

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Caio Ruviaro Dantas Osório**

**CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES  
ROBUSTOS A VARIAÇÕES PARAMÉTRICAS APLICADOS  
A CONVERSORES CONECTADOS À REDE**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2021**



Caio Ruviaro Dantas Osório

**CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS A  
VARIAÇÕES PARAMÉTRICAS APLICADOS A CONVERSORES  
CONECTADOS À REDE**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Processamento de Energia Elétrica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica.**

**Orientador: Prof. Dr. Vinícius Foletto Montagner**

Santa Maria, RS, Brasil

2021

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Osório, Caio Ruviano Dantas

Contribuições ao Projeto de Controladores Robustos a Variações Paramétricas aplicados a Conversores Conectados à Rede / Caio Ruviano Dantas Osório - 2021

167 p.; 30 cm

Orientador: Vinícius Foletto Montagner

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, RS, 2021

1. Engenharia Elétrica 2. Conversores Conectados à Rede 3. Controladores Robustos 4. Análise de Estabilidade 5. Variação Paramétrica I. Montagner, Vinícius Foletto. II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor. Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, CAIO RUVIARO DANTAS OSÓRIO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Tese) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.



Caio Ruviaro Dantas Osório

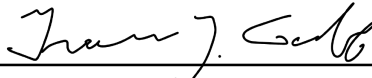
**CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS A  
VARIÇÕES PARAMÉTRICAS APLICADOS A CONVERSORES  
CONECTADOS À REDE**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Processamento de Energia Elétrica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica.**

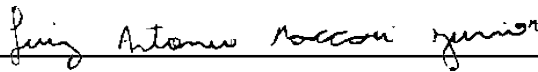
**Aprovado em 12 de Maio de 2021:**



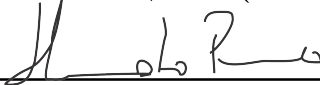
**Vinicius Foletto Montagner, Dr. (UFSM) - Videoconferência**  
(Presidente/ Orientador)




**Ivan Jorge Gabe, Dr. (IFRS) - Videoconferência**



**Luiz Antonio Maccari Jr., Dr. (UFSC) - Videoconferência**



**Humberto Pinheiro, Ph.D. (UFSM) - Videoconferência**



**Rodrigo Padilha Vieira, Dr. (UFSM) - Videoconferência**

Santa Maria, RS, Brasil

2021



## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Rosana Ruviaro Dantas e Edison Vanini Osório, por todo o amor, ensinamentos e pela educação que deles recebi. As minhas conquistas são possíveis pois sempre me incentivaram a fazer o que acreditava, e se esforçaram para me propiciar todos os meios necessários para o desenvolvimento de minhas aspirações. Espero que um dia possam olhar para o caminho construído por minhas escolhas e ter a certeza de que o trilhei com consciência, hombridade, força de vontade e todas as outras qualidades morais que me foram transmitidas por eles através do exemplo.

A toda a minha família e amigos, pelo amor e carinho.

Agradeço ao Professor Vinícius Foletto Montagner, pela excelente orientação e confiança depositada ao longo do doutorado, bem como por sempre estar disponível e disposto a colaborar em diferentes temas. Aos demais professores do Grupo de Eletrônica de Potência e Controle, pelo incentivo e conhecimentos compartilhados durante o desenvolvimento desta Tese.

Aos meus colegas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, pela boa convivência ao longo destes anos, troca de conhecimentos técnicos e trabalho colaborativo. A amizade de vocês foi fundamental para manter alma e mente saudáveis.

Aos colegas e professores da Universidad de Oviedo e do grupo LEMUR, pela confiança, contribuições técnicas e pelo companheirismo e amizade durante o período de Doutorado sanduíche.

À Universidade Federal de Santa Maria e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, por propiciar a oportunidade de acesso ao curso de pós-graduação de qualidade. Ao Grupo de Eletrônica de Potência e Controle, por fornecer um excelente ambiente de trabalho e recursos essenciais ao desenvolvimento desta Tese. À CAPES e ao programa CAPES-PrInt, pelo suporte financeiro.

A todas as demais pessoas, amigos e familiares que colaboraram de alguma forma com este trabalho e com esta etapa da minha formação, muito obrigado.



“

Caminhante, são tuas pegadas  
o caminho e nada mais;  
Caminhante, não há caminho,  
faz-se caminho ao andar.

”

**Antonio Machado**



## RESUMO

# CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS A VARIAÇÕES PARAMÉTRICAS APLICADOS A CONVERSORES CONECTADOS À REDE

AUTOR: CAIO RUVIARO DANTAS OSÓRIO  
ORIENTADOR: VINÍCIUS FOLETTO MONTAGNER

Este trabalho apresenta contribuições ao projeto de controladores robustos de corrente para conversores conectados à rede, incluindo: i) uma modelagem variante no tempo para tratar a saturação magnética suave nos indutores do filtro e a possível variação da impedância da rede; ii) procedimentos sistemáticos para o projeto dos ganhos de controladores por realimentação de estados que sejam robustos à saturação magnética, obtidos utilizando desigualdades matriciais lineares; iii) uma otimização do desempenho de controladores por alocação de polos robusta a incertezas na impedância de rede, levando em consideração uma relação de compromisso entre desempenho transitório e esforço de controle. Para o projeto de controladores robustos, a planta é modelada de forma politópica, no domínio do tempo discreto, incluindo o atraso referente à implementação digital do controlador. Também são incluídos controladores ressonantes de dimensão arbitrária para garantir rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos provenientes, por exemplo, da tensão da rede elétrica. Na sequência, duas estratégias baseadas em desigualdades matriciais lineares (alocação robusta de polos e custo garantido  $\mathcal{H}_2$ ) são utilizadas para a obtenção de ganhos robustos de realimentação de estados. Estes ganhos são implementados na prática em um processador digital de sinais, levando a resultados de simulação em tempo real baseados em *hardware-in-the-loop* e a resultados experimentais baseados em protótipo físico que exibem boa qualidade em transitórios e em regime permanente. As correntes injetadas na rede atendem a requisitos da norma IEEE 1547, no caso de saturação magnética suave dos indutores do filtro, e também no caso de incertezas e possível variação na impedância de rede.

**Palavras-chave:** Controle robusto, conversores conectados à rede, desigualdades matriciais lineares, incertezas paramétricas, otimização, saturação magnética.





## ABSTRACT

# CONTRIBUTIONS TO THE DESIGN OF ROBUST CONTROLLERS AGAINST PARAMETRIC VARIATIONS APPLIED TO GRID-CONNECTED CONVERTERS

AUTHOR: CAIO RUVIARO DANTAS OSÓRIO

ADVISOR: VINÍCIUS FOLETTO MONTAGNER

This Ph.D. thesis provides contributions to the design of robust current controllers for grid-connected converters, including: i) a time-varying model to deal with the magnetic soft saturation in the filter inductors and the possible variation of the grid impedance; ii) systematic procedures to design the gains of state feedback controllers robust against magnetic soft saturation, obtained by means of linear matrix inequalities; iii) an optimization of the performance of controllers by means of pole location robust against uncertainties in the grid impedance, taking into account a trade-off between transient performance and control effort. For the design of the robust controllers, the plant is modeled in a polytopic way, in the discrete time domain, including the delay due to the digital implementation of the controller. An arbitrary number of resonant controllers are also included to ensure tracking of sinusoidal references and rejection of harmonic disturbances from the grid voltages, for instance. In the sequence, two strategies based on linear matrix inequalities (robust pole location and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost) are used to obtain robust state feedback gains. These gains are implemented in practice in a digital signal processor, leading to real-time simulation results based on hardware-in-the-loop and also on experimental results based on a prototype which exhibit high quality transient and steady state performances. The currents injected into the grid meet the requirements of the IEEE 1547 Standard, in the case of magnetic soft saturation of the filter inductors, and also in the case of uncertain and possibly time-varying grid impedances.

**Keywords:** Robust control, grid-connected converters, linear matrix inequalities, parametric uncertainties, optimization, magnetic saturation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	– Conversor trifásico conectado à rede por meio de filtro LCL.....	35
Figura 2.2	– Circuito para análise das correntes do lado do conversor.....	36
Figura 2.3	– Circuito para análise das correntes do lado da rede.....	40
Figura 2.4	– Representação do sistema em coordenadas estacionárias, para o caso sem saturação magnética: a) eixo $\alpha$ ; b) eixo $\beta$ . ....	47
Figura 3.1	– Exemplo comparativo de curvas de indutância <i>versus</i> corrente para indutores com núcleo de ferrite e núcleos compostos por pó de materiais magnéticos ( <i>powder cores</i> ). ....	50
Figura 3.2	– Estudo de caso 1 - característica de saturação suave do indutor do lado do conversor: a) indutância $\times$ corrente; b) indutâncias por fase $\times$ tempo. ....	52
Figura 3.3	– Estudo de caso 1 - característica de saturação suave do indutor do lado da rede: a) indutância $\times$ corrente; b) indutâncias por fase $\times$ tempo. ....	52
Figura 3.4	– Estudo de caso 2 - característica de saturação suave do indutor do lado do conversor: a) indutância $\times$ corrente; b) indutâncias por fase $\times$ tempo. ....	53
Figura 3.5	– Estudo de caso 2 - característica de saturação suave do indutor do lado da rede: a) indutância $\times$ corrente; b) indutâncias por fase $\times$ tempo. ....	54
Figura 3.6	– Autovalores de malha fechada com ganho (3.34), projetado para $L_{gmin} = 2,5$ mH: a) varredura em $L_g \in [2,5 \ 7, 5]$ mH, desprezando a saturação magnética; b) varredura em $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$ mH, para $L_{f2}$ nominal e $L_{gmin}$ . ....	62
Figura 3.7	– Autovalores de malha fechada com ganho (3.34), projetado para $L_{gmin} = 2,5$ mH: varredura em $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$ mH, $L_{f2} \in [18 \ 48 \ \mu]H$ e $L_g \in [2,5 \ 7, 5]$ mH. ....	62
Figura 3.8	– Autovalores de malha fechada com ganho (3.35), projetado para $L_{gmax} = 7.5$ mH: a) varredura em $L_g \in [2,5 \ 7, 5]$ mH, desprezando a saturação magnética; b) varredura em $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$ mH, para $L_{f2}$ nominal e $L_{gmax}$ . ....	63
Figura 3.9	– Autovalores de malha fechada com ganho (3.35), projetado para $L_{gmax} = 7.5$ mH: varredura em $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$ mH, $L_{f2} \in [18 \ 48 \ \mu]H$ e $L_g \in [2,5 \ 7, 5]$ mH. ....	64
Figura 3.10	– Resultados de simulação com ganhos (3.34), para sistema operando com indutância de rede nominal, $L_g = 2,5$ mH: (a) correntes de rede em eixos estacionários; (b) ações de controle e correntes de rede trifásicas. ....	65
Figura 3.11	– Ensaio de rastreamento para aumento gradativo nas referências de corrente com ganhos (3.34) e operação com indutância de rede nominal, $L_g = 2,5$ mH: (a) indutores sob efeito da saturação suave; (b) indutores lineares. ....	67
Figura 3.12	– Resultados de simulação com ganhos (3.34), para sistema operando com indutância de rede $L_g = 7,5$ mH: (a) correntes de rede em eixos estacionários; (b) ações de controle e correntes de rede trifásicas. ...	68
Figura 4.1	– Estrutura de controle em coordenadas $\alpha$ e $\beta$ . ....	76
Figura 4.2	– Bancada para simulações em tempo real utilizando HIL. ....	79
Figura 4.3	– Correntes trifásicas com controlador PR, considerando: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave. ....	80

Figura 4.4	– Correntes trifásicas com controlador PI, considerando: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave. ....	81
Figura 4.5	– Correntes trifásicas com controlador robusto projetado considerando apenas incertezas em $L_g$ . Sistema testado com: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave. ....	82
Figura 4.6	– Autovalores de malha fechada com o controlador robusto projetado considerando apenas incertezas em $L_g$ , para: a) varredura em $L_g$ com indutâncias de filtro nominais, sem efeito da saturação; b) varreduras independentes em $L_g$ e nas indutâncias do filtro, considerando saturação suave. ....	83
Figura 4.7	– Autovalores de malha fechada com controlador robusto (4.26). ....	84
Figura 4.8	– Correntes trifásicas injetadas na rede, em regime permanente, com o ganho (4.26), implementada sob o efeito da saturação dos indutores do filtro e rede com tensão distorcida: a) rede com $L_{gmin}$ , b) rede com $L_{gmax}$ . ....	85
Figura 4.9	– Espectro harmônico e limites da norma IEEE 1547, para as correntes na Figure 4.8: a) $L_{gmin}$ (THD=2,22%); b) $L_{gmax}$ (THD=3,29%). ...	85
Figura 4.10	– Correntes injetadas na rede em coordenadas $\alpha\beta$ com ganhos (4.26), para variações de amplitude considerando rede com $L_{gmin}$ . ....	86
Figura 4.11	– Correntes injetadas na rede em coordenadas $\alpha\beta$ com ganhos (4.26), para variações de amplitude considerando rede com $L_{gmax}$ . ....	86
Figura 4.12	– Correntes trifásicas injetadas na rede com o ganho (4.26), para variações de referência considerando: a) rede com $L_{gmin}$ ; b) rede com $L_{gmax}$ . ....	87
Figura 4.13	– a) Ações de controle referente ao testes nas Figuras 4.10 e 4.11: a) rede com $L_{gmin}$ ; b) rede com $L_{gmax}$ . ....	87
Figura 4.14	– Autovalores de malha fechada para uma varredura nos parâmetros variantes no tempo, com controlador robusto (4.27). ....	88
Figura 4.15	– Protótipo para resultados experimentais: a) controle b) circuito de potência. ....	89
Figura 4.16	– Correntes trifásicas com o ganho robusto (4.27), para variações na amplitude da referência. ....	90
Figura 4.17	– Correntes de eixo $\alpha$ para resultados em HIL e no protótipo, com ganho robusto (4.27): a) partida do sistema; b) aumento na referência de corrente. ....	90
Figura 4.18	– a) Correntes trifásicas em regime permanente, com o ganho (4.27), implementada sob o efeito da saturação dos indutores do filtro (THD=1,57%). b) Espectro harmônico e limites da norma IEEE 1547. ....	91
Figura 4.19	– Correntes de rede trifásicas referentes ao ensaio de variação de referência, para sistema operando com controlador (4.27): (a) partida do conversor, injetando potência reativa capacitiva; (b) variação de fase para injeção de potência reativa indutiva; (c) variação de fase para injeção de potência ativa; (d) variação de amplitude. ....	92
Figura 4.20	– Resultados experimentais, em eixos estacionários, para teste de variações de referência mostrado na Figura 4.19. ....	92
Figura 4.21	– Correntes trifásicas obtidas experimentalmente para um ensaio de variação paramétrica abrupta. ....	93
Figura 5.1	– (a) Padrão de referência de corrente para cômputo do ITSE; (b) valores de ITSE avaliados para o sistema em malha fechada com controladores projetos utilizando diferentes valores de $\mu$ . ....	100
Figura 5.2	– Diagrama de blocos do procedimento proposto para o cálculo dos controladores $\mathcal{H}_2$ . ....	101

Figura 5.3	– Valores de ITSE avaliados para o sistema em malha fechada com controladores projetos utilizando diferentes valores de $\mu$ . . . . .	102
Figura 5.4	– Autovalores de malha fechada para uma varredura nos parâmetros variantes no tempo, com controlador robusto (5.18). . . . .	102
Figura 5.5	– Magnitudes das respostas em frequência, em dB, para o sistema em malha fechada com ganhos $\mathbf{K}$ em (5.18): respostas de $u$ para $i_g$ . . .	103
Figura 5.6	– (a) Correntes experimentais trifásicas em regime permanente; (b) Análise harmônica para cada uma das fases: canal 1 (THD=2,98%), canal 2 (THD=2,8%) e canal 3 (THD=2,84%). . . . .	104
Figura 5.7	– Resultados experimentais, em eixos estacionários, para teste de variações de referência: (a) correntes nos eixos $\alpha$ e $\beta$ ; (b) respectivos sinais de controle. . . . .	105
Figura 5.8	– Correntes de rede trifásicas referentes ao ensaio de variação de referência mostrado na Figura 5.7, representando: (a) partida do conversor, injetando potência reativa capacitiva; (b) variação de fase para injeção de potência reativa indutiva; (c) variação de fase para injeção de potência ativa; (d) variação de amplitude. . . . .	106
Figura 5.9	– Correntes trifásicas obtidas experimentalmente para um ensaio de variação paramétrica abrupta, implementada no centro da figura. . .	106
Figura 6.1	– Inversor monofásico conectado à rede por meio de filtro L. . . . .	110
Figura 6.2	– Controlador <i>deadbeat</i> convencional em condições nominais. (a) Resposta no tempo. (b) Desempenho transitório avaliado a partir do erro de rastreamento de corrente. . . . .	113
Figura 6.3	– Controlador <i>deadbeat</i> convencional. (a) Polos de malha fechada. (b) Resposta instável para o caso $R = 0,2 \Omega$ e $L = 8 \text{ mH}$ e referência senoidal. . . . .	113
Figura 6.4	– Região para alocação de polos do controlador robusto <i>quasi-deadbeat</i> . . . . .	115
Figura 6.5	– Superfície que descreve o raio mínimo obtido com base no Teorema 1, para diversos casos de incertezas paramétricas em $R$ e $L$ . . . . .	116
Figura 6.6	– Análises para os parâmetros da Tabela 6.1: (a) tempo de acomodação do transitório em função do raio dado por (6.21); (b) ganhos do controlador em função do raio; (c) curvas (a) e (b) normalizadas para análise de <i>tradeoff</i> . . . . .	117
Figura 6.7	– Polos do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos em (6.23), para variação paramétrica considerando os intervalos apresentados na Tabela 6.1. . . . .	118
Figura 6.8	– Respostas do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos (6.23). . . . .	119
Figura 6.9	– Diagramas de Bode do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos (6.23): (a) da referência para a saída; (b) do distúrbio para a saída. . . . .	119
Figura 6.10	– Tensão da rede $v_g$ e corrente de rede $i_g$ para $L = 2 \text{ mH}$ e $R = 0,1 \Omega$ , para partida com o controlador subótimo e comutação para o controlador ótimo. . . . .	120
Figura 6.11	– Sinais de controle para: (a) controlador subótimo (b) controlador ótimo. . . . .	121
Figura 6.12	– Resultados do HIL: tensão da rede $v_g$ , corrente injetada $i_g$ na rede e tensão no ponto de conexão $v_{pcc}$ para $L = 2 \text{ mH}$ e $R = 0,1 \Omega$ , com o controlador robusto com ganhos em (6.23). . . . .	121

Figura 6.13 – Resultados do HIL para o controlador robusto em (6.23). Referência (linha tracejada) e corrente $i_g$ injetada na rede (linha contínua) para $L = 2$ mH. (a) Resposta transitória e em regime permanente. (b) Erro de rastreamento. ....	122
Figura 6.14 – Resultados do HIL para o controlador robusto em (6.23). Referência (linha tracejada) e corrente $i_g$ injetada na rede (linha contínua) para $L = 8$ mH. (a) Resposta transitória e em regime permanente. (b) Erro de rastreamento. ....	122
Figura 6.15 – Resultado do HIL para o controlador robusto com ganhos em (6.23) frente a comutação de indutância durante a operação. (a) Variação de 8 mH para 2 mH. (b) Variação de 2 mH para 8 mH. ....	123
Figura 6.16 – Resultados do HIL para o controlador robusto com ganhos em (6.23), para variação da corrente de referência de 5 A para 10 A e, posteriormente, de 10 A para 20 A, com indutância nominal ( $L = 5$ mH)..	123
Figura 6.17 – Análise harmônica da corrente injetada na rede nas Figuras 6.13(a) e 6.14(a) e comparação com os limites da norma IEEE 1547. THD = 4,75% para $L = 2$ mH e THD = 3,05% para $L = 8$ mH. ....	124
Figura 6.18 – Procedimento de projeto. ....	125
Figura 6.19 – Análise do sistema em malha fechada com o controlador robusto com ganhos em (6.24). (a) Relação entre $\ \mathbf{K}\ $ e $t_{acom}$ em função do raio de alocação de polos. (b) Polos de malha fechada para incerteza de $\pm 10\%$ em $L$ e $R$ . ....	126
Figura 6.20 – Resultados do HIL para resposta do sistema em malha fechada com o controlador robusto com ganhos (6.24). (a) Corrente injetada na rede. (b) Detalhamento do transitório de partida da corrente injetada na rede. ....	126
Figura A.1 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em $i_{1\alpha}$ e $i_{1\beta}$ a partir dos estados. ....	151
Figura A.2 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em $i_{1\alpha}$ e $i_{1\beta}$ a partir da entrada de controle. ....	151
Figura A.3 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em $i_{g\alpha}$ e $i_{g\beta}$ a partir dos estados. ....	152
Figura A.4 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em $i_{g\alpha}$ e $i_{g\beta}$ a partir da entrada de distúrbio. ....	152
Figura A.5 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em $i_{1\alpha}$ e $i_{1\beta}$ a partir dos estados. ....	153
Figura A.6 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em $i_{1\alpha}$ e $i_{1\beta}$ a partir da entrada de controle. ....	153
Figura A.7 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em $i_{g\alpha}$ e $i_{g\beta}$ a partir dos estados. ....	153
Figura A.8 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em $i_{g\alpha}$ e $i_{g\beta}$ a partir da entrada de distúrbio. ....	154
Figura C.1 – Visão geral do protótipo: (a) indutores para ensaios de variação paramétrica, (b) inversor e filtro LCL, (c) fonte de alimentação CC e (d) VARIAC para conexão com a rede elétrica. ....	165
Figura C.2 – Vista frontal do sistema na Figura C.1(b). (a) microcontrolador/DSP, (b) circuitos para aquisição das medidas de tensão, (c) circuito para aquisição das medidas de corrente. ....	166
Figura C.3 – Vista posterior do sistema na Figura C.1(b). (a) inversor trifásico, (b) filtro LCL. ....	166

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Estudo de caso 1: parâmetros do sistema. ....	51
Tabela 3.2 – Estudo de caso 1: parâmetros dos indutores do filtro. ....	51
Tabela 3.3 – Estudo de caso 2: parâmetros do sistema. ....	53
Tabela 3.4 – Estudo de caso 2: parâmetros dos indutores do filtro. ....	53
Tabela 6.1 – Parâmetros do Sistema. ....	112
Tabela C.1 – Parâmetros do protótipo. ....	167





## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DSP	Processador de sinais digitais (do inglês, <i>digital signal processor</i> )
GCC	Conversor conectado à rede (do inglês, <i>grid-connected converter</i> )
HIL	<i>Hardware-in-the-loop</i>
LMIs	Desigualdades matriciais lineares (do inglês, <i>linear matrix inequalities</i> )
LPV	Linear com parâmetros variantes no tempo (do inglês, <i>linear parameter-varying</i> )
MPC	Controle preditivo baseado em modelo (do inglês, <i>model predictive control</i> )
PWM	Modulação por largura de pulso (do inglês, <i>pulse-width modulation</i> )
PCC	Ponto de conexão comum (do inglês, <i>point of common coupling</i> )
PI	Controlador proporcional-integral
PR	Controlador proporcional-ressonante
THD	Distorção harmônica total (do inglês, <i>total harmonic distortion</i> )



## LISTA DE APÊNDICES E ANEXOS

Apêndice A – Análise do Acoplamento .....	149
Apêndice B – Projeto de Controladores por meio de LMIs .....	155
Apêndice C – Descrição e Parâmetros do Protótipo .....	165



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	25
1.1 MOTIVAÇÃO .....	25
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	27
1.3 OBJETIVOS E PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE .....	33
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	34
<b>2 MODELAGEM DO INVERSOR TRIFÁSICO, FILTRO LCL E REDE</b> .....	35
2.1 MODELO EM COORDENADAS <i>abc</i> CONSIDERANDO SATURAÇÃO DOS INDUTORES DO FILTRO .....	35
2.1.1 Correntes do lado do conversor .....	36
2.1.2 Correntes do lado da rede .....	40
2.1.3 Tensões nos capacitores .....	41
2.1.4 Representação variante no tempo, em espaço de estados .....	42
2.1.5 Particularização do modelo para o caso sem saturação magnética ..	43
2.2 MODELO EM COORDENADAS ESTACIONÁRIAS .....	44
2.2.1 Particularização do modelo em coordenadas estacionárias para o caso sem saturação magnética .....	47
2.3 CONCLUSÃO .....	48
<b>3 ESTUDOS DE CASO E PROJETO NOMINAL</b> .....	49
3.1 EFEITO DA SATURAÇÃO SUAVE EM INDUTORES: ESTUDOS DE CASO .....	49
3.1.1 Estudo de caso 1 .....	50
3.1.2 Estudo de caso 2 .....	52
3.2 MODELO NOMINAL AUMENTADO EM TEMPO DISCRETO .....	54
3.3 PROJETO ANALÍTICO BASEADO EM PARÂMETROS NOMINAIS .....	57
3.3.1 Procedimento de projeto baseado em parâmetros nominais .....	59
3.4 PROJETO NOMINAL APLICADO AO ESTUDO DE CASO 1 .....	60
3.4.1 Análise de autovalores .....	61
3.4.2 Simulações no tempo .....	64
3.5 CONCLUSÕES .....	66
<b>4 CONTROLADORES ROBUSTOS SOB SATURAÇÃO MAGNÉTICA</b> .....	71
4.1 MODELO VARIANTE NO TEMPO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	71
4.1.1 Definição do problema .....	73
4.2 PROCEDIMENTO DE PROJETO PROPOSTO .....	73
4.2.1 Modelo polotópico variante no tempo .....	73
4.2.2 Projeto do controlador robusto .....	75

---

4.2.3 Certificação de estabilidade robusta .....	76
4.3 ESTUDO DE CASO 1: RESULTADOS DE SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL .....	78
4.3.1 Efeitos da saturação suave em controladores convencionais .....	79
4.3.2 Limitação de outros controladores robustos .....	81
4.3.3 Resultados com o controlador proposto .....	83
4.4 ESTUDO DE CASO 2: RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM PROTÓTIPO .....	88
4.5 CONCLUSÕES .....	93
<b>5 CONTROLADOR <math>\mathcal{H}_2</math></b> .....	<b>95</b>
5.1 INTRODUÇÃO .....	95
5.2 MODELO POLITÓPICO COM INCLUSÃO DO DISTÚRPIO NO CONTROLE .....	95
5.3 PROJETO DE CONTROLADORES $\mathcal{H}_2$ .....	97
5.3.1 Procedimento proposto para viabilizar os controladores $\mathcal{H}_2$ .....	98
5.4 APLICAÇÃO AO ESTUDO DE CASO 2 .....	100
5.5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	103
5.6 CONCLUSÕES .....	107
<b>6 OTIMIZAÇÃO DA ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS</b> .....	<b>109</b>
6.1 MODELAGEM E PARÂMETROS DO SISTEMA .....	109
6.2 CONTROLE <i>Deadbeat</i> CONVENCIONAL .....	112
6.3 CONTROLE ROBUSTO <i>Quasi-Deadbeat</i> E RELAXAÇÕES .....	114
6.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL .....	120
6.5 PROCEDIMENTO DE PROJETO E ESTUDO DE CASO ILUSTRATIVO .....	124
6.6 CONCLUSÕES .....	126
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>129</b>
7.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	129
7.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS .....	131
7.3 PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA .....	132
7.3.1 Publicações diretamente relacionadas à Tese .....	132
7.3.2 Outros artigos publicados em periódicos .....	132
7.3.3 Capítulos de livro .....	133
7.3.4 Trabalhos completos publicados em anais de congressos .....	134
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>137</b>
<b>APÊNDICES</b> .....	<b>147</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Uma preocupação crescente em nível mundial é garantir a qualidade e continuidade do fornecimento de energia elétrica, de modo a atender à demanda com segurança, confiabilidade e a um custo razoável. Para atingir estes objetivos, é necessário que a matriz energética de um determinado sistema elétrico seja capaz de atender à demanda em todos os momentos, e que o sistema seja resiliente para suportar mudanças repentinas nas condições de uma ou outra fonte (REN21, 2018).

Neste contexto, a crescente penetração de fontes renováveis na geração de energia elétrica é uma realidade, e está impulsionando uma transformação no setor elétrico, especialmente desde que muitos países têm observado um rápido declínio nos custos de geração a partir destas fontes (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011; KJAER; PEDERSEN; BLAABJERG, 2005; BLAABJERG; MA, 2013). Ao final de 2019, a capacidade instalada de energia renovável foi suficiente para fornecer cerca de 27,3% da geração global de eletricidade. A energia hidroelétrica ainda representou a maioria (58%) dessa parcela estimada de geração, seguida pela energia eólica (22%) e solar fotovoltaica (10%). Para exemplificar quão significativo foi o crescimento da participação das energias renováveis na geração de eletricidade na década de 2009-2019, destacam-se alguns países europeus, como a Dinamarca (39% para 77%), a Alemanha (16% para 42%) e o Reino Unido (8% para 38%) (REN21, 2020). Além disso, o número de cidades em que ao menos 70% do fornecimento dá-se por meio de energias renováveis mais que dobrou entre 2015 e 2017, incluindo, por exemplo, a cidade de Brasília. Entretanto, embora o desenvolvimento e a inserção de energias renováveis sejam promissores, continuam a enfrentar desafios para alcançar uma parcela maior da geração global de eletricidade, em parte devido ao investimento persistente na geração baseada em combustíveis fósseis e energia nuclear. Em adição, o forte crescimento econômico global tem levado a um aumento contínuo na demanda. Por exemplo, em 2017, o aumento da demanda foi estimado em 2,1%, o que representa mais que o dobro do crescimento médio nos cinco anos anteriores. Por conseguinte, as emissões de dióxido de carbono relacionadas à geração de energia aumentaram (cerca de 1,4%) pela primeira vez em quatro anos (REN21, 2018).

Neste sentido, a emissão de gases provenientes da queima de combustíveis fósseis tem sido tema de inúmeros debates e pesquisas em nível mundial. Tal preocupação deve-se tanto à limitação das reservas destes combustíveis quanto aos efeitos nocivos causados ao ambiente e população com a combustão dos mesmos. Com isso, várias pesquisas relacionadas à melhoria da eficiência energética de processos, utilização de recursos renováveis

para geração de energia e redução de gases têm sido amplamente divulgadas nos últimos anos e incentivada em muitos países (BLAABJERG et al., 2006; ATWA et al., 2010; BLAABJERG et al., 2017).

No Brasil, a partir dos dados apresentados no Anuário Estatístico de Energia Elétrica pela (Empresa de Pesquisa Energética, 2015), é possível verificar que no quinquênio 2010-2014 a população aumentou, em média, 0,9% ao ano, enquanto o consumo de energia elétrica per capita apresentou um crescimento médio de 2,5% ao ano no mesmo período. Por outro lado, considerando a situação econômica e política do País entre 2014 e 2016, mesmo com um aumento populacional de 1,6%, o consumo final de eletricidade apresentou decréscimo de 2,7% neste período, redução liderada, principalmente, pela retração no consumo industrial (-7,7%). A partir de 2017, após dois anos consecutivos de queda, o consumo de eletricidade no país voltou a crescer, alcançando em 2019 aproximadamente 482 TWh, o que representa um aumento de 4,4% com relação à 2016 (Empresa de Pesquisa Energética, 2020).

Considerando o panorama da geração de energia elétrica no Brasil, no ano de 2019 foram produzidos aproximadamente 626 TWh, o que representa um aumento de 4,1% com relação a produção em 2018, mantendo a tendência de crescimento dos últimos anos (Empresa de Pesquisa Energética, 2020). Analisando a matriz energética, verifica-se que a geração hidráulica, principal fonte brasileira, aumentou 2,3% entre 2018 e 2019, valor significativamente menor do que o crescimento observado entre 2017 e 2018 (4,8%). Ainda assim, este é um cenário mais positivo do ponto de vista de penetração de energias renováveis do que o verificado em 2017, por exemplo. Neste ano, a geração hidroelétrica havia apresentado queda de 2,6% com relação à 2016, redução que foi compensada em grande parte pelo aumento na geração termelétrica (derivados de petróleo, carvão, gás natural e biomassa), que representou cerca de 24% da matriz energética (Empresa de Pesquisa Energética, 2018).

Neste sentido, a dependência da matriz energética brasileira na geração hidroelétrica e a sazonalidade desta fonte levam a algumas características que merecem ser observadas. Por exemplo, considerando a estiagem prolongada enfrentada pelo Brasil em 2014, naquele ano, a geração hidroelétrica apresentou queda de 4,5% sobre o valor produzido no ano anterior. Para suprir a demanda, houve um significativo aumento na parcela de geração termelétrica, que teve como consequência ambiental o aumento nas emissões de gases de efeito estufa. Considerando as usinas que compõem o Sistema Interligado Nacional brasileiro, verificou-se um crescimento de 34,4% nas emissões em 2014 com relação aos níveis de 2013 (Empresa de Pesquisa Energética, 2015). Além deste fato, a operação de unidades de geração termelétrica apresenta custo elevado, sendo este transmitido para o consumidor na forma de tarifa adicional, a exemplo da bandeira vermelha. Esta foi implantada no Brasil em janeiro de 2015 e vigorou até março de 2016, sendo que em 2015 os brasileiros pagaram, a mais, um total de 14,712 bilhões de reais nas contas de ener-



gia elétrica (ANACE, 2016). Estes fatos reforçam a necessidade de diversificar a matriz energética com outras fontes renováveis, de modo a reduzir a dependência do sistema em relação a uma fonte específica.

Seguindo a tendência mundial, a partir de 2015 é possível observar um avanço significativo da participação de fontes renováveis não hidráulicas na matriz energética brasileira. Particularmente, entre 2018 e 2019 verificou-se significativo aumento na geração solar (+92,1%) e eólica (+15,5%), levando estas fontes a uma participação de 1,1% e 8,9% na matriz energética, respectivamente. Ainda, com relação a geração termelétrica a partir de derivados do petróleo, verificou-se uma redução de 23,8% no mesmo período, reduzindo também a participação desta fonte na matriz de geração elétrica nacional, de 1,7% em 2018 para 1,3% em 2019. Em contrapartida, embora entre 2016 e 2017 tenha se verificado uma redução significativa nas emissões de gases de efeito estufa provenientes da geração elétrica no Brasil, entre 2018 e 2019 verificou-se um aumento de 6,8% nestas emissões, causado em boa parte pela forte entrada de termelétricas a gás natural (aumento de 10,9% na geração a partir desta fonte) (Empresa de Pesquisa Energética, 2020).

Em vista do exposto, devido ao contínuo aumento na demanda de energia, escassez de combustíveis fósseis e à constante necessidade de reduzir a emissão de gases de efeito estufa, diversas tecnologias experimentaram um rápido desenvolvimento nas últimas décadas para permitir a inserção dos sistemas de geração baseados em fontes renováveis (GUERRERO et al., 2010; LORENZEN; NIELSEN; BEDE, 2016). Além disso, é possível observar um interesse crescente em sistemas distribuídos de energia, permitindo descentralizar a geração e diversificar as fontes, além de incluir elementos armazenadores de energia para reduzir os efeitos da intermitência das fontes renováveis.

Neste cenário, conversores conectados à rede elétrica (do inglês, *grid-connected converters* – GCCs) são elementos fundamentais, servindo como interface para a integração de fontes renováveis de energia com a rede de distribuição ou microrredes (ERICKSON, 1997; ZHOU et al., 2018; HUANG et al., 2019). Além disso, por meio de um controle de corrente adequado, os conversores devem garantir a injeção de energia de boa qualidade, cumprindo com rigorosos requisitos como, por exemplo, os limites de conteúdo harmônico das correntes injetadas na rede dados por normas como a IEEE 1547 (BLAABJERG et al., 2006; IEEE, 2011).

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com relação aos GCCs, considerando os inversores fonte de tensão modulados em largura de pulso (do inglês, *pulse-width modulated* – PWM), filtros passivos adequados são fundamentais para atenuar as harmônicas de modulação e reduzir a distorção harmônica da corrente injetada na rede. Dentre as topologias mais utilizadas, destacam-se os filtros

L e LCL, sendo que o filtro LCL apresenta melhor atenuação em altas frequências, sem aumentar o consumo de potência reativa, quando comparado ao filtro L (PEÑA-ALZOLA et al., 2013; POONGOTHAI; VASUDEVAN, 2019). Por outro lado, devido à inerente ressonância dos filtros LCL, soluções de amortecimento são necessárias para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada e evitar oscilações de corrente (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011). Ainda, considerando a aplicação de sistemas de controle digitais, os inerentes atrasos de computação da lei de controle e de modulação introduzem uma defasagem considerável na resposta em frequência dos filtros LCL. Desta forma, dependendo da relação entre a frequência de ressonância do filtro e a frequência de amostragem, o desempenho e a estabilidade do sistema podem ser significativamente afetados, impondo um limite severo na largura de banda do controle (WANG et al., 2014; ZHAO et al., 2020).

Dentre as formas de amortecimento, o amortecimento passivo permite atenuar a ressonância do filtro a partir da inclusão de elementos resistivos, tanto em série quanto em paralelo com os indutores ou com os capacitores do filtro. Entretanto, além de aumentar o número de componentes, esta estratégia aumenta as perdas do sistema (BINA; PASHA-JAVID, 2009; PEÑA-ALZOLA et al., 2013; WU et al., 2013). Alternativamente, é possível utilizar soluções de amortecimento ativo. Neste cenário, o controle de corrente tem papel fundamental, pois além de permitir definir adequadamente a potência transferida da fonte primária para a rede, permite atenuar o pico de ressonância dos filtros LCL sem a inclusão de elementos físicos ou perdas adicionais no sistema (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011; PENA-ALZOLA et al., 2014; SAID-ROMDHANE et al., 2017). Dentre as estratégias utilizadas para o controle de corrente em GCCs, é possível citar controladores por realimentação de estados (MACCARI Jr et al., 2014; MACCARI Jr et al., 2017), controladores baseados no princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976), como o proporcional-ressonante (PR), no referencial estacionário (TEODORESCU et al., 2006), proporcional-integral (PI), no referencial síncrono (DANNEHL et al., 2010) e controladores repetitivos (CHEN et al., 2008), bem como controladores baseados em técnicas preditivas, como o MPC (do inglês, *model predictive control*) e *deadbeat* (MALESANI; MATAVELLI; BUSO, 1999; CORTES et al., 2008; KARAMANAKOS et al., 2020).

É importante destacar que os GCCs devem operar adequadamente mesmo considerando tensões de rede distorcidas, variações paramétricas e incertezas na impedância equivalente do ponto de conexão com a rede (do inglês, *Point of Common Coupling* – PCC), de modo a garantir desempenho adequado e estabilidade para toda a faixa de parâmetros considerada no projeto (PAN et al., 2015; LU et al., 2018; XU et al., 2018; SILWAL et al., 2019). Um conversor projetado para operar em condições de rede normais (rede forte e puramente senoidal) pode não operar satisfatoriamente quando sujeitos a redes chamadas de fracas. Redes fracas podem ser caracterizadas por uma elevada impedância equivalente no PCC, causada, por exemplo, pela integração de múltiplas fontes

distribuídas de energia, dispostas em pontos distintos a nível de distribuição. Ainda, dependendo da configuração da rede, a impedância no PCC pode variar no tempo e estar sujeita a uma faixa ampla de valores, devido a possível conexão e desconexão de diferentes conversores a um mesmo PCC. Essas características não ideais tornam o controle de GCCs conectados à redes fracas particularmente desafiador, e podem ser a causa de problemas como a injeção de harmônicas indesejáveis, oscilações das variáveis e até mesmo a instabilidade do sistema. Uma microrrede incluindo um número limitado de fontes é um exemplo de rede fraca (MIDTSUND; SUUL; UNDELAND, 2010; SILWAL et al., 2019; LIU; CALDOGNETTO; BUSO, 2019; GUAN et al., 2019; WANG et al., 2021).

Neste sentido, considerando inversores conectados à rede por meio de filtros LCL, métodos convencionais de controle de corrente, como o PI e PR, geralmente são suficientes para garantir um bom desempenho em condições de rede forte e quando as incertezas paramétricas não são significativas. No entanto, ao tratar de parâmetros incertos ou variantes no tempo (especialmente em condições de rede fraca), estes controladores podem não fornecer resultados adequados (PAN et al., 2015; LORENZEN; NIELSEN; BEDE, 2016; ZHOU et al., 2018). Nestas condições, o projeto torna-se desafiador, normalmente dependente de escolhas heurísticas, baseadas em tentativa e erro, podendo demandar uma quantidade significativa de tempo do projetista. Por exemplo, controladores PI podem não ser capazes de rastrear adequadamente referências ou mitigar distúrbios harmônicos na tensão do PCC, especialmente em condições de rede fraca, já que o ganho em baixa frequência e a banda passante devem ser diminuídos para garantir estabilidade do sistema nesta condição (CHEN et al., 2012). De forma semelhante, os controladores PR podem não responder adequadamente quando submetidos a largas variações de impedância, tanto na rede quanto no filtro, uma vez que a frequência de ressonância varia significativamente em função destes (HUANG et al., 2019). Para melhorar a robustez e eficácia de controladores de corrente em condições de rede não ideais, estratégias aprimoradas de controle linear com amortecimento ativo têm sido propostas na literatura (HE; WANG; CHUNG, 2014). Entre estas técnicas, é possível citar a estratégia de controle com *feedforward* da tensão da rede (WANG et al., 2010), realimentação da corrente do capacitor (BAO et al., 2014), e a estratégia baseada no controle da corrente do lado do inversor com *feedforward* da tensão do capacitor (LIU et al., 2018).

Do ponto de vista de respostas transitórias, um controlador ótimo que pode ser utilizado como referência de desempenho é o controlador *deadbeat*. A ação de controle *deadbeat* é caracterizada por alocar na origem todos os polos do sistema representado em tempo discreto, em malha fechada, forçando o erro de rastreamento de referência a zero em um número mínimo de amostras, igual à ordem do sistema (EMAMI-NAEINI; FRANKLIN, 1982). Desta maneira, quando os parâmetros da planta são bem conhecidos, o controlador *deadbeat* é capaz de fornecer bom desempenho dinâmico e em regime permanente quando aplicado em inversores, por exemplo, demonstrando a capacidade de prover

um reduzido nível de distorção harmônica (HOLMES; MARTIN, 1996; BUSO; FASOLO; MATTAVELLI, 2001; KAWAMURA; CHUARAYAPRATIP; HANEYOSHI, 1988). Todavia, por ser uma técnica fortemente dependente dos parâmetros da planta, variações ou incertezas paramétricas levam à degradação do desempenho ou até mesmo à instabilidade do sistema.

Visando aumentar a robustez de controladores *deadbeat* frente a incertezas e variações paramétricas, várias alternativas têm sido propostas (KAWAMURA; HANEYOSHI; HOFT, 1986; MALESANI; MATAVELLI; BUSO, 1999; HE et al., 2016; JIANG et al., 2017). Por exemplo, em (KAWAMURA; HANEYOSHI; HOFT, 1986), os autores propõem uma técnica de controle *deadbeat* incluindo a estimação de parâmetros, permitindo adaptação da lei de controle e ajuste da tensão de saída. O trabalho (MALESANI; MATAVELLI; BUSO, 1999) analisa a estabilidade do controlador *deadbeat* aplicado a conversores fonte de tensão, propondo uma técnica de estimação da tensão de linha capaz de aumentar a robustez do sistema frente a incertezas paramétricas. Em (HE et al., 2016), considerando um filtro LCL, realiza-se uma redução na ordem do sistema vista pelo controlador *deadbeat*, de modo a mitigar o efeito da ressonância deste filtro. Além disso, um estimador da indutância da rede é utilizado para garantir robustez ao sistema mesmo em situações de rede fraca. Em (JIANG et al., 2017), é proposto um controlador *deadbeat* incluindo uma correção preditiva da corrente injetada na rede para aumentar a robustez do sistema. Cabe observar que um ponto comum destes trabalhos é o fato de não garantirem robustez contra incertezas e variações paramétricas na planta a partir de um controlador com ganhos fixos, que seja independente de estimador de parâmetros ou observador de estados.

Uma forma de tratar sistemas afetados por parâmetros incertos e variantes no tempo com garantias teóricas e com eficiência computacional é por meio de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), reconhecidas como importante alternativa para o projeto de controladores robustos e análise de estabilidade robusta (BOYD et al., 1994). LMIs foram empregadas com sucesso em diferentes aplicações em eletrônica de potência, incluindo o controle robusto de conversores (WILLMANN et al., 2007; OLALLA et al., 2009; GABE; MONTAGNER; PINHEIRO, 2009; MACCARI Jr. et al., 2012; MACCARI Jr et al., 2014; RIBAS et al., 2014; MACCARI Jr et al., 2015; MACCARI Jr et al., 2017; KOCH et al., 2017; KOCH et al., 2018). Por exemplo, o controle de tensão de fontes ininterruptas de energia foi abordado por meio de LMIs em (WILLMANN et al., 2007; RIBAS et al., 2014). A regulação da tensão de saída de conversores CC-CC foi realizada por meio desta ferramenta em (OLALLA et al., 2009; MACCARI Jr. et al., 2012), no cenário de parâmetros incertos.

Para o controle de corrente de GCCs com filtros de saída do tipo LCL, sujeitos a incertezas paramétricas na rede, o trabalho (GABE; MONTAGNER; PINHEIRO, 2009) mostrou a viabilidade prática da técnica para esta aplicação. Os trabalhos (MACCARI

Jr et al., 2014; MACCARI Jr et al., 2017) utilizam LMIs para alocação robusta dos polos de malha fechada de GCCs para os casos monofásicos e trifásico, respectivamente. Os trabalhos (MACCARI Jr et al., 2015; KOCH et al., 2018) utilizam controladores robustos DLQR e  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivamente, para o caso trifásico com filtro LCL. É importante observar que, em relação à resposta dinâmica, ganhos robustos de controle (i.e. ganhos fixos) tendem a produzir respostas transitórias mais lentas quando comparadas a técnicas não lineares ou estratégias adaptativas com estimação on-line de parâmetros, por exemplo. Neste contexto, procedimentos capazes de explorar melhores relações de compromisso entre desempenho e robustez merecem investigação.

Controladores ótimos em espaço de estados são conhecidos na literatura, tendo sido formulados também em termos de LMIs, capazes de prover soluções computacionalmente eficientes para a síntese de controladores (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1995; BOYD et al., 1994; BOYD; VANDENBERGHE, 2004; EL GHAOUI; NICULESCU, 2000; CHEN, 1999). Dentre as estratégias ótimas, controladores  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estados merecem destaque, uma vez que a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser interpretada como a potência de saída do sistema dada uma entrada de distúrbio do tipo ruído branco e, portanto, controladores projetados de modo a minimizar esta norma são controladores ótimos do ponto de vista de rejeição de distúrbios (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996). Estes controladores já foram aplicados em eletrônica de potência, por exemplo, nos trabalhos (DORATO; ABDALLAH; CERONE, 2000; OLALLA et al., 2009; MACCARI Jr. et al., 2012; MONTAGNER et al., 2011b; MONTAGNER et al., 2011a; LEUNG; TAM; LI, 1993; DUPONT et al., 2013). Ainda assim, existe espaço na literatura para explorar a viabilidade prática de controladores  $\mathcal{H}_2$  robustos em aplicações para conversores conectados à rede com filtro LCL, sujeitos a parâmetros incertos e possivelmente variantes no tempo.

Outro desafio que deve ser destacado, especialmente no cenário de integração de fontes renováveis e popularização dos sistemas de geração distribuída, é o custo de implementação destes sistemas. Tendo em vista que os GCCs representam uma parte significativa do custo total, a redução no custo e volume dos filtros de saída tem se tornado cada vez mais importante (SAFAMEHR; NAJAFABADI; SALMASI, 2016). Esta questão também motiva a utilização de filtros do tipo LCL, ao invés de filtros do tipo L ou do tipo LC, uma vez que permite reduzir o tamanho dos elementos reativos que compõem o filtro de saída do inversor (VIINAMAKI; JOKIPII; SUNTIO, 2015).

Uma solução utilizada em aplicações industriais para uma redução ainda maior de tamanho e custo é a utilização de indutores com núcleos *powder*, compostos por ligas metálicas e materiais magnéticos macios, como os núcleos de ferro em pó, Sendust, Mopermalloy (MPP) e outras ligas. Estes indutores são projetados para operar em uma região não linear da curva de magnetização (curva B-H), possibilitando maiores densidades de fluxo que o material ferrite, mantendo baixas as perdas no núcleo. Isso se traduz em uma maior capacidade de armazenamento de energia e, conseqüentemente, redução no volume

(WU et al., 2019). Uma contrapartida desta solução é que estes núcleos apresentam uma característica chamada de saturação suave (*soft-saturation*), o que significa que a permeabilidade relativa do material magnético do núcleo varia significativamente em função da corrente sobre o indutor. Portanto, em sistemas de corrente alternada, isso se traduz em indutâncias variantes no tempo (JAYALATH; ONGAYO; HANIF, 2017). Em GCCs, esta variação pode levar à degradação da qualidade das correntes injetadas na rede, de modo que, para garantir desempenho e estabilidade, o projeto do controlador deve levar em consideração o efeito da saturação suave, o que impõe um desafio adicional no projeto de controladores para esta aplicação (MASTROMAURO; LISERRE; DELL'AQUILA, 2008; WEI; LIU; DUAN, 2018; WU et al., 2019). Poucos trabalhos da literatura foram realizados neste sentido (SAFAMEHR; NAJAFABADI; SALMASI, 2016). Em relação a alternativas para tratar do efeito da saturação magnética suave em inversores conectados à rede com filtros L, em (MASTROMAURO; LISERRE; DELL'AQUILA, 2008) é apresentado um estudo dos efeitos da saturação na performance de controladores PR e repetitivos. A partir de um modelo não linear da indutância, este trabalho mostra que a compensação harmônica fornecida por estes controladores é capaz de, se projetada adequadamente, mitigar o efeito da saturação magnética. Ainda, (WEI; LIU; DUAN, 2018) propõe um método de compensação aplicado a um controlador proporcional-integral-ressonante. Este método se propõe a mitigar a influência da variação da indutância na largura de banda do sistema em malha fechada e, portanto, na estabilidade.

Cabe ressaltar que as estratégias apresentadas em (MASTROMAURO; LISERRE; DELL'AQUILA, 2008) e (WEI; LIU; DUAN, 2018) tratam de filtros L. No caso de filtros LCL, faz-se necessária a utilização de estratégias mais elaboradas. Isto deve-se à necessidade de superar as questões relacionadas à inerente ressonância deste filtro, ainda mais desafiadoras quando se consideram condições de rede fraca e incerta e, especialmente, quando considera-se a característica não linear das indutâncias do filtro. Nesta direção, para garantir a estabilidade e evitar flutuações de corrente em filtros LCL sob o efeito de saturação magnética suave, (SAFAMEHR; NAJAFABADI; SALMASI, 2016) propõe um esquema de controle baseado em um controlador PR combinado a uma realimentação das correntes do lado do inversor e da rede. É incluído um algoritmo adaptativo de estimação on-line dos indutores não lineares. Outra alternativa é apresentada em (WU et al., 2019), em que um controle direto modificado baseado na estimação de indutância utilizando estrutura variável é proposto. O valor da indutância do filtro é estimado a partir de um modelo não linear dependente da corrente, que atua como fator adaptativo na lei de controle. No contexto de leis de controle adaptativas, o trabalho (WU et al., 2010) também pode ser mencionado. Neste, é feita uma adaptação da lei de controle a partir da estimação da indutância em função da corrente, porém para um controle preditivo aplicado a um inversor com filtro LC. Com base nestes trabalhos, observa-se que há espaço na literatura para o estudo de um procedimento de projeto sistemático e direto,

que forneça controladores robustos a variações de parâmetros devido à saturação suave e incertezas na impedância da rede elétrica, e de simples implementação.

