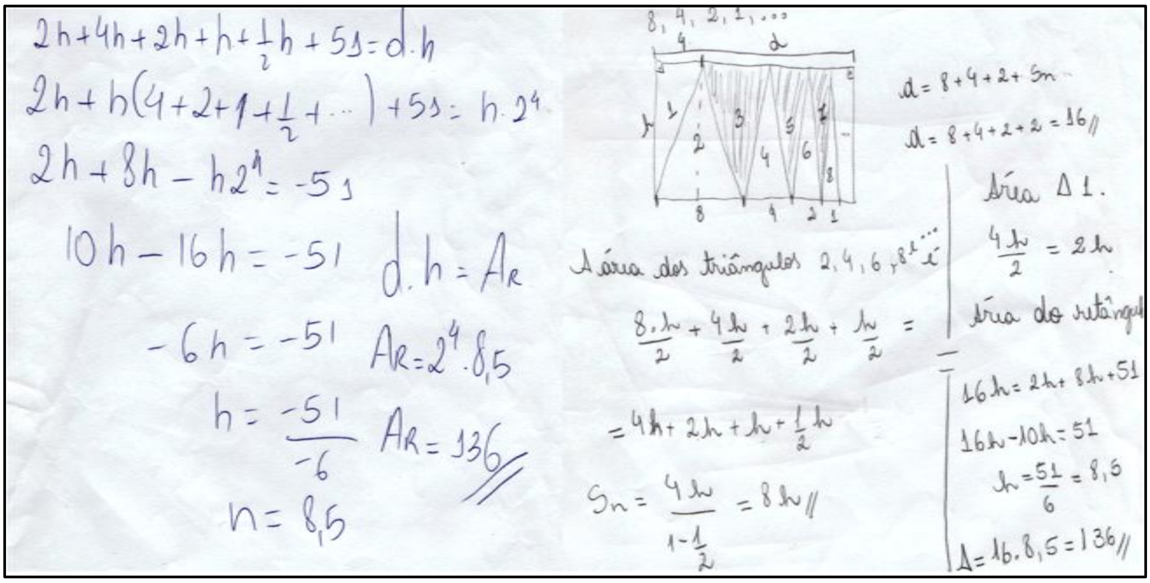
Figura 32 – Esboço da resolução do Grupo 1 para o problema 2 do quinto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução do Grupo 2, para esse problema, seguiu caminhos parecidos com o do Grupo 1. Eles também optaram por encontrar o valor de d utilizando as informações dadas pelo problema do seu lado oposto. Concluíram, também através da resolução da soma das infinitas parcelas da PG, que este lado possuía uma medida de 16 u.m., conforme pode ser observado na Figura 33.

Figura 33 – Resolução dos grupos para o problema 2 do quinto encontro

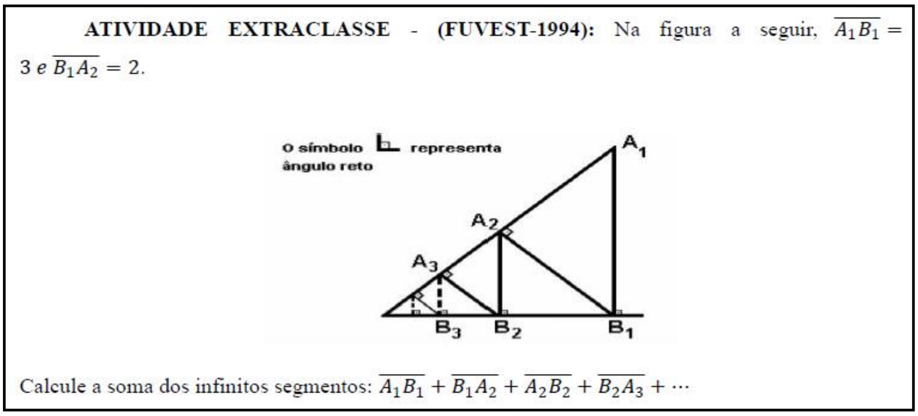


Fonte: Dados da pesquisa.

Para determinar a altura e a área do retângulo, utilizaram da mesma estratégia pensada pelo Grupo 1. Desta forma, identificamos que ambos os grupos pensaram em caminhos bem semelhantes para resolver o problema 2.

O problema extraclasse, Figura 34, trouxe outra atividade que carecia de conhecimentos precedentes para resolvê-lo e, assim como nos anteriores, em seu enunciado não existia uma indicação que a sequência formada, nesse caso por alguns seguimentos, era uma PG, fazendo com que os alunos percebessem essa analogia.

Figura 34 – Problema extraclasse do quinto encontro

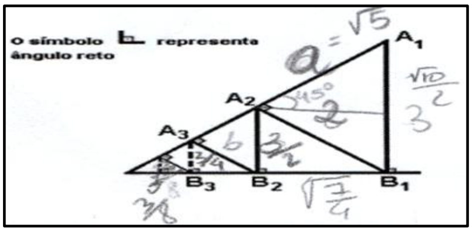

ATIVIDADE EXTRACLASSE - (FUVEST-1994): Na figura a seguir, $\overline{A_1B_1} = 3$ e $\overline{B_1A_2} = 2$.

Calcule a soma dos infinitos segmentos: $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$

Fonte: Internet[48].

Apesar de tentar e buscar por estratégias, conforme a Figura 35, o Grupo 1, assim como no encontro anterior, não conseguiu finalizar a atividade na aula. Aos nossos olhos, isso ocorreu devido ao tempo gasto, pelo grupo, para resolver a segunda questão, e, também, por essa atividade necessitar de certo período para resolvê-la, sendo que eles não possuíam tempo hábil para isso.

Figura 35 – Rascunho feito pelo Grupo 1 para a resolução do problema extraclasse



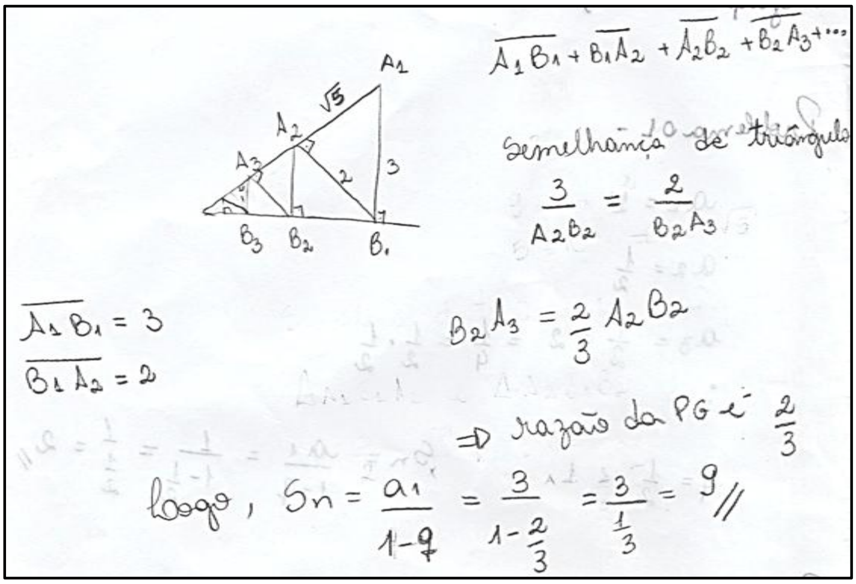
Fonte: Dados da pesquisa.

[48] Disponível em: http://www.cocimperatriz.com.br/2007/doc/listaoexercicios/2lista_matematica_3ano.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

Para resolver esse problema, o Grupo 2, em diversos momentos, assumiu que a sequência, definida pela soma dos segmentos, era uma PG, porém eles não estabeleciam nenhuma fundamentação teórica que validasse isso. Por diversas vezes, o pesquisador precisou chamar a atenção com relação a esse fato e indicar que apesar de estarmos trabalhando somente com a PG nos nossos encontros, eles precisavam encontrar uma justificativa que garantisse isso.

Observamos, na Figura 36, que o grupo adotou a semelhança de triângulos como uma estratégia a ser seguida para comprovar que a sequência era uma PG, e, enfim, resolver o problema. Devemos destacar que, apesar da solução numérica encontrada pelo Grupo 2 estar correta, há incoerência em dois pontos.

Figura 36 – Resolução do Grupo 2 para o problema extraclasse do quinto encontro



Fontes: Dados da pesquisa.

O primeiro deles é que, em nenhum momento da resolução do problema, o grupo definiu qual foi o caso de semelhança utilizado por eles, a fim de validar a relação dos triângulos. Nós também não conseguimos identificá-la, ao analisar a sua solução, e tampouco perceber quais os triângulos que foram comparados, deixando assim, a solução com certa dúvida quanto à sua validade e legitimidade.

O segundo ponto a ser enfatizado é que, ao utilizarem essa relação de semelhança de triângulos e determinar que $\overline{B_2A_3} = \frac{2}{3}\overline{A_2B_2}$, o grupo assume, prontamente, que essa sequência de segmentos dos triângulos se comporta como uma PG de razão $\frac{2}{3}$, sem fazer testes que comprovassem que esse padrão seguia de forma contínua. Estes fatores, essenciais para a veracidade da resolução encontrada pelo grupo, foram levantados pelo pesquisador no transcorrer da plenária.

Após a resolução dos problemas, realizamos a plenária seguindo o modelo habitualmente trabalhado nos encontros, com exceção dos dois últimos, na qual os alunos mostraram, no quadro, suas soluções para posteriormente, discuti-las.

No problema 1, apontamos e questionamos, os grupos, o porquê da diferença de resposta encontrada por eles (Grupo 1: 2π e Grupo 2: 2), na qual ficou constatado que o Grupo 2 esqueceu de definir o comprimento da espiral representado pela soma dos semicírculos, na medida em que eles apenas calcularam o somatório de todos os raios, e não era isso que o problema solicitava.

Com relação ao debate realizado na plenária quanto ao problema 2, destacamos a semelhança nas estratégias seguidas pelos grupos, ainda, evidenciamos que o pesquisador havia adotado outro caminho para resolvê-lo e que este seria disponibilizado, novamente, a eles no Moodle. Caso surgisse alguma dúvida, quanto à solução do pesquisador, orientamos os alunos a perguntarem no próximo encontro a fim de saná-las.

Na discussão do problema extraclasse[49], comentamos que os grupos seguiram por diversas estratégias, que não deram certo, e haviam esquecido uma relação básica da trigonometria: seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo. Alertamos que, através desse caminho, a resolução do problema ocorreria de forma mais ágil.

Foram debatidos, também, os apontamentos levantados anteriormente, quanto à resolução desse problema por parte do Grupo 2. Realçamos que o grupo seguiu por estratégias voltadas a Geometria Plana, e que não havia empecilho quanto a isso, porém era preciso ficar atento se os caminhos possuíam coerência. Após a finalização da plenária, foi entregue para cada aluno uma folha que continha a formalização referente àquele encontro (Apêndice F).

5.1.6 Sexto Encontro

Com a finalidade de definir com os alunos o conceito da PG de segunda ordem, iniciamos o sexto encontro. Neste dia estavam presentes os discentes Baraka, Joaquim, Beija-

---

[49] Apesar do Grupo 1 não ter concluído a atividade, eles pensaram em estratégias para sua resolução, por isso esse problema também foi discutido na plenária.

Flor e Joana. Desta forma, duas duplas foram formadas com o intuito de começar a resolução dos problemas destinados aquele conteúdo.

Entregamos para cada dupla uma folha na qual continha as atividades previstas para aquele dia. De forma atípica, comparando aos anteriores, nesta havia apenas dois problemas. Este fato ocorreu por causa de dois motivos: um deles foi a falta de material disponível em livros e na internet para usá-los de forma com que nos fosse permitido trabalhar com esse conceito da PG. Ressaltamos, novamente, que todos os problemas deste encontro foram elaborados pelo pesquisador.

O outro ponto a ser destacado é que a PG de segunda ordem possui certo grau de complexidade para as resoluções dos problemas, necessitando, assim, de razoável tempo para solucioná-los.

Após a leitura individual e em conjunto, os grupos deram início à resolução dos problemas. Por meio da questão 1, exposto na Figura 37, buscamos começar o trabalho de maneira menos complexa.

Figura 37 – Problema 1 do sexto encontro

PROBLEMA 1 - Caleb era um aluno que adorava descobrir padrões. Numa de suas investigações, notou que a sequência $(1, 2, 8, 64, \cdots)$ possuía um padrão bastante peculiar. Responda:

a) Qual o padrão desta sequência identificado por Caleb?

b) Quais seriam os próximos 3 elementos dessa sequência?

c) Determine uma generalização, $\forall n \in N$, para o enésimo termo dessa sequência.

d) Mostre que essa generalização é valida $\forall n \in N$.

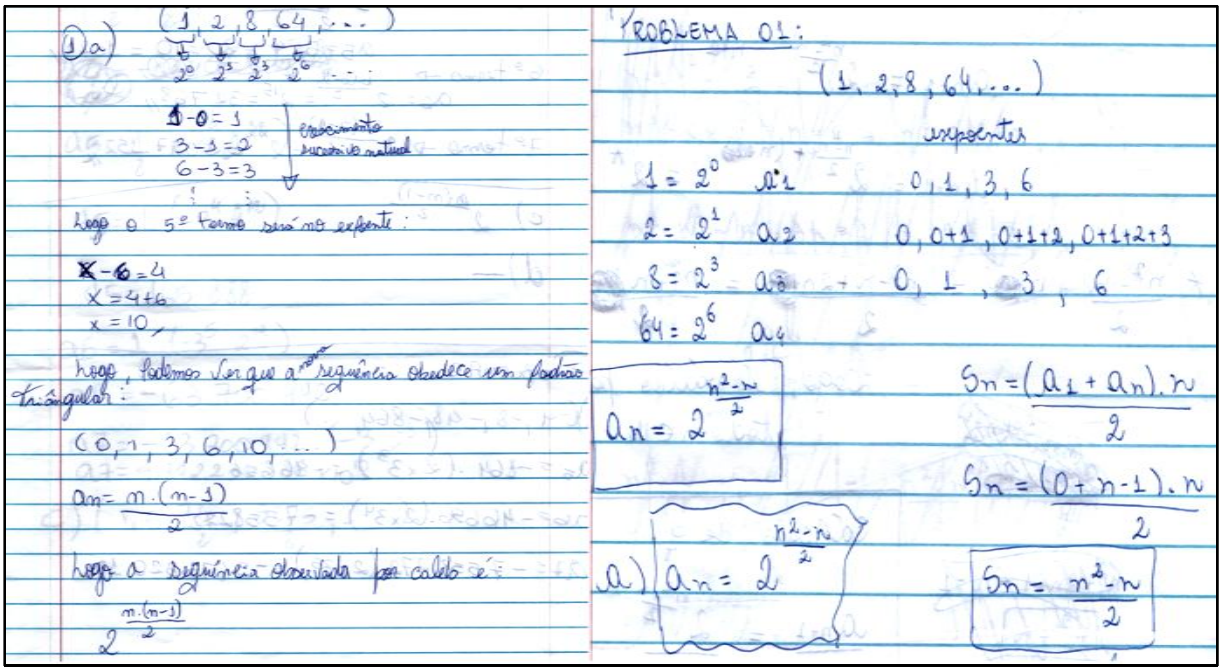
Fonte: Elaborado pelos autores.

Necessitamos ressaltar que o Grupo 1 não finalizou nenhuma solução para os problemas durante o período disponível na aula, apesar do pesquisador e do outro grupo auxiliarem-nos no decorrer da proposta. No entanto, no encontro seguinte, eles entregaram algumas soluções que foram realizadas em casa. Por esse motivo, em certos problemas, haverá a solução de ambos os grupos.

Para o item *a*, o Grupo 1 optou por desmembrar termo a termo os elementos da sequência (1, 2, 8, 64,…) com o objetivo de tentar identificar qual era o padrão encontrado por Caleb. Perceberam, então, que ela possuía uma relação referente aos expoentes de potências de 2, ou seja, que o expoente seguinte era a subtração dos dois anteriores e que ela se comportava como uma PA de segunda ordem[50] de razão 1.

Desta forma, o grupo utilizou o conceito de números triangulares, estudado nas aulas sobre a PA. Assim, definiram que o expoente do enésimo termo (a_n) é a soma de uma PA. Conforme visto na Figura 38, eles geram, um padrão algébrico, para o enésimo termo dessa sequência, $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Figura 38 – Resoluções dos grupos para o *item a* do problema 1 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

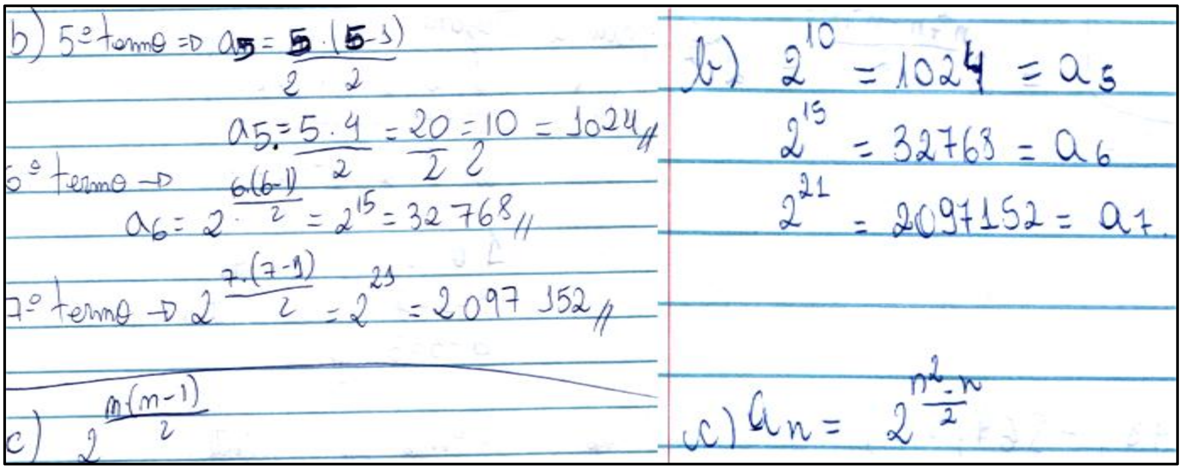
O Grupo 2, em um primeiro momento, identificou a sequência como sendo uma PA, pois acreditavam que ela não crescia de forma exponencial (característica de uma PG). Após alguns debates sobre o comportamento dessa sequência, perceberam que havia uma relação entre os expoentes. Por conseguinte, partem do mesmo pressuposto do Grupo 1 com a intenção de averiguá-la.

[50] Para uma melhor compreensão sugerimos a leitura de Correa (2016).

Desta forma, também intuíram que os expoentes estão se comportando como um somatório de uma PA, assim, de maneira similar ao grupo anterior, optaram por definir o expoente do enésimo termo dessa sequência, utilizando a definição da soma de uma PA, deliberando, assim que $a_n = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Para resolver o item *b*, os dois grupos empregaram suas relações definidas no item anterior, a fim de determinar os três próximos termos da sequência estabelecidas por Caleb, embora suas relações fossem estruturadas de formas distintas, elas representavam a mesma. Desse modo, os grupos determinaram, corretamente, os termos seguintes da sequência, conforme observado na Figura 39.

Figura 39 – Resoluções dos grupos para os itens *b* e *c* do problema 1 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

No item *c*, os grupos apenas utilizaram a relação definida por eles, na letra *a*. Destacamos que buscávamos, por meio das soluções dessas duas questões, conjecturas distintas que determinassem o enésimo termo da sequência de Caleb.

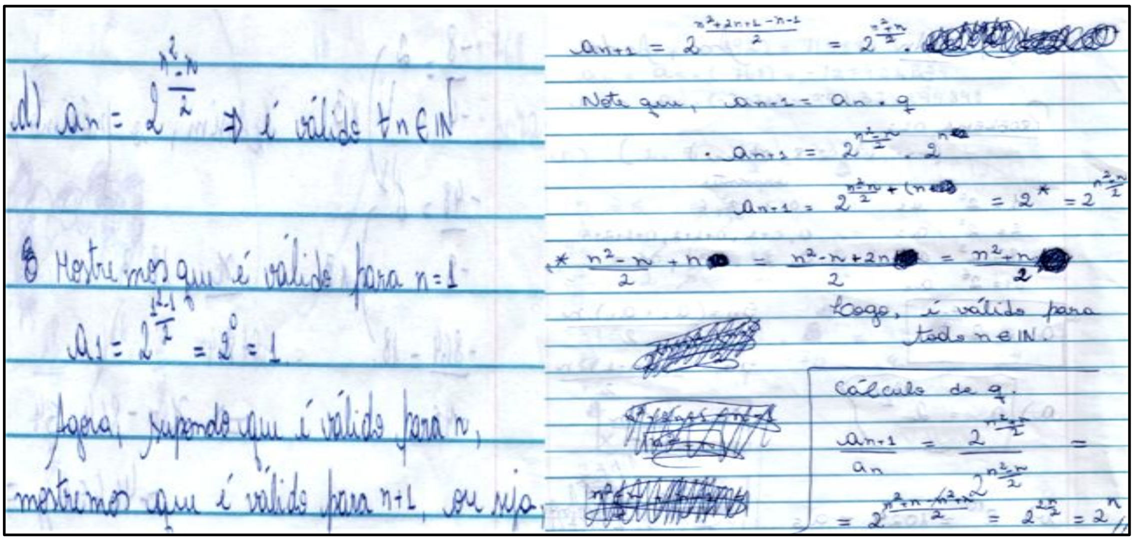
No item *a* gostaríamos que eles percebessem um padrão, que poderia ser estruturado de maneira menos formal, sendo que, os grupos, deveriam apenas explicitá-lo. Já na letra *c* queríamos uma generalização para esse padrão, que fosse válido $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim sendo, os alunos determinaram, conforme nosso planejamento, o item *c* no item *a*, por isso a coincidência nas respostas. Assumimos que houve uma falha, da nossa parte, na distinção destas alternativas, tanto no enunciado como na leitura em grupo feita antes da solução dos problemas.

