UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

LUIS FELIPE TATSCH SCHMIDT

Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais.

Santa Maria, RS, Brasil.
2019

Luis Felipe Tatsch Schmidt

Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Tecnologia da Informação e Comunicação da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM - RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Profª. Drª Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS, Brasil.
2019

Schmidt, Luis Felipe Tatsch
Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais. / Luis Felipe Tatsch Schmidt.- 2019.
130 p.; 30 cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2019

1. Ensino de Cálculo. 2. Integrais múltiplas. 3. Aprendizagem Significativa. 4. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. 5. Tecnologias Digitais. I. Mathias, Carmen Vieira II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Luis Felipe Tatsch Schmidt

Uma aplicação de Integrais Múltiplas mediada pelo uso das Tecnologias Digitais para a visualização e o cálculo das propriedades de sólidos em uma turma de Engenharia Mecânica da UFSM.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Tecnologia da Informação e Comunicação da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM - RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em 13 de dezembro de 2019:

Carmen Mathias.

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)
(Presidente/ Orientadora)

Maria Cecília P. Santarosa

Maria Cecília Pereira Santa Rosa, Dra. (UFSM)

Izabel Gioveli

Izabel Gioveli, Dra. (UFFS)

Santa Maria, RS, Brasil.
2019.

Dedicatória

Dedico esse trabalho principalmente aos meus pais, Luis Alberto e Luciana, sem eles, absolutamente nada teria sido possível. Dedico também, ao meu irmão Luis Eduardo e em memória do meu irmão Leonardo, amo todos vocês.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

(Paulo Freire)

Agradecimentos

A conclusão desse trabalho, ocorreu pelo auxílio de várias pessoas. Agradeço a todos, que de alguma forma, contribuíram para o término deste estudo. De maneira muito especial, agradeço:

Primeiramente a minha orientadora, Carmen Vieira Mathias, por todo o incentivo, que num dos momentos que eu mais precisei ela esteve ao meu lado me aconselhando e não me deixando desistir, se hoje poderei dizer que cheguei até aqui, foi por muito apoio seu. Obrigado, por todo o carinho, todos os 'puxões de orelha', paciência e compreensão, que me proporcionaste.

Agradeço ao PPGEMEF, por oportunizar a realização deste sonho.

Agradeço a todos os meus professores, por terem me proporcionado esse amplo conhecimento que adquiri ao longo desses mais de dois anos de mestrado.

Agradeço à minha namorada, Gisiane, por todo amor e carinho e compreensão durante esse processo de pós-graduação.

Agradeço a todos os meus amigos que estiveram ao meu lado, mas principalmente, agradeço a três deles: Laura, Renan e Jhonny, vocês são como irmãos para mim.

Agradeço imensamente a todos os meus alunos da Disciplina MTM1020 – Cálculo B, do curso de Engenharia Mecânica da UFSM no segundo semestre letivo de 2018, sem vocês, esse trabalho não teria acontecido, muito obrigado.

RESUMO

Uma aplicação de Integrais Múltiplas mediada pelo uso das Tecnologias Digitais para a visualização e o cálculo das propriedades de sólidos em uma turma de Engenharia Mecânica da UFSM.

AUTOR: Luis Felipe Tatsch Schmidt
ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

A presente pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, nível de mestrado, na Universidade Federal de Santa Maria, teve como objetivo elaborar, implementar e avaliar uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) destinada ao ensino e aprendizagem do conceito de integrais múltiplas na aplicação do cálculo de volume, massa e centro de massa de peças hipotéticas, em uma turma de Engenharia Mecânica. A pesquisa, de abordagem quantitativa-qualitativa foi classificada como um estudo de caso quanto aos procedimentos técnicos e teve como aporte teórico a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Na primeira parte da pesquisa foi realizado um teste diagnóstico, com 60 alunos de uma turma de Cálculo B, sujeitos da pesquisa. Tal teste teve o intuito de verificar os conhecimentos prévios que os mesmos tinham ancorados em sua rede cognitiva. A segunda parte contou com desenvolvimento de vídeos pelos acadêmicos. Para análise dos mesmos baseamo-nos nas Performances Matemáticas Digitais (PMD), que tem como fundamento meios de ensino e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos, através das artes e meios digitais. Onde podemos concluir que trazer uma abordagem diferente do tradicional para a disciplina, trouxe indícios de aprendizagem significativa para o entendimento do conteúdo de integrais múltiplas.

Palavras-Chave: Ensino de Cálculo. Integrais múltiplas. Aprendizagem Significativa. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

A Multiple Integrals application mediated by the use of Digital Technologies for visualization and calculation of solids properties in a Mechanical Engineering class at UFSM.

AUTHOR: Luis Felipe Tatsch Schmidt
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

The present research developed within the Postgraduate Program in Mathematical Education and Physics Teaching, Master's level, at the Federal University of Santa Maria, the purpose was to develop, implement and evaluate a Potentially Significant Teaching Unit (PSTU) for teaching and learning the concept of multiple integrals in the application of volume, mass and mass center calculations of hypothetical parts in a Mechanical Engineering class. The research, with a quantitative-qualitative approach was classified as a case study with regard to the technical procedures and had as theoretical support David Ausubel's Theory of Meaningful Learning. In the first part of the research, a diagnostic test was carried out, with 60 students from a B Calculus class, subjects of the research. This test aimed to verify the previous knowledge that they had anchored in their cognitive network. The second part**.** The second part was a vídeo development made by the academics. For their analysis we based on the Digital Mathematical Performances (DMP), which is based on teaching and learning means of various mathematical contents, through the arts and digital media. Where we can conclude that bringing a different approach from the traditional to the discipline has brought significant learning evidence for understanding the content of multiple integrals.

Keywords: Calculus Teaching. Multiple Integrals. Meaningful learning. Potentially Significant Teaching Units. Digital Technolgies.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Abreviaturas

PMD	Performance Matemática Digital
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TD	Tecnologias Digitais
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

Sumário

INTRODUÇÃO[1]

Quando trabalhamos a disciplina de matemática na Educação Básica, nos deparamos com alguns questionamentos dos alunos. Uma das perguntas que mais escutamos é “onde eu vou usar isso na minha vida? ”, ou “para que eu devo aprender este conteúdo? ”. Essas perguntas continuam aparecendo de forma muito enfática, em cursos de graduação quando trabalhamos, por exemplo, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, nos cursos de engenharia. Em tais cursos, a grade curricular possui uma grande quantidade de matemática e geralmente há dificuldade, por parte dos docentes e discentes, em conectar o conteúdo de Cálculo com a parte prática desses cursos, tornando assim, a aprendizagem destes conteúdos fragmentada e muitas vezes ineficaz.

Desde o Ensino Médio, a matemática me fascinou, a beleza das operações, as facilidades com os números foram os motivos que me fizeram escolher seguir por essa área. Ao iniciar a graduação no ano de 2012, eu realmente vi, que aquilo que estava fazendo era o que eu gostava, embora a álgebra não fosse uma área que me agradava, pois eu gostava mais de ver a matemática na prática, e não como um emaranhado de letras e provas. Esse gosto pela prática que me aproximou de disciplina como o Cálculo e Equações Diferenciais pela sua maior praticidade e aplicações. Durante minha graduação me envolvi em projetos voltados para a educação, como o ‘Matemágica’, projeto onde pude participar por mais de 2 anos, que buscava mostrar a matemática de um modo mais lúdico, trabalhando diretamente com alunos, cursos de formação de professores e até mesmo participação em eventos.

No meu último ano de graduação fui para a área da matemática aplicada, trabalhando na Biomatemática, com modelos de dinâmica de populações no trabalho de conclusão de curso. Após concluir a graduação, fiz algumas tentativas de ingressar na Pós-graduação em Matemática Aplicada da UFSM, mas a dificuldade em compreender conceitos mais complexos de Análise Real e Álgebra Linear, foram impedimentos de adentrar em tal programa. Mais tarde, conversando com a orientadora deste trabalho, ela mostrou algumas oportunidades de pesquisa dentro da Educação envolvendo Matemática Aplicada, entrelaçando aqui duas grandes paixões, a educação e ensino com a Matemática Aplicada, então decidi seguir por essa linha de pesquisa, onde prestei a seleção e ingressei neste Mestrado, que aqui o concluo.

---

[1] Faço uso da primeira pessoa do singular, durante parte da introdução, por se tratar de experiências pessoais anteriores ao mestrado.

A experiência do autor desse trabalho em ministrar a disciplina de MTM 1019 - Cálculo A, enquanto professor substituto no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), em alguns cursos superiores, como por exemplo, Engenharias e Administração e, também, a breve passagem pelo curso de Engenharia Florestal, enquanto acadêmico, mostrou algumas dificuldades existentes nesses cursos em relacionar a teoria e a prática, ou problemas práticos. Essas dificuldades é que motivaram a proposta de pesquisa presentes neste projeto.

Ao trabalhar a disciplina MTM 1020 - Cálculo B, as inquietações aumentaram, pois notou-se que há uma grande dificuldade dos alunos na transição entre o cálculo de uma para o cálculo de várias variáveis, que é o foco desta disciplina. A experiência com essa disciplina mostra que a dificuldade dos estudantes aumenta ao tratar o conteúdo de integrais, visto que ainda no Cálculo A, é um assunto de difícil compreensão por parte dos mesmos. Observa-se que, ao ministrar o conteúdo de integrais múltiplas nesta disciplina, devemos ensinar além das regras de integração, noções de Geometria Analítica, necessárias para determinar os intervalos de integração. Os conteúdos, referentes a Geometria Analítica, nos cursos de Engenharia da UFSM são deixados de lado, ou ainda, trabalhados concomitante com a disciplina de Cálculo de várias variáveis, o que torna essa disciplia mais complexa.

Segundo Moreira (2006), a aprendizagem, em todos os níveis de ensino, em geral é mecânica e tecnicista, fundamentada somente na operacionalidade momentânea da matemática, sem significado para o aluno, ou seja, muitas vezes o aluno não consegue relacionar o conhecimento prévio, que traz da Educação Básica, com o conteúdo que estão vendo no Ensino Superior.

Conforme Novak (1984), no Ensino Fundamental o aluno é “podado” de expor seus pensamentos, sentimentos e ações, fundamentais para o sucesso da aprendizagem. No Ensino Médio, em geral, o aluno inicia a preparação por uma vaga em uma Universidade, mesmo que, após o ingresso, todo o conhecimento prévio adquirido se transforme em um “vazio cognitivo”. No Ensino Superior o ciclo se repete, formando muitas vezes aplicadores, e não geradores de conhecimento (Moreira, 2011). Acredita-se que consequência desse processo pode ser a formação de um profissional ineficiente, o qual irá apenas replicar conhecimentos e não produzir novos.

Moreira (2011) afirma que “a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação entre eles”. Assim, dada a interação do subsunçor (aquilo que o aluno já sabe) com o conhecimento a ser aprendido este, o subsunçor se modifica ao mesmo tempo em que reforça os já existentes.

Diante disso, esta pesquisa irá sujeitar acadêmicos do curso de Engenharia Mecânica, na disciplina de Cálculo B a uma intervenção mediada pelo uso de tecnologias com o intuito de responder a seguinte questão: Como a implementação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) fundamentada pelo uso das tecnologias digitais (TD) pode favorecer a aprendizagem significativa para o ensino de Integrais Múltiplas?

Como base para esse trabalho de pesquisa, utilizaremos a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de David Ausubel, e suas inferências para o ensino e aprendizagem de matemática, onde ampara atividades que auxiliem os alunos a construir um elo entre os conteúdos que ele aprendeu e que a eles possam ser outorgados os seus significados, buscando uma fuga do ensino que visa apenas uma aprendizagem mecânica desenvolvendo assim, uma atividade potencialmente significativa.

A TAS pode ser resumida, conforme escreve Moreira (2009, p. 6) numa citação de Ausubel (1978), pela seguinte proposição

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influência a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo. (AUSUBEL, 1978, p. iv)

Para Ausubel (1968), a aprendizagem se dá em várias etapas, sendo elas, fazer uma análise dos termos que são desconhecidos, entender o que se encontra no enunciado, elaborar explicações e seleciona-las, compreender onde se encontram os erros e realizar um estudo individual e socializar o atingido. Para este autor, o ápice da aprendizagem acontece quando ele consegue ampliar e reformular as formas de conhecer e aprender.

Partindo dessa conjectura, é absolutamente importante ter em conta, que todo aluno já carrega consigo algum aprendizado quando chega no ambiente escolar. Assim sendo, devemos sempre levar em consideração toda a vivência trazida pelo aluno, ou seja, aquilo que ele já tem conhecimento, e então fazendo uma ligação entre os conteúdos novos passados em aula, como afirma a TAS.

Dessa forma, o objetivo principal desta pesquisa é elaborar, implementar e avaliar uma UEPS para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de integrais múltiplas na aplicação do cálculo de volume, massa e centro de massa de peças hipotéticas, em uma turma de Engenharia Mecânica.

No intuito de cumprir com o objetivo proposto, tem-se como objetivos específicos:

- Investigar quais os subsunçores que os alunos possuem em relação à conteúdos de Cálculo Diferencial Integral de uma variável, necessários para a aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial Integral de várias variáveis;
- Elaborar, implementar e avaliar uma unidade de ensino potencialmente significativa em busca de indícios de aprendizagem significativa.
- Verificar como o uso das tecnologias digitais e aplicações do cálculo, contribuem na aprendizagem significativa acerca de conteúdos de funções de duas variáveis.

Assim, o presente trabalho é composto por seis capítulos. O primeiro capítulo é a presente introdução. No capítulo 2, será abordada a fundamentação teórica desse trabalho. Inicialmente foi descrito a pesquisa do conhecimento, onde referimos as pesquisas realizadas nas páginas dos programas de pós-graduações. Em busca de dissertações e teses que viessem de encontro ao tema explorado nessa pesquisa, procuramos também, na Plataforma Sucupira em busca de mais referenciais, descrevendo algumas delas que foram analisadas para a construção desse nosso tema.

Para fundamentar esta pesquisa utilizamos a TAS, que está descrita na segunda parte deste capítulo. Baseado nas obras de Ausubel (1978/2000), abordamos tópicos explicando o que é uma aprendizagem significativa e as condições para a ocorrência dessa aprendizagem, e também quais são os tipos de aprendizagem significa. Apoiado em Moreira (2010), expomos o que são Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). Sobre as TD, foi discutido cada uma das quatro fases descritas por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014).

O terceiro capítulo dessa dissertação, caracteriza-se por ser uma breve apresentação sobre o conteúdo usado nesse trabalho. Na primeira parte uma rápida contextualização do ensino do Cálculo Diferencial e Integral através da história, e na segunda parte uma apresentação dos conceitos e métodos sobre o cálculo integral.

No quarto capítulo, descreveremos os procedimentos metodológicos utilizados, será apresentado o contexto desse trabalho, apresentando os sujeitos da pesquisa, e o curso de Engenharia Mecânica, juntamente com os instrumentos de pesquisa e as considerações éticas da mesma. No capítulo 5 está representado as análises sobre a UEPS desenvolvida, e no sexto capítulo apresentamos nossas conclusões deste trabalho, e por fim, as referências utilizadas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir, descreveremos algumas seções sobre a fundamentação teórica deste trabalho, embasando todo a teoria que utilizamos para a conclusão desta pesquisa, entrelaçando os conhecimentos adquiridos durante este estudo.

2.1. PESQUISA DO CONHECIMENTO

Para a escrita desta etapa, foram selecionadas algumas dissertações e teses, a partir de uma busca no portal da Capes e em programas de pós-graduação, que possuíam maior interlocução com esta pesquisa, através do que era exposto no resumo e nas conclusões. Concomitantemente, houve uma busca de artigos no portal Google Acadêmico, utilizando as mesmas palavras chaves usadas do portal e programas, por meio de combinações entre palavras chave ‘Ensino de Cálculo’, ‘ Teoria da Aprendizagem Significativa’ e ‘Tecnologias da Informação’.

A escolha pelos programas listados no quadro 1, deve-se às possibilidades de pesquisa sobre a temática Ensino de Cálculo.

Quadro 1- Quadro dos Programas de Pós-Graduações Investigados.

Programa	IES	UF	Período da Consulta	Link	Número de trabalhos
Educação em Ciências e Matemática	IFES	ES	2013-2017	https://goo.gl/ytnL5j	0
Educação em Ciências e Matemática	UFPR	PR	2011-2017	https://goo.gl/o8JjrD	0
Educação em Ciências e Matemática	PUCRS	RS	2010-2017	https://goo.gl/isyEGW	2
Educação Matemática	UESC	BA	2014-2017	https://goo.gl/tA8XDG	0
Educação Matemática	UFJF	MG	2011-2017	https://goo.gl/VrynyU	3
Educação Matemática	UFOP	MG	2010-2017	https://goo.gl/vK91uN	11
Educação Matemática	UFMS	MS	2010-2017	https://goo.gl/694ZQi	1
Educação Matemática	USS	RJ	2009-2017	https://goo.gl/L9Pui8	0
Educação Matemática	PUCSP	SP	2007-2017	https://goo.gl/Z6yebp	2
Educação Matemática	UNIBAN	SP	2008-2015	https://goo.gl/EubcSU	3

Ensino de Ciências e Matemática	UFAL	AL	2012-2017	https://goo.gl/SRR3Fu	0
Ensino de Ciências e Matemática	UEPB	PB	2010-2017	https://goo.gl/uQx6sr	0
Ensino de Ciências e Matemática	CEFET/RJ	RJ	2007-2017	https://goo.gl/M17SP6	0
Ensino de Ciências e Matemática	UFPEL	RS	2013-2017	https://goo.gl/AJgfbq	0
Ensino de Ciências e Matemática	UFN	RS	2007-2017	https://goo.gl/Z1QnHY	0
Ensino de Ciências Exatas	UFSCAR	SP	2011-2017	https://goo.gl/V5WWaU	0
Ensino de Ciências Exatas	UFRN	RN	2007-2017	https://goo.gl/2z1sC8	1
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	FURB	SC	2011-2017	https://goo.gl/wYCw2V	0
Ensino de Matemática	UFRJ	RJ	2008-2017	https://goo.gl/zrCym3	3
Ensino de Matemática	UFRGS	RS	2007-2017	https://goo.gl/fjqm33	0
Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática	UFABC	SP	2012-2017	https://goo.gl/5St45r	0
Educação Matemática	UNESP	SP	2007-2017	https://goo.gl/NGGerw	19

A pesquisa foi realizada no mês de agosto de 2018 e foram selecionadas dissertações e/ou teses, que foram publicadas nos últimos 10 anos, ou seja, de 2007 a 2017. No total, foram encontradas 45 dissertações e teses que vieram ao encontro desta pesquisa. Desse montante, foram selecionadas 5 pesquisas que ao lermos, as julgamos serem mais relevantes e possuírem uma maior interlocução com a investigação realizada, pois elas tratam de assuntos que vão ao encontro do que estávamos buscando neste trabalho.

O primeiro trabalho selecionado foi de Escarlate (2008), que possuiu como objetivo geral investigar quais são as concepções de alunos ingressantes na disciplina de cálculo sobre o conceito de integral definida e as suas interpretações geométricas. A investigação ocorreu por meio de questionários, onde na primeira etapa, chamada de etapa 0, os alunos foram apresentados aos conceitos iniciais de integrais. A segunda parte, denominada etapa 1, foi aplicada em duas turmas de graduação da UFRJ e na terceira etapa, etapa 2, participaram cinco alunos que foi realizada uma entrevista para compreender os dados obtidos no questionário anterior (ESCARLATE, 2008, p. 40).

Quando tratamos do assunto integral definida, para os acadêmicos trata-se de um conceito um tanto quanto obscuro. É notável que as imagens e conceitos ligados a esse conteúdo são predominantemente ligados com área. As entrevistas realizadas em Escarlate (2008) sinalizam esses fatos. Conceitos de partições e intervalos, limites de somas superior e inferior, ou outras que são menos formais, como por exemplo, as ideias de soma infinita não são ligadas a definição de integrais. O autor conclui o trabalho afirmando que os resultados encontrados “evidenciam que a representação de integrais definidas por meio de áreas demanda um planejamento cuidadoso, do ponto de vista pedagógico” (ESCARLATE, 2008, p. 144). Frisa também, que as pesquisas voltadas ao Ensino Superior merecem mais espaço, quando comparados as pesquisas relacionadas aos Ensinos Fundamental e Médio.

Rocha (2010) tem como foco o uso das TIC na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, onde o objetivo principal foi investigar quais contribuições podem ser observadas na articulação entre a visualização e a experimentação proporcionada por um ambiente informatizado é capaz de trazer para a compreensão dos conceitos abordados na disciplina de Cálculo, como por exemplo limite, derivadas e integrais. Para tal, foi realizada uma pesquisa exploratória de campo, onde foram observados o desenvolvimento de atividades nas quais “os alunos utilizaram o computador como ferramenta auxiliar na visualização e manipulação dos conceitos estudados no Cálculo” (ROCHA, 2010, p. 57).

Com o intuito de alcançar seu objetivo principal, Rocha (2010) apresenta algumas tarefas, sendo elas, observar o comportamento e o desempenho dos alunos ao longo de uma sequência de atividades que envolveram o uso do software GeoGebra, em uma abordagem conceitual de limites, derivadas e integral.

Em sua conclusão, Rocha (2010) diz que ao acrescentarmos as mídias no ambiente de aprendizagem, os papeis de professor e aluno são modificados, e novas formas de produzir conhecimento matemático são construídos. Indícios de que o uso do software forneceu situações novas de experimentação, a partir de uma visualização construída, mesmo com certas limitações, o software pode trazer novas fontes de atividades e discussões, ou seja, as TIC têm um papel de destaque por possibilitar a criação de novas explorações. Ele conclui seu trabalho afirmando que houve um ganho/crescimento qualitativo na maneira de lidar com os conceitos matemáticos trabalhados, pois mobilizou o interesse e instigou os alunos a realizarem as atividades propostas.

Miranda (2010), apresenta como foco de pesquisa o seguinte problema: "como o uso de um software pode ajudar no ensino e aprendizagem da construção de gráficos no $\mathbb{R}^3$? "E tem como objetivo investigar como esse software pode contribuir, na perspectiva da aprendizagem significativa, no fortalecimento das relações entre subsunçores. Para isto, foram realizados estudos diagnósticos com os aprendizes de conceitos matemáticos, utilizando tecnologia informática no estudo de gráficos analisados no plano e estendidos para 3 dimensões.