No sentido de contribuir com o projeto de controladores robustos a incertezas e variações paramétricas no filtro e na rede, LMIs de síntese e análise podem ser melhor exploradas. Embora LMIs de projeto tenham sido empregadas com sucesso no controle de GCCs, um ponto em comum entre os trabalhos já apresentados é o fato de que não levam em consideração a possível saturação magnética dos indutores. Outra importante questão é que LMIs para síntese de controladores robustos considerando sistemas incertos e variações paramétricas tornam-se mais conservadoras à medida que aumenta o número de vértices de um modelo politópico do sistema, devido à necessidade de utilizar matrizes fixas para recuperar ganhos fixos de controle. Finalmente, outro ponto relevante é a busca de ganhos de controle, sintetizados ou validados por meio de LMIs, que garantam boas relações de compromisso entre resposta dinâmica, resposta em regime permanente, robustez e sinal de controle limitado, por exemplo. Neste contexto, este trabalho tem os objetivos e contribuições mostrados a seguir.

### 1.3 OBJETIVOS E PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Esta Tese tem como principal objetivo propor procedimentos baseados em LMIs para o projeto de controladores robustos aplicados a conversores conectados à rede, sujeitos à saturação magnética dos indutores do filtro e incertezas paramétricas na rede. Com estes procedimentos, é possível obter ganhos fixos de realimentação de estados de forma rápida e sistemática, contemplando no estágio de projeto garantias teóricas de estabilidade robusta e desempenho. Desta forma, é possível superar desafios no cenário de incerteza e variações paramétricas a partir de uma estrutura de controle simples e com baixo custo computacional, levando a correntes de rede com bom desempenho dinâmico e conteúdo harmônico em conformidade com a norma IEEE 1547, incluindo validação com base em protótipo experimental e simulações em tempo real. As principais contribuições da Tese são resumidas a seguir:

- Obter um modelo variante no tempo que permita representar, para fins de análise de estabilidade e projeto de controladores, o efeito não linear da saturação magnética dos indutores do filtro LCL em conversores trifásicos conectados à rede elétrica.
- Fornecer procedimentos de projeto sistemáticos e diretos para controladores robustos de corrente (ganhos de controle fixos) que, por meio de modelos politópicos variantes no tempo e LMIs, permitam tratar do efeito da saturação magnética suave dos indutores do filtro LCL e também incerteza ou variação paramétrica na impedância do ponto de conexão com a rede elétrica.

- Viabilizar o projeto de controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  para aplicação prática, provendo desempenho satisfatório no cenário de incerteza e variação paramétrica na indutância de rede, e também considerando a saturação suave dos indutores do filtro.
- Fornecer um procedimento de projeto que permita obter ganhos ótimos e relaxações para controladores subótimos que garantem alocação robusta de polos com boa relação de compromisso entre respostas transitórias, esforço de controle e robustez, visando tornar o controlador implementável na prática.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta Tese está organizada em sete capítulos, incluindo a introdução e as considerações finais. No Capítulo 2, é apresentado um modelo em espaço de estados para um inversor conectado à rede por meio de filtro LCL. Neste, o efeito da saturação magnética suave dos indutores é considerado a partir de parâmetros variantes no tempo. No Capítulo 3 são apresentados dois estudos de caso para ilustrar o efeito da saturação suave nos indutores do filtro e da incerteza na indutância de rede no desempenho do sistema em malha fechada. Uma estratégia para o projeto analítico de controladores por realimentação de estados baseada em escolhas nominais para os parâmetros da planta também é discutida. No Capítulo 4, é apresentado um procedimento de projeto, baseado em um modelo politópico variante no tempo e LMIs, para controladores robustos ao efeito da saturação magnética dos indutores do filtro e incertezas paramétricas na impedância equivalente do PCC, incluindo o atraso de implementação digital. Para validar o procedimento proposto, são mostrados resultados de simulações em tempo real e também resultados obtidos em protótipo com indutores comerciais. O Capítulo 5 apresenta um segundo procedimento, visando viabilizar na prática controladores robustos  $\mathcal{H}_2$ , provendo bom desempenho no cenário de incerteza e variação paramétrica na indutância de rede, e também considerando a saturação suave dos indutores do filtro. O Capítulo 6 tem como foco um procedimento de projeto de controladores robustos ótimos e subótimos, que garantam uma boa relação de compromisso entre desempenho dinâmico e norma dos ganhos de controle. O Capítulo 7 apresenta as considerações finais e as perspectivas de trabalhos futuros.

A Tese contém ainda três apêndices. No Apêndice A, é feita uma análise do acoplamento causado pela saturação magnética nos modelos em coordenadas estacionárias. No Apêndice B, apresentam-se as provas matemáticas das LMIs utilizadas para os projetos dos controladores desenvolvidos ao longo deste trabalho. No Apêndice C, é descrito o protótipo utilizado para obter os resultados experimentais.



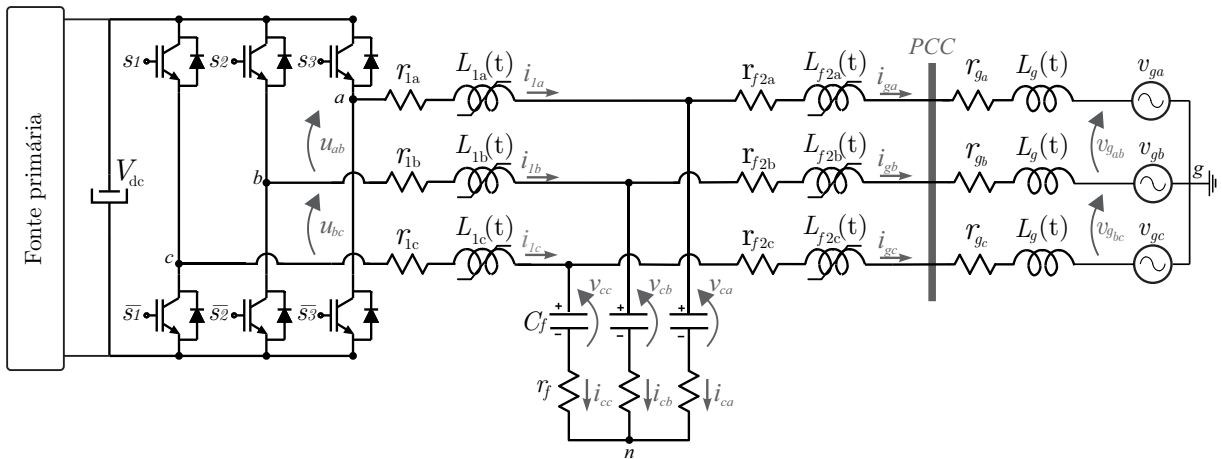
## 2 MODELAGEM DO INVERSOR TRIFÁSICO, FILTRO LCL E REDE

Neste capítulo, é apresentada uma modelagem no espaço de estados para um inversor trifásico conectado à rede por meio de filtro LCL, com indutores cujos núcleos magnéticos são afetados por saturação suave. O efeito da saturação é aproximado por um modelo com parâmetros variantes no tempo, permitindo incluir também variações na impedância de rede. Ainda, mostra-se que, sem saturação, o modelo proposto recupera um modelo linear convencional da literatura para o problema.

### 2.1 MODELO EM COORDENADAS $ABC$ CONSIDERANDO SATURAÇÃO DOS INDUTORES DO FILTRO

O circuito elétrico do conversor conectado à rede por meio de filtro LCL é apresentado na Figura 2.1. Neste, são representados indutores de filtro sujeitos ao efeito de saturação magnética suave do núcleo e impedâncias de rede incertas ou variantes no tempo.

Figura 2.1 – Conversor trifásico conectado à rede por meio de filtro LCL.



Fonte: Autor.

Em consequência da saturação magnética, a permeabilidade dos núcleos dos indutores do filtro varia com a corrente (WEI; LIU; DUAN, 2018). Desta forma, como em um sistema alternado trifásico as correntes variam no tempo, as indutâncias podem ser vistas como parâmetros variantes no tempo. Além disso, em um dado instante, como as correntes apresentam valores distintos devido à defasagem de  $120^\circ$  entre as fases, os valores das indutâncias por fase também podem ser diferentes, conforme ilustra a Figura 2.1.

Considere também que as seguinte tensões podem ser definidas:

$$\begin{aligned}
 u_{ab} &= u_a - u_b \\
 u_{bc} &= u_b - u_c \\
 v_{c_{ab}} &= v_{c_a} - v_{c_b} + (i_{1_a} - i_{g_a})r_f - (i_{1_b} - i_{g_b})r_f \\
 v_{c_{bc}} &= v_{c_b} - v_{c_c} + (i_{1_b} - i_{g_b})r_f - (i_{1_c} - i_{g_c})r_f \\
 v_{g_{ab}} &= v_{g_a} - v_{g_b} \\
 v_{g_{bc}} &= v_{g_b} - v_{g_c}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ainda, considere que os capacitores do filtro apresentam valores iguais de capacitância, e que pode haver uma resistência  $r_f$  para amortecimento passivo, tal que

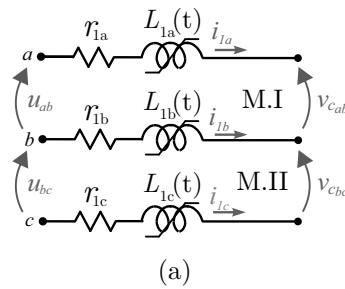
$$\begin{aligned}
 C_{f_a} &= C_{f_b} = C_{f_c} = C_f \\
 r_{f_a} &= r_{f_b} = r_{f_c} = r_f
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Quando não informado, assuma que  $r_f = 0$ , e o amortecimento é fornecido de forma ativa pelo sistema de controle.

### 2.1.1 Correntes do lado do conversor

Para a análise das correntes do lado do conversor,  $i_{1_a}(t)$ ,  $i_{1_b}(t)$  e  $i_{1_c}(t)$ , considere que a partir da Figura 2.1 e das equações em (2.1), é possível definir as malhas M.I e M.II e os nós  $a$ ,  $b$  e  $c$ , representados na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Circuito para análise das correntes do lado do conversor.



Fonte: Autor.

A partir da Lei das Tensões de Kirchhoff na Malha M.I, tem-se que

$$v_{L_{1a}} = u_{ab} - v_{r_{1a}} - v_{c_{ab}} + v_{L_{1b}} + v_{r_{1b}}, \tag{2.3}$$

e, a partir da Lei das Tensões de Kirchhoff na Malha M.II, tem-se que

$$v_{L_{1b}} = u_{bc} - v_{r_{1b}} - v_{c_{bc}} + v_{L_{1c}} + v_{r_{1c}} \tag{2.4}$$

A partir da Lei das Correntes de Kirchoff no nó  $b$ , tem-se que

$$i_{1_a} + i_{1_b} + i_{1_c} = 0 \quad (2.5)$$

Aplicando a derivada em todos os termos da equação (2.5) resulta em

$$\frac{di_{1_a}}{dt} + \frac{di_{1_b}}{dt} + \frac{di_{1_c}}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

Considere também que a tensão sobre um indutor qualquer é proporcional a derivada do fluxo em relação ao tempo, de modo que

$$v_L(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{d(L(i(t))i(t))}{dt} \quad (2.7)$$

$$v_L(t) = L(i(t))\frac{di(t)}{dt} + i(t)\frac{dL(i(t))}{dt} \quad (2.8)$$

$$v_L(t) = \left[ L(i(t)) + \frac{dL(i(t))}{di}i(t) \right] \frac{di(t)}{dt} = L_{eff}(t)\frac{di(t)}{dt}, \quad (2.9)$$

em que o comportamento não-linear é descrito por meio de um parâmetro variante no tempo, denominado indutância efetiva,  $L_{eff}(t)$  (WOLFLE; HURLEY, 2003). Esta consideração é válida para todos os indutores de filtro mostrados na Figura 2.1, na qual as indutâncias efetivas são representadas por  $L_{1a}(t)$ ,  $L_{1b}(t)$ ,  $L_{1c}(t)$ ,  $L_{f2a}(t)$ ,  $L_{f2b}(t)$ , e  $L_{f2c}(t)$ , podendo assumir valores diferentes, por fase, em um determinado instante de tempo. A dependência explícita do tempo será omitida, para simplificar a notação.

Levando em consideração (2.9), a equação (2.6) pode ser reescrita como

$$\frac{v_{L_{1a}}}{L_{1a}} + \frac{v_{L_{1b}}}{L_{1b}} + \frac{v_{L_{1c}}}{L_{1c}} = 0 \quad (2.10)$$

e, portanto,

$$v_{L_{1c}} = -\frac{L_{1c}}{L_{1a}}v_{L_{1a}} - \frac{L_{1c}}{L_{1b}}v_{L_{1b}} \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.4), tem-se

$$v_{L_{1b}} = +u_{bc} - v_{r_{1b}} - v_{c_{bc}} + \left( -\frac{L_{1c}}{L_{1a}}v_{L_{1a}} - \frac{L_{1c}}{L_{1b}}v_{L_{1b}} \right) + v_{r_{1c}} \quad (2.12)$$

e, ajustando-se os termos, tem-se que

$$v_{L_{1b}} = \left( \frac{L_{1b}}{L_{1b} + L_{1c}} \right) (u_{bc} - v_{c_{bc}}) + \left( \frac{L_{1b}}{L_{1b} + L_{1c}} \right) (v_{r_{1c}} - v_{r_{1b}}) + \left( \frac{-L_{1b}L_{1c}}{L_{1a}(L_{1b} + L_{1c})} \right) v_{L_{1a}} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.3), tem-se

$$\begin{aligned} v_{L_{1a}} = & \left( \frac{L_{1a}(L_{1b}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_{ab} - v_{c_{ab}} - v_{r_{1a}}) + \\ & + \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_{bc} - v_{c_{bc}} + v_{r_{1c}}) + \left( \frac{L_{1a}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) v_{r_{1b}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Passando as variáveis de linha para fase, conforme a equação (2.1), obtém-se

$$\begin{aligned} v_{L_{1a}} = & \left( \frac{L_{1a}(L_{1b}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - u_b - v_{c_a} + v_{c_b} - v_{r_{1a}} - (i_{1a} - i_{g_a})r_f + (i_{1b} - i_{g_b})r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_b - u_c - v_{c_b} + v_{c_c} + v_{r_{1c}} - (i_{1b} - i_{g_b})r_f + (i_{1c} - i_{g_c})r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1a}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) v_{r_{1b}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, agrupando as fases, resulta em

$$\begin{aligned} v_{L_{1a}} = & \left( \frac{L_{1a}(L_{1b}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - v_{r_{1a}} - (i_{1a} - i_{g_a})r_f) \\ & + \left( \frac{L_{1a}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + v_{r_{1b}} + (i_{1b} - i_{g_b})r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + v_{r_{1c}} + (i_{1c} - i_{g_c})r_f) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sabendo que

$$v_{L_{1a}} = L_{1a} \frac{di_{1a}}{dt}, \quad v_{r_{1a}} = r_{1a}i_{1a}, \quad v_{r_{1b}} = r_{1b}i_{1b} \text{ e } v_{r_{1c}} = r_{1c}i_{1c} \quad (2.17)$$

é possível substituir (2.17) em (2.16), obtendo então a equação de estado da corrente do lado do conversor, para a fase  $a$ , dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_{1a} = & \left( \frac{L_{1b}+L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - i_{1a}(r_{1a} + r_f) + i_{g_a}r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + i_{1b}(r_{1b} + r_f) - i_{g_b}r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + i_{1c}(r_{1c} + r_f) - i_{g_c}r_f) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em seguida, substituindo (2.14) em (2.13), obtém-se

$$\begin{aligned} v_{L_{1b}} = & \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_{bc} - v_{c_{bc}} + v_{r_{1c}}) + \\ & + \left( \frac{-L_{1b}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_{ab} - v_{c_{ab}} - v_{r_{1a}}) + \left( \frac{-L_{1b}(L_{1a}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) v_{r_{1b}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Transformando as tensões de linha em tensões de fase, com base em (2.1) obtém-se

$$\begin{aligned}
v_{L1b} = & \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_b - u_c - v_{c_b} + v_{c_c} + v_{r_{1c}} - (i_{1_b} - i_{g_b})r_f + (i_{1_c} - i_{g_c})r_f) + \\
& + \left( \frac{-L_{1b}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - u_b - v_{c_a} + v_{c_b} - v_{r_{1a}} - (i_{1_a} - i_{g_a})r_f + (i_{1_b} - i_{g_b})r_f) + \\
& + \left( \frac{-L_{1b}(L_{1a}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) v_{r_{1b}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

e, agrupando as fases, tem-se que

$$\begin{aligned}
v_{L1b} = & \left( \frac{-L_{1b}L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - v_{r_{1a}} - (i_{1_a} - i_{g_a})r_f) + \\
& + \left( \frac{-L_{1b}(L_{1a}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + v_{r_{1b}} + (i_{1_b} - i_{g_b})r_f) + \\
& + \left( \frac{L_{1a}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + v_{r_{1c}} + (i_{1_c} - i_{g_c})r_f)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Considerando

$$v_{L1b} = L_{1b} \frac{di_{1b}}{dt} \tag{2.22}$$

e substituindo (2.17) e (2.22) em (2.21) obtém-se a equação de estado da corrente do lado do conversor, para a fase  $b$ , dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} i_{1b} = & \left( \frac{-L_{1c}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - i_{1a}(r_{1a} + r_f) + i_{g_a}r_f) + \\
& + \left( \frac{-(L_{1a}+L_{1c})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + i_{1b}(r_{1b} + r_f) - i_{g_b}r_f) + \\
& + \left( \frac{L_{1a}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + i_{1c}(r_{1c} + r_f) - i_{g_c}r_f)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De forma semelhante ao que foi realizado para as fases  $a$  e  $b$ , substituindo (2.21) e (2.16) em (2.11), transformando as tensões de linha em tensões de fase, com base em (2.1), e agrupando as fases, tem-se que

$$\begin{aligned}
v_{L1c} = & \left( \frac{-L_{1c}L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - v_{r_{1a}} - (i_{1_a} - i_{g_a})r_f) + \\
& + \left( \frac{L_{1c}L_{1a}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + v_{r_{1b}} + (i_{1_b} - i_{g_b})r_f) + \\
& + \left( \frac{-L_{1c}(L_{1b}+L_{1a})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + v_{r_{1c}} + (i_{1_c} - i_{g_c})r_f)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Considerando

$$v_{L1c} = L_{1c} \frac{di_{1c}}{dt} \tag{2.25}$$

substituindo (2.17) e (2.25) em (2.24) obtém-se a equação de estado da corrente do lado

do conversor, para a fase  $c$ , dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_{1c} = & \left( \frac{-L_{1b}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (u_a - v_{c_a} - i_{1a}(r_{1a} + r_f) + i_{g_a}r_f) + \\ & + \left( \frac{L_{1a}}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_b + v_{c_b} + i_{1b}(r_{1b} + r_f) - i_{g_b}r_f) + \\ & + \left( \frac{-(L_{1b}+L_{1a})}{L_{1a}L_{1b}+L_{1a}L_{1c}+L_{1b}L_{1c}} \right) (-u_c + v_{c_c} + i_{1c}(r_{1c} + r_f) - i_{g_c}r_f) \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.1.2 Correntes do lado da rede

A partir da Figura 2.1, considere a associação série, por fase, entre as indutâncias efetivas do filtro e as indutâncias da rede, levando a

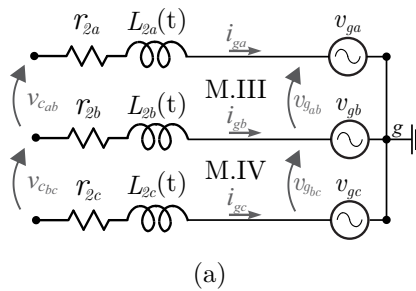
$$\begin{aligned} L_{2a}(t) &= L_{f_{2a}}(t) + L_g(t), \\ L_{2b}(t) &= L_{f_{2b}}(t) + L_g(t), \\ L_{2c}(t) &= L_{f_{2c}}(t) + L_g(t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

e, para as resistências, tem-se que

$$\begin{aligned} r_{2a} &= r_{f_{2a}} + r_{g_a}, \\ r_{2b} &= r_{f_{2b}} + r_{g_b}, \\ r_{2c} &= r_{f_{2c}} + r_{g_c}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para a análise das correntes do lado da rede,  $i_{g_a}(t)$ ,  $i_{g_b}(t)$  e  $i_{g_c}(t)$ , considere que a partir da Figura 2.1, equações em (2.1), (2.27) e (2.28), é possível definir as malhas M.III e M.IV, representadas na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Circuito para análise das correntes do lado da rede.



Fonte: Autor.

A partir da Lei das Tensões de Kirchhoff na Malha M.III, tem-se que

$$v_{L_{2a}} = -v_{g_{ab}} - v_{r_{2a}} + v_{c_{ab}} + v_{L_{2b}} + v_{r_{2b}} \quad (2.29)$$

O mesmo é válido para a Malha M.IV, de onde obtém-se

$$v_{L_{2b}} = -v_{g_{bc}} - v_{r_{2b}} + v_{c_{bc}} + v_{L_{2c}} + v_{r_{2c}} \quad (2.30)$$

A partir da Lei das Correntes de Kirchhoff no no  $g$ , obtém-se

$$i_{g_a} + i_{g_b} + i_{g_c} = 0 \quad (2.31)$$

Note que as equações (2.29), (2.30) e (2.31) são análogas às equações (2.3), (2.4) e (2.5), respectivamente. Desta maneira, o mesmo procedimento utilizado para obter as equações de estado das correntes do lado do conversor, (2.18), (2.23) e (2.26), é reproduzido aqui para obter as equações de estado das correntes do lado da rede, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{g_a} = & \left( \frac{L_{2b} + L_{2c}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (-v_{g_a} + v_{c_a} + i_{1a}r_f - i_{g_a}(r_{2a} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{L_{2c}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_b} - v_{c_b} - i_{1b}r_f + i_{g_b}(r_{2b} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{L_{2b}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_c} - v_{c_c} - i_{1c}r_f + i_{g_c}(r_{2c} + r_f)) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{g_b} = & \left( \frac{-L_{2c}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (-v_{g_a} + v_{c_a} + i_{1a}r_f - i_{g_a}(r_{2a} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{-(L_{2a} + L_{2c})}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_b} - v_{c_b} - i_{1b}r_f + i_{g_b}(r_{2b} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{L_{2a}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_c} - v_{c_c} - i_{1c}r_f + i_{g_c}(r_{2c} + r_f)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{g_c} = & \left( \frac{-L_{2b}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (-v_{g_a} + v_{c_a} + i_{1a}r_f - i_{g_a}(r_{2a} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{L_{2a}}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_b} - v_{c_b} - i_{1b}r_f + i_{g_b}(r_{2b} + r_f)) + \\ & + \left( \frac{-(L_{2b} + L_{2a})}{L_{2a}L_{2b} + L_{2a}L_{2c} + L_{2b}L_{2c}} \right) (+v_{g_c} - v_{c_c} - i_{1c}r_f + i_{g_c}(r_{2c} + r_f)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 2.1.3 Tensões nos capacitores

Para obter as equações de estado das tensões nos capacitores, a partir da Figura 2.1, considere as seguintes análises nodais:

$$\begin{aligned} i_{c_a} &= i_{1a} - i_{g_a} \\ i_{c_b} &= i_{1b} - i_{g_b} \\ i_{c_c} &= i_{1c} - i_{g_c} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Desta forma, é possível escrever

$$\begin{aligned}\frac{dv_{ca}}{dt} &= \frac{1}{C_f}i_{1a} - \frac{1}{C_f}i_{ga} \\ \frac{dv_{cb}}{dt} &= \frac{1}{C_f}i_{1b} - \frac{1}{C_f}i_{gb} \\ \frac{dv_{cc}}{dt} &= \frac{1}{C_f}i_{1c} - \frac{1}{C_f}i_{gc}\end{aligned}\quad (2.36)$$

#### 2.1.4 Representação variante no tempo, em espaço de estados

Para simplificar a notação, com base na Figura 2.1, assuma que as resistências do lado do conversor possuam o mesmo valor por fase

$$r_{1a} = r_{1b} = r_{1c} = r_1 \quad (2.37)$$

Considerando a equação (2.28), assuma também que

$$r_{2a} = r_{2b} = r_{2c} = r_2 \quad (2.38)$$

Deste modo, a partir das equações (2.18), (2.23) e (2.26), que descrevem a dinâmica das correntes do lado do conversor, das equações (2.32), (2.33) e (2.34), que descrevem a dinâmica das correntes de rede, e de (2.36), que descreve a dinâmica das tensões nos capacitores, um modelo em espaço de estados linear variante no tempo pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_{abc}(t) = \mathbf{A}_{abc}(t)\mathbf{x}_{abc}(t) + \mathbf{B}_{abc}(t)\mathbf{u}_{abc}(t) + \mathbf{F}_{abc}(t)\mathbf{v}_{g_{abc}}(t) \quad (2.39)$$

em que

$$\mathbf{A}_{abc}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p1}(t)(r_1 + r_f) & \mathbf{A}_{p1}(t) & -\mathbf{A}_{p1}(t)r_f \\ \mathbf{A}_{p3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{A}_{p3} \\ -\mathbf{A}_{p2}(t)r_f & -\mathbf{A}_{p2}(t) & \mathbf{A}_{p2}(t)(r_f + r_2) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{abc}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{p1}(t) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{abc}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_{p2}(t) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Os vetores de estado, de controle e de distúrbio são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{abc}(t) &= \begin{bmatrix} i_{1a}(t) & i_{1b}(t) & i_{1c}(t) & v_{ca}(t) & v_{cb}(t) & v_{cc}(t) & i_{ga}(t) & i_{gb}(t) & i_{gc}(t) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{u}_{abc}(t) &= \begin{bmatrix} u_a(t) & u_b(t) & u_c(t) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v}_{g_{abc}}(t) &= \begin{bmatrix} v_{ga}(t) & v_{gb}(t) & v_{gc}(t) \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (2.41)$$

As matrizes em (2.40) são dadas por

$$\mathbf{A}_{p1}(t) = \frac{-1}{d_1(t)} \begin{bmatrix} L_{1b}(t) + L_{1c}(t) & -L_{1c}(t) & -L_{1b}(t) \\ -L_{1c}(t) & L_{1a}(t) + L_{1c}(t) & -L_{1a}(t) \\ -L_{1b}(t) & -L_{1a}(t) & L_{1b}(t) + L_{1a}(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$



$$\mathbf{A}_{p2}(t) = \frac{-1}{d_2(t)} \begin{bmatrix} L_{2b}(t) + L_{2c}(t) & -L_{2c}(t) & -L_{2b}(t) \\ -L_{2c}(t) & L_{2a}(t) + L_{2c}(t) & -L_{2a}(t) \\ -L_{2b}(t) & -L_{2a}(t) & L_{2b}(t) + L_{2a}(t) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{A}_{p3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_f} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

com

$$\begin{aligned} d_1(t) &= L_{1a}(t)L_{1b}(t) + L_{1a}(t)L_{1c}(t) + L_{1b}(t)L_{1c}(t) \\ d_2(t) &= L_{2a}(t)L_{2b}(t) + L_{2a}(t)L_{2c}(t) + L_{2b}(t)L_{2c}(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Note que, a rigor, o modelo em espaço de estados do sistema sob efeito da saturação magnética é não linear, uma vez que as indutâncias do filtro são funções das correntes, ou seja, as matrizes do sistema têm parâmetros que dependem não somente do tempo, mas também dos próprios estados. Entretanto, diferentes sistemas com esta característica podem ser representados utilizando modelos *quasi*-LPV (*quasi*-linear com parâmetros variantes no tempo), sob a hipótese de que os estados do sistema são limitados a uma determinada região em torno de um ponto de equilíbrio, permitindo combinar convexamente os vértices do sistema em uma aproximação politópica (KUIAVA; RAMOS; POTA, 2012; ABBAS et al., 2014; BERRUEZO, 2016). No caso de (2.39), considera-se que as indutâncias são parâmetros variantes no tempo que evoluem em um domínio específico, sem obedecer diretamente à dinâmica dos estados (POLAT; ESKINAT; KOSE, 2007; ROTONDO; NEJJARI; PUIG, 2013). Esta representação permitirá utilizar estratégias lineares baseadas em representações politópicas, tanto para o projeto de controladores quanto para análise de estabilidade, conforme será mostrado ao longo da Tese.

### 2.1.5 Particularização do modelo para o caso sem saturação magnética

Caso a saturação dos indutores seja desprezada, é possível assumir que as indutâncias do filtro são parâmetros invariantes no tempo. Sendo assim, a fim de simplificar o equacionamento, é razoável considerar que as indutâncias possuam o mesmo valor para todas as fases, ou seja

$$\begin{aligned} L_{1a} &= L_{1b} = L_{1c} = L_1 \\ L_{2a} &= L_{2b} = L_{2c} = L_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Deste modo, a partir das equações (2.39)-(2.45), é possível recuperar o modelo em espaço de estados linear invariante no tempo, onde as matrizes de (2.39) passam a ser dadas por

$$\mathbf{A}_{abc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p1}(r_1 + r_f) & \mathbf{A}_{p1} & -\mathbf{A}_{p1}r_f \\ \mathbf{A}_{p3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{A}_{p3} \\ -\mathbf{A}_{p2}r_f & -\mathbf{A}_{p2} & \mathbf{A}_{p2}(r_f + r_2) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{abc} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{p1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{abc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_{p2} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

com

$$\mathbf{A}_{p1} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{p2} = \frac{1}{L_2} \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{p3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_f} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Alternativamente, levando em consideração as equações (2.5) e (2.31), obtidas anteriormente a partir da análise nodal do circuito, é possível reescrever as matrizes em (2.47) da forma

$$\mathbf{A}_{abc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1}(r_1 + r_f) & \mathbf{A}_{p1} & -\mathbf{A}_{r1}r_f \\ \mathbf{A}_{p3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{A}_{p3} \\ -\mathbf{A}_{r2}r_f & -\mathbf{A}_{p2} & \mathbf{A}_{r2}(r_f + r_2) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{abc} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{p1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{abc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_{p2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

em que

$$\mathbf{A}_{r1} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{r2} = \frac{1}{L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

## 2.2 MODELO EM COORDENADAS ESTACIONÁRIAS

Dado um modelo em coordenadas  $abc$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{abc}(t) = \mathbf{A}_{abc}(t) \mathbf{x}_{abc}(t) + \mathbf{B}_{abc}(t) \mathbf{u}_{abc}(t) + \mathbf{F}_{abc}(t) \mathbf{v}_{g_{abc}}(t) \quad (2.51)$$

é possível obter o modelo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{\alpha\beta 0}(t) = \mathbf{A}_{\alpha\beta 0}(t) \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta 0}(t) + \mathbf{B}_{\alpha\beta 0}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha\beta 0}(t) + \mathbf{F}_{\alpha\beta 0}(t) \cdot \mathbf{v}_{g_{\alpha\beta 0}}(t) \quad (2.52)$$

a partir das transformações

$$\mathbf{T}_{3 \times 3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

e

$$\mathbf{T}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta 0}(t) &= \mathbf{T}_{9 \times 9} \mathbf{A}_{abc}(t) \mathbf{T}_{9 \times 9}^{-1} \\ \mathbf{B}_{\alpha\beta 0}(t) &= \mathbf{T}_{9 \times 9} \mathbf{B}_{abc}(t) \mathbf{T}_{3 \times 3}^{-1} \\ \mathbf{F}_{\alpha\beta 0}(t) &= \mathbf{T}_{9 \times 9} \mathbf{F}_{abc}(t) \mathbf{T}_{3 \times 3}^{-1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

A partir da Figura 2.1 é possível observar que não existe caminho para correntes de eixo '0'. Desta maneira, realizando-se as transformações em (2.52), é possível obter o seguinte modelo em coordenadas  $\alpha\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\alpha\alpha}(t) & \mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) \\ \mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) & \mathbf{A}_{\beta\beta}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u_{\alpha\alpha}}(t) & \mathbf{B}_{u_{\alpha\beta}}(t) \\ \mathbf{B}_{u_{\alpha\beta}}(t) & \mathbf{B}_{u_{\beta\beta}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{d_{\alpha\alpha}}(t) & \mathbf{B}_{d_{\alpha\beta}}(t) \\ \mathbf{B}_{d_{\alpha\beta}}(t) & \mathbf{B}_{d_{\beta\beta}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g\alpha}(t) \\ v_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que os vetores de estados são dados por

$$\mathbf{x}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} i_{1\alpha}(t) \\ v_{c\alpha}(t) \\ i_{g\alpha}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\beta(t) = \begin{bmatrix} i_{1\beta}(t) \\ v_{c\beta}(t) \\ i_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

A matriz que relaciona os estados em  $\alpha$  é dada por

$$\mathbf{A}_{\alpha\alpha}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_1(t) & -\text{aux}_1(t) & r_f \text{aux}_1(t) \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ r_f \text{aux}_2(t) & \text{aux}_2(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

com

$$\begin{aligned} \text{aux}_1(t) &= \frac{1}{6} \frac{(L_{1a}^2 L_{1b} + L_{1a} L_{1b}^2 + 8L_{1a} L_{1b} L_{1c} + 9L_{1a} L_{1c}^2 + 17L_{1b}^2 L_{1c} + 18L_{1b} L_{1c}^2)}{L_{1c}(L_{1a} + 2L_{1b})(L_{1a} L_{1b} + L_{1a} L_{1c} + L_{1b} L_{1c})} \\ \text{aux}_2(t) &= \frac{3}{2} \frac{(L_{2b} + L_{2c})}{(L_{2a} L_{2b} + L_{2a} L_{2c} + L_{2b} L_{2c})} \end{aligned} \quad (2.59)$$

em que a dependência explícita das indutâncias em função do tempo é omitida para simplificar a notação.

A matriz que relaciona os estados em  $\beta$  é dada por

$$\mathbf{A}_{\beta\beta}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_3(t) & -\text{aux}_3(t) & r_f \text{aux}_3(t) \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ r_f \text{aux}_4(t) & \text{aux}_4(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

com

$$\begin{aligned} \text{aux}_3(t) &= \frac{1}{2} \frac{(L_{1a}^2 L_{1b} + 4L_{1a}^2 L_{1c} + L_{1a} L_{1b}^2 + 8L_{1a} L_{1b} L_{1c} + L_{1a} L_{1c}^2 + L_{1b}^2 L_{1c} + 2L_{1b} L_{1c}^2)}{L_{1c}(L_{1a} + 2L_{1b})(L_{1a} L_{1b} + L_{1a} L_{1c} + L_{1b} L_{1c})} \\ \text{aux}_4(t) &= \frac{1}{2} \frac{(4L_{2a} + L_{2b} + L_{2c})}{(L_{2a} L_{2b} + L_{2a} L_{2c} + L_{2b} L_{2c})} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Note que devido a possível diferença entre os valores de indutância por fase, o modelo resultante apresenta acoplamento entre as coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ . A matriz que relaciona este acoplamento é dada por

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_5(t) & -\text{aux}_5(t) & r_f \text{aux}_5(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ r_f \text{aux}_6(t) & \text{aux}_6(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_6(t) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

em que o subíndice  $\alpha\beta$  indica os termos de acoplamento, e

$$\begin{aligned} \text{aux}_5(t) &= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{(L_{1a}^2 L_{1b} + L_{1a} L_{1b}^2 + 2L_{1a} L_{1b} L_{1c} - 3L_{1a} L_{1c}^2 + 5L_{1b}^2 L_{1c} - 6L_{1b} L_{1c}^2)}{L_{1c}(L_{1a} + 2L_{1b})(L_{1a} L_{1b} + L_{1a} L_{1c} + L_{1b} L_{1c})} \\ \text{aux}_6(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(L_{2b} - L_{2c})}{(L_{2a} L_{2b} + L_{2a} L_{2c} + L_{2b} L_{2c})} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Os vetores que relacionam as entradas de controle aos estados são dados por

$$\mathbf{B}_{u\alpha\alpha}(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{(L_{1b} + L_{1c})}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{u\beta\beta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{(4L_{1a} + L_{1b} + L_{1c})}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{u\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(L_{1b} - L_{1c})}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

com

$$d_1(t) = (L_{1a} L_{1b} + L_{1a} L_{1c} + L_{1b} L_{1c}) \quad (2.65)$$

Os vetores que relacionam as entradas de distúrbio são dados por

$$\mathbf{B}_{d\alpha\alpha}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \frac{(L_{2b} + L_{2c})}{d_2(t)} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{d\beta\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{(4L_{2a} + L_{2b} + L_{2c})}{d_2(t)} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{d\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(L_{2b} - L_{2c})}{d_2(t)} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

com

$$d_2(t) = (L_{2a} L_{2b} + L_{2a} L_{2c} + L_{2b} L_{2c}) \quad (2.67)$$

### 2.2.1 Particularização do modelo em coordenadas estacionárias para o caso sem saturação magnética

Considerando novamente que as indutâncias possuem o mesmo valor para todas as fases, ou seja

$$\begin{aligned} L_{1a} &= L_{1b} = L_{1c} = L_1 \\ L_{2a} &= L_{2b} = L_{2c} = L_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

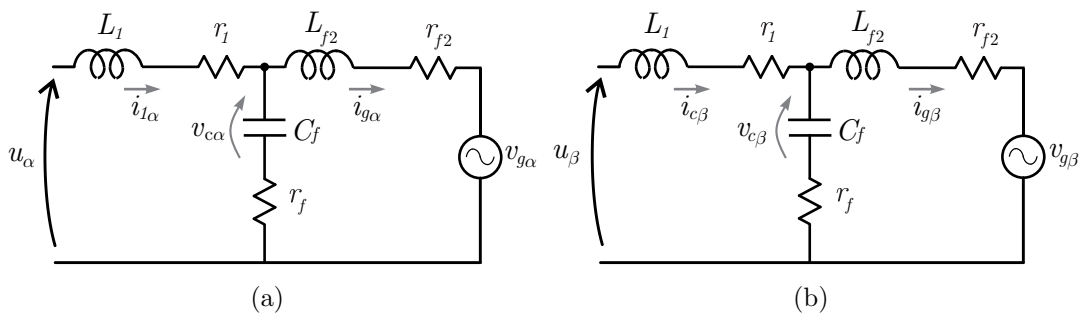
o modelo em (2.56) pode ser reescrito. As novas matrizes são dadas por

$$\mathbf{A}_{\alpha\alpha} = \mathbf{A}_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1}(r_1 + r_f) & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1}r_f \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ \frac{1}{L_2}r_f & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2}(r_f + r_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{B}_{u\alpha\alpha} = \mathbf{B}_{u\beta\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{u\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{d\alpha\alpha} = \mathbf{B}_{d\beta\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{d\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

demonstrando que, quando as indutâncias são iguais, em relação a cada fase, não há acoplamento entre as coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ . Portanto, o sistema em coordenadas estacionárias pode ser visto como dois circuitos monofásicos desacoplados e com parâmetros iguais, conforme ilustra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Representação do sistema em coordenadas estacionárias, para o caso sem saturação magnética: a) eixo  $\alpha$ ; b) eixo  $\beta$ .



Fonte: Autor.

### 2.3 CONCLUSÃO

O presente capítulo apresentou a modelagem do inversor trifásico conectado à rede por meio de filtro LCL. A saturação magnética suave dos indutores do filtro e incertezas na impedância no ponto de conexão com a rede foram levadas em consideração a partir de um modelo com parâmetros variantes no tempo. Ao transformar o sistema para o referencial estacionário, o modelo resultante apresentou acoplamento entre as coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ . Isto se deve à diferença dos valores de indutância por fase, causada pela saturação magnética. No caso de indutores sem saturação e iguais entre as fases, o modelo apresentado recupera a representação usual da literatura, dada por dois circuitos monofásicos idênticos e desacoplados.

### 3 ESTUDOS DE CASO E PROJETO NOMINAL

Neste Capítulo, serão apresentados dois estudos de caso para inversores trifásicos conectados à rede por meio de filtro LCL, evidenciando o efeito da saturação magnética suave dos indutores do filtro. Em seguida, apresenta-se uma estratégia para o projeto analítico de controladores por realimentação de estados em tempo discreto, incluindo o atraso de implementação digital e controladores ressonantes para o rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos. A metodologia de projeto apresentada baseia-se em escolhas de valores nominais para os parâmetros da planta, e tem como objetivo evidenciar os efeitos da incerteza paramétrica da impedância de rede e da saturação magnética no desempenho do sistema em malha fechada, motivando assim as propostas desta Tese.

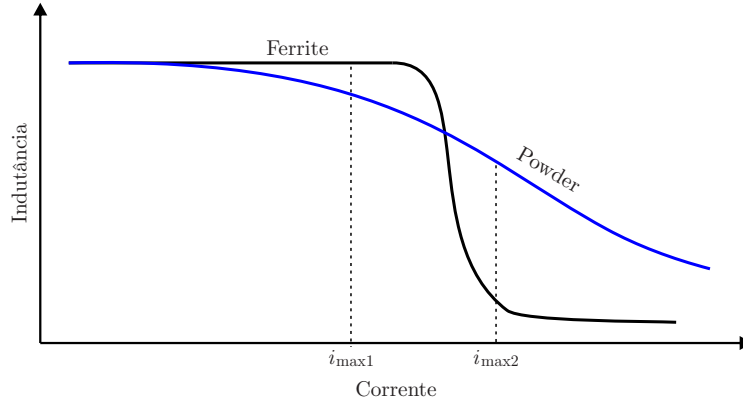
#### 3.1 EFEITO DA SATURAÇÃO SUAVE EM INDUTORES: ESTUDOS DE CASO

Considere que, analisando-se um período de comutação em inversores PWM, a corrente sobre os indutores pode ser vista como uma série de correntes de magnetização e desmagnetização. Isto significa que, em cada período de comutação, o indutor pode ser visto como operando com uma corrente de magnetização CC, que corresponde ao valor instantâneo da corrente alternada sobre ele (WU et al., 2019). Neste sentido, uma vez que indutores com núcleos *powder* (i.e. compostos por pó de materiais magnéticos) são caracterizados por saturação suave, uma variação de indutância será produzida à medida que a corrente de polarização variar (JAYALATH; ONGAYO; HANIF, 2017).

Para exemplificar a característica de saturação suave, considere a Figura 3.1, na qual é mostrado um comparativo entre curvas teóricas de indutância *versus* corrente para indutores com núcleo de ferrite e para indutores com núcleo *powder*. Note que, para o caso de indutores com núcleo de ferrite e entreferro, a saturação magnética é abrupta, causando uma redução brusca da indutância a partir de uma determinada corrente de magnetização. Por este motivo, indutores com núcleo de ferrite devem ser projetados para operar na região linear da curva de magnetização (indutância constante), devendo manter uma distância segura da saturação para evitar consequências destrutivas para o dispositivo caso o ponto de operação varie ou a curva mostrada desloque-se para a esquerda (o que acontece com o aumento da temperatura). Em contrapartida, indutores com núcleos *powder* possuem uma característica de saturação magnética suave e, portanto, há uma variação suave da indutância em função da corrente. Isto permite projetar os indutores para operar na região não linear da curva de magnetização, possibilitando obter uma maior densidade de fluxo e de potência (WU et al., 2019).

Portanto, o efeito da saturação suave pode ser visto como uma variação da in-

Figura 3.1 – Exemplo comparativo de curvas de indutância *versus* corrente para indutores com núcleo de ferrite e núcleos compostos por pó de materiais magnéticos (*powder cores*).



Fonte: Autor.

Indutância no tempo, contida em um intervalo limitado, que pode ser representado por

$$L_1(t) \in \mathcal{U}_{L_1}, \mathcal{U}_{L_1} = \{L_1 \in \mathfrak{R}^+ : L_{1min} \leq L_1 \leq L_{1max}\} \quad (3.1)$$

$$L_2(t) \in \mathcal{U}_{L_2}, \mathcal{U}_{L_2} = \{L_2 \in \mathfrak{R}^+ : L_{2min} \leq L_2 \leq L_{2max}\} \quad (3.2)$$

em que  $L_2(t)$  inclui o efeito de  $L_{f2}(t)$  e  $L_g(t)$ , conforme dado pela equação (2.27).

A indutância de rede,  $L_g(t)$ , é um parâmetro incerto e possivelmente variante no tempo, contido no intervalo dado por

$$L_g(t) \in \mathcal{U}_{L_g}, \mathcal{U}_{L_g} = \{L_g \in \mathfrak{R}^+ : L_{gmin} \leq L_g \leq L_{gmax}\} \quad (3.3)$$

que permite representar diferentes condições de rede, por exemplo, variando de rede forte até rede fraca.

### 3.1.1 Estudo de caso 1

Os parâmetros do estudo de caso 1 são apresentados na Tabela 3.1, e têm como base (REZNIK et al., 2014), que apresenta um método de projeto de filtros LCL. Os indutores do lado do conversor e do lado da rede possuem os parâmetros descritos na Tabela 3.2. Seus núcleos são do tipo *powder*, de material Sendust (Kool M $\mu$ <sup>®</sup>), da fabricante Magnetics), liga metálica composta por ferro, silício e alumínio.

Para ilustrar a característica de saturação suave dos indutores, a Figura 3.2(a) mostra a variação da indutância do lado do conversor em função da corrente. Para as simulações no tempo que serão apresentadas na sequência deste capítulo, o comportamento não linear dos indutores será modelado por meio de *look-up-tables* geradas a partir



desta curva. Para fins ilustrativos, a Figura 3.2(b) mostra a variação da respectiva indutância no tempo, para cada fase, considerando correntes trifásicas sobre os indutores, com componente fundamental de 30 A de pico e frequência 60 Hz. Note que as formas de onda das indutâncias em função do tempo exibem o dobro desta frequência, uma vez que as indutâncias são funções dos módulos das correntes. As oscilações causadas pelas componentes de alta frequência são omitidas nesta figura devido ao pequeno impacto nos limites de variação descritos em (3.1) e (3.2).

Curvas semelhantes podem ser obtidas para os indutores do filtro do lado da rede, conforme mostra a Figura 3.3.

Os perfis de indutância são obtido a partir dos dados do núcleo, disponíveis em (MAGNETICS, 2016a) e (MAGNETICS, 2016b), considerando que a indutância é diretamente proporcional a permeabilidade magnética e utilizando a seguinte fórmula

$$\text{permeabilidade (\% do valor inicial)} = \frac{1}{a + b(iN/l_e)^c} \quad (3.4)$$

obtida a partir de (MAGNETICS, 2019).

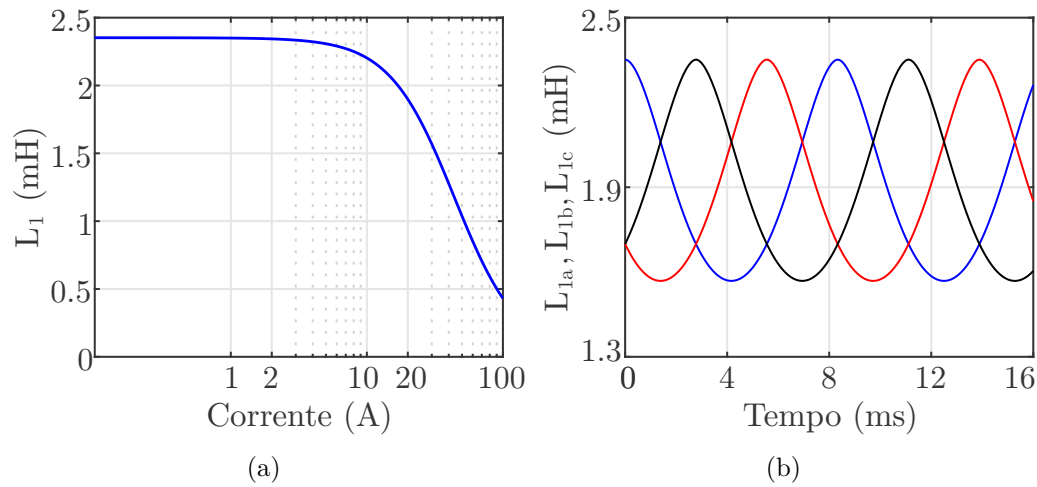
Tabela 3.1 – Estudo de caso 1: parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor
Potência nominal	5 kW
Tensão do barramento CC	400 V
Indutância nominal do lado do conversor - $L_1$	2,33 mH
$L_1$ : fabricante do núcleo / material magnético	Magnetics / Kool M $\mu$
Capacitor do filtro $C_f$	15 $\mu$ F
Indutância nominal do lado da rede - $L_{f2}$	0,045 mH
$L_{f2}$ fabricante do núcleo / material magnético	Magnetics / Kool M $\mu$
Resistência da rede $r_g$	0,8 $\Omega$
Indutância da rede [ $L_{gmin}, L_{gmax}$ ]	[2,5 7,5] mH
Tensão da rede (fase RMS)	120 V; 60 Hz
Frequência de comutação	15 kHz

Tabela 3.2 – Estudo de caso 1: parâmetros dos indutores do filtro.

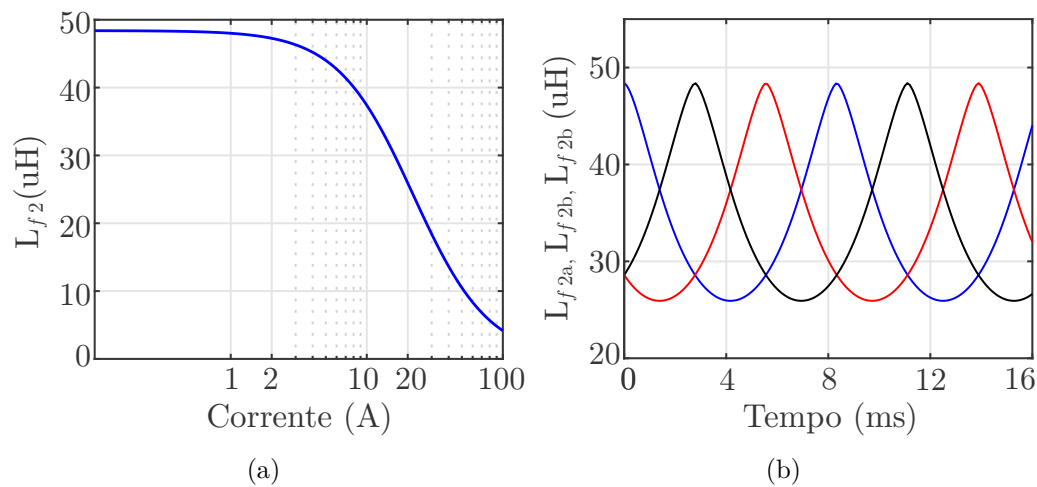
Parâmetros	$L_1$	$L_{f2}$
Código do fabricante	77102A7	77258A7
Permeabilidade relativa do núcleo e $A_L$ (nH/T <sup>2</sup> )	26 $\mu$ e 48	90 $\mu$ and 121
Indutância inicial (a vazio)	2,352 mH	48,4 $\mu$ H
Comprimento do caminho magnético ( $l_e$ )	24,3 cm	9,84 cm
Número de voltas do enrolamento ( $N$ )	99	20
Número de núcleos empilhados	5	1
Parâmetros para geração das curvas	$a = 0,01$	$a = 0,01$
	$b = 7,98 \cdot 10^{-7}$	$b = 2,70 \cdot 10^{-5}$
	$c = 1,819$	$c = 1,558$

Figura 3.2 – Estudo de caso 1 - característica de saturação suave do indutor do lado do conversor: a) indutância  $\times$  corrente; b) indutâncias por fase  $\times$  tempo.