Salientamos que o item *d* foi resolvido apenas pelo Grupo 2. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato de sua demonstração ser um pouco mais complexa que as já trabalhadas nos encontros passados e, por não entender com clareza a PG de segunda ordem, o Grupo 1 não conseguiu prová-la sem o auxílio do professor.

Para a demonstração da conjectura, o Grupo 2 optou pelo PIM com o intuito de validá-la $\forall n \in \mathbb{N}$, conforme visto na Figura 40. No entanto, cabe evidenciar que, num primeiro momento, ao desenvolver essa demonstração, o grupo apresentou certa dificuldade.

Figura 40 – Resolução do Grupo 2 para o *item d* do problema 1 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a finalidade de verificar a validade da sentença utilizando o PIM, primeiramente analisaram se a conjectura é válida para 1. Ao constatar sua veracidade, o grupo segue a averiguação para $n + 1$.

Para isso, com o auxílio da definição da PG, assumem que $a_{n+1} = a_n.q$. No entanto, o grupo define a razão da sequência de forma equivocada, na qual acarretou em uma validade, para $n + 1$, incoerente.

Desta forma, tentaram identificar quais foram seus erros na demonstração da generalização. O grupo, então, notou que havia definido de maneira equivocada $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, o que originou em uma razão incorreta.

Após fazer as correções, eles conseguiram comprovar, de forma precisa, que a sentença, definida em *c*, é verdadeira. Reforçamos, novamente, o quão importante é essa ferramenta matemática para as demonstrações de fórmulas, conjecturas e teoremas nas aulas que envolvam a Matemática Discreta.

O problema 2, Figura 41, tinha o objetivo de retomar a ideia da PG de segunda ordem, sendo que esta atividade era mais “direta” do que as outras vistas nos encontros anteriores, uma vez que ela não apresentava nenhuma contextualização, como era habitual.

Figura 41 – Problema 2 do sexto encontro

PROBLEMA 2 - Determine os próximos três elementos das sequências abaixo:

a) $(-4, -8, -48, -864, \cdots)$

b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 18, -864, \cdots\right)$

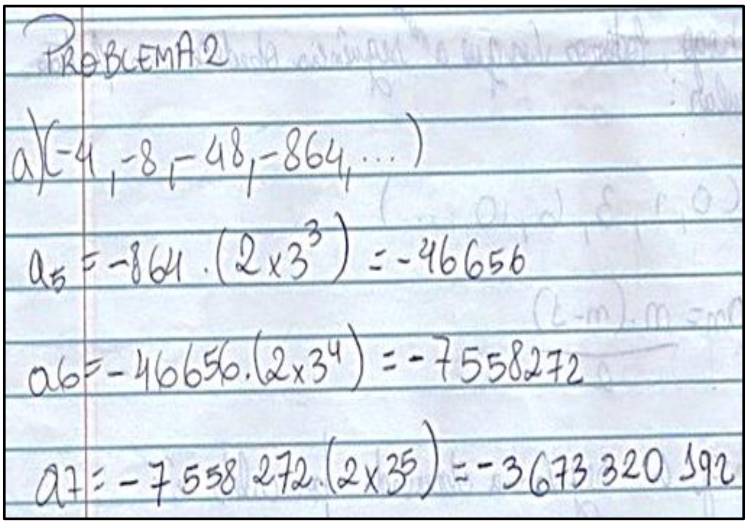
c) $\left(1, 5, \frac{75}{2}, \frac{3375}{8}, \cdots\right)$

Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Destacamos que, como o Grupo 1 não tinha conseguido resolvê-lo durante o período de aula, apesar de terem tentado, as estratégias pensadas pelo grupo serão relatadas conforme nossa percepção ao analisar sua folha de soluções. No item a, ambos os grupos, definem os próximos termos de maneira correta, porém optam por adotar caminhos distintos.

O Grupo 1 relacionou o enésimo termo da sequência por meio de uma conjectura, que identificamos como sendo $a_n = a_{n-1}\ (2.3^{n-2})$, conforme podemos observar na Figura 42.

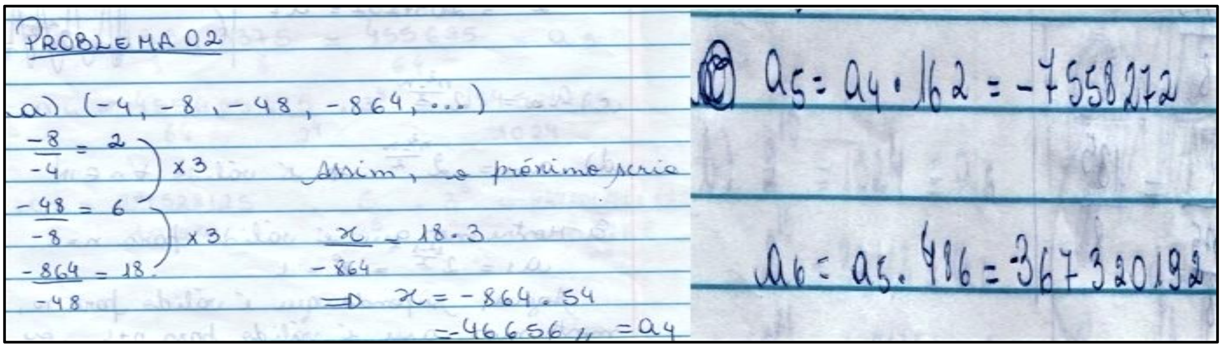
Figura 42 – Resolução do Grupo 1 para o item *a* do problema 2 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa

Em contrapartida para determinar os próximos termos, conforme a Figura 43, o Grupo 2 notou que eles se originam pela multiplicação do termo anterior por $3\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)$. Detectamos assim que, apesar de o grupo não deixar evidente na sua folha de resoluções, eles representam o enésimo termo como sendo $a_n = 3a_{n-1}\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)$, ou ainda $a_n = 3\,\frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}}$. Evidenciamos que esta relação não havia sido pensada em nossas possíveis resoluções para o problema.

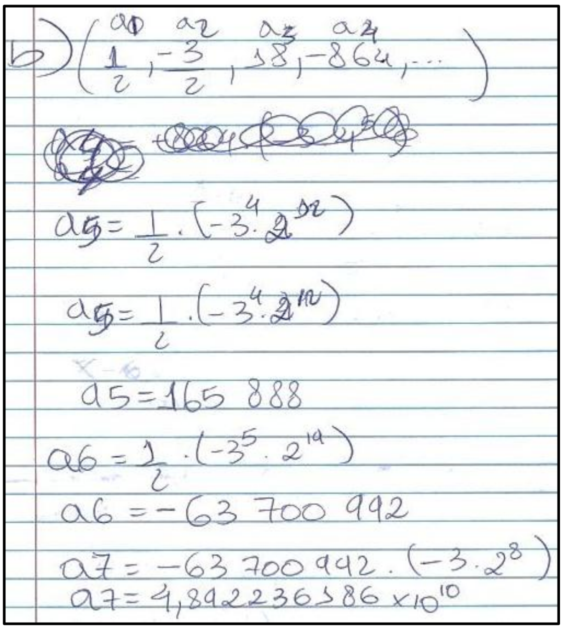
Figura 43 – Resolução do Grupo 2 para o item *a* do problema 2 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução da letra *b*, Figura 44, o Grupo 1 apostou por definir uma relação que lhe permitisse determinar qualquer termo da sequência dependendo apenas dos expoentes das potências 2 e 3. No entanto, essa conjectura - a qual não conseguimos defini-la - só funcionou para o termo seguinte (a_5) uma vez que a_6 e a_7 são, respectivamente, -127.401.984 e 391.378.894.848 que diferem da resolução apresentada pelo do grupo.

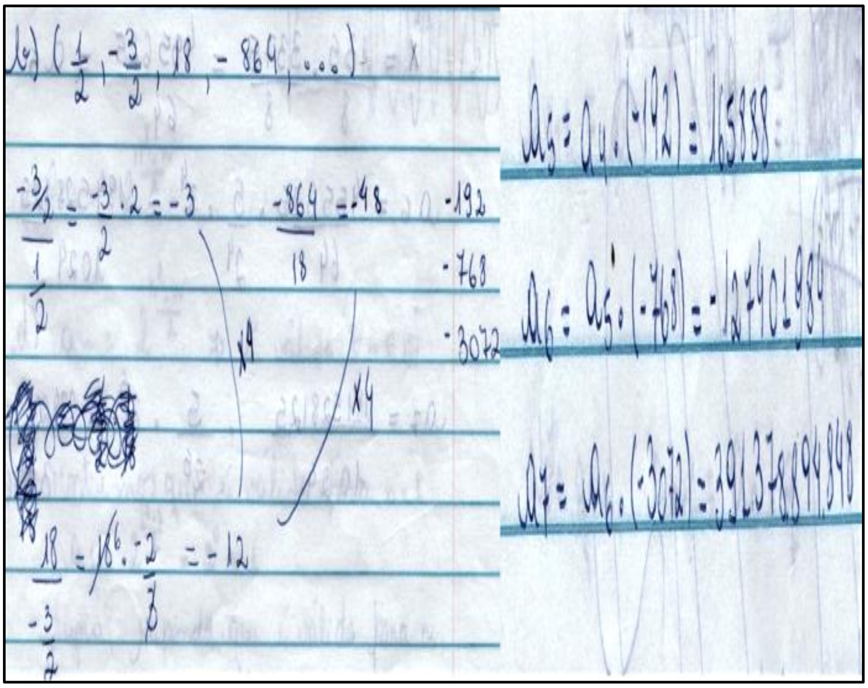
Figura 44 – Resolução do Grupo 1 para o item *b* do problema 2 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa

Vale enfatizar que eles optaram por modificar sua estratégia na resolução do a_7, porém como o a_6 estava incorreto, acabou ocasionando em uma resposta errônea. Alertamos que, se o grupo tivesse adotado o padrão estabelecido em a_7 desde o início, toda sua resolução estaria correta. O Grupo 2, Figura 45, seguiu o mesmo raciocínio constituído por eles para resolver a letra *a*, identificando que o termo seguinte era oriundo da relação $a_n = 4\frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}}$, apesar de não ter explicitado essa ideia.

Figura 45 – Resolução do Grupo 2 para o item *b* do problema 2 do sexto encontro

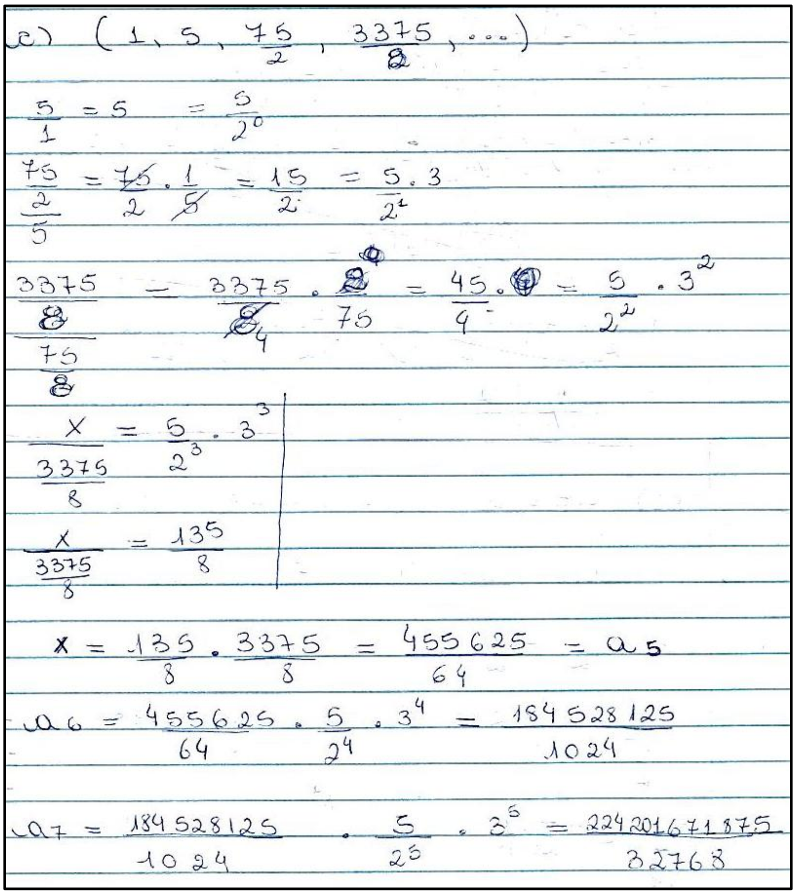


Fonte: Dados da pesquisa.

Destacamos que o item *c* foi resolvido apenas pelo Grupo 2. Acreditamos que por ele ser um pouco mais complexo e o Grupo 1 ainda não ter compreendido a PG de segunda ordem em sua totalidade, eles não conseguiram estabelecer uma estratégia que lhes permitissem determinar os próximos termos da sequência. Observamos, durante o encontro, que essa foi a questão que o Grupo 2 apresentou mais dificuldade em resolver. Eles não conseguiam constituir uma relação que determinasse os termos seguintes.

Após algumas discussões, notaram que os próximos termos poderiam ser determinados por $a_n = 5a_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, conforme observado na Figura 46. Ressaltamos que o grupo não definiu explicitamente essa relação, porém conseguimos identificá-la durante a análise da folha de soluções.

Figura 46 – Resolução Grupo 2 para o *item c* do problema 2 do sexto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Diante do fato de o Grupo 1 não conseguir resolver nenhum problema desse encontro em sala de aula, excepcionalmente, neste dia optamos por não realizar a plenária, e deixamos combinado que ela ocorreria junto com a do próximo encontro. Neste sentido, a formalização do conceito de PG de segunda ordem também ocorreu apenas no sétimo encontro.

5.1.7 Sétimo Encontro

Com a finalidade de associarmos a ideia da PG com a Geometria Fractal, conteúdo pouco recorrente na Educação Básica, demos início ao nosso último encontro. Neste dia estavam presentes quatro alunos, a saber, Baraka, Joaquim, Joana e Fermat.

Iniciamos o encontro, relatando que as discussões e formalizações da aula anterior ocorreriam ao findá-lo, junto com a plenária. Após essa orientação, entregamos uma folha de problemas para cada membro das duplas.

Com o objetivo de relacionar o conceito de termo geral da PG com o Fractal intitulado de Triângulo de Sierpinski, adaptamos o problema 1, extraído da prova do ENEM de 2008 e expresso na Figura 47.

Figura 47 – Problema 1 do sétimo encontro

PROBLEMA 1 - (ENEM – 2008 - Adaptada): O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois (triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

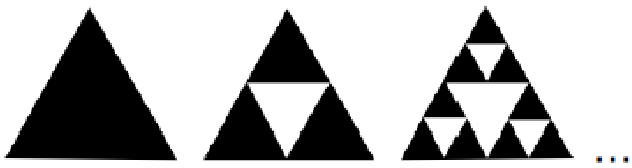


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) De acordo com o procedimento descrito como podemos representar a figura 4 da sequência apresentada acima?

b) Que generalização podemos fazer para determinar a quantidade de triângulos pretos de cada figura?

c) E para os brancos?

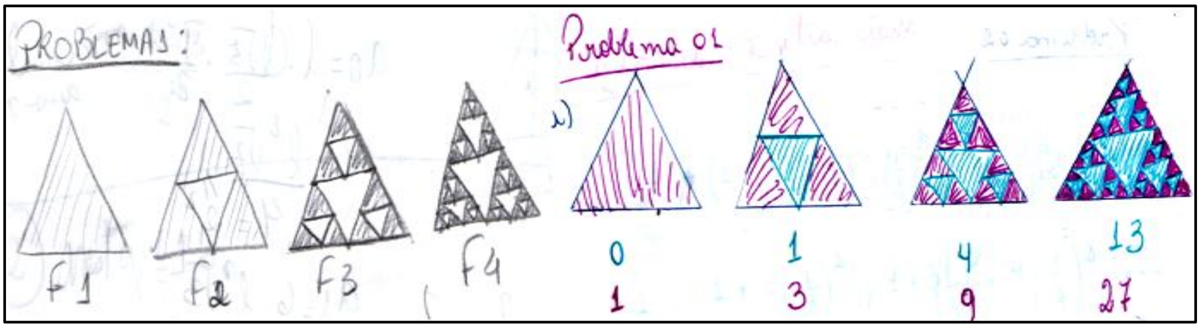
d) Se esse procedimento seguir de maneira infinita, que tendência seguirá a área escura da enésima figura?

Fonte: Internet[51].

No item *a*, ambos os grupos preferiram representar geometricamente a próxima iteração do Triângulo de Sierpinski, definido pelo problema como figura 4, uma vez que para eles era mais fácil de visualizar o padrão da sequência. Esta estratégia foi distinta da pensada pelo pesquisador para a resolução desta questão, conforme podemos observar no Apêndice D. As representações dos grupos estão expressas na Figura 48.

[51] Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf. Acesso em: 14 jun. 2019.

Figura 48 – Resolução dos grupos para o *item a* do problema 1 do sétimo encontro

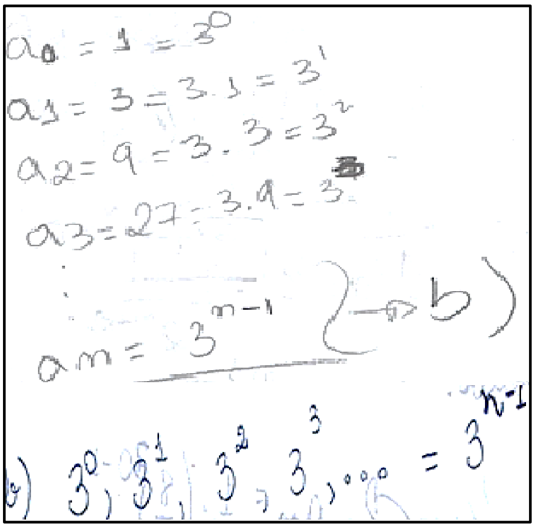


Fonte: Dados da pesquisa.

No item b que solicitava uma generalização em que, por meio dela, fosse possível encontrar a quantidade de triângulos pretos da enésima figura, os grupos optaram por identificar qual era o padrão seguido por este quantitativo. Imediatamente notaram que os triângulos pretos estavam se comportando como uma potência de base três.

Desta forma, os grupos conjecturam que a quantidade de triângulos pretos da enésima figura poderia ser determinada pela relação 3^{n-1}. No entanto, precisamos ressaltar os encaminhamentos seguidos pelo Grupo 1, uma vez que, conforme Figura 49, eles adotaram o primeiro valor de n como sendo zero, porém também a generalizam como 3^{n-1}.

Figura 49 - Resolução dos grupos para o item b do problema 1



Fonte: Dados da pesquisa.

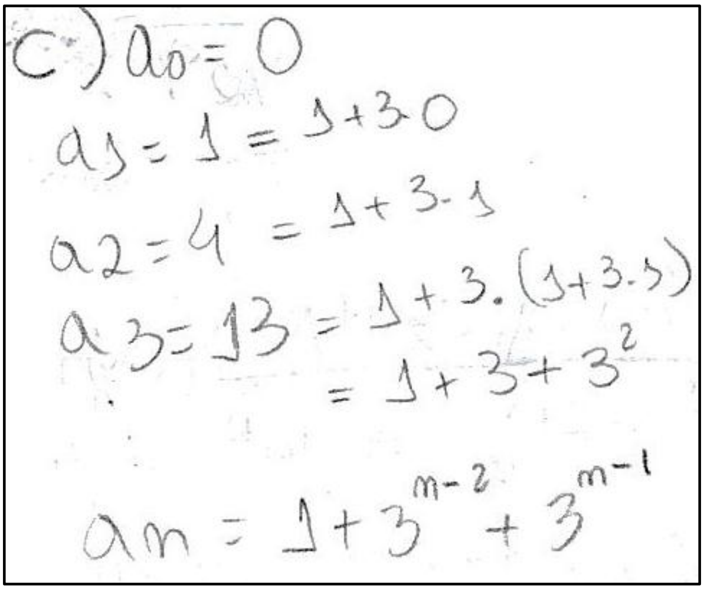
Observamos que essa relação, começando por zero, não será verídica, pois teríamos na primeira figura $\frac{1}{3}$ de triângulos pretos, na segunda 1, na terceira 3, e assim sucessivamente, o que não condiz com a figura original do problema, sendo que a relação estabelecida pelo grupo deveria ser 3^n.

Isso nos leva a criar duas hipóteses: a conjectura foi corrigida, por eles, durante a plenária, uma vez que a folha era entregue somente ao final do encontro ou houve certa confusão ao determinarem qual seria o primeiro n natural adotado na sequência.

O item *c* era bem semelhante ao anterior, diferindo que neste foi solicitada a generalização para os triângulos brancos. Os grupos tiveram bastante dificuldade para resolver esse problema, uma vez que seu padrão não era tão evidente quanto o dos triângulos pretos.

Quanto à solução apresentada pelo Grupo 1, notamos que eles optaram por abrir termo a termo da sequência de triângulos brancos com o intuito de verificar qual era o padrão seguido por ela, conforme Figura 50. No entanto, sua conjectura encontrada, $a_n = 1 + 3^{n-2} + 3^{n-1}$, não se mostra válida $\forall n \in \mathbb{N}$. Como, por exemplo, podemos evidenciar que no 4º termo da figura 4 teríamos 37 triângulos pretos, porém o quantitativo correto é 27, que inclusive, pode ser comprovado na representação geométrica dada pelo grupo no item *a*.

Figura 50 – Resolução do Grupo 1 para o item *c* do problema 1 do sétimo encontro



c) $a_0 = 0$

$a_1 = 1 = 1+3\cdot 0$

$a_2 = 4 = 1+3\cdot 1$

$a_3 = 13 = 1+3.(1+3.1)$

$= 1+3+3^2$

$a_n = 1+3^{n-2}+3^{n-1}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse erro nos mostra a importância de verificar, no universo do conjunto em que estamos trabalhando, se as conjecturas são válidas para quaisquer valores que adotarmos, corroborando com a ideia apontada por Fiorentini e Oliveira (2013) quanto à relevância das provas e demonstrações nas aulas de Matemática.