Os dados coletados em Miranda (2010), apontam que a combinação entre as atividades práticas, tendo como auxílio as mídias, lápis, papel e software, conjuntamente com uma abordagem metodológica de experimentos de ensino, favoreceram uma interação de novos conteúdos, ou seja, eles favoreceram uma contribuição para a aprendizagem significativa dos estudantes sobre o conteúdo proposto na pesquisa. Com base nos resultados obtidos, o autor conclui seu trabalho trazendo a sugestão que os professores devem utilizar as TIC em suas aulas, pois algumas ideias são abstraídas de forma mais fácil pelos acadêmicos.

Outro trabalho que possui interlocução com a pesquisa realizada é Pires (2016), que apresenta quais as possíveis influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas estratégias de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. O autor realizou uma pesquisa de caráter qualitativo, onde entrevistou professores da disciplina de Cálculo, no intuito de investigar o que esses professores sabem, pensam e acham sobre sua prática, e a técnica de realizar operações matemáticas por meio das influências das TIC. Também realizou um questionário online, onde faz uma análise nas estratégias de aprendizagem dos estudantes.

Pires (2016) aponta que é necessário dar uma nova atenção as resoluções matemáticas com o avanço das tecnologias, pois "o ensino de Matemática, embasado somente na habilidade de efetuar cálculos está com seus dias contados" (PIRES, 2016, p. 164). Segundo o autor, para os professores de Cálculo, suas concepções estão diretamente ligadas às estratégias didáticas, uma vez que o processo de fazer matemática está longe de apenas reproduzir algoritmos e fazer contas, pois ela envolve observação, padrões, testagem de conjecturas e estimativa de resultados.

O último trabalho selecionado foi Cometti (2018) que teve como objetivo verificar as possíveis contribuições de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D no processo de ensino e aprendizagem de integrais múltiplas, no Cálculo de Várias variáveis. A pesquisa é de cunho qualitativo, tendo sido realizadas com alunos da disciplina de Cálculo II.

Cometti (2018) reforça o fato de que poucas pesquisas são encontradas ao se tratar do cálculo de várias variáveis. O autor defende o fato de que a visualização proporcionada pelo GeoGebra se mostrou de suma importância para o processo de construção dos conceitos principais e das propriedades de Integrais Múltiplas. Evidencia que o GeoGebra com sua interface de fácil manuseio e as suas inúmeras ferramentas, ajudaram muito para que as observações e explorações fossem realizadas, principalmente nos aspectos de construção de gráficos no plano e no espaço (COMETTI, 2018).

Cabe destacar aqui, um trecho de Cometti (2018), pois vai ao encontro a crença do autor deste trabalho:

> Observamos durante a aplicação das atividades exploratórias e também durante a análise dos dados colhidos, que aspectos ligados à visualização favoreceram a aprendizagem de Integrais Múltiplas, pois viabilizaram o processo de criação, interpretação e reflexão sobre os gráficos criados no GeoGebra, permitindo descrever a analisar informações e ideias antes desconhecidas. É importante frisar que tal concepção não garante uma aprendizagem em sua totalidade, mas acreditamos que potencializa os processos, tanto de ensino como de aprendizagem. (COMETTI, 2018, p. 162)

É importante destacar também, que atividades de caráter exploratório de características visuais são mais proveitosas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou através de uma sequência didática.

Com base nos trabalhos selecionados, podemos inferir que estamos frente a um processo de reformulação metodológica no ensino. Ou seja, não é viável continuar a reproduzir procedimentos antigos, se o aprendiz através das novas tecnologias, vem transformando uma nova natureza informatizada, podendo então, agregar as tecnologias ao ensino e aprendizagem de cálculo, por exemplo, reconhecendo que elas são um recurso com muito potencial para esse processo.

Nossa pesquisa difere das anteriormente citadas, pelo fato de ser um trabalho que, além de envolver visualização por meio das tecnologias digitais, trabalhou com as Performance Matemáticas Digitais, através da produção de vídeos pelos acadêmicos, visando uma aprendizagem do tipo significativa, do conteúdo de integrais múltiplas

2.2 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Uma teoria de aprendizagem é, de forma geral, uma teoria elaborada para explicar como os indivíduos aprendem. Dentre as diversas teorias que estudamos durante o curso de mestrado, para esta pesquisa foi escolhida a Teoria da Aprendizagem elaborada por David Paul Ausubel

(1918-2008) em 1968 e propagada nas Américas Central e do Sul principalmente por Joseph Donald Novak, Dixie Bob Gowin e Marco Antonio Moreira (MOREIRA, 2006). A escolha dessa teoria como aporte teórico deu-se pelo fato de acreditarmos que é aquela que está mais próxima da realidade, e a que melhor se encaixa com a proposta de pesquisa aqui apresentada.

A medida que vamos nos encontrando no mundo, os significados vão sendo formados, ou seja, atribuímos relações à realidade que nos encontramos. Significados esses, que não são estáticos, pelo contrário, estão sempre em formação e em processo de novas cognições, dando origem então a estrutura cognitiva. Ausubel, como um desses representantes do cognitivismo, propôs uma explicação teórica desse processo de aprendizagem, embora, nunca descartando a importância do humanismo, ou seja, da experiência afetiva no processo de cognição.

Segundo Ausubel (1968; 2000) significado é um resultado obtido de um processo 'fenomenológico' do processo de aprendizagem, onde:

> O significado potencial, converte-se em conteúdo cognitivo, diferenciado para um determinado indivíduo. O significado potencial converte-se em "fenomenológico", quando um indivíduo, empregando um determinado padrão de aprendizagem, incorpora um símbolo que é potencialmente significativo em sua estrutura cognitiva. (AUSUBEL, op Cit., 1968)

Quando tratamos de aprendizagem sobre essa visão cognitivista, estamos considerando, como sendo um processo de armazenamento de informações, um agrupamento de conhecimento se completando, que são acrescentados a estruturas já existentes na mente do indivíduo. Ou seja, "é a habilidade de organização das informações que deve ser desenvolvida" (MOREIRA, 2006).

Para Ausubel (1968), a aprendizagem tem sentido de organização e incorporação dos instrumentos na estrutura cognitiva. Assim como outros cognitivistas, ele se fundamenta no argumento de que há a existência de uma estrutura cognitiva prévia, onde novas ideias e informações podem ser ancoradas e apreendidas, concomitantemente enquanto conceitos relevantes e claros vão sendo adquiridos pelo indivíduo, essa estrutura vai se ampliando, e fortalecendo conforme a pessoa vai adquirindo novas estruturas para ancorar novos conceitos.

Conforme Moreira (2006):

> A aprendizagem significativa processa-se quando o material novo, ideias e informações que apresentam uma estrutura lógica, interage com conceitos relevantes e inclusivos, claros e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados, contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade. Essa interação constitui, segundo Ausubel (1968, pg 37-39), uma experiência consciente, claramente articulada e precisamente diferenciada, que emerge quando sinais, símbolos,

> conceitos e proposições potencialmente significativos são relacionados à estrutura cognitiva e nela incorporados. (MOREIRA, 2006, p. 14)

O mesmo autor escreve que um material é potencialmente significativo, quando ele consegue se relacionar, de forma substantiva e não arbitrária, com uma estrutura já existente na cognição, isto é, “conteúdo ideacional e maturidade intelectual”. Ou seja, deve se ancorar com a estrutura particular do indivíduo que está aprendendo.

A aprendizagem por material potencialmente significativo, é defendida por cognitivistas, como uma ferramenta humana para conquistar e apreender todas as ideias e informações de um conjunto de conhecimentos.

A ideia principal da TAS é relativamente simples, pois o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Porém, a explicação de como isso ocorre, é de uma vasta complexidade. O principal conceito dentro dessa teoria é da aprendizagem significativa. Para Ausubel (1968), a aprendizagem é significativa quando a nova informação se relaciona com os elementos que o indivíduo carrega na sua estrutura cognitiva de forma que, neste processo, essa nova informação altere a estrutura pré-existente.

Essa estrutura já compactuada no cognitivo do ser, é chamada de “conceito subsunçor” ou ainda, apenas “subsunçor”, palavra está de origem inglesa (*subsumer*), que significa aquilo que o aluno já tem conhecimento, seja um conceito, uma ideia, um conhecimento prévio. A aprendizagem significativa, então, ocorre quando os novos conceitos se ancoram em subsunçores relevantes já existentes do aluno.

Em oposição a aprendizagem significativa, temos o que Ausubel (1968) define como aprendizagem mecânica, que é a aprendizagem sem ancoragem nos subsunçores já existentes, ou seja, é a conhecida popularmente como “decoreba”. Sendo assim, a aprendizagem mecânica é dada de forma arbitrária, onde não há uma interação com os conhecimentos prévios armazenados.

É de suma importância destacar aqui, que aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa não são dicotômicas, ou seja, para que ocorra de fato uma aprendizagem significativa, muitas vezes se faz necessário o uso da aprendizagem mecânica, como sendo uma ferramenta para que se criem novos subsunçores, ainda que pouco elaborados, mas que servirão de ancoragem para novas informações.

2.2.1 Condição para a ocorrência de Aprendizagem Significativa

Para Ausubel (1968), a essência do processo de aprendizagem significativa é dada por duas condições essenciais, a primeira, que o material que se deseja ser aprendido seja potencialmente significativo, ou seja, que favoreça o aluno no processo de assimilação, de forma não aleatória e não literal. A segunda das condições diz que o aprendente evidencie disposição de relacionar o novo material de maneira não aleatória e não literal.

A primeira condição, pode ser melhor explicada, como cita Moreira (2006)

> A primeira dessas condições depende, obviamente, de pelo menos dois fatores principais, quais sejam, a natureza do material a ser aprendido e natureza da estrutura cognitiva do aprendiz. Quanto à natureza do material, deve ser "logicamente significativa", suficientemente não-arbitrária e não-aleatória em si, de modo que possa ser relacionada, de forma substantiva e não-arbitrária, a ideias correspondentemente relevantes que se situem dentro do domínio da capacidade humana de aprender. Quanto à natureza da estrutura cognitiva do aprendiz, nela devem estar disponíveis os conceitos subsunçores específicos com os quais o novo material é relacionável. (MOREIRA 2006, p. 23)

A outra condição, traz de forma clara, que independentemente de todo esforço e de quão potencialmente significativo seja o material trabalhado, se o aprendiz não tiver interesse, ou deseje aprender de maneira mecânica, apenas decorando, tanto o processo, quanto o produto serão assimilados sem significados ou nem serão assimilados. Da mesma forma, podemos dizer que mesmo se o aprendiz estiver predisposto a aprender de forma significativa, se o material não for potencialmente significativo, o processo e o produto de aprendizagem dar-se-ão de maneira arbitrária e literal.

Do ponto de vista de David Paul Ausubel, para evidenciar que algo tenha sido aprendido de maneira significativa, deve-se aplicar testes com problemas que sejam novos, e não familiares, e que requeiram máxima transformação do conhecimento existente, a afim de evitar que a "simulação da aprendizagem significativa", que vem da mera reprodução de problemas repetidos, que os alunos já tenham resolvido.

Os testes de compreensão, devem ser fraseados de maneira distinta e apresentados em um contexto de forma diferente do que foi apresentado no material instrucional. Para Moreira (2006):

> Solução de problemas é, sem dúvida, um método válido e prático de se procurar evidência de aprendizagem significativa. Porém, Ausubel chama atenção para o fato de que o aprendiz não é capaz de resolver um problema, isso não significa, necessariamente, que ele tenha somente memorizado os princípios e conceitos relevantes à solução do problema, pois esta implica, também, certas habilidades além

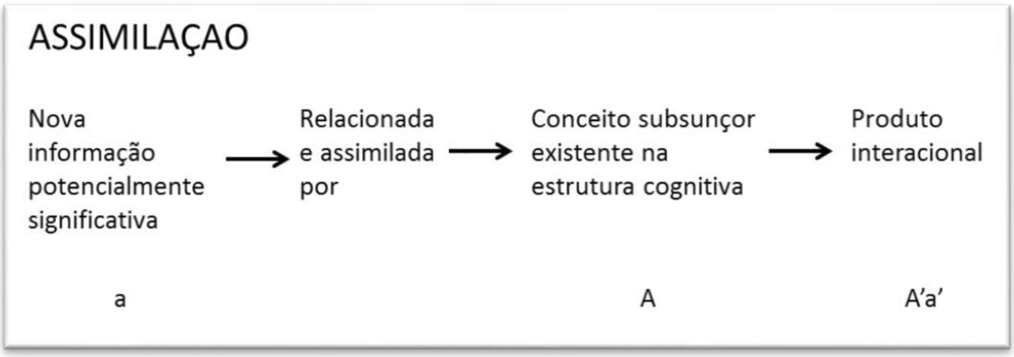
> da compreensão. Outra possibilidade é solicitar aos estudantes que diferenciem ideias relacionadas, mas não idênticas, ou que identifiquem os elementos de um conceito ou proposição de uma lista contendo, também, os elementos de outros conceitos e proposições similares. (MOREIRA 2006, p. 24)

Uma outra alternativa, além dessas citadas por Moreira (2006), para testar a ocorrência da aprendizagem significativa, é de propor uma atividade de aprendizagem, que necessite de uma ordem sequencial, dependente uma da outra, que não tenha como ser executada sem um bom domínio do proveniente.

Para Moreira (2006), ao tratar das evidências de aprendizagem significativa, precisamos deixar mais claro como dá-se o processo de aquisição e organização de significados na estrutura de conhecimento, com isso, trazemos o princípio da assimilação. A conjectura da assimilação ajuda a explicar como o conhecimento é organizado na estrutura cognitiva.

No progresso de assimilação, mesmo com o surgimento do significado, a relação entre as ideias-âncoras, e as ideias assimiladas mantem-se na estrutura cognitiva. Moreira escreve que Ausubel descreve o processo de "subsunção" através do que ele denomina por "princípio de assimilação", o que é exibido simbolicamente da seguinte forma na figura 1:

Figura 1 - Processo de Assimilação



Fonte: (Moreira, 2006, p. 25)

Ainda, conforme o próprio Moreira cita

> Portanto, a assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição *a*, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo. Tal como sugerido no diagrama, não só a nova informação *a*, mas também o conceito subsunçor *A*, com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso, *a'* e *A'* permanecem relacionados como co-participantes de uma nova unidade *a'A'* que nada mais é do que o subsunçor modificado. (Moreira, 2006, p. 25)

Na próxima subseção, apresentaremos os tipos e formas de aprendizagem significativa, classificados por Moreira (2010), ainda, definiremos o que é a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

2.2.2. Tipos e Formas de Aprendizagem Significativa

Ausubel, nos traz três formas de Aprendizagem significativa e três tipos, sendo as formas por subordinação, por superordenação e de modo combinatório. Os três tipos são listados como sendo: representacional, de conceitos e a proposicional (FERREIRA, 2017, p. 31). Nos parágrafos a seguir, dissertaremos um pouco sobre cada um, baseados em Ferreira (2017).

A aprendizagem significativa subordinada é onde o novo conhecimento é compreendido pelo subsunçor passando a transformá-lo, o subsunçor subordina o novo conceito hierarquicamente. Quando o conhecimento novo potencialmente significativo alcançam novos significados, a aprendizagem é dita subordinada, para um indivíduo que assimila a informação, por uma metodologia de ancoragem cognitiva, mútua, em conhecimentos prévios relevantes mais gerais e inclusivos já existentes na sua estrutura cognitiva.

A aprendizagem significativa é dita da forma superordenada, quando a nova informação é excessivamente ampla para ser absorvida por qualquer subsunçor, sendo mais amplo do que este suporta, e então passa a modifica-lo, ou seja, o conceito assimilado superordena o subsunçor, passa a ser hierarquicamente o mais geral, na estrutura cognitiva. Esta, envolve processos de abstração, indução, síntese, que guiam a novos conhecimentos que acabam a subordinar aqueles que lhes originaram. Moreira (2010, p.16) traz que " é um mecanismo fundamental para a aquisição de conceitos".

A aprendizagem significativa combinatória, para Moreira (2010), ocorre quando uma referência nova não vai ser o suficiente para compreender os subsunçores, mas mesmo assim, é muito grande para ser compreendida, podendo associar-se de uma maneira melhor dos seus conceitos originais.

> Aprendizagem combinatória é, então, uma forma de aprendizagem significativa em que a atribuição de significados a um novo conhecimento implica interação com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, mas não é nem mais inclusiva nem mais específica do que os conhecimentos originais. Tem alguns atributos criteriais, alguns significados comuns a eles, mas não os subordina nem superordena (Moreira, 2010, p. 16).

A aprendizagem significativa representacional ocorre quando símbolos arbitrários passam a ter uma representação mental, para Moreira (2010) ela é algo muito próximo da aprendizagem mecânica, porém, é significativa pois tem o símbolo significa um referente concreto, onde na mecânica, esse símbolo, não possui significado.

A aprendizagem significativa conceitual tem uma forte relação com a representacional, onde conceitos indicam regularidades em eventos ou objetos. Esta ocorre quando o sujeito nota um padrão em eventos ou objetos, e passa a representá-los por determinado símbolo e não depende de um referente concreto do evento ou objeto para atribuir significado a esse símbolo.

A aprendizagem significativa proposicional, segundo Moreira (2010), vai ao encontro de entender o significado de novas ideias em forma de proposição, sendo que as aprendizagens representacional e conceitual são necessariamente prévias para ocorrência da proposicional. Para a ocorrência dessa, o estudante precisa primeiro assimilar um conceito, para então entender o significado da ideia por meio deste conceito.

A medida que a aprendizagem significativa acontece, conceitos são desenvolvidos, criados e diferenciados em consequência de sucessivas interações.

A diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são processos dinâmicos ocorridos na nossa estrutura cognitiva, podem também, ser tratados como princípios pragmáticos do conteúdo da matéria de ensino. São processos independentes e simultâneos, tanto na dinâmica da estrutura cognitiva como no ensino.

Moreira (2011) diferencia os processos da seguinte forma:

> A diferenciação progressiva é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos. (MOREIRA, 2011, p. 6)

A reconciliação integradora, ou integrativa, é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações.

Ao aprendermos de maneira significativa, devemos progressivamente diferenciar significados dos conhecimentos novos obtidos com o propósito de notar diferença entre eles, mas é necessário também advir a reconciliação integradora. Se apenas diferenciarmos os significados adquiridos, acabaremos por perceber tudo de maneira diferente. Se somente integrarmos os significados indefinidamente, findamos por perceber tudo igual. Os dois processos são síncronos e de suma importância para a construção cognitiva. A diferenciação progressiva está fortemente interligada com a Aprendizagem Significativa Subordinada, que é mais corriqueira, e a reconciliação integradora tende mais para o lado da Aprendizagem Significativa Superordenada, que tem menos frequência de ocorrência (MOREIRA, 2011, p. 7).

Com o intuito de buscar uma aprendizagem significativa sobre o conteúdo de integrais múltiplas, utilizaremos uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, que será definida na sequência.

2.2.3. Unidades de Ensino Potencialmente Significativa

No ensino conhecido como clássico, os professores apresentam aos alunos os conteúdos que eles supostamente devem aprender, e os alunos devem memorizar e reproduzir mais tarde as informações armazenadas. Algumas vezes, os dados apresentados passam a ser reproduzidos de forma mecânica e tecnicista, principalmente nas avaliações, e isso pode ocorrer em nível fundamental, médio ou até mesmo no superior.

Com a intenção de tentar modificar um pouco este processo, que é muito comum encontrarmos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, propomos neste trabalho, construir uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). Segundo Moreira (2011) essas unidades são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, ou seja, não mecânica, que podem proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos na sala de aula.

O objetivo de se construir uma UEPS, de acordo com Moreira (2011), é criar atividades de ensino com a intenção de facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos de conhecimento. A UEPS baseia-se em uma filosofia de que só há ensino se há evidências de aprendizagem significativa no processo, onde o ensino é o meio, a AS é o fim.

Em conformidade com Moreira (2011), as UEPS, tem como princípios que o conhecimento prévio é o fator que mais gera influência na aprendizagem significativa, perspectivas, sentimentos e comportamentos estão integrados no aluno que aprende. Essa integração é dada de maneira positiva e construtiva, quando a aprendizagem é significativa. Outros princípios importantes que são fundamentais destacar são, que o aprendiz decide se quer aprender significativamente determinado conhecimento, e, os organizadores prévios mostram a relação entre os novos conhecimentos com aquilo que já está consolidado na estrutura cognitiva do aluno.

Moreira (2006), nos traz a definição de organizador prévio segundo a visão de Ausubel:

> Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do próprio material a ser aprendido. Contrariamente à sumários, que são ordinariamente apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade, simplesmente destacando certos aspectos do assunto, os organizadores prévios são materiais apresentados num nível mais alto. Segundo Ausubel, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material posso ser aprendido de forma significativa. Ou seja, os organizadores prévios são uteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como "pontes cognitivas". (MOREIRA, 2006, p. 21)

Ausubel (2000) aponta que, a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação devem ser levadas em conta na organização do ensino. Para avaliar que algum conteúdo tenha sido assimilado de maneira significativa, devemos buscar indícios, pois o processo é progressivo. O papel do professor é o de provedor de situações problema, selecionando-as cuidadosamente, de organizar o ensino e mediar a captação de significados por parte do aluno.

Segundo Moreira (2011), para se construir uma UEPS, é necessário adotar os seguintes aspectos sequenciais (passos):

Quadro 1- Descrição dos passos de uma UEPS.