Fonte: Autor.

Figura 3.3 – Estudo de caso 1 - característica de saturação suave do indutor do lado da rede: a) indutância  $\times$  corrente; b) indutâncias por fase  $\times$  tempo.



Fonte: Autor.

### 3.1.2 Estudo de caso 2

Os parâmetros nominais para o estudo de caso 2 são apresentados na Tabela 3.3, conforme bancada experimental disponível no laboratório. Os parâmetros dos indutores são apresentados na Tabela 3.4.

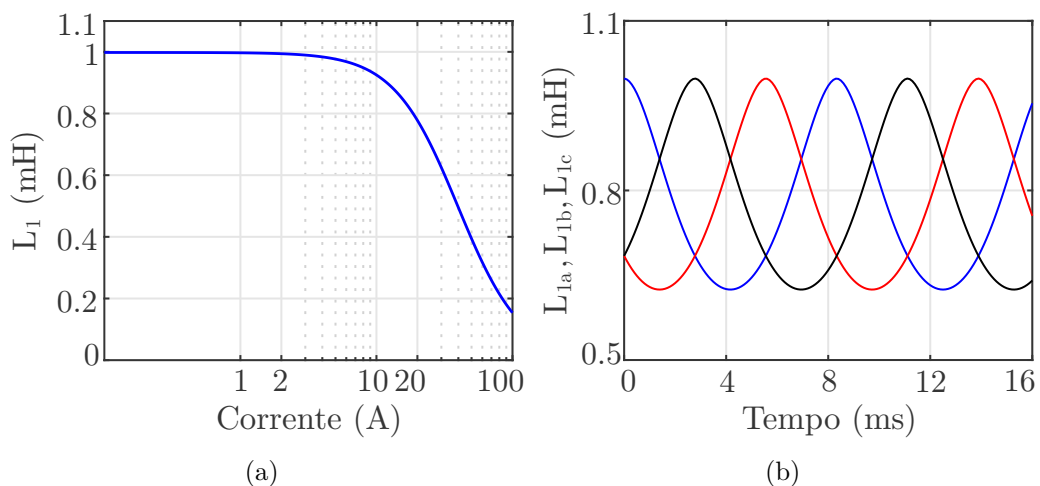
As Figuras 3.4(a) e (b) ilustram a característica de saturação suave dos indutores do lado do conversor, considerando correntes senoidais trifásicas com 30 A de pico e frequência 60 Hz. O mesmo é feito na Figura 3.5, para os indutores do lado da rede.

Tabela 3.3 – Estudo de caso 2: parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor
Potência nominal	5,4 kW
Tensão do barramento CC	400 V
Indutância nominal do lado do conversor - $L_1$	1,00 mH
$L_1$ : fabricante do núcleo / material magnético	Magmattec / Sendust
Capacitor do filtro $C_f$	62 $\mu$ F
Indutância nominal do lado da rede - $L_{f2}$	0,30 mH
$L_{f2}$ : fabricante do núcleo / material magnético	Magmattec / Iron Powder
Resistência da rede $r_g$	0 $\Omega$
Indutância da rede [ $L_{gmin}$ , $L_{gmax}$ ]	[0 1] mH
Tensão da rede (fase RMS)	127 V; 60 Hz
Frequência de comutação	10,020 kHz

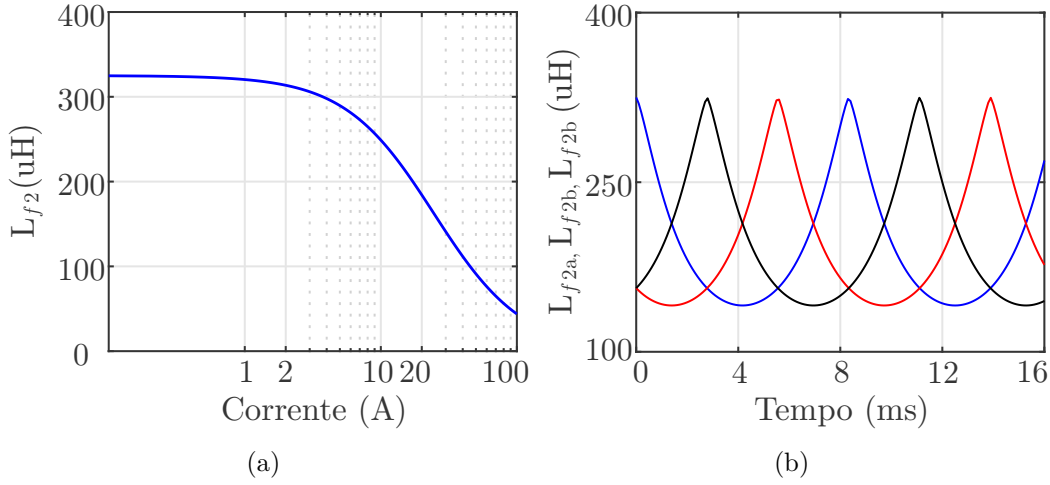
Tabela 3.4 – Estudo de caso 2: parâmetros dos indutores do filtro.

Parâmetros	$L_1$	$L_{f2}$
Código do fabricante	MMTS60T13325	MMT026T7725
Permeabilidade relativa do núcleo e $A_L$ (nH/T <sup>2</sup> )	60 $\mu$ e 156	75 $\mu$ e 176
Indutância inicial (a vazio)	0,998 mH	0,325 mH
Comprimento do caminho magnético ( $l_e$ )	32,429 cm	19.8 cm
Número de voltas do enrolamento ( $N$ )	80	43
Número de núcleos empilhados	1	1
	$a = 0,01$	$a = 0,01$
Parâmetros para geração das curvas	$b = 2,145 \cdot 10^{-6}$	$b = 5,221 \cdot 10^{-5}$
	$c = 1,843$	$c = 1,322$

Figura 3.4 – Estudo de caso 2 - característica de saturação suave do indutor do lado do conversor: a) indutância  $\times$  corrente; b) indutâncias por fase  $\times$  tempo.

Fonte: Autor.

Figura 3.5 – Estudo de caso 2 - característica de saturação suave do indutor do lado da rede: a) indutância  $\times$  corrente; b) indutâncias por fase  $\times$  tempo.



Fonte: Autor.

### 3.2 MODELO NOMINAL AUMENTADO EM TEMPO DISCRETO

Para permitir o projeto e implementação de uma estratégia digital de realimentação de estados, nesta seção será desenvolvido um modelo aumentado em tempo discreto, considerando inicialmente um sistema linear invariante no tempo. O modelo é dado em coordenadas estacionárias, incluindo o atraso de uma amostra relativo à implementação digital e controladores ressonantes, para permitir o adequado rastreamento de correntes senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos provenientes das tensões de rede.

Assumindo um conjunto de parâmetros nominais e desprezando a saturação magnética, é possível recuperar o modelo em coordenadas estacionárias, apresentado na Seção 2.2.1, reescrito aqui como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{uc} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{B}_{uc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dc} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{B}_{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g\alpha}(t) \\ v_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

com

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1}(r_1 + r_f) & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1}r_f \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ \frac{1}{L_2}r_f & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2}(r_f + r_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{uc} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

em que  $L_1$  é a indutância nominal do filtro do lado do conversor, e  $L_2 = L_{f2} + L_g$ , sendo  $L_{f2}$  a indutância nominal do filtro do lado da rede e  $L_g$  a indutância nominal da rede.

Primeiramente, para aplicação de uma lei de controle digital, considere a discretização da planta com um período de amostragem  $T_s$  suficientemente pequeno. O modelo

discretizado, para uma das coordenadas, é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{ud} u(k) + \mathbf{B}_{dd} v_g(k) \\ y(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k) = i_g(k)\end{aligned}\quad (3.7)$$

em que  $\mathbf{x}(k) = [i_1(k) \ v_c(k) \ i_g(k)]'$ . Assumindo uma discretização exata, as matrizes são dadas por

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T_s}, \quad \mathbf{B}_{ud} = \left( \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \right) \mathbf{B}_{uc}, \quad \mathbf{B}_{dd} = \left( \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \right) \mathbf{B}_{dc} \quad (3.8)$$

Sob as hipóteses de um circuito trifásico equilibrado e sem a presença de saturação magnética, o modelo em (3.7)–(3.8) é válido tanto para a coordenada  $\alpha$  quanto para a coordenada  $\beta$  e, por este motivo, estes subíndices são omitidos.

Desprezando-se as resistências parasitas do circuito, é possível solucionar (3.8) a partir da decomposição em autovalores (KUKKOLA; HINKKANEN; ZENGER, 2015), resultando nas seguintes expressões analíticas de forma fechada:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_2 \cos(\omega_p T_s)}{L_1+L_2} & \frac{-\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p L_1} & \frac{L_g(1-\cos(\omega_p T_s))}{L_1+L_2} \\ \frac{\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p C_f} & \cos(\omega_p T_s) & \frac{-\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p C_f} \\ \frac{L_1(1-\cos(\omega_p T_s))}{L_1+L_2} & \frac{\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p L_2} & \frac{L_g+L_1 \cos(\omega_p T_s)}{L_1+L_2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}_{ud} = \frac{1}{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} T_s + \frac{L_2 \sin(\omega_p T_s)}{\omega_p L_1} \\ L_2 (1 - \cos(\omega_p T_s)) \\ T_s - \frac{\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dd} = \frac{1}{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} -T_s + \frac{\sin(\omega_p T_s)}{\omega_p} \\ L_1 (1 - \cos(\omega_p T_s)) \\ -T_s - \frac{L_1 \sin(\omega_p T_s)}{\omega_p L_2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

em que  $\omega_p$  é a frequência de ressonância do filtro LCL, dada por

$$\omega_p = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_f}} \quad (3.11)$$

Em seguida, considere a adição de um estado  $\phi$  para representar o atraso de implementação do sinal de controle (ASTRÖM; WITTENMARK, 1997), levando à seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \phi(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_{ud} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dd} \\ 0 \end{bmatrix} v_g(k) \quad (3.12)$$

Para assegurar rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos da rede, controladores ressonantes podem ser incluídos ao modelo. Para tanto, considere inicialmente que, em tempo contínuo, um controlador ressonante é dado pela

seguinte função transferência

$$G_{res}(s) = \frac{U_{res}(s)}{E(s)} = k_{r3} + \frac{k_{r1} + k_{r2}s}{s^2 + 2\zeta\omega_r s + \omega_r^2} \quad (3.13)$$

em que  $E(s) = I_{ref}(s) - I_g(s)$  é o erro de rastreamento de corrente, e  $k_{r1}$ ,  $k_{r2}$  e  $k_{r3}$  são os ganhos do controlador ressonante. Os parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_r$  são, respectivamente, o coeficiente de amortecimento e a frequência deste controlador, a serem definidos pelo projetista.

Uma realização em espaço de estados para o controlador (3.13) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}_r(t) &= \mathbf{R}_r \boldsymbol{\xi}_r(t) + \mathbf{T}_r e(t) \\ u_{res}(t) &= \mathbf{C}_r \boldsymbol{\xi}_r(t) + D_r e(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que  $\boldsymbol{\xi}_r(t) = [\xi_{r1}(t) \ \xi_{r2}(t)]'$  representa os estados internos de um controlador ressonante, e as demais matrizes são dadas por

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r^2 & -2\zeta\omega_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = [k_{r1} \quad k_{r2}], \quad D_r = k_{r3} \quad (3.15)$$

Visando à implementação digital e integração com a representação em (3.12), o modelo (3.14) deve ser discretizado, de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_r(k+1) &= \mathbf{R}_{rd} \boldsymbol{\xi}_r(k) + \mathbf{T}_{rd} e(k) \\ u_{res}(k) &= \mathbf{C}_{rd} \boldsymbol{\xi}_r(k) + D_{rd} e(k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assumindo uma discretização exata, as novas matrizes do modelo são dadas por

$$\mathbf{R}_{rd} = e^{\mathbf{R}_r T_s}, \quad \mathbf{T}_{rd} = \left( \int_0^{T_s} e^{\mathbf{R}_r \tau} d\tau \right) \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{C}_{rd} = \mathbf{C}_r, \quad D_{rd} = D_r \quad (3.17)$$

Para melhorar a rejeição destes distúrbios harmônicos provenientes das tensões de rede, um número arbitrário ( $n$ ) de controladores ressonantes pode ser incluído no sistema de malha fechada, levando à representação

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \mathbf{R} \boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T} e(k) \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{r.1} \\ \xi_{r.2} \\ \vdots \\ \xi_{r.n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{rd.1} & & & \\ & \mathbf{R}_{rd.2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_{rd.n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{rd.1} \\ \mathbf{T}_{rd.2} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{rd.n} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

em que  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{R}^{2n \times 1}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$  e  $\mathbf{T} \in \mathfrak{R}^{2n \times 1}$ . Cada um dos  $n$  controladores ressonantes em (3.19) é projetado de acordo com as equações (3.13)-(3.17), sendo o vetor de estados, matriz dinâmica e matriz de entrada de cada controlador dados, respectivamente, por  $\boldsymbol{\xi}_{r.i}$ ,

$\mathbf{R}_{rd,i}$  e  $\mathbf{T}_{rd,i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Considerando o erro de rastreamento de corrente como  $e(k) = i_{ref}(k) - \mathbf{C} \mathbf{x}(k)$ , os estados internos dos controladores ressonantes, em (3.18), podem ser incluídos no modelo em (3.12), levando ao seguinte modelo aumentado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \phi(k+1) \\ \boldsymbol{\xi}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_{ud} & \mathbf{0}_{3 \times 2n} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ -\mathbf{T}\mathbf{C} & \mathbf{0}_{2n \times 1} & \mathbf{R}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dd} \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} v_g(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 0 \\ \mathbf{T}_{2n \times 1} \end{bmatrix} i_{ref}(k) \quad (3.20)$$

Em uma forma mais compacta, (3.20) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(k+1) &= \mathbf{G} \boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u u(k) + \mathbf{H}_d v_g(k) + \mathbf{H}_{ref} i_{ref}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\rho}(k), \quad \mathbf{C}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{1 \times (2n+1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.3 PROJETO ANALÍTICO BASEADO EM PARÂMETROS NOMINAIS

Nesta seção, controladores por realimentação de estados serão projetados de forma analítica, baseados no modelo nominal desenvolvido na seção anterior, visando evidenciar, em uma análise posterior, os efeitos da incerteza paramétrica na indutância da rede e da saturação magnética nos indutores do filtro.

Para simplificar o equacionamento, considere que apenas um controlador ressonante ( $n = 1$ ) é incluído no modelo aumentado, tal que  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathbf{T} \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ . Como resultado, obtém-se um sistema aumentado (3.20)–(3.21) de sexta ordem, em que  $\boldsymbol{\rho} \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ .

Considere agora a seguinte lei de controle por realimentação de estados

$$u(k) = \mathbf{K} \boldsymbol{\rho}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & K_\phi & \mathbf{K}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Substituindo a lei de controle (3.22) no sistema aumentado em (3.21), obtém-se a seguinte equação dinâmica para o sistema em malha fechada

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}) \boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_d v_g(k) + \mathbf{H}_{ref} i_{ref}(k) \quad (3.23)$$

A partir de (3.23), considerando as tensões de rede como um distúrbio externo e fazendo  $v_g(k) = 0$ , é possível obter a função transferência em tempo discreto que relaciona a referência  $i_{ref}(k)$  com a saída  $i_g(k)$ , tal que

$$\frac{i_g(z)}{i_{ref}(z)} = \mathbf{C}_{aug} (z \mathbf{I} - (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}))^{-1} \mathbf{H}_{ref} \quad (3.24)$$

Desenvolvendo a inversa, o denominador resultante da função transferência é dado por

$$P(z) = \det(z \mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}) \quad (3.25)$$

e é chamado de polinômio característico do sistema em malha fechada.

Observe que, para sistemas invariantes no tempo com parâmetros precisamente conhecidos, se o sistema é controlável, então é possível calcular um vetor de ganhos  $\mathbf{K}$  tal que o polinômio característico  $P(z)$  seja igual a um polinômio alvo

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z - \delta_1)(z - \delta_2)(z - \delta_3)(z - \delta_4)(z - \delta_5)(z - \delta_6) \\ &= z^6 + Q_5 z^5 + Q_4 z^4 + Q_3 z^3 + Q_2 z^2 + Q_1 z + Q_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

A escolha deste polinômio  $Q(z)$  permite alocar os polos de malha fechada em posições arbitrárias (i.e.,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ ), definidas pelo projetista de controle com base na dinâmica desejada para o sistema em malha fechada. Cabe observar que, uma vez que o polinômio  $P(z)$  tem coeficientes reais, faz-se necessário escolher polos reais ou pares complexos conjugados.

Para calcular o vetor de ganhos  $\mathbf{K}$  que permite obter  $P(z) = Q(z)$ , uma estratégia eficiente é utilizar a fórmula de Ackermann (DORF; BISHOP, 2008). Então, para o caso particular do sistema aumentado de sexta ordem, tem-se

$$\mathbf{K} = \mathcal{M} \cdot \mathcal{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (3.27)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_u & \mathbf{G} \mathbf{H}_u & \mathbf{G}^2 \mathbf{H}_u & \mathbf{G}^3 \mathbf{H}_u & \mathbf{G}^4 \mathbf{H}_u & \mathbf{G}^5 \mathbf{H}_u \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{G}^6 + Q_5 \mathbf{G}^5 + Q_4 \mathbf{G}^4 + Q_3 \mathbf{G}^3 + Q_2 \mathbf{G}^2 + Q_1 \mathbf{G} + Q_0 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.28)$$

É importante ressaltar que  $\mathcal{C}$  é a matriz de controlabilidade do sistema (3.21), para o caso particular de sexta ordem. Então, se este sistema é controlável,  $\mathcal{C}$  é inversível e existe um ganho  $\mathbf{K}$  que aloca todos os polos de malha fechada, ou seja, as raízes de  $P(z)$ , nas posições definidas pelo polinômio alvo  $Q(z)$ . Em contrapartida, embora as posições desejadas para os polos de malha fechada possam ser escolhidas arbitrariamente, devido a restrições como saturação do atuador e limitação de banda passante, não há garantia de que o ganho  $\mathbf{K}$  resultante produza ações de controle factíveis na prática. Portanto, uma relação de compromisso entre o desempenho dinâmico e o esforço de controle deve ser levada em consideração ao definir a alocação de polos.

Ainda, embora o sistema real esteja sujeito a variações paramétricas (indutâncias de rede e saturação magnética do filtro), nesta seção será investigado o projeto de ganhos fixos de controle baseado em uma escolha nominal para os parâmetros da planta. Por este motivo, embora seja possível alocar precisamente os polos de malha fechada para



a condição nominal, não é possível garantir a alocação dos polos em pontos específicos quando os parâmetros da planta pertencem a intervalos. Sendo assim, uma relação de compromisso entre robustez e desempenho dinâmico também deve ser considerada ao determinar a alocação de polos desejada, e a robustez deve ser verificada *a posteriori*.

Tendo em vista estas considerações, a próxima subseção propõe um procedimento para projeto baseado em parâmetros nominais.

### 3.3.1 Procedimento de projeto baseado em parâmetros nominais

Inicialmente, deve-se escolher um modelo nominal para os parâmetros da planta, desprezando o fenômeno da saturação suave e as variações na indutância da rede. Por simplicidade, considera-se os valores nominais de projeto para os indutores do filtro,  $L_1$  e  $L_{f2}$ . Quanto à indutância da rede, sugere-se considerar o menor valor do intervalo ( $L_g = L_{gmin}$ ), uma vez que esta condição apresenta a maior frequência de ressonância. Diferentes escolhas para  $L_g$  nominal serão exploradas neste capítulo, em uma validação numérica aplicada a um estudo de caso.

Considere agora a seguinte estratégia para a definição do polinômio alvo (posições desejadas para os polos de malha fechada) e cálculo dos ganhos de controle:

1. Em tempo contínuo, considere que um par de polos complexos conjugados é escolhido para determinar a dinâmica dominante do sistema em malha fechada. Estes polos são definidos por

$$s^2 + 2 \zeta_{dom} \omega_{dom} s + \omega_{dom}^2 \quad (3.29)$$

em que  $\zeta_{dom}$  define o amortecimento, e deve ser escolhido próximo de 1 para evitar oscilações e sobrelevações excessivas nas respostas em malha fechada. O parâmetro  $\omega_{dom}$  deve ser escolhido com base na resposta dinâmica desejada. Os respectivos polos em tempo discreto podem ser escritos como

$$\delta_{1,2} = e^{\left(-\zeta_{dom} \pm j \sqrt{1-\zeta_{dom}^2}\right) \cdot \omega_{dom} \cdot T_s} \quad (3.30)$$

Note que, se  $\delta_{1,2}$  são os polos dominantes, então o módulo  $|\delta_{1,2}|$  define uma limitação para a taxa de decaimento dos modos das respostas transitórias em malha fechada.

2. Em tempo contínuo, determine a frequência e o amortecimento desejados para os polos relacionados a ressonância do filtro LCL, tal que

$$s^2 + 2 \zeta_{damp} \omega_{damp} s + \omega_{damp}^2 \quad (3.31)$$

Estes polos são então discretizados, resultando em

$$\delta_{3,4} = e^{\left(-\zeta_{damp} \pm j\sqrt{1-\zeta_{damp}^2}\right) \cdot \omega_{damp} \cdot T_s} \quad (3.32)$$

Para prover um amortecimento ativo adequado do pico de ressonância do filtro LCL, é usual escolher  $0,1 \leq \zeta_{damp} \leq 0,4$  (KUKKOLA; HINKKANEN; ZENGER, 2015). Ainda, para reduzir o esforço de controle, este par de polos deve ser mantido próximo a sua frequência natural  $\omega_p$ , dada em (3.11). Caso necessário,  $\omega_{damp}$  e  $\zeta_{damp}$  podem ser ajustados para que o comportamento ressonante dos polos  $\delta_{3,4}$  não afete significativamente a dinâmica desejada, imposta pelos polos  $\delta_{1,2}$ .

3. O quinto polo é definido como  $\delta_5 = 0$ , cuja origem é o atraso de implementação digital.
4. O sexto polo é definido com um polo real positivo, com módulo ligeiramente inferior a  $|\delta_{1,2}|$ , para manter a dominância deste par e ao mesmo tempo evitar esforços de controle elevados.
5. Dados os polos  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ , escolhidos conforme passos 1–4, determine o polinômio alvo  $Q(z)$  em (3.26) e calcule os ganhos de controle utilizando (3.27), para a planta (3.21), com uma escolha nominal para os parâmetros.

### 3.4 PROJETO NOMINAL APLICADO AO ESTUDO DE CASO 1

Para verificar o desempenho do sistema em malha fechada com o controlador projetado utilizando o procedimento mostrado anteriormente, baseado em parâmetros nominais, e investigar os efeitos das variações paramétricas, considere o estudo de caso 1, com parâmetros dados nas Tabelas 3.1 e 3.2. Este estudo de caso foi escolhido pois possui uma maior faixa de variação da indutância da rede, o que permite explorar melhor os resultados. A escolha nominal para os parâmetros de projeto é dada por  $L_1 = 2,33$  mH,  $L_{f2} = 0,045$  mH e  $L_g = L_{gmin} = 2,5$  mH, seguindo as recomendações dadas anteriormente.

Um controlador ressonante é incluído no modelo, e sintonizado em uma frequência  $\omega_r = 2\pi 60$  rad/s, com amortecimento  $\zeta = 0,0001$  e ganhos  $k_{r1} = \omega_r^2$ ,  $k_{r2} = 0$  e  $k_{r3} = 0$ . Seguindo os passos apresentados para determinar a alocação de polos, definem-se os seguintes parâmetros:  $\omega_{dom} = 2\pi 300$  rad/s,  $\zeta_{dom} = 0,707$ ,  $\omega_{damp} = 1,2\omega_p$  e  $\zeta_{damp} = 0,2$ . Como resultado, tem-se as seguintes posições desejadas para os polos de malha fechada:

$$\delta_{1,2} = 0,91138 \pm j 0,08121, \quad \delta_{3,4} = 0,74288 \pm j 0,48702, \quad \delta_5 = 0, \quad \delta_6 = 0,91 \quad (3.33)$$

A partir destes polos, obtém-se os coeficientes do polinômio alvo, e prosseguindo com o passo 5 do procedimento, após aplicar a fórmula de Ackermann, chega-se ao seguinte

vetor de ganhos:

$$\mathbf{K} = [-20,22026 \quad -0,74993 \quad -8,02922 \quad -0,52258 \quad 188,84796 \quad -182,24848] \quad (3.34)$$

Conforme mencionado anteriormente, devido ao fato de o ganho (3.34) ter sido projetado com base em uma condição nominal de parâmetros, não há garantia de estabilidade ou desempenho deste controlador frente a saturação magnética e variação da indutância de rede. Para tanto, são apresentadas nas próximas subseções análises de autovalores e simulações no tempo.

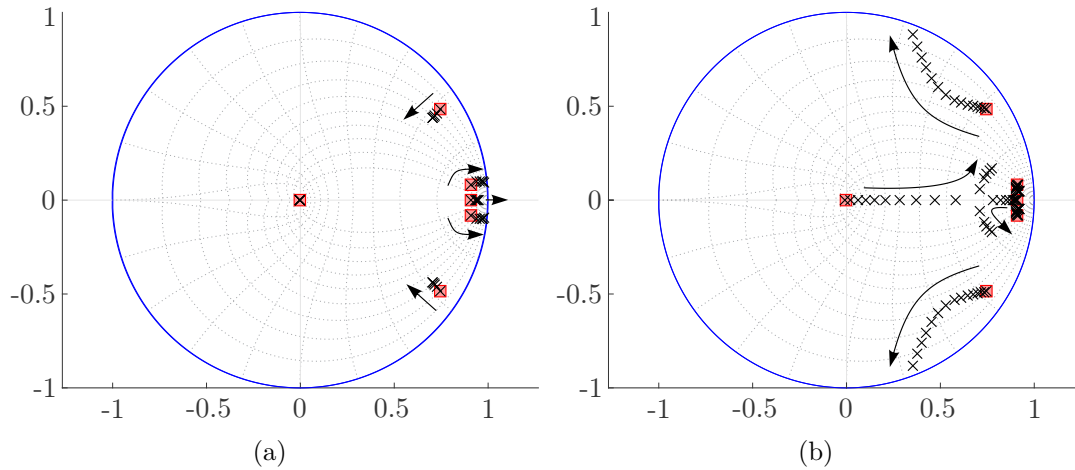
### 3.4.1 Análise de autovalores

Para esta análise de autovalores, assume-se que o sistema é invariante no tempo, porém considera-se uma varredura nos possíveis valores das indutâncias do filtro, cujos limites são fornecidos pelas características de saturação suave apresentadas nas Figuras 3.2 e 3.3, e nos possíveis valores da indutância da rede, conforme intervalo definido na Tabela 3.1. É importante observar que, considerando o sistema variante no tempo, esta análise é válida apenas como um indicativo da estabilidade.

Como primeira análise, é feita uma varredura em  $L_g$ , desde a condição de  $L_{gmin} = 2,5$  mH até  $L_{gmax} = 7,5$  mH, e os indutores do filtro são mantidos com valores nominais. Os autovalores para este ensaio são mostrados na Figura 3.6(a). É possível verificar que todos os autovalores estão contidos no círculo de raio unitário, o que indica a estabilidade do sistema. Ainda, os quadrados marcados em vermelho representam as raízes do polinômio alvo. Observa-se que, para condição nominal,  $L_g = L_{gmin}$ , é possível alocar os polos de malha fechada exatamente nas posições desejadas. A medida que a indutância de rede aumenta, os polos relacionados à ressonância do filtro LCL afastam-se da borda do círculo de raio unitário e tornam-se mais amortecidos, o que é favorável para a estabilidade do sistema. Em contrapartida, o segundo par de polos complexos torna-se menos amortecido e com frequência reduzida, o que tende a prejudicar o desempenho do sistema em malha fechada.

A Figura 3.6(b) mostra os autovalores para uma varredura em  $L_1$  desde 2,352 mH, valor da indutância a vazio, até 1,176 mH, valor da indutância sob efeito da saturação magnética, considerando uma corrente de aproximadamente 40 A (pico) sobre o indutor. É possível verificar que há um indicativo da estabilidade do sistema, uma vez que novamente todos os polos estão contidos no círculo de raio unitário, embora os efeitos da variação da indutância no tempo não sejam capturados por esta análise. Ainda assim, é possível perceber que à medida que o valor de  $L_1$  diminui (conforme indicado pelas setas), os polos relacionados à ressonância do filtro inicialmente tornam-se ligeiramente mais amortecidos, porém, a partir de um determinado valor, tornam-se significativamente mais oscilatórios.

Figura 3.6 – Autovalores de malha fechada com ganho (3.34), projetado para  $L_{gmin} = 2,5$  mH: a) varredura em  $L_g \in [2,5 \ 7,5]$  mH, desprezando a saturação magnética; b) varredura em  $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$  mH, para  $L_{f2}$  nominal e  $L_{gmin}$ .

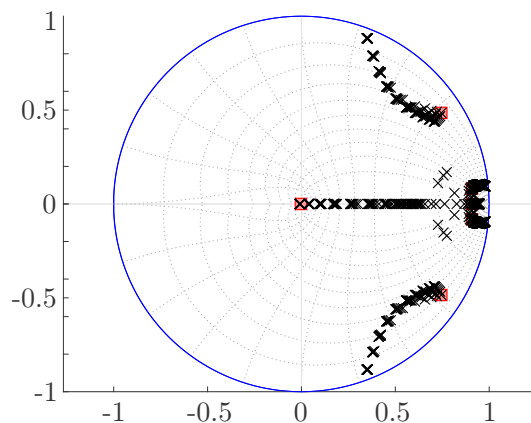


Fonte: Autor.

Por outro lado, os polos reais aproximam-se até que passam a formar um par de polos complexos conjugados, cujo amortecimento diminui à medida que  $L_1$  diminui.

Para analisar os efeitos combinados, considere agora a Figure 3.7, em que se verificam os autovalores para uma varredura em ambas as indutâncias do filtro e também na indutância da rede, tal que  $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$  mH,  $L_{f2} \in [18 \ 48 \ \mu\text{H}]$  e  $L_g \in [2,5 \ 7,5]$  mH. Conclusões semelhantes àquelas já apresentadas são válidas. Cabe observar que uma análise específica para varredura em  $L_{f2}$  não foi apresentada, pois os autovalores são pouco sensíveis à variação deste parâmetro, uma vez que o modelo considera a associação série entre este elemento e a indutância da rede.

Figura 3.7 – Autovalores de malha fechada com ganho (3.34), projetado para  $L_{gmin} = 2,5$  mH: varredura em  $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$  mH,  $L_{f2} \in [18 \ 48 \ \mu\text{H}]$  e  $L_g \in [2,5 \ 7,5]$  mH.



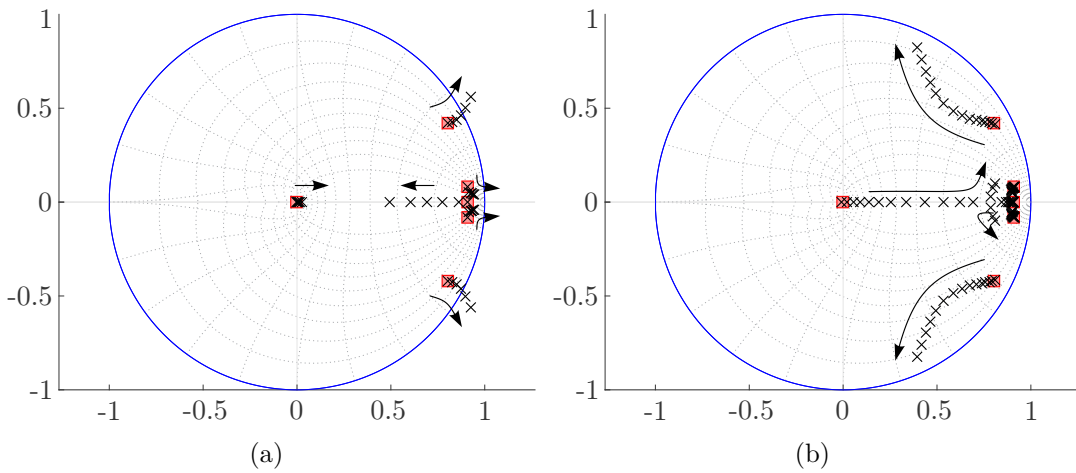
Fonte: Autor.

Para permitir estabelecer uma comparação com projetos realizados para outras escolhas nominais de parâmetros, o procedimento apresentado na Seção 3.3.1 é repetido, considerando os mesmos parâmetros utilizados para obter (3.34), porém considerando a escolha de  $L_{gmax}$  como indutância de rede nominal. Os ganhos resultantes são dados por

$$K = [-18,88454 \quad -0,78176 \quad -42,26867 \quad -0,48673 \quad 390,17871 \quad -376,64317] \quad (3.35)$$

As mesmas análises são realizadas para o sistema em malha fechada com o ganho em (3.35). Os autovalores são apresentados na Figura 3.8(a), para varredura em  $L_g$ , mantendo os indutores do filtro em seus valores nominais. Diferentemente do projeto realizado anteriormente, verifica-se agora que à medida que  $L_g$  diminui, ou seja, afasta-se do valor nominal (sentido indicado pelas setas), os polos associados à ressonância do filtro sofrem uma redução no amortecimento, até que se tornam instáveis para valores de  $L_g$  menores do que 4 mH. A Figura 3.8(b) mostra os autovalores para varredura em  $L_1$ , mantendo  $L_g = 7,5$  mH, e as conclusões são idênticas àsquelas apresentadas no projeto anterior. A Figura 3.9 mostra os autovalores combinando os efeitos das varreduras em  $L_1$ ,  $L_{f2}$  e  $L_g$ , para este projeto.

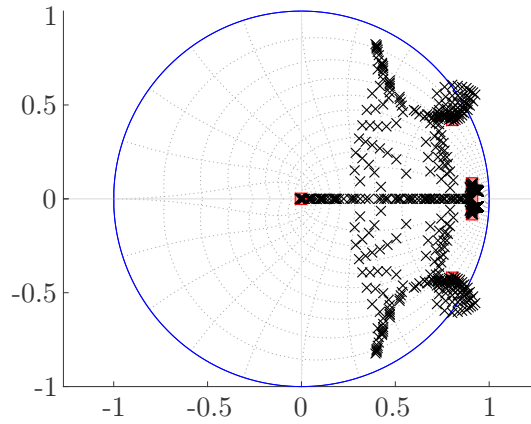
Figura 3.8 – Autovalores de malha fechada com ganho (3.35), projetado para  $L_{gmax} = 7.5$  mH: a) varredura em  $L_g \in [2,5 \quad 7,5]$  mH, desprezando a saturação magnética; b) varredura em  $L_1 \in [1,176 \quad 2,352]$  mH, para  $L_{f2}$  nominal e  $L_{gmax}$ .



Fonte: Autor.

Com base no exposto, pode-se concluir que, do ponto de vista da indutância da rede, a escolha de  $L_{gmin}$  como valor nominal permite obter mais facilmente resultados estáveis para toda a faixa de parâmetros, embora inevitavelmente ocorra uma degradação de desempenho à medida que os parâmetros se afastam da condição nominal. Análises semelhantes foram realizadas também para outras escolhas nominais de parâmetros, considerando, por exemplo, o valor médio da indutância no intervalo, ou seja,  $L_g = 0,5(L_{gmax} + L_{gmin})$ . Neste caso, também é possível obter resultados estáveis para

Figura 3.9 – Autovalores de malha fechada com ganho (3.35), projetado para  $L_{gmax} = 7.5$  mH: varredura em  $L_1 \in [1,176 \ 2,352]$  mH,  $L_{f2} \in [18 \ 48 \ \mu]$ H e  $L_g \in [2,5 \ 7,5]$  mH.



Fonte: Autor.

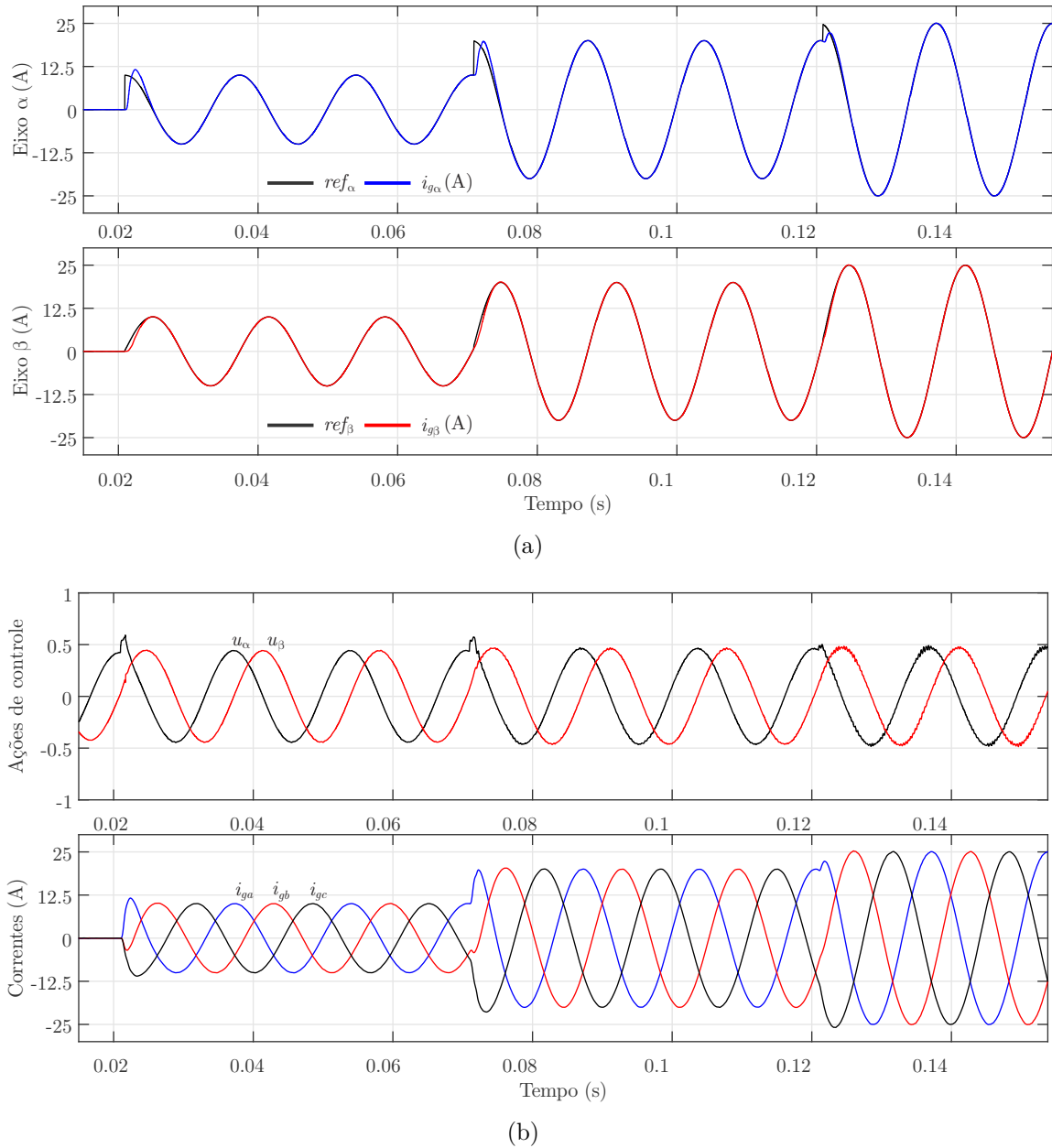
toda a faixa de parâmetros, porém com significativa degradação de desempenho em relação à escolha de  $L_{gmin}$ .

### 3.4.2 Simulações no tempo

Para contemplar de uma forma mais completa os efeitos da saturação suave dos núcleos magnéticos, realiza-se agora uma validação baseada em simulações no tempo, utilizando o software PSIM. A saturação suave é modelada utilizando indutores variáveis, em que o valor instantâneo de cada uma das indutâncias é fornecido por meio de *look-up-tables* que relacionam a indutância com a corrente, utilizando as curvas mostradas na Figura 3.2(a) e Figura 3.3(a). Esta simulação inclui também a modulação por largura de pulsos (modulação *space vector* (BOTTERON et al., 2003)) e um algoritmo de sincronismo com as tensões da rede elétrica (filtro de Kalman (CARDOSO et al., 2008)).

Considerando os ganhos em (3.34) e uma indutância de rede igual à condição nominal de projeto (i.e.,  $L_g = L_{gmin}$ ), realiza-se um teste de variação de potência ativa. Este teste é implementado por meio de sucessivas variações nas referências de corrente, com valores de pico variando de 0 até 10 A, no primeiro transitório, de 10 A para 20 A, no segundo transitório, e de 20 A para 25 A, no terceiro transitório. Na Figura 3.10(a) mostram-se as referências e as respostas das correntes injetadas na rede, em eixos estacionários. As respectivas ações de controle e as correntes trifásicas injetadas na rede são mostradas na Figura 3.10(b). Operando na condição nominal de projeto, é possível verificar que o sistema em malha fechada apresenta bom rastreamento de referência, com rápidas respostas transitórias, confirmando o indicado pela análise de autovalores. Entretanto, é importante observar que, à medida que a corrente aumenta, verifica-se uma

Figura 3.10 – Resultados de simulação com ganhos (3.34), para sistema operando com indutância de rede nominal,  $L_g = 2,5$  mH: (a) correntes de rede em eixos estacionários; (b) ações de controle e correntes de rede trifásicas.



Fonte: Autor.

crescente oscilação nas ações de controle, causadas pela saturação magnética dos núcleos.

Ainda considerando a condição de operação com indutância de rede nominal ( $L_g = L_{gmin}$ ), para evidenciar o efeito da saturação suave no desempenho do sistema em malha fechada, realiza-se um ensaio assumindo sucessivos degraus de amplitude nas correntes injetadas na rede. A Figura 3.11(a) mostra as ações de controle e as correntes trifásicas de rede. É possível verificar que, à medida que aumenta a corrente sobre os indutores, maior é a faixa de variação das indutâncias do filtro causada pela saturação magnética

e, conseqüentemente, aumentam também as oscilações na ação de controle e a distorção nas correntes trifásicas, prejudicando o desempenho do sistema em regime permanente. Neste ensaio, o controlador é capaz de manter a estabilidade do sistema até uma corrente de rede com pico de 27 A, valor a partir do qual verifica-se que a resposta torna-se instável. É importante observar que, embora a análise mostrada na Figura 3.7 não indique instabilidade para uma varredura nos valores de indutância compreendidos neste teste, a instabilidade mostrada aqui é causada pela variação das indutâncias no tempo, fenômeno que não é considerado na análise de autovalores.

Para confirmar a causa desta degradação no desempenho, este teste é repetido desprezando-se a saturação magnética e assumindo indutâncias do filtro com valores fixos, iguais aos valores nominais da Tabela 3.1. Neste caso, os resultados são mostrados na Figura 3.11(b), confirmando respostas com bom desempenho e a ausência de oscilações nas ações de controle e nas correntes de rede.

Para verificar a robustez do sistema frente à incerteza em  $L_g$ , assumamos agora o mesmo controlador em (3.34), porém que o sistema opera com indutância da rede  $L_g = L_{gmax}$ , ou seja, limite superior do intervalo considerado. O teste de variação de referências realizado na Figura 3.10 é repetido nesta nova condição, e os resultados são mostrados na Figura 3.12. Pode-se confirmar que o sistema permanece estável, porém há uma significativa degradação de desempenho nas respostas transitórias. Analisando-se as ações de controle, observa-se que há um esforço significativamente maior frente aos transitórios de referência, e significativas oscilações causadas pela saturação suave dos núcleos magnéticos. Estes resultados confirmam as conclusões obtidas a partir das Figuras 3.6(a) e (b), em que verificou-se que, embora permaneçam estáveis, os polos tornam-se menos amortecidos à medida que a indutância de rede aumenta e a indutância  $L_1$  diminui.

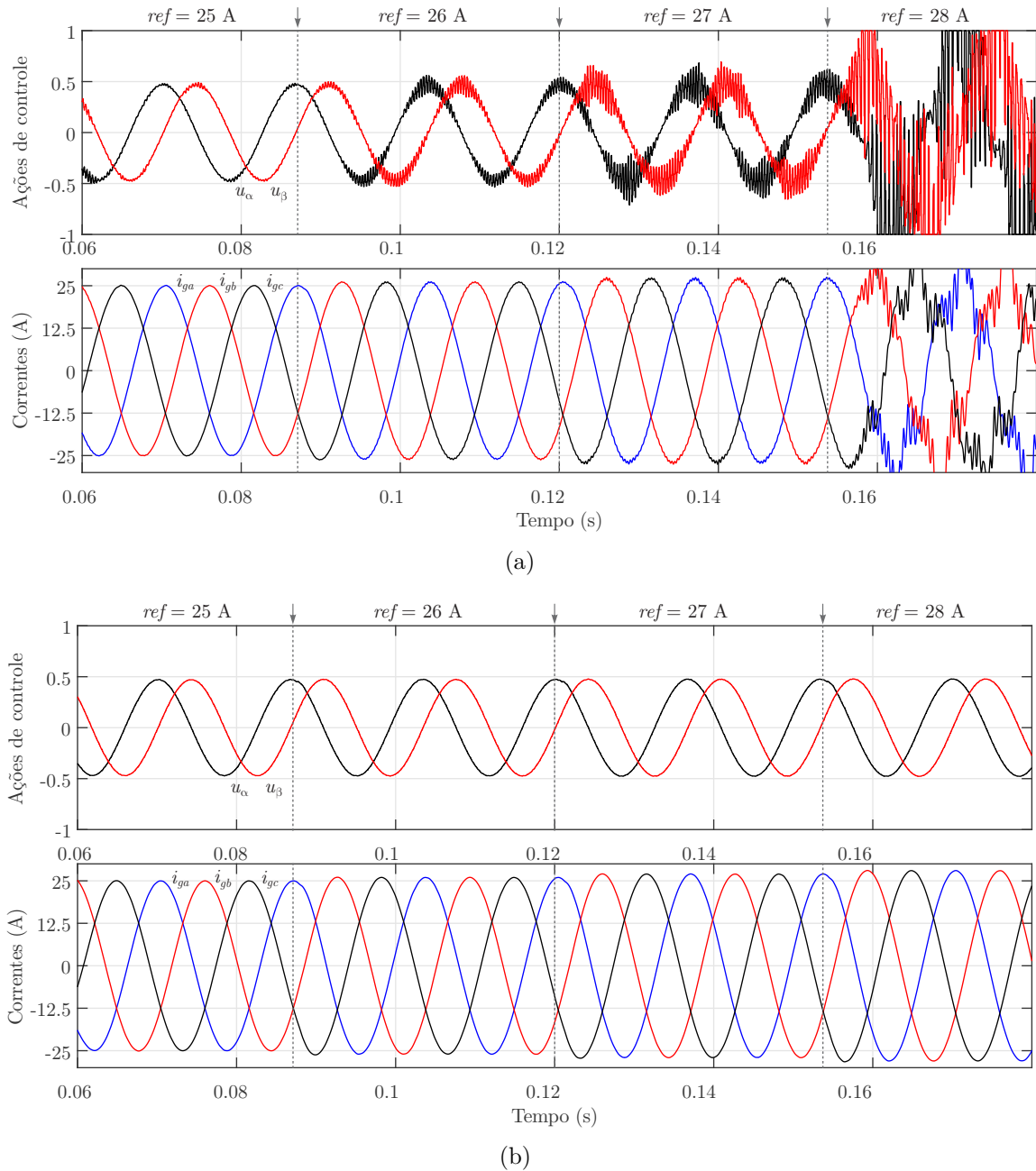
### 3.5 CONCLUSÕES

A partir das análises de autovalores mostradas nas Figuras 3.6 e 3.7, verifica-se que o procedimento de projeto descrito na Seção 3.3.1 permite obter resultados estáveis para toda a faixa de parâmetros, considerando uma varredura nos parâmetros  $L_1$ ,  $L_{f2}$  e  $L_g$ . Ainda assim, essa análise não considera o sistema variante no tempo, que é o caso quando existe saturação magnética suave, em que as indutâncias do filtro são funções das correntes que circulam por estes indutores. Por este motivo, simulações no tempo também foram apresentadas, evidenciando a degradação do desempenho do sistema quando sujeito à saturação magnética.

Neste sentido, é importante ressaltar que diferentes procedimentos e estratégias podem ser definidos para viabilizar o projeto de controladores baseados em parâmetros nominais e invariantes no tempo. Entretanto, existe a necessidade da determinação cuida-



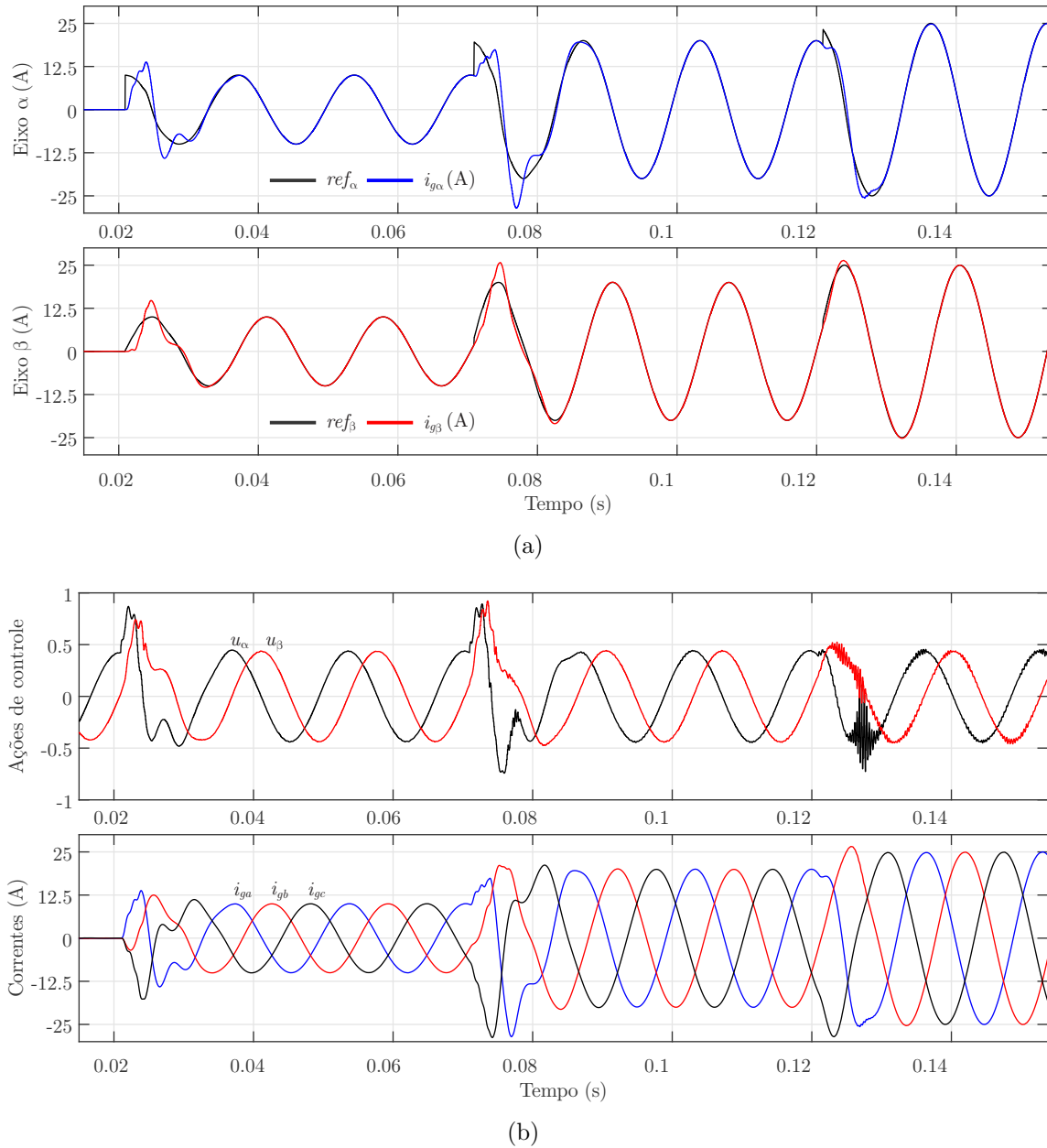
Figura 3.11 – Ensaio de rastreamento para aumento gradativo nas referências de corrente com ganhos (3.34) e operação com indutância de rede nominal,  $L_g = 2,5$  mH: (a) indutores sob efeito da saturação suave; (b) indutores lineares.