Apesar de os dois grupos representarem uma conjectura na folha de respostas, pudemos identificar que o Grupo 2 não ressaltou as estratégias pensadas para resolvê-lo, o que nos leva a crer que sua resposta foi reproduzida durante as discussões na plenária.

O próximo item requeria uma generalização para a tendência seguida pela área formada pelos triângulos pretos. Este problema foi o que ambos os grupos tiveram mais dificuldade para resolver neste encontro, uma vez que era necessário o conhecimento prévio sobre relações envoltas no triângulo equilátero, como por exemplo, a área e a altura.

Durante a resolução do problema, foi recorrente escutar deles apontamentos do tipo: *"Qual a altura de um triângulo equilátero?", "Professor, qual é mesmo a fórmula da área de um triângulo equilátero?"*. Os membros do Grupo 1 resolveram individualmente este problema e no final buscaram entrar em um consenso para a conjectura requerida.

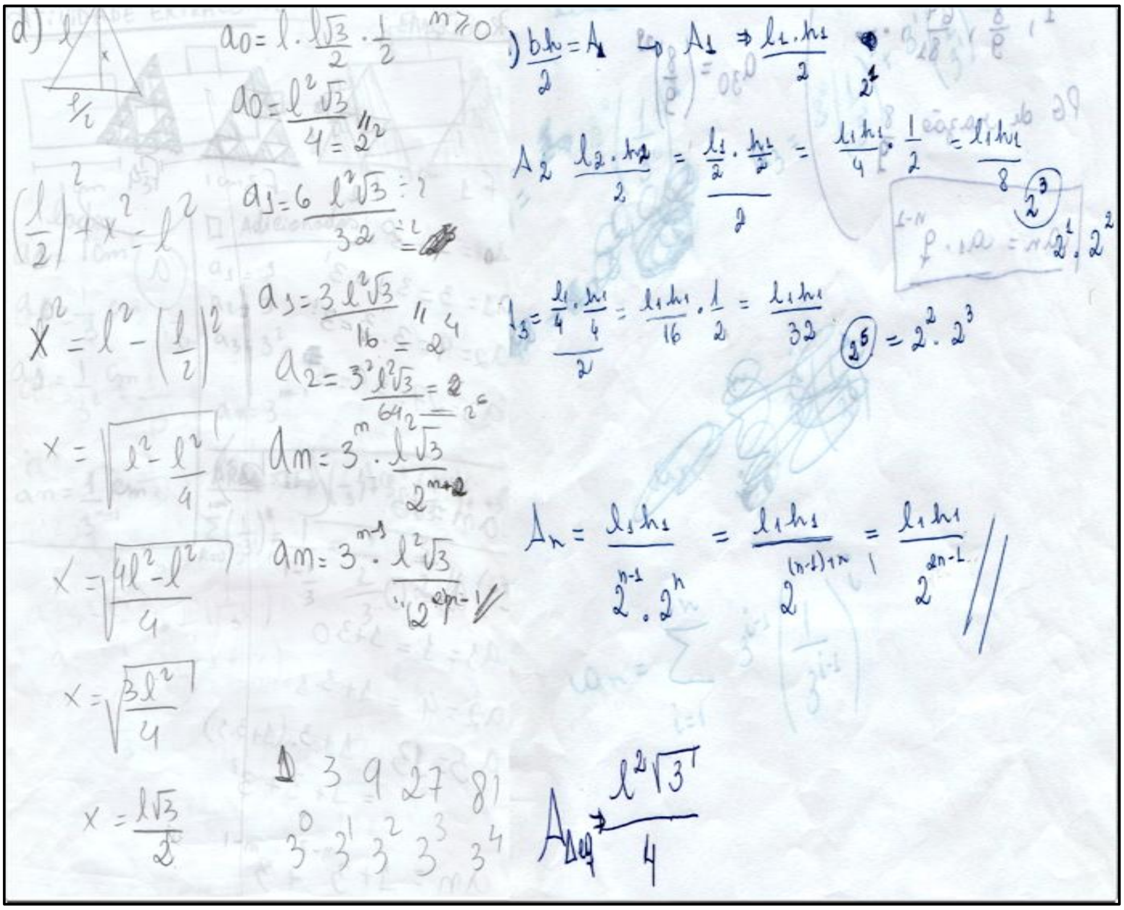
Baraka optou por definir as áreas, de cada iteração, por meio da relação mais tradicional para o triângulo: $A = \frac{bh}{2}$. Para isso, determinou a altura do triângulo equilátero utilizando o Teorema de Pitágoras, uma vez que a altura tem por característica possuir um ângulo de 90º com relação à base. O aluno Fermat preferiu gerar as áreas dos triângulos pretos, utilizando a relação estabelecida para este tipo de triângulo $\left(A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ao final, o grupo identificou que as suas relações tendiam a um mesmo padrão, e juntos, generalizaram que a área do enésimo termo é oriunda de $\left(\frac{3^{n-1}}{(2^2)^{n-1}}\right)\left(l^2\sqrt{3}\right)$, conforme Figura 51. No entanto, a sua conjectura não correspondeu, integralmente, ao que deveria ser constituído, segundo verificação no Apêndice D.

Cabe evidenciar que o Grupo 1 focou bastante, durante a resolução do problema, que essa área deveria tender ao limite zero. Além disso, afirmaram que a área dos triângulos brancos precisa tender ao mesmo valor da área dos triângulos pretos.

Com relação à conjectura da área encontrada pelo Grupo 2, observamos que eles não recordaram ou optaram por não utilizar $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Desta forma, fazem uso, também, da relação básica da área de um triângulo: $A = \frac{bh}{2}$. Destarte, constituem uma generalização que é dependente da altura e do lado da iteração zero (a_1).

Figura 51 – Resoluções dos grupos para o *item d* do problema 1 do sétimo encontro



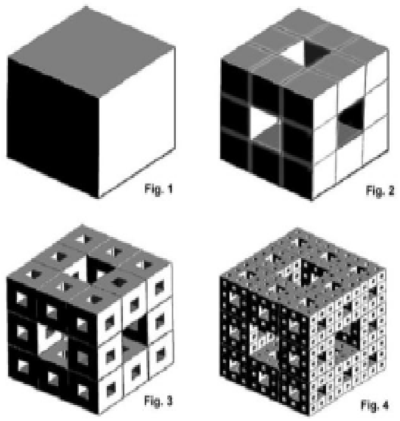
Fonte: Dados da pesquisa.

Destacamos que a generalização para a área dos triângulos pretos, estabelecida pelo Grupo 2, está parcialmente correta, uma vez que nada impedia dela ser dependente da altura e do lado inicial. Porém, o grupo não notou que a cada nova iteração a quantidade de triângulos pretos aumentava numa potência de base 3, logo sua conjectura deveria ser: $a_n = 3^{n-1}\frac{l_1 h_1}{2^{2n-1}}$.

Com o problema 2, Figura 52, pretendíamos continuar a relacionar os Fractais com o termo geral de uma PG. Para isso escolhemos uma questão, originária do vestibular da Universidade Estadual de Londrina (UEL), que abordasse outro tipo de Fractal, no caso a Esponja de Sierpinski/Menger, e que possuísse um processo de iteração similar ao do problema anterior.

Figura 52 – Problema 2 do sétimo encontro

(UEL-2002) A figura construída segundo a sequência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, qual é a área, em m^2 de uma face da figura 30?



Fonte: Internet[52].

Ao fazer um comparativo com o problema anterior, observamos que neste os grupos apresentaram mais facilidade para resolvê-lo. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato deles terem verificado, no problema 1, o comportamento de um Fractal com relação à PG.

Para definir a área da face da 30ª figura, o Grupo 1 buscou encontrar um padrão que relacionasse a aresta da figura com a quantidade de novos quadrados formados, de forma simultânea, conforme observado na Figura 53. Desse jeito, a área da face da figura é definida de maneira direta, sem a necessidade de novas relações.

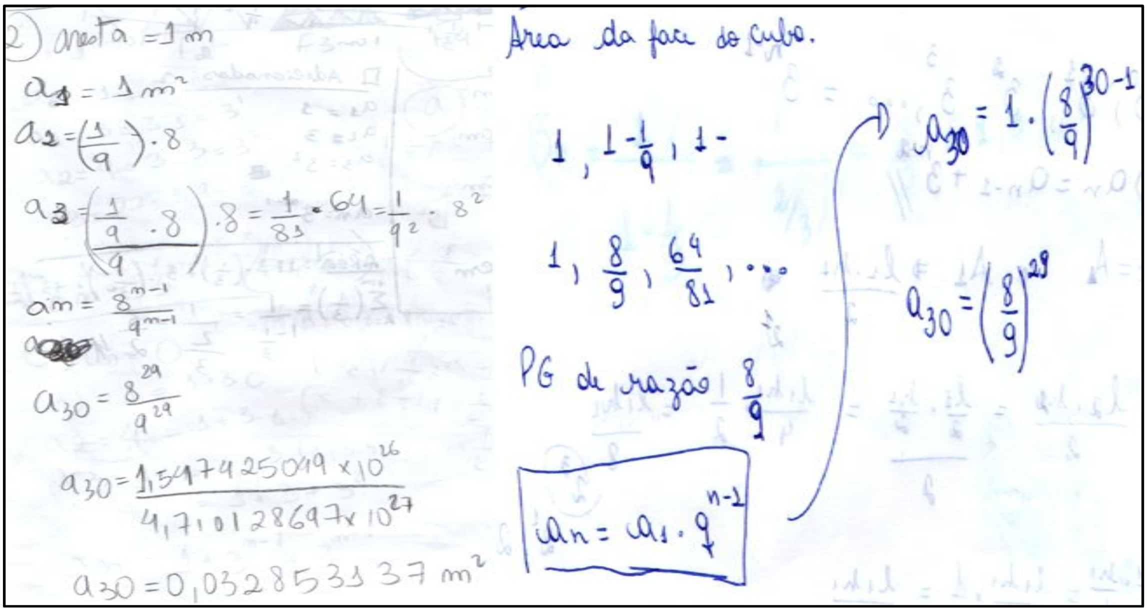
Diante do exposto, o grupo notou que, a cada nova iteração, a aresta da face do cubo se dividia em nove pedaços iguais que geravam oito novos cubos, como podemos evidenciar na discussão deles durante a resolução do problema.

[52] Disponível em: https://rumoaoita.com/wp-content/uploads/2017/03/progressoes_pa_e_pg_exercicios_ita.pdf. Acesso em: 15 jun. 2019.

> Fermat: Eu dividi o um metro em nove quadradinhos iguais. Certo?
> Baraka: Ele quer saber só o da primeira face?
> Fermat: Isso. Então eu pego uma face só. Então aí oh, eu vou ter um metro divido para nove, né?
> Baraka: Sim.
> Fermat: Que o total aqui vai ser $9 - 1$. Que vai ser 8. No caso 8 vezes $\frac{1}{9}$.

Dessa forma, eles detectaram que o padrão seguido na área da face da figura poderia ser representado por $a_n = \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}}$. Assim, definem, numericamente, qual a área da face oriunda da 30ª figura.

Figura 53 – Resolução dos grupos para o problema 2 do sétimo encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Diferindo do grupo anterior, o Grupo 2 seguiu pelo caminho de utilizar o termo geral de uma PG a fim de determinar a área da face da 30ª figura, uma vez que percebem que a sequência das áreas das faces $\left(1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \ldots\right)$ se comporta como uma PG.

Destacamos que o Grupo 2 não dialogou muito durante a resolução do problema, onde cada membro optou por resolvê-lo individualmente. Dessa forma, em um primeiro instante, não conseguimos identificar como eles concluíram que a área da face se comportava desse jeito. Porém durante a plenária seu encaminhamento foi explicitado.

O Grupo 2 seguiu a seguinte lógica: a face quadrada, da primeira figura terá $1m^2$de área uma vez que seu lado é $1m$; a área da face da segunda iteração será $1m^2$, correspondente a área da primeira figura, menos a área do quadrado, que possui lado igual a $\frac{1}{3}\ m$, extraído do meio do cubo que equivale a $\frac{1}{9}\ m^2\ \left(a_2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\right)$; na terceira iteração teremos $1m^2$ menos $\frac{1}{9}m^2$, área do quadrado extraído na iteração anterior, menos a quantidade de quadrados retirados nessa iteração multiplicado pela sua área, $\frac{1}{81}m^2$, ou seja, $a_3 = 1 - \frac{1}{9} - 8.\frac{1}{81} = \frac{64}{81}m^2$, e assim sucessivamente. Originando, assim, a sequência $\left(1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \ldots\right)$.

Desta forma, utilizando o termo geral da PG, com razão $\frac{8}{9}$, deliberaram que a área da face da 30ª iteração corresponderá a $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}\ m^2$.

Com o problema extraclasse, Apêndice E, nosso intuito era mostrar aos alunos que os fractais não estão conexos apenas ao termo geral da PG, mas também a sua soma infinita. Para isso recorremos a uma questão originalmente desenvolvida pelo vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Após os grupos terminarem as resoluções dos problemas, demos início a plenária, que ocorreu conforme o terceiro encontro, pois devido ao tempo avançado da disciplina, eles não puderam expor, no quadro, suas soluções. Desta forma a plenária foi feita apenas de maneira oral, onde eles comentaram suas estratégias seguidas para a resolução dos problemas.

Cabe evidenciar que ainda precisávamos formalizar o encontro passado, diante desse fato optamos por discutir, primeiramente, os problemas da aula passada. Destacamos que os alunos afirmaram, durante a plenária, que aquele foi o encontro que eles mais tiveram dificuldade em resolver os problemas.

Após uma breve discussão sobre os encaminhamentos tomados por eles para resolvê-los, aferimos que as soluções e estratégias pensadas pelo pesquisador seriam disponibilizadas no Moodle.

Em seguida, entregamos e debatemos a formalização do encontro passado, que se encontra no Apêndice F, e, ressaltamos que, assim como a PA, a PG de segunda ordem também possuía uma relação que permitia encontrar qualquer termo da sequência.

Posteriormente a essas discussões, começamos a dialogar sobre os problemas referentes ao sétimo encontro. No problema 1, evidenciamos que os grupos optaram por caminhos semelhantes, nos itens *a* e *b*, e alertamos que no item *c*, o Grupo 1 havia conjecturado uma relação que não seria válida sempre. Pedimos, então, para que verificassem se o termo seguinte ao terceiro, a_4, ainda admitia uma sentença verdadeira, no qual eles observaram que ela era contraditória a solução disposta no item *a*.

Desta forma, alertamos para a importância de conjeturar relações que sejam válidas para quaisquer valores de n, principalmente, ao trabalhar no campo da Matemática Discreta. No item d, alegamos que ambos os caminhos estavam parcialmente corretos e que o problema não possuía uma única conjectura a fim de determinar a área dos triângulos pretos.

No problema 2, solicitamos para que eles explicassem seus caminhos seguidos a fim de mostrar que existiam diversas estratégias para resolvê-lo. Ainda destacamos que apesar de ser uma questão fechada quanto a sua resposta, ela era aberta no que condiz as ideias pensadas para solucioná-la. Também enfatizamos que os nossos métodos pensados para esse problema eram distintos dos seguidos por eles, conforme Apêndice D.

Aferimos que não ocorreu muito debate para o problema extraclasse já que os caminhos pensados pelos grupos foram, consideravelmente, análogos, bem como havia pouco tempo naquele encontro e, ainda, precisávamos formalizar o conteúdo.

Diferindo dos encontros anteriores, a formalização do conceito de Fractais ocorreu por meio de um software de apresentação, uma vez que esse conteúdo é bem visual. Para uma melhor compreensão, ainda, fizemos uso do software de Geometria Dinâmica *GeoGebra*[53] com a finalidade de mostrá-los como ocorriam as iterações nos Fractais.

Reforçamos que as tecnologias se mostram, na atualidade, uma grande ferramenta auxiliadora no processo de ensino-aprendizagem do aluno nos conteúdos da Matemática. Atestando com essa percepção, Vargas (2019, p. 67) assinala que:

> Levando em consideração que a maioria dos alunos que atualmente cursam o Ensino Básico são considerados nativos digitais (PRENSKY, 2001), isto é, nasceram e cresceram com as tecnologias digitais presentes em suas vivências, torna-se natural e fundamental que nós educadores, queiramos utilizar as facilidades digitais em sala de aula. Nesse contexto, a tecnologia digital pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Ao término do encontro, agradecemos suas participações e colaborações durante o desenvolvimento da pesquisa e informamos que na aula seguinte (encerramento da disciplina) entregaríamos um questionário a fim de tentar identificar quais as contribuições que a MEEAAMRP proporcionou a eles no ensino da PG.

[53] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/WNrtmZap e https://www.geogebra.org/m/u2xsyumx. Acesso em: 20 jun. 2020.

5.2 ANÁLISE DOS ENCONTROS

Com base nos relatos dos encontros e nos instrumentos de coletas de dados, estabelecemos alguns fatores que se mostraram interessantes, em nossa pesquisa, no transcorrer do ensino-aprendizagem-avaliação dos alunos do curso de Matemática Licenciatura da UFSM ao trabalhar a PG fazendo uso da MEAAMRP.

Antes de realizar um aprofundamento mais criterioso nos dados apresentados nos encontros, relacionando (sempre que possível) com o referencial teórico estudado e adotado nessa dissertação, queremos destacar duas primeiras constatações observadas por nós. A primeira é a carência de um tempo maior para a aplicação e discussão dos problemas abordados em cada encontro e o segundo é a inevitabilidade de instruir os alunos a trabalharem de forma cooperativa e colaborativa entre si.

Com relação ao primeiro ponto, houve alguns encontros em que os grupos não conseguiram concluir todas as atividades no tempo disponível, fazendo com que no próximo dia fosse preciso retomar alguns problemas e conceitos da aula anterior, atrasando, assim, o nosso planejamento. Cabe ressaltar também que talvez o quantitativo de problemas delineado em certos encontros tenha sido mal esquematizado por nós, impossibilitando que todos fossem resolvidos durante a aula.

Além disso, no final do sexto encontro, referente à PG de segunda ordem, não foi possível realizar a plenária e formalizar os conceitos, etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) para essa metodologia, uma vez que um dos grupos não conseguiu resolver nenhum dos problemas propostos durante a aula, talvez pelo seu grau de complexidade.

Enfatizando a segunda constatação, destacamos que no transcorrer de alguns encontros era nítida a falta de diálogo entre os membros dos próprios grupos. Muitas vezes os sujeitos resolviam os problemas de forma individual e isolada para apenas depois começarem a discutir entre eles.

Em diversos momentos, o silêncio reinava nos encontros. O trabalho cooperativo e colaborativo é um dos principais diferenciais que a MEAAMRP proporciona para a aprendizagem do aluno. Esse trabalho deve advir por meio de grupo-grupo e de grupo-professor, o qual não ocorreu em alguns encontros. Neste contexto, Smith e Waller (1997 apud MALTA, 2019) evidenciam que:

> A cooperação é o trabalho em conjunto para atingir objetivos compartilhados. Dentro da atividade cooperativa os indivíduos buscam resultados benéficos para si mesmos e benéficos para todos os outros membros do grupo. A aprendizagem cooperativa é o uso instrucional de pequenos grupos para que os alunos trabalhem juntos para maximizar a sua própria aprendizagem e a de cada um dos outros. (MALTA, 2019, p. 19).

Alguns aspectos podem ter contribuído para esses fatores como, por exemplo, o número pequeno de alunos da turma que não possibilitava uma troca de ideias mais expressiva e com mais elementos, de forma que pudesse ser confrontado e discutido pontos de vista distintos. Ou, quiçá, a não familiaridade que os alunos do Ensino Superior, em especial da Matemática, têm em desenvolver um trabalho em grupo. Não é raro os alunos serem condicionados a desenvolver problemas, atividades e exercícios sozinhos, sem uma troca de ideias com os demais colegas. Neste contexto podemos observar que o trabalho em grupo ainda é um objetivo a ser alcançado no ensino da Matemática.

Elencamos, com as percepções observadas no decorrer dos encontros e com base nos dados coletados, três eixos de análises: (a) Os conceitos prévios como um agente desencadeador na aprendizagem de novos conhecimentos na MEAAMRP, (b) O trabalho colaborativo e cooperativo na construção do conhecimento pessoal e profissional de licenciandos em Matemática da UFSM e (c) Desafios e possibilidades no uso da MEAAMRP.

5.2.1 Eixo de análise 1

Os conceitos prévios como agente desencadeador na aprendizagem de novos conhecimentos na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Diversas teorias da aprendizagem reforçam a necessidade de conhecimentos antecedentes, ou prévios, para a aprendizagem da Matemática como, por exemplo, a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) e a Teoria de Aprendizagem Crítica (TASC). E na MEAAMRP não é diferente, pois por trabalharmos na ótica do ineditismo de um conteúdo, através de um problema, há a necessidade de conhecimentos antecedentes a fim de que os alunos possam construir um saber novo por meio de seu raciocínio lógico e pela busca por estratégias contundentes.

Nossa pesquisa propunha o ensino da PG por meio dessa metodologia e, como apontado por Pironel e Vallilo (2018), o professor ao fazer uso dela em sua prática docente deve selecionar problemas conforme a capacidade dos alunos em resolvê-los utilizando apenas conceitos, operações e propriedades previamente idealizadas. Ou seja, cada problema deve ter um propósito e levar em consideração os conhecimentos antecedentes dos alunos.

Destarte, como a MEAAMRP tem por objetivo central ensinar conceitos matemáticos através de um problema, os alunos devem possuir subsídios que os possibilitem realizar essa construção de conhecimento, que por muitas vezes, "escapam" das estratégias pensadas pelos professores ao preparar o problema.

Ao planejarem os problemas para sua aula, com o auxílio dessa metodologia, os docentes devem optar pelos que instiguem e façam com que os alunos desenvolvam mecanismos matemáticos a fim de que construam novos saberes.