Passo:	Objetivo:	Descrição do Passo
1	Definição Inicial	Definir o tópico específico a ser abordado, identificando seus aspectos declarativos e procedimentais tais como aceitos no contexto da matéria de ensino na qual se insere esse tópico;
2	Identificação dos Conhecimentos Prévios	Criar/propor situação(ões) – discussão, questionário, mapa conceitual, mapa mental, situação-problema, etc. – que leve(m) o aluno a externalizar seu conhecimento prévio, aceito ou não-aceito no contexto da matéria de ensino, supostamente relevante para a aprendizagem significativa do tópico (objetivo) em pauta;
3	Preparação de organizadores prévios.	Propor situações-problema, em nível bem introdutório, levando em conta o conhecimento prévio do aluno, que preparem o terreno para a introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental) que se pretende ensinar. Estas situações-problema podem envolver, o tópico em pauta, mas não para começar a ensiná-lo; tais situações-

		problema podem funcionar como organizador prévio; são as situações que dão sentido aos novos conhecimentos, mas, para isso, o aluno deve percebê-las como problemas e deve ser capaz de modelá-las mentalmente; Estas situações-problema iniciais podem ser propostas através de simulações computacionais, demonstrações, vídeos, problemas do cotidiano, representações veiculadas pela mídia, problemas clássicos da matéria de ensino, etc., mas sempre de modo acessível e problemático.
4	Apresentação do Conteúdo	Uma vez trabalhadas as situações iniciais, apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, levando em conta a diferenciação progressiva, i.e., começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino, mas logo exemplificando, abordando aspectos específicos. A estratégia de ensino pode ser, por exemplo, uma breve exposição oral seguida de atividade colaborativa em pequenos grupos que, por sua vez, deve ser seguida de atividade de apresentação ou discussão em grande grupo;
5	Retomada do conteúdo em um nível crescente de complexidade com interação social para a negociação de significados	Em continuidade, retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (i.e., aquilo que efetivamente se pretende ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação (que pode ser através de outra breve exposição oral, de um recurso computacional, de um texto, etc.), porém em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação;
6	Conclusão do conteúdo em questão	Concluindo a unidade, dar seguimento ao processo de diferenciação progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa; isso deve ser feito através de

		nova apresentação dos significados que pode ser, outra vez, uma breve exposição oral, a leitura de um texto, o uso de um recurso computacional, um audiovisual, etc.; o importante não é a estratégia, em si, mas o modo de trabalhar o conteúdo da unidade; após esta terceira apresentação, novas situações-problema devem ser propostas e trabalhadas em níveis mais altos de complexidade em relação às situações anteriores; essas situações devem ser resolvidas em atividades colaborativas e depois apresentadas e/ou discutidas em grande grupo, sempre com a mediação do docente;
7	Avaliação	A avaliação da aprendizagem através da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado; além disso, deve haver uma avaliação somativa individual após o sexto passo, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência; tais questões/situações deverão ser previamente validadas por professores experientes na matéria de ensino; a avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, tarefas resolvidas colaborativamente, registros do professor) como na avaliação somativa;
8	Evidências de Aprendizagem Significativa	A UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema). A aprendizagem significativa é progressiva, o domínio de um campo conceitual é progressivo; por

		isso, a ênfase em evidências, não em comportamentos finais.

Fonte: Adaptado de Moreira (2011, p. 3).

Moreira (2011) também traz alguns aspectos transversais, onde cita que, em todos os passos acima, os materiais e as estratégias adotadas de ensino devem ser variados, os questionamentos devem ser preferidos em relação às respostas prontas. Além disso, ressalta que a discussão e as críticas devem ser incentivadas.

Ainda, em conformidade com Moreira (2011), durante uma UEPS, como tarefa de aprendizagem, pode ser solicitado aos alunos que eles proponham, situações problemas relativas ao tópico a ser trabalhado. Ainda, embora uma UEPS deva dar ênfase as atividades colaborativas de grupo, a mesma pode abordar momentos individuais de atividades.

2.3 TECNOLOGIAS DIGITAIS

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), segundo Kenski (2007), são definidas como sendo uma reunião de procedimentos e recursos tecnológicos que visam melhorar, facilitar e motivar o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos em geral, em qualquer nível de ensino. Vários dispositivos podem ser utilizados no ensino e a aprendizagem de Cálculo, como por exemplo o uso de computadores, uso de smartphones, softwares, dispositivos móveis, aplicativos e internet de acordo com a realidade de cada instituição e com um objetivo claro a ser trabalhado.

De acordo com Bicudo e Rosa (2013), estamos completamente rodeados pelo conhecimento científico e tecnológico. Pode-se pensar em tecnologia, como sendo um “ (...) conjunto de conhecimento e princípios específicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (KENSKI, 2007, p. 24), ou mesmo, olhar para as tecnologias, “ (...) não apenas como o produto final de um processo, mas sim como todo o processo que resultou este produto final, gerado por eventuais necessidades vivenciadas pelo homem” (ALMEIDA, 2015, p. 224), nota-se que ela já está entranhada no nosso cotidiano há algum tempo.

Focando nas TD, nota-se que as suas potencialidades permitem a chance de ampliação das possibilidades de comunicação e de informação, mudando o nosso modelo de existência e de reter conhecimento nos dias atuais.

> Da nossa sala, por meio da televisão ou do computador, podemos saber a previsão do tempo e o movimento do trânsito, informarmo-nos sobre as últimas notícias, músicas, os filmes e livros que fazem sucesso e muito mais. (KENSKI, 2012, p. 24).

O avanço das tecnologias disponíveis, possibilitou uma nova exploração e o início de cenários inovadores na educação, particularmente, no ensino e na aprendizagem de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Com esse progresso, o ensinar a aprender vêm tomando formas diferentes, com a integração das TD no cotidiano das instituições de ensino. Obviamente, não só em questões de facilidade como por exemplo na impressão de folhas, onde o ultrapassado mimeógrafo quase nem existe, substituído por computadores e impressoras, ou pela agilidade dentro de estabelecimentos como secretarias, para o andamento de processos e na fácil comunicação entre setores administrativos. Essas velozes transformações tecnológicas que temos disponíveis impões-nos a um novo ritmo na tarefa de ensinar e aprender (KENSKI, 2012).

Ao deparar com a presença das tecnologias, dentro do cenário educacional, Marin e Penteado (2001), citam que, o professor ganha um novo desafio para reconsiderar e amplificar seus conhecimentos, enfrentando demandas que vão além da conformação e da rotina de sala de aula, contudo que também constituem novas dificuldades, principalmente tratando-se do uso de determinada tecnologia. Observa-se que esse pensamento é de quase vinte anos, porém continua atual, visto que usar as TD no ensino, requer sempre uma maior preparação da parte do professor, pois os mesmos estão entrando em um campo de regiões muitas vezes desconhecidas.

Borba e Penteado (2001), chamam este passo como a saída de sua zona de conforto, que é o local onde o professor conseguiria prever o que os alunos vão ter dúvidas e o que vai ser questionado, ou seja, ele consegue controlar o ambiente com facilidade, mas ao ir em direção a uma “zona de risco”, local onde são predominantes a imprevisibilidade e a incerteza. Por se tratar de algo novo, podem surgir situações inesperadas por ele, embora a maior parte desses problemas, seja de simples resolução, muitas vezes o professor não se sente bem ao não conseguir resolver algo instantaneamente.

Do mesmo modo, os alunos quando são apresentados as TD no ensino, passam por metamorfoses, a começar do instante que exploram esses recursos, podendo-se findar a elaboração e/ou verificação de conjecturas, levando-os de encontro a desenvolver suas ideias, a ponto de seguirem em busca de novas conjecturas (BORBA, 2010). Ou seja, os alunos podem tornar-se agentes ativos investigativos, e não apenas seres receptivos, visto que vão de encontro a ideias que podem ir além do que imaginam, pois começam a pensar, refletir, observar e atribuir significados novos aos seus pensamentos (SCUCUGLIA, 2006).

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) caracterizam o desenvolvimento das TD no Brasil em quatro fases, ao longo dos anos. Esse desenvolvimento possibilitou que a forma como as observamos, assim como a maneira com que são utilizadas no processo de ensino. Os autores separam essas fases, a partir das tecnologias, das atividades matemáticas realizadas com elas, das perspectivas teóricas e de outros aspectos que caracterizam essas quatro fases (ALMEIDA, 2016).

Para os autores, a primeira fase das TD no Brasil é marcada fundamentalmente pelo uso do software LOGO, por volta do ano de 1985, embora, na década de 80 já estivesse sendo discutido as potencialidades de uso de calculadoras, tanto as simples quanto as científicas na Educação Matemática. O LOGO é um software baseado em linguagem de programação, voltada para a educação, fundamentado na filosofia construcionista de Papert (1980), e em pesquisas relacionadas à Inteligência Artificial. Segundo os autores:

> O design do LOGO permite, através da digitação de caracteres, o input de comandos de execução. A linguagem de programação é utilizada para a compreensão do significado de execução dos comandos em relação a sua representação com caracteres, bem como para formar sequências de comandos específicos que permitam uma execução sequencial do programa. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 20).

Além disto, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), indicam que a primeira fase das TD no Brasil é marcada também pelo surgimento da percepção de que as instituições de ensino poderiam e/ou deveriam render-se a ter laboratórios de informática. Segundo eles, o surgimento de projetos como o ‘Educomunicação’ Pelas Ondas do Rádio (EDUCOM), criado e difundido pelo Governo Federal, que tinha como visão principal o uso de tecnologias na formação de professores, em que o propósito dessas tecnologias era de “Catalisador para a mudança pedagógica” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 21), com a imagem de que as possibilidades apresentadas pelos computadores pudessem colaborar com abordagens transformadoras para a educação.

A segunda fase das TD no Brasil, “inicia-se no início dos anos 90, a partir da acessibilidade e popularização do uso de computadores pessoais” segundo os autores. Em concordância com eles, nessa etapa havia uma vasta variedade de perspectivas sobre como estudantes, professores e pesquisadores assimilavam a importância do papel do computador em suas rotinas pessoais e profissionais.

Nesta fase, inúmeros softwares com finalidades educativas foram desenvolvidos, por empresas, programas governamentais e pesquisadores. Também nessa etapa popularizou-se os cursos de formação continuada entre os professores, para dar suporte no uso destes softwares em sala de aula, onde inserção destas tecnologias exigia que eles, professores, saíssem de suas zonas de conforto, indo em confronto ao mundo novo provido pelas TD (BORBA; PENTEADO, 2001).

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) destacam, entre todos os softwares com finalidade educativa, aqueles voltados às múltiplas representações de funções, como por exemplo o Winplot, Mathematica e o Graphmatica, e o de Geometria Dinâmica, como o Cabri Géomètre e o Geometricks, além do uso de alguns Sistemas de Computação Algébrica (CAS), como o Maple11. Eles trazem que tais softwares como arquétipos, pois possuem como característica interfaces agradáveis e por possuírem uma natureza dinâmica, visual e experimental. (ALMEIDA, 2016)

A terceira fase das TD, no Brasil, tem início no fim dos anos 90 e início dos anos 2000, os autores apresentam como início 1999, mas destacam que não é uma data certa de transição, esta fase é marcada a partir da expansão do surgimento da internet. Segundo eles, a internet vem como um meio de comunicação entre professores e estudantes, ou seja, a internet passa a ser um agente de fontes de informação e comunicação. Além de tudo, ela também proporcionou a expansão dos cursos a distância com o objetivo da formação continuada de professores, sendo dadas pela disseminação de e-mails, fóruns de discussões ou até chats, por exemplo. Durante esta fase, é que começam a ser utilizados e propagados os termos “tecnologias informáticas”, “tecnologias da informação” e “tecnologias da informação e comunicação”. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 31). Os autores sinalizam que diversas questões de pesquisa que foram e continuam sendo investigadas, tendo como horizontes cursos ofertados online, como por exemplo: “Como organizar cursos online? Qual a natureza do pensamento matemático em cursos online? ” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 32), dentre outros.

Além do mais, segundo eles, esta fase encontra-se ainda em pleno desenvolvimento e, mesmo trazendo pesquisas relacionadas e ela, eles escrevem que as características referentes à terceira fase foram abordados com maior precisão de detalhes na obra de Borba, Malheiros e Amaral (2011).

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), afirmam que estamos vivenciando a quarta fase das TD, iniciada e meados de 2004, no qual ela possui como características o advento da internet rápida. De acordo com eles, é nessa fase que se tornou muito comum o uso do termo TD e ela é identificada por fortes características como: a integração entre a Geometria Dinâmica e as múltiplas representações (GeoGebra); a multimodalidade; tecnologias móveis ou portáteis (Smartphones, tabletes, etc.); e a Performance Matemática Digital. Estes pontos, em concomitância com os autores, provocam questionamentos e inquietações ainda a serem desenvolvidas, tornando essa fase um grande cenário a ser explorado, com inúmeras possibilidades de pesquisas.

A internet rápida foi uma das ferramentas que propulsionaram o avanço da quarta fase das tecnologias em Educação Matemática. Ela é a "atriz principal" em coletivos seres-humanos-com-mídias digitais, principalmente pelo fato de permitir a publicação e o compartilhamento de materiais e de narrativas multimodais e no que ela pode vir a acrescentar para uma interdisciplinaridade cada vez maior.

O conceito de "Performance Matemática Digital" (PMD) é introduzido como uma interdisciplinaridade entre performances de artes e o uso de tecnologias, como câmeras, celulares, edição de vídeos, etc., e o uso deles na Educação Matemática. As pesquisas sobre PMD tem explorado questões direcionadas a inovação tecnológico-artístico-educacional no ensino e aprendizagem de Matemática, podendo ser o precursor de uma linha de pesquisa totalmente nova, possibilitando uma grande exploração de uma área de estudos que ainda não havia sido investigada.

Gadanidis e Borba foram os precursores no estudo de PMD em um encontro que eles tiveram em 2005, Gadanidis vinha investigando questões que envolvessem o uso de artes e de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de matemática, ele buscava outras maneiras de desconstruir, por meio de artes e tecnologias, o "mau" estereótipo atribuídos as aulas de matemática entre professor e aluno. Nesse mesmo ano, ele e Borba iniciaram seu projeto intitulado "*Digital Mathematical Performance*" cujo objetivo central era explorar as possibilidades envolvendo essa área.

> (...) explorando e investigando novas questões sobre PMD, abrem-se janelas para a produção de novos conhecimentos em um terreno nativo, pouco explorado e emergente dentro da quarta fase das tecnologias em educação matemática. A PMD ainda é uma possibilidade diferenciada e com potencial inovador para o ensino e aprendizagem de matemática, uma alternativa para transformar a imagem negativa da Matemática escolar e dos matemáticos. (Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2014)

Embora essas atividades de PMD tenham uma natureza desconhecida e nova, ela está totalmente voltada as possibilidades diferenciadas de ensino e aprendizagem de matemática, mas também fortemente ligadas à aspectos mais amplos correlacionados a Educação

Matemática. Essas performances podem ser encontradas em diversos ambientes virtuais ou canais da internet, como o Youtube, ou mais recentemente o Facebook. Com o apoio da internet, a criação desses conteúdos, pode ser facilmente compartilhada em ambientes escolares, oferecendo meios para que a matemática seja comunicada publicamente por meio de artes, utilizando câmeras digitais, software de edição de vídeos e internet rápida.

Projetos desenvolvidos pelos autores, oferecem um refinamento na pesquisa sobre PMD em termos de teoria e prática, ao mesmo tempo que oferecem uma dimensão colaborativa entre estudantes, professores, administradores, pesquisadores, artistas e outros membros da comunidade escolar, como funcionários e pais e familiares de estudante, onde esses últimos, podem ter acesso aos conteúdos desenvolvidos pelos filhos, podendo assim, acompanhar o que eles vêm criando/estudando dentro do ambiente escolar.

Os autores citam o Youtube como uma das principais plataformas de compartilhamento das PMD. Nele podemos realizar buscas de palavras chaves que vamos encontrar diversos conteúdos já criados e compartilhados, utilizando músicas, peças teatrais, artes performáticas, entre outros. É citado como exemplo de PMD as músicas que, geralmente são criadas por professores de cursos pré-vestibulares utilizados para a memorização de certas regras e conteúdo, mas é frisado a importância de se ter em mente o objetivo de usarmos as PMD, pois elas devem ser usadas para gerar uma ideia central e ter um objetivo daquilo a ser transmitido, e não para uma simples "decoreba".

Considerando-se as PMD, busca-se explorar ideias que proporcionem surpresas matemáticas, ou seja, ideias inovadoras que busquem romper o estigma que a matemática é algo ruim ou péssimo, e transformá-los em conceitos relacionados a algo belo e maravilhoso. Uma forma de analisar essas PMD é descrever a atividade, enfatizando as ideias matemáticas e quais as artes envolvidas nela, verificando se há emoção envolvida nessa narrativa.

> (...) as PMD são uma forma de expressão que é produzida também por atores não humanos, no caso de diferentes interfaces produzidas pela internet rápida, que possibilitam a expressão do discurso multimodal de forma qualitativamente diferente de outras mídias. (Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2014)

Explorando as possibilidades que a banda larga pode oferecer, possibilitamos que alunos publiquem na forma de vídeos, imagens ou textos para um público que é composto não somente entre seus professores e colegas, mas também para um público de qualquer lugar do planeta. Assim sendo, alunos e professores são capazes de compartilhar conteúdos, que desmitifiquem a negatividade da Matemática. Dentro desse recurso multimodal, pode ser produzido conteúdo na forma de músicas, poesias, drama, PMD, histórias em quadrinho, materiais manipulativos, etc.

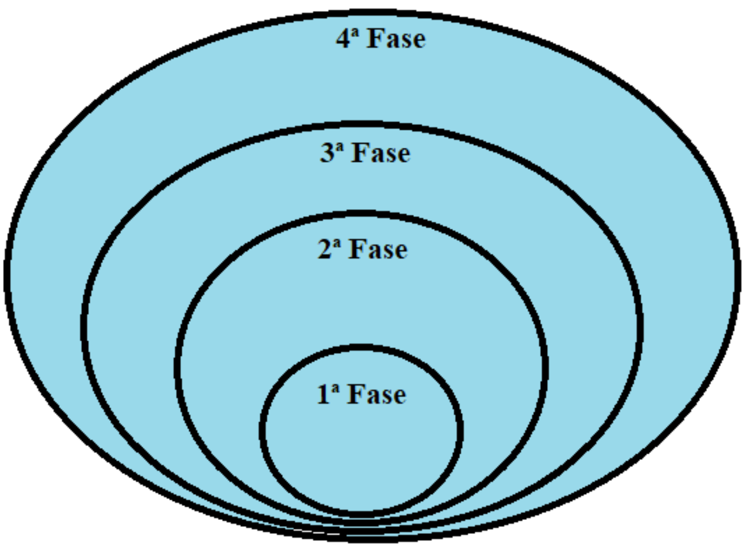
Em suma, os autores relatam que suas pesquisas com PMD, tem sido explorar um campo totalmente novo e pouco explorado, porém com muito potencial para o ensino e aprendizagem de matemática, pois as PMD influenciam os alunos a ver a matemática como algo satisfatório e prazeroso, tirando o estigma que a matemática é chata e algo maçante, apresentando uma interdisciplinaridade com outras áreas como artes e músicas. Assim, apresentando esses resultados em Ambientes Virtuais de compartilhamento, com ajuda da internet rápida, podendo trazer possibilidades diferenciadas para a produção coletiva de conhecimentos matemáticos em ambientes de aprendizagem, transformando aspectos sobre o pensamento matemático e sobre a imagem pública da matemática.

Apesar de que os autores caracterizem cada uma das quatro fases, eles complementam que uma nova fase tem início quando inovações tecnológicas permitem a construção de novos cenários, que sejam qualitativamente distintos para novas investigações matemáticas. Além do mais, eles apresentam que:

> [...] o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior. Há certa "sobreposição" entre as fases, elas vão se integrando. Ou seja, muito dos aspectos que surgiram nas três primeiras fases são ainda fundamentais dentro da quarta fase. Muitas das tecnologias "antigas" ainda são utilizadas. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 37).

Esses aspectos, estão ilustrados na figura 2.

Figura 2 - Fases das Tecnologias Digitais no Brasil.



Fonte: (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 38).

No quadro 2, adaptado de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), apresenta-se um resumo das principais características das TD no Brasil.

Quadro 2 - As quatro fases das Tecnologias Digitais no Brasil.

Fases	**Tecnologias**	**Natureza ou base tecnológica das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
1ª (1985)	Computadores; Calculadores simples e científicas.	LOGO, Linguagem de Programação	Construcionismo; Micromundo	Tecnologias Informáticas (TI)
2ª (Inicio Anos 1990)	Popularização dos computadores; Calculadoras Gráficas.	Geometria Dinâmica; múltiplas representações de funções; CAS.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; S-H-C-M.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
3ª (1999)	Computadores; laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; Google.	EaD online; Interação e colaboração online; Comunidades de aprendizagem.	Tesnologias da informação e Comunicação (TIC).
4ª (2004)	Computadores; Laptops; Tablets; celulares; internet rápida.	GeoGebra; Objetos Virtuais de Aprendizagem; Applets; Vídeos; Redes Sociais.	Multimodalidade; Telepresença; Interatividade; internet na sala de aula; PMD.	Tecnologias Digitais (TD); Tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: Adaptado de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p.39)

Este trabalho, na compreensão do autor, está situado em uma zona entre as terceira e quarta fases das TD, na medida que buscamos verificar as influências das tecnologias digitais em um curso de Engenharia Mecânica da UFSM, mais especificamente na disciplina de Cálculo B, na busca de indícios de aprendizagem significativa sobre o conteúdo de Integrais Múltiplas. Vale ainda ressaltar que, o posicionamento tomado dentro dessas fases é coerente, pois como citam os autores essas fases não são mutuamente excludentes, nem rígidas.

2.4 O ENSINO DE CÁLCULO MEDIADO PELAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nas últimas décadas, pode-se perceber uma grande busca de reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática. Inúmeros tópicos abrangem todos os níveis de Ensino (Fundamental, Médio e Superior) em aspectos relacionados ao sistema de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático.

> Pode-se afirmar, baseando-se na comunicação informal que ocorria entre professores de nossas melhores universidades, que a atenção para essa questão foi provocada pelo crescente índice de reprovação nas disciplinas básicas, em especial as disciplinas de Cálculo. (MALTA, 2004, p.41).

Especialmente sobre a disciplina de Cálculo, encontram-se na literatura muitas linhas de pesquisa já contempladas e outras em desenvolvimento. Estes estudos apresentam trabalhos desde conhecimentos matemáticos preliminares dos alunos (muitos deles sobre funções), passando pela análise de erros, aprendizagem significativa e também propostas metodológicas diferenciadas do ensino de Cálculo como, a título de exemplo, o uso da Modelagem como proposta de ensino, artifício à História e análise de livros didáticos e ainda o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (CAVASOTTO, 2010).

> As dificuldades relacionadas à aprendizagem da Matemática, o alto índice de reprovações dos alunos em disciplinas dessa área, as dificuldades de engenheiros em lidar com os conceitos matemáticos na vida profissional, são algumas variáveis que indicam a necessidade de examinar questões relacionadas ao tema “ensino-aprendizagem da Matemática para Engenharia” (SOARES, SAER, 2004. p.245).

No ensino de Cálculo, tornam-se necessários organizadores prévios, isto é, conteúdos ou conceitos bases que são necessários para desenvolver conceitos posteriores para a aprendizagem de um novo material. Na teoria da Aprendizagem Significativa, Ausubel denomina esses conceitos necessários, que o aprendiz carrega consigo de subsunçores.