Fonte: Autor.

dosa de várias especificações de projeto, levando em consideração relações de compromisso entre desempenho dinâmico, robustez e esforço de controle, especialmente no cenário de variação paramétrica na indutância de rede e também saturação magnética dos indutores do filtro. Como consequência, o procedimento segue sendo desafiador para um projetista de controle, exigindo processos iterativos e a verificação *a posteriori* do desempenho do sistema em malha fechada incluindo os efeitos desprezados no projeto.

Figura 3.12 – Resultados de simulação com ganhos (3.34), para sistema operando com indutância de rede  $L_g = 7,5$  mH: (a) correntes de rede em eixos estacionários; (b) ações de controle e correntes de rede trifásicas.



Fonte: Autor.

Cabe observar também, que apenas um controlador ressonante foi considerado neste Capítulo. Entretanto, é comum utilizar múltiplos ressonantes configurados em frequências múltiplas da fundamental, para melhorar a rejeição de distúrbios harmônicos provenientes da rede. Nestes caso, a dimensão do sistema aumenta significativamente, o que torna um projeto por alocação de polos baseado em parâmetros nominais, como o descrito aqui, ainda mais desafiador.

Uma possível solução para atingir desempenho robusto frente a variações na indu-

tância de rede seria utilizar o equacionamento descrito neste Capítulo para desenvolver uma estratégia adaptativa indireta. Neste contexto, a partir da identificação de  $L_g$ , por exemplo, o modelo (3.21) poderia ser atualizado on-line, a partir das expressões analíticas de forma fechada descritas em (3.9) e (3.10). De posse do modelo atualizado e uma vez definida a alocação de polos desejada (coeficientes do polinômio alvo), é possível utilizar a Fórmula de Ackermann para obter ganhos adaptativos. Entretanto, uma formulação na forma fechada para o cômputo de (3.27), que seja compatível com implementação em DSP, deve ser obtida, assim como um estudo de sensibilidade do sistema em malha fechada aos erros de identificação dos parâmetros e também uma verificação preliminar da viabilidade de implementação dos ganhos calculados para toda a faixa de parâmetros.

Em contrapartida, o objetivo desta Tese é fornecer procedimentos diretos e sistemáticos para a obtenção de ganhos fixos de controle, com reduzida complexidade de implementação, capazes de garantir *a priori* estabilidade e desempenho sob efeito da saturação magnética e frente a incerteza e possível variação da indutância de rede. Sendo assim, no próximo capítulo, é apresentado um procedimento baseado em LMIs para resolver os problemas aqui descritos. O procedimento será testado para os dois estudos de caso apresentados, porém outros conjuntos de filtro e rede também podem ser considerados.



## 4 CONTROLADORES ROBUSTOS SOB SATURAÇÃO MAGNÉTICA

Neste capítulo, é apresentado um procedimento de projeto para controladores robustos que, a partir de modelos lineares variantes no tempo, leva em consideração: o efeito da saturação magnética dos indutores do filtro LCL, tanto do lado do conversor quanto do lado da rede; incertezas paramétricas na impedância equivalente do ponto de conexão com a rede; controladores ressonantes, para adequado rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos; o efeito do atraso de implementação digital.

A síntese do controlador é feita de forma sistemática e direta, utilizando um modelo politópico variante no tempo com quatro vértices, e condições LMI para prover ganhos fixos (robustos) de controle por realimentação de estados. Para executar as LMIs é necessário definir apenas um parâmetro  $0 < r \leq 1$  e, para considerar a saturação magnética dos indutores, basta conhecer os limites de seu intervalo de variação, que são facilmente obtidos a partir dos catálogos dos fabricantes dos núcleos magnéticos. Diferentemente de outros trabalhos da literatura que apresentam projeto de controladores que levam em conta o efeito da saturação suave em indutores de filtros LCL, a vantagem do procedimento proposto aqui é não necessitar modelar o comportamento não linear dos indutores com funções especializadas ou linearizações por partes, por exemplo, nem requerer algoritmos adaptativos com estimação on-line das indutâncias.

Ainda, um certificado teórico de estabilidade baseado em LMIs com múltiplas matrizes de Lyapunov é fornecido. Este certificado é baseado em um modelo politópico variante no tempo de 16 vértices, que representa uma descrição mais detalhada do comportamento da saturação suave.

### 4.1 MODELO VARIANTE NO TEMPO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o conversor conectado à rede apresentado na Figura 2.1, cujos indutores possuem núcleos sujeitos à saturação suave, e conectado a uma rede elétrica com indutância incerta e possivelmente variante no tempo, conforme mostrado nos estudos de caso apresentados no Capítulo 3. Ainda, assume-se que o barramento CC é estabilizado e que o sincronismo com o ponto de conexão com a rede é garantido por uma técnica adequada (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011).

Devido à saturação magnética suave nos núcleos, a permeabilidade varia com a corrente (WEI; LIU; DUAN, 2018). Uma vez que as correntes variam com o tempo, as indutâncias do filtro podem ser vistas como parâmetros variantes no tempo. Por este motivo, os resultados mostrados no capítulo anterior demonstraram que o projeto de controladores baseado apenas nos valores nominais pode levar a desempenho degradado

(oscilações de corrente) ou levar o sistema à instabilidade.

Neste sentido, considere o modelo em espaço de estados apresentado em (2.39)-(2.45). Conforme mencionado no Capítulo 2, esta representação em espaço de estados pode ser definida como um modelo linear *quasi*-LPV, em que os termos não lineares que são funções dos estados são tratados como parâmetros variantes no tempo (POLAT; ESKINAT; KOSE, 2007). Neste cenário, abordagens do domínio do tempo são mais adequadas do que abordagem em frequência, tanto para a modelagem, quanto para o projeto do controlador e análise de estabilidade.

Como já mencionado, o modelo (2.39) pode ser reescrito de coordenadas *abc* para  $\alpha\beta 0$  a partir da transformação de Clarke (DUESTERHOEFT; SCHULZ; CLARKE, 1951; MACCARI Jr et al., 2015). Conforme já exposto no Capítulo 2, devido à possível diferença nos valores de indutância entre as fases, o modelo resultante apresenta acoplamento entre as coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ . Assumindo que este acoplamento seja pequeno o suficiente para ser negligenciado (veja o Apêndice A para uma análise do acoplamento, por meio de estudos de caso), o sistema pode ser representado, em coordenadas estacionárias, por dois modelos monofásicos independentes com parâmetros variantes no tempo, dados por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\alpha(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u(t) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{B}_u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d(t) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{B}_d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g\alpha}(t) \\ v_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Assumindo que as resistências  $r_1$  e  $r_{f2}$  são suficientemente pequenas para serem negligenciadas (representando assim a situação com menor amortecimento), as matrizes variantes no tempo são dadas por

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L_1(t)} & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & \frac{1}{L_2(t)} & \frac{-r_g}{L_2(t)} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{L_2(t)} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} i_{1\alpha}(t) \\ v_{c\alpha}(t) \\ i_{g\alpha}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{x}_\beta(t) = \begin{bmatrix} i_{1\beta}(t) \\ v_{c\beta}(t) \\ i_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

em que  $L_1(t)$  e  $L_2(t)$  são parâmetros variantes no tempo, que aproximam o efeito da saturação suave (não-linearidade) dos indutores do lado do conversor e do lado da rede, bem como possíveis variações da indutância de rede no tempo.

A partir de (4.1) é possível perceber que os modelos em  $\alpha$  and  $\beta$  apresentam representações idênticas e, portanto, os subscritos serão suprimidos, deste ponto em diante, para simplificar a notação.

### 4.1.1 Definição do problema

O problema a ser resolvido neste capítulo é encontrar, por meio de LMIs, um controlador robusto por realimentação de estados que garanta:

- i) estabilidade sob o efeito da saturação nos indutores do filtro LCL e também sob impedância da rede incerta e, possivelmente, variante no tempo;
- ii) rastreamento de referências senoidais para as correntes injetadas na rede, respostas transitórias com tempo de acomodação limitado e rejeição de distúrbios harmônicos, incluindo o efeito do atraso na implementação do controle digital.

## 4.2 PROCEDIMENTO DE PROJETO PROPOSTO

O procedimento de projeto proposto aqui é composto por uma modelagem politópica variante no tempo e por um projeto de controlador robusto baseado em LMIs. Para certificar o procedimento, uma análise de estabilidade baseada em LMIs é realizada.

### 4.2.1 Modelo polotópico variante no tempo

Primeiramente, um procedimento semelhante ao desenvolvido na Seção 3.2 é adotado. Para aplicação de uma lei de controle digital, a planta descrita em (4.1) é discretizada, com um período de amostragem  $T_s$  suficientemente pequeno, e um estado adicional  $\phi$  é incluído para representar o atraso de implementação do sinal de controle (ASTRÖM; WITTENMARK, 1997). Ainda, para assegurar rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos da rede, controladores ressonantes com dimensão arbitrária são adicionados.

Entretanto, chega-se agora ao seguinte modelo polotópico variante no tempo (MACCARI Jr et al., 2015; BOYD et al., 1994)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{ud}(\boldsymbol{\theta}(k)) \phi(k) + \mathbf{B}_{dd}(\boldsymbol{\theta}(k)) v_g(k) \\
 \phi(k+1) &= u(k) \\
 \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \mathbf{R} \boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T} (i_{ref}(k) - i_g(k))
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k) = i_g(k)$$

em que  $\boldsymbol{\theta}(k)$  abrange os parâmetros  $L_1(t)$  e  $L_2(t)$ . Uma importante vantagem de modelar o sistema na forma politópica é que controladores projetados para os vértices (i.e., combinações dos valores extremos dos parâmetros) podem assegurar requisitos de desempenho

para todo o domínio de variação paramétrica. Deste modo, para esta abordagem, não é necessário obter com precisão as características de saturação suave dos indutores do filtro, mas apenas estimar os valores máximos e mínimos das indutâncias.

Para obter as matrizes do modelo (4.3), as matrizes contínuas em (4.2) são discretizadas nos vértices de  $L_1(t)$  e  $L_2(t)$ , e então combinadas de forma convexa em uma representação politópica de quatro vértices (BOYD et al., 1994). Para tanto,

$$\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) \mathbf{A}_{dj}, \quad \mathbf{B}_{ud}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) \mathbf{B}_{udj}, \quad \mathbf{B}_{dd}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) \mathbf{B}_{ddj} \quad (4.4)$$

$$[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] \in \Theta, \quad \Theta \triangleq \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^4 : \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) = 1, \theta_j(k) \geq 0, j = 1, \dots, 4. \right\} \quad (4.5)$$

em que

$$\mathbf{A}_{dj} = e^{\mathbf{A}_j T_s}, \quad \mathbf{B}_{udj} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_j \tau} \mathbf{B}_{uj} d\tau, \quad \mathbf{B}_{ddj} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_j \tau} \mathbf{B}_{dj} d\tau \quad (4.6)$$

e os vértices  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_{uj}$  e  $\mathbf{B}_{dj}$  são calculados, a partir de (4.2), como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}(L_{1min}, L_{2min}), & \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}(L_{1min}, L_{2max}), \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}(L_{1max}, L_{2min}), & \mathbf{A}_4 &= \mathbf{A}(L_{1max}, L_{2max}), \\ \mathbf{B}_{u1} &= \mathbf{B}_{u2} = \mathbf{B}_u(L_{1min}), & \mathbf{B}_{u3} &= \mathbf{B}_{u4} = \mathbf{B}_u(L_{1max}), \\ \mathbf{B}_{d1} &= \mathbf{B}_{d3} = \mathbf{B}_d(L_{2min}), & \mathbf{B}_{d2} &= \mathbf{B}_{d4} = \mathbf{B}_d(L_{2max}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

Com base em (4.3), o modelo aumentado pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \phi(k+1) \\ \boldsymbol{\xi}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{B}_{ud}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{0}_{3 \times 2n} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ -\mathbf{T}\mathbf{C} & \mathbf{0}_{2n \times 1} & \mathbf{R}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dd}(\boldsymbol{\theta}(k)) \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} v_g(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 0 \\ \mathbf{T}_{2n \times 1} \end{bmatrix} i_{ref}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ou, em uma forma mais compacta, como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(k+1) &= \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u u(k) + \mathbf{H}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) v_g(k) + \mathbf{H}_{ref} i_{ref}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\rho}(k), \quad \mathbf{C}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{1 \times (2n+1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que as matrizes em (4.9) também são obtidas com base em politopos de quatro vértices,

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{H}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^4 \theta_j(k) \mathbf{H}_{dj}, \quad [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] \in \Theta \quad (4.10)$$



cujos vértices são dados por

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dj} & \mathbf{B}_{udj} & \mathbf{0}_{3 \times 2n} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ -\mathbf{T}\mathbf{C} & \mathbf{0}_{2n \times 1} & \mathbf{R}_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{dj} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ddj} \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

#### 4.2.2 Projeto do controlador robusto

Para o projeto do controlador robusto, considere o modelo (4.9) e uma lei de controle por realimentação de estados dada por

$$u(k) = \mathbf{K}\boldsymbol{\rho}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & K_\phi & \mathbf{K}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

em que o vetor de ganhos  $\mathbf{K}$  é computado off-line, por meio de LMIs, baseado no conhecimento dos limites superiores e inferiores das indutâncias  $L_1(t)$  e  $L_2(t)$ . Considerando o circuito mostrado na Figura 2.1, esta lei de controle pode ser implementada a partir da estrutura mostrada na Figura 4.1.

Dado um escalar real  $r$ , com  $0 < r \leq 1$ , se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_j \in \mathfrak{R}^{(4+2n) \times (4+2n)}$  e matrizes  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{(4+2n) \times (4+2n)}$  e  $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{1 \times (4+2n)}$  tais que

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}_j) & \mathbf{Q}'\mathbf{G}'_j + \mathbf{J}'\mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}_j\mathbf{Q} + \mathbf{H}_u\mathbf{J} & r\mathbf{S}_\ell \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ \ell = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (4.13)$$

então, o ganho de realimentação de estados <sup>1</sup>

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} \quad (4.14)$$

garante:

- a) robustez em malha fechada frente a variações arbitrárias de  $L_1(t)$  e  $L_2(t)$  contidos nos intervalos  $\mathcal{U}_{L1}$  and  $\mathcal{U}_{L2}$ , respectivamente;
- b) modos das respostas transitórias limitados por  $r^k$ , tal que, para o critério de 1% de erro, tem-se um tempo máximo de acomodação definido como

$$t_{acom} = T_s \frac{\ln(0,01)}{\ln(r)} \quad (4.15)$$

- c) rastreamento de referências senoidais para as correntes de rede e mitigação de harmônicas proveniente da tensão da rede.

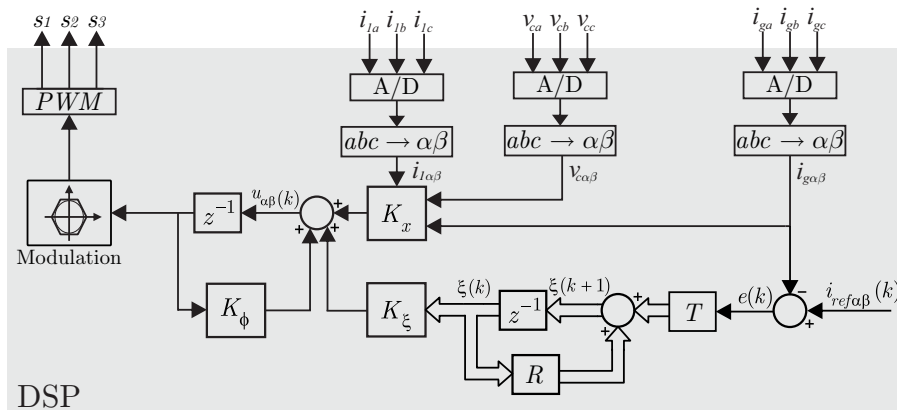
---

<sup>1</sup>As LMIs utilizadas nesta Tese são executadas utilizando o *LMI Control Toolbox*, no software MATLAB (GAHINET et al., 1995).

As provas de a) e b) podem ser derivadas do conceito de estabilidade poliquadrática (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001b), o qual é válido para sistemas discretos afetados por variações paramétricas arbitrariamente rápidas no tempo. Estas provas são apresentadas em mais detalhes no Apêndice B, tendo como base os trabalhos (MACCARI Jr et al., 2014; MACCARI Jr., 2015). A propriedade c) é garantida considerando o princípio do modelo interno, por meio dos múltiplos controladores ressonantes incluídos no sistema aumentado (FRANCIS; WONHAM, 1976).

Note que para projetar o controlador não é necessário conhecer as derivadas das indutâncias no tempo, uma vez que a condição (4.13) permite tratar de variações arbitrariamente rápidas dentro dos intervalos definidos em (3.1)-(3.3). Nesta direção, as oscilações causadas pelas componentes de alta frequência, especialmente nos indutores do lado do conversor, estão contidas nos limites superiores e inferiores mostrados nas Figuras 3.2(b) e 3.4(b). Em adição, o procedimento permite ainda tratar de variações abruptas na impedância de rede devido, por exemplo, a reconfigurações após faltas.

Figura 4.1 – Estrutura de controle em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .



Fonte: Autor.

### 4.2.3 Certificação de estabilidade robusta

O procedimento de projeto proposto na seção anterior é baseado em um modelo de quatro vértices, de modo que as condições das LMIs em (4.13) sejam factíveis. Observe que o conservadorismo do projeto aumenta com o número de vértices, uma vez que  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{Q}$ , utilizadas para recuperar o ganho de controle  $\mathbf{K}$ , devem ser matrizes fixas. Por outro lado, as LMIs para análise robusta de estabilidade de sistemas variantes no tempo disponíveis na literatura são certamente menos conservadoras. Isto ocorre pois, no contexto de análise, todas as variáveis de otimização podem ser dependentes de parâmetros. Tendo isto em vista, uma descrição mais detalhada do sistema é apresentada nesta seção, e um conjunto

mais eficiente de LMIs é utilizado para certificar a estabilidade de ganhos obtidos com o procedimento de projeto proposto.

Primeiramente, observe que a equação que descreve a tensão sobre um indutor não linear, apresentada em (2.9), pode ser reescrita como

$$v(t) = L(i(t))\frac{di(t)}{dt} + R(t)i(t) \quad (4.16)$$

em que  $R(t)$  é um parâmetro variante no tempo, dado por

$$R(t) = \frac{dL(i(t))}{di} \frac{di(t)}{dt} = \frac{dL(i(t))}{dt} \quad (4.17)$$

que representa a taxa de variação da indutância no tempo (termo não linear da equação (2.9)). Este parâmetro é incluído no modelo para evidenciar o efeito da saturação suave na dinâmica de malha fechada do sistema.

Portanto, o modelo (4.1) pode ser reescrito substituindo as matrizes em (4.2) por

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-R_{1p}(t)}{L_{1p}(t)} & \frac{-1}{L_{1p}(t)} & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & \frac{1}{L_{2p}(t)} & \frac{-(R_{2p}(t)+r_g)}{L_{2p}(t)} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{1p}(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{L_{2p}(t)} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

em que  $L_{1p}(t)$  e  $L_{2p}(t)$  representam o termo  $L(i(t))$  em (4.16), para os indutores do lado do conversor e do lado da rede, respectivamente.  $R_{1p}(t)$  e  $R_{2p}(t)$  representam as derivadas no tempo destas indutâncias.

Observe que as matrizes em (4.18) possuem os parâmetros  $R_{1p}(t)$ ,  $R_{2p}(t)$ ,  $L_{1p}(t)$  e  $L_{2p}(t)$ , o que leva a quatro elementos variantes no tempo distintos, que podem ser abrangidos por um modelo politópico a partir da combinação convexa de 16 vértices. Os valores extremos de  $L_{1p}(t)$  e  $L_{2p}(t)$  estão compreendidos pelos intervalos (3.1) e (3.2). Os valores extremos de  $R_{1p}(t)$  e  $R_{2p}(t)$  podem ser obtidos a partir da equação (4.17).

A partir de (4.9), porém agora substituindo as matrizes (4.2) por (4.18), e assumindo o ganho de realimentação de estados (4.14), tem-se a seguinte representação politópica da matriz dinâmica de malha fechada

$$\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{H}_u \mathbf{K} \quad (4.19)$$

em que

$$\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^{16} \theta_j(k) \mathbf{G}_{clj} \quad (4.20)$$

representa a combinação convexa de 16 vértices, dados por

$$\mathbf{G}_{clj} = \mathbf{G}_j + \mathbf{H}_u \mathbf{K} \quad (4.21)$$

A estabilidade do sistema em malha fechada com matrizes em (4.19) pode ser analisada por meio da estabilidade poliquadrática (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a), que garante que o sistema é estável frente a variações paramétricas se existe um conjunto de matrizes Lyapunov  $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j' > 0$  tal que

$$\mathbf{G}'_{clj} \mathbf{P}_\ell \mathbf{G}_{clj} - \mathbf{P}_j < 0 \quad (4.22)$$

com  $j = 1, \dots, 16$  e  $\ell = 1, \dots, 16$ .

É importante mencionar que, se este modelo politópico de 16 vértices for utilizado diretamente para o projeto dos controladores, as LMIs em (4.13) se tornam mais conservadoras, o que justifica a utilização de um procedimento de síntese com menos vértices, como apresentado na seção anterior. Além disso, o número de parâmetros a serem informados pelo projetista é menor no projeto com quatro vértices, bastando conhecer e informar os limites superior e inferior do intervalo de variação das indutâncias, o que simplifica a execução do projeto.

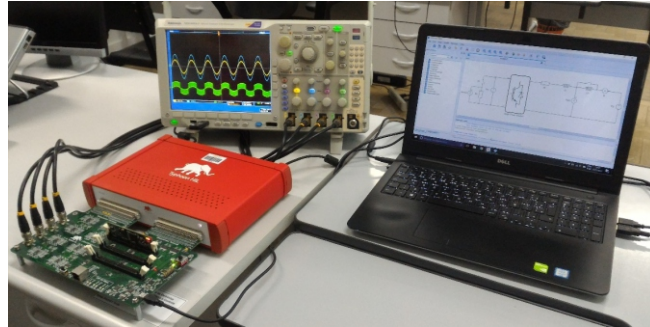
### 4.3 ESTUDO DE CASO 1: RESULTADOS DE SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL

Simulações em tempo real baseadas em *hardware-in-the-loop* (HIL) têm sido cada vez mais reconhecidas como uma ferramenta eficiente para o projeto e validação de sistemas de controle em eletrônica de potência, levando a resultados muito próximos das condições práticas (IVANOVIC et al., 2012; CHEN; CHEN, 2017). Nestas simulações, uma parte do sistema é modelada e simulada em tempo real com alta fidelidade, enquanto o restante é o hardware real, conectado em malha fechada por meio de conversores analógico-digital, digital-analógico e condicionadores de sinal (OMAR FARUQUE; DINAVAHI, 2010).

Considerando os parâmetros do estudo de caso 1, apresentados na Seção 3.1.1, a topologia da Figura 2.1 foi emulada utilizando um HIL modelo 402, da empresa Typhoon HIL. O controle é implementado utilizando o DSP TMS32F28335, da Texas Instruments, incluindo modulador PWM, tempo morto para o acionamento dos interruptores do conversor e o sincronismo com a tensão no PCC, obtido por meio de um algoritmo filtro de Kalman (CARDOSO et al., 2008). Para capturar os resultados, um osciloscópio Tektronix modelo MDO 4054-3 é utilizado, sendo a interface entre DSP, osciloscópio e HIL realizada por meio de uma placa *u-grid* 2.0, também da fabricante Typhoon HIL. A Figura 4.2 mostra a bancada de testes utilizada para obter os resultados reportados nesta seção.

As características de saturação dos indutores do filtro foram recuperadas utilizando *look-up-tables* de fluxo *versus* corrente, criadas a partir dos dados fornecidos pelos fabricantes dos núcleos utilizados neste estudo de caso (MAGNETICS, 2016a; MAGNETICS, 2019), como mostrado na Seção 3.1.1. A utilização de simulações em tempo real baseadas

Figura 4.2 – Bancada para simulações em tempo real utilizando HIL.



Fonte: Autor.

em HIL tem a vantagem de permitir isolar o efeito da indutância não linear de outros efeitos, tornando possível avaliar o seu impacto no sistema. Além disso, há a vantagem de poder facilmente alterar a característica dos núcleos e do filtro e também controlar os parâmetros da rede sob ensaio, provendo uma validação rápida do desempenho e estabilidade para o projeto de diferentes controladores.

#### 4.3.1 Efeitos da saturação suave em controladores convencionais

Nesta subseção, testes serão realizados para mostrar como controladores amplamente utilizados, como o proporcional-ressonante (PR) e o proporcional-integral (PI), respondem à saturação magnética, especialmente se este fenômeno não for considerado no projeto do controlador. Os controladores PR e PI mostrados aqui são projetados com base nas respostas em frequência, assumindo uma aproximação do filtro LCL por um filtro L, estratégia usual na literatura (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011; DANNEHL; WESSELS; FUCHS, 2009). Ainda, consideram-se os parâmetros nominais do sistema, conforme apresentados na Tabela 3.1, e escolheu-se  $L_g = L_{gmin} = 2,5$  mH como indutância nominal da rede.

O controlador PR é então projetado para uma frequência de ressonância de 60 Hz, e discretizado com uma frequência de amostragem de 15 kHz. A ação de controle resultante, incluindo o atraso de implementação digital, é dada por

$$u(k+1) = k_1 e(k) + k_2 e(k-1) + k_3 e(k-2) + k_4 u(k) + k_5 u(k-1) \quad (4.23)$$

com ganhos  $k_1 = 1,0333$ ,  $k_2 = -1,9993$ ,  $k_3 = -0,9666$ ,  $k_4 = 1,9993$ ,  $k_5 = -0,9999$ .

Em seguida, o controlador PI é projetado em coordenadas síncronas (eixos  $dq$ ), e também discretizado com uma frequência de 15 kHz, levando a ação de controle dada por

$$u(k+1) = u(k) + c_1 e(k) + c_2 e(k-1) \quad (4.24)$$

em que  $c_0 = 1,8062$  e  $c_1 = -1,54$ .

O desempenho dos sistemas em malha fechada é avaliado com base em um ensaio de variação nas referências de corrente, representando um degrau desde 0 kW até a potência nominal de 5 kW. Para obter os resultados, considera-se que o sistema opera com indutância de rede igual à condição nominal de projeto. Ainda, para o correto funcionamento das técnicas não robustas, resistores de  $5 \text{ m}\Omega$  foram adicionados em série com os capacitores do filtro, provendo amortecimento passivo ao sistema.

A Figura 4.3(a) mostra as correntes trifásicas injetadas na rede para este teste de variação de referência com o controlador PR, assumindo indutores lineares, ou seja, negligenciando a saturação magnética, com indutâncias do filtro fixas e iguais aos valores nominais:  $L_1 = 2,33 \text{ mH}$  e  $L_{f2} = 25 \text{ }\mu\text{H}$ . Em contrapartida, na Figura 4.3(b), são mostrados os resultados com o controlador PR para indutores incluindo a característica de saturação suave do núcleo, conforme detalhado na Seção 3.1.1. De forma análoga, para o sistema em malha fechada com o controlador PI, a Figura 4.4(a) mostra os resultados com indutores lineares, enquanto a Figura 4.4(b) mostra os resultados com indutores afetados pela saturação suave.

A partir dos resultados apresentados, é possível observar que, se o projeto dos controladores for realizado sem levar em consideração o efeito da saturação magnética, não há garantia de estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada quando os indutores de fato apresentarem tal característica. Para os casos apresentados, optou-se por mostrar exemplos em que a saturação magnética dos indutores leva o sistema à instabilidade, mesmo que os resultados com indutores lineares indicassem o contrário.

Cabe observar que diferentes estratégias poderiam ser utilizadas para melhorar o desempenho dos controladores PR e PI em relação aos resultados mostrados aqui. Entre-

Figura 4.3 – Correntes trifásicas com controlador PR, considerando: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave.

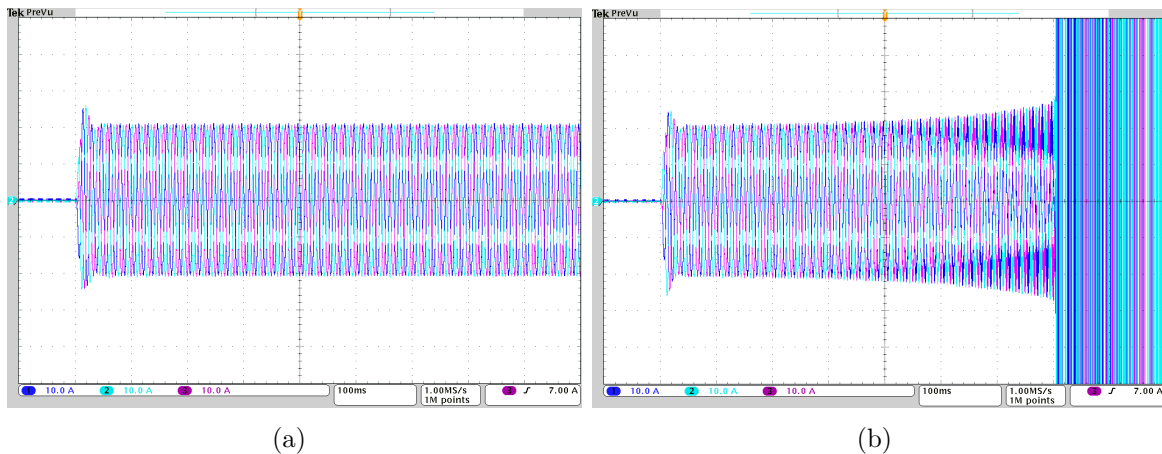
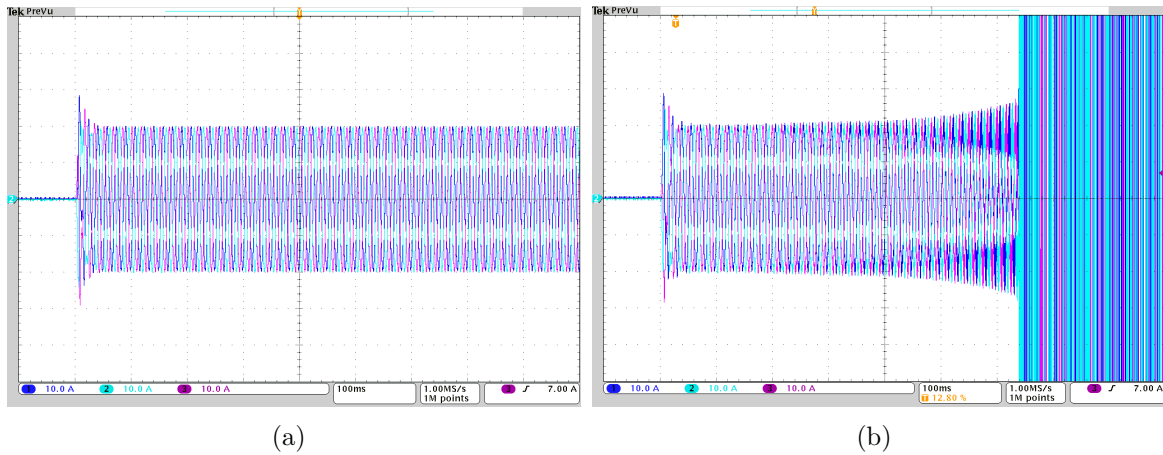


Figura 4.4 – Correntes trifásicas com controlador PI, considerando: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave.



Fonte: Autor.

tanto, estes projetos normalmente demandam etapas de tentativa e erro, com a necessidade de testes *a posteriori* para verificação da performance no cenário de saturação suave dos indutores do filtro e incerteza paramétrica na rede, o que reforça a importância de um procedimento sistemático para o projeto de controladores robustos que leve em conta estas características, como o mostrado na Seção 4.2.

### 4.3.2 Limitação de outros controladores robustos

Controladores robustos projetados por meio de LMIs já foram apresentados na literatura (MACCARI Jr et al., 2014), até mesmo utilizando a condição de projeto (4.13). Estes trabalhos anteriores garantem robustez contra variação nos parâmetros da rede, porém não levam em consideração o efeito da saturação suave nos indutores do filtro.

Nesta subseção, para mostrar uma limitação de outros controlador robustos por realimentação de estados, o modelo (4.9) e a condição (4.13) são utilizadas para projetar um controlador robusto contra variações na indutância na rede, porém negligenciando a saturação magnética dos indutores.

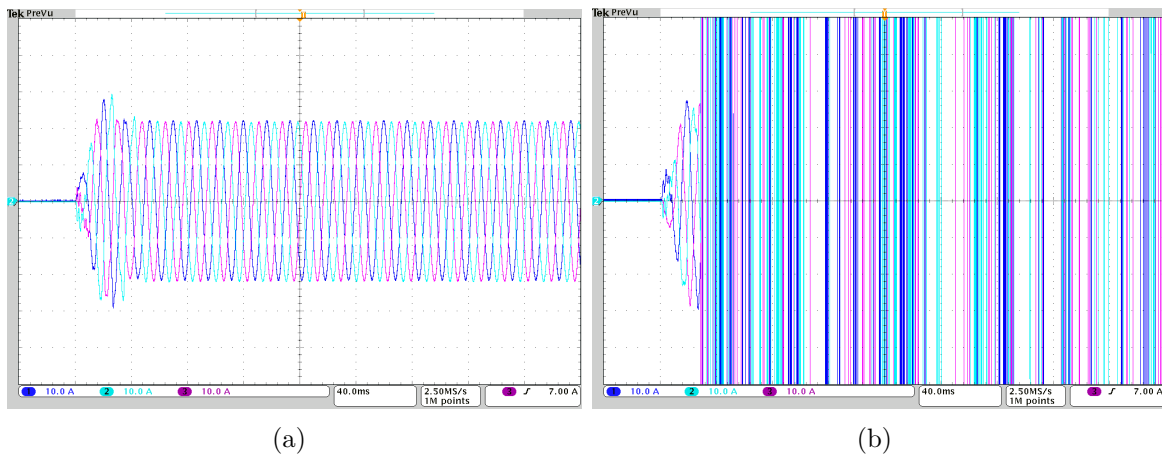
Para tanto, considere os parâmetros apresentados na Tabela 3.1, com indutâncias de rede  $L_g \in [L_{gmin}, L_{gmax}]$ , porém utilizando apenas os valores nominais de  $L_1$  e  $L_{f2}$ . Visando limitar o tempo de acomodação dos transitórios do sistema em malha fechada,  $r$  é escolhido como 0,988. Ainda, a frequência de amostragem é definida em 15 kHz, e  $n = 4$  controladores ressonantes são configurados nas frequências de 60, 180, 300 e 420 Hz, com

fator de amortecimento igual a 0.0001. Deste modo, o vetor de ganhos obtido é dado por

$$\mathbf{K} = [-28,189 \quad -1,127 \quad -25,894 \quad -0,698 \quad 80,185 \quad -80,029 \\ \dots \quad 56,396 \quad -58,328 \quad 64,363 \quad -70,855 \quad 88,359 \quad -95,667] \quad (4.25)$$

Neste cenário, executando novamente o teste de variação de referências descrito, verifica-se que o sistema em malha fechada teria desempenho adequado para todos os valores de  $L_g \in [L_{gmin}, L_{gmax}]$  se testado considerando indutores de filtro lineares. Esta situação é exemplificada na Figura 4.5(a), para o caso de  $L_g = L_{gmax}$ . Em contrapartida, é possível verificar a partir da Figura 4.5(b), que uma vez que a saturação dos indutores é levada em consideração, para as mesmas condições de rede, o sistema torna-se instável.

Figura 4.5 – Correntes trifásicas com controlador robusto projetado considerando apenas incertezas em  $L_g$ . Sistema testado com: a) indutores de filtro lineares; b) indutores sob efeito da saturação suave.



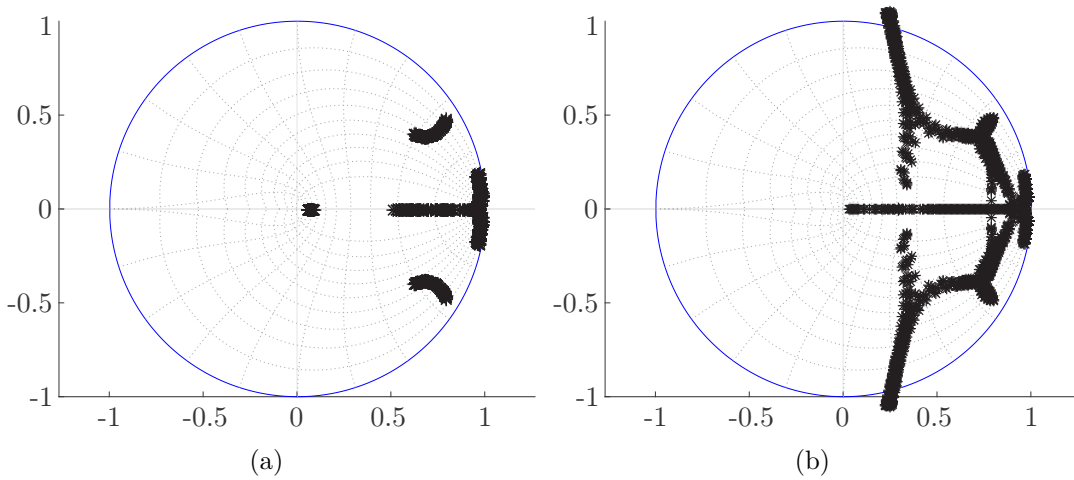
Fonte: Autor.

Para melhor detalhar este fato, a Figura 4.6(a) mostra uma varredura dos autovalores considerando o modelo utilizado para o projeto do controlador (ou seja, com apenas dois vértices,  $L_{gmin}$  e  $L_{gmax}$ ), enquanto a Figura 4.6(b) mostra os autovalores quando a saturação é levada em consideração, ou seja, utilizando os 16 vértices do modelo (4.19).

Deste modo, é possível verificar que, ao negligenciar o efeito da saturação suave dos indutores no projeto do controlador e na análise do sistema, não é possível concluir com segurança sobre a estabilidade e desempenho do sistema quando sujeitos a este efeito. Por outro lado, a análise baseada no modelo de 16 vértices foi capaz de prover uma conclusão em concordância com o que foi verificado nos resultados. É importante mencionar que todos os autovalores contidos no círculo de raio unitário é apenas uma condição necessária para a estabilidade de sistemas variantes no tempo, e que a factibilidade das LMIs (4.13) fornece condições suficientes para a estabilidade neste caso.



Figura 4.6 – Autovalores de malha fechada com o controlador robusto projetado considerando apenas incertezas em  $L_g$ , para: a) varredura em  $L_g$  com indutâncias de filtro nominais, sem efeito da saturação; b) varreduras independentes em  $L_g$  e nas indutâncias do filtro, considerando saturação suave.



Fonte: Autor.

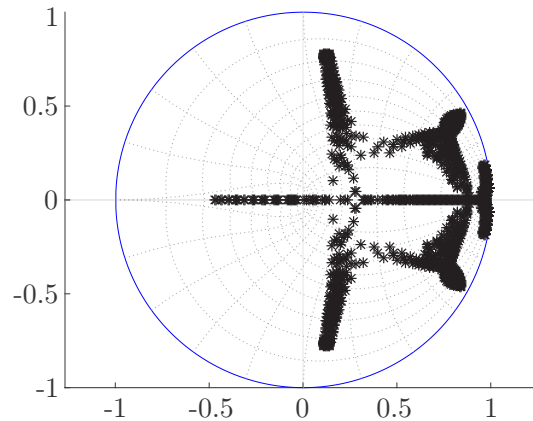
### 4.3.3 Resultados com o controlador proposto

Para projetar o controlador proposto, assim como feito para obter (4.25),  $r$  é escolhido como 0,988, a frequência de amostragem é igual a 15 kHz, e  $n = 4$  controladores ressonantes foram configurados, nas frequências de 60, 180, 300 e 420 Hz, com fator de amortecimento igual a 0,0001. Entretanto, agora o procedimento descrito na Seção 4.2 é utilizado, e as LMIs de síntese em (4.13) são aplicadas considerando os parâmetros do estudo de caso 1, com quatro vértices definidos a partir dos limites de indutância dados por:  $1,176 \text{ mH} \leq L_1 \leq 2,352 \text{ mH}$ ,  $18 \mu\text{H} \leq L_{f2} \leq 48 \mu\text{H}$  e  $2,5 \text{ mH} \leq L_g \leq 7,5 \text{ mH}$ . Deste modo, o vetor de ganhos obtido é dado por

$$\mathbf{K} = [-25,201 \quad -0,547 \quad -20,381 \quad -0,949 \quad 60,577 \quad -60,561 \\ \cdots \quad 45,448 \quad -47,393 \quad 52,307 \quad -58,150 \quad 70,942 \quad -77,856] \quad (4.26)$$

A robustez do sistema em malha fechada com estes ganhos é confirmada teoricamente utilizando o certificado fornecido na Seção 4.2.3. Verificando a factibilidade de (4.22) com os ganhos (4.26), existem soluções  $\mathbf{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, 16$  para o problema, certificando que o controlador obtido pelo procedimento de projeto proposto garante estabilidade também para o caso mais geral, com politopo de 16 vértices. Cabe mencionar que, caso o politopo de 16 vértices seja utilizado para o cômputo dos ganhos neste exemplo, as LMIs em (4.13) não são factíveis, o que confirma a importância de utilizar um número reduzido de vértices para reduzir o conservadorismo das condições de síntese. A

Figura 4.7 – Autovalores de malha fechada com controlador robusto (4.26).



Fonte: Autor.

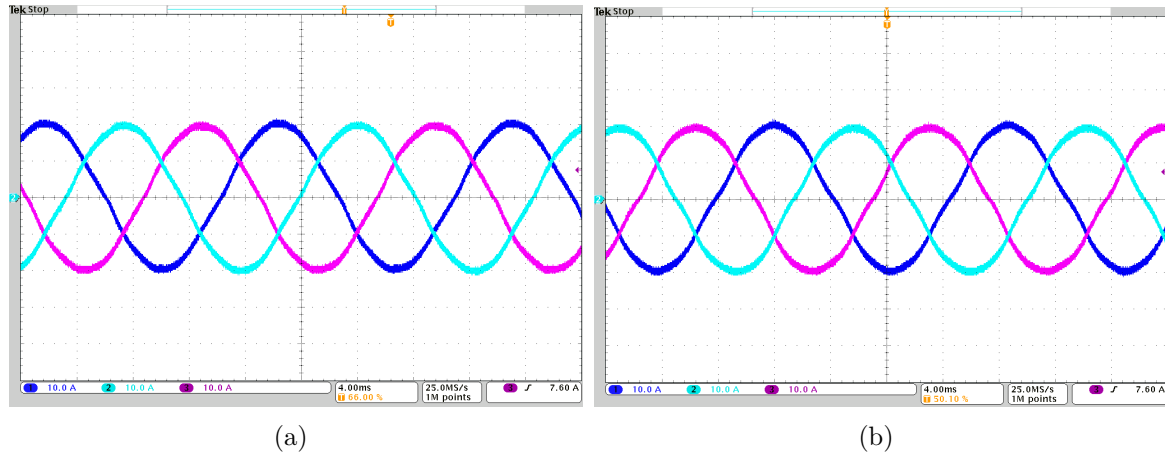
estabilidade é confirmada na Figura 4.7, que mostra os autovalores de malha fechada para uma varredura de todos os parâmetros variantes no tempo, baseada em (4.19). Os autovalores pertencem ao círculo de raio unitário, condição necessária para a estabilidade no caso variante no tempo, corroborando com o certificado de estabilidade apresentado.

O sistema em malha fechada com o controlador robusto (4.26) é testado frente a incerteza na impedância de rede e considerando, em todos os experimentos, deste ponto em diante, a característica de saturação dos indutores. Primeiramente, para verificar que este controle é capaz de mitigar adequadamente distorções harmônicas, considere uma tensão de rede com componentes harmônicas de 3<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> ordem, com amplitudes, em porcentagem da fundamental, iguais a: 5%, 6% e 5%, respectivamente. Estas amplitudes correspondem aos limites superiores do padrão EN50160, que limita a distorção de redes distribuição (TEODORESCU; LISERRE; RODRÍGUEZ, 2011).

Nesta situação, a Figura 4.8 mostra, para a potência nominal, as correntes injetadas na rede, em regime permanente, considerando os valores extremos de  $L_g$ . As componentes harmônicas para as correntes do canal 1 e os limites do padrão IEEE 1547 são apresentadas na Figura 4.9(a) e (b), para  $L_{gmin}$  e  $L_{gmax}$ , respectivamente. A partir destas, é possível observar a operação adequada do sistema com o controlador proposto, com correntes injetadas na rede que respeitam os limites da IEEE 1547 para harmônicas individuais e distorção harmônica total (THD < 5%), mesmo na presença de saturação dos indutores do filtro, incertezas na impedância da rede e significativa distorção harmônica da rede.

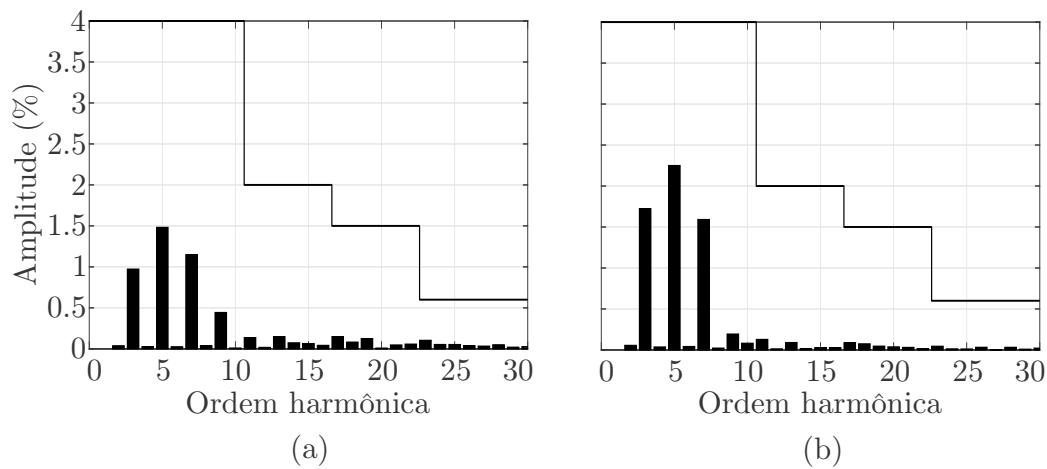
Para verificar as respostas dinâmicas do sistema em malha fechada, variações nas referências de corrente são realizadas. A primeira variação representa um degrau de potência, desde 0 kW até atingir a potência nominal. Este teste é equivalente aos apresentados nas Figuras 4.3(b), 4.4(b) e 4.5(b). Após atingido o regime permanente, aumenta-se a referência de corrente para testar o sistema operando em uma região onde a saturação

Figura 4.8 – Correntes trifásicas injetadas na rede, em regime permanente, com o ganho (4.26), implementada sob o efeito da saturação dos indutores do filtro e rede com tensão distorcida: a) rede com  $L_{gmin}$ , b) rede com  $L_{gmax}$ .



Fonte: Autor.

Figura 4.9 – Espectro harmônico e limites da norma IEEE 1547, para as correntes na Figure 4.8: a)  $L_{gmin}$  (THD=2,22%); b)  $L_{gmax}$  (THD=3,29%).

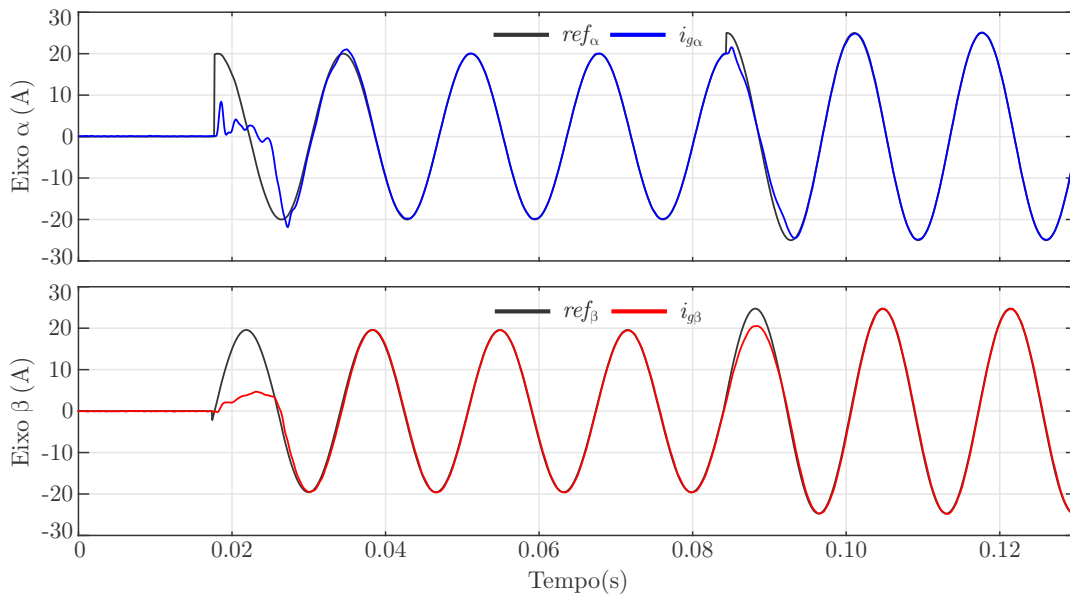


Fonte: Autor.

magnética é ainda mais pronunciada. As Figuras 4.10 e 4.11 mostram as correntes nos eixos  $\alpha\beta$  considerando, respectivamente,  $L_{gmin}$  e  $L_{gmax}$ .