Em específico, nossa pesquisa levou em consideração os conceitos prévios, inclusive da PG, dos alunos de Matemática Licenciatura com a finalidade de selecionar problemas geradores que permitissem auxiliá-los no processo de construção e/ou revisão de conhecimentos advindos deste conteúdo matemático, oportunizando assim que eles desenvolvessem sua capacidade de criticidade e autonomia ao resolvê-los, sem a necessidade de o professor mostrar-lhes os encaminhamentos que necessitam ser seguidos.

Como nossos sujeitos da pesquisa eram alunos de Ensino Superior, alguns deles já possuíam certo conhecimento sobre a PG, uma vez que este conteúdo foi (ou deveria ser) visto no Ensino Médio.

Cabe ressaltar que apesar da MEAAMRP sugerir a construção da aprendizagem do conteúdo proposto sem fórmulas e/ou teoremas, previamente estudados, notou-se que os licenciandos em Matemática ainda estavam bastante afixados nessa concepção. Como alguns já possuíam conhecimento sobre a PG, isso se intensificou em alguns encontros na qual, geralmente, a primeira pergunta vinda dos grupos era: *"Professor que fórmula da PG utilizamos para resolver esse problema?"*.

Acreditamos que isso tenha ocorrido por que, em geral, algumas disciplinas do curso de Matemática Licenciatura da UFSM fomentam um trabalho estabelecido em resolver questões através de fórmulas, teoremas e/ou axiomas já prontos, e em alguns casos, não possibilitam ao aluno desenvolver seu raciocínio lógico a fim de compor relações com o objetivo de edificá-las, sem a necessidade de memorizá-las.

Em determinados encontros, os conceitos antecedentes foram os responsáveis por desencadear soluções e acender debates durante a resolução dos problemas e plenária. Um exemplo disso se refere ao problema 1 do quinto encontro, que objetivava trabalhar o conceito de soma infinita de uma PG, na qual os grupos solucionaram-no de forma bem similar. No entanto, durante a plenária, foi levantada a necessidade de um conceito prévio para a sua resolução e que foi identificado apenas por um dos grupos. Nele era solicitado o comprimento de uma espiral constituída pela união dos comprimentos de infinitos semicírculos. Todavia apenas o Grupo 1 fez essa relação para resolvê-lo.

Durante a plenária, ao discuti-lo, apontamos e questionamos os grupos, o porquê da diferença de resposta encontrada por eles, na qual ficou constatado que o Grupo 2 não definiu o comprimento da espiral através da soma dos infinitos semicírculos, um possível conhecimento prévio necessário, na medida em que eles apenas calcularam o somatório de todos os raios, e não era isso que o problema solicitava.

Outro ponto a ser levantado quanto aos conhecimentos prévios, é em relação ao problema 1 do sexto encontro, que trabalhava com o conceito de PG de segunda ordem (primeiro conteúdo voltado ao Ensino Superior), uma vez que nenhum dos grupos tinha conhecimento sobre ela e nem sabia como era seu comportamento, tampouco seu termo geral. Tanto que esse foi o encontro que os alunos tiveram mais dificuldade em resolver os problemas. Para a conjectura de uma relação que descrevesse a sequência estabelecida por Caleb, os grupos necessitavam de estratégias que utilizassem conceitos antecedentes, inclusive as das aulas anteriores a aplicação da nossa pesquisa, como, por exemplo, a da PA.

Como evidenciamos no fato de que, para determinar o expoente da relação estabelecida por eles, o Grupo 1 utilizou do conceito de números triangulares, visto no encontro de PA, na qual ao perceberem que ele se comportava dessa maneira, utilizaram-na diretamente na resolução do problema. Assim como o Grupo 2 que também fez uso de conhecimentos antecedentes advindos do encontro da PA uma vez que para definir o expoente empregaram o conceito de sua soma finita.

Ao fazer a interpretação do problema, os alunos também recorriam a certos conhecimentos prévios com a finalidade de buscar por estratégias para resolvê-los. Nesse olhar, Gonçalves e Allevato (2016, p. 3) ressaltam que:

> A resolução de problemas, segundo Van de Walle (2009), deve ser vista como uma atividade que se inicia a partir dos conhecimentos prévios e das dificuldades dos alunos, identificadas pelo professor. Sendo assim, cabe ao professor formular problemas para a aprendizagem significativa, criando um ambiente motivador e estimulante. Vale ressaltar que tal metodologia deve ser mantida como prática constante em sala de aula.

Também, não foi raro o uso da definição de somatório por ambos os grupos para resolver problemas que solicitavam a soma infinita da PG, uma vez que, por possuírem um conhecimento mais avançado do universo da Matemática, já associavam diretamente esse conceito da PG com o somatório de infinitas parcelas, conceito visto geralmente nas disciplinas de Cálculo (I, II e III) e Matemática Discreta do curso de Matemática Licenciatura (Noturno e Diurno) da UFSM.

5.2.2 Eixo de análise 2

O trabalho colaborativo e cooperativo na construção do conhecimento pessoal e profissional de licenciandos em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria.

O trabalho colaborativo e cooperativo é uma peça fundamental dentro da MEAAMRP, já que a mesma prevê um trabalho em grupo. A troca de saberes entre aluno-professor e aluno-aluno é primordial para uma boa desenvoltura no processo de ensino-aprendizagem-avaliação do conteúdo pretendido.

Neste contexto pudemos evidenciar, por meio da nossa pesquisa, que isso vem ocorrendo ainda a passos lentos, principalmente no ensino da Matemática onde os alunos são, muitas vezes, condicionados a pensarem individualmente sem um intercâmbio de ideias.

Não foi incomum, dentro do universo da nossa averiguação, ver os membros dos grupos trabalhando sozinhos, em que não ocorria nenhum tipo de diálogo, por mais insistentes que fossemos para que isso ocorresse. Os motivos para ocasionar isso são diversos e queremos dar ênfase aos que mais predominaram durante a resolução dos problemas da nossa pesquisa, assim como levantar alguns aspectos apontados por eles no questionário final.

Nos primeiros encontros, por ainda estarem se acostumando as 10 etapas da MEAAMRP sugeridas por Allevato e Onuchic (2014), apesar da disciplina seguir nessa linha, era visível o descontentamento em realizar um trabalho em grupo. Dessa forma, o trabalho cooperativo e colaborativo levou certo tempo para acontecer, sendo que nos últimos encontros este fluiu mais tranquilamente.

Admitimos que parte da responsabilidade para que isso tenha acontecido foi nossa, uma vez que, talvez, deveríamos ter sido mais incisivos com eles objetivando que trabalhassem mais nessa perspectiva. Porém, como nossos sujeitos da pesquisa eram alunos do Ensino Superior, optamos por sua autonomia ao desenvolver essa tarefa em grupo, uma vez que já haviam estudado na disciplina a necessidade de um trabalho nesse horizonte.

Ao serem indagados, no questionário final (Apêndice G), se para eles o trabalho cooperativo e colaborativo na MEAAMRP era positivo no ensino de Matemática e se facilitava a compreensão dos conteúdos, obtivemos as seguintes respostas:

> É positivo e facilita sim, mas sempre gera a preocupação se realmente haverá participação de todos. Em matemática preocupa mais, por muitas vezes tem bastante ‘desnível’ entre alunos. (Beija-Flor).
>
> Sim, pois através da Resolução de Problemas o aluno pode ver aplicações de conteúdo e ao mesmo tempo ratifica o que está aprendendo. (Fermat).
>
> Muito positiva, como já comentei, o fato de poder compartilhar ideias colabora para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. (Joana).
>
> O método de colaboração mútua é produtivo e acredito que mais eficaz, pois você aprende com os erros próprios e dos outros, aonde se encontrar alguma dificuldade tem um colega que possa lhe ajudar a suprir isso. (Baraka).
>
> Com certeza, muito positiva, pois um ajuda o outro e o pensamento em conjunto facilita, pois, cada aluno tem facilidade em coisas diferentes. (Joaquim).

Podemos observar, por meio de suas respostas, que eles consideram o trabalho em grupo bastante pertinente na MEAAMRP, pensando com a visão de professores. No entanto ao trabalharem, como alunos, na perspectiva dessa metodologia na DCG, isso não refletiu continuamente.

Não é raro, ao estudarem Matemática, os discentes dominarem apenas alguns tópicos que por muitas vezes são distintos do que os demais colegas do grupo. Desta forma, essa troca de conhecimento faz com que o grupo seja mais produtivo.

Ao desenvolver um trabalho de forma colaborativa e cooperativa pretende-se que haja um intercâmbio de ideias, que podem até serem opostas, e assim, o processo de ensino-aprendizagem-avaliação se torne mais eficiente. Como ressalta Freire (1996, p. 25), “quem ensina aprende ensinando, e quem aprende ensina ao aprender”.

Desta forma, cabe ao professor preparar um ambiente para que esse trabalho ocorra da melhor maneira possível. Pudemos evidenciar que os alunos do nosso Projeto perceberam que nem sempre o trabalho em grupo ocorre conforme o planejado pelo professor, uma vez que, eles mesmos, comentavam nas aulas que não haviam conseguido contribuir na resolução dos problemas.

Neste horizonte, Malta (2019, p. 20) afirma que

> [...] é importante que o professor crie, em sala de aula, um ambiente que, além de proporcionar o trabalho coletivo, favoreça a troca de experiências, o questionamento, a descoberta, a investigação e a criação, incentivando o desenvolvimento do aluno e promovendo o ensino da Matemática. Estes são requisitos necessários da aprendizagem cooperativa.

Assim, o aluno, ao trabalhar nessa visão, se torna responsável pela sua aprendizagem e, de certa maneira, pela dos colegas fazendo com que o êxito no processo de ensino-aprendizagem-avaliação dependa do trabalho em grupo (que pode levar certo tempo a ser desenvolvido). Nesse sentido, cada um deles irá contribuir para que, na perspectiva da Resolução de Problemas, haja uma troca de saberes a fim de resolver os problemas geradores propostos para aquela aula.

Com relação à perspectiva profissional, almejávamos proporcionar aos alunos visualizar que na Resolução de Problemas há a possibilidade de uma troca de conversas com outros professores, não só da Matemática, de forma colaborativa e cooperativa, havendo até mesmo a possibilidade de um trabalho multidisciplinar, uma vez que a Resolução de Problemas também é vista em algumas outras matérias como Física e Química. Isto é uma evidência de que a Matemática não precisa ser uma disciplina "solitária" no âmbito escolar.

Diante desses fatores, entendemos que o trabalho cooperativo e colaborativo em nossos encontros foi, em partes, responsável pelo desencadeamento exitoso do processo de ensino-aprendizagem-avaliação dos licenciandos em Matemática. Por mais que ela não tenha ocorrido como havíamos planejado inicialmente, foi evidente que houve certa troca de ideias e saberes entre os alunos com o desenrolar dos encontros, principalmente durante a plenária.

Ficou perceptível, em especial relacionado ao aluno Joaquim, que esse intercâmbio de opiniões, e até mesmo os debates na plenária, contribuíram para que a PG fosse mais bem compreendida, uma vez que alguns deles possuíam pouco conhecimento desse conteúdo.

Joaquim evidencia, no questionário final, que pôde colaborar pouco no trabalho em grupo, uma vez que os membros dos grupos já possuíam algum conhecimento sobre a PG, incluindo suas fórmulas e trabalhavam nessa perspectiva para a resolução dos problemas. E isso não era habitual para ele, já que não havia estudado esse conteúdo matemático nem no Ensino Médio tampouco no Ensino Superior. Todavia, com o passar dos encontros, Joaquim conseguiu estabelecer conexões que permitissem que suas contribuições fossem mais fundamentadas e precisas que nas aulas anteriores.

Assim sendo, como já evidenciamos, o trabalho colaborativo e cooperativo é parte essencial na eficácia do processo de ensino-aprendizagem-avaliação dos alunos ao utilizarmos a MEAAMRP no âmbito escolar ou superior. O professor deve, ao máximo possível, contribuir para que isso ocorra, sempre alertando os grupos que deverá acontecer discussões e trocas de ideias a fim de resolver o problema.

5.2.3 Eixo de análise 3

Desafios e possibilidades no uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O papel do professor deve ser o mais construtivo possível, pois, independente da metodologia utilizada em sua aula, ele deve proporcionar ao aluno todas as possibilidades metodológicas para que ela seja benéfica para o seu ensino e aprendizagem.

A troca de conhecimentos entre professor-aluno e aluno-aluno é um artifício extraordinário dentro do contexto escolar uma vez que sempre temos coisas novas a aprender diante de diferentes situações. Neste sentido Allevato e Onuchic (2014, p. 40) afirmam que

> O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo deve ser promovido. O professor, agora como mediador dos processos de ensino, deve disponibilizar uma diversidade de recursos (materiais e processuais) que respeitem as diferentes condições e estilos de aprendizagem de seus alunos. Para o ensino-aprendizagem de Matemática, as alternativas e recomendações incluem jogos, tecnologias informáticas, modelagem matemática, projetos, resolução de problemas, entre tantos outros recursos.

Nesta perspectiva, a fim de verificar quais as percepções dos participantes em relação à MEAAMRP no ensino da Matemática, aplicamos um questionário final (Apêndice G) que pretendia conhecer seus pensamentos quanto a sua participação na pesquisa e também a importância que ela teve em sua formação profissional.

Ao serem questionados sobre quais os aspectos positivos que eles destacariam em sua participação na pesquisa, obtivemos as seguintes respostas[54].

> Tentei fazer; Ajudei ou fui ajudado pelos colegas. (Beija Flor).
>
> Foi um acréscimo bom para utilizar no Ensino Médio, em relação ao conteúdo da PG as resoluções feitas em aula ajudam a elucidar as questões, e também mostra como existem diversos modos de resolver. (Fermat).
>
> Participar do projeto proporcionou uma melhor compreensão de conceitos e relações envolvendo progressões geométricas, além de possibilitar as discussões acerca das questões tornando a aprendizagem colaborativa. (Joana).
>
> Aprendi a ver a resolução de um problema de uma forma mais variada, onde existem muitas maneiras, facilidades, caminhos, por assim dizer, para encontrar um determinado resultado ou ainda também conheceram problemas matemáticos com mais de uma solução. (Baraka).

---

[54] A aluna Marcelle não compareceu no último encontro e nem retornou nosso contato para a resposta do questionário.

> O principal aspecto positivo da minha participação no projeto referido foi que nunca havia tido contato com Progressão Geométrica, houve uma troca de escola na época de meu ensino regular, e com isso essa parte da matemática não foi vista por mim. Aprendi também que em PG não basta apenas decorar fórmulas, devemos saber como usá-las e de onde surgiram, para facilitar na hora do exercício. (Joaquim).

Por meio de suas respostas, verificamos o quanto eles se desafiaram a oferecer sua melhor participação nessa pesquisa. Identificamos que eles notaram a relevância que essa metodologia proporciona no ensino e na aprendizagem dos discentes, e assim, quem sabe, utilizá-la na sua prática escolar futuramente. Quanto aos aspectos negativos de sua participação na pesquisa eles evidenciaram:

> Conversas aleatórias; Algumas faltas. (Beija-Flor).
>
> Não sei se é um aspecto negativo, mas creio que para aplicar alguns exercícios vistos de PG no ensino público, talvez não seja bem aceito, devido à realidade de algumas escolas que apenas querem passar os alunos. (Fermat).
>
> Pontos negativos: tive certa dificuldade de trabalhar em grupo, porém acredito que consegui crescer nem que seja minimamente. (Baraka).
>
> Em contrapartida, um aspecto negativo é que, por nunca ter tido contato com a matéria não consegui contribuir de uma maneira mais significativa com meu grupo em sala. (Joaquim).
>
> Não identifiquei aspectos negativos, talvez a dificuldade de algumas questões ou a dificuldade em identificar com clareza as progressões. Mas acredito que não venha a ser um aspecto negativo da participação. (Joana).

Podemos ratificar que eles discorreram motivos negativos distintos em sua participação na pesquisa. As conversas aleatórias destacadas por Beija-Flor eram bem constantes nos grupos em que ele participou. Inclusive, em algumas ocasiões, foi necessária uma intervenção para que focalizasse na resolução do problema.

Concordamos, em partes, no que foi apontado pelo aluno Fermat com relação à utilização de alguns exercícios da PG no ensino público. Em especial, sabemos dos inúmeros contratempos que a MEAAMRP pode apresentar na Educação Básica para alunos e professores não habituados com aulas nesta perspectiva. Além disso, consideramos que as aulas de Matemática devam ter metodologias diversas durante o ano letivo, lembrando que o que deve permanecer para o aluno é a postura de questionar os conteúdos e, para o professor, a postura de facilitador da aprendizagem. Nesta visão, avigoramos que devemos desenvolver a MEAAMRP nas aulas de Matemática com a finalidade de mostrar para os alunos novas abordagens metodológicas de ensino, possibilitando, assim, com que eles aprimorem seu nível de raciocínio lógico e criticidade ao resolver um problema, indo de acordo com o que é apontado por Pironel e Vallilo (2017).

Os aspectos apontados por Baraka e Joaquim corroboram com o que foi assentado no tópico anterior, onde nos referimos ao trabalho cooperativo e colaborativo. Perguntamos a eles, também, qual era sua visão sobre a utilização da MEAAMRP em sala de aula e se havia a possibilidade de ela ser empregada em sua prática docente.

> É uma ótima metodologia para ser aplicada em sala de aula, pois instiga os alunos a aprender através da Resolução de Problemas. Utilizaria com toda certeza em sala de aula. (Fermat).
>
> Bastante importante, porém exige bastante planejamento e tempo em aula. Com certeza poderá ser utilizada, visto que é ótima para introduzir os conteúdos. (Beija-Flor).
>
> Achei muito legal, discussão e depois a formalização das resoluções. Pois através da formalização eu conseguia entender melhor a maneira que foi feito. (Joaquim).
>
> Acredito que seja de muita valia utilizar-se do método abordado da resolução de problemas, assim os alunos aprenderiam mais um com os outros e veriam diferentes maneiras de resolução. Se possível utilizaria sem nenhuma sombra de dúvida, pois considero um método muito eficaz e produtivo. (Baraka).
>
> Acredito que esta metodologia dá mais liberdade ao aluno de se expressar e de partilhar suas ideias e dúvidas com o grupo, o que colabora para uma melhor aprendizagem por parte dos alunos. Com toda certeza utilizarei, sempre que possível em minhas práticas docentes. (Joana).

Suas respostas foram bem satisfatórias, pois constatamos que, de alguma forma, nossa pesquisa expandiu suas concepções de trabalho. Identificamos que eles se sentiram prazerosos em utilizá-la durante nossos encontros e que esse efeito positivo lhes permitiu refletirem sobre a possibilidade de trabalhá-la durante sua prática pedagógica.

Com o intuito de complementar essa pergunta, questionamos-lhes se a pesquisa havia sido importante em sua formação acadêmica e o porquê, na qual obtivemos as seguintes assertivas.

> Sim, pelo fato de ampliar novas possibilidades de ensino da Matemática, desenvolver o trabalho em grupo e retomar conteúdos anteriores. (Beija-Flor).
>
> Foi importante para aplicar em sala de aula. (Fermat).
>
> Com certeza, gostaria inclusive que tivesse uma segunda etapa da disciplina. Porque em uma única cadeira nos foi permitido estudar várias áreas da matemática, além disso, a cadeira possibilita a prática do raciocínio, não sendo necessário utilizar fórmulas prontas. A formalização dos exercícios foi muito importante também para estudar em casa um problema que na aula, pode ter me deixado em dúvida. (Joaquim).

> Sim foi muito importante, acredito que meu crescimento foi considerável, e me ajudará muito futuramente. (Baraka).
>
> Sim, pois possibilitou ter maior contato com a metodologia de resolução de problemas. (Joana).

Novamente, ficamos muito contentes com as respostas apresentadas pelos alunos, pois constatamos que eles consideram importante essa metodologia no ensino de Matemática. Ainda nesse sentido nos engrandece saber que, segundo eles, houve contribuição em sua formação acadêmica. Inclusive o aluno Joaquim sugere a continuação da pesquisa, o que para nós é de grande valia.

O trabalho com problemas matemáticos também pode se tornar um fator decisório na satisfação dos alunos durante essa metodologia. Nem todos os alunos, num primeiro momento, irão gostar e se habituar a resolvê-los, cabendo ao professor buscar por estratégias que motivem os alunos. A fim de validar esse fator perguntamos aos nossos sujeitos de pesquisa se eles acharam difícil trabalhar com problemas matemáticos, sobre a PG, na perspectiva da MEAAMRP. Nisso, obtivemos as seguintes respostas:

> Em partes, a maior dificuldade que enfrentei foi a dificuldade de compreender os enunciados dos problemas. (Joana)
>
> Não. No âmbito de ajudar alunos na resolução de problemas, apenas instigando a pensar e não dando a resposta, se torna algo trabalhoso. (Baraka).
>
> Sim. Considerei difícil, mas muito satisfatório. Aprendi a organizar meu pensamento, na hora da leitura e a coletar os dados de maneira mais correta. (Joaquim).
>
> Sim. Considero difícil pelo fato de que existem problemas que não são de fácil entendimento, mas é bom, pois a evolução dos conteúdos é dada pelos problemas. (Fermat).
>
> Não. Não é difícil, o que complica é só o planejamento e trabalho em grupo. (Beija-Flor).

Por fim, perguntamos quais foram às contribuições e as dificuldades que a MEAAMRP impôs a eles. Com relação às dificuldades os alunos apontaram que:

> Tive dificuldade em resolver o passo a passo certinho, pois quero ir fazendo ‘pulando’ algumas etapas, aumentando o risco do erro. (Fermat).
>
> Dividir os problemas com todos do mesmo grupo ao mesmo tempo. (Beija-Flor).
>
> Minha maior dificuldade foi ‘pensar em grupo, pois tenho bastante dificuldade, com isso demoro a organizar os dados e iniciar o feitio da questão. E como participei de um grupo com alunos mais adiantados na faculdade, acabava que muito pouco

> conseguí contribuir, pois quando eu chegava a uma conclusão eles já haviam resolvido. Isso ficou um pouco desconfortável pra mim. (Joaquim).
>
> Tive dificuldades no quesito de não ter uma base do ensino médio mais forte, pois não foi me lecionado com mais domínio. (Baraka).
>
> A maior dificuldade era encontrar as relações existentes nas sequências e determinar as progressões. (Joana).