A obtenção de novos significados pelo aprendiz descreve um processo de aprendizagem significativa. Desta forma ela deve ser preferida, pois favorece a retenção, aquisição de significados e a transferência de aprendizagem, tem como vantagens a ampliação das estruturas cognitivas do aprendiz, de forma que o conhecimento adquirido é mais duradouro, aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos ou materiais com maior facilidade, pois expande os seus subsunçores, facilitando a aprendizagem seguinte. (MANRIQUE, MEIRA, 2013).

Para que ocorra uma aprendizagem significativa, são necessárias algumas condições, são elas: primeiramente é preciso dar significado a lógica do novo material que é preciso aprender, deve ter uma forma clara e ser coerente, para facilitar o reconhecimento e estabelecer relações com os conhecimentos prévios do aprendiz. A segunda condição se refere a estrutura psicológica, onde o aprendiz deve ter uma estrutura de conhecimentos para que haja aprendizagem, onde essas estruturas devem se relacionar com os novos conhecimentos. Por último, o aprendiz precisa estar disposto a aprender, ou seja, não há aprendizagem, quando o aluno não está afim de aprender (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980).

Um dos grandes problemas encontrados pelos estudantes ao ingressar em um curso Superior, é a grande lacuna existente entre a matemática do Ensino Médio, e a matemática vista na universidade. Isso refere-se basicamente a dois fatores: os circunstanciais (currículo, sistema de acesso à Universidade, expectativa dos estudantes, avaliação do curso, etc.) e os matemáticos (relacionados a natureza da matemática). Na situação universidade-escola há uma transição do ponto de vista “elementar” para o “avançado”, resultando em ausências específicas em Álgebra, Cálculo e Geometria, cruciais para os alunos. Talvez, o raciocínio formal frio, que tem dominado a Educação Matemática seja uma falha, critérios de ensino baseados somente em estímulo e resposta não permitem uma elucidação de questões de aprendizagem no nível da psicologia cognitiva, imprescindível para o pensamento matemático avançado (SANTAROSA, 2013).

Com relação a utilização das TD, muitos pesquisadores da Educação Matemática defendem que as tecnologias informáticas são ferramentas de auxílio, nas relações de ensino e aprendizagem em sala de aula. Para Borba (1996; 2003), o uso de tecnologias informáticas em sala de aula pode consistir num mecanismo de mudança para o ensino de Matemática. Esta mudança não corresponde apenas à substituição do tópico de um conteúdo por outro e, sim, ao enfoque que será dado a um determinado tópico, a uma radical mudança na postura do professor, ou seja, como o professor passa a relacionar-se com alunos e com a máquina.

As leituras inicias sobre os temas abordados neste trabalho – Cálculo e TD – proposto nesta unidade, foi a fim de conhecermos o assunto estudado de nossa pesquisa e de criarmos um suporte teórico para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial com o uso das TD, buscando textos com uma convergência dos pontos de vistas dos autores e teóricos que discutem esses temas.

Para Borba (2003), as inserções de tecnologias informáticas, nas práticas da docência e no ensino de Matemática, acrescentam para mudanças que exigem novas posturas do professor, em todos os âmbitos da sala de aula, ou seja, mudança social, em questões metodológicas e pedagógicas utilizadas por ele.

Valente (2002, p. 29), apresenta que a mudança de postura deve ocorrer tanto por parte do professor, como de todo ambiente escolar, pois deve haver uma passagem de uma educação baseada na transmissão de informação, para um ambiente que propicie ambientes de aprendizagem onde o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento.

Nasser (2007), e Borba e Penteado (2003) escrevem que o ensino da Matemática e do Cálculo não tem valor somente pelo conhecimento do aluno, mas também pela prática do docente em utilizar metodologias diferenciadas e pedagogias do ensino. Segundo eles, geralmente a aprendizagem de conceitos de Cálculo ocorre diferentemente do que é prenunciado pela maioria dos professores, pois como cita Vinner (1991, p. 67, grifo do autor):

> Quando decidido sobre a pedagogia do ensino de matemática, tem-se que levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos.

Para o uso das TD no estudo do Cálculo, os autores indicam que elas sirvam como um aporte para a aprendizagem dos acadêmicos nessa disciplina e que, utilizando-as o professor pode desenvolver metodologias para que os aprendizes se apropriem de certos conceitos e definições, pois como acredita Machado (2008), as ferramentas computacionais são boas ferramentas para a resolução de problemas, pois através dessas tecnologias permitem aos alunos fazerem experimentos matemáticos c criar conjecturas, que de uma maneira geral, facilitam, em um curto intervalo de tempo, experimentações de diferentes situações e experimentações.

No ensino de Cálculo, Villareal (1999) em sua tese de doutorado nos apresenta que o computador pode ser utilizado tanto como um reorganizador quanto um suplemento dos estudantes para aprender matemática. Frente ao grande número de reprovações e abandonos por acadêmicos na disciplina de Cálculo, Mello (2002) apresenta na sua dissertação de mestrado que uma maneira de tentar reverter essas estatísticas, é o uso das tecnologias como ferramenta na sala de aula. Algumas outras leituras ainda, nos sugerem que alguns aplicativos para o traçado de gráficos, outros na aprendizagem da Geometria e de Álgebra, citando poucos exemplos como, o GeoGebra, Winplot, Cabri-Geometre, Graphmatica, Maple, são utilizados pelas diversas ferramentas operacionais para a construção de conceitos e aplicações em Matemática.

3. O CÁLCULO DO VOLUME, MASSA E CENTRO DE MASSA

Uma das disciplinas mais tradicionais, presente na grade dos cursos de graduação, como por exemplo, Engenharias, Física, Química, Ciências da Computação, dentre outros, é o Cálculo Diferencial e Integral. Esta é uma ferramenta matemática utilizada na resolução de diversos problemas envolvendo várias áreas do conhecimento, contribuindo significantemente para a evolução de diversas áreas da ciência.

Nas seções a seguir, apresentaremos uma breve conexão da história do cálculo, assim como uma contextualização do conteúdo de integrais que utilizamos na aplicação das atividades deste trabalho.

3.1. UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO

O Cálculo Diferencial e Integral possui uma longa história. Conforme Maor (2003) o aperfeiçoamento e o desenvolvimento das suas técnicas aconteceram com Newton e Leibniz no século XVII, os quais deram início aos fundamentos mais importantes para o ensino do Cálculo, como a formalização dos conceitos de Derivadas e Integrais.

Torres e Giraffa (2009) citam que o desenvolvimento do Cálculo se deve a uma contribuição coletiva, envolvendo grandes estudiosos desde a Grécia antiga, que teve sua origem com o Babilônicos, que utilizavam de tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas. Devido ao fato dessa ferramenta ser extremamente extensa, despertou assim o interesse de estudiosos em aperfeiçoar essa técnica desde os tempos remotos.

A transformação de problemas geométricos e problemas algébricos tornou-se possível quando foram introduzidas na matemática as coordenadas algébricas, por Descartes e Pierri de Fermat, no século XVII. A contribuição de Fermat, segundo Maor (2003) foi o que levou Laplace a considerá-lo o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial, mesmo que, ainda não possuísse a notação apropriada e o conceito de limites.

No século XIX, de acordo com Maor (2003), Cauchy introduziu o conceito de limite e derivada, contudo, desde os tempos de Leibiniz e Newton, no século XVII, o Cálculo Diferencial já era uma ferramenta de extrema importância nos mais diversos campos da ciência, devido ao fato de possuir uma gama de aplicabilidades. Quando consideramos o Cálculo Integral, ele surge na história relacionada com problemas de quadraturas, no qual esses problemas eram enfrentados pelos gregos na medição de superfícies para determinar suas áreas, em sua grande maioria, relacionadas à área do quadrado.

Conforme Torres e Giraffa (2009), quando mencionamos os gregos, uma das maiores contribuições para o Cálculo surgiu em 255 a.C. com Arquimedes. Ele criou o teorema para a quadratura da parábola e o método da exaustão para determinar à área do círculo, em que surge uma das primeiras aproximações do número ‘pi’.

Os mesmos autores ainda afirmam que o tema sempre gerou muita discordância entre os estudiosos Newton e Leibiniz, cada um possuía um olhar sobre o cálculo. O primeiro via-o como algo geométrico, o outro, como analítico. Neste trabalho, pretendemos apenas dar uma contextualização sobre essa história, pois quando vamos mais a fundo neste assunto, vemos que diferentes livros trazem diferentes perspectivas sobre o mesmo.

Na próxima seção, apresentaremos os métodos modernos do Cálculo Infinitesimal, criados por Newton, Leibniz e Lagrange, apresentando a base teórica dos recursos que foram utilizados como base para a pesquisa.

3.2. CONTEXTUALIZANDO AS INTEGRAIS

Quando os conceitos de derivadas são iniciados nos livros de Cálculo, geralmente, são utilizados problemas envolvendo reta tangente a uma curva e ou problemas relativos a velocidade, que é a ideia central do Cálculo Diferencial. Já na introdução da ideia das integrais de uma variável, são utilizados problemas de área e de distância, onde são operados na construção da ideia de integral definida, que é o conceito básico do Cálculo Integral. Essa teoria do Cálculo Integral, é usada para resolver problemas relativos a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre um dique, trabalho, excedente de consumo e beisebol, entre outros (STEWART, 2013).

Os conceitos de integrais de uma variável é visto primeiramente na disciplina MTM 1019 – Cálculo A, nos cursos de Engenharia. Já na disciplina MTM 1020 - Cálculo B da UFSM, estendemos a ideia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Esses conceitos são utilizados para calcular volumes, área de superfícies, massas e centroides de regiões mais gerais. As integrais duplas também podem ser usadas para calcular probabilidades quando duas variáveis são aleatórias. Ao tratarmos desse tipo de integrais, temos que destacar a importância da utilização de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, que simplificam o cálculo de integrais múltiplas em certas regiões.

Stewart (2013) traz a seguinte definição para uma integral definida:

> Se f é uma função contínua definida em um intervalo $a \leq x \leq b$, onde dividimos ele em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0\,(= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é dada por
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$
> desde que o limite exista e dê o mesmo valor para as possíveis escolhas de pontos amostrais. Esse símbolo que utilizamos para trazer a definição de integral, foi introduzido por Leibniz, ele é um S alongado e foi assim escolhido por a integral se tratar de uma soma. (STEWART, 2013, p.337).

Como já mencionado, quando trabalhamos com o Cálculo Integral introduzimos integrais definidas relacionando com conceitos de área. O teorema fundamental do Cálculo, é o teorema que estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: O Diferencial e o Integral, e por isso recebe este nome. Segundo Stewart (2013), foi o mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630 – 1677), que descobriu que esses conceitos estão estreitamente relacionados.

Já Newton e Leibiniz exploraram essa ligação, de que a derivação e a integração são processos inversos, usando-a para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Eles que desenvolveram a ideia do Teorema Fundamental do Cálculo que os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente do que desenvolver os limites pelas somas vista anteriormente na definição do Stewart.

O Teorema Fundamental do Cálculo, como já mencionado, é uma ferramenta que facilita o desenvolvimento do cálculo de integrais definidas, que Stewart (2013) o enuncia da seguinte forma:

> Se f for contínua em $[a, b]$ então
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
> onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.
>
> De modo semelhante as integrais simples, podemos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Assim a integral dupla de f sobre o retângulo R é
> $$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A$$
> se esse limite existir. Onde o objetivo é determinar o volume de um sólido S (STEWART, 2013, p. 354).[2]

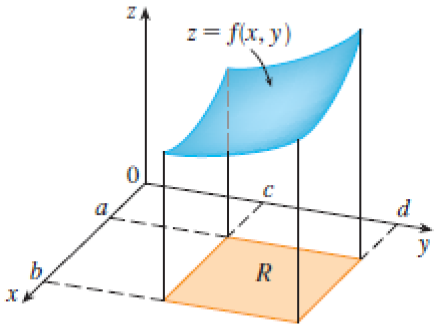
[2] Integrais Duplas fornecem o volume somente quando a função $f(x, y) \geq 0$.

O Teorema Fundamental do Cálculo, é uma ferramenta que utilizamos para facilitar o processo de integração, ao nos depararmos com integrais múltiplas, onde, esse teorema também pode ser aplicado para esse tipo de integração, pois estamos integrando unidimensionalmente:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Isso significa, que primeiro integramos com relação à variável y de c até d e depois em relação à x, de a até b, onde a região R é um retângulo, $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, como ilustra a figura 3.

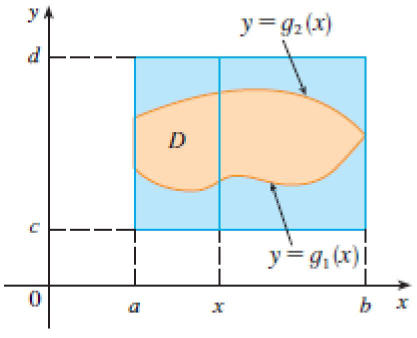
Figura 3 - Região R retangular no plano xy.



Fonte: (STEWART, 2013, p. 874).

Nem sempre temos região de integração um retângulo, podemos ter uma forma mais geral, como por exemplo, a Figura 4. Neste caso, podemos escrever as integrais duplas sobre uma região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ como a seguir:

Figura 4 - Região D qualquer no plano.



Fonte: (STEWART, 2013, p. 888).

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \int_{a}^{b}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

Um recurso muito utilizado nas integrais duplas é a transformação de Coordenadas Retangulares para Coordenadas Polares, no qual essas podem ser relacionadas pelas seguintes equações:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta,$$

onde $R = \{(r,\theta)|a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ que é chamado de retângulo polar.

Da mesma forma que é definida integral para funções de duas variáveis, podemos estender esse processo para integrais de três variáveis, formando uma integral Tripla. Em que a definição inicial, segundo Stewart (2013): A integral de f na região espacial B é

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*}\right)\Delta V$$

se esse limite existir. Assim como, nas integrais duplas, uma integral tripla sobre uma região E qualquer do espaço é dada por

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

Em integrais duplas utilizamos como ferramenta facilitadora para o cálculo delas em regiões circulares, que é a transformação da região em coordenadas polares, nas integrais triplas, temos duas delas, que são as coordenadas cilíndricas, que nada mais é que uma extensão das coordenadas polares para sólidos em três dimensões e as coordenadas esféricas.

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço pode ser representado por suas coordenadas da seguinte maneira:

$$(x,y,z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$$

podendo escrever uma integral tripla então como

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int\limits_{h_1(rcos\theta,rsen\theta)}^{h_2(rcos\theta,rsen\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta, z)rdzdrd\theta.$$

Segundo Stewart (2013), quando estamos tratando de regiões esféricas ou cônicas, um sistema de coordenadas tridimensionais útil é o sistema de coordenadas esféricas, pois ele simplifica o cálculo dessas integrais. As coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) de um ponto P no espaço, são relacionados com as coordenadas cartesianas (x, y, z) através das seguintes relações:

$$(x, y, z) = (\rho\ sen\phi\ cos\theta, \rho\ sen\phi\ sen\theta, \rho\ cos\phi).$$

Consequentemente, chegamos à seguinte fórmula para integração tripla em coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\ sen\phi\ cos\theta, \rho\ sen\phi\ sen\theta, \rho\ cos\phi)\rho^2 sen\phi\ d\rho d\theta d\phi.$$

Onde, E é a cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b.\ \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq b\}.$$

Quando falamos em aplicações de integrais, devemos lembrar que uma integral $\int_a^b f(x)dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b, assumindo que $f(x) > 0$, ou então a integral dupla $\iint_D f(x, y)dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D, isso quando $f(x, y) > 0$. A interpretação para a integral $\iiint_E f(x, y, z)dV$, não é muito útil, pois isso representaria um “hipervolume”de algum objeto em quatro dimensões, e claro, com a noção que temos, de impossível visualização. Nesta situação, temos um caso especial, onde a partir de integrais triplas podemos calcular o volume de uma figura em três dimensões, que é quando $f(x, y, z) = 1$, ou seja, $V(E) = \iiint_E dV$.

Inicialmente apresenta-se aplicações das integrais duplas, podemos considerar lâminas com densidades variáveis, ou seja, podemos dizer que se uma lâmina ocupa uma região D do plano xy e que sua densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D. Isso significa que $\rho(x, y) = \frac{\Delta m}{\Delta A}$, onde Δm e ΔA são, respectivamente, a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y).

Para determinar a massa de uma lâmina, utilizamos a mesma ideia anteriormente comentada, dividimos a região R em sub-retângulos, onde as dimensões do mesmo se aproximam de 0. Isso significa que a massa total da lâmina é dada por

$$m = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D \rho(x, y)dA.$$

Ainda, segundo Stewart (2013):

> Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidade de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x,y)$ em um ponto (x,y) em D, então a carga total Q é dada por $Q = \iint_D \sigma(x,y)dA$ (STEWART, 2013, p. 901).

Outra aplicação é encontrar o centro de massa de uma lâmina de densidade variável, em uma região D, e que tenha $\rho(x,y)$ como função densidade, o momento de uma partícula em relação a um eixo como o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Assim podemos definir o momento da lâmina inteira em relação ao eixo x como:

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dA,$$

da mesma forma, o momento em relação ao eixo y, é:

$$M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dA.$$

Sendo assim, definimos centro de massa $(\bar{x},\bar{y})$ de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. Onde isso significa fisicamente, que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa, permanecendo assim, na horizontal, quando equilibrada em seu centro de massa.

Em conformidade com Stewart (2013), as coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x,y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dA,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dA,$$

onde m, é a massa dada.

Essas aplicações de massa e centro de massa que foram elencadas, podem ser imediatamente estendidas para integrais triplas, por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x,y,z)$, em unidades de volume, em qualquer ponto (x,y,z), então sua massa é

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)dV$$

e seus momentos em relação aos três planos são

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x,y,z)dV.$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x,y,z)dV,$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x,y,z)dV$$

e o seu centro de massa está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m},$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m},$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Com isso, foi realizado aqui uma breve explanação sobre os conteúdos que se trabalhou com os acadêmicos nessa pesquisa. Nos próximos capítulos, explicitamos como esses conceitos foram aplicadas e os resultados obtidos neste trabalho.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho, pode ser olhado para a natureza de pesquisa, como aplicada, pois de acordo com Gerhadt (2013, p.17) procura-se “gerar conhecimentos para a aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos”.

Quanto a abordagem, podemos classificar o problema de pesquisa como quantitativa-qualitativa, no momento em que relaciona os significados e a quantificação. Gerhadt (2013) respalda esta classificação contrapondo que a pesquisa quantitativa-qualitativa é aquela que

> [...] envolve um grande número de relações, significados, processos, valores e atitudes, que requerem uma contextualização, e são complexos para serem definidos em variáveis numéricas, porém há momentos em que poderá ser necessário recorrer a variáveis quantificáveis (quantitativo) para exprimir a ocorrência de um determinado fenômeno, ou para conferir aos fatos uma dimensão mais precisa (GERHADT, 2013, p. 18).

Tendo em consideração os objetivos, a pesquisa pode ser considerada do tipo descritiva, pois para Gil (2010), acontece descrição de característica de uma certa população por meio de uso de questionários e observações.

Quanto os procedimentos técnicos, pode ser classificada como um estudo de caso, já que, de acordo com Gil (2017).

> O estudo de caso é uma modalidade de pesquisa amplamente utilizada nas ciências biomédicas e sociais. Consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetivos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento, tarefa praticamente impossível mediante outros delineamentos já considerados (GIL, 2017, p. 37).

Ainda, segundo Gil (2017), um estudo de caso tem como propósitos:

> a) explorar situações da vida real cujos limites não estão claramente definidos;
> b) preservar o caráter unitário do objeto estudado;
> c) descrever a situação do contexto em que está sendo feita determinada investigação
> d) formular hipóteses ou desenvolver teorias; e
> e) explicar as varáveis causais de determinado fenômeno em situações muito complexas que não possibilitam a utilização de levantamento e experimentos. (GIL, 2017, p. 38)

Nos próximos tópicos será retratado como deu-se o contexto da pesquisa, descrevendo os sujeitos, contextualizando o curso de Engenharia onde foi aplicado, os instrumentos de pesquisa, como deu-se as análises dos dados e as considerações éticas adotadas.

4.1. CONTEXTO DA PESQUISA

Participaram da pesquisa os alunos regularmente matriculados e frequentando a disciplina MTM 1020 – Cálculo B, do curso de graduação em Engenharia Mecânica da UFSM, Campus Santa Maria. A escolha desta instituição e em particular desta turma, deu-se pelo fato de o pesquisador trabalhar como professor substituto no Departamento de Matemática da UFSM, e estar ministrando a disciplina para esses alunos na época da pesquisa.

O critério de inclusão/exclusão inicial foi os alunos estarem cursando a disciplina de Cálculo B e estarem em sala de aula na data em que o questionário for aplicado. Observa-se que turma possui um total de 60 alunos, com matrículas ativas, no momento da redação deste trabalho.

4.1.1 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos que participaram dessa pesquisa foram os alunos regularmente matriculados na disciplina MTM 1020 – Cálculo B, ofertada para os acadêmicos do curso de Engenharia Mecânica da UFSM, mas na turma, haviam alunos dos mais diversos cursos superiores desta instituição.

4.1.2 O Curso de Engenharia Mecânica da UFSM

O curso de Engenharia Mecânica na modalidade Bacharelado – Presencial tem dois períodos para ingresso, sendo ofertadas 50 vagas anuais (sendo 25 vagas para o primeiro semestre letivo, e outras 25 para o segundo semestre), os alunos tem acesso ao curso através do ingresso definido pela UFSM e através dos Processos de Transferência e Reingresso.

O currículo atual do curso, está em vigor desde 2005, e é composto por um total de 59 disciplinas, entre elas o Cálculo Diferencial e Integral A e B, distribuídas em 8 semestres, perfazendo um total de 3660 horas aula, nelas estão incluídas 285 horas correspondentes ao estágio curricular obrigatório, mais as disciplinas complementares de Graduação.