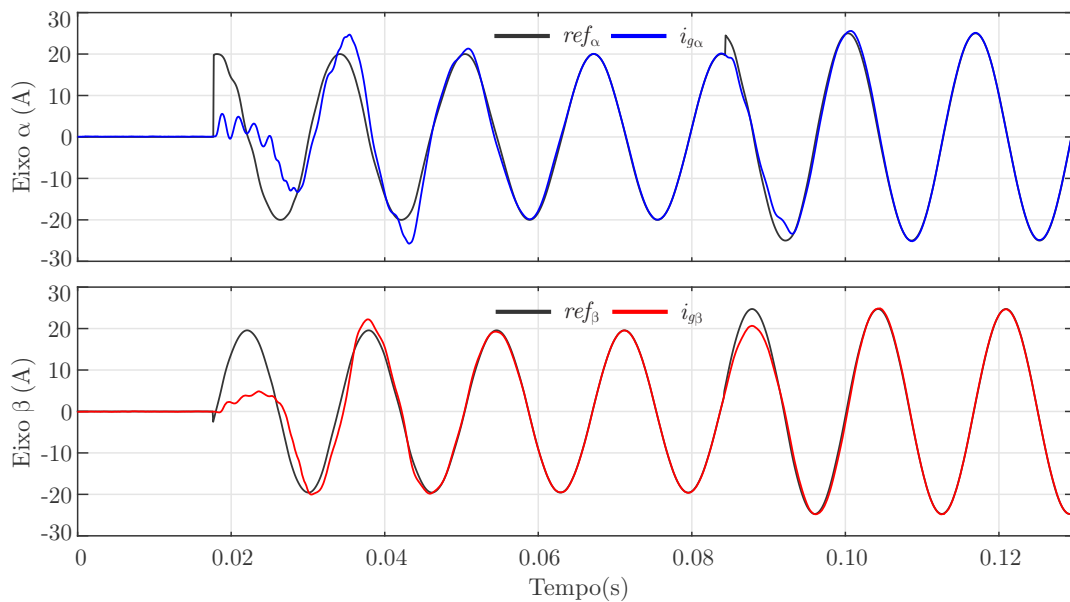
Diferentemente dos resultados mostrados nas figuras anteriores, o controlador proposto é capaz de prover resultados estáveis para toda a faixa de parâmetros. Além disso, as respostas transitórias estão limitadas a pouco mais de meio período da corrente, em caso de rede mais forte ( $L_{gmin}$ ), e de um período e meio no caso de rede fraca ( $L_{gmax}$ ). É importante observar que uma possível perda de desempenho dinâmico, especialmente no caso de rede fraca, é aceitável, uma vez que é necessário considerar o compromisso com a robustez para uma ampla faixa de parâmetros utilizando ganhos fixos.

Figura 4.10 – Correntes injetadas na rede em coordenadas  $\alpha\beta$  com ganhos (4.26), para variações de amplitude considerando rede com  $L_{gmin}$ .



Fonte: Autor.

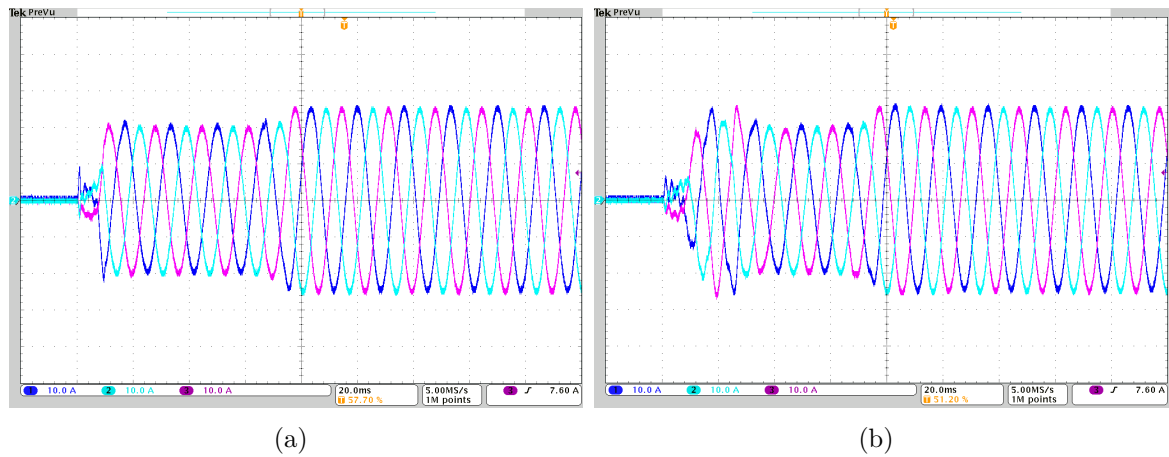
Figura 4.11 – Correntes injetadas na rede em coordenadas  $\alpha\beta$  com ganhos (4.26), para variações de amplitude considerando rede com  $L_{gmax}$ .



Fonte: Autor.

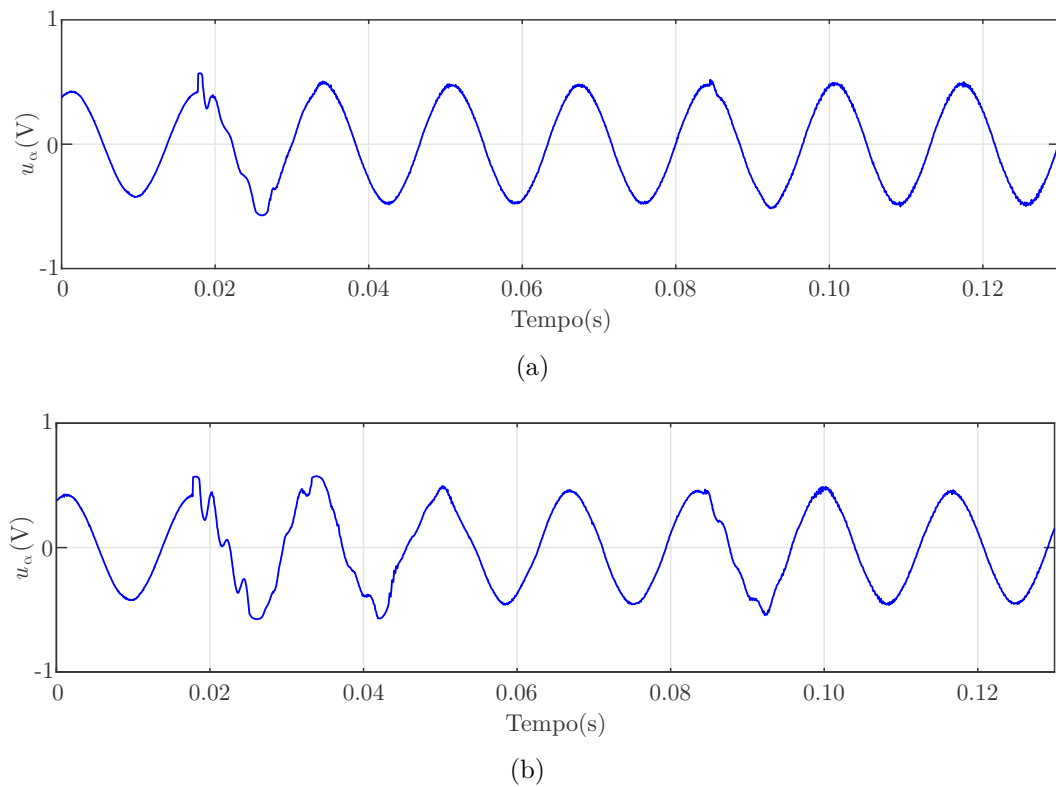
As correntes trifásicas referentes aos testes apresentados nas Figuras 4.10 e 4.11 são apresentadas nas Figuras 4.12(a) and (b), respectivamente, confirmando a boa qualidade dos resultados. Para verificar a ação de controle, um dos sinais modulantes utilizados para a modulação PWM,  $u_\alpha$ , é mostrado na Figura 4.13(a), para a condição de rede com  $L_{gmin}$ , e na Figura 4.13(b), para a condição de rede com  $L_{gmax}$ .

Figura 4.12 – Correntes trifásicas injetadas na rede com o ganho (4.26), para variações de referência considerando: a) rede com  $L_{gmin}$ ; b) rede com  $L_{gmax}$ .



Fonte: Autor.

Figura 4.13 – a) Ações de controle referente aos testes nas Figuras 4.10 e 4.11: a) rede com  $L_{gmin}$ ; b) rede com  $L_{gmax}$ .



Fonte: Autor.

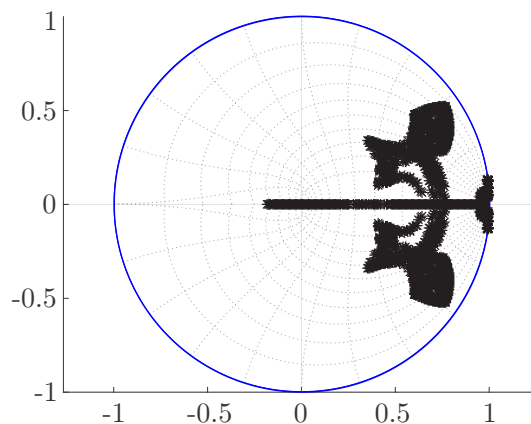
## 4.4 ESTUDO DE CASO 2: RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM PROTÓTIPO

Considere os parâmetros do estudo de caso 2, mostrado na Seção 3.1.2, com quatro vértices definidos a partir dos limites de indutância dados por:  $0,7 \text{ mH} \leq L_1 \leq 1,0 \text{ mH}$ ,  $170 \mu\text{H} \leq L_{f2} \leq 300 \mu\text{H}$  e  $0 \text{ mH} \leq L_g \leq 1 \text{ mH}$ . O parâmetro de projeto  $r$  é escolhido neste caso como 0.999, a frequência de amostragem dada por 20,04 kHz e  $n = 4$  controladores ressonantes são projetados para as frequências de 60, 180, 300 e 420 Hz, com fator de amortecimento igual a 0,0001. As LMIs de síntese em (4.13) são aplicadas, resultando no vetor de ganhos

$$\mathbf{K} = [-12,513 \quad -2,510 \quad 2,372 \quad -0,681 \quad 44,574 \quad -44,051 \\ \dots \quad 16,035 \quad -15,842 \quad 8,300 \quad -8,670 \quad 4,723 \quad -5,528] \quad (4.27)$$

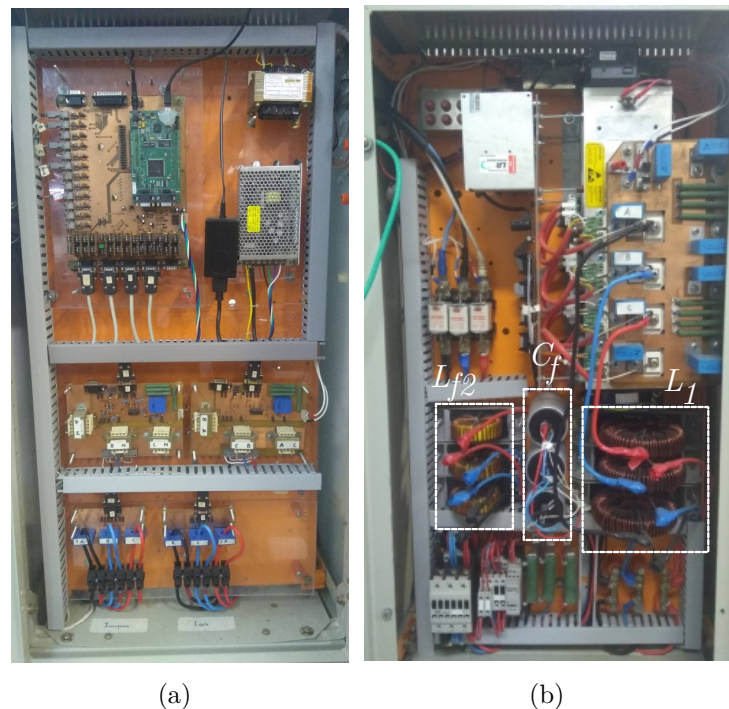
A robustez do sistema em malha fechada com os ganhos em (4.27) é confirmada teoricamente utilizando o certificado de estabilidade robusta fornecido na Seção 4.2.3. Neste estudo de caso, dado que  $L_{gmin} = 0 \text{ mH}$  e  $r_g = 0 \Omega$ , para evitar erro numérico com a utilização da rotina de certificação da estabilidade,  $L_{gmin}$  foi considerado igual a  $50 \mu\text{H}$ . A estabilidade pode ser corroborada a partir da Figura 4.14, que mostra os autovalores de malha fechada para uma varredura em todos os parâmetros variantes no tempo, baseada em (4.19). É interessante observar que, assim como mostrado no estudo de caso anterior, se um novo controlador robusto for projetado baseado nas LMIs em (4.13) e considerando os mesmos parâmetros utilizados para computar (4.27), porém desconsiderando a saturação magnética (i.e., projeto baseado em dois vértices), não é possível certificar a estabilidade com a análise mais geral, baseada em 16 vértices, o que reforça a importância de utilizar o procedimento proposto no projeto dos ganhos de controle e certificação de estabilidade.

Figura 4.14 – Autovalores de malha fechada para uma varredura nos parâmetros variantes no tempo, com controlador robusto (4.27).



Os resultados experimentais dados a seguir são baseados no protótipo mostrado na Figura 4.15, cujos parâmetros foram dados na Tabela 3.3. Os indutores do lado do conversor e do lado da rede apresentam saturação suave, sendo compostos por núcleos do tipo *powder* (Sendust e pó de ferro, respectivamente), conforme parâmetros apresentados nas Tabelas 3.4. O inversor é conectado a uma rede pública de distribuição por meio de um transformador variável, com impedância do ponto de conexão com a rede incerta. O controle por realimentação de estados com ganhos (4.27) é implementado utilizando o DSP TMS320F28335, mesmo utilizado para validação dos resultados de simulação em tempo real na seção anterior. O sincronismo com a tensão no ponto de conexão é obtido por meio de um algoritmo filtro de Kalman (CARDOSO et al., 2008). Mais detalhes sobre o protótipo são dados no Apêndice C.

Figura 4.15 – Protótipo para resultados experimentais: a) controle b) circuito de potência.

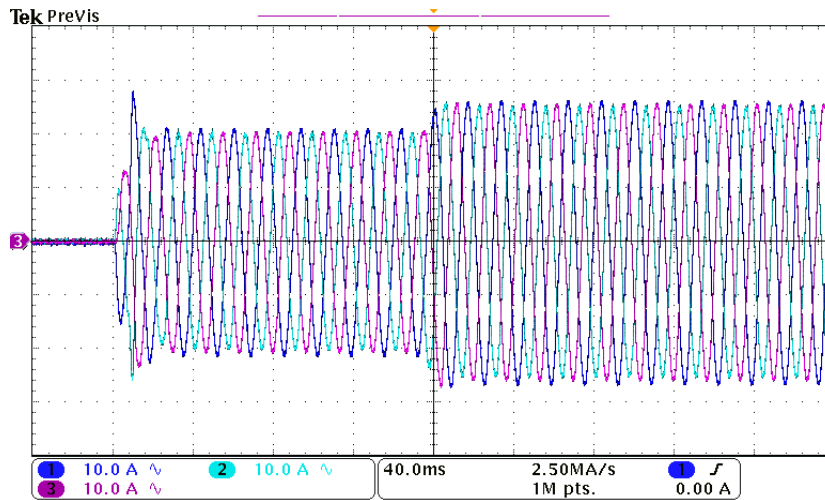


Fonte: Autor.

A Figura 4.16 mostra as correntes trifásicas injetadas na rede para um teste de variação de referência. O primeiro transitório representa uma variação abrupta de 0 A até 20 A de pico (potência nominal). Após atingir o regime permanente, a amplitude da referência é aumentada para 25 A, para verificar a estabilidade do sistema em um ponto em que a saturação é mais pronunciada, como mostra a Figura 3.4. As Figuras 4.17(a) e (b) mostram, para o eixo  $\alpha$ , a referência e a corrente injetada na rede para o primeiro e segundo transientes, respectivamente. É possível verificar que as respostas transitórias e em regime permanente são satisfatórias. Resultados similares são verificados para o eixo  $\beta$ .



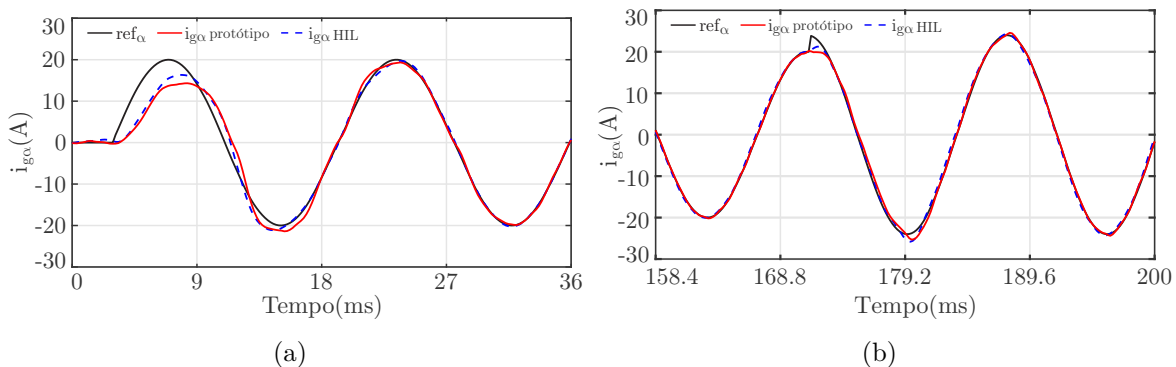
Figura 4.16 – Correntes trifásicas com o ganho robusto (4.27), para variações na amplitude da referência.



(a)

Fonte: Autor.

Figura 4.17 – Correntes de eixo  $\alpha$  para resultados em HIL e no protótipo, com ganho robusto (4.27): a) partida do sistema; b) aumento na referência de corrente.



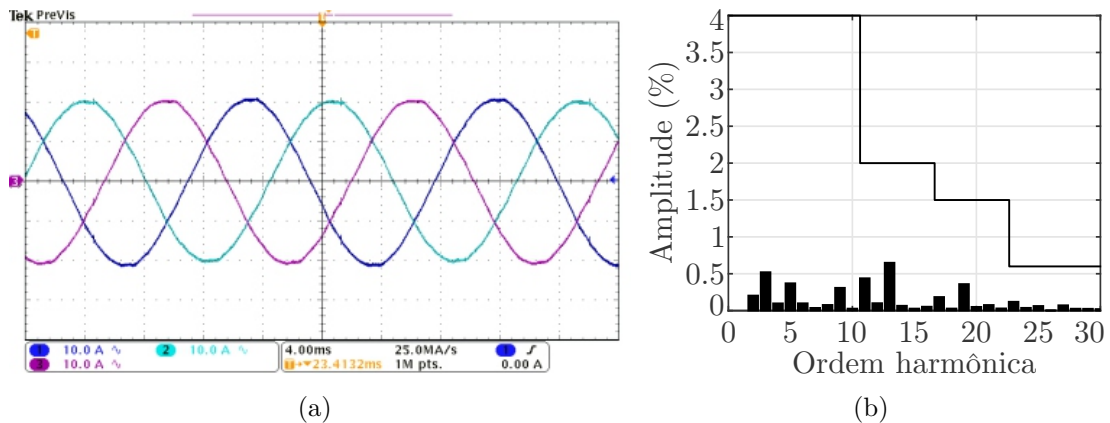
Fonte: Autor.

Além disso, para fins de comparação e validação, as características de saturação dos indutores do filtro do estudo de caso 2 também foram recuperadas em tabelas de fluxo *verus* corrente, e o sistema foi emulado na plataforma HIL, seguindo o mesmo procedimento adotado na Seção 4.3. A corrente de rede obtida a partir da simulação em tempo real é mostrada em azul (linha pontilhada) na Figura 4.17, confirmando a boa correspondência com os resultados experimentais obtidos com o protótipo. Deve-se observar que a pequena diferença entre os resultados pode ser atribuída a possíveis diferenças entre os parâmetros experimentais e os utilizados para a simulação. Por exemplo, o sistema foi emulado considerando impedância de rede igual a 1 mH, enquanto, na prática, este valor é incerto, e não necessita ser identificado na abordagem aqui proposta.



O desempenho em regime permanente pode ser verificado a partir das correntes trifásicas injetadas na rede, apresentadas na Figura 4.18(a). O espectro harmônico da corrente do canal 1 é mostrado na Figura 4.18(b), a partir da qual é possível verificar que o conteúdo harmônico e a THD obedecem aos limites do padrão IEEE 1547.

Figura 4.18 – a) Correntes trifásicas em regime permanente, com o ganho (4.27), implementada sob o efeito da saturação dos indutores do filtro (THD= 1,57%). b) Espectro harmônico e limites da norma IEEE 1547.

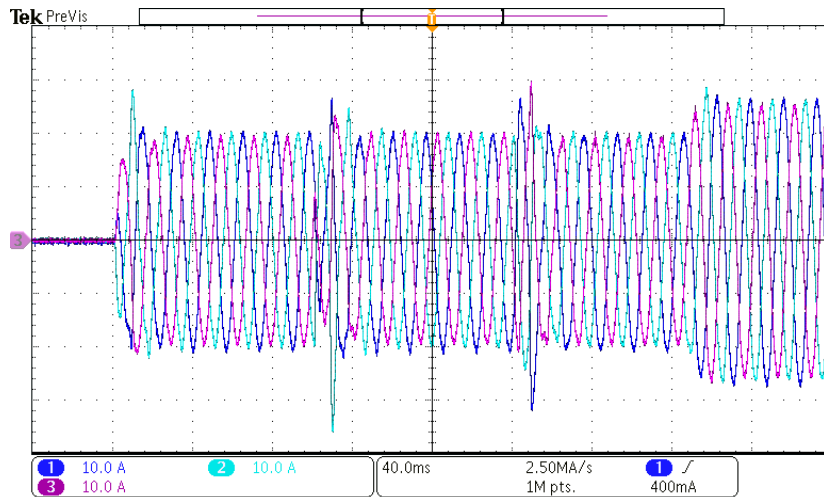


Fonte: Autor.

Para corroborar os bons resultados obtidos com o controlador proposto, um segundo teste de variações de referência foi realizado. As respostas das correntes trifásicas injetadas na rede são mostradas na Figura 4.19. Neste teste, estão compreendidos os seguintes transitórios, conforme marcados na figura: (a) inicialmente, o sistema parte injetando potência reativa capacitiva na rede; (b) em seguida, aplica-se uma variação de fase nas referências de corrente, para injeção de potência reativa indutiva; (c) uma segunda variação de fase é realizada, para injeção de potência ativa; (d) no último transitório, aplica-se uma variação de amplitude, representando um aumento na geração de potência ativa. As correntes relativas a este ensaio, em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ , são mostradas na Figura 4.20, confirmando as boas respostas transitórias e em regime permanente.

Finalmente, a estabilidade do sistema em malha fechada é verificada experimentalmente frente a variações abruptas de indutância no tempo. Para uma maior praticidade e segurança, este teste é realizado sem a conexão com a rede elétrica, aplicando-se um curto circuito na saída do filtro LCL. Então, utilizando-se um indutor adicional, o valor de  $L_{g1}$  é variado abruptamente de 0,3 mH para 1,3 mH, emulando uma possível variação abrupta da indutância do lado da rede. Como resultado, têm-se as correntes trifásicas mostradas na Figura 4.21, confirmando estabilidade frente a variações arbitrariamente rápidas de parâmetros, conforme previsto pelo projeto robusto e pela certificação de estabilidade por meio de LMIs.

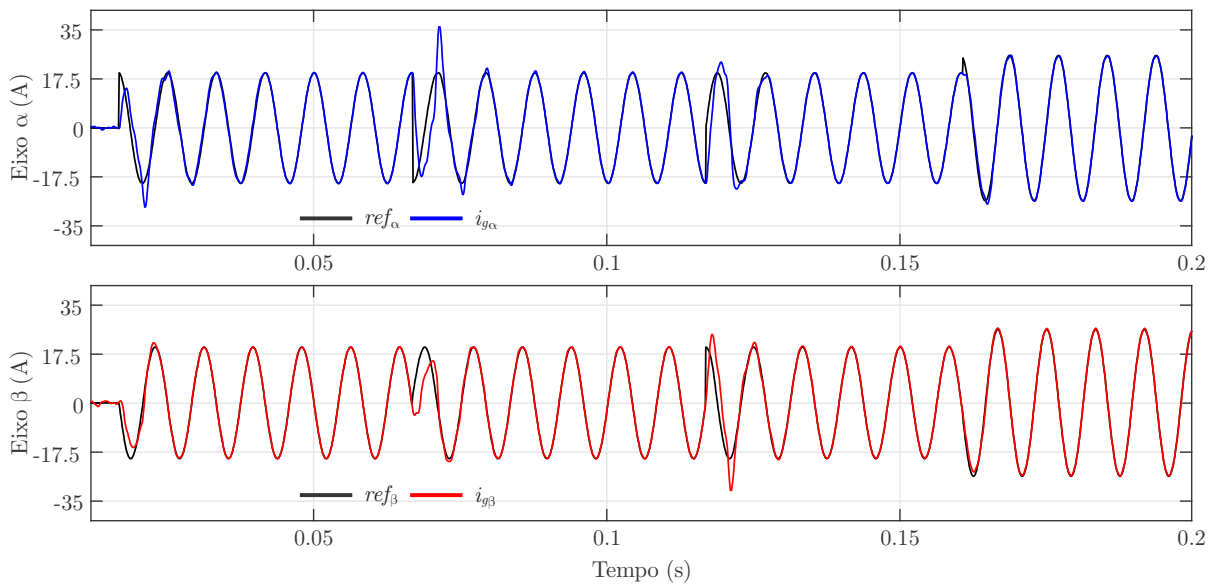
Figura 4.19 – Correntes de rede trifásicas referentes ao ensaio de variação de referência, para sistema operando com controlador (4.27): (a) partida do conversor, injetando potência reativa capacitiva; (b) variação de fase para injeção de potência reativa indutiva; (c) variação de fase para injeção de potência ativa; (d) variação de amplitude.



(a)

Fonte: Autor.

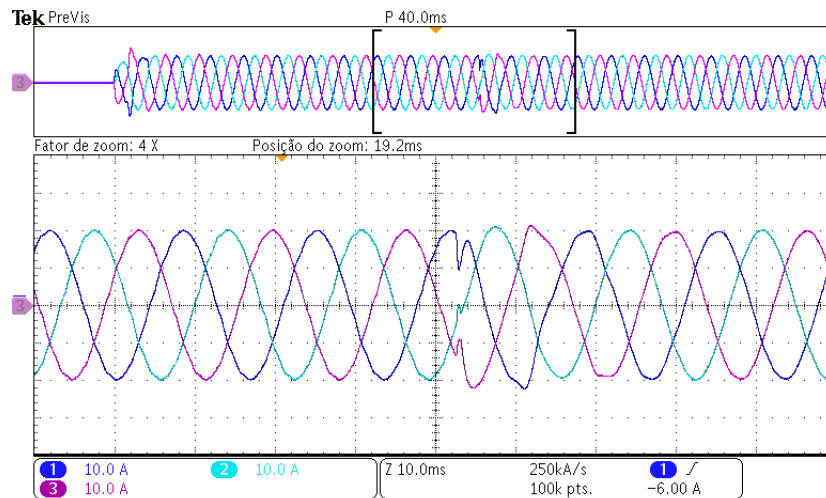
Figura 4.20 – Resultados experimentais, em eixos estacionários, para teste de variações de referência mostrado na Figura 4.19.



(a)

Fonte: Autor.

Figura 4.21 – Correntes trifásicas obtidas experimentalmente para um ensaio de variação paramétrica abrupta.



Fonte: Autor.

#### 4.5 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou como contribuição um procedimento sistemático e direto para o projeto de controladores robustos aplicados ao controle de corrente de conversores conectados à rede por meio de filtro LCL, considerando a saturação magnética suave dos indutores do filtro e impedância de rede incerta e possivelmente variante no tempo. O procedimento de projeto é baseado em: i) modelos politópicos variantes no tempo, que levam em consideração indutâncias não lineares; ii) ganhos robustos (fixos) de realimentação de estados, projetados por meio de LMIs. Ainda, uma análise de estabilidade robusta detalhada é utilizada para certificar o procedimento.

Em comparação ao projeto de ganhos de realimentação de estados baseado em parâmetros nominais, apresentado na Seção 3.3, verifica-se que o procedimento proposto neste capítulo permite obter rapidamente os ganhos e também certificar a estabilidade do sistema em malha fechada, não sendo necessário definir posições específicas para a alocação dos autovalores de malha fechada, nem realizar testes exaustivos *a posteriori* para validar os ganhos obtidos no cenário de variação e incerteza paramétrica. Ainda, note que neste capítulo são utilizados 4 controladores ressonantes, o que leva a um sistema de malha fechada com 12 estados. Portanto, haveria uma complexidade significativamente maior caso uma estratégia baseada na definição de um polinômio alvo, como a apresentada na Seção 3.3.1, fosse utilizada. Como resultado, tem-se aqui um procedimento que reduz consideravelmente o tempo despendido por um projetista no projeto de controladores robustos.

Outra importante vantagem do procedimento proposto neste capítulo é o fato de

não necessitar modelar a saturação suave com funções não lineares ou representações variantes no tempo complexas, necessitando apenas dos limites superior e inferior dos parâmetros. Ainda, o procedimento leva a ganhos fixos de realimentação de estados, facilmente implementáveis, sem a necessidade de técnicas adaptativas ou estimação on-line de parâmetros.

Simulações em tempo real baseadas em HIL foram apresentadas para um estudo de caso realista, ilustrando que, se a saturação suave não for adequadamente considerada no projeto do controlador, não há garantias com relação ao desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada. Ainda, para confirmar a validade do procedimento, um segundo estudo de caso mostrou resultados experimentais obtidos com indutores comerciais, sujeitos a saturação magnética suave, em um protótipo real. Em ambos os casos, o procedimento proposto levou a ganhos de controle que forneceram resultados que atendem aos requisitos da norma IEEE 1547, mesmo sob saturação suave dos indutores, impedância de rede incerta e tensões de rede distorcidas. Estes resultados indicam que o procedimento proposto pode ser aplicado para outros conjuntos de parâmetros, tornando-se uma ferramenta útil no projeto sistemático e direto de controladores robustos para GCCs sujeitos à saturação magnética de indutores.

## 5 CONTROLADOR $\mathcal{H}_2$

### 5.1 INTRODUÇÃO

Conforme exposto no Capítulo 3, verificou-se que conversores conectados à rede por meio de filtro LCL sofrem degradação significativa de desempenho caso sejam desprezados, no projeto dos controladores, os efeitos da incerteza na indutância de rede e da saturação magnética nos indutores do filtro. Em particular, observou-se que à medida em que o conversor opera em regiões nas quais a saturação magnética é mais pronunciada, surgem oscilações na ação de controle e distorções nas correntes de rede, além da possibilidade de levar o sistema à instabilidade.

Nesta direção, propõe-se aqui uma alternativa ao procedimento de projeto proposto no Capítulo 4. Um modelo politópico variante no tempo é novamente desenvolvido, porém agora baseado em dois vértices, associados à variação na indutância de rede. Em contrapartida, serão obtidos, por meio de LMIs, ganhos de realimentação de estados estabilizantes respeitando um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  (custo garantido  $\mathcal{H}_2$ ), com o objetivo de atenuar distúrbios na entrada de controle e assim mitigar os efeitos adversos da saturação suave dos indutores do filtro. Deste modo, este capítulo apresenta como principal contribuição a definição de um procedimento sistemático para viabilizar na prática controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  para conversores trifásicos conectados à rede por meio de filtro LCL, provendo bom desempenho no cenário de incerteza e variação paramétrica na indutância de rede, e também considerando a saturação suave dos indutores do filtro.

### 5.2 MODELO POLITÓPICO COM INCLUSÃO DO DISTÚRBIO NO CONTROLE

Assim como nos capítulos anteriores, considere o conversor conectado à rede por meio de filtro LCL apresentado na Figura 2.1, em que a indutância da rede  $L_g(t)$  é considerada incerta e possivelmente variante no tempo, e os indutores do filtro,  $L_1(t)$  e  $L_{f2}(t)$ , possuem núcleos sujeitos à saturação suave.

Assim como realizado na Seção 4.2.1, um modelo politópico aumentado em tempo discreto é construído, considerando a inclusão de um estado adicional para representar o atraso de implementação digital, e um número arbitrário ( $n$ ) de controladores ressonantes.

Note que este modelo assume, para um  $T_s$  suficientemente pequeno, que  $u(k)$  é um valor constante entre dois instantes de amostragem consecutivos. Entretanto, na prática,  $u(k)$  é utilizado como referência para sintetizar as tensões de saída do inversor PWM ( $u_{ab}$  e  $u_{bc}$ , na Figura 2.1), por meio de uma modulação adequada. Estas tensões, por

sua vez, estão sujeitas a efeitos não modelados como: componentes de alta frequência na amostragem dos estados, tempo morto no sinal de acionamento das chaves, flutuações na tensão do barramento, erros de quantização, etc. Sendo assim, além das oscilações causadas na ação de controle pela saturação magnética suave dos núcleos dos indutores do filtro, estes efeitos não modelados tendem a deteriorar as tensões de saída do inversor em frequências que podem não ser conhecidas *a priori*. Por este motivo, foi considerado no modelo um distúrbio exógeno  $w(k)$ , de ampla faixa de frequência, afetando a entrada de controle  $u(k)$ . Este distúrbio pode ser interpretado, por exemplo, como um ruído branco.

Com a inclusão deste distúrbio, é possível reescrever (4.8) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \phi(k+1) \\ \boldsymbol{\xi}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{B}_{ud}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{0}_{3 \times 2n} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ -\mathbf{TC} & \mathbf{0}_{2n \times 1} & \mathbf{R}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} (u(k) + w(k)) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dd}(\boldsymbol{\theta}(k)) \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} v_g(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 0 \\ \mathbf{T}_{2n \times 1} \end{bmatrix} i_{ref}(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Neste novo modelo, a variação das indutâncias do filtro são desprezadas na construção do politopo, assumindo-se os valores fixos nominais ( $L_1$  e  $L_{f2}$ ) para estes parâmetros. Como resultado, ao invés dos quatro vértices apresentados no capítulo anterior, o modelo politópico passa a ter dois vértices, definidos como

$$\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{A}_{dj}, \quad \mathbf{B}_{ud}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{B}_{udj}, \quad \mathbf{B}_{dd}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{B}_{ddj} \quad (5.2)$$

$$[\theta_1, \theta_2] \in \Theta, \quad \Theta \triangleq \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 : \theta_1(k) + \theta_2(k) = 1, \theta_j(k) \geq 0, j = 1, 2. \right\} \quad (5.3)$$

em que  $\boldsymbol{\theta}(k)$  permite representar a variação paramétrica em

$$L_g(t) \in \mathcal{U}_{L_g}, \quad \mathcal{U}_{L_g} = \left\{ L_g \in \mathbb{R}^+ : L_{gmin} \leq L_g \leq L_{gmax} \right\} \quad (5.4)$$

As matrizes em (5.2) são dadas por

$$\mathbf{A}_{dj} = e^{\mathbf{A}_j T_s}, \quad \mathbf{B}_{udj} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_j \tau} \mathbf{B}_{uj} d\tau, \quad \mathbf{B}_{ddj} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_j \tau} \mathbf{B}_{dj} d\tau \quad (5.5)$$

em que os vértices  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_{uj}$  e  $\mathbf{B}_{dj}$  são calculados como:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & \frac{1}{L_{f2} + L_{gmin}} & \frac{-r_g}{L_{f2} + L_{gmin}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & \frac{1}{L_{f2} + L_{gmax}} & \frac{-r_g}{L_{f2} + L_{gmax}} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{B}_{u1} = \mathbf{B}_{u2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{L_{f2} + L_{gmin}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{d2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{L_{f2} + L_{gmax}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

De forma compacta, (5.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(k+1) &= \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u (u(k) + w(k)) + \mathbf{H}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) v_g(k) + \mathbf{H}_{ref} i_{ref}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\rho}(k), \quad \mathbf{C}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{1 \times (2n+1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

em que as matrizes em (5.8) também são obtidas com base em politopos de dois vértices,

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{H}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{H}_{dj}, \quad [\theta_1, \theta_2] \in \Theta \quad (5.9)$$

cujos vértices são dados por

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dj} & \mathbf{B}_{udj} & \mathbf{0}_{3 \times 2n} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ -\mathbf{TC} & \mathbf{0}_{2n \times 1} & \mathbf{R}_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{dj} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ddj} \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2n \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Para garantir a estabilidade robusta do sistema sob variações paramétricas e também rejeição do distúrbio  $w(k)$ , uma lei de controle por realimentação de estados será novamente utilizada, tal que

$$u(k) = \mathbf{K} \boldsymbol{\rho}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & K_\phi & \mathbf{K}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

O projeto do ganho  $\mathbf{K}$  será realizado por meio de LMIs, conforme descrito na próxima seção.

### 5.3 PROJETO DE CONTROLADORES $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser interpretada como a potência de saída do sistema dada uma entrada de distúrbio do tipo ruído branco (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996). A partir de (5.8), pode-se definir a norma  $\mathcal{H}_2$  como

$$\|H\|_2^2 \triangleq \lim_{N_L \rightarrow \infty} \sup E \left\{ \frac{1}{N_L} \sum_{k=0}^{N_L} y(k)^2 \right\} \quad (5.12)$$

em que  $E$  denota a esperança matemática, considerando a entrada  $w(k)$  do sistema como um ruído branco Gaussiano com matriz covariância igual a identidade (CAIGNY et al., 2010). Sendo assim, um controlador projetado de modo a minimizar esta norma é um controlador ótimo.

Um ganho de realimentação de estados estabilizante com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  pode ser obtido utilizando LMIs para sistemas discretos politópicos variantes no tempo, seguindo, por exemplo, os resultados apresentados em (BOYD et al., 1994; CAIGNY et al., 2010). Dessa forma, se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ , e matrizes  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{Z}$ , tal que o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \mu^* &\triangleq \min \text{Tr}(\mathcal{Y}) \\ &s.a. \\ &\begin{bmatrix} \mathcal{Y} & C_{aug}\mathcal{G} \\ \star & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathbf{P}_j \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2; \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{P}_j & \mathbf{G}_j\mathcal{G} + \mathbf{H}_u\mathcal{Z} & \mathbf{H}_u \\ \star & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathbf{P}_\ell & 0 \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, \ell = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

tenha solução, então o ganho de realimentação de estados

$$\mathbf{K} = \mathcal{Z}\mathcal{G}^{-1} \quad (5.14)$$

garante a estabilidade do sistema em malha fechada, com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\sqrt{\mu^*}$ .

A prova pode ser vista no Apêndice B, Seção B.3, em que uma matriz de Lyapunov afim depende de parâmetros é empregada, sendo válida para variações de parâmetros arbitrariamente rápidas no tempo.

Note que as LMIs em (5.13) levam em consideração a entrada de distúrbio relacionada à tensão de saída do inversor ( $\mathbf{H}_u$ ), e não às tensões de rede ( $\mathbf{H}_{aj}$ ), uma vez que as harmônicas provenientes das tensões de rede serão tratadas pelos controladores ressonantes. Ainda, a estratégia baseada no controle  $\mathcal{H}_2$  em espaço de estados foi escolhida aqui devido a possibilidade de considerar um modelo em espaço de estados afetado por parâmetros variantes no tempo, o que faz com que estratégias baseadas no domínio da frequência sejam menos adequadas, neste caso.

### 5.3.1 Procedimento proposto para viabilizar os controladores $\mathcal{H}_2$

É importante observar que os ganhos ótimos obtidos por meio de (5.13)–(5.14) podem não ser viáveis na prática para a aplicação em conversores conectados à rede,



uma vez que os ganhos associados aos controladores ressonantes podem ser atenuados excessivamente (conforme será mostrado em estudo de caso) e, portanto, o sistema em malha fechada não apresenta a capacidade adequada para rastreamento de referência e rejeição de distúrbios harmônicos.

Uma alternativa para contornar este problema e obter controlador viáveis é resolver (5.13) substituindo o problema de minimização  $\mu^* \triangleq \min Tr(\mathcal{Y})$  pela seguinte LMI

$$Tr(\mathcal{Y}) < \mu^2 \quad (5.15)$$

em que  $\mu$  é um escalar real positivo informado pelo projetista, com o objetivo de obter um controlador subótimo capaz de prover bom desempenho do sistema em malha fechada. Desta maneira, o problema de síntese do controlador neste capítulo recai na escolha deste único parâmetro.

Entretanto, embora valores mais elevados de  $\mu$  (i.e.  $\mu > \mu^*$ ) possam prover controladores viáveis para aplicação prática, o valor  $\mu$  não apresenta uma relação direta com o desempenho dinâmico do sistema em malha fechada e com a qualidade das correntes injetadas na rede. Portanto, para guiar a escolha de  $\mu$  e avaliar o desempenho do sistema, o critério ITSE (do inglês, *integral time-squared error*) será utilizado aqui, da seguinte maneira:

- i) para diferentes valor de  $\mu$ , o modelo (5.8) é simulado com a lei de controle (5.11) e ganhos computados por (5.13)–(5.14), incluindo a relaxação em (5.15). A simulação considera  $i_{ref}$  e  $v_g$  dados por senoides com frequência e amplitudes de acordo com o estudo de caso em questão. Aplica-se também um ruído branco em  $w(k)$ , considerando um intervalo de amplitudes de aproximadamente 10% do valor máximo sinal de controle, em regime permanente;
- ii) após o sistema em malha fechada atingir o regime permanente, em um dado instante  $n_1$ , uma variação de fase de  $180^\circ$  é aplicada à referência de corrente;
- iii) o critério ITSE é computado por

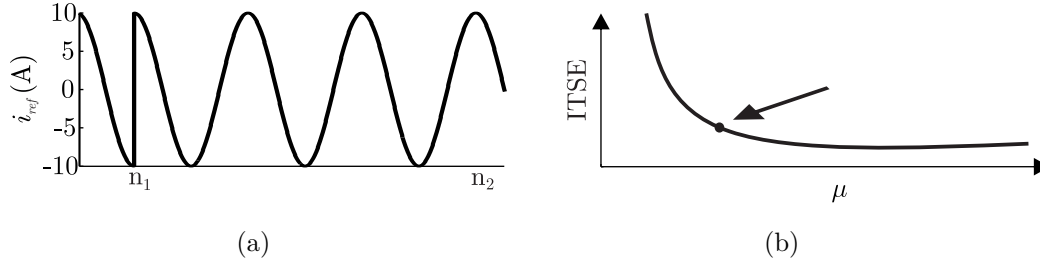
$$\sum_{k=n_1}^{n_2} k(i_{ref}(k) - i_g(k))^2 \quad (5.16)$$

sendo  $n_2$  o instante de tempo dado três períodos após o instante  $n_1$ . O padrão de referência utilizado para o computo do ITSE é exemplificado na Figura 5.1(a);

- iv) o valor adequado de  $\mu$  é escolhido com base na curva ITSE x  $\mu$ , conforme exemplificado na Figura 5.1(b).

É importante observar que o modelo politópico (5.8) é baseado em dois vértices, computados para  $L_{g2min}$  e  $L_{g2max}$ , visando reduzir o conservadorismos na obtenção dos

Figura 5.1 – (a) Padrão de referência de corrente para cômputo do ITSE; (b) valores de ITSE avaliados para o sistema em malha fechada com controladores projetos utilizando diferentes valores de  $\mu$ .



ganhos por meio das LMIs em (5.13). Em contrapartida, mostrou-se no Capítulo 4 que a utilização de dois vértices no projeto de controladores por meio das LMIs de alocação de polos, em (4.13), pode não ser suficiente para garantir robustez frente às variações causadas pela saturação magnética dos indutores do filtro. Por este motivo, as LMIs utilizadas aqui incluem um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , e o parâmetro de projeto  $\mu$  é escolhido levando em consideração o critério ITSE, conforme procedimento descrito acima.

Neste procedimento, embora o cálculo dos ganhos seja feito com base em dois vértices, o ITSE é computado considerando quatro combinações de parâmetros, dadas por:  $(L_{1min}, L_{2min})$ ,  $(L_{1min}, L_{2max})$ ,  $(L_{1max}, L_{2min})$  e  $(L_{1max}, L_{2max})$ , em que  $L_{2min} = L_{f2min} + L_{g2min}$  e  $L_{2max} = L_{f2max} + L_{g2max}$ . O maior valor de ITSE entre as quatro simulações é então utilizado como índice de desempenho. Esta estratégia permite contemplar em certa medida o efeito causado pela saturação magnética no desempenho do sistema, embora não considere diretamente a característica de variação destas indutâncias em função da corrente, uma vez que isso exigiria a execução de simulações no tempo mais complexas e custosas computacionalmente.

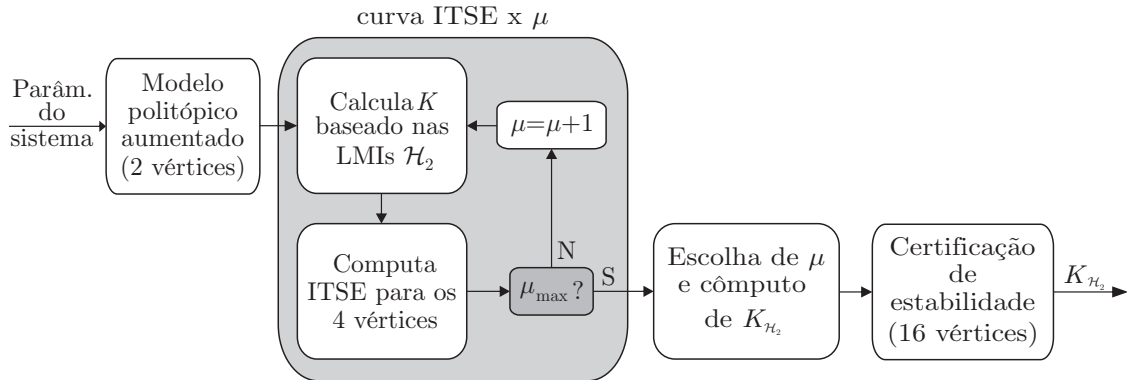
Para certificar a estabilidade robusta no cenário de variações paramétricas causadas tanto pela variação da indutância da rede quanto pela saturação das indutâncias do filtro, a análise detalhada na Seção 4.2.3 também é utilizada aqui. Esta análise é baseada na estabilidade poliquadrática, avaliada com base no politopo mais geral de 16 vértices (conforme mostrado na Seção 4.2.3), garantindo estabilidade do sistema em malha fechada com o ganho do controle  $\mathcal{H}_2$  obtido frente às variações paramétricas no tempo.

Os passos do procedimento de projeto do controlador  $\mathcal{H}_2$  descrito são resumidos na Figura 5.2.

#### 5.4 APLICAÇÃO AO ESTUDO DE CASO 2

Para ilustrar o uso das condições apresentadas neste capítulo, considere o conversor conectado à rede mostrado na Figura 2.1 e os parâmetros do estudo de caso 2, dados na

Figura 5.2 – Diagrama de blocos do procedimento proposto para o cálculo dos controladores  $\mathcal{H}_2$ .



Seção 3.1.2. As resistências  $r_1$  e  $r_{f2}$  são assumidas suficientemente pequenas para serem negligenciadas, representando assim a situação com menor amortecimento. Este estudo de caso foi escolhido para permitir a apresentação de resultados experimentais, utilizando a bancada descrita no Apêndice C.

Primeiramente, para construir o modelo aumentado (5.8), assim como na Seção 4.4, considera-se frequência de amostragem de 20,04 kHz e  $n = 4$  controladores ressonantes projetados para as frequências de 60, 180, 300 e 420 Hz, com fator de amortecimento igual a 0,0001. Então, resolvendo o problema de otimização convexa (5.13), obtém-se como solução  $\mu^* = 0,55$ , levando aos ganhos do controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  dados por

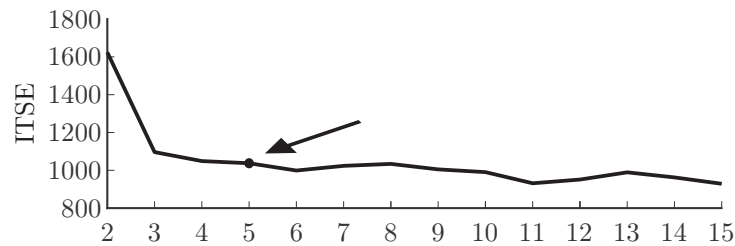
$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -82,669 & -62,535 & -130,504 & -2,945 & 121,8 \times 10^{-9} & -122,1 \times 10^{-9} & \dots \\ 4,7 \times 10^{-9} & -4,8 \times 10^{-9} & 0,49 \times 10^{-9} & -0,53 \times 10^{-9} & 0,61 \times 10^{-9} & -0,63 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Observe que, conforme mencionado anteriormente, estes ganhos não são viáveis para esta aplicação, uma vez que os ganhos associados aos controladores ressonantes são atenuados excessivamente e, portanto, o sistema em malha fechada não apresenta a capacidade adequada para rastreamento de referência e rejeição de distúrbios harmônicos.

Para obter um controlador viável, aplica-se então o procedimento descrito na Seção 5.3.1. Para a avaliação do ITSE, considera-se nas simulações  $i_{ref}$  e  $v_g$  dados por senoides com frequência de 60 Hz e amplitudes de 10 A e 180 V, respectivamente. Aplica-se também um ruído branco em  $w(k)$ , considerando um intervalo de amplitudes entre  $-20$  V e  $20$  V. O procedimento leva à curva ITSE x  $\mu$  mostrada na Figura 5.3, obtida para 12 valores de  $\mu$ . Utilizando o *LMI control toolbox* (MATLAB) em um computador com processador Core i7 e 8 GB de RAM, esta curva é obtida em um tempo de aproximadamente 9,5 s.

Pode-se perceber que o ITSE decresce significativamente até o valor  $\mu = 5$ , a partir do qual esta métrica permanece praticamente inalterada. Por esta razão,  $\mu = 5$  é uma

Figura 5.3 – Valores de ITSE avaliados para o sistema em malha fechada com controladores projetos utilizando diferentes valores de  $\mu$ .

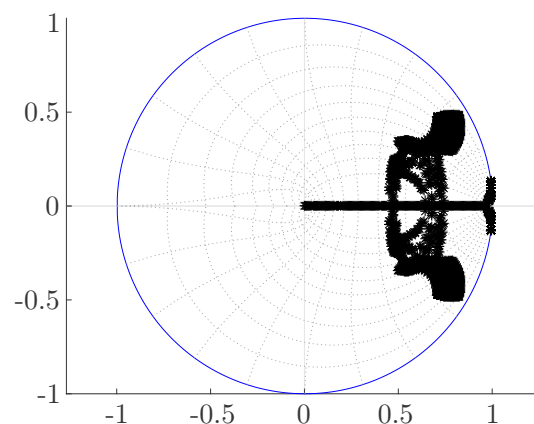


escolha adequada para este estudo de caso, e produz o ganho de controle dado por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -9,672 & -1,868 & 0,438 & -0,442 & 38,646 & -38,147 & \dots \\ 12,022 & -11,801 & 5,750 & -5,945 & 2,127 & -2,481 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A robustez do sistema em malha fechada com estes ganhos é confirmada teoricamente utilizando o certificado fornecido na Seção 4.2.3. Ou seja, analisando a factibilidade de (4.22) com os ganhos de controle em (5.18), verifica-se que existem soluções  $\mathbf{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, 16$ , certificando que o controlador  $\mathcal{H}_2$  obtido pelo procedimento proposto garante estabilidade para o polítopo de 16 vértices. Novamente, para evitar erro numérico com a utilização da rotina de certificação de estabilidade,  $L_{gmin}$  foi considerado igual a  $50 \mu\text{H}$ . A estabilidade pode ser confirmada a partir da Figura 5.4, que mostra os autovalores de malha fechada para uma varredura em todos os parâmetros variantes no tempo, baseada em (4.19). Todos os autovalores estão contidos no círculo de raio unitário para esta varredura, o que é uma condição necessária para a estabilidade do caso variante no tempo, corroborando o certificado de estabilidade apresentado.