Detectamos que, conforme apontado na análise anterior, os alunos tiveram bastante dificuldade em trabalhar em grupo, na qual eles mesmos reconhecem esse fator. Afinal, esse aspecto requer um processo gradativo, e por muitas vezes, lento. Não será do dia para a noite que os alunos irão se afeiçoar a trabalhar cooperativa e colaborativamente, por isso a importância de, em algum momento, os professores de Matemática desenvolverem certo conteúdo matemático na perspectiva da MEAAMRP ou por abordagens menos individualistas.

À vista disso, essa metodologia se mostra tão necessária no ensino de Matemática, pois ela estabelece um trabalho em grupo, na qual deverão ocorrer intercâmbios de ideias e pensamentos a fim de promover o ensino e a aprendizagem de cada um.

Cabe então aos futuros professores, sujeitos da nossa pesquisa, proporcionar isso aos seus alunos durante futura prática docente. Quanto às contribuições, de modo geral, que a MEAAMRP os proporcionou:

> Trabalho em grupo; Pensar em aulas mais planejadas; Retomar conteúdos. (Beija-Flor).
>
> Como disse antes, acho legal essa abordagem para instigar os alunos, propondo a abertura de um conteúdo com um problema, isso no meu ver instiga os alunos. (Fermat).
>
> Pra mim foram diversas contribuições, mas a principal: ensinou-me a resolver problemas com Progressões Geométricas. (Joaquim).
>
> Ajudou-me muito, pois eu particularmente tinha certa dificuldade em resolver problemas com progressões, mas por ser um método de colaboração tive colegas que me ajudaram. (Baraka).
>
> Uma melhor compreensão do assunto, porque até então tinha algumas lacunas na aprendizagem, tais como as relações existentes entre os termos de um PG, soma dos termos de uma PG infinita e PG de segunda ordem. (Joana).

Diante de todos esses apontamentos, refletimos que a MEAAMRP contribuiu satisfatoriamente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação dos nossos alunos, uma vez que foi proporcionado a eles, uma melhor compreensão dos conceitos da PG em que alguns deles ainda possuíam pendência ou até mesmo não o conheciam como o caso de Joaquim.

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar essa dissertação de mestrado, nos propusemos a averiguar quais eram as contribuições propiciadas no ensino e aprendizagem da Progressão Geométrica para os alunos oriundos do curso noturno de Matemática Licenciatura da UFSM, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como instrumento metodológico.

O estímulo do primeiro autor para essa averiguação partiu da constatação, em aulas particulares, da dificuldade apresentada pelos alunos quanto à interpretação e resolução de problemas matemáticos, no qual muitas vezes eles não conseguem nem retirar seus dados a fim de solucioná-los.

Outro fator que também foi factível para a realização dessa pesquisa foram as experiências do pesquisador de que, por muitas vezes, o ensino da PG acaba sendo um dos últimos conteúdos matemáticos, das ementas previstas para o Ensino Médio, a ser trabalhado em que, em algumas ocasiões, seu ensino ocorre por que houve uma lacuna durante o ano letivo de alguma das séries.

Além disso, em alguns casos, suprime-se o estudo da PG no Ensino Médio, retirando do aluno a oportunidade de trabalhar isso na Educação Básica, vindo, em certas ocasiões, conhecê-la somente no Ensino Superior como ocorrido pelo pesquisador.

Salientamos também que, assim como a PA, o ensino da PG vem tradicionalmente carregado de memorização de fórmulas na medida em que os alunos, por diversas oportunidades, não compreendem seus significados apenas decorando-as com o objetivo de aplicá-las durante a resolução de exercícios e/ou provas. Isso acarreta, muitas vezes, em os discentes fazerem certa confusão, por exemplo, entre o termo geral e a soma finita de ambas por não possuírem um entendimento claro desses conceitos, sendo esse outro fator que inquietou o pesquisador a realizar esse estudo.

Como parte do procedimento de uma possível mudança no ensino-aprendizagem-avaliação da PG no ensino regular, optamos por desenvolver nossa pesquisa com discentes do curso de Matemática Licenciatura que serão, futuramente, os pilares nesse processo de aprendizagem dos alunos no Ensino Médio. Por meio dessa proposta, visualizamos uma forma pela qual os futuros professores possam dar o “pontapé” em uma transformação no ensino desse conteúdo matemático na Educação Básica, perfazendo de novas metodologias que possibilitem evidenciar aos alunos a riqueza que a PG possui e o quão presente está no cotidiano das pessoas como, por exemplo, na compreensão da pandemia de Covid-19 que se assola pelo mundo. Inteiramos, dessa forma, o quarto objetivo específico de nossa dissertação (Promover nos futuros professores momentos de reflexão quanto ao uso desta metodologia em sala de aula, em particular no ensino da PG).

Após imergir mais densamente no universo da Resolução de Problemas e da MEAAMRP, ao realizar algumas leituras e estudos (Allevato e Onuchic, 2014; Onuchic, 1999; Onuchic e Allevato, 2004; Onuchic e Allevato, 2011; Polya, 1995; Schroeder e Lester, 1989, dentre outros), estruturamos como questão investigativa/problema da nossa dissertação: *"Quais contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proporciona a licenciandos em Matemática no estudo da Progressão Geométrica?".*

Abalizados em nossas leituras e amparados nas 10 etapas da MEAAMRP sugeridas por Allevato e Onuchic (2014), organizamos sete encontros, a fim de desenvolver a coleta de dados da nossa pesquisa, no qual cada um deles era composto de problemas que desencadeavam a construção de conhecimentos relacionados a tópicos da PG que consideramos pertinentes para o ensino-aprendizagem dos licenciandos em Matemática da UFSM. Abrangemos, assim, o primeiro objetivo específico do nosso trabalho (Selecionar e elaborar problemas geradores sobre a PG que possam ser trabalhados utilizando a MEAAMRP).

Desta forma, fundamentados no desenvolvimento da pesquisa, aferimos que de maneira geral, alcançamos o objetivo ambicionado para os encontros, já que no decorrer da investigação, houve certo avanço no ensino e aprendizagem dos discentes de Matemática com relação à PG.

Na maioria dos encontros foi perceptível como esse processo de ensino e aprendizagem foi sendo encadeado e gradativo, visto que, por muitas vezes, para resolver um problema de determinado conceito da PG, os alunos recorriam a artifícios advindos de aulas passadas, o que nos evidencia que a MEAAMRP contribuiu para o ensino da PG.

Avivamos também que nem tudo ocorreu como o planejamento prévio disposto pelo pesquisador como, por exemplo, em parte dos encontros os alunos não conseguiram desenvolver um trabalho colaborativo e cooperativo dentro dos seus grupos, papel fundamental na MEAAMRP. Reportamos, dessa forma, ao segundo objetivo específico da pesquisa (Identificar as possíveis dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação da PG ao utilizar essa metodologia em sala de aula).

Enfatizamos que isso possa ter advindo do fato deles não terem o hábito de trabalharem em grupos na escola, como evidenciado por alguns deles no questionário final, assim como pelo episódio de que, de forma geral, as disciplinas da ementa do curso de Matemática Licenciatura fomentam um encargo individual, sendo o trabalho em grupo algumas vezes raro, principalmente naquelas voltadas para os conteúdos de Matemática. Isso acarreta numa dificuldade dos licenciandos em dialogar com pessoas que possuem outros pensamentos e/ou visões acerca de uma mesma perspectiva.

Desta forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas carece de empenho por parte do professor (antes, durante e depois), uma vez que desde a escolha do problema gerador até a concretização da plenária precisa-se de uma correlação metodológica e de um planejamento muito bem fundamentados. Além disso, essa metodologia necessita de certa disponibilidade de tempo na disciplina que, por muitas vezes, os professores não desfrutam.

Inclusive, ratificamos que a mudança de postura perante o aluno requer prática, uma vez que tendenciosamente os professores, em especial de Matemática, estão bem afeitos em responder os questionamentos dos alunos nas atividades, problemas e/ou questões conduzindo-os a perceber o que necessita para resolvê-los, muitas vezes de maneira assertiva. Entretanto, nesta metodologia, este costume precisa ser modificado e invertido no qual o próprio discente deve buscar, por meio das perguntas dos professores, as estratégias necessárias para solucioná-los.

Acreditamos que esses fatores tenham modificado tanto a prática profissional do pesquisador como dos alunos uma vez que ambos, com exceção da orientadora dessa dissertação, não estavam habituados a trabalharem ou estudarem os conteúdos matemáticos nesse horizonte.

Trabalhar nessa perspectiva proporciona um maior empenho por parte dos alunos uma vez que, nela, há a necessidade de um intercâmbio de ideias a fim de construir, em conjunto, uma constatação final. A MEAAMRP também possibilita ao aluno aperfeiçoar seu processo de autonomia e criticidade ao solucionar os problemas, já que o professor, dentro dessa metodologia, possui um papel de “coadjuvante” no processo de ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática.

Esse aspecto possibilita que, tanto no âmbito educacional quanto pessoal, os alunos se tornem seres capazes de tomarem decisões por conta própria e transmiti-las às demais pessoas com o intuito de chegarem num consenso final.

Desta forma, através dessa metodologia, os alunos podem perceber a importância do diálogo em suas futuras profissões no qual por muitas vezes solucionamos assuntos pendentes por meio de uma boa conversa com os envolvidos. Por conta disso a plenária é fator primordial na MEAAMRP.

Além disso, nos primeiros encontros, apesar de já conhecerem mais profundamente essa metodologia na disciplina, os alunos possuíam algumas dificuldades pontuais em explanar suas ideias, até mesmo os que já estavam no Estágio Supervisionado do Ensino Médio (Beija-Flor e Joana). Isso se deve pelo fato do ensino da Matemática, por diversas ocasiões, promover um trabalho individualista.

Destacamos que, em alguns momentos, houve certa dificuldade em seguirmos todo o encadeamento de etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) na MEAAMRP, sendo que em determinados casos foi necessário “pular” alguma delas devido ao tempo disponível para a finalização da aula como, por exemplo, a formalização e a plenária do sexto encontro. No entanto, reforçamos que, sempre que possível, as respeitamos até mesmo para exemplificar para os discentes envolvidos na pesquisa como se deve conduzir essa abordagem metodológica no ensino de Matemática na Educação Básica.

Ressaltamos que, por muitas vezes, nossos planejamentos iniciais necessitaram ser modificados (antes, durante ou depois de cada encontro) devido a diversos fatores, como, por exemplo, o quantitativo de alunos presentes naquele dia, ou ainda, a não realização da plenária pretendida para aquela aula, pois os alunos não concluíram os problemas propostos no tempo disponível da disciplina, exigindo assim uma reestruturação na organização do encontro seguinte de modo que fossem abarcadas as plenárias das duas aulas. Cabe, então, elencar que o docente ao empregar a MEAAMRP, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, precisa estar ciente que ela, de certa forma, não é rígida.

Poderão ocorrer encontros em que os alunos, por causas distintas, não demonstrarão vontade em trabalhar com o(s) problema(s) delineado(s) para aquela aula ou, ainda, não conseguirão desenvolver estratégias para resolvê-lo(s), como ocorrido no sexto encontro da nossa pesquisa, e assim a aula não atingirá o resultado cobiçado pelo docente em seu planejamento inicial.

Como citado anteriormente na seção da análise dos encontros, cabe ao professor proporcionar um ambiente que permita que os discentes, até mesmo aos que não gostam, sintam-se à vontade de resolver problemas, caso contrário o trabalho se tornará em vão e contribuirá pouco no processo de ensino-aprendizagem-avaliação do aluno. Neste horizonte, Polya (1997, p. 2) afirma que

> Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.
> Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem. A capacidade de contornar um obstáculo, empreender um caminho indireto, onde nenhum caminho direto se apresenta, coloca o ser inteligente acima do estúpido, coloca o homem acima dos mais inteligentes animais e homens de talentos acima de seus próximos.
> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o 'animal que resolve problemas'; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte do nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplações, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim.

Percebemos, assim, que a sugestão de compor um ensino caracterizado para a PG no Ensino Superior foi ascendida através dessa pesquisa. Analisando as resoluções e intercâmbios de ideias apresentadas pelos discentes em suas conversas e registros (antes e durante a plenária), compreendemos que a utilização dos problemas selecionados cooperou, de forma intangível e gradativa, para a edificação de saberes em relação à PG.

Demonstrando o que foi destacado durante toda essa pesquisa, percebemos que os problemas selecionados e desenvolvidos em nossa dissertação proporcionaram aos alunos a construção de conjecturas gerando a consolidação dos conceitos da PG, possibilitando assim que os alunos ganhassem autonomia na própria edificação de conhecimentos, se tornando assim, agentes ativos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de conceitos matemáticos, em especial, da PG. Isso perfaz nosso terceiro objetivo específico (Verificar quais as contribuições desta metodologia no ensino-aprendizagem-avaliação da PG nos licenciandos em Matemática).

Como evidenciado por Vargas (2019, p. 117), "[...] essa metodologia se tornou uma importante estratégia de interesse e motivação por parte dos educandos, desenvolvendo um ambiente favorável à aprendizagem de matemática."

Nossa pesquisa também deixa algumas questões que podem ser aprofundadas em outras pesquisas acadêmicas contribuindo ainda mais para elucidar a importância da MEAAMRP no processo de ensino-aprendizagem-avaliação da PG. Realçamos quatro eixos que consideramos pertinentes para serem delineados em pesquisas futuras: "Esses mesmos problemas contribuiriam para o ensino-aprendizagem-avaliação da PG no Ensino Médio?"; "E em outra disciplina de Ensino Superior?"; "A utilização de materiais manipuláveis em conjunto com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática proporcionaria um ensino de Matemática benéfico ao aluno?"; "É possível desenvolver um ensino significativo sobre a Geometria Fractal, com o auxílio da MEAAMRP, no Ensino Médio?”.

A partir desta dissertação, observamos que o emprego da MEAAMRP mostrou-se como uma provável abordagem a ser aproveitada por discentes e docentes que procuram por estratégias de ensino-aprendizagem-avaliação para a Matemática, em especial da PG, sem a necessidade de memorizar fórmulas, teoremas e/ou axiomas prontos, mas sim com a possibilidade da construção delas, em conjunto, num trabalho colaborativo e cooperativo. E ainda, que precisamos dar mais voz aos discentes deixando que participem das atividades de sala de aula, oportunizando a formação crítica de cidadãos, além de bons resolvedores de problemas de Matemática, indo ao encontro do que é evidenciado por Pironel e Vallilo (2017).

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo** – Volume I. Tradução Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARRUDA, A. G. **Ensino de Juros Compostos, Progressão Geométrica e Função Exponencial.** 2013. 125 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

BARBOSA, T. A. **A calculadora como alavanca para a generalização de expressões algébricas relativas às Progressões Geométricas**. 2013. 166 p. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2004.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula:** diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BICUDO, I. **Os Elementos, Euclides**. São Paulo: Editora UNESP. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União,** Brasília, 05 mar. 2002, Seção 1, p. 15. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 06 ago. 2019.

CHICONATO, D. C. **Despoluição de um lago – Progressão Geométrica**. 2013.149 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CORREA, M. M. **Uma proposta didática para o ensino de Sequências através da Metodologia de Resolução de Problemas com o auxílio de questões da OBMEP.** 2016. 43p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2016.

CORREA, M. M.; NOGUTI, F. C. H. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Progressão Geométrica através da Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, e202031, p. 1-26, jan./dez. 2020.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. Volume 1. São Paulo: Ática, 2010. 504p.

ESCADA, F. A. L. **Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior. Planificação de subunidade relativa ao Tema III - Sucessões Reais.** 2012. 92p. Relatório de Estágio (Graduação em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2012.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. de. O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

FERREIRA, L. S. **Uma abordagem sobre Médias e suas aplicações no Ensino Médio**. 2017. 52 p. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L. E. da.; MARTINS, E. R. Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 189-219.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma sequência de ensino de Progressões Geométricas via Fractais**. 2007. 215 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas: Uma Metodologia para aprendizagem significativa das Funções definidas por várias sentenças. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo/SP. **Anais**... São Paulo/SP: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de Matemática no contexto da Resolução de Problemas.** 2014. 254 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Campus Rio Claro, São Paulo, 2014.

JUSTULIN, A. M.; NOGUTI, F. C. H. Formação de Professores e Resolução de Problemas: um estudo a partir de Teses e Dissertações Brasileiras. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 21-53.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 1. 9. ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LOPES, F. H. **O ensino de Progressão Geométrica de segunda ordem no Ensino Médio.** 2017. 71 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) –

Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho - Campus Presidente Prudente, São Paulo, 2017.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2015.

MALTA, V. S. **Ensino de progressões sob a abordagem de uma aprendizagem cooperativa mediada pelo Classroom.** 2019. 54 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019.

MARCHETTO, R. **O uso do software GeoGebra no estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas, e sua relação com Funções Afins e Exponenciais.** 2017. 149 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 4. ed. 2004. p. 232-252.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática**.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 279-304.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1945-1995.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULICK, S.; REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997. p. 1-3.

RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia, 1:** ensino médio. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2010. 384p.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. Volume 1. São Paulo: FTD, 2010. 336 p.

SILVA, C. A. Da. **A Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas.** 2015. 62 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2015a.

SILVA, P. H. da. **Geometria Espacial e Fractal.** 2015. 98 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015b.

VARGAS, C. V. de. **O ensino e a aprendizagem da Progressão Aritmética através da Resolução de Problemas.** 2019. 140 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

VALMORBIDA, J. M. **Uma proposta de atividades para o estudo de Progressões Geométricas utilizando Fractais e o software GeoGebra.** 2018. 124 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul - Campus Chapecó, Chapecó, 2018.

WATANABE, R. Uma Lenda: Torre de Hanói. In: HELLMEISTER, A. C. P. (et al). **Explorando o Ensino da Matemática:** atividades vol. 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

YIN, R. K. **Estudo de caso** – planejamento e métodos. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZANETTI, V. C. **Uma sequência didática a partir da folha de papel sulfite.** 2017. 187 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

ANEXO A – BIBLIOGRAFIA E PROGRAMA DA DISCIPLINA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

BIBLIOGRAFIA

DEPARTAMENTO:

MATEMÁTICA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA:

CÓDIGO	NOME	(T - P)
MTM 1095	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**	**(4-0)**

BIBLIOGRAFIA:

BIBLIOGRAFIA BÁSICA E COMPLEMENTAR

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

CORCHO, A., OLIVEIRA, K. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** Coleção Olimpíadas de Matemática, SBM, 2010.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. Maria Aparecida Viggiani Bicudo (org.). São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1986.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. (orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

ALEVATTO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma experiência. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2005.

CAMINHA, A. **Convite à Matemática Elementar.** UFC: SECITECE, 2009.

FOMIN, D., ITENBERG, I., GENKIN, S., **Círculos Matemáticos**: A Experiência Russa. IMPA, 2010.

GAZIRE, E. S. **Resolução de problemas: perspectivas em Educação Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1989.

MARCO, F. F. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004.

MEGA, E., WATANABE, R. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática**, 1a a 8a - Problemas e resoluções. Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

BIBLIOGRAFIA: (continuação)

MOREIRA, C.G., MOTTA, E., TENGAN, E., AMÂNCIO, L., SALDANHA, N., RODRIGUES, P., **Olimpíadas Brasileiras de Matemática**, 9a a 16a - Problemas e resoluções. Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MOREIRA, C.G., MOTTA, E., TENGAN, SALDANHA, N., SHINE, C.Y., **Olimpíadas Brasileiras de Matemática**, 17a a 24a. Problemas e resoluções. Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs.). São Paulo: Cortez, 2005.

SCHOENFELD, A. Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In: ABRANTES, P., LEAL, L. C., PONTE, J. P. (orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Grafis, Coop. De Artes Gráficas, CRL, 1996.

Data: ____/____/____	Data: ____/____/____
Coordenador do Curso	Chefe do Departamento

Universidade Federal de Santa Maria 1960	**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA** **PROGRAMA DE DISCIPLINA**

DEPARTAMENTO:

MATEMÁTICA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA:

CÓDIGO	NOME	(T - P)
MTM 1095	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**	**(4-0)**

OBJETIVOS - ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de :

Discutir distintos entendimentos de resolução de problemas, apresentar e resolver problemas de diferentes níveis e que requerem a utilização de conceitos de diferentes áreas da Matemática.

PROGRAMA:

TÍTULO E DISCRIMINAÇÃO DAS UNIDADES

UNIDADE 1 - ENTENDIMENTOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.1 Aspectos históricos e características de diferentes entendimentos sobre resolução de problemas.
1.2 A resolução de problemas como uma metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática.
1.3. Analisar propostas de ensino que utilizam a resolução de problemas como metodologia.

UNIDADE 2 - ESTRATÉGIAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Análise de casos iniciais e de versões simplificadas de problemas e formulação de conjecturas.

UNIDADE 3 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 Problemas de Análise Combinatória.
3.2 Problemas de Teoria dos Números.
3.3 Problemas de Geometria.
3.4 Problemas de Álgebra.
3.5 Problemas combinando diversos assuntos.

ANEXO B – BIBLIOGRAFIA E PROGRAMA DA DISCIPLINA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

BIBLIOGRAFIA

DEPARTAMENTO:

MATEMÁTICA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA:

CÓDIGO	NOME	(T - P)
MTM	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A**	**(2-2)**

BIBLIOGRAFIA:

BIBLIOGRAFIA BÁSICA E COMPLEMENTAR

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

OLIVEIRA, K.; FERNANDEZ, A. J. C. **Iniciação à matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção olimpíadas de matemática)

ONUCHIC, L. R.; et al. **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

MEGA, E.; WATANABE, R. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 1ª a 8ª**: problemas e resoluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção olimpíadas de matemática)

MOREIRA, C. G. T. A. et al. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 9ª a 16ª**: problemas e resoluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. (Coleção olimpíadas de matemática)

MOREIRA, C. G. T. A. et al. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 17ª a 24ª**: problemas e resoluções. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção olimpíadas de matemática)

ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Universidade Federal de Santa Maria 1960	**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA** **PROGRAMA DE DISCIPLINA**

PARTAMENTO:

MATEMÁTICA

NTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA:

CÓDIGO	NOME	(T - P)
MTM	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A**	**(2-2)**

JETIVOS: ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de :

Compreender as diferentes concepções de Resolução de Problemas reconhecendo-a como uma metodologia de ensino e discutir suas possibilidades de pesquisa em sala de aula. Apresentar e resolver problemas que requerem conceitos de diferentes áreas da Matemática.