Segundo o Projeto Político Pedagógico (PPP) do curso de Engenharia Mecânica:

> A responsabilidade do processo ensino-aprendizagem deve ser estabelecida em termos da medida do aproveitamento dos alunos por docentes motivados e

> devidamente instrumentados para estabelecer um processo criativo no ensino profissional, possibilitando que todas as etapas, desde a teoria dos primeiros anos até as disciplinas aplicadas, devidamente integradas entre si, permitam que o futuro profissional, com fundamentos sólidos, possa desempenhar profissionalmente com motivação e sucesso. (UFSM, 2019)

No PPP do curso, encontramos alguns objetivos específicos que vão ao encontro do tema desse trabalho, como por exemplo, ele apresenta que o aluno deve conceber, projetar e construir máquinas, motores e equipamentos mecânicos; conceber e supervisionar processos de fabricação mecânica e ainda projetar, implementar e gerenciar sistemas de controle da produção e fabricação mecânica (UFSM, 2019).

Ainda, como competências e habilidades, cabe destacar que o projeto do curso apresenta que se deve conhecer a aplicar a prática profissional vigente na realidade social onde exercerá sua atividade, e que ainda o engenheiro mecânico deve elaborar, planejar, coordenar e supervisionar projetos de engenharia mecânica, dominar técnicas computacionais e de comunicação oral e escrita, assim como ler, interpretar e expressar-se por meios gráficos e trabalhar em equipes multidisciplinares.

A disciplina de Cálculo B, na engenharia, tem como objetivo:

> Compreender os conceitos de limite, diferenciabilidade e integração para funções de várias variáveis, bem como suas aplicações. Compreender e aplicar os conceitos de derivada e integral de funções vetoriais e aplicar os teoremas da divergência e Stokes em alguns casos particulares. Compreender soma infinita como extensão de soma finita e as noções de convergência e divergência. (UFSM, 2019)

Esta disciplina é dividida de maneira geral em quatro unidades, segundo a ementa, sendo elas Sequências e Séries, Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas e Cálculo Vetorial.

4.1.3 Instrumentos

Para a realização dessa pesquisa, deu-se pelo uso dos seguintes instrumentos:

- **Questionário Sócio Educacional**: Este questionário buscou a identificação social e educacional dos alunos participantes desta pesquisa. Nele, questionamos através de um Formulário Online do Google, qual o nome dos participantes (este não obrigatório), as idades, o gênero, quando foi a conclusão do Ensino Médio, como ele foi realizado, qual semestre se encontra no curso, a qual curso pertence de origem, por que da escolha do curso e qual a opinião em relação ao tema de pesquisa abordado neste trabalho.

- **Teste diagnóstico**: visando verificar quais o subsunçores os alunos da disciplina de Cálculo B evidenciam, a partir de questões selecionadas pelo autor deste trabalho.

Este teste diagnóstico foi dividido em três parte, sendo a primeira parte com um foco em integrais indefinidas, definidas, cálculo de área e regras de integração. A segunda parte uma busca pelos conhecimentos prévios de geometria analítica, que são necessários para as funções de várias variáveis e na terceira parte saber como foi a experiência do aluno com a disciplina de Cálculo A, a quanto tempo cursou-a e se havia alguma noção de aplicação do conteúdo no curso de graduação que está cursando.

- **UEPS**: Esta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, foi elaborada com o propósito de expor alunos do curso de Engenharia Mecânica, a uma situação de Aplicação de Integrais Múltiplas, que após terem assistido as aulas expositivas sobre tal conteúdo, resolveram um problema aplicado, com o intuito de verificar indícios de aprendizagem significativa, em um conteúdo que grande parte deles possui muita dificuldade de compreensão. A turma foi dividida em 15 grupos de até quatro membros, onde cada grupo resolveu, um problema selecionado pelo professor, sorteado aleatoriamente.

Para realizar tal sorteio, foi solicitado aos alunos que comentassem em um fórum de discussão, disponibilizado no Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle, os nomes dos quatro integrantes do grupo nomeando o tópico de Grupo “x” (Grupo 1, Grupo 2, ...), onde o professor, respondeu o tópico em seguida, conforme a ordem dos grupos.

Assim, neste trabalho com a finalidade de obter uma ideia do perfil dos alunos, que se utilizará de questões fechadas e abertas. O teste diagnostico foi elaborado a partir de diversas fontes (STEWART (2013); GONÇALVES e FLEMMING (2012); ANTON (2007)), sendo potencialmente significativas.

Tal teste tem por finalidade verificar quais os erros mais comuns ao resolver integrais definidas e indefinidas e a existência (ou não) de subsunçores (foram testados aqui, os conceitos de integral definida e indefinida, as técnicas de integração e ainda algumas figuras espaciais da geometria analítica), tal verificação encontra-se no ‘Apêndice A’ desta pesquisa. Acerca dele, foi realizado uma análise sobre quais conceitos apresentaram mais dificuldades a serem resolvidos, como por exemplo esboçar o gráfico de uma figura espacial em três dimensões, ou quais técnicas de integração apresentaram mais dificuldades.

Com base na correção realizada, foi elaborada uma atividade, que se espera ser potencialmente significativa, baseada nas UEPS apresentadas por Moreira (2011) e discutidas no referencial teórico deste trabalho, que contou com o uso de TD.

4.1.4 Análise dos dados

Para a análise do questionário, foi realizada uma análise quantitativa, que segundo Diehl (2004) tal abordagem cita como estratégia o uso da quantificação, tanto na coleta quanto na análise das informações, fazendo utilização de técnicas estatísticas, com foco em resultados que evitem possíveis distorções de análise e interpretação, possibilitando uma maior margem de segurança, que de modo mais geral, o tratamento com análise quantitativa é passível de ser medida em escala numérica, onde enfatizará números, que permitam verificar a aceitação ou não das hipóteses levantadas.

Quanto aos conhecimentos prévios, foi realizada uma análise do teste realizado, em termos qualitativos, categorizando as respostas, conforme o que era solicitado em cada um dos itens.

Na análise da principal atividade da UEPS desenvolvida, além do aporte teórico da TAS, foi utilizada a teoria PMD (SCUCUGLIA, 2012) que tem como fundamento meios de ensino e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos, a serem analisados do ponto de vista didático-pedagógico. As PMD analisadas neste trabalho foram produzidas a partir da produção dos trabalhos realizados pelos alunos.

4.1.5 Considerações éticas da pesquisa

Para participação na pesquisa, todos alunos que cursaram a disciplina foram convidados, que foi explicado sobre o que se refere o trabalho, sobre o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, ressaltando que poderiam não participar caso não quisessem. Aos que concordaram em participar foi solicitado que respondessem ao questionário e ao teste diagnóstico. Os mesmos também foram informados que a qualquer momento poderiam solicitar a exclusão de seus dados da pesquisa e que suas identidades foram preservadas, sendo compartilhada somente entre os pesquisadores. Durante o período da pesquisa, todos os alunos da turma concordaram em participar, e ficou combinado que o trabalho final faria parte da avaliação da disciplina.

4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A UEPS DESENVOLVIDA

Segundo Moreira (2011), as UEPS são desenvolvidas em oito etapas/passo. A seguir descreveremos todos os passos, adaptando-os ao nosso contexto de pesquisa.

O primeiro passo, foi definir qual o tópico a ser abordado, como já falado anteriormente, o tópico abordado foide Integrais Múltiplas presente na disciplina MTM 1020 – Cálculo B, por se tratar de um conteúdo que gera muita dificuldade aos graduandos dos mais diversos cursos de Graduação. Após definido o tópico, o segundo passo passa a ser a identificação dos conhecimentos prévios, para tal, aplicamos um questionário que denominamos de Teste Diagnóstico, para verificar quais os subsunçores os acadêmicos possuem em relação as técnicas de integração, vistas na Disciplina de Cálculo A, e alguns conceitos de Geometria Analítica, que segundo o currículo da Engenharia Mecânica, deve ser visto na disciplina de Álgebra Linear.

Ao lecionar a disciplina, os passos três a seis, deram-se de maneira progressiva durante as aulas ministradas no período de 13 de setembro até o dia 16 de outubro de 2018, totalizando 13 dias letivos de aula, com uma carga horária de 26 horas aula, para então no dia 17 de outubro ser realizada uma avaliação de forma tradicional referente a este conteúdo.

O passo sete deu-se através de UEPS implementada, após visto o conteúdo programático, eles serão submetidos a seguinte prática, como por exemplo a atividade do Grupo 1:

“ Vamos supor que você acaba de ser contratado pela empresa Schmidt Indústria Mecânica LTDA, e seu chefe recebe uma encomenda de uma peça cuja especificação foi realizada utilizando equações matemáticas. Ele manda você enviar um e-mail retornando à especificação alegando ser impossível que a peça seja usinada. Você, novo na empresa, querendo mostrar para o que foi contratado explica ao seu superior, que através de integrais múltiplas e suas aplicações é capaz de fazer a usinagem da mesma. ”

A encomenda continha as seguintes especificações:

- ⇨ **No primeiro octante delimitado por $y + z = 2$ e pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.**[3]

Etapa 1) Nesta primeira etapa você deverá determinar o volume, a massa e o centro de massa do sólido, utilizando os conceitos de integrais múltiplas estudados na disciplina MTM 1020 – Cálculo B. Considere que a peça deverá é de Aço, e sua densidade é de 7,85g/cm.

[3] Os problemas propostos aos outros grupos estão disponíveis no Apêndice B desse trabalho.

Etapa 2) Agora, com um software da sua escolha (GeoGebra, AutoCad, SolidWorks, etc...), desenvolva o esboço da peça dada, e verifique com os resultados obtidos anteriormente.

Etapa 3) Nesta última etapa, você deverá elaborar um vídeo curto, apresentando todos os passos anteriores. Use sua criatividade, Movie Maker, Power Point, Encene, etc... Apresente como se seu emprego hipotético realmente dependesse disso.

O oitavo e último passo da UEPS é a busca de evidências de aprendizagem significativas, que serão feitas também em forma de questionário a ser disponibilizado por meio digital[2] e análise dos vídeos produzidos.

5. ANÁLISES

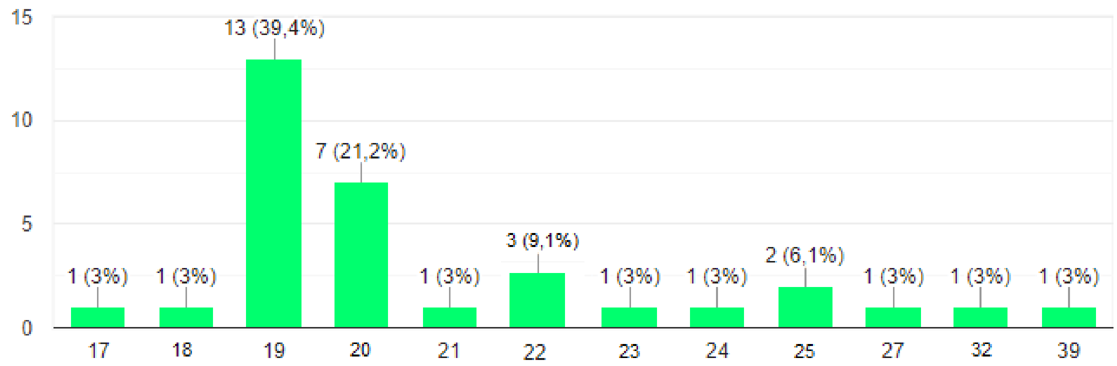
Nos tópicos a seguir, serão apresentadas análises dos resultados obtidos na realização da pesquisa. As etapas desta, deram-se com um questionário sócio educacional, com o objetivo de conhecer melhor o público desta pesquisa, os resultados quantitativos encontrados no teste diagnóstico de conhecimentos prévios e a análise final das atividades da UEPS que foram propostas à turma.

5.1. QUESTIONÁRIO SÓCIO EDUCACIONAL[4]

A seguir, faremos uma análise sobre o perfil dos participantes desta pesquisa, que foi disponibilizado um questionário sócio educacional para os alunos, que foram convidados a responde-lo online, através do Google Formulário. Ao total foram contabilizadas 33 respostas de onde obtivemos os seguintes dados, esse número foi o de alunos que participaram desta etapa, ela ocorreu após o término do semestre letivo, e após as atividades aplicadas.

Os alunos participantes desse questionário possuem faixa etária de alunos de 17 a 39 anos, onde majoritariamente encontram-se entre 19 e 20 anos (Figura 4)

Figura 5 - Idade do Público Participante.

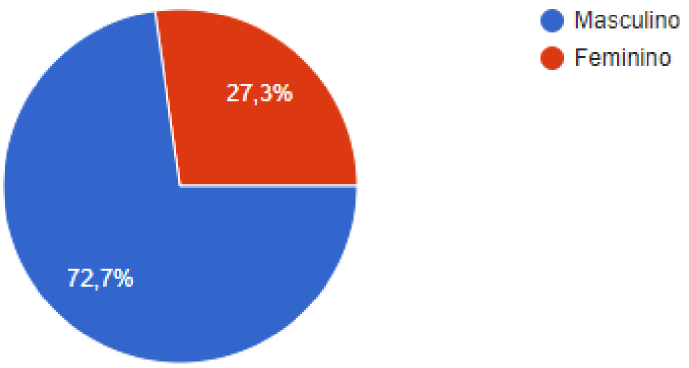


Fonte: O Autor.

Os sujeitos da pesquisa ssão preponderantemente masculino (Figura 5).

[4] Questionário Disponível em: https://forms.gle/NshQo9gqjUXEPsSy5

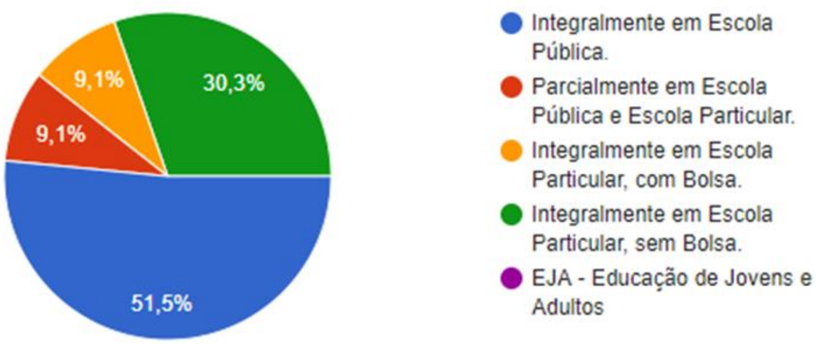
Figura 6 - Gênero do Público Participante.



Fonte: O Autor

Ao questionarmos sobre como os alunos realizaram seus estudos, Ensino Fundamental e Médio, podemos notar que em sua grande maioria, são oriundos de Escolas Públicas, tanto no Fundamental, quanto no Ensino Médio, conforme Figura 6.

Figura 7 - Como os alunos realizaram o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

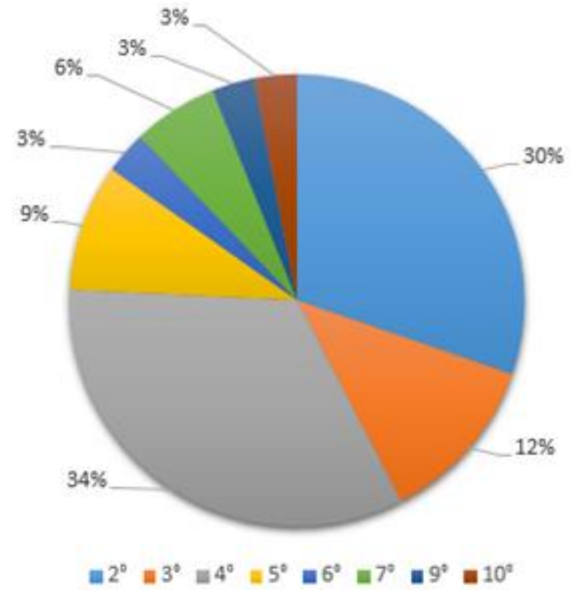


Fonte: O Autor.

As atividades propostas neste trabalho fizeram parte da disciplina MTM 1020 – Cálculo B, onde é sugerida uma sequência de disciplinas para os alunos cursarem no segundo semestre, entre essas disciplinas estão Álgebra Linear e Cálculo B. Mas na prática não é bem isso que ocorre, (Figura 7) pois os alunos que cursaram no segundo semestre letivo de 2018 estavam nos mais variados semestres, seja por reprovação, seja por não ter seguido a sequência aconselhada.

Como nota-se, a maior parte encontra-se no 4º semestre, mas a maior concentração dá-se entre o 2° e o 5° semestre, tendo alunos até no 10° semestre de curso.

Figura 8- Semestre que o aluno se encontrava durante o tempo da pesquisa.



Fonte: O Autor.

Em suma, podemos ver que a disciplina de Cálculo B teve o mais variado público, onde a faixa etária é bem ampla, mas a maior parte do público são de jovens de 19 e 20 anos, que o público é preponderantemente masculino, como é comum nos cursos de Engenharia Mecânica, o que foi curioso notar, é que a maior parte da turma, não se encontra no semestre recomendado para a mesma.

Observamos que esse questionário ainda possui uma última pergunta que diz respeito a atividade realizada na disciplina MTM1020. A resposta a esse questionamento será descrita na seção destinada as conclusões das análises da UEPS.

5.2. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

O questionário sobre os conhecimentos prévios dos alunos, referente a disciplina de Cálculo B, foi aplicado no mês de setembro de 2018 e respondido por 43 alunos que se voluntariaram a participar da pesquisa. O questionário aplicado encontra-se no Apêndice A.

5.2.1 Análise dos Dados Obtidos no Teste Diagnóstico

O questionário foi dividido em três partes, onde na primeira foi focado nos conhecimentos prévios referentes aos conceitos e propriedades de integrais que os alunos estudaram na disciplina de Cálculo A, que é um pré-requisito para o Cálculo B. Ou seja, o objetivo foi de verificar os subsunçores necessários referente as propriedades e métodos de resolução de integrais, fazendo então, uma sondagem daquilo que estava ancorado no sistema cognitivo dos alunos.

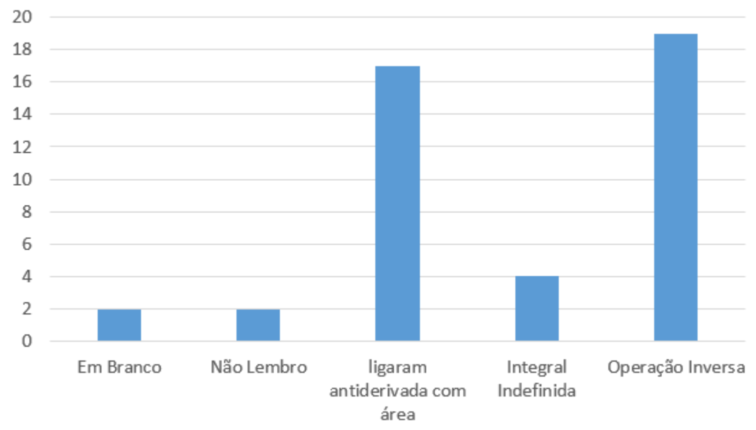
A segunda parte do questionário, focou nos conceitos de Geometria Analítica, que o autor julgou, com base em pesquisas e experiência em ministrar tal disciplina, necessários para construir e dar significado aos conceitos estudados. Ou seja, verificou-se os conceitos que consideramos ser base para a disciplina de Cálculo B ligados com a Geometria Analítica, onde foram dispostas algumas equações, para perceber se os aprendizes conseguiam relacioná-las com gráficos de funções em três dimensões. Observa-se que os conceitos de Geometria Analítica são estudados na disciplina de Álgebra Linear, no segundo semestre do curso de Engenharia Mecânica.

Já a terceira parte foi focada na experiência que os alunos tiveram ao cursar a disciplina de Cálculo A. Ou seja, foi um questionário mais pessoal, voltado para verificar a opinião dos estudantes sobre a disciplina de Cálculo A.

Na primeira questão da parte 1, foi questionado aos alunos: “O que é uma antiderivada? O que ela representa? ”,

Recorda-se que, uma antiderivada é a operação inversa da derivação, é o processo de integração que fornece uma “família de funções”, ou seja, uma função para cada valor da constante de integração $\boldsymbol{c}$. (STEWART, 2013). A figura 8, ilustra que 19 dos 43 participantes, realizaram esta ligação, mas ela é confundida ainda, com a ideia de Integral Definida, que representa uma área abaixo da curva $\boldsymbol{y = f(x)}$. Quatro dos participantes responderam que a antiderivada é uma integral indefinida e outros quatro não souberam ou não responderam o questionamento.

Figura 9 - Questão 1. Parte 1 do Teste Diagnóstico.



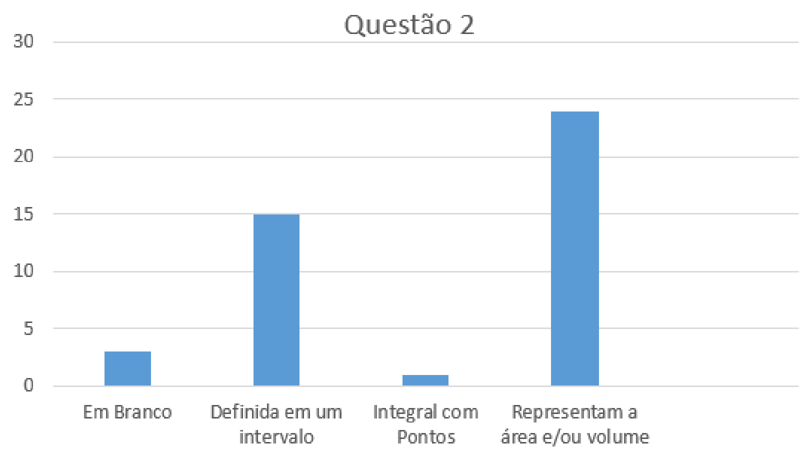
Fonte: O Autor

Na segunda pergunta, foi questionado aos acadêmicos “O que é uma integral definida? O que ela representa? ”

Segundo Stewart (2013, p. 360), uma integral definida é um número, que pode ser interpretado como a área resultante abaixo da curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, quando a função é positiva.

Percebemos (Figura 10) que, a maioria dos estudantes entendeu a integral definida como a representação da área ou volume no intervalo $[\boldsymbol{a, b}]$. Aqueles que não mencionaram área ou volume, relataram que é uma integral na qual está definida em um intervalo. Nesta questão, apenas três alunos não responderam.

Figura 10: Questão 2, Parte 1 do Teste Diagnóstico.