Figura 5.4 – Autovalores de malha fechada para uma varredura nos parâmetros variantes no tempo, com controlador robusto (5.18).

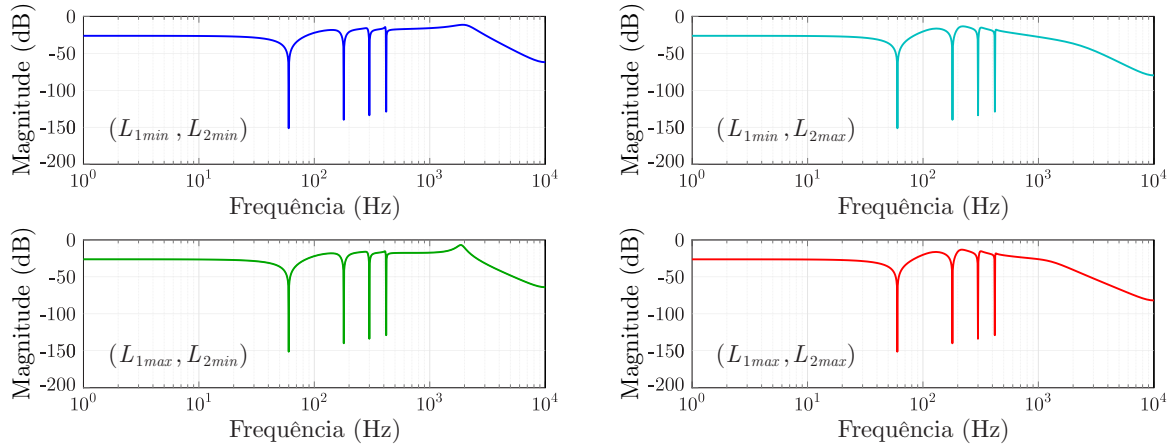


Fonte: Autor.

Como outro indicador do desempenho em malha fechada com o ganho  $\mathbf{K}$ , a Figura 5.5 apresenta as respostas em frequência de  $u$  para  $i_g$  para os vértices:  $(L_{1min}, L_{2min})$ ,

$(L_{1min}, L_{2max})$ ,  $(L_{1max}, L_{2min})$  e  $(L_{1max}, L_{2max})$ . Nesta análise, considera-se o caso invariante no tempo, e verifica-se que o sistema em malha fechada com controlador  $\mathcal{H}_2$  é capaz de atenuar distúrbios na entrada de controle, em toda a faixa de frequências.

Figura 5.5 – Magnitudes das respostas em frequência, em dB, para o sistema em malha fechada com ganhos  $\mathbf{K}$  em (5.18): respostas de  $u$  para  $i_g$ .



O sistema em malha fechada com ganho  $\mathbf{K}$  é capaz de prover, portanto, bons resultados de simulação, e será avaliado experimentalmente na próxima seção.

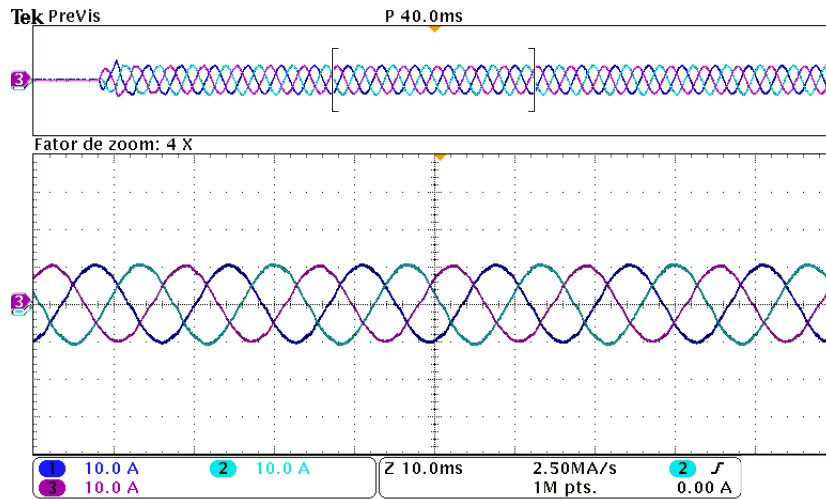
## 5.5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os resultados experimentais mostrados nesta seção foram obtidos utilizando o mesmo protótipo do capítulo anterior, conforme detalhado no Apêndice C

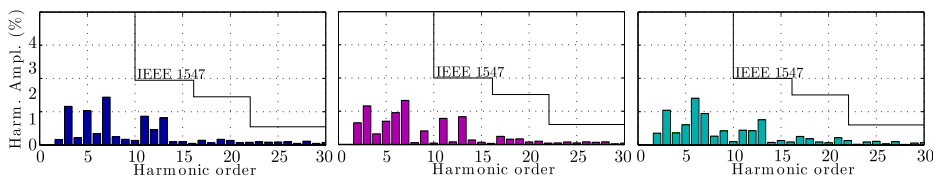
Primeiramente, para verificar conformidade com a norma IEEE 1547, uma análise harmônica para as correntes trifásicas injetadas na rede é mostrada na Figura 5.6. Pode-se verificar que as componentes harmônicas individuais atendem aos limites estabelecidos pela referida norma. Ainda, a distorção harmônica total (THD) também respeita o limite de 5%, confirmando a boa qualidade das correntes com o controlador robusto  $\mathcal{H}_2$ .

Para verificar a capacidade de rastreamento de referências de corrente, relacionadas a injeção de potência reativa e ativa na rede, ensaio semelhante ao mostrado no capítulo anterior é realizado aqui. As referências  $i_{\alpha ref}$  e  $i_{\beta ref}$  são determinadas de modo que o conversor inicie a operação injetando na rede 0,5 pu de potência reativa capacitiva, seguido de uma variação de fase para injeção de potência reativa indutiva e, na sequência, uma variação de fase para injeção de potência ativa. O último transitório diz respeito a uma variação de potência ativa, de 0,5 pu para 1 pu. Estas referências e as correntes  $i_{\alpha}$  e  $i_{\beta}$  correspondentes, obtidas experimentalmente, são mostradas na Figura 5.7 (a) e (b), confirmando que o sistema em malha fechada é capaz de rastrear referências senoidais com respostas transitórias adequadas frente a variações abruptas de fase e amplitude. Na Figura 5.7 (c) são mostrados os sinais modulantes, utilizados para gerar os sinais PWM

Figura 5.6 – (a) Correntes experimentais trifásicas em regime permanente; (b) Análise harmônica para cada uma das fases: canal 1 (THD=2,98%), canal 2 (THD=2,8%) e canal 3 (THD=2,84%).



(a)



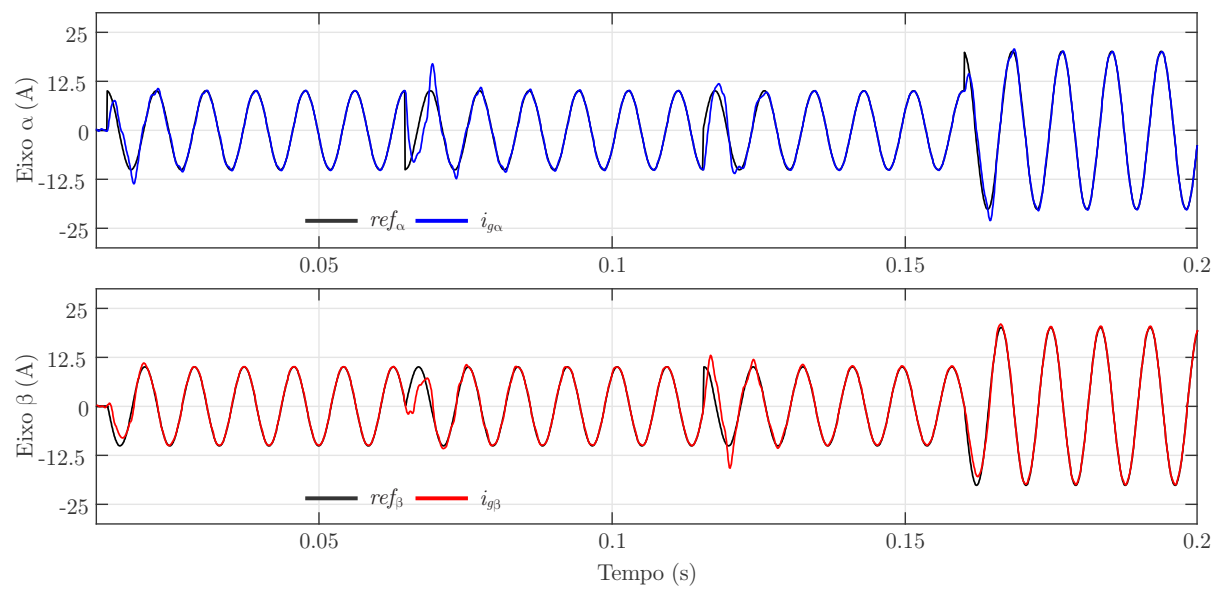
(b)

a partir da modulação *space vector*.

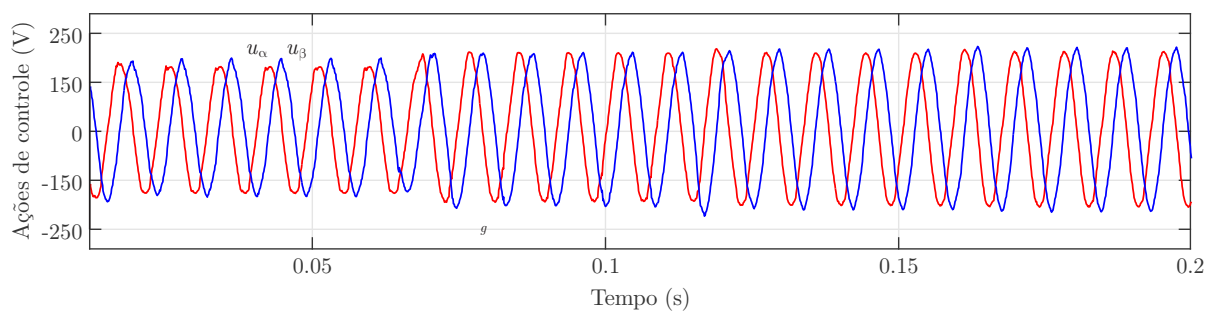
As correntes de rede trifásicas relativas aos resultados mostrados na Figura 5.7 são mostradas na Figura 5.8, detalhando-se os transitórios. Para todos os testes realizados, pode-se perceber que a estabilidade é garantida, com respostas transitórias adequadas e correntes em regime permanente com baixa distorção harmônica.

Um teste para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada frente a variação abrupta de indutância é também apresentado. Novamente, para uma maior praticidade e segurança, este teste é realizado sem a conexão com a rede elétrica, aplicando-se um curto circuito na saída do filtro LCL. Então, utilizando-se um indutor adicional, o valor de  $L_{g1}$  é variado abruptamente de 0,3 mH para 1,3 mH, emulando uma possível variação abrupta da indutância do lado da rede. Como resultado, têm-se as correntes trifásicas mostradas na Figura 5.9, a partir das quais verifica-se boas respostas transitórias e em regime permanente, confirmando estabilidade frente a variações arbitrariamente rápidas de parâmetros. Este resultado está em conformidade com o previsto pelas LMIs apresentadas neste capítulo e com o certificado de estabilidade robusta obtido utilizando as LMIs (4.22) do capítulo anterior.

Figura 5.7 – Resultados experimentais, em eixos estacionários, para teste de variações de referência: (a) correntes nos eixos  $\alpha$  e  $\beta$ ; (b) respectivos sinais de controle.



(a)



(b)

Figura 5.8 – Correntes de rede trifásicas referentes ao ensaio de variação de referência mostrado na Figura 5.7, representando: (a) partida do conversor, injetando potência reativa capacitiva; (b) variação de fase para injeção de potência reativa indutiva; (c) variação de fase para injeção de potência ativa; (d) variação de amplitude.

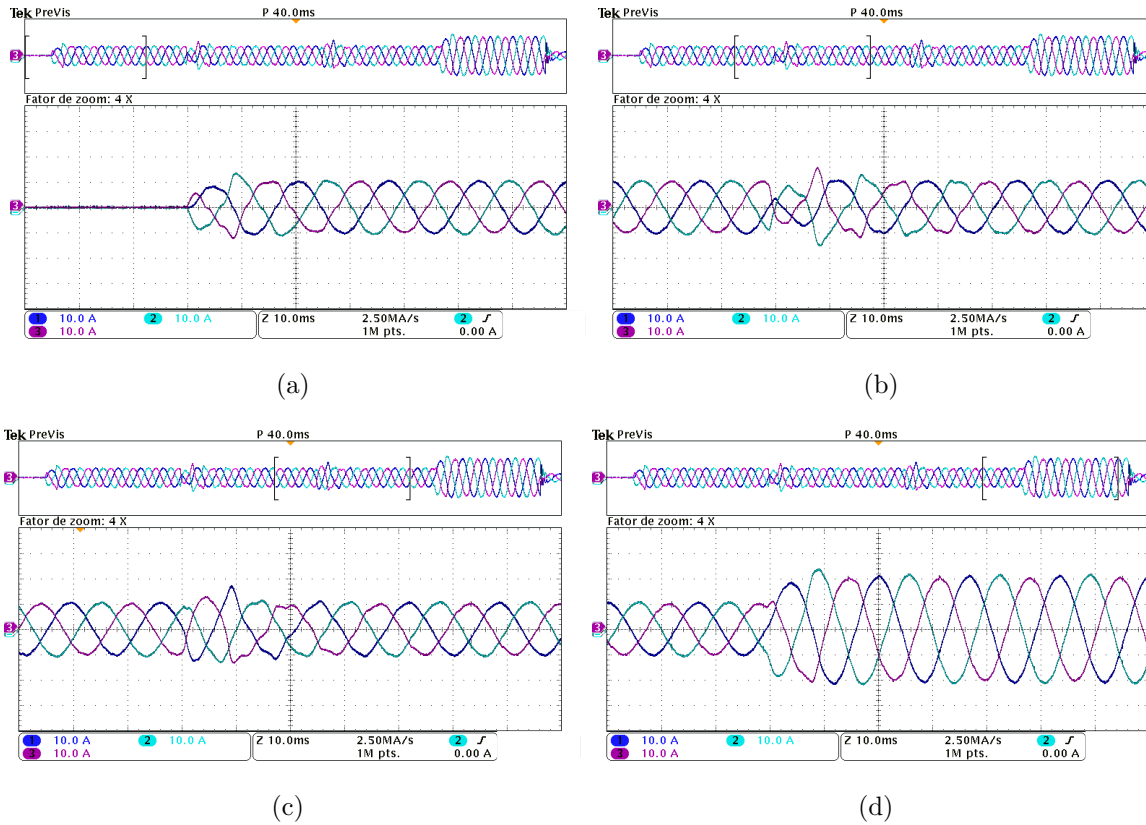
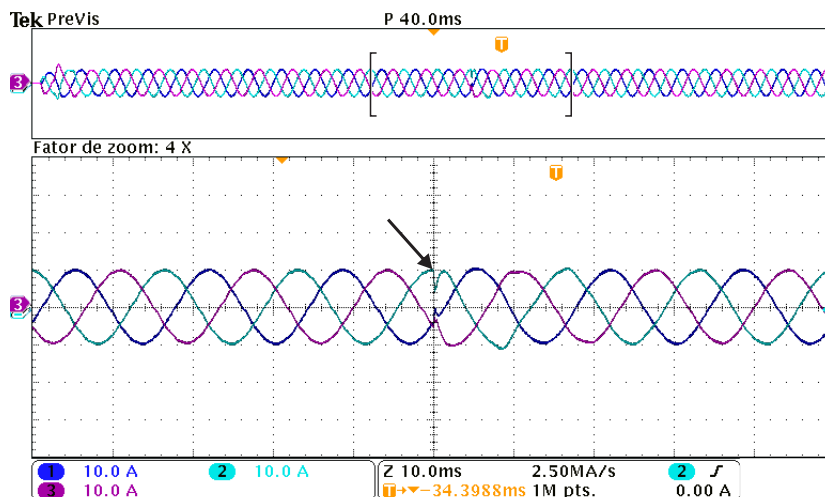


Figura 5.9 – Correntes trifásicas obtidas experimentalmente para um ensaio de variação paramétrica abrupta, implementada no centro da figura.





## 5.6 CONCLUSÕES

Este capítulo mostrou um procedimento sistemático para o projeto de controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  para sistemas variantes no tempo, que pode ser sumarizado como: i) obtenção de um modelo politópico variante no tempo com 2 vértices; ii) obtenção da curva ITSE  $\times \mu$  considerando 4 combinações de parâmetros, dadas pelos valores máximos e mínimos das indutâncias do filtro e da rede; iii) escolha de  $\mu$  e projeto do controlador baseado em LMIs com custo  $\mathcal{H}_2$  garantido; iv) certificação de estabilidade. Deste modo, o procedimento proposto leva em consideração parâmetros incertos e possivelmente variantes no tempo, atraso de implementação digital, e distúrbios em frequência ampla sobre o sinal de controle.

Em comparação ao procedimento proposto no Capítulo 4, verifica-se que aqui optou-se por utilizar uma LMI mais complexa, porém emprega-se um modelo politópico com menos vértices, visando reduzir o conservadorismo na obtenção das soluções. Como resultado, tem-se um procedimento de projeto eficiente, que depende da escolha de um único parâmetro ( $\mu$ ), diretamente relacionado a um critério prático baseado no erro de rastreamento.

Os resultados experimentais confirmam boas respostas sob o efeito da saturação magnética e na presença de variações abruptas de referência, além de estabilidade robusta sob variações abruptas na indutância da rede. As correntes de rede apresentam baixo conteúdo harmônico, em conformidade com os requisitos prescritos na norma IEEE 1547. O bom compromisso entre robustez, desempenho, complexidade do projeto e complexidade de implementação, configuram o procedimento proposto nesse capítulo como sendo uma alternativa eficiente para a aplicação de conversores conectados à rede elétrica.



## 6 OTIMIZAÇÃO DA ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS

No Capítulo 4, utilizou-se a LMI (4.13), em que a escolha do parâmetro de projeto  $r$  foi feita de forma heurística, para cada estudo de caso. Para esta condição de projeto, reduzir  $r$  tende a produzir repostas transitórias mais rápidas, porém, tende também a produzir ganhos de controle mais elevados, que podem não ser implementáveis na prática devido à exigência de sinais de controle com saturação em amplitude ou com componentes de alta frequência, não sintetizáveis pelo inversor. Deste modo, de forma semelhante ao procedimento para escolha de  $\mu$  proposto no Capítulo 5, é interessante desenvolver um procedimento de projeto sistemático em que a escolha de  $r$  leve a controladores implementáveis na prática, provendo ao sistema em malha fechada robustez e desempenho dinâmico satisfatórios.

Neste capítulo, para explorar uma melhoria no projeto, foi escolhido um GCC com filtro L, por simplicidade, e um controlador *deadbeat*, por ser *benchmark* para resposta de tempo ótimo. Fornece-se como contribuição um procedimento de projeto que, a partir das LMIs em (4.13), provê, primeiramente, um controlador ótimo que minimiza o raio de alocação dos polos de malha fechada, denominado controlador robusto *quasi-deadbeat*. Simulações em tempo real baseadas em HIL são então utilizadas para verificar a viabilidade dos ganhos de controle obtidos. Se os resultados no HIL para este controlador não forem viáveis devido a limitações no sinal de controle, então relaxações baseadas em um compromisso entre resposta transitória e norma dos ganhos de controle são fornecidas, para viabilizar a aplicação do controlador. O procedimento proposto é sistemático, levando a ganhos fixos de realimentação de estados que são computados off-line e implementados experimentalmente de forma simples.

### 6.1 MODELAGEM E PARÂMETROS DO SISTEMA

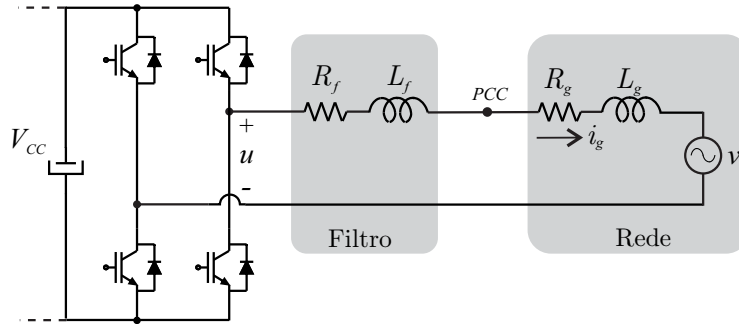
Para o desenvolvimento do procedimento apresentado neste capítulo, considere o inversor conectado à rede por meio de um filtro L, conforme a Figura 6.1. A rede é assumida predominantemente indutiva, sendo que são incluídas resistências no sistema para levar em conta a atenuação usualmente existente na prática no filtro e na rede.

As indutâncias e as resistências do filtro ( $L_f$  e  $R_f$ ) e da rede ( $L_g$  e  $R_g$ ) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} R &= R_f + R_g \\ L &= L_f + L_g \end{aligned} \tag{6.1}$$

sendo estes parâmetros considerados incertos e descritos na forma de intervalos reais como

Figura 6.1 – Inversor monofásico conectado à rede por meio de filtro L.



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned} R &\in [R_{\min}, R_{\max}] \\ L &\in [L_{\min}, L_{\max}] \end{aligned} \quad (6.2)$$

No domínio do tempo contínuo, o modelo médio da planta mostrada na Figura 6.1 é dado por

$$\frac{di_g}{dt} = -\frac{R}{L}i_g + \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_g \quad (6.3)$$

sendo  $u$  a entrada de controle,  $v_g$  representando um distúrbio, e  $i_g$  a corrente injetada na rede (saída controlada).

Objetivando a aplicação de um controle digital, pode-se escrever um modelo em tempo discreto, considerando, por exemplo, o método de Euler e um período de discretização,  $T_s$ , suficientemente pequeno (ASTRÖM; WITTENMARK, 1997). Para a implementação do controle em um processador digital de sinais considera-se também um atraso na ação de controle, permitindo reescrever (6.3) como

$$\begin{aligned} i_g(k+1) &= \overbrace{\left(1 - \frac{R}{L}T_s\right)}^{a_d(R,L)} i_g(k) + \overbrace{\left(\frac{1}{L}T_s\right)}^{b_{ud}(R,L)} \phi(k) - \overbrace{\left(\frac{1}{L}T_s\right)}^{b_{gd}(R,L)} v_g(k) \\ \phi(k+1) &= u(k) \end{aligned} \quad (6.4)$$

em que  $\phi$  é o estado referente ao atraso.

Para garantir rastreamento de referências senoidais de corrente, controladores ressonantes no espaço de estados podem ser incluídos no modelo, dados por

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T}e(k) \quad (6.5)$$

sendo o erro  $e(k)$  dado pela diferença entre a referência  $i_{ref}$  e a variável de saída  $i_g$ , e  $\boldsymbol{\xi}$  contendo dois estados internos para cada controlador ressonante sintonizado em uma dada frequência.

Conforme já mostrado nos Capítulos 4 e 5, sistemas afetados por incertezas pa-

ramétricas podem ser descritos na forma politópica (BOYD et al., 1994). Neste sentido, (6.4) e (6.5) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} i_g(k+1) &= a_d(\boldsymbol{\theta})i_g(k) + b_{ud}(\boldsymbol{\theta})\phi(k) - b_{gd}(\boldsymbol{\theta})v_g(k) \\ \phi(k+1) &= u(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \mathbf{R}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T}i_{ref}(k) - \mathbf{T}i_g(k) \end{aligned} \quad (6.6)$$

sendo

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\theta}) &= \theta_1 a_d(R_{\min}, L_{\min}) + \theta_2 a_d(R_{\max}, L_{\min}) + \theta_3 a_d(R_{\min}, L_{\max}) + \theta_4 a_d(R_{\max}, L_{\max}) \\ b_u(\boldsymbol{\theta}) &= \theta_1 b_{ud}(R_{\min}, L_{\min}) + \theta_2 b_{ud}(R_{\max}, L_{\min}) + \theta_3 b_{ud}(R_{\min}, L_{\max}) + \theta_4 b_{ud}(R_{\max}, L_{\max}) \\ b_g(\boldsymbol{\theta}) &= \theta_1 b_{gd}(R_{\min}, L_{\min}) + \theta_2 b_{gd}(R_{\max}, L_{\min}) + \theta_3 b_{gd}(R_{\min}, L_{\max}) + \theta_4 b_{gd}(R_{\max}, L_{\max}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

com

$$\sum_{j=1}^4 \theta_j = 1, \quad \theta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (6.8)$$

O sistema aumentado (6.6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_g(k+1) \\ \phi(k+1) \\ \boldsymbol{\xi}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_d(\boldsymbol{\theta}) & b_{ud}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_g(k) \\ \phi(k) \\ \boldsymbol{\xi}(k) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -b_{gd}(\boldsymbol{\theta}) \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} v_g(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} i_{ref}(k) \end{aligned} \quad (6.9)$$

ou, de forma mais compacta, como

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u u(k) + \mathbf{H}_g(\boldsymbol{\theta})v_g(k) + \mathbf{H}_r i_{ref}(k) \quad (6.10)$$

com

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{H}_g(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{H}_{gj} \quad (6.11)$$

A lei de controle por realimentação de estados é dada por

$$u(k) = \mathbf{K}\boldsymbol{\rho}(k) \quad (6.12)$$

e será diretamente utilizada aqui para prover um controle por alocação de polos que fornece resposta *deadbeat* para o sistema com parâmetros nominais, ou resposta *quasi-deadbeat* para o sistema com parâmetros incertos, apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros do Sistema

Indutância $L$ nominal	5 mH
Intervalo de incerteza em $L$ : $[L_{min}, L_{max}]$	[2 mH; 8 mH]
Resistência $R$ nominal	0,1 $\Omega$
Intervalo de incerteza em $R$ : $[R_{min}, R_{max}]$	[0 $\Omega$ ; 0,2 $\Omega$ ]
Período de amostragem $T$	1/10000 s
Frequência de chaveamento $f_s$	10 kHz
Referência de corrente	10 A (pico); 60 Hz
Tensão da rede	180 V (pico); 60 Hz
Ressonante (frequência e fator de amortecimento)	60 Hz; 0,0001

## 6.2 CONTROLE *DEADBEAT* CONVENCIONAL

O controle *deadbeat* convencional por realimentação de estados consiste em alocar todos os polos de malha fechada na origem do plano complexo (EMAMI-NAEINI; FRANKLIN, 1982). Pode-se efetuar o projeto deste controlador seguindo os passos:

1. Obtenção do modelo (6.10), considerando uma escolha nominal para  $R$  e  $L$ , levando à representação:

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = \mathbf{G}_{nom}\boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u u(k) + \mathbf{H}_{gnom}v_g(k) + \mathbf{H}_r i_{ref}(k) \quad (6.13)$$

2. Verificação da controlabilidade e, caso o sistema seja controlável, cômputo do ganho do controlador *deadbeat* convencional utilizando, por exemplo, a fórmula de Ackermann, representada no software MATLAB pelo comando:

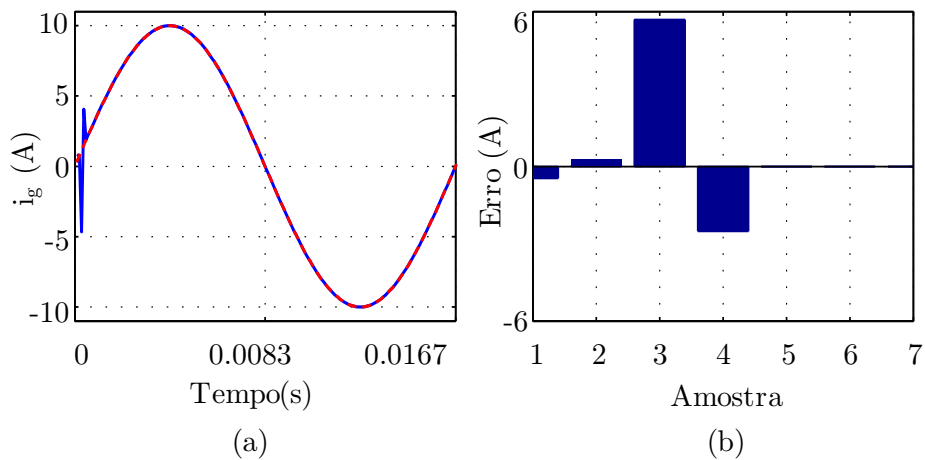
$$\mathbf{K} = -\text{acker}(\mathbf{G}_{nom}, \mathbf{H}_u, [0\ 0\ 0\ 0]) \quad (6.14)$$

Adotando os valores nominais ( $R = 0,1\ \Omega$  e  $L = 5\ \text{mH}$ ) apresentados na Tabela 6.1 e aplicando o procedimento acima, são obtidos os ganhos:

$$\mathbf{K} = \left[ -299,24 \quad 2,9966 \quad -6377,3 \quad 4790,9 \right] \quad (6.15)$$

O sistema em malha fechada, considerando os ganhos em (6.15) e condições nominais, tem todos os polos na origem, forçando o erro de rastreamento de referência a zero em um número mínimo de amostras, igual à ordem do sistema (dinâmica *deadbeat* ideal). A Figura 6.2(a) apresenta a simulação no domínio do tempo, confirmando o bom rastreamento da referência. O desempenho transitório pode ser avaliado a partir da Figura 6.2(b), na qual, por meio de um gráfico de barras, verifica-se que o erro de

Figura 6.2 – Controlador *deadbeat* convencional em condições nominais. (a) Resposta no tempo. (b) Desempenho transitório avaliado a partir do erro de rastreamento de corrente.

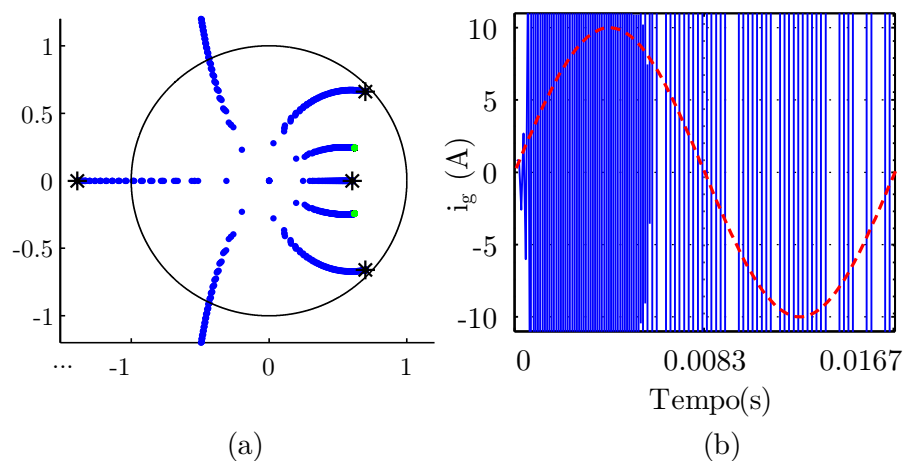


Fonte: Autor.

rastreamento converge para zero em quatro períodos de amostragem, conforme esperado pela dinâmica *deadbeat*, considerando que o sistema possui quatro estados ( $i_g$ ,  $\theta$  e dois estados referentes ao controle ressonante).

Considere os ganhos projetados para os valores nominais, em (6.15), mas suponha agora que os parâmetros  $L$  e  $R$  possam assumir valores nos intervalos de incertezas dados na Tabela 6.1. A Figura 6.3(a) apresenta os polos em malha fechada para uma discretização exhaustiva dos parâmetros  $L$  e  $R$ , considerando-os de forma independente. É possível observar que alguns destes polos saem do círculo de raio unitário, evidenciando o problema de sensibilidade à incerteza paramétrica do controlador *deadbeat* convencional.

Figura 6.3 – Controlador *deadbeat* convencional. (a) Polos de malha fechada. (b) Resposta instável para o caso  $R = 0,2 \Omega$  e  $L = 8 \text{ mH}$  e referência senoidal.



Fonte: Autor.

Para exemplificar, assuma que a planta opere com os valores máximos dos parâmetros dados na Tabela 6.1 ( $R = 0,2 \Omega$  e  $L = 8 \text{ mH}$ ). Os polos para esta condição são destacados com um asterisco na Figura 6.3(a), de onde verifica-se que o controlador *deadbeat* convencional aloca um dos polos de malha fechada fora do círculo de raio unitário, tornando o sistema instável neste caso. A Figura 6.3(b) mostra a resposta no tempo, comprovando a instabilidade. Na próxima seção é dada uma solução para este problema por meio de um controlador robusto.

### 6.3 CONTROLE ROBUSTO QUASI-DEADBEAT E RELAXAÇÕES

Visando conferir robustez contra variações paramétricas em  $R$  e  $L$ , pertencentes aos intervalos (6.2), tem-se a condição de projeto dada no Lema 1.

**Lema 1.** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_j$ , e matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{J}$ , tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}_j & \mathbf{Q}'\mathbf{G}'_j + \mathbf{J}'\mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}_j\mathbf{Q} + \mathbf{H}_u\mathbf{J} & \mathbf{S}_\ell \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ \ell = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (6.16)$$

*tenha solução, então o ganho de realimentação de estados*

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1} \quad (6.17)$$

*garante:*

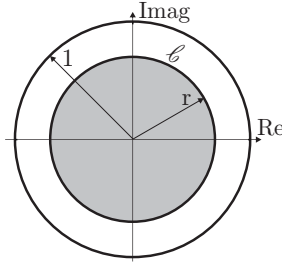
- i) estabilidade poliquadrática para qualquer variação paramétrica para o sistema politópico (6.10);*
- ii) rastreamento de referência senoidal ( $i_{ref}$ ) e rejeição de distúrbio senoidal ( $v_g$ ) em regime permanente.*

**Prova.** A prova de *i)* pode ser obtida a partir da estabilidade poliquadrática de sistemas discretos politópicos variantes no tempo, conforme apresentado no Apêndice B, Seção B.2. A prova de *ii)* decorre do princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976).

Visando otimizar o desempenho, busca-se agora um controlador robusto capaz de alocar os polos de malha fechada o mais próximo possível da origem do plano complexo, definido abaixo como controlador robusto *quasi-deadbeat*.

**Definição 1.** *Define-se aqui como controlador robusto quasi-deadbeat o ganho fixo  $\mathbf{K}$ , na lei de controle (6.12), que garante a estabilidade poliquadrática do Lema 1 e que aloca os polos de malha fechada no círculo  $\mathcal{C}$ , na Figura 6.4, com raio mínimo  $r = r^*$ .*



Figura 6.4 – Região para alocação de polos do controlador robusto *quasi-deadbeat*.

Fonte: Autor.

O controlador robusto *quasi-deadbeat* é obtido por meio da solução do Teorema 1.

**Teorema 1.** *Assuma que Lema 1 é factível. Então, existe solução  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{S}_j$  para o problema de otimização*

$$r^* = \min r \quad \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} r(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}' - \mathcal{S}_j) & \mathcal{Q}'\mathcal{G}'_j + \mathcal{J}'\mathcal{H}'_u \\ \mathcal{G}_j\mathcal{Q} + \mathcal{H}_u\mathcal{J} & r\mathcal{S}_\ell \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ \ell = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (6.18)$$

sendo o ganho do controlador robusto *quasi-deadbeat* dado por

$$\mathbf{K}^* = \mathcal{J}\mathcal{Q}^{-1}$$

**Prova.** A factibilidade do Lema 1 garante que (6.18) tem solução para  $r = 1$ . O bloco  $r\mathcal{S}_\ell$  em (6.18) garante que  $r$  não será negativo. Como  $0 < r \leq 1$ , uma simples bisseção neste intervalo conduz ao mínimo de  $r$  (chamado  $r^*$ ) que resolve (6.18). Substituindo  $\mathcal{J} = \mathbf{K}^*\mathcal{Q}$  em (6.18) e levando em conta a convexidade (BOYD et al., 1994), tem-se que

$$\max \left| \lambda \left( \frac{\mathbf{G}(\theta) + \mathbf{H}_u\mathbf{K}^*}{r^*} \right) \right| < 1 \quad (6.19)$$

assegurando que todos os autovalores de malha fechada (e, portanto, os polos de malha fechada) estão contidos no círculo de raio  $r^*$  centrado na origem.

O controlador ótimo do Teorema 1 pode ser relaxado para um controle subótimo, por meio do Corolário 1.

**Corolário 1.** *Assuma que Teorema 1 tenha solução  $r^*$ . Então, existe solução para (6.18) com  $r^* < r \leq 1$ , produzindo ganhos de controle (6.12) que relaxam a alocação dos polos em relação ao controlador robusto *quasi-deadbeat*.*

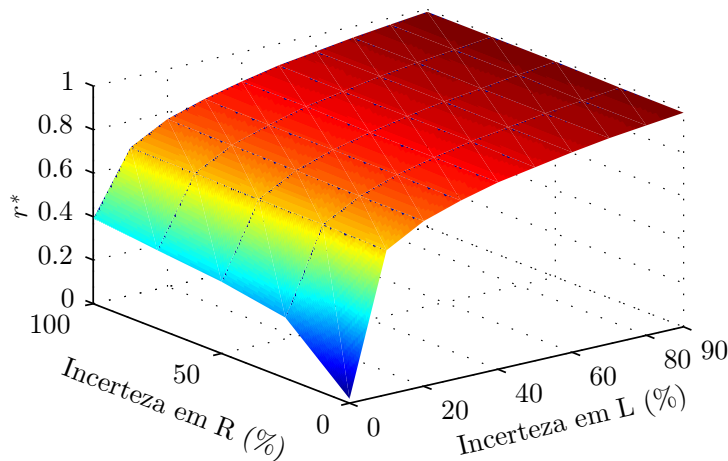
Para ilustrar o uso do Lema 1, Teorema 1 e Corolário 1, são apresentados a seguir alguns estudos numéricos. Aplicando o Lema 1 ao sistema com parâmetros na Tabela 6.1, nota-se que o mesmo é factível. Então, aplicando o Teorema 1 tem-se o mínimo raio

obtido de  $r^* = 0,92$  e os ganhos do controlador robusto *quasi-deadbeat* dados por

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -43,077 & -1,162 & 201,644 & -192,782 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Deve-se observar que este valor de  $r^* = 0,92$ , distante de zero (caso *deadbeat* convencional), é devido à amplitude dos intervalos das incertezas paramétricas. Para ilustrar este fato, a Figura 6.5 apresenta os valores de  $r^*$  obtidos para os parâmetros da Tabela 6.1, considerando distintas faixas de incerteza em  $L$  e  $R$ . As incertezas foram normalizadas considerando-as em torno dos valores base de  $L = 5$  mH e  $R = 0,4$   $\Omega$ . Por exemplo, uma incerteza de 20% em  $L$  representa o intervalo  $L \in [4$  mH; 6 mH].

Figura 6.5 – Superfície que descreve o raio mínimo obtido com base no Teorema 1, para diversos casos de incertezas paramétricas em  $R$  e  $L$ .



Fonte: Autor.

Com base na Figura 6.5, pode-se verificar que a minimização do raio de alocação de polos por meio do Teorema 1 é fortemente influenciada pela incerteza na indutância  $L$ , enquanto incertezas na resistência  $R$  afetam de forma menos significativa o valor de  $r^*$ . Para pequenas porcentagens de incertezas paramétricas, a resposta é muito próxima à resposta *deadbeat* convencional.

Sobre como o raio de alocação de polos influi na acomodação das respostas transitórias, considerando que os modos das respostas transitórias são limitados por  $(r)^k$ , tem-se que estes modos se extinguem, para o critério de 1% de erro, após um tempo de acomodação definido, no pior caso, por (veja Apêndice B, Seção B.2.1):

$$t_{acom} = T \frac{\ln(0,01)}{\ln(r)}. \quad (6.21)$$

A Figura 6.6(a) apresenta o tempo de acomodação em função do raio de alocação dos polos. É possível verificar que esse tempo cresce exponencialmente com o raio, variando fortemente a partir do raio 0,98.

Embora o Teorema 1 indique ser teoricamente possível garantir alocação em raio mínimo de 0,92 para o sistema com parâmetros apresentados na Tabela 6.1, o controlador (6.20) exibe ganhos que podem levar a sinais de controle inviáveis na prática, por saturação ou por sensibilidade maior do sistema em malha fechada a não-linearidades e dinâmicas não modeladas (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997). Neste sentido, pode-se relaxar o desempenho por meio de controladores subótimos, dados pela solução do Corolário 1.

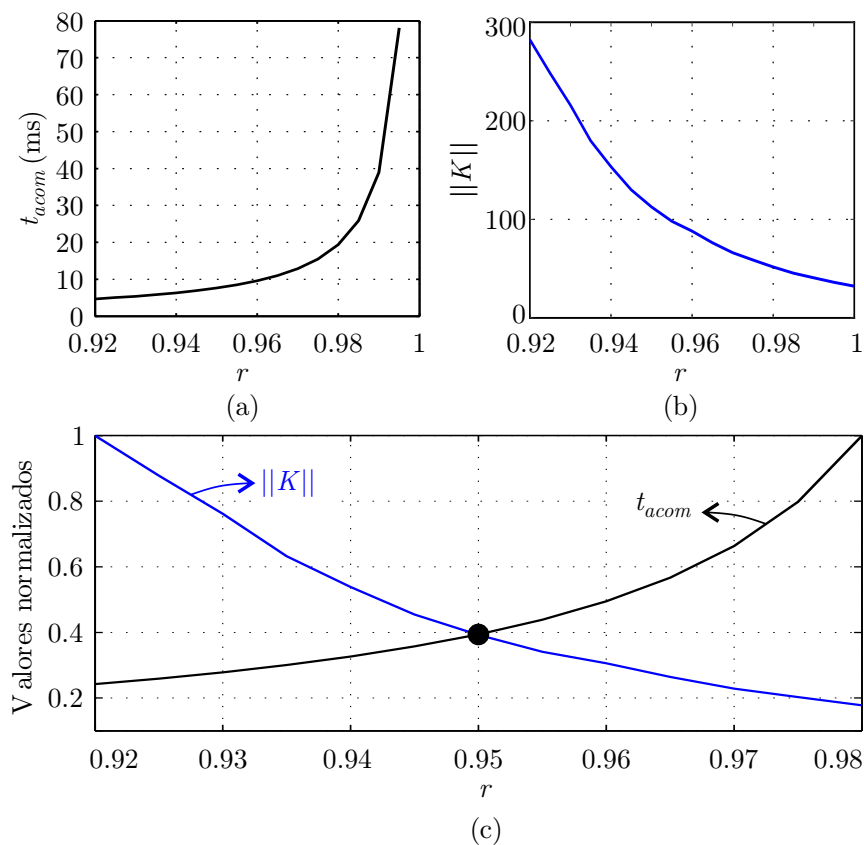
Como uma medida do tamanho dos ganhos, pode-se utilizar a norma euclidiana de  $\mathbf{K}$ , dada por

$$\|\mathbf{K}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 k_i^2} \quad (6.22)$$

sendo  $k_i$  o  $i$ -ésimo elemento deste vetor.

A Figura 6.6(b) apresenta como a norma dos ganhos, obtidos por meio do Corolário 1, varia em função do raio. A Figura 6.6(c) apresenta uma análise conjunta das curvas anteriores, normalizadas pelos respectivos valores máximos, para o intervalo  $0,92 \leq r \leq 0,98$ , com  $r_{max}$  escolhido como 0,98 em função dos tempos de acomodação

Figura 6.6 – Análises para os parâmetros da Tabela 6.1: (a) tempo de acomodação do transitório em função do raio dado por (6.21); (b) ganhos do controlador em função do raio; (c) curvas (a) e (b) normalizadas para análise de *tradeoff*.



aumentarem significativamente a partir deste ponto.

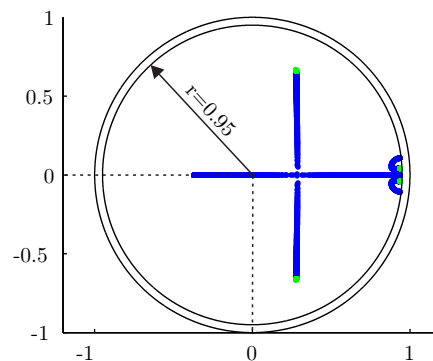
A Figura 6.6(c) permite uma análise de relação de compromisso, mostrando que a intersecção das curvas indica o ponto de melhor compromisso (ponto de melhor *tradeoff*) entre  $\|\mathbf{K}\|$  e  $t_{acom}$ . Este ponto é dado por  $r = 0,95$ , permitindo que a norma dos ganhos seja reduzida, sem acréscimo significativo no tempo de acomodação.

Para  $r = 0,95$ , a partir de (6.21), tem-se que  $t_{acom} \simeq 9$  ms, sendo os ganhos obtidos com o Corolário 1 dados neste caso por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -22,627 & -0,5616 & 79,163 & -76,791 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Para os ganhos (6.23), a Figura 6.7 apresenta os polos de malha fechada considerando uma varredura em  $L$  e  $R$  nos intervalos de incertezas paramétricas apresentados na Tabela 6.1. Diferentemente do controlador convencional, avaliado na Figura 6.3(a), o controlador robusto, avaliado na Figura 6.7, garante que todos os polos permanecem estáveis e dentro do círculo de raio  $r = 0,95$ , conforme esperado.

Figura 6.7 – Polos do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos em (6.23), para variação paramétrica considerando os intervalos apresentados na Tabela 6.1.



Fonte: Autor.

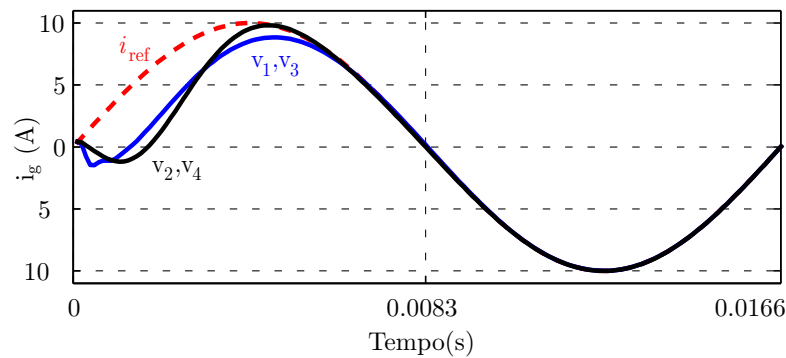
Uma simulação no tempo é apresentada na Figura 6.8, permitindo verificar o comportamento transitório da corrente de saída do sistema em malha fechada para quatro vértices denotados por  $v_1$  até  $v_4$  representado, respectivamente, as seguintes situações:  $[L_{min}, R_{min}]$ ,  $[L_{max}, R_{min}]$ ,  $[L_{min}, R_{max}]$  e  $[L_{max}, R_{max}]$ . É possível observar que, nos quatro vértices, o sistema converge para a referência satisfatoriamente e dentro do  $t_{acom}$  previsto (em até 9 ms). Verifica-se também que, nas situações descritas pelos vértices  $v_2$  e  $v_4$ , as respostas convergem ligeiramente mais rápido que para o caso dos vértices  $v_1$  e  $v_3$ . Cabe observar que variações em  $R_{max}$  e  $R_{min}$  causam alterações desprezíveis na dinâmica do sistema, o que é confirmado pela sobreposição das curvas na Figura 6.8.

Para os quatro vértices, a Figura 6.9(a) apresenta a resposta em frequência da referência  $i_{ref}$  para a saída  $i_g$ . É possível verificar que há ganho 0 dB e fase  $0^\circ$  em 60 Hz

para todos os casos, confirmando o rastreamento desejado para a referência senoidal de corrente, nesta frequência, em regime permanente.

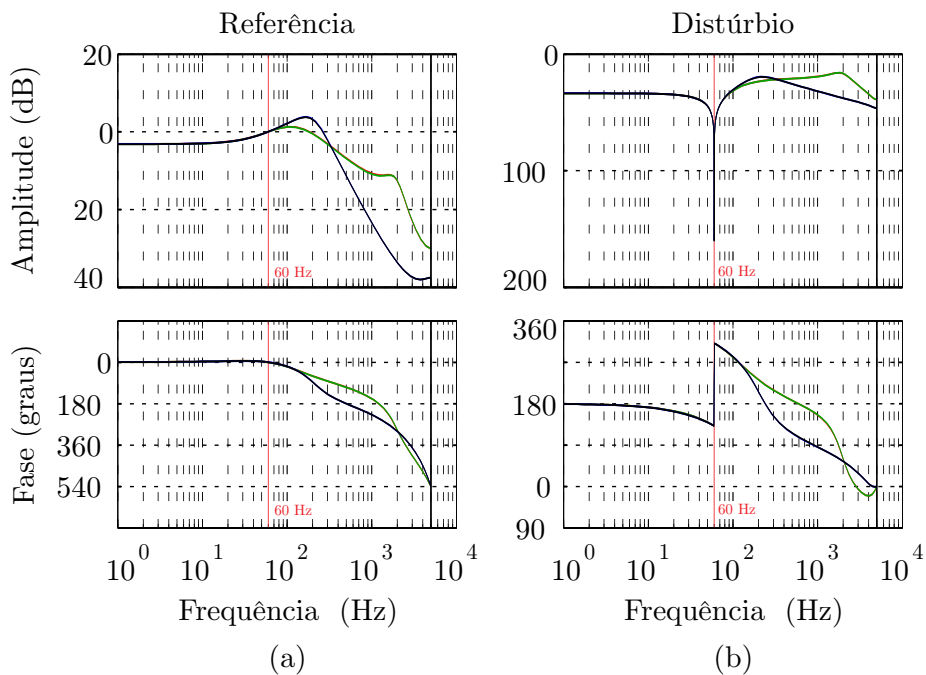
A Figura 6.9(b) apresenta a resposta em frequência do distúrbio  $v_g$  para a saída  $i_g$  considerando os quatro vértices. Verifica-se que há atenuação de -160 dB na frequência de 60 Hz, confirmando a boa rejeição ao distúrbio  $v_g$  e, portanto, que a operação do conversor contra a tensão senoidal da rede nesta frequência não trará prejuízo à resposta em regime permanente, o que será comprovado com os resultados da próxima seção.

Figura 6.8 – Respostas do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos (6.23).



Fonte: Autor.

Figura 6.9 – Diagramas de Bode do sistema em malha fechada com controlador robusto com ganhos (6.23): (a) da referência para a saída; (b) do distúrbio para a saída.



Fonte: Autor.

#### 6.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL

A topologia apresentada na Figura 6.1 foi simulada em tempo real no HIL utilizando a mesma bancada de testes descrita na Seção 4.3. O controle proposto é implementado utilizando um DSP Texas TMS32F28335.

Foram realizados os seguintes ensaios para validação dos controladores: transitório de partida para operação com  $L_{min}$  e com  $L_{max}$ ; variação abrupta na indutância  $L$ ; variações no sinal de referência; análise de THD e de compatibilidade harmônica com a norma IEEE 1547 (IEEE, 2011). Cabe mencionar que o controlador *deadbeat* convencional (6.15) apresentou resultados instáveis na implementação em HIL devido à saturação do sinal de controle.

Para verificar a viabilidade dos controladores ótimo e subótimo, a Figura 6.10 mostra um ensaio do sistema partindo com ganho (6.23) (controlador subótimo) comutando para o controlador com ganho (6.20) (controlador ótimo). Para este estudo de caso, pode-se perceber claramente a viabilidade do controlador subótimo, com o sinal de controle na Figura 6.11(a), e a inviabilidade do controlador ótimo, com a ação de controle saturada, mostrada na Figura 6.11(b). A inviabilidade prática dos ganhos ótimos é confirmada mesmo inicializando o sistema com este controlador, e pode ser atribuída fundamentalmente à limitação do sinal de controle. Neste sentido, cabe observar que existe uma relação de compromisso entre a complexidade do modelo e a qualidade dos resultados, sendo que neste capítulo optou-se por manter um modelo linear simplificado, mas ao mesmo tempo propor um procedimento sistemático para a obtenção de um controlador subótimo capaz de prover desempenho adequado.