OGRAMA:

TÍTULO E DISCRIMINAÇÃO DAS UNIDADES

UNIDADE 1 - ENTENDIMENTOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.1 - Aspectos históricos e características de diferentes entendimentos sobre resolução de problemas.
1.2 - A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática.
1.3 - Analisar propostas de ensino que utilizam a Resolução de Problemas como metodologia de ensino em dissertações, teses e artigos.

UNIDADE 2 - A PESQUISA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 - Perspectivas de pesquisa em resolução de problemas.
2.2 - Estudo de artigos, dissertações e teses desenvolvidos na perspectiva da pesquisa em Resolução de Problemas.

UNIDADE 3 - ESTRATÉGIAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 - Análise de casos iniciais e de versões simplificadas de problemas e formulação de conjecturas.

UNIDADE 4 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4.1 - Problemas de números e operações
4.2 - Problemas de geometria.
4.3 - Problemas de álgebra.
4.4 - Problemas combinando diversos assuntos.

APÊNDICE A - PESQUISAS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA REGIÃO SUL

Título	Autor	Instituição	Programa	Ano	D/T	UF
Geometrias Hiperbólica e Esférica: Uma proposta didática baseada na Resolução de Problemas.	Anna B. G. Oliveira	UEL	PROFMAT	2015	DI	PR
Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da Resolução de Problemas.	Julio C. R. de Oliveira	UEL	PROFMAT	2015	DI	PR
Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função quadrática na perspectiva da Resolução de Problemas.	Anderson L. G. Quilles	UEL	PROFMAT	2018	DI	PR
Ensino e aprendizagem de logaritmos através da Resolução de Problemas.	Marciano Forest	UTFPR	PROFMAT	2014	DI	PR
O ensino de estatística na educação de jovens e adultos: contribuições da metodologia da Resolução de Problemas para o Ensino Médio.	Giane C. Silva	UTFPR	PPGECT	2018	DI	PR
O lúdico associado à Resolução de Problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções: uma abordagem diferenciada.	Adriane E. Souza	UTFPR	PPGECT	2014	DI	PR
Vivenciando a matemática por meio da Resolução de Problemas: um caminho para o ensino de Matemática.	Elaine M. Poffo	FURB	PPGECIM	2011	DI	SC
Discussões sobre a Resolução de Problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino de Matemática.	Priscila P. Moço	FURG	PPGEC	2013	DI	RS
O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no Ensino Médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo.	Aroldo C. Steinhorst	PUC-RS	PPGEDUCEM	2011	DI	RS
Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas.	Felipe O. Polese	PUC-RS	PPGEDUCEM	2011	DI	RS
Resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise das repercussões de uma formação continuada.	Ana S. M. S. Miranda	PUC-RS	PPGEDUCEM	2015	DI	RS
Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.	Marcelio A. Diogo	UFGRS	PPGEMAT	2007	DI	RS
Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível.	Gláucia H. S. Malta	UFRGS	PPGEMAT	2008	DI	RS
Uma proposta de ensino de probabilidade no Ensino Médio.	Rossano E. S. Ribeiro	UFRGS	PPGEMAT	2012	DI	RS
Vozes de professores acerca do ensino de matemática: ênfase em Funções nas provas do ENEM.	Fernando F. Miragem	UFRGS	PPGEMAT	2013	DI	RS
Introdução às expressões algébricas na escola básica: Variáveis & Células de Planilhas Eletrônicas.	Anderson A. Bortoletti	UFRGS	PPGEMAT	2014	DI	RS
Resolução de problemas relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental.	Daniel R. Mesquita	UFRGS	PPGEMAT	2015	DI	RS
Equações Diofantinas Lineares: Possibilidades didáticas usando a resolução de problemas.	Adilson de Campos	UFSM	PROFMAT	2015	DI	RS
A resolução de problemas como uma interface interdisciplinar entre a Matemática e o ensino de ciências.	Daniel M. Ocampo	UFSM	PPGECQV	2015	DI	RS
Investigação–ação escolar: situação-problema na aprendizagem de conceitos matemáticos.	Vera L. B. Pereira	UFSM	PPGE	2008	DI	RS

Metodologia de resolução de problemas: ensino e aprendizagem de funções no Ensino Fundamental.	Alex S. G. Leão	UFN	PPGECIMAT	2009	DI	RS
Ensino e aprendizagem dos conceitos de análise combinatória por meio da metodologia de resolução de problemas.	Ana P. G. da Fonte	UFN	PPGECIMAT	2008	DI	RS
O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do ensino fundamental: um trabalho com situações do cotidiano.	Daiana M. Seckler	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos.	Darcson C. dos Santos	UFN	PPGECIMAT	2011	DI	RS
O ensino-aprendizagem de matrizes e determinantes por meio de resolução de problemas.	Lucilene D. Medico	UFN	PPGECIMAT	2008	DI	RS
Resolução de Problemas: ensinar e aprender as quatro operações com Números Inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental.	Ana P. M. de Abreu	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
Trilhos matemáticos como contexto para o ensino e a aprendizagem de geometria espacial com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.	Tatiéle T. Gehrke	UFN	PPGECIMAT	2017	DI	RS
Contribuições da resolução de problemas e do software Maple para a aprendizagem significativa dos conceitos e propriedades da derivada.	Elio Sangoi	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
Resolução de problemas no ensino de porcentagem: em busca de uma compreensão pedagógica a partir dos processos reguladores gerais da teoria de Robbie Case.	Fabiane F. Figueiredo	UFN	PPGECIMAT	2008	DI	RS
A metodologia da resolução de problemas e o ensino de estatística no nono ano do Ensino Fundamental.	Glaucia G. B. de Vargas	UFN	PPGECIMAT	2013	DI	RS
A metodologia de resolução de problemas e o aplicativo Winplot para a construção do conceito de função por alunos do Ensino Médio.	Noélli F. dos Santos	UFN	PPGECIMAT	2013	DI	RS
Uso do material concreto: um fator facilitador da ensinagem de frações com alunos de 5ª série.	Paulo C. A. dos Santos	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas, como alternativa pedagógica para a compreensão do conceito de função afim por alunos do Ensino Médio.	Paulo R. Simon	UFN	PPGECIMAT	2014	DI	RS
Construção do conceito de função: uma experiência de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas.	Sandra B. Zatti	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
Ensino e aprendizagem de derivada na educação matemática à distância por meio da metodologia da resolução de problemas.	Silvia Prietsch	UFN	PPGECIMAT	2010	DI	RS
Ensino e aprendizagem de probabilidade através da metodologia de resolução de problemas.	Stefane L. Gaffuri	UFN	PPGECIMAT	2012	DI	RS
Metodologia de resolução de problemas: ensino e aprendizagem de conceitos de matemática financeira no EJA.	Tatiele F. Miron	UFN	PPGECIMAT	2013	DI	RS
A leitura significativa como estratégia para a compreensão e resolução de problemas matemáticos no Ensino Médio.	Núbia P. da C. Andrade	UNIVATES	PPGECE	2014	DI	RS
Resolução de problemas: uma abordagem a partir de projetos interdisciplinares.	Ana P. Dessoy	UNIVATES	PPGECE	2015	DI	RS
Potencialidades e limitações de material didático para explorar resolução de problemas matemáticos	Geovana L. Kliemann	UNIVATES	PPGECE	2015	DI	RS

Os jogos online como ferramentas na resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais	Neiva Althaus	UNIVATES	PPGECE	2015	DI	RS
Formação continuada em reuniões pedagógicas e impactos no ensino de matemática: refletindo a partir de realidades escolares de Boa Vista/RR.	Ronilda R. de Meneses	UNIVATES	PPGECE	2014	DI	RS
Resolução de problemas matemáticos na Formação Continuada de professores.	Rosilene I. König	UNIVATES	PPGECE	2013	DI	RS

APÊNDICE B - TRABALHOS SOBRE O ENSINO DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Título	Autor	Instituição	Programa	Ano de defesa	DI/TE	UF
Despoluição de um Lago - Progressão Geométrica.	Daniele Cristina Chiconato	UFSCar	PPGECE	2013	DI	SP
O uso do software GeoGebra no estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas, e sua relação com Funções Afins e Exponenciais.	Raquel Marchetto	UFRGS	PROFMAT	2017	DI	RS
Ensino de Progressões sob a abordagem de uma Aprendizagem Cooperativa mediada pelo Classroom.	Valcineide Dos Santos Malta	UFAM	PPGM	2019	DI	AM
A calculadora como “alavanca” para a generalização de expressões algébricas relativas às progressões geométricas.	Tatiana Albieri Barbosa	PUC/SP	PEPG	2013	DI	SP
Ensino de Juros Compostos, Progressão Geométrica e Função Exponencial.	Alexandre Goulart Arruda	UFV	PROFMAT	2013	DI (Magister Scientiae)	MG
O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio.	Fernando Henrique Lopes	UNESP	PROFMAT	2017	DI	SP
Uma Sequência de Ensino para o estudo de Progressões Geométricas via Fractais.	Andrea Gomes Nazuto Gonçalves	PUC/SP		2007	DI	SP
Uma sequência didática a partir da folha de papel sulfite.	Veridiana Carla Zanetti	UFSCar	PROFMAT	2017	DI	SP
Uma proposta de atividades para o estudo de Progressões Geométricas utilizando Fractais e o Software GeoGebra	Juliana Maria Valmorbida	UFFS	PROFMAT	2018	DI	SC

APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO INICIAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa "PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA" e tem como objetivo conhecer o perfil dos participantes da pesquisa, bem como a opinião a respeito da sua futura prática docente.

Responda com o máximo de honestidade.

1. Indique seu Gênero
( ) Masculino ( ) Feminino ( ) Outro

2. Indique sua idade
( ) Menos de 20 anos
( ) De 20 a 30 anos
( ) De 31 a 40 anos
( ) De 41 a 50 anos
( ) Mais de 51 anos

3. Você possui alguma fonte de renda? ( ) Sim ( ) Não. Se sim, qual (is)?

( ) Bolsa de Iniciação, Pesquisa ou Extensão;
( ) Trabalho Formal
( ) Trabalho Informal
( ) Aulas Particulares
( ) Pensão
( ) Outro. Qual? ____

4. Qual a modalidade do seu curso? ( ) Bacharelado ( ) Licenciatura

5. Indique seu semestre no curso de Licenciatura/Bacharelado em Matemática.

( ) 1º Semestre ( ) 6º Semestre
( ) 2º Semestre ( ) 7º Semestre
( ) 3º Semestre ( ) 8º Semestre
( ) 4º Semestre ( ) 9º Semestre
( ) 5º Semestre ( ) 10º Semestre

6. Qual o seu turno de ingresso no curso de Matemática Licenciatura/Bacharelado?
( ) Diurno ( ) Noturno

7. Qual foi seu ano de ingresso no curso de Licenciatura/Bacharelado em Matemática na UFSM?
____

8. Qual foi sua motivação para a escolha do curso de Licenciatura/Bacharelado de Matemática?

____

____

9. Qual foi sua motivação para cursar a Disciplina Complementar de Graduação (DCG) de Resolução de Problemas?

____

____

10. No decorrer das disciplinas cursada, com exceção da presente disciplina, em algum momento a Resolução de Problemas foi estudada? ( ) Sim ( ) Não. Se sim, em qual (is) disciplina(s)?

____

____

11. Durante seu Ensino Médio, o conteúdo de Progressão Geométrica foi trabalhado pelo professor? ( ) Sim ( ) Não. Se sim, em que ano escolar:
( ) 1º Ano/Série ( ) 2º Ano/Série ( ) 3º Ano/Série

12. E na graduação? ( ) Sim ( ) Não. Se sim, em qual(is) disciplina(s)? _______________

13. Você acredita que o ensino da Progressão Geométrica é importante para os alunos do Ensino Médio? ( ) Sim ( ) Não. Por quê? ____

____

14. Num futuro próximo, após a conclusão da graduação em Matemática, você pretende seguir a carreira do Magistério como professor de Matemática? ( ) Sim ( ) Não. O que te motiva a seguir, ou não, nessa carreira?

____

____

15. Você acredita que o trabalho com diversas metodologias no ensino de Matemática propicia para a aprendizagem do aluno? ( ) Sim ( ) Não Por quê?

____

____

APÊNDICE D – RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

1º ENCONTRO

PROBLEMA 1: Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro.

E assim disse aos monges: "Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó, e com um estrondo de trovões o mundo acabará."

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos, na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar?

RESOLUÇÃO:

Quantidade de movimento de cada disco							
Quantidade de disco	**Disco 1**	**Disco 2**	**Disco 3**	**Disco 4**	**Disco 5**	**Disco 6**	**Total de movimentos**
1	1						$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$
2	2	1					$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
3	4	2	1				$7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$
4	8	4	2	1			$15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$
5	16	8	4	2	1		$31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$
6	32	16	8	4	2	1	$63 = 64 - 1 = 2^6 - 1$
...	...	...	...	...	...		...
n	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	2^{n-4}	2^{n-5}	2^{n-6}	$2^n - 1$

Assim, quando tivermos 64 discos o número total de movimentos será:

$$T_n = 2^n - 1 \rightarrow T_{64} = 2^{64} - 1 \rightarrow T_{64} = 18.446.744.073.709.551.616 - 1$$

$$T_{64} = 18.446.744.073.709.551.615$$

Dessa forma, os monges levarão 18.446.744.073.709.551.615 segundos para solucionar o problema. Cada dia possui 86.400 segundos e cada ano tem 365 dias, o que equivale a 31.536.000 segundos. Com isso, 18.446.744.073.709.551.615 segundos equivalem, aproximadamente a, 584.942.417.355 anos, que é inviável de ser feito e visto por nós.

2º ENCONTRO

PROBLEMA 1: Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é?

RESOLUÇÃO:

$$0^o\, Mês \rightarrow x$$
$$4^o\, Mês \rightarrow 2x$$
$$8^o\, Mês \rightarrow 4x$$
$$12^o\, Mês \rightarrow 8x$$

Queremos reduzir o número de coelhos para o valor inicial x, assim teremos uma redução de 7x. Logo $\frac{7x}{8x} = \frac{7}{8} = 0{,}875$, ou seja, deve ser vendida 87,5% da população atual dos coelhos.

PROBLEMA 2: Os números reais $n-6, n-4$ e $2n-11$ são os três primeiros termos consecutivos de uma Progressão Geométrica crescente. O quarto termo dessa Progressão Geométrica é?

RESOLUÇÃO: Propomos a resolução desse problema de três maneiras.

- 1º) Utilizando a definição de PG:

$$a_1 = n - 6$$
$$a_2 = a_1 q = (n-6)q = n - 4 \qquad (I)$$
$$a_3 = a_2 q = \big((n-6)q\big)q = (n-6)q^2 = 2n - 11 \qquad (II)$$

De (I),

$$q = \frac{n-4}{n-6}\ \forall n \neq 6 \qquad (III)$$

Assim, de (II)

$$q^2 = \frac{2n-11}{n-6} \quad \forall n \neq 6 \qquad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV) temos,

$$\left(\frac{n-4}{n-6}\right)^2 = \frac{2n-11}{n-6}$$

$$\frac{(n-4)^2}{(n-6)^2} = \frac{2n-11}{n-6}$$

$$(n-4)^2 = \frac{(n-6)^2(2n-11)}{(n-6)}$$

$$(n-4)^2 = (n-6)(2n-11) \qquad (V)$$

$$n^2 - 8n + 16 = 2n^2 - 11n - 12n + 66$$

$$n^2 - 15n + 50 = 0$$

Assim pela fórmula resolutiva da equação do 2º grau teremos,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-15)^2 - (4)(1)(50) = 225 - 200 = 25$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow n = \frac{+15 \pm 5}{2}; n' = \frac{15+5}{2} = \frac{20}{2} = 10;\ n'' = \frac{15-5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Analisaremos cada um dos valores encontrados de modo a verificar se a sequência formada é uma PG crescente. Para $n = 10$,

$$a_1 = n - 6 = 10 - 6 = 4;$$

$$a_2 = n - 4 = 10 - 4 = 6;$$

$$a_3 = 2n - 11 = 20 - 11 = 9$$

Temos então,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$$

Para $n = 5$,

$$a_1 = n - 6 = 5 - 6 = -1;$$

$$a_2 = n - 4 = 5 - 4 = 1;$$

$$a_3 = 2n - 11 = 10 - 11 = -1.$$

Identificamos que essa PG é alternante $(q < 0)$, assim a única solução possível é quando $n = 10$. Logo, a PG será a sequência (4, 6, 9).

- 2º) Utilizando o conceito de razão, temos que $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$, ou seja, $\frac{n-4}{n-6} = \frac{2n-1}{n-4}$, e, portanto, $(n-4)^2 = (n-6)(2n-11)$, que segue o mesmo caminho de (V).

- 3º) Utilizando a definição de termos equidistantes, identificamos que ${a_2}^2 = a_1a_3$, assim $(n-4)^2 = (n-6)(2n-11)$, que também segue a ideia de (V).

PROBLEMA EXTRACLASSE: Suponha que os números $x, -6, 3x + 3$ ey estão, nesta ordem, em uma Progressão Geométrica decrescente. Desse modo os valores de x e y são?

RESOLUÇÃO:

$$a_1 = x$$

$$a_2 = -6$$

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_4 = y$$

Pela propriedade dos termos equidistantes de uma PG temos que:

$$(a_2)^2 = a_1a_3$$

$$36 = 3x^2 + 3x \rightarrow \; 3x^2 + 3x - 36 = 0$$

Pela fórmula resolutiva da equação do segundo grau, temos que $\Delta = 3^2 - 4(3)(-36) \; = 441$. Logo, $x = \frac{-(3)\pm\sqrt{441}}{2(3)} \rightarrow x = \frac{-3\pm 21}{6}$ e, portanto, $x' = 3$ e $x'' = -4$

De modo análogo ao problema 2, devemos verificar para qual (is) dos(s) valores obtidos a sequência será decrescente. Para $x = 3$, temos que $a_1 = 3, a_2 = -6$ e $a_3 = 3(3) + 3 = 12$. Observamos que, pela propriedade dos termos equidistantes de uma PG, $a_3^2 = a_2.a_4$. Logo,

$$y = a_4 = \frac{a_3^2}{a_2} = \frac{144}{-6} = -24$$

Assim, a sequência quando $x = 3$ é

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = -6;$$

$$a_3 = 9 + 3 = 12;$$

$$a_4 = -24$$

Temos que $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \rightarrow q = \frac{-6}{3} = \frac{12}{-6} = \frac{-24}{12} = -2$, constituindo então uma PG alternante, não sendo esta a solução do problema já que se pede uma PG decrescente. Para

$x = -4$, temos $a_1 = -4,\ a_2 = -6, a_3 = 3(-4) + 3 = -9$ e assim, usando a propriedade dos termos equidistantes de uma PG, $a_4 = \frac{9^2}{-6} = -13{,}5$.

Assim $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = 1{,}5$, sendo então uma PG decrescente, pois $a_1 < 0\ e\ q > 1$, solução do problema.

3º ENCONTRO

PROBLEMA 1: Um carro, cujo preço à vista é R$24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em Progressão Geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$4.000,00 e a quarta parcela de R$1.000, 00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

RESOLUÇÃO*:* Este problema será resolvido de três formas distintas

- 1ª) Segundo os dados fornecidos pelo problema, temos a PG $(a_1, 4000, a_3, 1000, a_5)$. Conforme a propriedade dos termos equidistantes,

$$a_3{}^2 = (4000)(1000) = 4.10^6 = 2^2.10^6$$
$$a_3 = \sqrt{2^2.10^6} = 2.10^3 = 2000$$

Da mesma forma, $a_2{}^2 = a_1.a_3$. Ou seja,

$$a_1 = \frac{(4.10^3)^2}{2.10^3} = \frac{16.10^6}{2.10^3} = 8.10^3 = 8000$$

Finalmente, $a_4{}^2 = a_3.a_5$. Assim,

$$a_5 = \frac{(10^3)^2}{2.10^3} = \frac{10^3}{2} = 500$$

Deste modo, o valor da entrada E será dado por

$$E = 24000 - \sum_{i=1}^{5} a_i = 24000 - (8000 + 4000 + 2000 + 1000 + 500) = 8.500$$

Ou seja, a entrada foi de $R\$ = 8.500{,}00$.

- 2ª) As parcelas desse pagamento estão em uma PG $(a_1 \cdot, 4000, a_3 \cdot, 1000, a_5)$. Observamos que $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_4}{a_2 q}$. Ou seja, $q^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$ e, portanto, $q = \frac{1}{2}$ uma vez que a PG é decrescente. Com isso,

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4000}{\frac{1}{2}} = 8000$$
$$a_3 = a_2 q = 4000\frac{1}{2} = 2000$$
$$a_5 = a_1 q = 1000\frac{1}{2} = 500$$

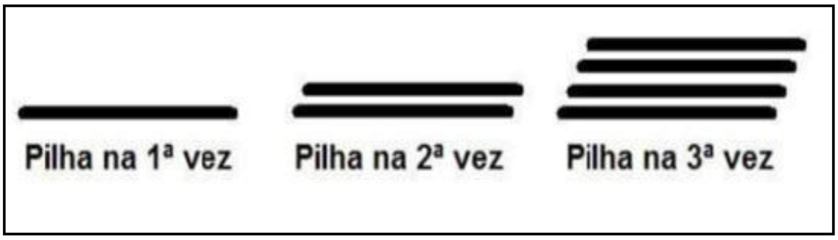
E assim, como no 1º caso, teremos uma entrada de $R\$$ $8.500{,}00$.