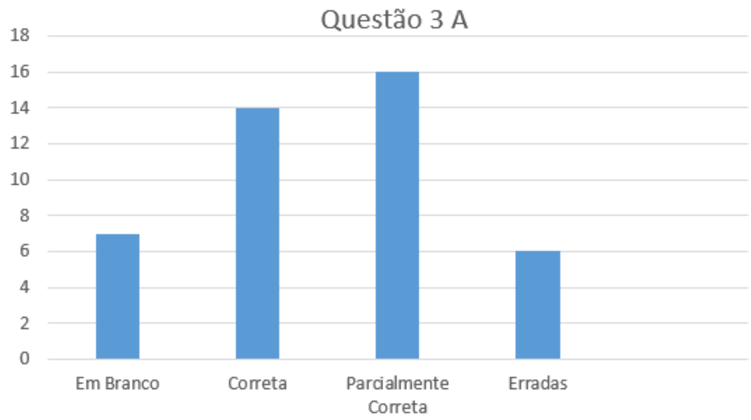


Fonte: O Autor.

A terceira questão, tivemos como objetivo verificar conceitos relacionados as antiderivadas, onde deveriam utilizar a ideia que a ela é a operação inversa de derivação, onde no item A apresentamos um integral simples, e no item B uma que necessitaria resolver primeiro uma manipulação algébrica, para após, ser resolvida.

No primeiro item da questão 3, foi proposta uma antiderivada onde a ideia era aplicação direta da operação inversa da derivada, A figura 11 ilustra que a maioria das respostas foi considerada parcialmente correta

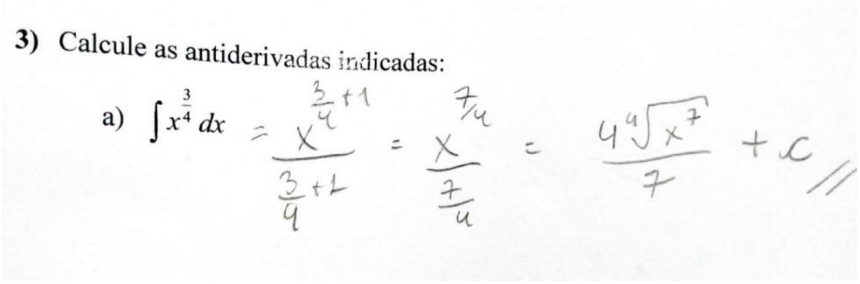
Figura 11 - Questão 3 A, Parte 1 do Teste Diagnóstico.



Fonte: O Autor.

A figura 12, ilustra um exemplo de uma das respostas obtidas e consideradas como correta, ela apresenta toda a resolução e o resultado de modo satisfatório com todos os elementos característicos de uma integral indefinida.

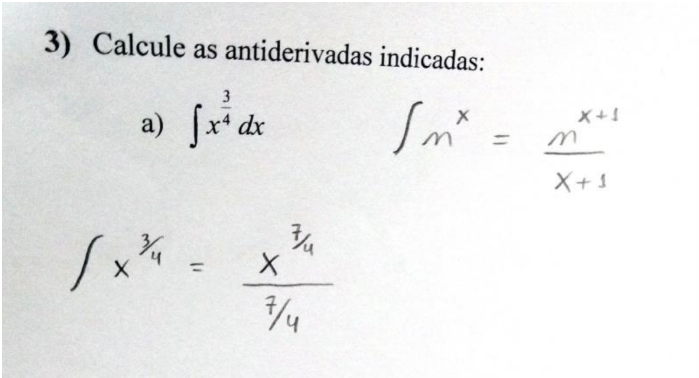
Figura 12 - Exemplo de resposta correta da Questão 3A, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Um exemplo que representa as questões consideradas parcialmente corretas é ilustrado na figura 13. Estas foram classificadas de tal maneira por apresentar algum equívoco ou esquecimento da 'constante' que deve aparecer na resolução final da questão pois a mesma representa, uma 'família de funções'.

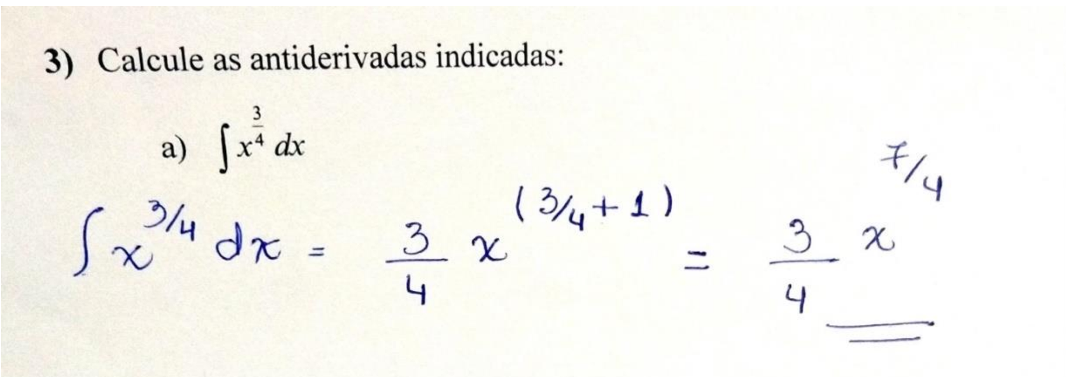
Figura 13 - Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 3A, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 14 ilustra uma resolução considerada errada, pois foi misturado os conceitos de derivada e integral, onde o aluno utilizou a regra de derivação para escrever o coeficiente na frente e somou uma unidade no expoente.

Figura 14: Exemplo de resposta com erro da Questão 3A, Parte 1.

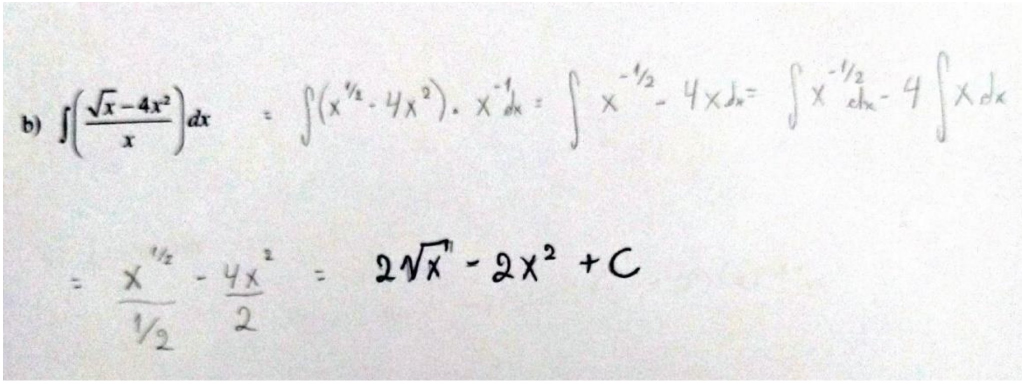


Fonte: Dados da pesquisa.

No item B, da questão número três, foi proposto a resolução de uma antiderivada, onde eram necessárias algumas manipulações algébricas antes de aplicar a ideia para a resolução. Nesta questão, 17 questionários foram deixados em branco, dois respondidos corretamente, 15 parcialmente e nove com algum erro.

A figura 15 ilustra um exemplo de resolução onde foram aplicadas as manipulações algébricas de maneira correta.

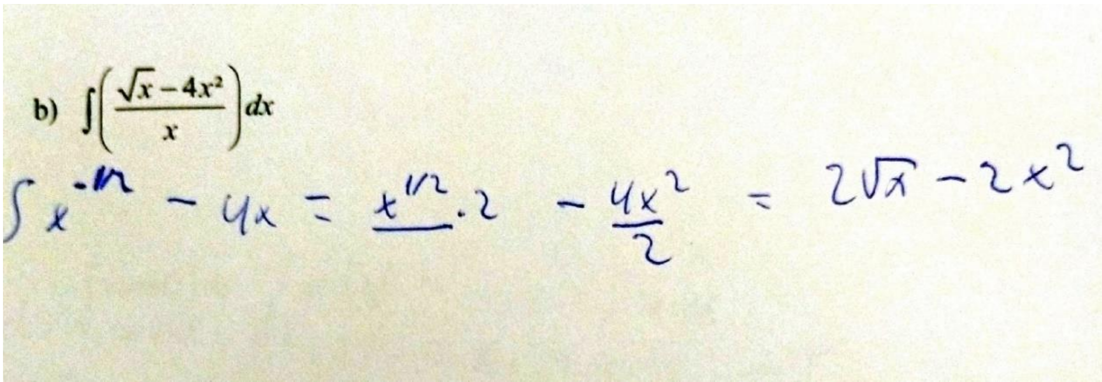
Figura 15: Exemplo de resposta correta da Questão 3B, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 16, ilustra uma manipulação algébrica também correta, porém não apresenta a constante no final da solução,

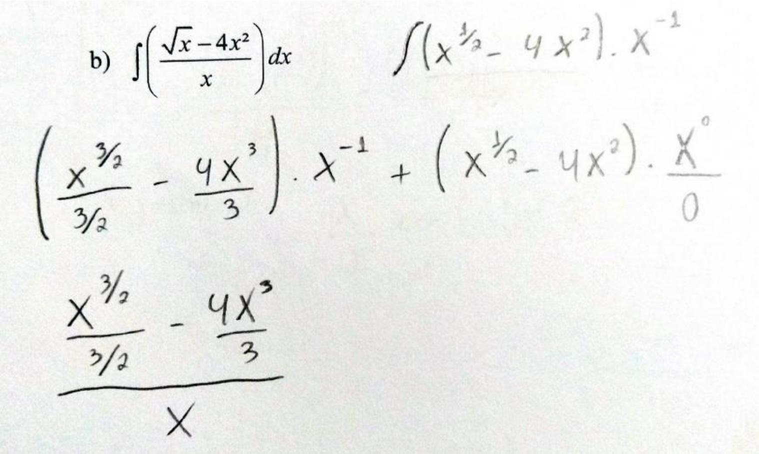
Figura 16: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 3B, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, a figura 17 ilustra uma resolução equivocada para o item proposto, pois o acadêmico aplicou a regra de integração em cada parte da fração, ignorando as manipulações algébricas necessárias para chegar na solução correta.

Figura 17: Exemplo de resposta com erro da Questão 3B, Parte 1.

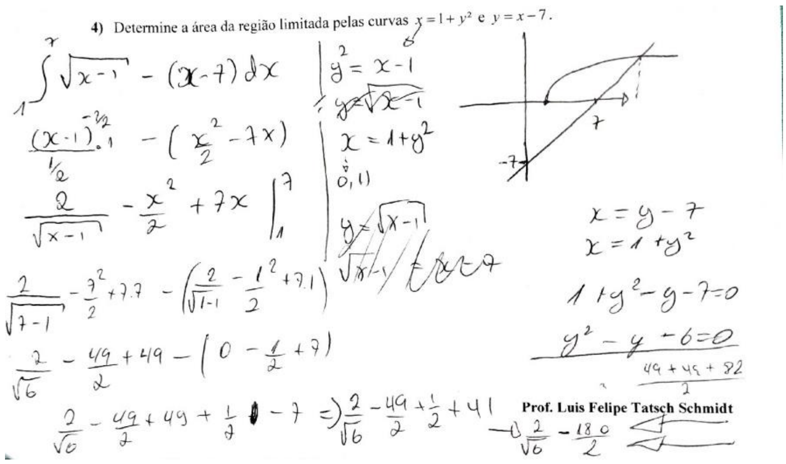


Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 4, teve como objetivo verificar como os alunos resolveriam uma aplicação de integral simples, que á a ideia do cálculo da área entre duas curvas. Nela, não obtivemos nenhuma resposta correta. Apenas quatro resoluções foram consideradas parcialmente corretas, 12 apresentaram erros, seis acadêmicos fizeram apenas um esboço da região a ser representada e 21 questionários estavam em branco.

A figura 18 ilustra um exemplo de resolução parcialmente correta, pois houve erro na hora de aplicar as regras operacionais de derivada na parte que possui raiz ou ainda, para integrar em $\boldsymbol{dx}$ precisaria separar em duas área, ou integrar em relação a $\boldsymbol{y}$.

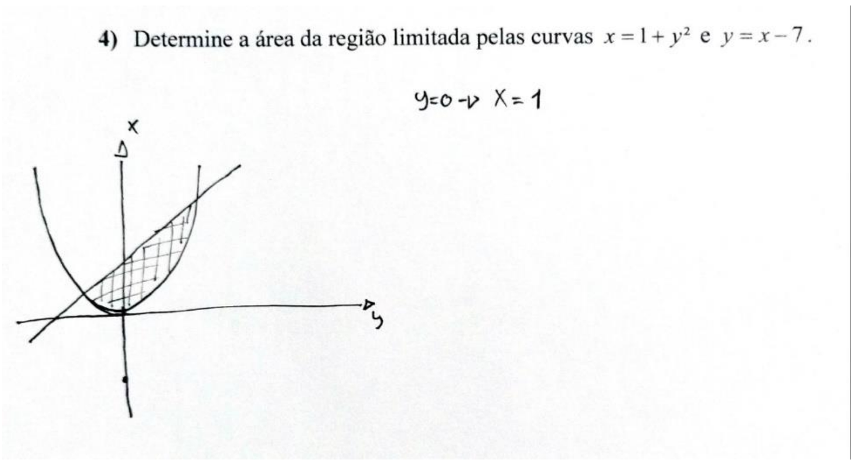
Figura 18: Exemplo de resposta correta da Questão 4, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 19 ilustra a resolução de uma questão, onde o acadêmico apenas desenvolveu um esboço da região, sem calcular a integral.

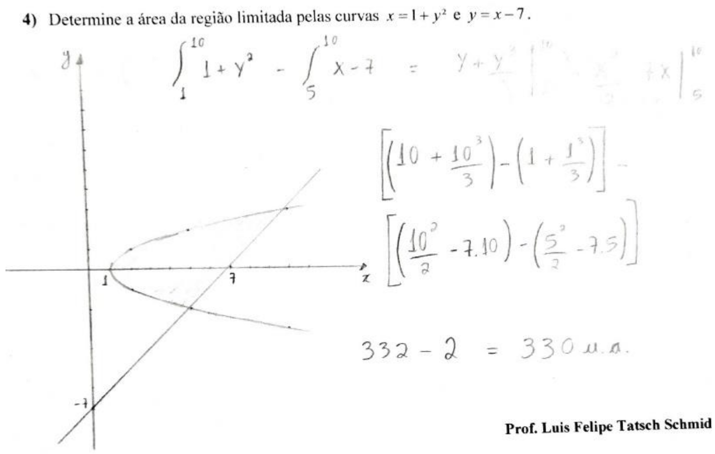
Figura 19: Exemplo de resposta somente com um esboço da região da Questão 4, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 20 ilustra um exemplo de uma questão considerada com erro, pois o aluno realizou a integração utilizando x e y como variáveis, mas podemos observar que o gráfico está correto.

Figura 20: Exemplo de resposta com erro da Questão 4, Parte 1.

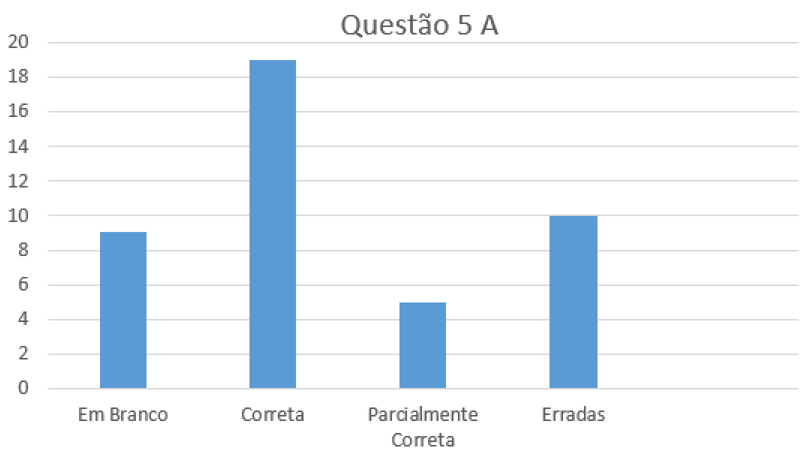


Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 5, foi dividida em cinco itens, onde o objetivo de cada um deles era identificar quais propriedades e regras para a resolução de integrais os acadêmicos tinham amparados em seus subsunçores. No item 5A, o objetivo foi de verificar se os alunos sabiam resolver uma integral utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

A figura 21 ilustra os resultados obtidos após a correção desse item.

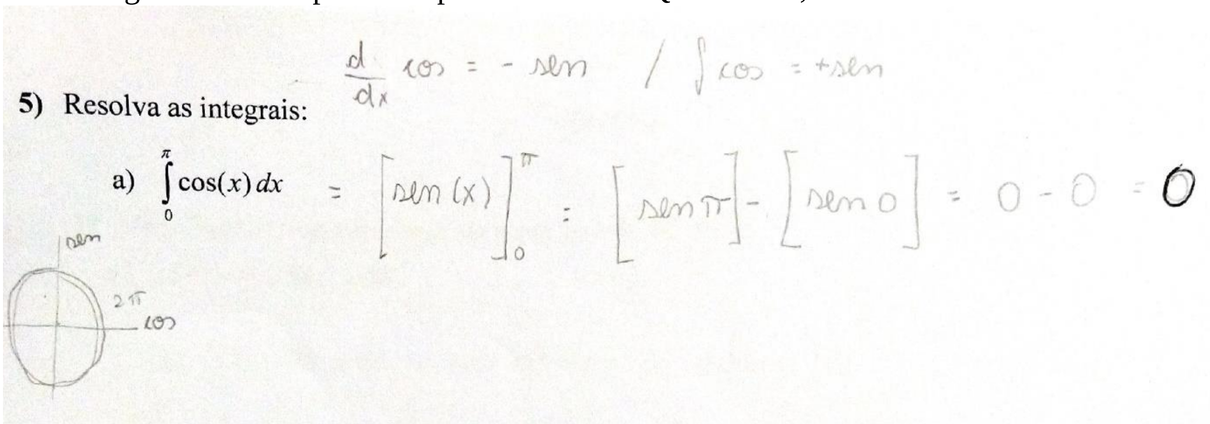
Figura 21: Questão 5A, Parte 1 do Teste Diagnóstico.



Fonte: O Autor.

A figura 22 ilustra uma resolução do item 5A considerada correta

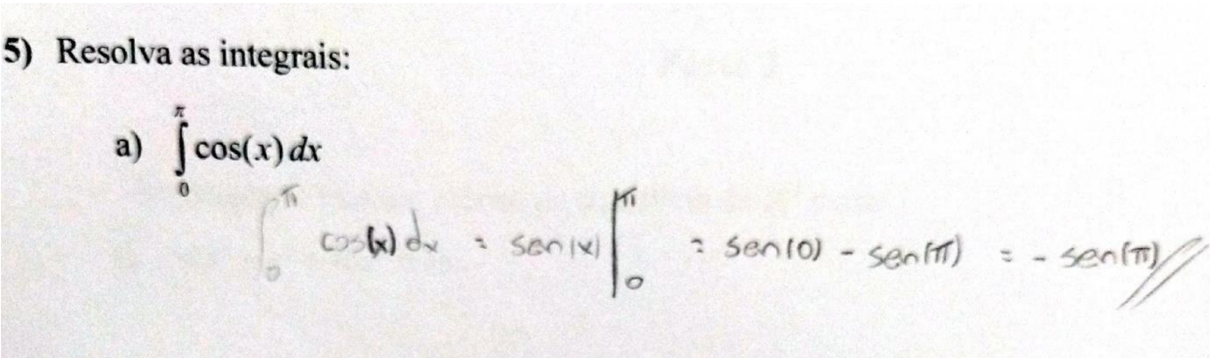
Figura 22: Exemplo de resposta correta da Questão 5A, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 23 ilustra uma resolução considerada parcialmente correta, pois o aluno não conclui a integral deixando-a indicada.

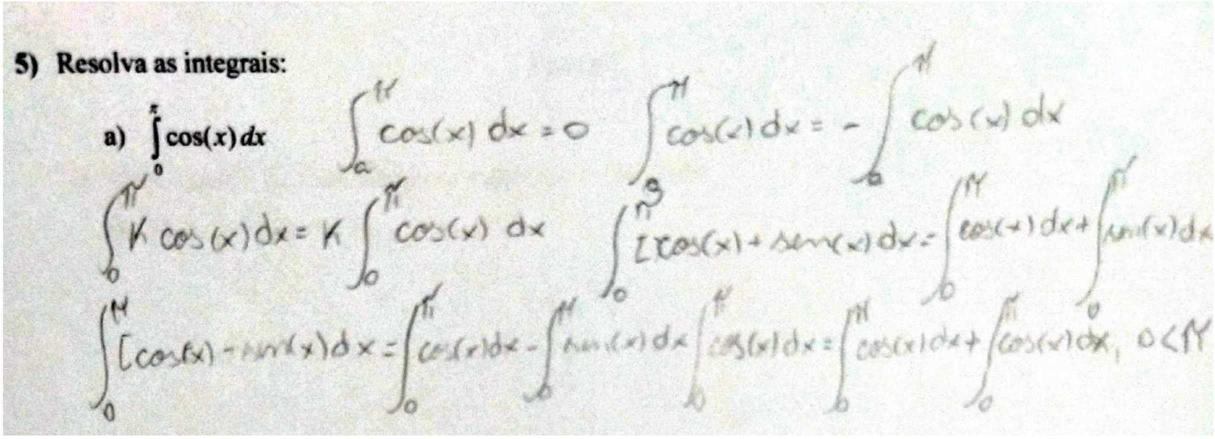
Figura 23: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 5A, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Um exemplo de uma resolução totalmente equivocada é ilustrado na figura 24.

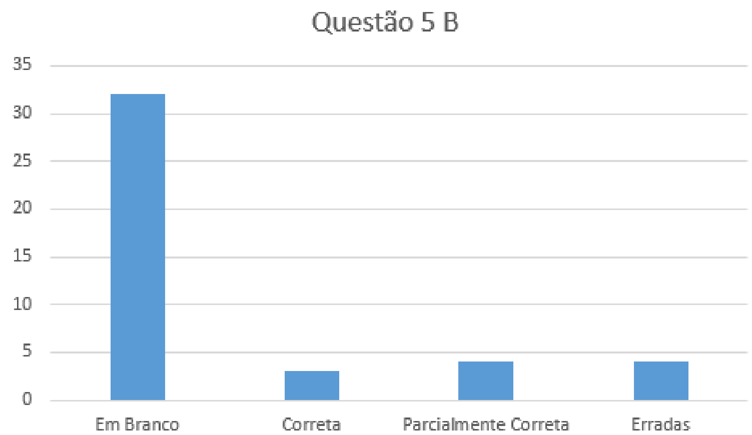
Figura 24: Exemplo de resposta com erro da Questão 5A, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 5B, teve por objetivo foi verificar se os alunos possuíam ancorada a ideia da integral por substituição simples. Nesse caso a maioria dos questionários foi entregue em branco (figura 25).