Figura 6.10 – Tensão da rede  $v_g$  e corrente de rede  $i_g$  para  $L = 2$  mH e  $R = 0,1 \Omega$ , para partida com o controlador subótimo e comutação para o controlador ótimo.

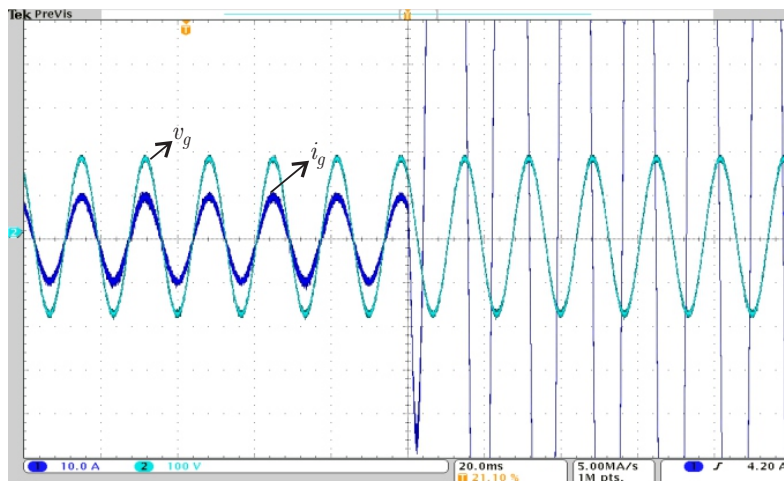
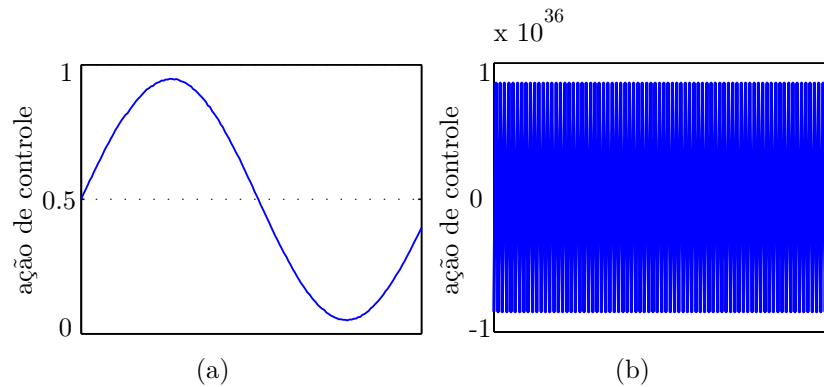
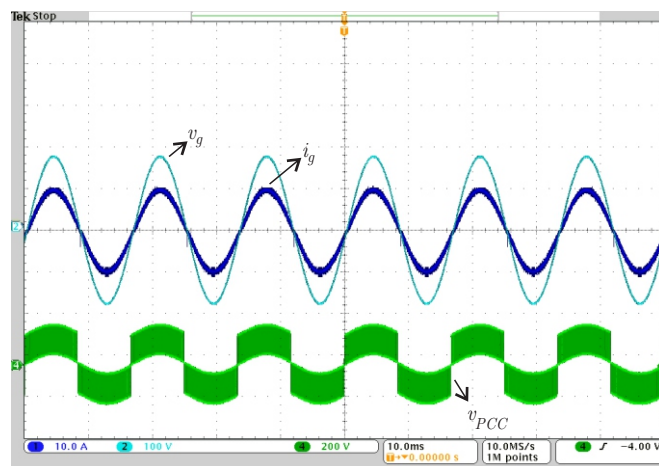


Figura 6.11 – Sinais de controle para: (a) controlador subótimo (b) controlador ótimo.



Fonte: Autor.

Figura 6.12 – Resultados do HIL: tensão da rede  $v_g$ , corrente injetada  $i_g$  na rede e tensão no ponto de conexão  $v_{pcc}$  para  $L = 2$  mH e  $R = 0,1 \Omega$ , com o controlador robusto com ganhos em (6.23).

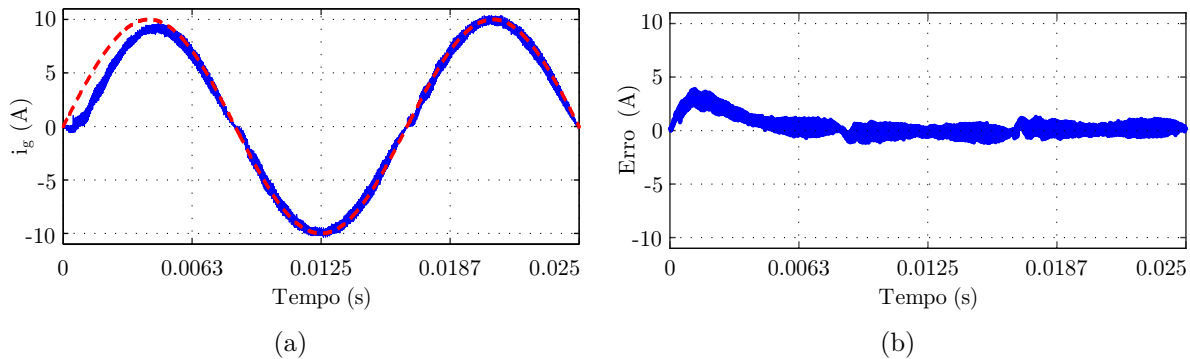


Fonte: Autor.

Para confirmar a viabilidade do controlador subótimo (6.23), os demais ensaios mencionados anteriormente foram realizados no HIL. A Figura 6.12 apresenta a tensão da rede ( $v_g$ ), corrente injetada na rede ( $i_g$ ) e a tensão no ponto de conexão ( $v_{pcc}$ ), em regime permanente, para o sistema em malha fechada com ganhos em (6.23) no caso em que  $L = 2$  mH e  $R = 0,1 \Omega$ . É importante notar a partir desta figura, que o controlador proposto não utiliza a tensão  $v_{pcc}$  para o cálculo da ação de controle, o que é vantajoso do ponto de vista de uma maior simplicidade na implementação, não demandando projeto nem implementação de filtros para uso desta variável no controle.

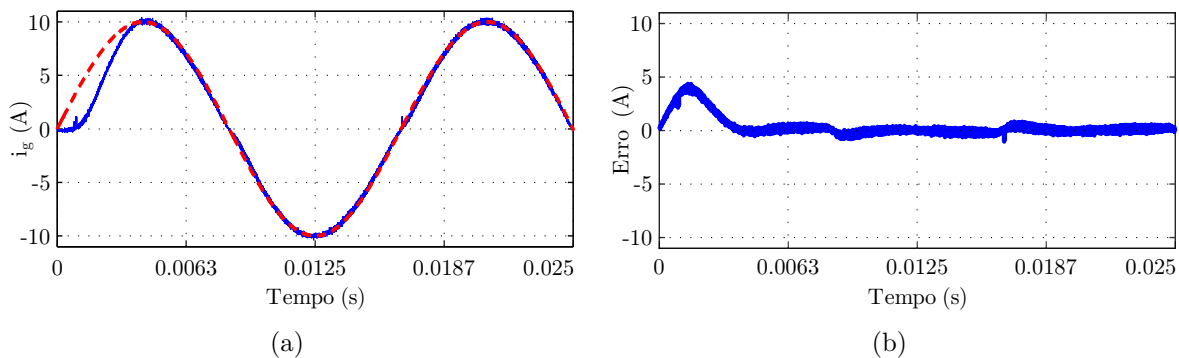
Para uma melhor visualização dos resultados a seguir, optou-se por apresentar as demais respostas no tempo a partir dos dados em formato *csv* capturados pelo osciloscópio. O comportamento no transitório de partida até a acomodação do sistema e o erro de rastreamento são apresentados em detalhe para  $L_{min} = 2$  mH e  $L_{max} = 8$  mH na

Figura 6.13 – Resultados do HIL para o controlador robusto em (6.23). Referência (linha tracejada) e corrente  $i_g$  injetada na rede (linha contínua) para  $L = 2$  mH. (a) Resposta transitória e em regime permanente. (b) Erro de rastreamento.



Fonte: Autor.

Figura 6.14 – Resultados do HIL para o controlador robusto em (6.23). Referência (linha tracejada) e corrente  $i_g$  injetada na rede (linha contínua) para  $L = 8$  mH. (a) Resposta transitória e em regime permanente. (b) Erro de rastreamento.



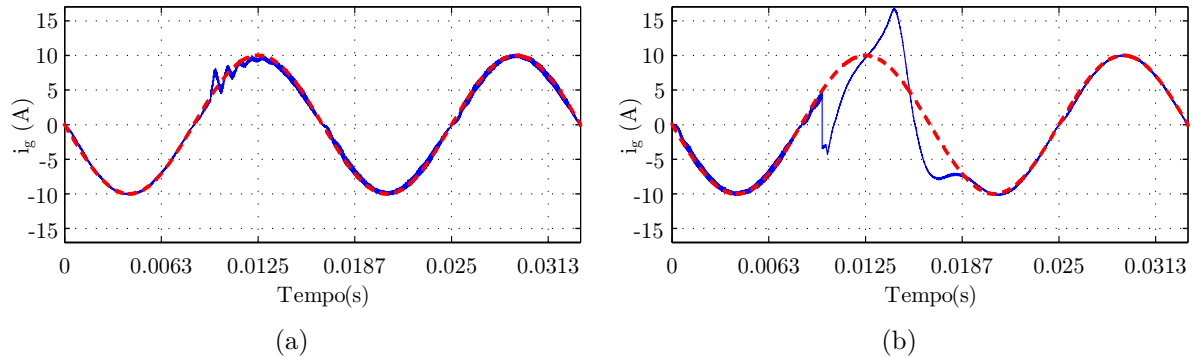
Fonte: Autor.

Figura 6.13 e na Figura 6.14, respectivamente. A referência de corrente segue as especificações apresentadas na Tabela 6.1. A partir destas figuras verifica-se que a resposta transitória está de acordo com o projeto para ambos os casos, apresentando boa correspondência com os resultados de simulação apresentados na Figura 6.8. O maior *ripple* nos resultados da Figura 6.13(b) deve-se ao menor valor da indutância  $L$ , neste caso.

Visando verificar o comportamento do sistema frente a variações paramétricas, na Figura 6.15(a) tem-se o resultado de um ensaio de comutação do valor da indutância de  $L = 8$  mH para  $L = 2$  mH. Além do natural aumento na oscilação de corrente devido à redução da indutância do filtro, observa-se que o controlador atua adequadamente de modo a rastrear a referência de corrente com um tempo transitório em torno de 3 ms. Na Figura 6.15(b), tem-se o resultado da comutação da indutância de  $L = 2$  mH para  $L = 8$  mH. Novamente, verifica-se que o controlador é capaz de restabelecer o rastreamento

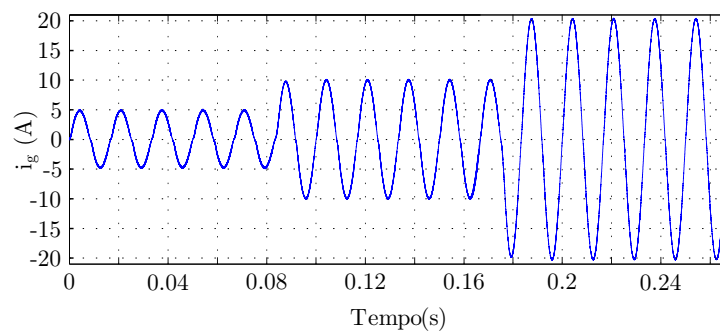


Figura 6.15 – Resultado do HIL para o controlador robusto com ganhos em (6.23) frente a comutação de indutância durante a operação. (a) Variação de 8 mH para 2 mH. (b) Variação de 2 mH para 8 mH.



Fonte: Autor.

Figura 6.16 – Resultados do HIL para o controlador robusto com ganhos em (6.23), para variação da corrente de referência de 5 A para 10 A e, posteriormente, de 10 A para 20 A, com indutância nominal ( $L = 5$  mH).



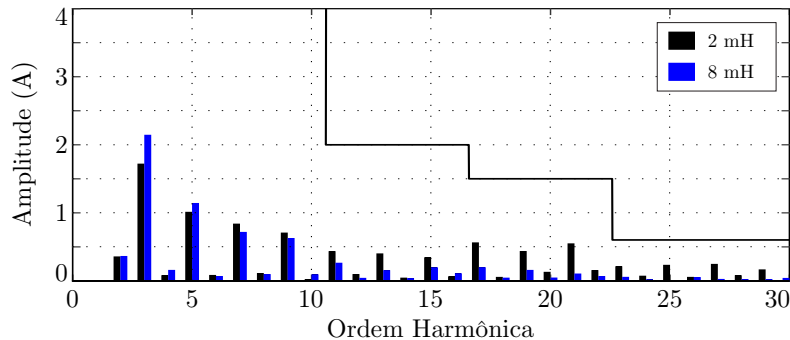
Fonte: Autor.

da corrente após aproximadamente 9 ms, mesmo que a corrente injetada na rede tenha sofrido uma perturbação considerável.

A Figura 6.16 apresenta a resposta frente a variações na referência de corrente, ilustrando que o sistema em malha fechada com o controlador robusto também garante bom rastreamento neste ensaio.

Para comprovar a baixa distorção harmônica da corrente injetada na rede obtida com o controlador proposto, a Figura 6.17 apresenta a análise harmônica para um ciclo em regime permanente das formas de onda de correntes mostradas na Figura 6.13(a) e Figura 6.14(a). Uma comparação com os limites da norma IEEE 1547 é realizada, a partir da qual verifica-se claramente que as correntes injetadas na rede estão de acordo com os limites da referida norma.

Figura 6.17 – Análise harmônica da corrente injetada na rede nas Figuras 6.13(a) e 6.14(a) e comparação com os limites da norma IEEE 1547. THD = 4,75% para  $L = 2$  mH e THD = 3,05% para  $L = 8$  mH.



Fonte: Autor.

## 6.5 PROCEDIMENTO DE PROJETO E ESTUDO DE CASO ILUSTRATIVO

Para sistematizar os passos para obtenção de ganhos de controle ótimos e subótimos, tem-se o procedimento da Figura 6.18. Neste procedimento, obtém-se um controlador ótimo a partir do Teorema 1. Este controlador é testado no HIL. Caso o resultado não seja satisfatório, utiliza-se o Corolário 1 para obter o controlador subótimo de melhor *tradeoff*. Se necessário, relaxa-se este controlador aumentando o raio de alocação de polos. Para ilustrar o uso do procedimento proposto, considere um novo estudo de caso. Suponha que o sistema está sujeito agora a incertezas paramétricas porcentualmente menores que no exemplo anterior, com valores nominais  $L = 2$  mH e  $R = 0,1 \Omega$ , e incertezas de  $\pm 10\%$  em ambos os parâmetros. Neste caso, o Lema 1 é factível e o Teorema 1 fornece ganhos que não satisfazem a simulação no HIL. Resolvendo o Corolário 1 tem-se as curvas na Figura 6.19(a). Pode-se observar que o ponto de melhor *tradeoff* é obtido para  $r = 0,83$ , que leva aos ganhos de controle dados por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -22,014 & -0,850 & 178,399 & -162,663 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

que produzem resultados viáveis na simulação no HIL.

A Figura 6.19(b) confirma os polos de malha fechada respeitando o raio de alocação de 0,83, considerando uma varredura em  $L$  e  $R$  para o intervalo de incertezas paramétricas considerado, comprovando a alocação robusta.

A Figura 6.20(a) apresenta os resultados obtidos com o HIL para o sistema em malha fechada com ganhos em (6.24). A Figura 6.20(b) mostra o detalhamento do transitório de partida, em que é possível notar que a redução no raio de alocação leva a uma resposta mais próxima da resposta *deadbeat* ideal, ilustrando o potencial de melhoria de

desempenho com a redução das incertezas e variações paramétricas. Os demais testes no HIL apresentados para o exemplo anterior foram repetidos para este caso, confirmando os bons resultados com os ganhos (6.24).

Finalmente, é importante mencionar que para os estudos de caso mostrados no trabalho, o procedimento proposto na Figura 6.18 conduz a controladores viáveis, (6.23) e (6.24), em um tempo computacional adequado, incluindo todas as soluções de LMIs no MATLAB e as execuções das simulações em HIL. Isto evidencia o potencial de desenvolvimento rápido de controladores com o procedimento proposto, e também a utilidade de

Figura 6.18 – Procedimento de projeto.

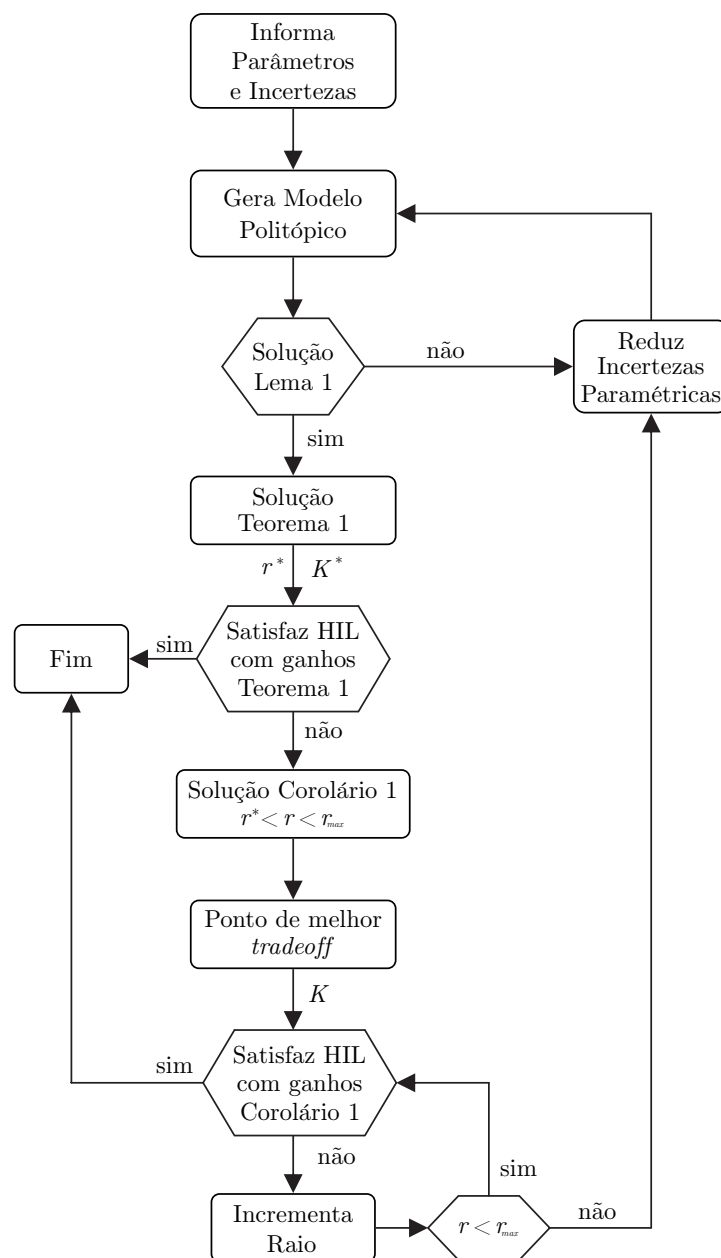
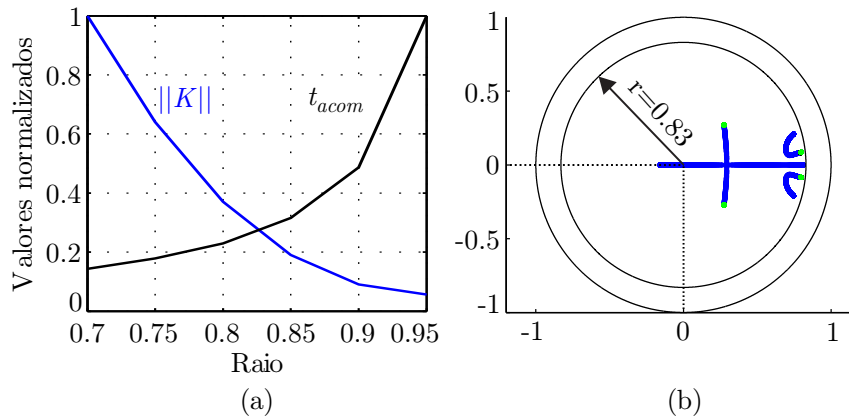
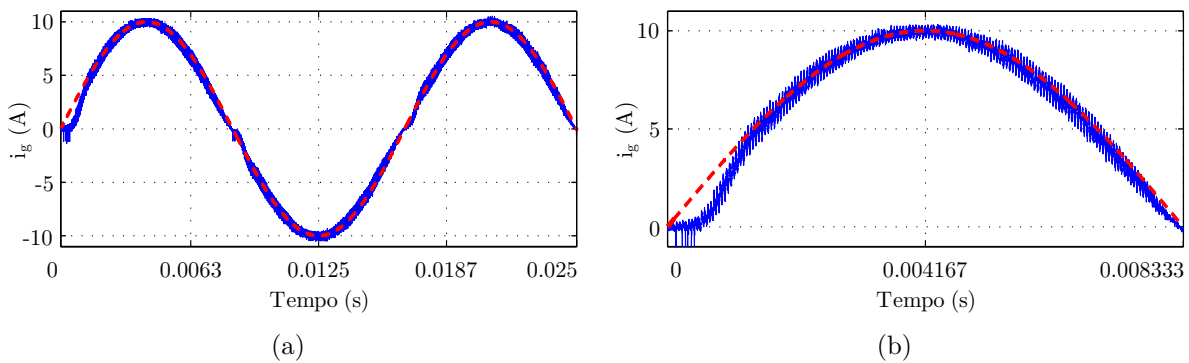


Figura 6.19 – Análise do sistema em malha fechada com o controlador robusto com ganhos em (6.24). (a) Relação entre  $\|K\|$  e  $t_{acom}$  em função do raio de alocação de polos. (b) Polos de malha fechada para incerteza de  $\pm 10\%$  em  $L$  e  $R$ .



Fonte: Autor.

Figura 6.20 – Resultados do HIL para resposta do sistema em malha fechada com o controlador robusto com ganhos (6.24). (a) Corrente injetada na rede. (b) Detalhamento do transitório de partida da corrente injetada na rede.



Fonte: Autor.

simulações em tempo real baseadas em HIL para guiar o projeto de controladores com boa confiabilidade, rapidez e segurança.

## 6.6 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou como contribuição um procedimento de projeto de controladores robustos a incertezas paramétricas aplicado a conversores conectados à rede, baseado na integração entre a solução de LMIs de projeto e em simulações em tempo real baseadas em HIL. O procedimento fornece ganhos ótimos (controlador robusto *quasi-deadbeat*) e relaxações para controladores subótimos, que garantem uma boa relação de compromisso entre respostas transitórias e norma do ganho de controle. A implementação

do controlador resultante é bastante simples, uma vez que os ganhos fixos do controlador robusto são calculados off-line, sem necessidade de uso de identificadores e de algoritmos de adaptação dos ganhos, como em estratégias de controle adaptativo.

Cabe observar que, embora o sistema tenha sido modelado como invariante no tempo neste capítulo (para permitir a utilização dos conceitos convencionais de polos e de resposta em frequência), as LMIs em (6.18) são válidas e garantem estabilidade para o caso variante no tempo, conforme foi apresentado no Apêndice B, e confirmado pelos resultados apresentados na Figura 6.15. Para o caso variante no tempo, segue válido o conceito de limitação da máxima taxa de decaimento das respostas transitórias a partir do parâmetro  $r$ . Desta forma, extensões do procedimento proposto incluem a otimização do desempenho dinâmico do sistema trifásico com filtro LCL sujeito ao efeito da saturação suave, e também a utilização deste procedimento para outros conversores.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Este trabalho apresentou contribuições ao projeto de controladores robustos a variações paramétricas aplicados a conversores conectados à rede elétrica. No Capítulo 2, um inversor trifásico conectado à rede por meio de filtro LCL é descrito a partir um modelo em espaço de estados, linear variante no tempo, que permite incluir o efeito da saturação magnética suave dos indutores e incertezas ou variações na impedância equivalente do ponto de conexão com a rede. Observou-se que, devido à saturação magnética, em um dado instante de tempo, os valores das indutâncias do filtro podem ser diferentes entre as fases, o que, em coordenadas estacionárias, leva a um acoplamento entre os eixos  $\alpha$  e  $\beta$ . A particularização do modelo para o caso sem saturação permite recuperar os modelos comumente utilizados na literatura.

O Capítulo 3 apresentou dois estudos de caso, evidenciando a característica de saturação magnética de indutores comerciais compostos por diferentes materiais. Ainda, uma estratégia para o projeto de controladores por realimentação de estados foi discutida e validada para um dos estudos de caso. A estratégia baseou-se na escolha de parâmetros nominais, a partir dos quais um modelo aumentado incluindo o atraso de implementação digital e controladores ressonante foi desenvolvido. O projeto dos ganhos do controlador foi então realizado analiticamente, considerando uma estratégia para alocação dos polos de malha fechada em posições específicas, definidas pelo projetista. O desempenho do sistema em malha fechada foi analisado com base nos autovalores de malha fechada e também com base em simulações do tempo. Foi possível concluir que, embora o controlador obtido por meio do procedimento baseado em parâmetros nominais tenha sido capaz de produzir resultados estáveis para toda a faixa de parâmetros, não é possível assegurar a alocação de polos desejada, e o desempenho é significativamente degradado à medida que os parâmetros se afastam da condição nominal. Neste sentido, embora diferentes estratégias para alocação possam ser propostas, existe sempre a necessidade levar em consideração relações de compromisso entre o desempenho dinâmico, esforço de controle e robustez, o que é particularmente desafiador no cenário de variação paramétrica na indutância de rede e também saturação magnética dos indutores do filtro, exigindo testes exaustivos para validação dos ganhos.

O Capítulo 4 apresentou um procedimento de projeto de controladores robustos baseado em LMIs, que leva em consideração a saturação magnética suave dos indutores a partir de parâmetros variantes no tempo, utilizando a hipótese de que o acoplamento pode ser desprezado. Além disso, o procedimento proposto inclui incertezas (e possíveis varia-

ções) paramétricas na rede, atraso de implementação digital do controle e controladores ressonantes para rastreamento de referências senoidais e rejeição de distúrbios harmônicos na tensão de rede. Como resultado, uma vantagem do procedimento proposto em relação aos da literatura é fornecer ganhos robustos (fixos), computados off-line, e que possuem simples implementação, sem a necessidade de utilização de estratégias adaptativas ou estimação on-line de parâmetros. Outra vantagem é que o procedimento é direto e sistemático, permitindo reduzir o tempo demandado no projeto de controladores robustos, quando comparado ao projeto de controladores de forma heurística (PI e PR, por exemplo) ou procedimentos como o descrito no Capítulo 3. Para executar as LMIs, apenas um parâmetro de projeto deve ser escolhido e, para incluir o efeito da saturação magnética, basta considerar os limites superior e inferior do intervalo de variação paramétrica, o que evita a necessidade de modelos complexos utilizando funções não lineares específicas. O procedimento é validado para os dois estudos de caso apresentados anteriormente, e os controladores obtidos com o procedimento proposto resultaram em sistemas em malha fechada estáveis para toda a faixa de variação das indutâncias, com bom desempenho transitório e em regime permanente, tanto em resultados de simulação em tempo real baseados em HIL como na implementação prática em protótipo.

No Capítulo 5, foi proposto um segundo procedimento de projeto. Neste, um modelo politópico variante no tempo foi novamente desenvolvido, porém considerando um número menor de vértices. Por outro lado, foram exploradas LMIs mais complexas, produzindo ganhos de realimentação de estados estabilizantes com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  definido pelo projetista. O sistema em malha fechada com estes ganhos é capaz de atenuar distúrbios na entrada de controle e assim levar a resultados satisfatórios mesmo sob os efeitos da saturação suave dos indutores do filtro. Para tanto, um procedimento sistemático para a obtenção de controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  subótimos foi desenvolvido, havendo um único parâmetro de projeto a ser escolhido, sendo este diretamente relacionado a um critério prático baseado no erro de rastreamento. Resultados experimentais foram mostrados, confirmando bom desempenho transitório e em regime permanente sob o efeito da saturação magnética e na presença de variações abruptadas de referência, além de estabilidade robusta frente a variação abruptas na indutância de rede.

O Capítulo 6 apresentou a otimização do raio de alocação dos polos de malha fechada em um círculo centrado na origem. Primeiramente, em um cenário sem incertezas paramétricas, mostrou-se o projeto de um controlador *deadbeat* ideal. No entanto, sob incertezas paramétricas, este controlador torna-se instável. Então, LMIs foram utilizadas para o projeto de um controlador robusto *quasi-deadbeat*, e relaxações para controladores subótimos foram fornecidas, garantindo boa relação de compromisso entre respostas transitórias rápidas e ganhos de controle implementáveis na prática. O procedimento proposto leva em conta a solução de LMIs e simulações em tempo real baseadas em HIL, e foi desenvolvido a partir de um inversor monofásico conectado à rede por meio de um filtro



L. Entretanto, o método é extensível para o caso trifásico com filtro LCL apresentado no Capítulo 2.

Desta forma, esta Tese contribui com procedimentos de projeto de ganhos robustos por realimentação de estados para conversores conectados à rede, permitindo superar desafios no cenário de impedâncias de rede incertas e possivelmente variantes no tempo, assim como no cenário de filtros LCL sob efeito da saturação magnética suave dos indutores. Nos procedimentos propostos, a abordagem LMI das condições de projeto permite rápido cômputo de ganhos fixos de realimentação de estados, baseado na escolha de um único parâmetro de projeto (raio  $r$  nos procedimentos dos Capítulos 4 e 6, e custo garantido  $\mu$ , no procedimento do Capítulo 5). Resultados satisfatórios foram obtidos para estudos de caso baseados na literatura, confirmando que os procedimentos propostos são úteis, por exemplo, para o projeto de controladores robustos no cenário de integração de fontes renováveis de energia, geração distribuída e microrredes.

## 7.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

A partir do desta Tese, vários trabalhos futuros podem ser explorados. Dentre estes, pode-se destacar:

- Análise de estabilidade do sistema em malha fechada, incluindo o acoplamento entre as coordenadas estacionárias;
- Estudo de algoritmos de otimização baseados em metaheurísticas (e.g. otimização por enxame por de partículas) para obtenção dos ganhos de controle, com certificação de estabilidade por meio de LMIs de análise;
- Utilização de LMIs menos conservadoras, que permitam certificar de forma teórica a estabilidade para domínios mais amplos de incerteza paramétrica;
- Utilização de técnicas de controle adaptativo para prover controladores robustos frente a não-linearidade do filtro e variações na impedância de rede;
- Inclusão de não linearidades no modelo matemático (por exemplo, saturação da ação de controle) e obtenção de controladores por meio de LMIs;
- Integração da plataforma *hardware-in-the-loop* com procedimentos para projeto e otimização de controladores (*test driven design*).

### 7.3 PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA

As produções listadas a seguir foram realizadas durante o período de desenvolvimento desta Tese.

#### 7.3.1 Publicações diretamente relacionadas à Tese

Os Capítulos 2 a 6 da Tese estão fundamentos nos seguintes artigos:

1. C. R. D. Osório, G. G. Koch, H. Pinheiro, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Robust Current Control of Grid-Tied Inverters Affected by LCL Filter Soft-Saturation", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, n. 8, pp. 6550-6561, Agosto 2020.
2. C. R. D. Osório, G. G. Koch, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "A practical design procedure for robust  $\mathcal{H}_2$  controllers applied to grid-connected inverters", *Elsevier – Control Engineering and Practice*, vol. 92, pp. 104157, Novembro 2019.
3. C. R. D Osório, G. G. Koch, L. C. Borin, I. Cleveston, V. F. Montagner. "A Robust Quasi-Deadbeat Controller and Relaxations Applied to Grid-Connected Inverters", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 23, n. 3, pp. 320-329, Setembro 2018.
4. C. R. D. Osório, G. G. Koch, P. F. García, V. F. Montagner. "Design Procedure of Current Controllers for LCL-filtered Grid-Tied Inverters with Robust Stability Certification", *XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, Porto Alegre, 2020.

#### 7.3.2 Outros artigos publicados em periódicos

1. M. R. Nascimento, L. C. Borin, E. Mattos, C. R. D. Osório, G. G. Koch, R. P. França, F. H. Dupont, V. F. Montagner. "Comparação de Controladores PIDs Robustos Otimizados para Aplicação em Conversores de Potência", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 26, n. 1, pp. 1-11, Março 2021.
2. G. G. Koch, C. R. D. Osório, F. P. Scalcon, T. S. Gabbi, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Controle Robusto por meio de LMIs Aplicado a Motores Síncronos de Ímãs Permanentes com Parâmetros Incertos", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 26, n. 1, pp. 1-10, Março 2021.
3. F. Scalcon, C. R. D. Osório, G. G. Koch, T. S. Gabbi, R. P. Vieira, H. A. Gründling, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Robust Control of Synchronous Reluctance

- Motors by Means of Linear Matrix Inequalities". *IEEE Transactions on Energy Conversion*, early access, October 2020.
4. C. R. D. Osório, F. P. Scalcon, G. G. Koch, V. F. Montagner, R. P. Vieira, H. A. Gründling. "Controle Robusto Aplicado a Geradores de Relutância Variável Conectados à Rede", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 25, n. 3, pp. 272-282, Setembro 2020.
  5. E. Mattos, L. C. Borin, C. R. D. Osório, G. G. Koch, G. V. Hollweg, H. Jank, W. A. Venturini, M. R. S. Martins, F. E. Bisogno, V. F. Montagner. "Automated Design of Controllers With Two Loops in the State Space Applied to Power Converters", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 25, n. 3, pp. 349-360, Setembro 2020.
  6. L. C. Borin, C. R. D. Osório, G. G. Koch, T. S. Gabbi, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Robust Control Design Procedure based on Particle Swarm Optimization and Kharitonov's Theorem with an Application for PMSMs", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 25, n. 2, pp. 219-229, Junho 2020.
  7. G. G. Koch, C. R. D. Osório, H. Pinheiro, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Design Procedure Combining Linear Matrix Inequalities and Genetic Algorithm for Robust Control of Grid-Connected Converters", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 56, n. 2, pp. 1896-1906, Março/Abril 2020.
  8. J. M. De Paris, C. R. D. Osório, H. Pinheiro, F. M. Carnielutti. "Phase Disposition Modulation with Sorting Algorithm for Symmetrical Cascaded Multilevel Converters". *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 55, n. 6, pp. 7527-7536, Novembro/Dezembro 2019.
  9. C. R. D. Osório, G. G. Koch, I. Cleveston, L. C. Borin, F. H. Dupont, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Otimização Multiobjetivo para Controle Robusto Aplicado a Inversores Conectados à Rede", *Revista Eletrônica de Potência*, vol. 24, n. 1, pp. 107-115, Março 2019.

### 7.3.3 Capítulos de livro

1. L. C. Borin, I. Cleveston, C. R. D. Osório, G. G. Koch, F. M. Bottega, V. F. Montagner. "Otimização por Enxame de Partículas Aplicada a Controladores de Corrente para Inversores Conectados à Rede". *A Aplicação do Conhecimento Científico na Engenharia Elétrica*. Editora Atena, 2020.

### 7.3.4 Trabalhos completos publicados em anais de congressos

1. L. C. Borin, I. Cleveston, G. G. Koch, C. R. D. Osório, E. Mattos, V. F. Montagner. "Robust Control of Grid-Tied Inverters using Particle Swarm Optimization and Linear Matrix Inequalities", *14th International Conference on Compatibility, Power Electronics and Power Engineering (CPE-POWERENG)*, Setubal, Portugal, 2020.
2. C. R. D. Osório, L. C. Borin, G. G. Koch, E. Mattos, P. F. García, V. F. Montagner. "Automatic Design of Robust Controllers for Grid-Tied Inverters based on PSO and Kharitonov's Theorem", *XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, Porto Alegre, 2020.
3. L. A. Maccari Jr., D. M. Lima, C. R. D. Osório, G. G. Koch, F. M. Carnielutti, V. F. Montagner, H. Pinheiro. "Controlador FCS-MPC com Ação Integral Aplicado a Inversores Conectados à Rede", *XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, Porto Alegre, 2020.
4. C. R. D. Osório, G. G. Koch, L. C. Borin, M. R. Nascimento, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. "Robust Control of Grid-Connected Converters under Wide Grid Impedance Variation", *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Latin America*, Gramado, 2019.
5. L. C. Borin, C. R. D. Osório, G. G. Koch, M. R. Nascimento, F. M. Bottega, V. F. Montagner. "Particle Swarm Optimization for Robust Control Tuning Applied to Uninterruptible Power Supplies", *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Latin America*, Gramado, 2019.
6. C. R. D. Osório, F. O. Scalcon, R. P. Vieira, V. F. Montagner, H. A. Gründling. "Robust Control of Switched Reluctance Generator In Connection With a Grid-Tied Inverter", *IEEE 15th Brazilian Power Electronics Conference and 5th IEEE Southern Power Electronics Conference (COBEP/SPEC)*, Santos, 2019.
7. L. C. Borin, E. Mattos, C. R. D. Osório, G. G. Koch, V. F. Montagner. "Robust PID Controllers Optimized by PSO Algorithm for Power Converters", *IEEE 15th Brazilian Power Electronics Conference and 5th IEEE Southern Power Electronics Conference (COBEP/SPEC)*, Santos, 2019.
8. C. R. D. Osório, L. C. Borin, G. G. Koch, V. F. Montagner. "Optimization of Robust PI Controllers for Grid-Tied Inverters", *IEEE 15th Brazilian Power Electronics Conference and 5th IEEE Southern Power Electronics Conference (COBEP/SPEC)*, Santos, 2019.

9. M. R. Nascimento, L. C. Borin, E. Mattos, C. R. D. Osório, G. G. Koch, V. F. Montagner. "Controladores PIDs Otimizados com uma Aplicação ao Controle de Tensão de Conversores Buck", *12th Seminar on Power Electronics and Control*, Natal, 2019.
10. C. R. D. Osório, F. P. Scalcon, R. P. Vieira, V. F. Montagner, H. A. Gründling. "Controle Robusto de Geradores de Relutância Variável Conectados à Rede", *12th Seminar on Power Electronics and Control*, Natal, 2019.
11. C. R. D. Osório, G. G. Koch, L. C. Borin, I. Cleveston, F. H. Dupont, V. F. Montagner. "Validação Experimental de um Controle por realimentação de Estados Baseado em Algoritmo Genético para Conversores Conectados à rede", *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, João Pessoa, 2018.
12. G. G. Koch, C. R. D. Osório, L. C. Borin, I. Cleveston, V. F. Montagner. "Projeto e Implementação Prática de Controladores de Corrente para Inversores Trifásicos Conectados à Rede Utilizando Algoritmo PSO", *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, João Pessoa, 2018.
13. L. C. Borin, I. Cleveston, C. R. D. Osório, G. G. Koch, F. M. Bottega, V. F. Montagner. "Algoritmo Genético Aplicado a Controladores de Corrente para Inversores Conectados à Rede", *11th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2018.
14. I. Cleveston, L. C. Borin, C. R. D. Osório, G. G. Koch, F. M. Bottega, V. F. Montagner. "Otimização por Enxame de Partículas Aplicada a Controladores de Corrente para Inversores Conectados à Rede", *11th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2018.
15. G. G. Koch, C. R. D. Osório, J. R. Massing, H. Pinheiro, V. F. Montagner, L. A. Maccari, R. C. L. F. Oliveira. "Comparison of  $\mathcal{H}_2$  controllers based on LMIs for grid-connected converters", *IEEE 8th International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems*, Florianópolis, 2017.
16. G. G. Koch, C. R. D. Osório, A. T. Pereira, H. Pinheiro, R. F. Camargo, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner. " $H_\infty$  robust control with application for active power filters", *Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)*, Juiz de Fora, 2017.
17. C. R. D. Osório, G. S. da Silva, J. C. Giacomini, C. Rech. "Comparative analysis of predictive current control techniques applied to single-phase grid-connected inverters", *Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)*, Juiz de Fora, 2017.

18. C. R. D. Osório, G. G. Koch, V. F. Montagner. "Um Controle Robusto Quasi-Deadbeat Projetado por meio de LMIs para Conversores Conectados à Rede", *10th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2017.
19. G. G. Koch, C. R. D. Osório, V. F. Montagner. "Observador robusto aplicado a filtro passa-baixas de segunda ordem com amortecimento incerto", *10th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2017.
20. J. M. de Paris, C. R. D. Osório, F. M. Carnielutti, H. Pinheiro. "Algoritmo de Sorting Aplicado à Modulação PD com Abordagem Geométrica", *10th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2017.

## REFERÊNCIAS

- ABBAS, H. S. et al. Embedding of nonlinear systems in a linear parameter-varying representation. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 47, n. 3, p. 6907–6913, 2014. ISSN 1474-6670. 19th IFAC World Congress.
- ANACE. **ANEEL confirma bandeira verde no próximo mês**. 2016. Disponível em "<http://www.anacebrasil.org.br/noticias/aneel-confirma-bandeira-verde-no-proximo-mes/>". Associação Nacional dos Consumidores de Energia.
- ASTRÖM, K.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled systems: theory and design**. [S.l.]: Prentice Hall, 1997. ISBN 9780133148992.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995. Second edition.
- ATWA, Y. M. et al. Optimal renewable resources mix for distribution system energy loss minimization. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 25, n. 1, p. 360–370, 2010.
- BAO, C. et al. Step-by-step controller design for LCL-type grid-connected inverter with capacitor-current-feedback active-damping. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 29, n. 3, p. 1239–1253, March 2014. ISSN 0885-8993.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, v. 13, n. 1, p. 65–72, July 1989.
- BERRUEZO, M. P. **Projeto de Controladores para Sistemas Não Lineares via Técnicas Baseadas em Escalonamento de Ganhos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- BINA, M. T.; PASHAJAVID, E. An efficient procedure to design passive LCL-filters for active power filters. **Electric Power Systems Research**, v. 79, n. 4, p. 606 – 614, April 2009.
- BLAABJERG, F.; MA, K. Future on power electronics for wind turbine systems. **Emerging and Selected Topics in Power Electronics, IEEE Journal of**, v. 1, n. 3, p. 139–152, Sept 2013. ISSN 2168-6777.
- BLAABJERG, F. et al. Overview of control and grid synchronization for distributed power generation systems. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 53, n. 5, p. 1398 –1409, oct. 2006.
- \_\_\_\_\_. Distributed power-generation systems and protection. **Proceedings of the IEEE**, v. 105, n. 7, p. 1311–1331, July 2017. ISSN 0018-9219.

- BOTTERON, F. et al. New limiting algorithms for space vector modulated three-phase four-leg voltage source inverters. **IEE Proceedings - Electric Power Applications**, v. 150, p. 733–742(9), November 2003. ISSN 1350-2352.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- BUSO, S.; FASOLO, S.; MATTAVELI, P. Uninterruptible power supply multiloop control employing digital predictive voltage and current regulators. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 37, n. 6, p. 1846–1854, November/December 2001.
- CAIGNY, J. D. et al. Gain-scheduled  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time polytopic time-varying systems. **Control Theory Applications, IET**, v. 4, n. 3, p. 362–380, March 2010. ISSN 1751-8644.
- CARDOSO, R. et al. Kalman filter based synchronisation methods. **Generation, Transmission Distribution, IET**, v. 2, n. 4, p. 542–555, July 2008.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3. ed. New York, USA: Oxford University Press, 1999.
- CHEN, J.; CHEN, J. Stability Analysis and Parameters Optimization of Islanded Microgrid with Both Ideal and Dynamic Constant Power Loads. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 0046, n. c, p. 1–11, 2017. ISSN 02780046.
- CHEN, S. et al. Analysis and design of repetitive controller for harmonic elimination in PWM voltage source inverter systems. **Power Electronics, IET**, v. 1, n. 4, p. 497 – 506, December 2008. ISSN 1755-4535.
- CHEN, X. et al. Stability analysis of LCL-type grid-connected inverter in weak grid systems. In: **2012 International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–6.
- CORTES, P. et al. Predictive control in power electronics and drives. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 55, n. 12, p. 4312–4324, Dec 2008. ISSN 0278-0046.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. **Systems & Control Letters**, v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001.
- \_\_\_\_\_. Poly-quadratic stability and  $\mathcal{H}_\infty$  performance for discrete systems with time varying uncertainties. In: **Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. 267–272.



- DAAFOUZ, J.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 47, n. 11, p. 1883–1887, November 2002.
- DANNEHL, J. et al. Investigation of active damping approaches for PI-based current control of grid-connected pulse width modulation converters with LCL filters. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 46, n. 4, p. 1509–1517, July 2010. ISSN 0093-9994.
- DANNEHL, J.; WESSELS, C.; FUCHS, F. Limitations of voltage-oriented PI current control of grid-connected PWM rectifiers with filters. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, v. 56, n. 2, p. 380–388, feb. 2009. ISSN 0278-0046.
- DORATO, P.; ABDALLAH, C. T.; CERONE, V. **Linear quadratic control: an introduction**. Malabar, USA: Krieger Pub. Co., 2000.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern control systems**. 11. ed. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 2008.
- DUESTERHOEFT, W.; SCHULZ, M. W.; CLARKE, E. Determination of instantaneous currents and voltages by means of alpha, beta, and zero components. **American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the**, v. 70, n. 2, p. 1248–1255, July 1951. ISSN 0096-3860.
- DUPONT, F. H. et al. Comparison of linear quadratic controllers with stability analysis for DC-DC boost converters under large load range. **Asian Journal of Control**, v. 15, n. 3, p. 861–871, May 2013.
- EL GHAOU, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control).
- EMAMI-NAEINI, A.; FRANKLIN, G. Deadbeat control and tracking of discrete-time systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 27, n. 1, p. 176–181, Feb 1982. ISSN 0018-9286.
- Empresa de Pesquisa Energética. **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2015 - Ano base 2014**. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.epe.gov.br/AnuarioEstatisticodeEnergiaEletrica/Forms/Anurio.aspx>>.
- \_\_\_\_\_. **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2018 - Ano base 2017**. [S.l.], 2018. Disponível em: <<http://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anuario2018vf.pdf>>.
- \_\_\_\_\_. **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2020 - Ano base 2019**. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anu%C3%A1rio%20Estat%C3%ADstico%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%202020.pdf>>.

ERICKSON, R. W. **Fundamentals of Power Electronics**. New York, NY: Chapman & Hall, 1997.

FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle of control theory. **Automatica**, v. 12, n. 5, p. 457–465, September 1976.

GABE, I.; MONTAGNER, V. F.; PINHEIRO, H. Design and implementation of a robust current controller for VSI connected to the grid through an LCL filter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 24, n. 6, p. 1444–1452, June 2009. ISSN 0885-8993.

GAHINET, P. et al. **LMI Control Toolbox User's Guide**. Natick, MA: The Math Works Inc., 1995.

GUAN, Y. et al. The dual-current control strategy of grid-connected inverter with LCL filter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 34, n. 6, p. 5940–5952, 2019.

GUERRERO, J. et al. Distributed generation: Toward a new energy paradigm. **Industrial Electronics Magazine, IEEE**, v. 4, n. 1, p. 52–64, March 2010. ISSN 1932-4529.

HE, Y. et al. Use of boundary control with second-order switching surface to reduce the system order for deadbeat controller in grid-connected inverter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 31, n. 3, p. 2638–2653, March 2016. ISSN 0885-8993.

HE, Y.; WANG, K.; CHUNG, H. S. Utilization of proportional filter capacitor voltage feedforward to realize active damping for digitally-controlled grid-tied inverter operating under wide grid impedance variation. In: **2014 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 4450–4457. ISSN 2329-3721.

HOLMES, D. G.; MARTIN, D. A. Implementation of a direct digital predictive current controller for single and three phase voltage source inverters. In: **Conference Record of the IEEE IAS Annual Meeting**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 906–913. ISSN 0197-2618.

HUANG, X. et al. Robust current control of grid-tied inverters for renewable energy integration under non-ideal grid conditions. **IEEE Transactions on Sustainable Energy**, p. 1–1, 2019. ISSN 1949-3029.

IEEE. IEEE:1547 standard for interconnecting distributed resources with electric power systems. 2011.

IVANOVIC, Z. R. et al. HIL evaluation of power flow control strategies for energy storage connected to smart grid under unbalanced conditions. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 27, n. 11, p. 4699–4710, Nov 2012. ISSN 0885-8993.

JAYALATH, S.; ONGAYO, D.; HANIF, M. Modelling powder core inductors for passive filters in inverters using finite element analysis. **Electronics Letters**, v. 53, n. 3, p. 179–181, 2017. ISSN 0013-5194.

- JIANG, W. et al. Deadbeat control based on current predictive calibration for grid-connected converter under unbalanced grid voltage. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 64, n. 7, p. 5479–5491, July 2017. ISSN 0278-0046.
- KARAMANAKOS, P. et al. Model predictive control of power electronic systems: Methods, results, and challenges. **IEEE Open Journal of Industry Applications**, v. 1, p. 95–114, 2020.
- KAWAMURA, A.; CHUARAYAPRATIP, R.; HANEYOSHI, T. Deadbeat control of PWM inverter with modified pulse patterns for uninterruptible power supply. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 35, n. 2, p. 295–300, May 1988.
- KAWAMURA, A.; HANEYOSHI, T.; HOFT, R. G. Deadbeat controlled PWM inverter with parameter estimation using only voltage sensor. In: **IEEE Power Electronics Specialist Conference**. [S.l.: s.n.], 1986. p. 576–583.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Robust, fragile, or optimal? **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 8, p. 1098–1105, August 1997.
- KJAER, S.; PEDERSEN, J.; BLAABJERG, F. A review of single-phase grid-connected inverters for photovoltaic modules. **Industry Applications, IEEE Transactions on**, v. 41, n. 5, p. 1292–1306, Sept 2005. ISSN 0093-9994.
- KOCH, G. G. **Controle Robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de LMIs Aplicado a Conversores Conectados à Rede**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2019.
- KOCH, G. G. et al. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback controllers based on lmis applied to grid-connected converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, p. 1–1, 2018. ISSN 0278-0046.
- \_\_\_\_\_. Comparison of  $\mathcal{H}_2$  controllers based on LMIs for grid-connected converters. In: **IEEE. Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG), 2017 IEEE 8th International Symposium on**. [S.l.], 2017.
- KUIAVA, R.; RAMOS, R. A.; POTA, H. R. A new approach for modeling and control of nonlinear systems via norm-bounded linear differential inclusions. **Sba: Controle & Automação - Sociedade Brasileira de Automática**, scielo, v. 23, p. 387 – 403, 08 2012. ISSN 0103-1759.
- KUKKOLA, J.; HINKKANEN, M.; ZENGER, K. Observer-based state-space current controller for a grid converter equipped with an LCL filter: Analytical method for direct discrete-time design. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 51, n. 5, p. 4079–4090, 2015.
- LEUNG, F. H. F.; TAM, P. K. S.; LI, C. K. An Improved LQR-Based Controller for Switching DC-DC Converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 40, n. 5, p. 521–528, 1993.