- 3ª) Pelo termo geral da PG

$$a_4 = a_2 q^2$$

Ou seja, $1000 = 4000q^2$ e, portanto, $q^2 = \frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$. Logo, $q = \frac{1}{2} \cdot$, seguindo daqui a ideia explicitada na 2ª estratégia.

PROBLEMA 2: Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha.



Ao final de nove dessas operações,

a) quantas tábuas terá a pilha;

b) qual será a altura, em metros, da pilha.

c) Após quantos empilhamentos, a altura desta pilha de tábuas será de 20,48 m?

d) Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}$, a altura da pilha, em cm, é igual à metade da quantidade de tábuas empilhadas?

RESOLUÇÃO:

a) Resolveremos o item (a) de duas maneiras distintas.

- 1ª estratégia - Utilizando as propriedades da PG:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 4$$
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$a_4 = a_3 q = 4.2 = 8$$
$$a_5 = a_4 q = 8.2 = 16$$
$$a_6 = a_5 q = 16.2 = 32$$
$$a_7 = a_6 q = 32.2 = 64$$
$$a_8 = a_7 q = 64.2 = 128$$
$$a_9 = a_8 q = 128.2 = 256$$

- 2ª estratégia - “Deduzindo” o termo geral

$$a_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$$
$$a_2 = 2 = 2^1 = 2^{2-1}$$
$$a_3 = 4 = 2^2 = 2^{3-1}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^{n-1}$$

Logo, para $n = 9$ temos
$$a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

b) Neste caso, $h = a_9 * 0{,}5 = \frac{256}{2} = 128\ cm$ ou, equivalentemente, $1{,}28m$ de altura.

c)

$$20{,}48\ m = 2048\ cm$$
$$h_1 = a_1 * 0{,}5 = 1 * 0{,}5 = 0{,}5 = 2^{-1}$$
$$h_2 = a_2 * 0{,}5 = 2 * 0{,}5 = 1 = 2^{0}$$
$$h_3 = a_3 * 0{,}5 = 4 * 0{,}5 = 2 = 2^{1}$$
$$\vdots$$
$$h_n = 2^{n-2}$$

Assim, quando $h_n = 2048$ teremos $2048 = 2^{n-2} = \frac{2^n}{2^2}$. Ou seja, $2^n = 2^{11}.2^2 = 2^{13}$ e, portanto, $n = 13$ é o número de empilhamentos necessários para se obter uma pilha de 20,48m.

d) Vimos que $a_n = 2^{n-1}$. Assim, $h_n = 2^{n-2} = \frac{2^{n-1}}{2} = \frac{a_n}{2}, \forall n \in N$

PROBLEMA EXTRACLASSE: Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210 mm x 297 mm. Considere que uma folha A4 com 0,1 mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número k de dobras feitas.

b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

c) Pesquise e encontre uma justificativa do por que não conseguimos dobrar uma folha A4 mais que 7 vezes.

RESOLUÇÃO:

a)

Quantidade de dobras	Espessura da folha
0	0,1 mm
1	0,1.2 = 0,2 mm
2	0,1. 4 = 0,4 mm
3	0,1. 8 = 0,8 mm
4	0,1. 16 = 1,6 mm
□	□
n	2^n(0,1) mm

Logo $a_n = 2^n(0{,}1) = \frac{2^n}{10} \forall n \geq 0$

b)

Quantidade de dobras	Base	Altura	Espessura da folha
0	$297\ mm$	$210\ mm$	$0{,}1\ mm$
1	$\frac{297}{2} = 148{,}5\ mm$	$210\ mm$	$0{,}2\ mm$
2	$148{,}5\ mm$	$\frac{210}{2} = 105\ mm$	$0{,}4\ mm$
3	$\frac{148{,}5}{2} = 74{,}25\ mm$	$105\ mm$	$0{,}8\ mm$
4	$74{,}25\ mm$	$\frac{105}{2} = 52{,}5\ mm$	$1{,}6\ mm$
5	$\frac{74{,}25}{2} = 37{,}125\ mm$	$52{,}5\ mm$	$3{,}2\ mm$
6	$37{,}125\ mm$	$\frac{52{,}5}{2} = 26{,}25\ mm$	$6{,}4\ mm$

c) Para $n > 7$ teríamos como espessura da folha $2^n(0{,}1) > 2^7(0{,}1) = 128(0{,}1) = 12{,}8\ mm$, que é uma espessura, praticamente, impossível para ser dobrada a mão, pois ela se torna extremamente grossa para tal feito.

4º ENCONTRO

PROBLEMA 1: No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1134 problemas.

a) Quantos problemas o grupo resolveu até o final de janeiro?

b) E em cada mês seguinte?

c) Determine uma generalização para a soma no mês n;

d) Mostre que essa generalização é válida $\forall n \geq 1$

e) Se o grupo permanecer nesse ritmo de resolução de problemas, ao final do ano de 2006 quantos problemas seriam resolvidos por eles? Seria possível esta quantidade de problemas resolvidos?

RESOLUÇÃO:

a) Vamos resolver o item (a) por meio de duas estratégias.

- 1ª estratégia - Utilizando a definição de PG:

$$a_1 = x$$
$$a_2 = 2a_1 = 2x$$
$$a_3 = 2a_2 = 2(2x) = 4x$$
$$a_4 = 2a_3 = 2(4x) = 8x;$$
$$a_5 = 2a_4 = 2(8x) = 16x$$
$$a_6 = 2a_5 = 2(16x) = 32x$$

Como a soma dos 6 primeiros meses é 1134 teremos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1134$$
$$x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 1134$$
$$63x = 1134$$
$$x = \frac{1134}{63} = 18$$

Assim, em janeiro foram resolvidos 18 problemas.

- 2ª estratégia – A soma dos termos de uma PG finita satisfaz

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Neste caso, para $S_n = 1134, q = 2$ e $n = 6$ termos, $1134 = a_1 \frac{2^6-1}{2-1}$ e, portanto, $a_1 = \frac{1134}{2^6-1} = \frac{1134}{63} = 18$

b) Conforme destacado na estratégia 1, temos que

$$Fevereiro: a_2 = 2x = 2.18 = 36\, problemas$$
$$Março: a_3 = 4x = 4.18 = 72\, problemas$$
$$Abril: a_4 = 8x = 8.18 = 144\, problemas$$
$$Maio: a_5 = 16x = 16.18 = 288\, problemas$$
$$Junho: a_6 = 32x = 32.18 = 576\, problemas$$

c) Observamos que,

$$S_1 = 18 = 18(1)$$
$$S_2 = 18 + 36 = 18(1 + 2) = 18(4 - 1) = 18(2^2 - 1)$$
$$S_3 = 18 + 36 + 72 = 18(1 + 2 + 4) = 18(8 - 1) = 18(2^3 - 1)$$
$$S_4 = 18 + 36 + 72 + 144 = 18(1 + 2 + 4 + 8) = 18(16 - 1) = 18(2^4 - 1)$$

O que nos leva a concluir que $S_n = 18(2^n - 1)$.

d) Usando o Princípio da Indução Matemática (PIM), vamos mostrar a veracidade desta igualdade.

Para $n = 1$ temos:

$$S_1 = 18(2^1 - 1) = 18 = a_1$$

Sendo esta uma sentença verdadeira. Suponhamos, por hipótese de indução, que $S_n = a_1\,(2^n - 1)$ seja válido para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $n + 1$ teremos,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1(2^n - 1) + a_{n+1}$$

Pelo termo geral da PG temos que

$$a_{n+1} = a_1(q^{n+1-1}) = a_1(2^n)$$

Assim,

$$S_{n+1} = a_1(2^n - 1) + a_1(2^n) = a_1(2^n + 2^n - 1)$$
$$a_1(2\,.\,2^n - 1) = a_1(\,2^{n+1} - 1)$$

Sendo assim, a sentença $S_n = a_1\,(2^n - 1)$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) Para $n = 12$,

$$S_{12} = 18(2^{12} - 1) = 18(4096 - 1) = 73710$$

PROBLEMA 2: Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:

i) perde-se a quantia X apostada;

ii) recebe-se a quantia 2X.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21ª vez, ela ganhou.

Comparando-se a quantia total T por ela desembolsada e a quantia Q recebida na 21ª jogada, tem-se que Q é igual a:

RESOLUÇÃO:

Vamos calcular o total perdido utilizando $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, onde $a_1 = 1, q = 2$ e $n = 20$. Ou seja,

$$S_{20} = 1 \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 2^{20} - 1$$

Seja $T = S_{20}$. Assim, $T + 1 = 2^{20}$. Observamos que, $Q = 2a_{21} = 2(a_1 q^{20}) = 2.2^{20}$ e, com isso, $Q = 2(T + 1)$.

PROBLEMA EXTRACLASSE: Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. Calcule:

a) O tempo necessário para que aquele aluno resolva todas as questões da prova;

b) O número total de questões da referida prova.

RESOLUÇÃO:

a) Segundo os dados do problema, $S_n - a_n = 63{,}5$ e, portanto, $S_n = 63{,}5 + a_n (i)$. Além disso, $S_n - (a_{n-1} + a_n) = 31{,}5$, ou seja, $S_n = 31{,}5 + (a_{n-1} + a_n)\ (ii)$.

Igualando (i) e (ii) temos,

$$63{,}5 + a_n = 31{,}5 + (a_{n-1} + a_n)$$
$$63{,}5 - 31{,}5 = a_{n-1} + a_n - a_n$$
$$32 = a_{n-1}$$

Da definição de razão temos que $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Ou seja, $2 = \frac{a_n}{32}$ e, portanto, $a_n = 64$. Logo o tempo necessário será

$$S_n = 63{,}5 + a_n = 63{,}5 + 64 = 127{,}5\, min$$

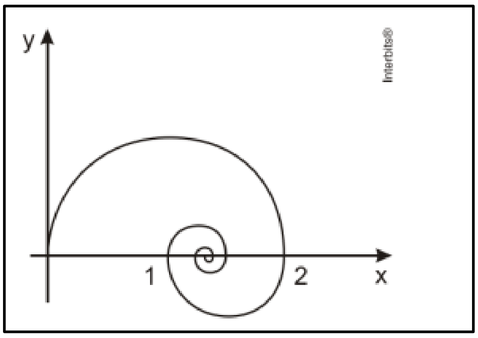
b) Do termo geral da PG, $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos que

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}} = \frac{64}{2^{n-1}} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{7-n}$$

Seja $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ a soma dos termos de uma PG finita. Assim, $127{,}5 = 2^{7-n} \frac{(2^n - 1)}{2-1} = 2^{7-n}\,(2^n - 1) = 2^7 - 2^{7-n}$ e, com isso,$2^{7-n} = 2^7 - 127{,}5 = 2^{-1}$. Portanto, a prova tem $n = 8$ questões.

5º ENCONTRO

PROBLEMA 1: Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a



RESOLUÇÃO:

Vamos propor duas formas de resolução para este problema

- 1ª) Utilizando somatório: Sejam

$$C_1 = a_1 = \frac{(\pi)(2r)}{2} = \pi$$

$$C_2 = a_1 + a_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$C_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 2\pi + \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Assim, teremos a sequência, $(\pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots, 2\pi\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \cdots)$, cuja soma será dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2\pi \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

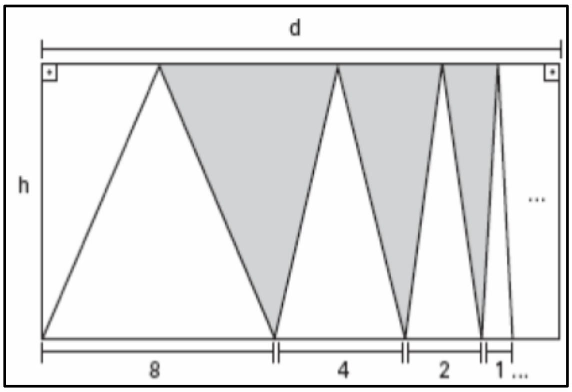
$$= 2\pi(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}) = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Assim, o comprimento da espiral será 2π.

2ª) Sabendo que $a_1 = \pi$ e a razão $q = \frac{1}{2}$, então, pela soma de uma PG infinita, temos que

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

PROBLEMA 2: A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, $8, 4, 2, 1, \cdots$



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a

RESOLUÇÃO:

Sejam $a_1 = 8, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 1, \cdots$. Com relação ao lado d temos, então, uma PG infinita de razão $q = \frac{1}{2}$. Sendo assim o lado d será a soma dessa progressão. Ou seja,

$$d = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$$

Observamos que a soma das bases hachuradas será dada por $16 - 4 = 12.$ Com isso, tendo $A = 51$, a altura dos triângulos hachurados será,

$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$51 = \frac{12.h}{2}$$

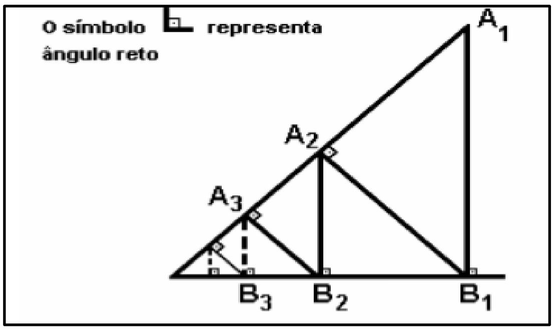
$$102 = 12h$$

$$h = \frac{102}{12} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2}$$

Como a altura dos triângulos e do retângulo é a mesma, teremos que a área do retângulo (R) se dará por

$$R = b.h = 16\left(\frac{17}{2}\right) = 8.17 = 136$$

PROBLEMA EXTRACLASSE: Na figura a seguir, $\overline{A_1B_1} = 3, \overline{B_1A_2} = 2$.



Calcule a soma dos infinitos segmentos: $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$

RESOLUÇÃO:

Seja α o ângulo do triângulo $A_1B_1A_2$. Assim teremos que

$$cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{2}{3}$$

Do triângulo $B_2A_2B_1$, temos que seu ângulo também valerá α já que é congruente ao triângulo $A_2B_2A_3$, assim

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2B_1}} \Rightarrow \overline{A_2B_2} = \frac{2}{3}.2 = \frac{4}{3}$$

De forma análoga para o triângulo $A_2B_2A_3$.

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{B_2A_3}}{\overline{A_2B_2}} \Rightarrow \overline{B_2A_3} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

Assim, $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots = 3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$, sendo esta a soma de uma PG infinita de razão $\frac{2}{3}$. Logo,

$$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = 9$$

6º ENCONTRO

PROBLEMA 1: Caleb era um aluno que adorava descobrir padrões. Numa de suas investigações, notou que a sequência $(1, 2, 8, 64, \cdots)$ possuía um padrão bastante peculiar. Responda:

a) Qual o padrão desta sequência identificado por Caleb?

b) Quais seriam os próximos 3 elementos dessa sequência?

c) Determine uma generalização para o enésimo termo dessa sequência.

d) Mostre que essa generalização é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

RESOLUÇÃO:

a) Observamos que a sequência $(1, 2, 8, 64, \cdots)$ possui como propriedade:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2 = (1)(2) = (a_1)(2^1) = (a_{2-1})(2^{2-1})$$
$$a_3 = 8 = (2)(4) = (a_2)(2^2) = (a_{3-1})(2^{3-1})$$
$$a_4 = 64 = (8)(8) = (a_{4-1})(2^{4-1})$$

Seguindo esse padrão, para encontrar o termo geral a_n devemos multiplicar o seu antecessor por 2^{n-1}, ou seja, $a_n = a_{n-1}.2^{n-1}$.

b) Utilizando a generalização obtida em (a), temos

$$a_5 = (a_4)(2^4) = 64.16 = 1024$$
$$a_6 = (a_5)(2^5) = 1024.32 = 32768$$
$$a_7 = (a_6)(2^6) = 32768.64 = 2097152$$

c) Propomos a resolução do item (c) de duas formas distintas:

1ª estratégia - Pela relação de recorrência

$$a_1 = 1 = 1.1 = 2^0.1$$
$$a_2 = 2 = 2.1 = 2^1.1$$
$$a_3 = 8 = 8.1 = 2^3.1$$
$$a_4 = 64 = 64.1 = 2^6.1$$
$$a_5 = 1024 = 1024.1 = 2^{10}.1$$
$$a_6 = 32768 = 32768.1 = 2^{15}.1$$
$$a_7 = 2097152 = 2097152.1 = 2^{21}.1$$
$$\vdots$$
$$a_n = (2^{b_n})(1)$$

Observamos que a sequência descrita por b_n, $(0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots)$, é uma PA de segunda ordem, na medida em que

$$c_1 = b_2 - b_1 = 1 - 0 = 1$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = 3 - 1 = 2$$
$$c_3 = b_4 - b_3 = 6 - 2 = 3$$
$$c_4 = b_5 - b_4 = 10 - 6 = 4$$
$$c_5 = b_6 - b_5 = 15 - 10 = 5$$
$$c_6 = b_7 - b_6 = 21 - 15 = 6$$

E ainda é visível que $c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = c_4 - c_3 = c_5 - c_4 = \cdots = 1$, assim pelo termo geral da PA de segunda ordem temos: $b_n = \left(\frac{r}{2}\right)n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right)n + (r - d + y_1)$, onde $r = 1, d = b_2 - b_1 = 1$ e$y_1 = b_1 = 0$. Deste modo,

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)n + (1 - 1 + 0) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

Assim, a generalização para esta sequência será

$$a_n = (2^{b_n})(1) = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

2ª estratégia - Pelo termo geral da PG de Segunda Ordem:

$$a_n = 2^{\binom{n-1}{1}} 2^{\binom{n-1}{2}} = 2^{\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$$

Como, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$. Então $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

d) Vamos provar a veracidade desta fórmula usando o PIM. Para $n = 1$ temos que $a_1 = 2^{\frac{1^2-1}{2}} = 2^0 = 1$, sendo esta uma sentença verdadeira.

Suponhamos, por hipótese de indução, que a sentença $a_n = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $n + 1$, temos de (a) que

$$a_{n+1} = (2^{n-1+1})(a_{n-1+1}) = (2^n)(a_n)$$
$$(2^n)\left(2^{\frac{n^2-n}{2}}\right) = \left(2^{\frac{2n+n^2-n}{2}}\right) = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

Logo $a_n = 2^{\frac{n^2-n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 2: Determine os próximos três elementos das sequências abaixo:

a) $(-4, -8, -48, -864, \cdots)$

b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 18, -864, \cdots\right)$

c) $\left(1, 5, \frac{75}{2}, \frac{3375}{8}, \cdots\right)$

RESOLUÇÃO:

a) Seja $(-4, -8, -48, -864, \cdots)$ a sequência dada. Então

$$b_1 = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$b_2 = \frac{-48}{-8} = 6 = 3.b_1$$

$$b_3 = \frac{-864}{-48} = 18 = 3^2 b_1$$

Para que esse padrão se mantenha, o 5º termo desta sequência, que denotaremos por a_5, é tal que $a_5 = b_4.a_4 = 3^3 \cdot .2(-864) = -46656$. Da mesma forma, $a_6 = b_5 a_5 = 3^4.2.(-46656) = -7558272$. Analogamente teremos $a_7 = b_6 a_6 = 3^5.2(-7558272) = -3673320192$.

b) Notamos, pela sequência dada $\left(\frac{1}{2} \cdot, -\frac{3}{2} \cdot, 18, -864, \cdots\right)$, que

$$b_1 = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$$

$$b_2 = \frac{18}{-\frac{3}{2}} = -12 = 4b_1$$

$$b_3 = \frac{-864}{18} = -48 = 4^2 b_1$$

Assim,

$$b_4 = \frac{a_5}{-864} = 4^3 b_1$$

Ou seja,

$$a_5 = 4^3 b_1(-864) = 64(-3)(-864) = 165888$$

$$a_6 = 4^4 b_1(165888) = -127401984$$

$$a_7 = 4^5 b_1(-127401984) = 1024(-3)(-127401984) = 391378894848$$

c) Dada a sequência notamos que

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$b_2 = \frac{\frac{75}{2}}{5} = \frac{15}{2} = \frac{3}{2}.5 = \frac{3}{2} b_1$$

$$b_3 = \frac{\frac{3375}{8}}{\frac{75}{2}} = \frac{45}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 b_1$$

Deste modo,

$$b_4 = \frac{a_5}{\frac{3375}{8}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 b_1 \Rightarrow a_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 b_1 \left(\frac{3375}{8}\right) = \left(\frac{3375}{8}\right)\left(\frac{135}{8}\right) = \frac{455625}{64}$$

$$b_5 = \frac{a_6}{\frac{455625}{64}} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 b_1 \Rightarrow a_6 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 b_1 \left(\frac{455625}{64}\right) = \frac{184528125}{1024}$$

$$b_6 = \frac{a_7}{\frac{184528125}{1024}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 b_1 \Rightarrow a_7 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 b_1 \left(\frac{184528125}{1024}\right) = \frac{224201671875}{32768}$$

7º ENCONTRO

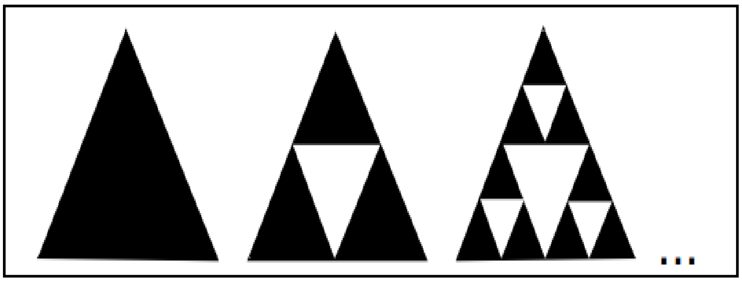
PROBLEMA 1: O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero;

2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos;

4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3.



a) De acordo com o procedimento descrito como podemos representar a figura 4 da sequência apresentada acima?

b) Que generalização podemos fazer para determinar a quantidade de triângulos pretos de cada figura?

c) E para os brancos?

d) Se esse procedimento seguir de maneira infinita, que tendência seguirá a área escura da enésima figura?