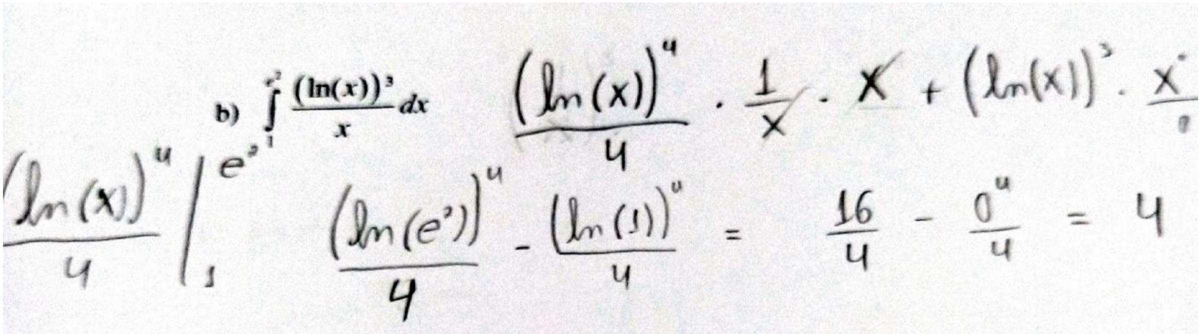
Figura 25: Questão 5 B, Parte 1 do Teste Diagnóstico.



Fonte: O Autor.

A seguir, são ilustrados exemplos de questões que foram respondidas corretamente, parcialmente correta e com erros, respectivamente, referente ao item 5B. Na figura 26, que foi classificada como correta, foi realizado todas os procedimentos de maneira satisfatória.

Figura 26: Exemplo de resposta correta da Questão 5B, Parte 1.



b) $\int_1^{e^2} \frac{(\ln(x))^3}{x}dx$

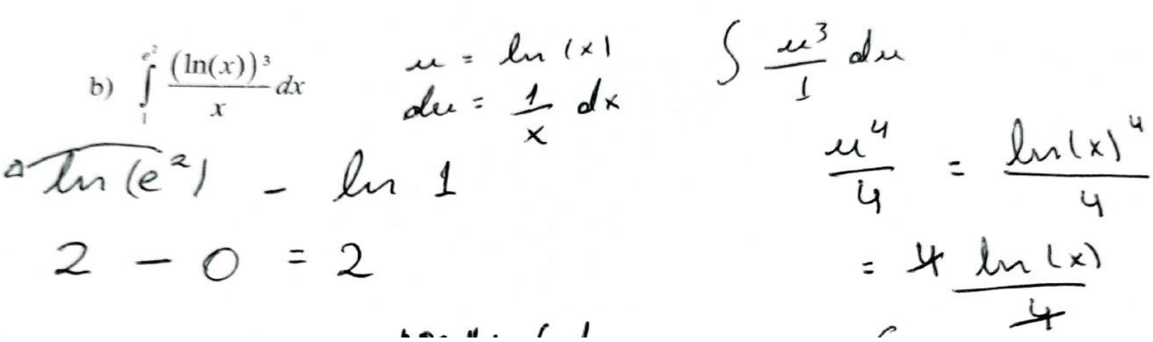
$\frac{(\ln(x))^4}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} + (\ln(x))^3 \cdot \frac{x}{0}$

$\left.\frac{(\ln(x))^4}{4}\right|_1^{e^2}$ $\frac{(\ln(e^2))^4}{4} - \frac{(\ln(1))^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$

Fonte: Dados da pesquisa.

Já na figura 27, que foi parcialmente correta, tivemos erros na hora de aplicar os procedimentos pós integração.

Figura 27: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 5B, Parte 1.



b) $\int_1^{e^2} \frac{(\ln(x))^3}{x}dx$

$u = \ln(x)$
$du = \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{u^3}{1} du$

$\frac{u^4}{4} = \frac{\ln(x)^4}{4}$

$= \cancel{4}\frac{\ln(x)}{\cancel{4}}$

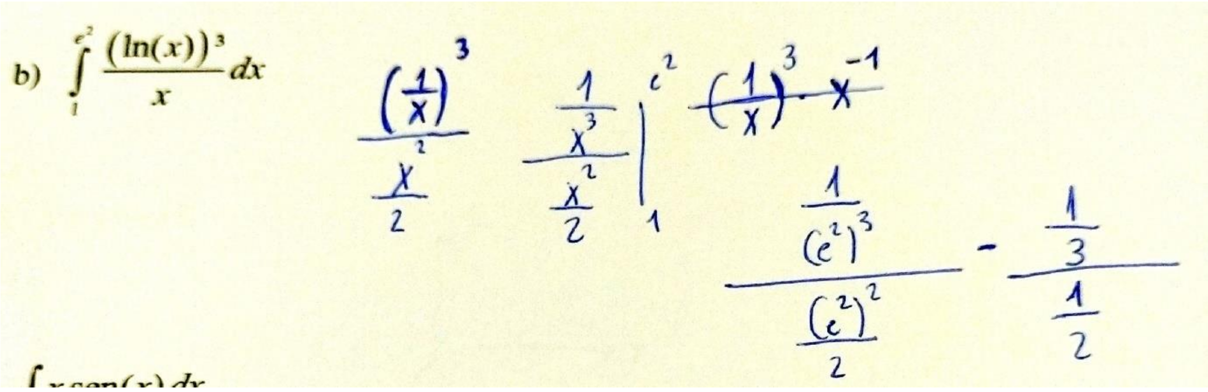
$\ln(e^2) - \ln 1$

$2 - 0 = 2$

Fonte: Dados da pesquisa.

E na figura 28 que possui erro na hora de aplicar o algoritmo de integração, misturando as técnicas de integral com derivada.

Figura 28: Exemplo de resposta com erro da Questão 5B, Parte 1.

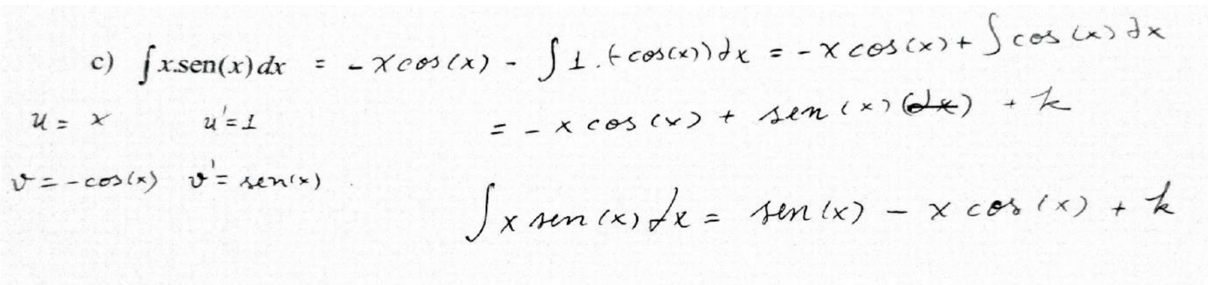


Fonte: Dados da pesquisa.

O item 5C, que, teve como objetivo verificar os conhecimentos prévios sobre integrais utilizando o método por partes. Nesse caso, nela obtivemos 16 questionários em branco, oito foram respondidos corretamente, três parcialmente corretos e 16 com algum erro matemático.

Na figura 29, trazemos uma ilustração onde o aluno utilizou a regra de integrais por partes corretamente

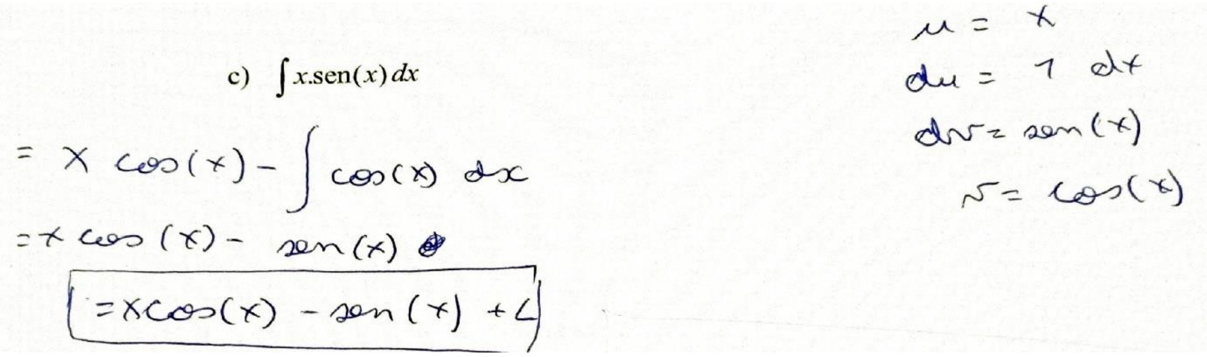
Figura 29: Exemplo de resposta correta da Questão 5C, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Já na figura 30, um exemplo parcialmente correto, pois o aluno obteve erro nos sinais da função seno.

Figura 30: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 5C, Parte 1.



c) $\int x.\text{sen}(x)\, dx$

$u = x$

$du = 1\, dx$

$dv = sen(x)$

$v = cos(x)$

$= x\ cos(x) - \int cos(x)\ dx$

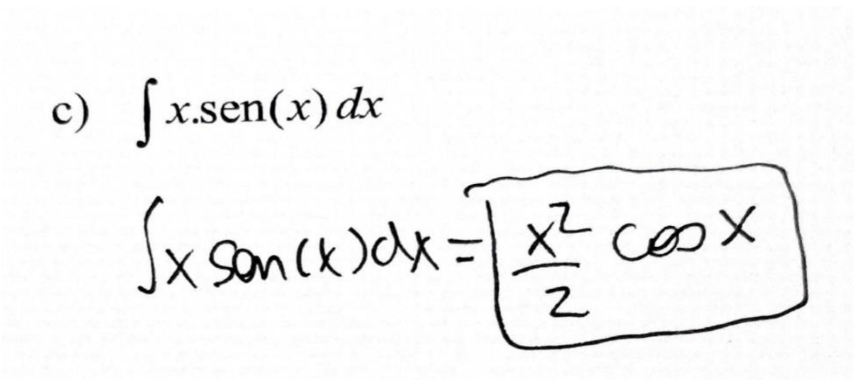
$= x\ cos\ (x) - \ sen\ (x)$

$\boxed{= x cos(x) - sen\ (x) + C}$

Fonte: Dados da pesquisa.

E na figura 31, trazemos uma ilustração de resolução errada, pois ele aplicou a ideia de integração em cada termo, ignorando a ‘regra’ para a resolução.

Figura 31: Exemplo de resposta com erro da Questão 5C, Parte 1.



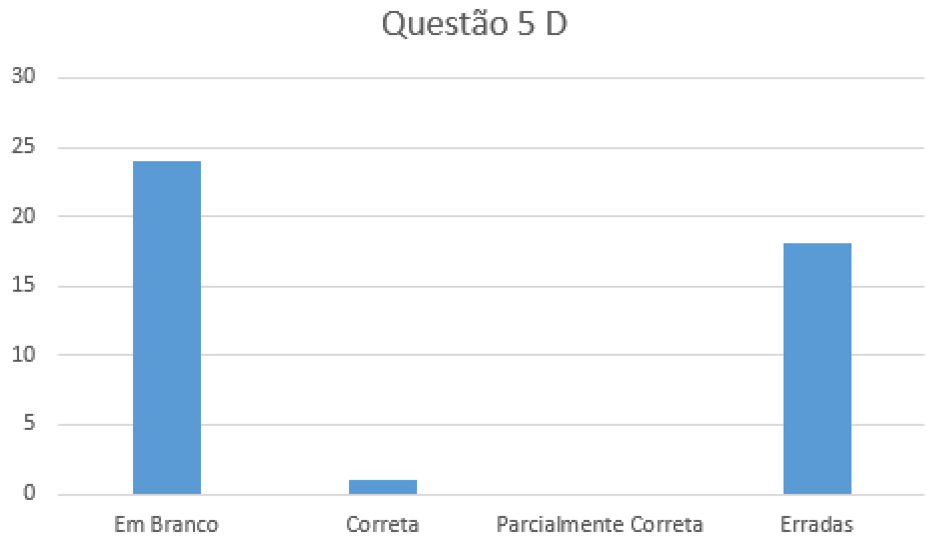
c) $\int x.\text{sen}(x)\, dx$

$\int x\ sen(x) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} cos x}$

Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 5D foi uma das que os acadêmicos mais tiveram dificuldades, pois nela foram retomados os conceitos de integrais por substituição trigonométrica. Nesse caso, conforme esperado, na maioria dos questionários o item foi deixado em branco e não obtivemos nenhuma questão respondida parcialmente correta (Figura 32).

Figura 32: Exemplo de resposta correta da Questão 5D, Parte 1.



Fonte: O Autor.

Na figura 33, apresentamos um exemplo de uma questão que consideramos ter sido respondida corretamente pela complexidade da mesma, pois o aluno não a concluiu, mas fez todos os passos corretamente.

Figura 33: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 5D, Parte 1.

d) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

$$= \int 9\cos^2(u)\,du = 9\cdot\int \cos^2(u)\,du = 9\cdot\int \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du = 9\cdot\frac{1}{2}\left(\int 1\,du + \int \cos(2u)\,du\right)$$

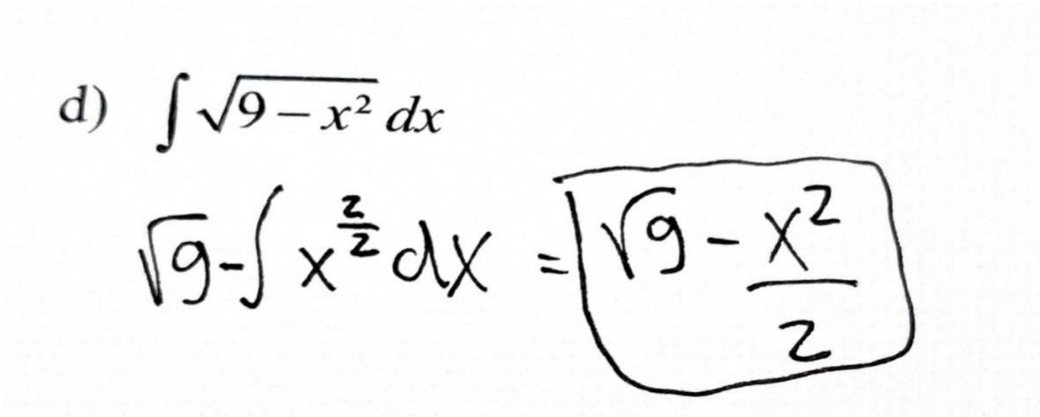
$$9\,\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u)\right) = 9\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}x\right)\right)\right) =$$

$$\frac{9}{2}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}x\right)\right)\right)+C$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Já na figura 34, temos uma figura que representa uma resposta com erro, pois ali foi tirado a raiz quadrada de cada um dos termos, um erro matemático, e após isso realizado a integração dos termos.

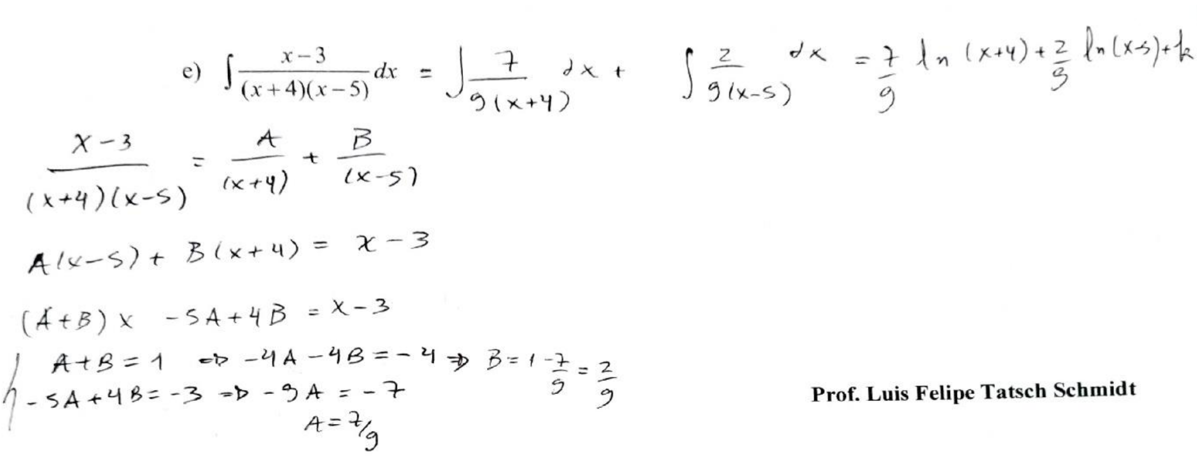
Figura 34: Exemplo de resposta com erro da Questão 5D, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste último item o objetivo foi verificar os conhecimentos sobre integrais utilizando frações parciais, método geralmente usados para a simplificação de integrais que envolvem um quociente de funções. Para o item 5E, segundo o questionário respondido, tivemos um total de 33 respostas em branco, 3 respondidos corretamente, 3 parcialmente corretos e 4 com erro. A figura 35 explicita um exemplo de um que resolveu a questão corretamente.

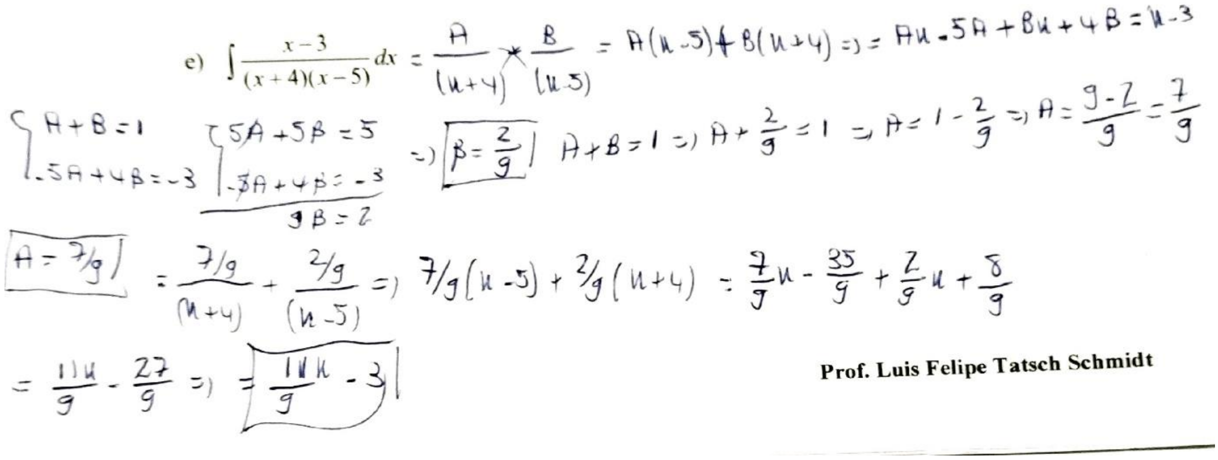
Figura 35: Exemplo de resposta correta da Questão 5E, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 36 ilustra um exemplo que foi considerado parcialmente correto, pois as frações parciais foram resolvidas correta, mas a integral não.

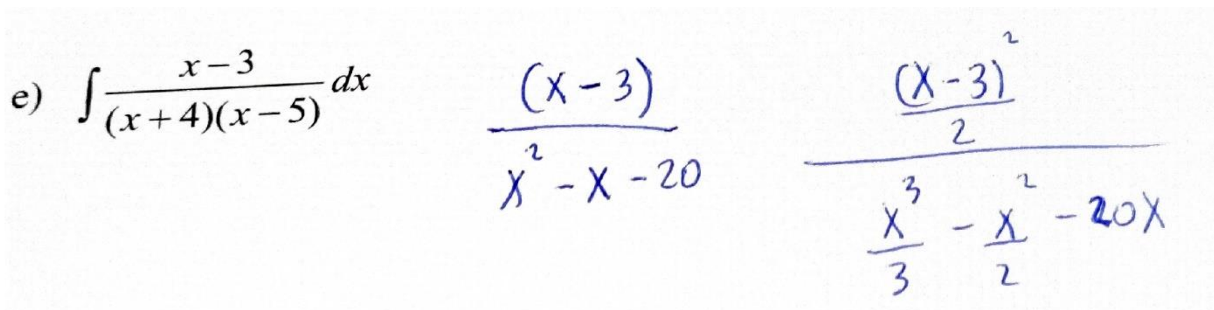
Figura 36: Exemplo de resposta parcialmente correta da Questão 5E, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

E por fim na figura 37, com erro, onde apresentou uma resolução totalmente equivocada.

Figura 37: Exemplo de resposta com erro da Questão 5E, Parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda parte do questionário diagnóstico, o foco foi verificar os subsunçores existentes sobre os conceitos de Geometria Analítica, visto que estes seriam necessários para a disciplina de Cálculo B, pois como trabalhamos com funções de várias variáveis, os gráficos são representados em três dimensões.

Na primeira questão, que foi dividida em 3 subitens, cada um dos itens deveria ser identificado e esboçado um tipo diferente de superfície no espaço $\mathbb{R}^3$. No item 1A a equação dada representava um elipsoide centrado na origem. Já no item 1B, foi apresentada uma equação de um paraboloide hiperbólico, no item C, foi dada uma equação que representava um cilindro parabólico, conhecido por formar uma figura espacial com a forma de uma ‘calha’. O Quadro 3 apresenta uma quantificação das respostas consideradas como corretas, incorretas, parcialmente corretas e em branco.

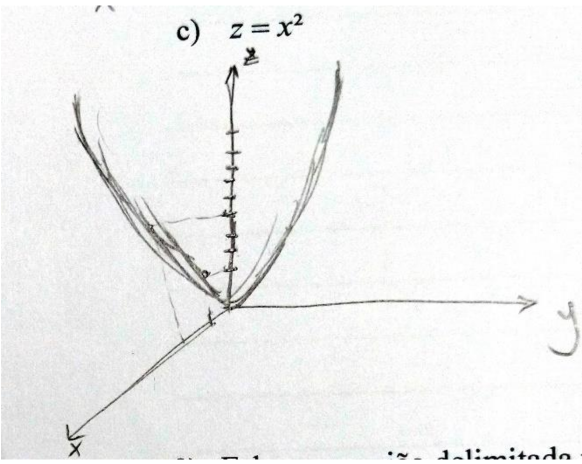
Quadro 3 - Respostas da questão 1 - Parte 2.