- LIU, B. et al. Stability analysis of LCL-type grid-connected inverter under single-loop inverter-side current control with capacitor voltage feedforward. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 14, n. 2, p. 691–702, Feb 2018. ISSN 1551-3203.
- LIU, Q.; CALDOGNETTO, T.; BUSO, S. Stability analysis and auto-tuning of interlinking converters connected to weak grids. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 34, n. 10, p. 9435–9446, 2019.
- LORENZEN, S. L.; NIELSEN, A. B.; BEDE, L. Control of a grid connected converter during weak grid conditions. In: **2016 IEEE 7th International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–6. ISSN 2329-5767.
- LU, M. et al. Benchmarking of stability and robustness against grid impedance variation for LCL-filtered grid-interfacing inverters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 33, n. 10, p. 9033–9046, Oct 2018. ISSN 0885-8993.
- MACCARI Jr., L. A. **Controle Robusto Baseado em Desigualdades Matriciais Lineares Aplicado a Inversores Conectados à Rede Elétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2015.
- MACCARI Jr, L. A. et al. LMI-based control for grid-connected converters with LCL filters under uncertain parameters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 29, n. 7, p. 3776–3785, July 2014. ISSN 0885-8993.
- MACCARI Jr., L. A. et al. Robust  $\mathcal{H}_2$  control applied to boost converters: design, experimental validation and performance analysis. **IET Control Theory & Applications**, v. 6, n. 12, p. 1881–1888, August 2012. ISSN 1751-8644.
- MACCARI Jr, L. A. et al. Robust pole location with experimental validation for three-phase grid-connected converters. **Control Engineering Practice**, v. 59, p. 16 – 26, 2017. ISSN 0967-0661.
- \_\_\_\_\_. Robust optimal current control for grid-connected three-phase pulse-width modulated converters. **IET, Power Electronics**, v. 8, n. 8, p. 1490–1499, 2015. ISSN 1755-4535.
- MAGNETICS. **Datasheet KoolMu Material: Toroid Cores 0077102A7**. [S.l.], 2016. Disponível em: <<https://www.mag-inc.com/Media/Magnetics/Datasheets/0077102A7.pdf>>.
- \_\_\_\_\_. **Datasheet KoolMu Material: Toroid Cores 0077258A7**. [S.l.], 2016. Disponível em: <<https://www.mag-inc.com/Media/Magnetics/Datasheets/0077258A7.pdf>>.
- \_\_\_\_\_. **Kool Mu Material Curves: Fit formula of toroid cores**. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://www.mag-inc.com/Products/Powder-Cores/Kool-Mu-Cores/Kool-Mu-Material-Curves#kmpermvsdc>>.

- MALESANI, L.; MATAVELLI, P.; BUSO, S. Robust dead-beat current control for PWM rectifiers and filters. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 35, n. 3, p. 613–620, May/June 1999.
- MASTROMAURO, R. A.; LISERRE, M.; DELL'AQUILA, A. Study of the effects of inductor nonlinear behavior on the performance of current controllers for single-phase PV grid converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 55, n. 5, p. 2043–2052, May 2008. ISSN 0278-0046.
- MIDTSUND, T.; SUUL, J. A.; UNDELAND, T. Evaluation of current controller performance and stability for voltage source converters connected to a weak grid. In: **The 2nd International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 382–388.
- MONTAGNER, V. et al. A DLQR applied to boost converters with switched loads: Design and analysis. In: **Power Electronics Conference (COBEP), 2011 Brazilian**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 68–73.
- MONTAGNER, V. F. et al. A DLQR designed by means of a genetic algorithm for DC-DC boost converters. In: **Power Electronics Conference (COBEP), 2011 Brazilian**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 74–78.
- OGATA, K. **Discrete-time control systems**. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- OLALLA, C. et al. Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 7, p. 2548–2558, July 2009.
- OMAR FARUQUE, M. O.; DINAVAH, V. Hardware-in-the-loop simulation of power electronic systems using adaptive discretization. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 57, n. 4, p. 1146–1158, April 2010. ISSN 0278-0046.
- PAN, D. et al. Optimized controller design for LCL-type grid-connected inverter to achieve high robustness against grid-impedance variation. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 62, n. 3, p. 1537–1547, March 2015. ISSN 0278-0046.
- PEÑA-ALZOLA, R. et al. Analysis of the passive damping losses in LCL-filter-based grid converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 28, n. 6, p. 2642–2646, June 2013. ISSN 0885-8993.
- PENA-ALZOLA, R. et al. Systematic design of the lead-lag network method for active damping in LCL-filter based three phase converters. **Industrial Informatics, IEEE Transactions on**, v. 10, n. 1, p. 43–52, Feb 2014. ISSN 1551-3203.
- POLAT, I.; ESKINAT, E.; KOSE, I. E. Dynamic output feedback control of quasi-lpv mechanical systems. **IET Control Theory Applications**, v. 1, n. 4, p. 1114–1121, July 2007. ISSN 1751-8644.

- POONGOTHAI, C.; VASUDEVAN, K. Design of LCL filter for grid-interfaced PV system based on cost minimization. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 55, n. 1, p. 584–592, Jan 2019. ISSN 0093-9994.
- REN21. **Renewables 2018 - Global Status Report**. [S.l.], 2018. Disponível em: <[http://www.ren21.net/wp-content/uploads/2018/06/17-8652\\_GSR2018\\_FullReport\\_web\\_-1.pdf](http://www.ren21.net/wp-content/uploads/2018/06/17-8652_GSR2018_FullReport_web_-1.pdf)>.
- \_\_\_\_\_. **Renewables 2020 - Global Status Report**. [S.l.], 2020. Disponível em: <[https://www.ren21.net/wp-content/uploads/2019/05/gsr\\_2020\\_full\\_report\\_en.pdf](https://www.ren21.net/wp-content/uploads/2019/05/gsr_2020_full_report_en.pdf)>.
- REZNIK, A. et al. LCL filter design and performance analysis for grid-interconnected systems. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 50, n. 2, p. 1225–1232, March 2014. ISSN 0093-9994.
- RIBAS, S. P. et al. Design and implementation of a discrete-time H-infinity controller for uninterruptible power supply systems. **IET – Power Electronics**, p. pp. 1–9, 2014.
- ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V. Quasi-LPV modeling, identification and control of a twin rotor MIMO system. **Control Engineering Practice**, v. 21, n. 6, p. 829–846, 2013. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066113000142>>.
- SAFAMEHR, H.; NAJAFABADI, T. A.; SALMASI, F. R. Enhanced control of grid-connected inverters with non-linear inductor in LCL filter. **IET Power Electronics**, v. 9, n. 10, p. 2111–2120, 2016. ISSN 1755-4535.
- SAID-ROMDHANE, M. B. et al. Robust active damping methods for LCL filter-based grid-connected converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 32, n. 9, p. 6739–6750, Sept 2017. ISSN 0885-8993.
- SANTINI, C. L. A. **Um Controlador Ótimo Robusto Aplicado a Inversores Conectados à Rede**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2017.
- SILWAL, S. et al. An enhanced control system for single-phase inverters interfaced with weak and distorted grids. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 34, n. 12, p. 12538–12551, 2019.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, v. 11–12, p. 625–653, 1999. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- TEODORESCU, R. et al. Proportional-resonant controllers and filters for grid-connected voltage-source converters. **IEEE Proceedings Electric Power Applications**, v. 153, n. 5, p. 750–762, September 2006. ISSN 1350-2352.
- TEODORESCU, R.; LISERRE, M.; RODRÍGUEZ, P. **Grid Converters for Photovoltaic and Wind Power Systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. (Wiley - IEEE).

VIINAMAKI, J.; JOKIPII, J.; SUNTIO, T. Effect of inductor saturation on the harmonic currents of grid-connected three-phase vsi in pv application. In: **2015 9th International Conference on Power Electronics and ECCE Asia (ICPE-ECCE Asia)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1209–1216. ISSN 2150-6086.

WANG, X. et al. Design considerations of digitally controlled lcl-filtered inverter with capacitor- current-feedback active damping. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, v. 2, n. 4, p. 972–984, 2014.

\_\_\_\_\_. A robust grid-voltage feedforward scheme to improve adaptability of grid-connected inverter to weak grid condition. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 36, n. 2, p. 2384–2395, 2021.

\_\_\_\_\_. Full feedforward of grid voltage for grid-connected inverter with LCL filter to suppress current distortion due to grid voltage harmonics. **Power Electronics, IEEE Transactions on**, v. 25, n. 12, p. 3119–3127, dec. 2010. ISSN 0885-8993.

WEI, Q.; LIU, B.; DUAN, S. Current ripple analysis and controller design for grid-connected converters considering the soft-saturation nature of the powder cores. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 33, n. 10, p. 8827–8837, Oct 2018. ISSN 0885-8993.

WILLMANN, G. et al. Multiple-loop  $\mathcal{H}_\infty$  control design for uninterruptible power supplies. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, v. 54, n. 3, p. 1591–1602, june 2007. ISSN 0278-0046.

WOLFLE, W. H.; HURLEY, W. G. Quasi-active power factor correction with a variable inductive filter: theory, design and practice. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 18, n. 1, p. 248–255, Jan 2003. ISSN 0885-8993.

WU, T. et al. Direct digital control of single-phase grid-connected inverters with LCL filter based on inductance estimation model. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 34, n. 2, p. 1851–1862, 2019.

\_\_\_\_\_. Predictive current controlled 5-kw single-phase bidirectional inverter with wide inductance variation for dc-microgrid applications. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 25, n. 12, p. 3076–3084, Dec 2010. ISSN 0885-8993.

WU, W. et al. A new design method for the passive damped LCL and LLCL filter-based single-phase grid-tied inverter. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, v. 60, n. 10, p. 4339–4350, Oct 2013. ISSN 0278-0046.

XU, J. et al. Robust grid current control with impedance-phase shaping for LCL-filtered inverters in weak and distorted grid. **IEEE Transactions on Power Electronics**, p. 1–1, 2018. ISSN 0885-8993.

ZHAO, J. et al. Robust control parameters design of PBC controller for LCL-filtered grid-tied inverter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 35, n. 8, p. 8102–8115, 2020.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.

ZHOU, S. et al. An improved design of current controller for LCL-type grid-connected converter to reduce negative effect of PLL in weak grid. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, v. 6, n. 2, p. 648–663, June 2018. ISSN 2168-6777.



## APÊNDICES

---



## Apêndice A – Análise do Acoplamento

No Capítulo 3, para o projeto de controladores robustos ao efeito da saturação magnética dos indutores, assume-se que, no referencial estacionário, o acoplamento gerado pela possível diferença entre os valores de indutância, por fase, pode ser negligenciado. Inicialmente, cabe observar que os resultados experimentais mostrados neste documento apresentam respostas transitórias e em regime permanente de boa qualidade, corroborando a validade do procedimento de projeto proposto, baseado em modelos desacoplados. Uma forma de analisar o efeito do acoplamento no sistema é apresentada neste apêndice.

Considere o modelo variante no tempo, em coordenadas estacionárias, apresentado no Capítulo 2, que leva em consideração o acoplamento.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\alpha\alpha}(t) & \mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) \\ \mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) & \mathbf{A}_{\beta\beta}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha(t) \\ \mathbf{x}_\beta(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u_{\alpha\alpha}}(t) & \mathbf{B}_{u_{\alpha\beta}}(t) \\ \mathbf{B}_{u_{\alpha\beta}}(t) & \mathbf{B}_{u_{\beta\beta}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{d_{\alpha\alpha}}(t) & \mathbf{B}_{d_{\alpha\beta}}(t) \\ \mathbf{B}_{d_{\alpha\beta}}(t) & \mathbf{B}_{d_{\beta\beta}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g\alpha}(t) \\ v_{g\beta}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Neste modelo, os vetores de estados são dados por

$$\mathbf{x}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} i_{1\alpha}(t) \\ v_{c\alpha}(t) \\ i_{g\alpha}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\beta(t) = \begin{bmatrix} i_{1\beta}(t) \\ v_{c\beta}(t) \\ i_{g\beta}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

as matrizes são dadas por

$$\mathbf{A}_{\alpha\alpha}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_1(t) & -\text{aux}_1(t) & r_f \text{aux}_1(t) \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ r_f \text{aux}_2(t) & \text{aux}_2(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{A}_{\beta\beta}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_3(t) & -\text{aux}_3(t) & r_f \text{aux}_3(t) \\ \frac{1}{C_f} & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ r_f \text{aux}_4(t) & \text{aux}_4(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_4(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_f) \text{aux}_5(t) & -\text{aux}_5(t) & r_f \text{aux}_5(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ r_f \text{aux}_6(t) & \text{aux}_6(t) & -(r_f + r_2) \text{aux}_6(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

os vetores que relacionam as entradas de controle aos estados são dados por

$$\mathbf{B}_{u_{\alpha\alpha}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{(L_{1b}(t) + L_{1c}(t))}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{u_{\beta\beta}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{(4L_{1a}(t) + L_{1b}(t) + L_{1c}(t))}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{u_{\alpha\beta}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(L_{1b}(t) - L_{1c}(t))}{d_1(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e os vetores que relacionam as entradas de distúrbio são dados por

$$\mathbf{B}_{d\alpha\alpha}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \frac{(L_{2b}(t) + L_{2c}(t))}{d_2(t)} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{d\beta\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{(4L_{2a}(t) + L_{2b}(t) + L_{2c}(t))}{d_2(t)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B}_{d\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(L_{2b}(t) - L_{2c}(t))}{d_2(t)} \end{bmatrix}$$

## A.1 ESTUDO DE CASO 1

Para uma avaliação numérica do efeito do acoplamento no Estudo de Caso 1, considere os perfis de indutância apresentados no Capítulo 3, Seção (3.1.1). Considere também uma corrente senoidal com amplitude de 20 A de pico (potência nominal) e uma impedância de rede igual a 5 mH (valor nominal). Desta forma:

- i. A partir das equações (A.3) e (A.5), observa-se que, para a derivada de  $i_{1\alpha}$ , o efeito dos estados em  $\beta$  com relação ao efeito dos estados em  $\alpha$  pode ser avaliado a partir da relação entre os termos  $\text{aux}_5$  e  $\text{aux}_1$ . De forma análoga, a partir das equações (A.4) e (A.5), observa-se que, para a derivada de  $i_{1\beta}$ , o efeito dos estados em  $\alpha$  com relação ao efeito dos estados em  $\beta$  pode ser avaliado a partir da relação entre os termos  $\text{aux}_5$  e  $\text{aux}_3$ . Considerando o perfil de indutâncias variantes no tempo em função do perfil de correntes estabelecido, a Figura A.1 mostra estas relações em função do tempo
- ii. A partir dos vetores em (A.6) observa-se que, para a derivada do estado  $i_{1\alpha}$ , o efeito da entrada de controle  $u_\beta$  em relação a entrada  $u_\alpha$ , pode ser avaliado a partir da relação

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (L_{1b}(t) - L_{1c}(t))}{\frac{3}{2} (L_{1b}(t) + L_{1c}(t))}, \quad (\text{A.8})$$

enquanto, para a derivada do estado  $i_{1\beta}$ , o efeito da entrada de controle  $u_\alpha$  em relação a entrada  $u_\beta$  pode ser avaliado a partir da relação

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (L_{1b}(t) - L_{1c}(t))}{\frac{1}{4} (4L_{1a}(t) + L_{1b}(t) + L_{1c}(t))}. \quad (\text{A.9})$$

A Figura A.2 mostra estas relações em função do tempo.

- iii. A partir das equações (A.3) e (A.5), observa-se que, para  $i_{g\alpha}$ , o efeito dos estados em  $\beta$  com relação ao efeito dos estados em  $\alpha$  pode ser avaliado a partir da relação entre os termos  $\text{aux}_6$  e  $\text{aux}_2$ . De forma análoga, a partir das equações (A.4) e (A.5), observa-se que, para  $i_{g\beta}$ , o efeito dos estados em  $\alpha$  com relação ao efeito dos estados

em  $\beta$  pode ser avaliado a partir da relação entre os termos  $aux_6$  e  $aux_4$ . A Figura A.3 mostra estas relações em função do tempo.

- iv. A partir dos vetores em (A.6) observa-se que, para o estado  $i_{g\alpha}$ , o efeito da entrada de distúrbio  $v_{g\beta}$  em relação a entrada  $v_{g\alpha}$ , pode ser avaliado a partir da relação

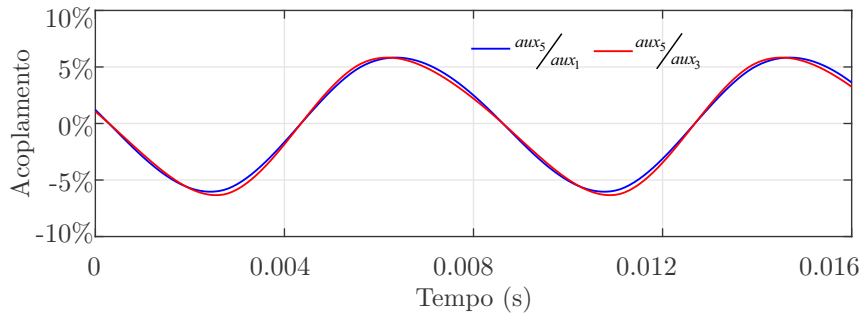
$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} (L_{2b}(t) - L_{2c}(t))}{-\frac{3}{2} (L_{2b}(t) + L_{2c}(t))} \quad (A.10)$$

enquanto, para o estado  $i_{g\beta}$ , o efeito da entrada de distúrbio  $v_{g\alpha}$  em relação a entrada  $v_{g\beta}$  pode ser avaliado a partir da relação

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} (L_{2b}(t) - L_{2c}(t))}{-\frac{1}{4} (4L_{2a}(t) + L_{2b}(t) + L_{2c}(t))}. \quad (A.11)$$

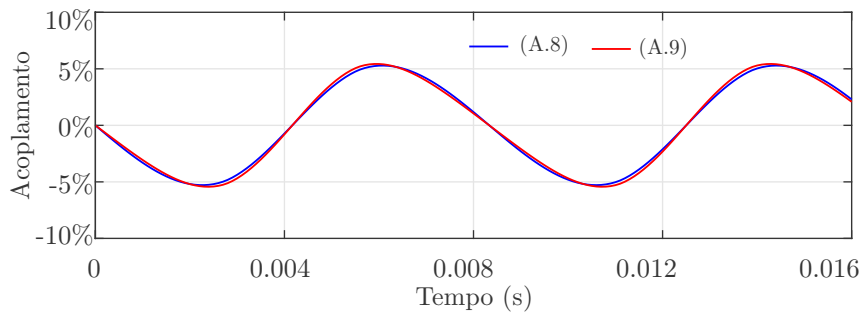
A Figura A.4 mostra estas relações em função do tempo.

Figura A.1 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em  $i_{1\alpha}$  e  $i_{1\beta}$  a partir dos estados.

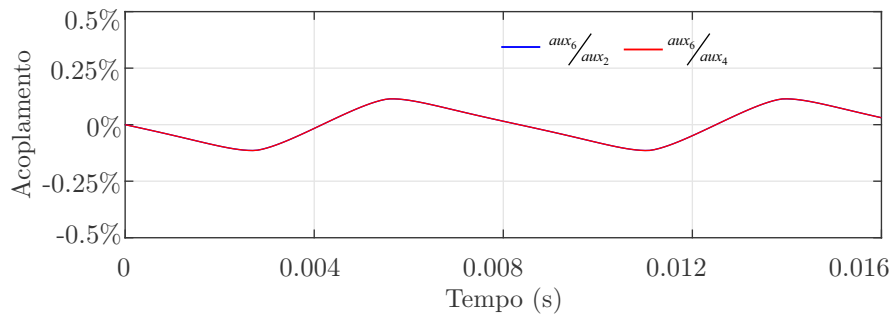


Fonte: Autor.

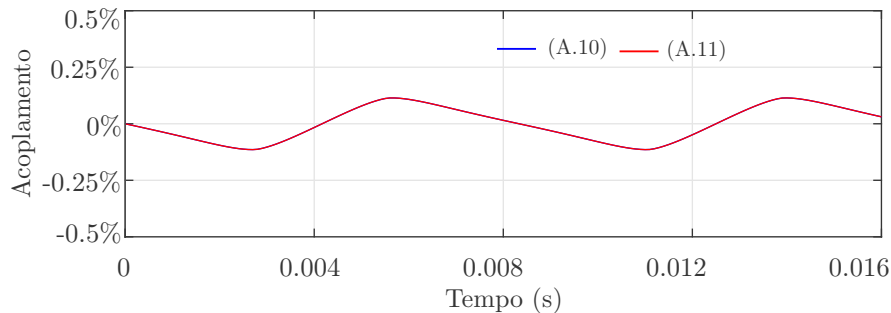
Figura A.2 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em  $i_{1\alpha}$  e  $i_{1\beta}$  a partir da entrada de controle.



Fonte: Autor.

Figura A.3 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em  $i_{g\alpha}$  e  $i_{g\beta}$  a partir dos estados.

Fonte: Autor.

Figura A.4 – Estudo de caso 1: Efeito do acoplamento em  $i_{g\alpha}$  e  $i_{g\beta}$  a partir da entrada de distúrbio.

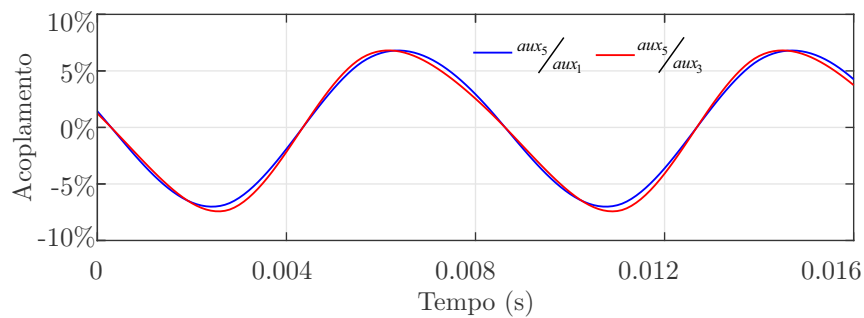
Fonte: Autor.

Com base no exposto, é possível verificar que o acoplamento causado pela saturação magnética na dinâmica dos estados é consideravelmente pequeno. Para o estudo de caso mostrado aqui,  $i_c$  é o estado cuja dinâmica é afetada mais significativamente. Ainda assim, o efeito do acoplamento é limitado a um valor próximo de 5%, e portanto pode ser desprezado no projeto dos controladores, produzindo resultados satisfatórios, conforme mostrado no Capítulo 4.

## A.2 ESTUDO DE CASO 2

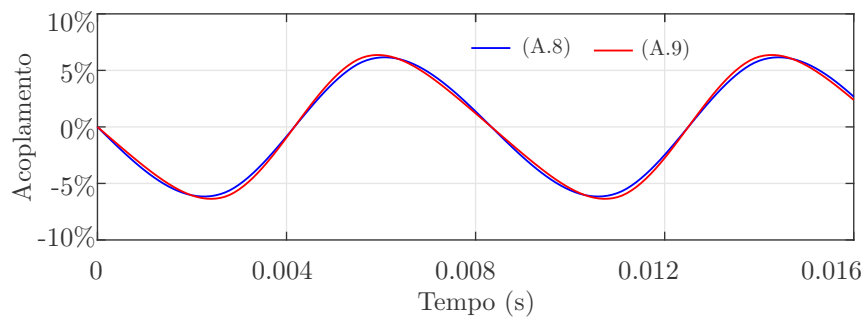
Para uma avaliação numérica do efeito do acoplamento no estudo de caso 2, considere os perfis de indutância apresentados no Capítulo 3, Seção 3.1.2. O mesmo procedimento mostrado na seção anterior é repetido aqui, resultando nas figuras mostradas a seguir. Novamente, é possível verificar que o acoplamento é pequeno e, portanto, pode ser desprezado no projeto dos controladores.

Figura A.5 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em  $i_{1\alpha}$  e  $i_{1\beta}$  a partir dos estados.



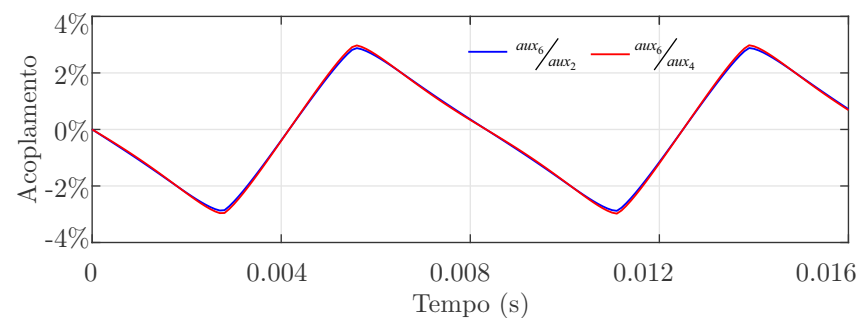
Fonte: Autor.

Figura A.6 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em  $i_{1\alpha}$  e  $i_{1\beta}$  a partir da entrada de controle.



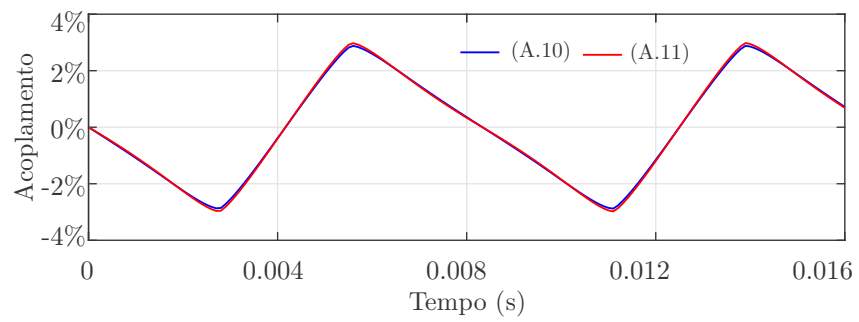
Fonte: Autor.

Figura A.7 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em  $i_{g\alpha}$  e  $i_{g\beta}$  a partir dos estados.



Fonte: Autor.

Figura A.8 – Estudo de caso 2: Efeito do acoplamento em  $i_{g\alpha}$  e  $i_{g\beta}$  a partir da entrada de distúrbio.



Fonte: Autor.



## Apêndice B – Projeto de Controladores por meio de LMIs

Neste apêndice serão apresentados detalhes com relação utilização de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para o projeto dos ganhos robustos de realimentação de estados desenvolvidos ao logo desta Tese. As deduções e provas mostradas aqui tem como base os trabalhos (KOCH, 2019; MACCARI Jr., 2015; SANTINI, 2017; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001b; DAAFOUZ; RIEDINGER; IUNG, 2002; CAIGNY et al., 2010).

### B.1 INTRODUÇÃO

Considere inicialmente o sistema dado por

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = \mathbf{G}\boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u u(k) \quad (\text{B.1})$$

em que a lei de controle é dada por uma realimentação de estados descrita como

$$u(k) = \mathbf{K}\boldsymbol{\rho}(k) \quad (\text{B.2})$$

Logo, pode-se escrever o sistema em malha fechada como

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K})\boldsymbol{\rho}(k) = \mathbf{G}_{cl} \boldsymbol{\rho}(k) \quad (\text{B.3})$$

Para avaliar a estabilidade do sistema em malha fechada, considere agora a seguinte função candidata a Lyapunov

$$v(\boldsymbol{\rho}(k)) = \boldsymbol{\rho}(k)' \mathbf{P} \boldsymbol{\rho}(k) \quad (\text{B.4})$$

em que  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica definida positiva de dimensão apropriada, que satisfaz a equação de diferenças dada por

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(\boldsymbol{\rho}(k+1)) - v(\boldsymbol{\rho}(k)) \\ &= \boldsymbol{\rho}(k+1)' \mathbf{P} \boldsymbol{\rho}(k+1) - \boldsymbol{\rho}(k)' \mathbf{P} \boldsymbol{\rho}(k) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo (B.3) em (B.5), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta v &= \boldsymbol{\rho}(k)' \mathbf{G}_{cl}' \mathbf{P} \mathbf{G}_{cl} \boldsymbol{\rho}(k) - \boldsymbol{\rho}(k)' \mathbf{P} \boldsymbol{\rho}(k) \\ &= \boldsymbol{\rho}(k)' (\mathbf{G}_{cl}' \mathbf{P} \mathbf{G}_{cl} - \mathbf{P}) \boldsymbol{\rho}(k) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Desta forma, se existir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' > 0$  tal que

$$\mathbf{G}_{cl}' \mathbf{P} \mathbf{G}_{cl} - \mathbf{P} < \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

então (B.4) é uma função de Lyapunov, garantindo a estabilidade assintótica do sistema

em malha fechada dado em (B.3) (CHEN,1999).

A expressão (B.7) é uma desigualdade matricial linear (LMI) (BOYD et al., 1994). Basicamente, resolver esta LMI consiste em determinar uma matriz  $\mathbf{P}$  simétrica, definida positiva, de forma que (B.7) seja uma definida negativa, assegurando que  $\Delta v < 0$ . Há algoritmos muito eficientes para resolver LMIs, chamados de LMI *solvers* (veja (STURM, 1999) e (GAHINET et al., 1995), por exemplo). Segundo (BOYD et al., 1994), formular um problema de análise de estabilidade ou de síntese de controladores em termos de LMIs equivale a resolvê-lo.

Utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), o problema acima pode ser reformulado como: se existir uma matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{G}_{cl}' \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{G}_{cl} & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.8})$$

então o sistema em malha fechada (B.3) é assintoticamente estável.

As condições (B.7) e (B.8) são equivalentes, porém a condição (B.8) é conveniente para a síntese de controladores por realimentação de estados. Entretanto, note que esta condição não é convexa para o cômputo do controlador  $\mathbf{K}$ , uma vez que substituindo (B.3) em (B.8) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K})' \mathbf{P} \\ \mathbf{P} (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

contém produto de variáveis matriciais  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{K}$ .

Para contornar este problema, pré e pós-multiplicando (B.9) por  $\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}$ , tem-se que

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1'} > \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K})' \\ (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}) \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

Então, aplicando a mudança de variável  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{W}$ , tem-se que (B.10) e (B.11) são reescritas como (BOYD et al., 1994)

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}' > \mathbf{0} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K})' \\ (\mathbf{G} + \mathbf{H}_u \mathbf{K}) \mathbf{W} & \mathbf{W} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.13})$$

Considerando uma segunda mudança de variável,  $\mathbf{Z} = \mathbf{K} \mathbf{W}$ , o problema expresso em (B.12) e (B.13) pode ser resolvido por LMIs da seguinte forma: se existir uma matriz

$\mathbf{Z}$  e uma matriz  $\mathbf{W}$  tais que

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}' > \mathbf{0} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}\mathbf{G}' + \mathbf{Z}'\mathbf{H}_u' \\ \mathbf{G}\mathbf{W} + \mathbf{H}_u\mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

então

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \quad (\text{B.16})$$

é um ganho de realimentação de estados que garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

Portanto, (B.14) - (B.16) permitem determinar ganhos de realimentação de estados que estabilizam o sistema, a partir da solução de LMIs baseadas na estabilidade quadrática (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989).

É importante observar que, no caso de sistemas politópicos e quando há restrições de desempenho, o projeto dos ganhos de realimentação de estados pode ser realizado utilizando condições que incluem variáveis de folga. Esta estratégia foi utilizada para prover os controladores robustos mostrados, por exemplo, no Capítulo 4 (alocação robusta de polos) e no Capítulo 5 (custo garantido  $\mathcal{H}_2$ ). As seções a seguir apresentam o detalhamento das LMIs utilizadas nestes projetos.

## B.2 ALOCAÇÃO ROBUSTA POR MEIO DE LMIS

Considere o sistema discreto linear incerto e variante no tempo, conforme apresentado no Capítulo 4. A partir de (4.9) e (4.12) e considerando as entradas de distúrbio e de referência nulas, tem-se que o sistema em malha fechada é dado por

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\rho}(k) \quad (\text{B.17})$$

em que

$$\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{H}_u \mathbf{K} \quad (\text{B.18})$$

com

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^N \theta_j(k) \mathbf{G}_j, \quad \sum_{j=1}^N \theta_j(k) = 1, \quad \theta_j(k) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{B.19})$$

O sistema (B.17) é dito robustamente estável (i.e., estável para qualquer valor ou variação do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}(k)$ ) se existir uma função de Lyapunov na forma

$$v(\boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) = \boldsymbol{\rho}(k)' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\rho}(k) \quad (\text{B.20})$$

com

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^N \theta_j(k) \mathbf{P}_j, \quad \sum_{j=1}^N \theta_j(k) = 1, \quad \theta_j(k) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{B.21})$$

em que  $\mathbf{P}_j$  são matrizes simétricas definidas positivas de dimensões apropriadas, que satisfazem a equação de diferenças dada por

$$\begin{aligned} \Delta v(\boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) &= v(\boldsymbol{\rho}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - v(\boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) < 0 \\ &= \boldsymbol{\rho}(k)' [\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) - \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k))] \boldsymbol{\rho}(k) < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Em comparação à (B.4) e (B.6), note que agora (B.20) e (B.22) contém funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (estabilidade poliquadrática) (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a).

Ainda, utilizando a teoria de Lyapunov, é possível impor um limite para a taxa de decaimento das trajetórias do sistema em malha fechada. Para tanto, considere

$$v(\boldsymbol{\rho}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) < r^2 v(\boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) \quad (\text{B.23})$$

em que  $0 < r \leq 1$  é o limite imposto para taxa de decaimento. Desta forma, tem-se que

$$\boldsymbol{\rho}(k)' [\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) - r^2 \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k))] \boldsymbol{\rho}(k) < 0 \quad (\text{B.24})$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) &= \sum_{\ell=1}^N \theta_{\ell}(k+1) \mathbf{P}_{\ell}, \\ \sum_{\ell=1}^N \theta_{\ell}(k+1) &= 1, \quad \theta_{\ell}(k+1) \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Então, tem-se que a factibilidade de (B.24) equivale a verificar a existência de matrizes  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k))$  e  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))$  simétricas definidas positivas que satisfaçam à condição (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a)

$$\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) - r^2 \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) < 0 \quad (\text{B.26})$$

Aplicando o complemento de Schur e reescrevendo a condição (B.26) na forma matricial (BOYD et al., 1994), tem-se que

$$\begin{bmatrix} r^2 \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \\ \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.27})$$

Considere agora as seguintes substituições de variáveis

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} \\ \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k)) &= \sum_{j=1}^N \theta_j(k) \mathcal{S}_j, \quad \sum_{j=1}^N \theta_j(k) = 1, \quad \theta_j(k) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) &= \sum_{\ell=1}^N \theta_\ell(k+1) \mathcal{S}_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^N \theta_\ell(k+1) = 1, \quad \theta_\ell(k+1) \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{B.29}$$

Então, substituindo (B.29) em (B.27) é possível escrever

$$\begin{bmatrix} r^2 \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0}\tag{B.30}$$

que, por meio da seguinte transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2 \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix}\tag{B.31}$$

resulta em uma condição equivalente, dada por

$$\begin{bmatrix} r^2 \mathcal{Q}' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} \mathcal{Q} & \mathcal{Q}' \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' \\ \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathcal{Q} & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}\tag{B.32}$$

em que  $\mathcal{Q}$  é uma variável de folga matricial, com a mesma dimensão das matrizes  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))$  e  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1))$ .

Substituindo (B.18) em (B.32) e assumindo que  $\mathbf{K} = \mathcal{J} \mathcal{Q}^{-1}$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} r^2 \mathcal{Q}' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} \mathcal{Q} & \mathcal{Q}' \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k))' + \mathcal{J}' \mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathcal{Q} + \mathbf{H}_u \mathcal{J} & \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}\tag{B.33}$$

em que  $\mathcal{J}$ , para o caso SISO, é um vetor linha de dimensão apropriada.

Note que para a condição (B.33) ser factível, tem-se que

$$\mathcal{Q}' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} \mathcal{Q} > \mathbf{0}\tag{B.34}$$

Então, se a matriz  $\mathcal{Q}$  for não singular, e a matriz  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))$  for definida positiva, é possível escrever a seguinte expressão

$$(\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k)) - \mathcal{Q})' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} (\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k)) - \mathcal{Q}) > \mathbf{0}\tag{B.35}$$

o que é equivalente a

$$\mathcal{Q}' \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))^{-1} \mathcal{Q} > \mathcal{Q} + \mathcal{Q}' - \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k))\tag{B.36}$$

Desta forma, note que a factibilidade da expressão

$$\mathcal{Q} + \mathcal{Q}' - \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(k)) > \mathbf{0}\tag{B.37}$$

implica também a factibilidade de (B.34), necessária para a factibilidade de (B.33). Portanto, substituindo (B.37) em (B.33), tem-se

$$\begin{bmatrix} r^2 (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k))) & \mathbf{Q}' \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k))' + \mathcal{J}' \mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathbf{Q} + \mathbf{H}_u \mathcal{J} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.38})$$

Pré multiplicando por uma matriz diagonal auxiliar e pós multiplicando pela sua transposta, tem-se que

$$\begin{bmatrix} r^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2 (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k))) & \mathbf{Q}' \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k))' + \mathcal{J}' \mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathbf{Q} + \mathbf{H}_u \mathcal{J} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}' > \mathbf{0} \quad (\text{B.39})$$

e, portanto, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{Q}' \frac{\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k))'}{r} + \mathcal{J}' \frac{\mathbf{H}'_u}{r} \\ \frac{\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k))}{r} \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{H}_u}{r} \mathcal{J} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.40})$$

Note que (B.40) é um problema de dimensão infinita, uma vez que os conjuntos  $\boldsymbol{\theta}(k)$  e  $\boldsymbol{\theta}(k+1)$  possuem infinitos pontos. Então, substituindo (B.19) e (B.29) em (B.40), obtém-se

$$\sum_{j=1}^N \theta_j(k) \left( \sum_{\ell=1}^N \theta_\ell(k+1) \begin{bmatrix} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}_j & \mathbf{Q}' \frac{\mathbf{G}'_j}{r} + \mathcal{J}' \frac{\mathbf{H}'_u}{r} \\ \frac{\mathbf{G}'_j}{r} \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{H}_u}{r} \mathcal{J} & \mathbf{S}_\ell \end{bmatrix} \right) > \mathbf{0} \quad (\text{B.41})$$

Considerando a convexidade dos conjuntos politópicos, é possível testar a factibilidade de (B.41) avaliando apenas os seus vértices. Como resultado, tem-se a condição

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}_j & \mathbf{Q}' \frac{\mathbf{G}'_j}{r} + \mathcal{J}' \frac{\mathbf{H}'_u}{r} \\ \frac{\mathbf{G}'_j}{r} \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{H}_u}{r} \mathcal{J} & \mathbf{S}_\ell \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ \ell = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (\text{B.42})$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade em (B.42) pelo escalar  $r$ , chega-se à condição

$$\begin{bmatrix} r (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}' - \mathbf{S}_j) & \mathbf{Q}' \mathbf{G}'_j + \mathcal{J}' \mathbf{H}'_u \\ \mathbf{G}'_j \mathbf{Q} + \mathbf{H}_u \mathcal{J} & r \mathbf{S}_\ell \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ \ell = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (\text{B.43})$$

que recupera as LMIs em (4.13) e (6.18), utilizadas nos projetos propostos no Capítulo 4 e Capítulo 6, respectivamente.

Deste modo, prova-se que, se existirem matrizes de Lyapunov  $\mathbf{S}_j$  e matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathcal{J}$  tais que as LMIs em (B.43) sejam factíveis, então o ganho

$$\mathbf{K} = \mathcal{J} \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{B.44})$$

garante robustez em malha fechada para qualquer valor ou variação do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}(k)$  (estabilidade poliquadrática), compreendido pelos vértices do politopo. Ainda, o escalar

$r$  impõe um limitante para a taxa de decaimento das trajetórias do sistema e, portanto, um limite superior para o tempo acomodação das respostas transitórias. Note também que o escalonamento das matrizes do sistema em malha fechada garante que todos os autovalores do sistema estão contidos em um círculo de raio  $r$ , centrado na origem.

### B.2.1 Impacto da região de alocação nas respostas transitórias

Para um melhor entendimento de como o parâmetro  $r$  impacta nas respostas transitórias, considere o mapeamento do plano- $s$  (em tempo contínuo) no plano- $z$  (em tempo discreto), mostrado, por exemplo, em (OGATA, 1995), Figura 4, Capítulo 4.2.

No domínio do tempo contínuo, o tempo de acomodação é determinado a partir de  $\sigma$ , que representa o valor da atenuação dos polos dominantes em malha fechada. Se o tempo de acomodação máximo for especificado, então é possível definir uma linha  $\sigma = -\sigma_1$ , paralela ao eixo imaginário, de modo que

$$t_{acom} = \frac{-\ln(\Delta e_{max})}{\sigma_1} \quad (\text{B.45})$$

em que  $\Delta e_{max}$  é o máximo erro percentual a partir do qual o transitório é considerado extinto.

Considerando o domínio do tempo discreto, a região à direita da linha  $\sigma = -\sigma_1$  no plano- $s$  é mapeada para o plano- $z$  como a região dentro de um círculo, centrado na origem, e cujo o raio é dado  $r_1 = e^{-\sigma_1 T_s}$ , em que  $T_s$  é o período de amostragem. Então, a partir da definição de  $r_1$ , pode-se escrever

$$\sigma_1 = \frac{-\ln(r_1)}{T_s} \quad (\text{B.46})$$

e, substituindo (B.46) em (B.45), tem-se que o limitante para o tempo de acomodação é dado por

$$t_{acom} = T_s \frac{\ln(\Delta e_{max})}{\ln(r_1)}, \quad \text{com } 0 < r_1 < 1 \quad (\text{B.47})$$

Por exemplo, para um critério de 1% de erro ( $\Delta e_{max} = 0.01$ ), assumindo  $T_s = 1/15000$  s e  $r_1 = 0,988$ , tem-se um limite para o tempo de acomodação de 25.4 ms.

B.3 LMIS COM CUSTO GARANTIDO  $\mathcal{H}_2$ 

Conforme apresentado no Capítulo 5, tem-se em (5.8) que o modelo politópico do sistema é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(k+1) &= \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) \boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{H}_u (u(k) + w(k)) + \mathbf{H}_d(\boldsymbol{\theta}(k)) v_g(k) + \mathbf{H}_{ref} i_{ref}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\rho}(k). \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

em que e a lei de controle é dada por  $u(k) = \mathbf{K} \boldsymbol{\rho}(k)$ , e  $w(k)$  é um distúrbio do tipo ruído branco, aplicado à entrada de controle do sistema.

Dessa forma, considerando o modelo politópico com 2 vértices, se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ , e matrizes  $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ ,  $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ ,  $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ , tal que o seguinte problema de otimização (MACCARI Jr et al., 2015; SANTINI, 2017)

$$\begin{aligned} \mu^* &\triangleq \min Tr(\boldsymbol{\mathcal{Y}}) \\ s.a. & \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Y}} & \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\mathcal{G}} \\ \star & \boldsymbol{\mathcal{G}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}' - \mathbf{P}_j \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad j = 1, 2; \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_j & \mathbf{G}_j \boldsymbol{\mathcal{G}} + \mathbf{H}_u \boldsymbol{\mathcal{Z}} & \mathbf{H}_u \\ \star & \boldsymbol{\mathcal{G}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}' - \mathbf{P}_\ell & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2 \\ \ell = 1, 2 \end{array} \quad (\text{B.51})$$

tenha solução, então o ganho de realimentação de estados

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\mathcal{Z}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1} \quad (\text{B.52})$$

garante a estabilidade do sistema em malha fechada, com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\sqrt{\mu^*}$ . Em (B.49),  $Tr$  representa a função matricial traço, dada pela soma dos elementos da diagonal principal.

Para demonstrar como as condições em (B.49)-(B.53) provêm um controlador robusto, inicialmente considere, a partir de (B.50), que

$$\sum_{j=1}^N \theta_j(k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Y}} & \mathbf{C}_{aug} \boldsymbol{\mathcal{G}} \\ \star & \boldsymbol{\mathcal{G}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}' - \mathbf{P}_j \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad j = 1, 2; \quad (\text{B.53})$$

e, a partir de (B.51), que

$$\sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \left( \sum_{\ell=1}^2 \theta_\ell(k+1) \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j & \mathbf{G}_j \boldsymbol{\mathcal{G}} + \mathbf{H}_u \boldsymbol{\mathcal{Z}} & \mathbf{H}_u \\ \star & \boldsymbol{\mathcal{G}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}' - \mathbf{P}_\ell & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) > \mathbf{0}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2 \\ \ell = 1, 2 \end{array} \quad (\text{B.54})$$



Então, utilizando a relação (B.52) e considerando a combinação convexa dos vértices do politopo, é possível escrever (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y} & \mathbf{C}_{aug}\mathcal{G} \\ \star & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.55})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathcal{G} & \mathbf{H}_u \\ \star & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.56})$$

em que  $\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{H}_u \mathbf{K}$ , e

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) = \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) \mathbf{P}_j, \quad \sum_{j=1}^2 \theta_j(k) = 1, \quad \theta_j(k) \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{B.57})$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) = \sum_{\ell=1}^2 \theta_\ell(k+1) \mathbf{P}_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^2 \theta_\ell(k+1) = 1, \quad \theta_\ell(k+1) \geq 0, \quad \ell = 1, 2$$

Multiplicando (B.55) à esquerda por  $[\mathbf{I} - \mathbf{C}_{aug}]$  e à direita pela transposta, tem-se

$$\mathbf{C}_{aug} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathbf{C}_{aug}' - \mathcal{Y} < \mathbf{0} \quad (\text{B.58})$$

Se (B.51) é factível, então, a partir de (B.56) tem-se que  $\mathcal{G} + \mathcal{G}' > \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))$ , e a matriz  $\mathcal{G}$  é não singular. Além disso, dado que  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))$  tem inversa, é possível escrever

$$(\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) - \mathcal{G})' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} (\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) - \mathcal{G}) > \mathbf{0} \quad (\text{B.59})$$

que implica

$$\mathcal{G}' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \mathcal{G} > \mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \quad (\text{B.60})$$

Então, é possível substituir (B.60) em (B.56), de modo que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))\mathcal{G} & \mathbf{H}_u \\ \star & \mathcal{G}' \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1))^{-1} \mathcal{G} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.61})$$

Multiplicando (B.61) à direita por  $\mathcal{T}$  e à esquerda por  $\mathcal{T}'$ , com

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathcal{G}^{-1} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) & \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) & \mathbf{H}_u \\ \star & \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{B.63})$$

e, aplicando o complemento de Schur duas vezes, obtém-se

$$\mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k)) \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k+1)) \mathbf{G}_{cl}(\boldsymbol{\theta}(k))' - \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{H}_u \mathbf{H}_u' < \mathbf{0} \quad (\text{B.64})$$

Desta forma, as desigualdades (B.58) e (B.64), e a minimização de  $\mu$  em (B.49) garantem a estabilidade e que  $\sqrt{\mu^*}$  é um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada para variações arbitrárias de  $\boldsymbol{\theta}(k)$ , tal que

$$\mu^{*2} = \inf_{\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}(k)), \mathcal{Y}, \mathcal{G}} \sup_{\boldsymbol{\theta}(k) \in \Theta} \frac{1}{N_L} \sum_{k=0}^{N_L} \text{Tr}(\boldsymbol{\mathcal{Y}}) \quad (\text{B.65})$$

considerando a seguinte definição para a norma  $\mathcal{H}_2$

$$\|H\|_2^2 \triangleq \lim_{N_L \rightarrow \infty} \sup E \left\{ \frac{1}{N_L} \sum_{k=0}^{N_L} y(k)^2 \right\} \quad (\text{B.66})$$

em que  $E$  denota a esperança matemática, quando a entrada  $w(k)$  do sistema é um ruído branco Gaussiano com matriz covariância igual a identidade (CAIGNY et al., 2010).

## Apêndice C – Descrição e Parâmetros do Protótipo

O protótipo utilizado na realização dos experimentos é apresentado na Figura C.1 e detalhado nas Figuras C.2 e C.3, tendo as seguintes características:

- processador: microcontrolador/DSP Texas Instruments, de ponto flutuante, 32 bits, modelo TMS320F28335, com *clock* de 150 MHz, com 16 conversores A/D e 12 saídas PWM;
- instrumentação: sensores de tensão com transformadores e sensores de corrente da marca LEM. Modelo LV 25-P, para medição de tensão, e LA 100-P, para medição de corrente;
- inversor: marca Semikron, com três braços de IGBTs, tensão das chaves de 1200 V;
- filtro LCL: indutores da marca Magmatec e capacitores da marca Epcos;
- conexão com a rede: transformador variável (VARIAC) da marca E.E.A.T. Ind e Com LTDA, para potência de 39 kVA;
- frequências do sistema: de amostragem, igual a 20040 Hz, e de comutação igual a 10020 Hz.

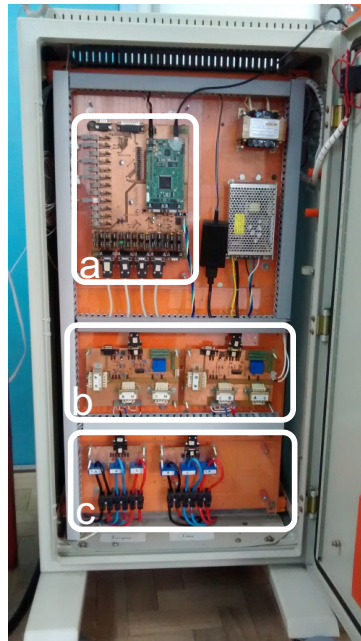
Os parâmetros do protótipo são compilados na Tabela C.1.

Figura C.1 – Visão geral do protótipo: (a) indutores para ensaios de variação paramétrica, (b) inversor e filtro LCL, (c) fonte de alimentação CC e (d) VARIAC para conexão com a rede elétrica.



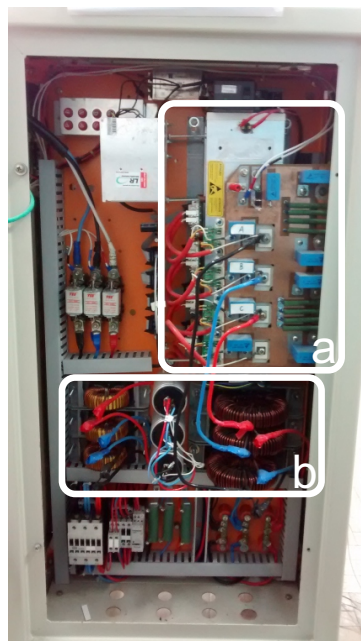
Fonte: Autor.

Figura C.2 – Vista frontal do sistema na Figura C.1(b). (a) microcontrolador/DSP, (b) circuitos para aquisição das medidas de tensão, (c) circuito para aquisição das medidas de corrente.



Fonte: Autor.

Figura C.3 – Vista posterior do sistema na Figura C.1(b). (a) inversor trifásico, (b) filtro LCL.



Fonte: Autor.

Tabela C.1 – Parâmetros do protótipo

Potência	5.4 kW
Tensão de linha da rede	220 Vrms
Frequência da rede	60 Hz
Tensão do barramento CC	400 V
Frequência de comutação	10020 Hz
frequência de amostragem	20040 Hz
Indutância do conversor $L_c$	1 mH
Indutância do lado da rede $L_{g1}$	0.3 mH
Capacitor do filtro $C_f$	62 $\mu$ F
Resistência série do indutor do lado do filtro	1 $n\Omega$
Resistência série do indutor do lado da rede	1 $n\Omega$
Máxima indutância da rede $L_{g2max}$	1 mH
Mínima indutância da rede $L_{g2min}$	0 mH