RESOLUÇÃO:

a) Os triângulos pretos crescem na sequência $(1, 3, 9, \cdots)$, ou seja, numa PG de razão $q = 3$. Logo, $a_4 = a_1 q^{4-1} = 3^3 = 27$. Assim, a figura 4 terá 27 triângulos pretos. Com relação aos triângulos brancos, temos uma sequência $(0, 1, 4, \cdots)$, no qual podemos observar que, sendo n o número da figura,

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 1 = 0 + 1 = 0 + 3^0 = a_1 + 3^{n-2}$$
$$a_3 = 4 = 1 + 3 = 1 + 3^1 = a_2 + 3^{n-2}$$

Assim, seguindo esse padrão, $a_4 = a_3 + 3^2 = 4 + 3^2 = 13$. Desse modo, a quantidade de triângulos brancos será 13.

b) Como já expressado, os triângulos pretos tem o comportamento de uma PG crescente onde $q = 3$ e $a_1 = 1$. Assim utilizando a fórmula do termo geral da PG, temos

$$a_n = a_1 q^{n-1} = (1)(3^{n-1}) = 3^{n-1}$$

c) Seguindo o raciocínio da letra (a), teremos que o número de triângulos brancos obedece a

$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-2}, \forall n \geq 1$$

d) Observamos que, com um lado l

$$Área\ 1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

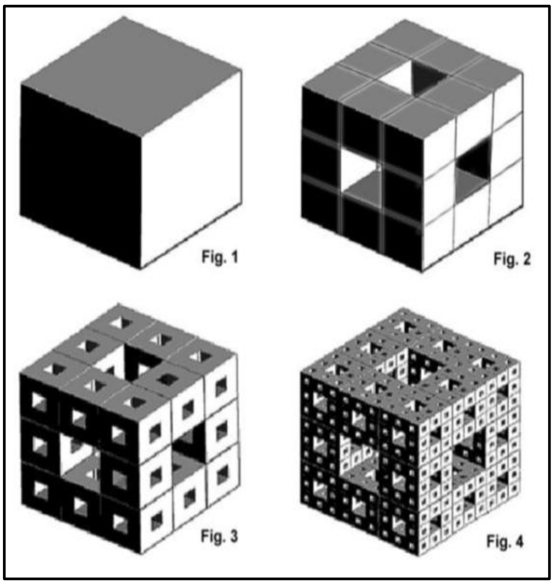
$$Área\ 2 = \left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4}\right).3 = \left(\frac{\frac{l^2}{4}\sqrt{3}}{4}\right).3 = \frac{3l^2}{16}\sqrt{3}$$

$$Área\ 3 = \left(\frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2 \sqrt{3}}{4}\right).9 = \left(\frac{\frac{l^2}{16}\sqrt{3}}{4}\right).9 = \frac{9l^2}{64}\sqrt{3}$$

Podemos verificar que as áreas dos triângulos pretos estão seguindo a sequência $\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \frac{3l^2}{16}\sqrt{3}, \frac{9l^2}{64}\sqrt{3}, \ldots\right)$ o qual é uma PG infinita de razão $\frac{3}{4}$. Assim, a área da enésima figura pode ser descrita como,

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

PROBLEMA 2: A figura construída segundo a sequência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, qual é a área, em m^2 de uma face da figura 30?



RESOLUÇÃO:

1º - Números de quadrados por face do cubo

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 8 = 8a_1$$

$$a_3 = 64 = 8a_2 = 8^2 a_1$$

Ou seja, a sequência de quadrados por face de cada figura está se comportando conforme uma PG de razão oito. Assim, utilizando o termo geral da PG, $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos que a 30ª figura terá:

$$a_{30} = 8^{30-1} = 8^{29}$$

2º - Área de cada quadrado da face do cubo:

$$b_1 = 1^2 = 1$$

$$b_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} b_1$$

$$b_3 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 b_1$$

Dentro desse contexto, podemos identificar que se trata de uma PG de razão $\frac{1}{9}$. Assim para a figura 30 teremos,

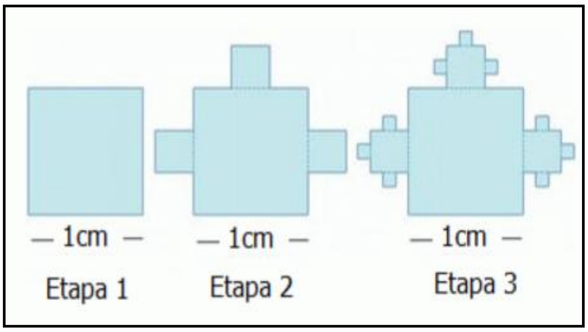
$$b_{30} = 1\left(\frac{1}{9}\right)^{30-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{29}$$

3º - Dessa forma a área da figura 30 será

$$c_{30} = a_{30}.b_{30} = 8^{29}.\left(\frac{1}{9}\right)^{29} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$$

Logo, a figura de número 30 terá como área $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$, ou seja, aproximadamente 0,032853 m^2.

PROBLEMA EXTRACLASSE: A região fractal F, construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é construída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (l) acrescentados na etapa anterior acrescentando-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\frac{1}{3}$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir:



Calcule a área de F. Justifique.

RESOLUÇÃO:

$$Área\ 1 = 1^2 = 1$$

$$Área\ 2 = 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + 3\left(\frac{1}{9}\right) = 1 + \left(\frac{3}{9}\right) = 1 + \frac{1}{3}$$

$$Área\ 3 = 1 + \frac{1}{3} + 9\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} + 9\left(\frac{1}{81}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{9}{81}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

Podemos observar que a área dessa figura se comporta conforme a soma infinita de uma PG de $q = \frac{1}{3}$. Assim, a área de F será dada por

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

APÊNDICE E – PLANEJAMENTOS DOS ENCONTROS

1º ENCONTRO

Objetivos do Encontro: O objetivo destes problemas é abordar conceitos iniciais da Progressão Geométrica, como a razão e a definição de Progressão Geométrica, dentre outros.

Conteúdos Matemáticos abordados no problema: Progressão Geométrica; Padrões.

Problema 1

(WATANABE – 2004) Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro.

E assim disse aos monges: “Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó, e com um estrondo de trovões o mundo acabará.”

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos, na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar?

2º ENCONTRO

Objetivos do Encontro: O objetivo dos problemas deste encontro é trabalhar com o conceito de termos equidistantes da PG.

Conteúdos Matemáticos abordados no problema: Termos Equidistantes da Progressão Geométrica

Problema 1

(UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é?

Problema 2

(UCPEL-2015): Os números reais $n-6, n-4, 2n-11$ são os três primeiros termos consecutivos de uma Progressão Geométrica crescente. O quarto termo dessa Progressão Geométrica é?

Problema extraclasse

(CESGRANRIO - 1988 - Adaptada): Suponha que os números $x, -6, 3x+3$ e $y$estão, nesta ordem, em uma Progressão Geométrica decrescente. Desse modo os valores de x e y são?

<u>*3º ENCONTRO*</u>

Objetivos do Encontro: O objetivo destes problemas é trabalhar a definição e ou conceito do Termo Geral da PG.

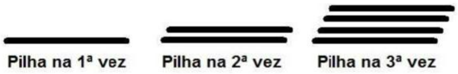
Conteúdos Matemáticos abordados nos problemas: Termo Geral da Progressão Geométrica.

<u>Problema 1</u>

(UEPA - 2002) Um carro, cujo preço à vista é R$24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$4.000,00 e a quarta parcela de R$1.000, 00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

<u>Problema 2</u>

(VUNESP - 2003 - ADAPTADO) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha.



Ao final de nove dessas operações,

a) quantas tábuas terá a pilha;

b) qual será a altura, em metros, da pilha.

c) Após quantos empilhamentos, a altura desta pilha de tábuas será de 20,48 m?

d) Mostre que $\forall n \in N$, a altura da pilha, em cm, é igual à metade da quantidade de tábuas empilhadas?

<u>Problema extraclasse</u>

(UNICAMP-2007) Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210 mm x 297 mm. Considere que uma folha A4 com 0,1 mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número k de dobras feitas.

b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

c) Pesquise e encontre uma justificativa do por que não conseguimos dobrar uma folha A4 mais que 7 vezes.

4º ENCONTRO

Objetivos do Encontro: O intuito destes problemas é reforçar a definição/conceito da soma finita de uma PG.

***Conteúdos Matemáticos abordados nos problemas**:* Termo Geral da Progressão Geométrica; Soma Finita da Progressão Geométrica; Princípio da Indução Matemática.

Problema 1

(OBMEP– 2006 - Adaptada) No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1134 problemas.

a) Quantos problemas o grupo resolveu até o final de janeiro?

b) E em cada mês seguinte?

c) Determine uma generalização para a soma no mês n;

d) Mostre que essa generalização é válida $\forall n \geq 1$.

e) Se o grupo permanecer nesse ritmo de resolução de problemas, ao final do ano de 2006 quantos problemas seriam resolvidos por eles? Seria possível esta quantidade de problemas resolvidos?

Problema 2

(FATEC-1996) Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:

i) perde-se a quantia X apostada;

ii) recebe-se a quantia 2X.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21ª vez, ela ganhou.

Comparando-se a quantia total T por ela desembolsada e a quantia Q recebida na 21ª jogada, tem-se que Q é igual a:

Problema extraclasse

(UNICAMP-2004) Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. Calcule:

a) O tempo necessário para que aquele aluno resolva todas as questões da prova;

b) O número total de questões da referida prova.

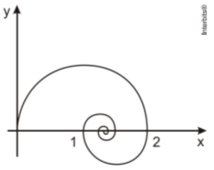
5° ENCONTRO

Objetivos do Encontro: O propósito destes problemas é intensificar a definição e ou conceito da soma Infinita de uma PG.

Conteúdos Matemáticos abordados nos problemas: Soma Infinita da Progressão Geométrica; Propriedades de Geometria; Triângulo Isósceles; Área de Figuras Planas; Trigonometria.

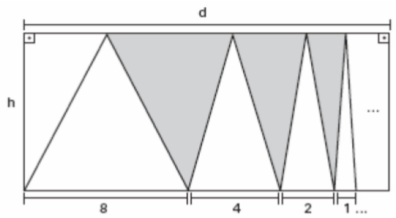
Problema 1

(ESPCEX 2014) Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a



Problema 2

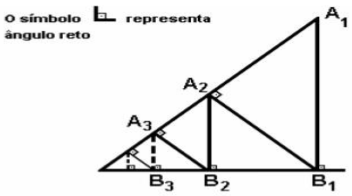
(FGV-2005) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, $8, 4, 2, 1, ...$



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados *h* e *d* é igual a

Problema extraclasse

(FUVEST-1994) Na figura a seguir, $\overline{A_1B_1} = 3, \overline{B_1A_2} = 2$.



Calcule a soma dos infinitos segmentos: $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$

6º ENCONTRO

Objetivos do Encontro: A finalidade da aplicação desses problemas é apresentar e definir a Progressão Geométrica de 2ª Ordem assim como formalizar o termo geral da mesma.

Conteúdos Específicos: Progressão Aritmética de 2ª Ordem; Princípio da Indução Matemática; Progressão Geométrica de segunda ordem.

Problema 1

Caleb era um aluno que adorava descobrir padrões. Numa de suas investigações, notou que a sequência $(1, 2, 8, 64, \ldots)$ possuía um padrão bastante peculiar. Responda:

a) Qual o padrão desta sequência identificado por Caleb?

b) Quais seriam os próximos 3 elementos dessa sequência?

c) Determine uma generalização para o enésimo termo dessa sequência.

d) Mostre que essa generalização é válida $\forall n \in N$.

Problema 2

Determine os próximos três elementos das sequências abaixo:

a) $(-4, -8, -48, -864, \ldots)$

b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 18, -864, \ldots\right)$

c) $\left(1, 5, \frac{75}{2}, \frac{3375}{8}, \ldots\right)$

7º ENCONTRO

Objetivos do Encontro: A finalidade destes problemas é associar a Geometria Fractal com os conceitos da PG.

Conteúdos Matemáticos abordados nos problemas: Geometria Fractal; Soma Infinita da Progressão Geométrica; Termo Geral de uma Progressão Geométrica; Área de Figuras.

Problema 1

(ENEM – 2008 -Adaptada) O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero;
2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos;
4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3.

a) De acordo com o procedimento descrito como podemos representar a figura 4 da sequência apresentada acima?

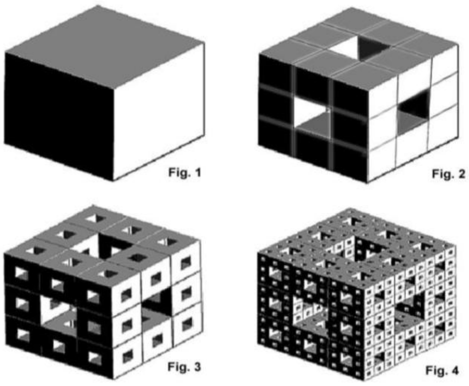
b) Que generalização podemos fazer para determinar a quantidade de triângulos pretos de cada figura?

c) E para os brancos?

d) Se esse procedimento seguir de maneira infinita, que tendência seguirá a área escura da enésima figura?

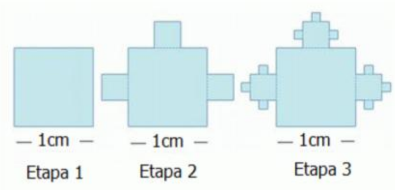
Problema 2

(UEL-2002) A figura construída segundo a sequência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, qual é a área, em m^2 de uma face da figura 30?



Problema extraclasse

(**UFRJ - 2003**) A região fractal F, construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é construída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (l) acrescentados na etapa anterior acrescentando-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\frac{1}{3}$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir:



Calcule a área de F. Justifique.

APÊNDICE F – FORMALIZAÇÕES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

PPGEMEF

FORMALIZAÇÃO - PRIMEIRO ENCONTRO

Toda sequência numérica, não nula, em que o quociente entre um termo, a partir do segundo, e o termo antecedente é constante é chamada de Progressão Geométrica (P.G).

Esta constante é denominada de razão que é representada pela letra q, que se refere à palavra quociente. O primeiro elemento da Progressão Geométrica é chamado de a_1.

A notação da Progressão Geométrica é expressa por $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, \cdots)$.

Denominamos de Progressão Geométrica *finita* toda sequência que explícita seu primeiro (a_1) e o último termo (a_n). Exemplo: $(1, 4, 16, 64, \cdots, 1.048.576)$.

É uma Progressão Geométrica *infinita* quando o último termo da sequência não está explícito. $(3, 6, 12, 24, \cdots, 96, \cdots)$.

A razão de uma Progressão Geométrica é determinada por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Quanto a sua classificação

i) Chamamos de Progressão Geométrica ***crescente*** aquelas sequências numéricas que tenham seus termos positivos e $q > 1$, ou negativos e com $0 < q < 1$.

ii) A Progressão Geométrica é dita ***decrescente*** quando seus termos são positivos e $0 < q < 1$, ou negativos e $q > 1$.

iii) As Progressões Geométricas ***alternantes*** são aquelas que possuem razão negativa, ou seja, $q < 0$.

iv) Quando a razão de uma Progressão Geométrica for igual a um dizemos que ela é ***constante***.

FORMALIZAÇÃO - SEGUNDO ENCONTRO

Definição 1: Dada uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots)$, que seja uma Progressão Geométrica, qualquer termo da sequência corresponde à média geométrica do seu antecessor pelo seu sucessor, ou seja,

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Definição 2: Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, a_{n+1} \cdot, \cdots)$, uma Progressão Geométrica, temos que os termos equidistantes, que estão a uma mesma distância do termo central, possuem o mesmo produto. De maneira geral,

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_{n-2} \cdot a_{n+2} = a_{n-3} \cdot a_{n+3} = a_{n-4} \cdot a_{n+4} = \cdots = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

FORMALIZAÇÃO - TERCEIRO ENCONTRO

Em uma Progressão Geométrica denotada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q, partindo do 1° termo, para avançar um termo, basta multiplicar o 1° termo pela razão q $(a_2 = a_1\, q)$; para avançar dois termos, basta multiplicar o 1° termo pelo quadrado da razão $q (a_3 = a_1 q^2)$; para avançar três termos, basta multiplicar o 1° termo pelo cubo da razão $q (a_4 = a_1 q^3)$; e assim por diante.

Assim, dada uma Progressão Geométrica, com razão q e primeiro termo a_1, o enésimo termo (a_n) dessa sequência é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

FORMALIZAÇÃO - QUARTO ENCONTRO

A soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$, com q diferente de um, é dada por:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

FORMALIZAÇÃO – QUINTO ENCONTRO

O limite da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita de razão q, com $-1 < q < 1$, pode ser calculado por meio de

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Caso a razão q seja ≥ 1 ou ≤ 1, não é possível calcular a soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita.

FORMALIZAÇÃO – SEXTO ENCONTRO

Chamamos de Progressão Geométrica de Segunda Ordem, uma sequência (b_n) na qual a sucessão dos quocientes $\nabla b_n = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ é uma Progressão Geométrica de Primeira Ordem.

Seja $(b_1;\, b_2;\, \cdots; b_n)$ uma Progressão Geométrica de Primeira Ordem e $(a_1;\, a_2;\, \cdots; a_n)$ uma Progressão Geométrica de Segunda Ordem. Definimos como termo geral da Progressão Geométrica de Segunda Ordem, a equação:

$$a_n = a_1 b_1^{\binom{n-1}{1}} q^{\binom{n-1}{2}}$$

na qual $q_1 = b_1$ e $q_2 = q$ é a razão da progressão de primeira ordem.

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO FINAL

Este questionário faz parte da coleta de dados da pesquisa "PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA".

Responda com o máximo de honestidade.

1) Cite aspectos que você considera como positivos em relação à **sua participação** no projeto "Progressões Geométricas através da Resolução de Problemas: contribuições ao licenciando em Matemática"

____
____
____

2) Cite aspectos que você considera como negativos em relação à **sua participação** no projeto "Progressões Geométricas através da Resolução de Problemas: contribuições ao licenciando em Matemática"

____
____
____

3) Qual a sua opinião sobre a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula? Considera uma alternativa de ensino que pode ser utilizada por você em sua prática docente?

____
____
____

4) Você considera que o trabalho colaborativo e cooperativo desenvolvido nesta metodologia de ensino na forma de grupos de trabalho é positivo? Facilita a compreensão dos conteúdos?

____
____
____

5) Você considera difícil trabalhar com problemas? (   ) Sim   (   ) Não
Justifique:

____
____
____

6) Que pontos positivos você destaca na **atuação dos pesquisadores** durante a pesquisa?

7) Que pontos negativos você observou, durante a pesquisa, perante a **atuação dos pesquisadores**?

8) Que contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas lhe proporcionou no ensino da Progressão Geométrica?

9) Que dificuldades você teve ao trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas nos problemas de Progressão Geométrica?

10) A participação nessa pesquisa foi importante para sua formação acadêmica? Por quê?

APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo "PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA"

Pesquisador responsável: Prof.ª Drª Fabiane Cristina Höpner Noguti

Instituição/Departamento: Departamento de Matemática do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), UFSM.

Telefone e endereço postal completo: (55)32208136. Avenida Roraima, 1000, prédio 13, sala 1228-B, 97105-900 - Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

Eu, Matheus Metz Correa, responsável pela pesquisa PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA, o convidamos para participar como voluntário deste nosso estudo.

Esta pesquisa, tem como objetivo geral investigar as contribuições na aprendizagem de licenciandos em Matemática ao utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no ensino da Progressão Geométrica. Acreditamos que este estudo se justifica por que tanto a Metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas quanto a Progressão Geométrica ainda são pouco exploradas, em concomitância, no âmbito do Ensino Superior.

No transcorrer da pesquisa será aplicada uma sequência de atividades para o ensino dos conceitos da Progressão Geométrica num período de seis encontros durante as aulas da Disciplina Complementar de Graduação (DCG) intitulada de Resolução de Problemas, com duração de 120 minutos cada. O estudo será realizado com estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do turno Noturno da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Sua participação constará por colaborar na realização de uma sequência de atividades propostas que terá o intuito de analisar suas dificuldades encontradas durante o processo desta metodologia e verificar quais contribuições ela lhe propiciou no âmbito de ensino e aprendizagem da Matemática, em especial da Progressão Geométrica, visando contribuir com sugestões e estratégias de ensino, para sua futura prática docente, capazes de romper com a memorização de fórmulas no ensino da Progressão Geométrica nas escolas que pouco contribui para a formação de nossos alunos.

Quanto aos possíveis riscos que se podem fazer presentes na pesquisa, citam-se: algum tipo de constrangimento ou timidez ao responder as atividades propostas e os questionamentos dos pesquisadores no decorrer da experiência didática. Caso isso ocorra, lhe é reservado o direito para não responder, assim como se desvincular da pesquisa em qualquer momento, sem ônus na avaliação final da disciplina.

Não haverá pagamento de qualquer espécie e nem despesas pela participação na pesquisa. Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa, tais como os materiais utilizados serão assumidos pelos pesquisadores e a identidade de todos os participantes permanecerá em sigilo, mesmo quando os resultados deste estudo forem divulgados na dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física - PPGEMEF, em revistas especializadas, congressos e simpósios.

A participação neste estudo é livre e voluntária, podendo o participante desistir de participar em qualquer momento da pesquisa, sem ônus ou penalização. Qualquer dúvida durante a realização da pesquisa, você terá acesso aos profissionais responsáveis para esclarecimentos.

Autorização

Eu,____,
após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com os pesquisadores responsáveis, para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro para que minha participação é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

Santa Maria, ______ de ___________ de 2019.

____

Assinatura do voluntário

____

Profª Drª Fabiane Cristina Höpner Noguti

ESCLARECIMENTO: Caso exista dúvida quanto a sua participação entrar em contato com a Prof.ª Drª Fabiane Cristina Höpner Noguti pelo telefone (55)32208136.

____

Matheus Metz Correa