Item	Correto	Parcialmente correto	Incorreto	Em branco
A	4	3	9	27
B	1	3	14	25
C	1	5	15	22

Fonte: O Autor.

Observa-se que em todos os itens a maioria dos alunos deixou a questão em branco, ou obtiveram algum tipo de erro, como por exemplo na figura 38 (classificada como parcialmente correta), que ilustra que o aluno não conseguiu fazer a transposição do gráfico do $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$, ou seja, ao invés de obter o cilindro hiperbólico, como esperado, ele obteve uma parábola no plano $\boldsymbol{xz}$.

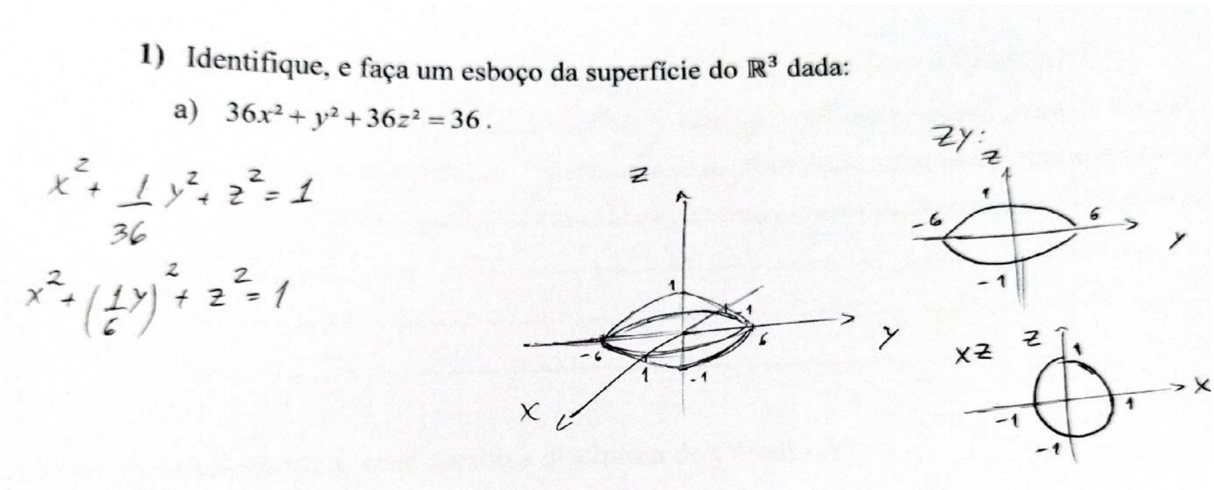
Figura 38- Figura ilustra uma parábola ao invés de um cilindro hiperbólico.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 39, trazemos uma ilustração do item 1A, cujo a equação era de um elipsoide, apresentamos um exemplo onde foi resolvido corretamente.

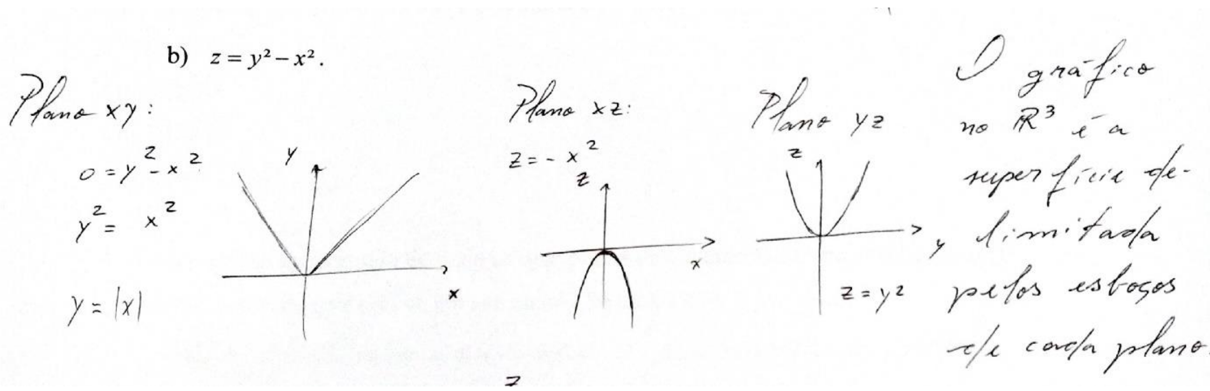
Figura 39- Item 1A, respondido corretamente.



Fonte: Dados da pesquisa.

E por fim, na figura 40, ilustra um exemplo, agora do item 1B da parte 2 do questionário, onde o aluno também não conseguiu concluir o gráfico em $\mathbb{R}^3$, onde observamos que ele conseguiu montar as suas projeções em cada plano, mas não finalizou o esboço em 3 dimensões.

Figura 40- Item 1B da Parte 2 Parcialmente Correto.



Fonte: Dados da pesquisa.

O objetivo da questão 2, era criar uma superfície através da intersecção de outras duas. Nesta foi disponibilizado a equação de um cone e de um cilindro, solicitando a interseção na altura $\boldsymbol{z = 1}$ e $\boldsymbol{z = 2}$.

Neste caso, obtivemos um total de 29 questionários em branco, um respondido corretamente, 2 deles parcialmente e 11 apresentaram erros. Como podemos ver, esse foi o item em que os alunos mais tiveram dificuldade em montar a superfície solicitada, pois dos 43 respondidos, apenas 3 deles obtiveram uma ideia correta ou parcialmente correta acerca da mesma.

Após realizada essa análise do teste diagnóstico, pudemos notar que os conceitos de integrais estavam bem vagos na estrutura cognitiva dos alunos, pois grande parte das perguntas ou foram deixadas em branco, ou houveram erros. Dessa foram, justifica-se esse questionário, pois alertou que os conceitos que deveriam ter sido apreendidos nas disciplinas anteriores não foram sedimentados por parte desses estudantes. Isso foi considerado no momento em que estávamos desenvolvendo a UEPS, pois sempre que necessário recordamos tais conceitos com os alunos.

Ao trabalhar a disciplina, todas as dificuldades elencadas no teste foram ao menos revistas em aula, pois elas de eram de extrema importância para dar segmento a mesma, com isso foi disponibilizado materiais de apoio aos alunos, foram indicadas algumas vídeo-aulas pois se não, não seria possível desenvolver tudo que havia na ementa da disciplina[5], pela sua exaustiva quantidade de conteúdos apresentados.

Foi também levado em consideração, todos os comentários recebidos na parte 3 do questionário, onde perguntamos ‘Como você descreveria sua experiência na disciplina MTM 1019 – Cálculo A?’. Neste tópico, obtivemos respostas de alunos que relataram que tiveram uma ótima experiência, mas também algumas citações de que tiveram grandes problemas, pois em um mesmo semestre tiveram quatro professores diferente, dando a mesma disciplina, apontado por eles, que isso prejudicou muito o ensino e a aprendizagem. E por este motivo, preferimos retomar todos os conceitos já vistos, para serem reforçados para os novos que estavam por vir.

[5] Ementa da disciplina disponível em: https://bit.ly/37npWxB

No tópico a seguir, faremos uma análise da atividade dos vídeos desenvolvida na turma, onde cada grupo ficou responsável por desenvolver, através de uma mídia, um vídeo explicando uma aplicação de integrais múltiplas, conceito esse, desenvolvido na disciplina de Cálculo B.

5.3. ANÁLISE DA ATIVIDADE

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 106) “[...] o uso da internet, a produção de vídeos e o uso das tecnologias móveis são essências em PMD”, com isso, podemos dizer que o uso de vídeos é o tipo de PMD mais comum, devido a popularização de smartphones, a utilização de câmeras e aplicativos de edição está muito presente no cotidiano. E ainda, a socialização desses, é facilitada pelas redes sociais (YouTube, Facebook, Instagram...) podendo assim, fazer uso do compartilhamento e a popularização desse meio.

A produção de vídeos educativos ainda, está de acordo com a ideia de Freire (1996) quando cita, que “ensinar não é apenas transferir conhecimentos, mas criar possibilidades para a sua construção”. Acreditamos que os vídeos podem proporcionar esse meio, pois exige do aluno autoria, a produção e a pesquisa, fazendo-se assim, relevante para o processo de ensino e aprendizagem.

Felcher et. al (2017), escrevem que o vídeo, por si só, assim como qualquer outra TD, não apresentará soluções relacionadas a educação, nem irá resolver problemas relacionados ao ensino e aprendizagem, contudo, a produção de vídeos, como um recurso didático, evidencia que o alunos tenham melhor afinidade e se sintam mais atraídos aos novos conteúdos (Felcher, Pinto, Folmer, 2018).

Moran (1995, p. 27) cita que “Finalmente o vídeo está chegando à sala de aula”, e entendemos que uma importante utilização deles é a produção pelos alunos, uma prática que ainda é recente, mas que vem conquistando mais espaço na sala de aula a partir de PMD. Segundo Felcher, Pinto e Folmer, escrevem que:

> Os vídeos tornam as aulas mais dinâmicas e produtivas, despertando o interesse dos alunos e facilitando a aprendizagem; motiva para a pesquisa, proporcionando a interação e a discussão com os professores e colegas sobre o tema em estudo; produz conhecimento de forma diferenciada e sua circulação também torna-se mais fácil (FELCHER, PINTO, FOLMER, 2018, p. 3).

Essa etapa da UEPS foi implementada como atividade extra na disciplina, onde foi solicitado que os alunos formassem grupos por afinidades, depois, foi realizado um sorteio das peças que eles deveriam ‘fabricar’, e produzir um vídeo. Para todo o processo, usamos o Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle da UFSM.

Este estudo, resultou na produção de 12 vídeos. Observamos que os 60 alunos da turma foram divididos em 15 grupos e três desses grupos optaram por não participar desta etapa da pesquisa. Os grupos que não participaram, obviamente não entregaram as suas produções. Mas, desde o início da pesquisa, foi esclarecido que nenhum aluno era obrigado a participar de todos os processos.

Como critérios de análise dos vídeos produzidos escolhemos os seguintes pontos a serem observados: Motivação, Sensações Viscerais, Surpresa Matemática e Elementos Matemáticos. Também consideramos o tempo de duração do vídeo produzido e o software que foi utilizado no trabalho realizado. Na sequência, explicaremos cada um desses pontos.

Como motivação, relatamos o empenho para com o vídeo. A dedicação do grupo em fazer uma criação condizente com a ideia, e se teve criatividade na produção. As sensações viscerais, segundo Silva e Gregorutti (2015, p. 7), “diz respeito ao desejo em matemática e à aspectos estéticos como a identificação de padrões, simetrias, generalizações, etc.”.

A ideia de apresentar surpresa matemática é explorada através das emoções e atividades humanas, ou seja, explicitando uma situação de vivência, relatando algo não só pela matemática. E por fim, os elementos matemáticos, que é a verificação se todos os tópicos solicitados no trabalho estão de acordo com a orientação, e se apresenta todos os tópicos requeridos na proposta de trabalho.

No quadro 4, apresentamos uma comparação com os elementos descritos anteriormente, em cada um dos trabalhos entregues. No quadro, se está marcado com ‘x’, o mesmo apresentou de maneira satisfatória o elemento analisado. Na coluna de ‘Software utilizado’ trazemos o nome do software e no ‘tempo de vídeo’ o somatório de todos os vídeos entregues pelo grupo.

Quadro 4- Quadro Comparativo de Todos os Trabalhos.

Elementos de Análise	Motivação	Sensações Viscerais	Surpresa Matemática	Elementos Matemáticos	Software utilizado	Tempo de Vídeo
Grupo 1	X		X	X	SolidWorks	18 min e 0 s
Grupo 2	Não apresentou					
Grupo 3	X	X	X	X	SolidWorks	12 min e 38 s
Grupo 4				X	SolidWorks	-
Grupo 5	X	X	X	X	GeoGebra	8 min

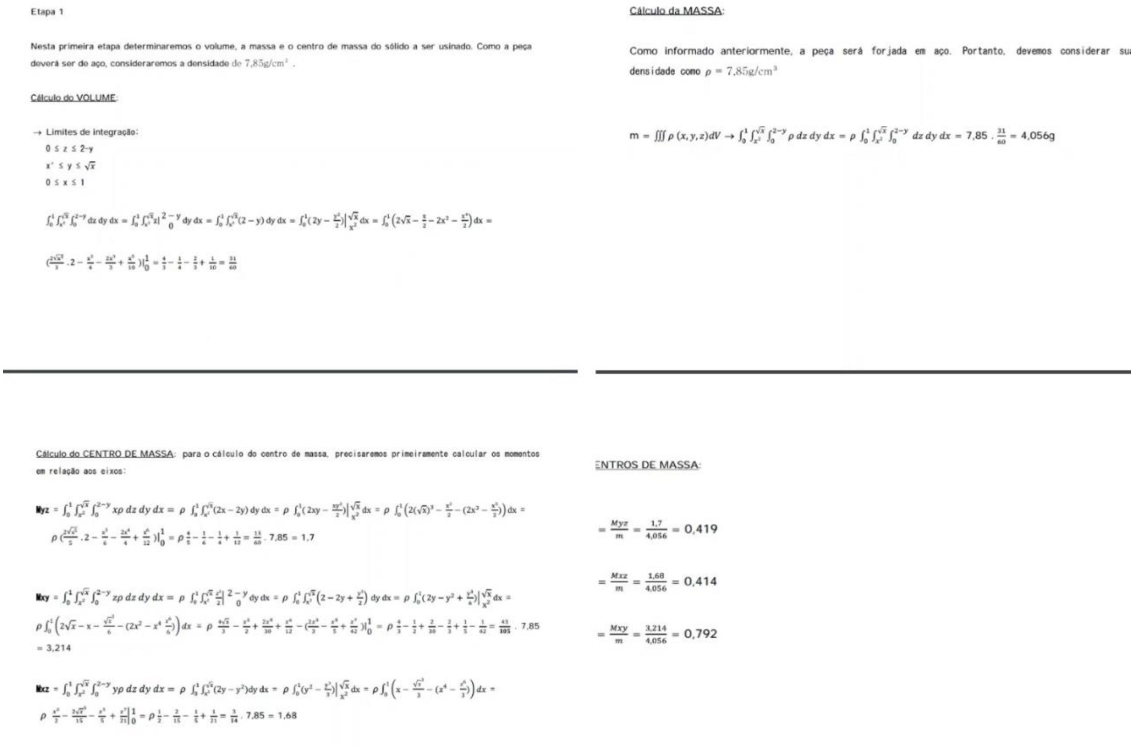
Grupo 6	X			X	GeoGebra	42 min e 49 s
Grupo 7	X			X	Python	36 min e 47 s
Grupo 8				X	GeoGebra e SolidWorks	-
Grupo 9				X	GeoGebra	1 min e 50 s
Grupo 10	X			X	SolidWorks	2 min e 06 s
Grupo 11	X			X	GeoGebra e AutoCAD	10 min e 48 s
Grupo 12	Não apresentou					
Grupo 13				X	GeoGebra	1 min e 01 s
Grupo 14	Não apresentou					
Grupo 15	X	X	X	X	SolidWorks	5 min e 38 s

Fonte: O Autor.

Nos próximos parágrafos iremos fazer uma breve explanação sobre cada um dos trabalhos, de uma maneira mais geral, explicando qual a finalidade do vídeo, como foi apresentado e qual o software foi utilizado.

No vídeo do primeiro grupo, foi criado um áudio, narrando a situação problema que precisavam resolver. Após, foram apresentados dois vídeos, um vídeo mais curto apresentando todos os cálculos digitados. A figura 41 ilustra um recorte do que chamamos de primeiro vídeo do Grupo 1, que apresenta os resultados do grupo.

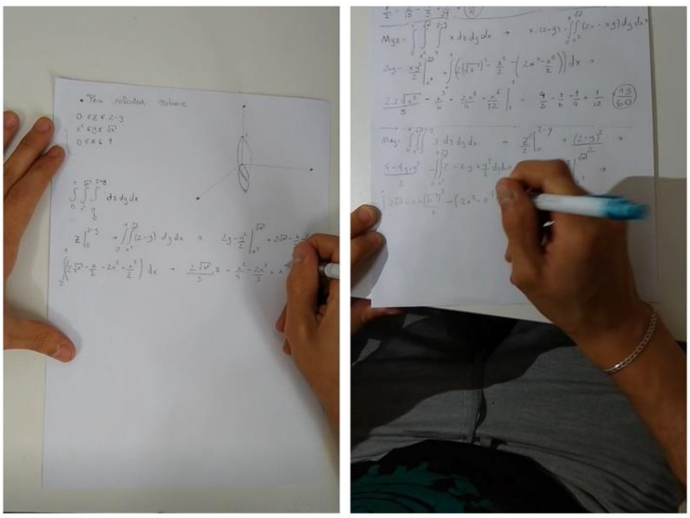
Figura 41 - Recortes do primeiro vídeo concebido pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O segundo vídeo do mesmo grupo, mais longo que o primeiro, os alunos optaram por gravar as mãos de um dos estudantes, resolvendo as integrais propostas, como ilustra a figura 42.

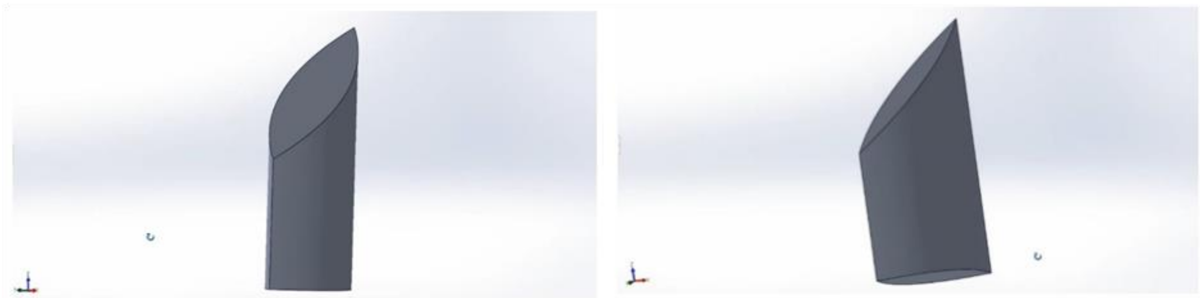
Figura 42 - Recortes do segundo vídeo criado pelo Grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste vídeo, o grupo optou por usar o software ‘SolidWorks[6]’ para realizar o desenho da peça proposta. Este é um software pago, de modelagem em 3D, que permite desenvolver modelos de peças e objetos completos, onde é possível experimentar diferentes designes. É um software considerado de fácil utilização, pois sua interface é bem intuitiva, e também permite que os participantes do projeto, trabalhem simultaneamente de modo que uma alteração feita seja realizada para todos. A figura 43, ilustra um exemplo da imagem do sólido gerado pelo Grupo 1 no SolidWorks.

Figura 43- Imagem do Sólido gerado no SolidWorks pelo Grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos notar que esse grupo apresentou domínio no problema apresentado, resolvendo todas as etapas propostas com destreza e clareza, os conceitos de integrais foram aplicados corretamente, demonstrando entendimento do conteúdo proposto.

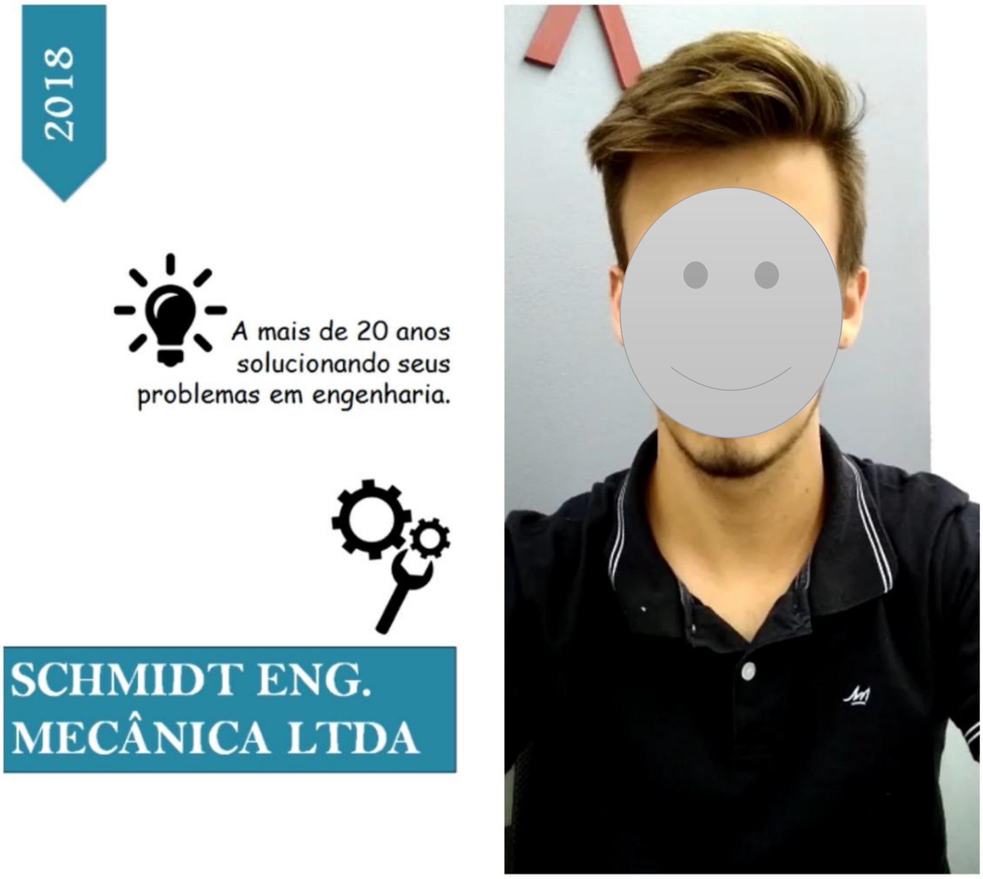
O grupo 2 optou por não realizar a atividade do vídeo, pois o mesmo não fazia parte da turma de engenharia. O grupo 2 era formado por três acadêmicos do Curso de Estatística, também da UFSM. Os alunos participantes desse grupo relataram que não gostariam de participar da atividade, pois como foi um trabalho sem fins de avaliação do semestre letivo e sem ligação direta com o seu curso, optaram por não participar nesta etapa.

Os alunos do terceiro grupo foram bem criativos na produção do vídeo. Os mesmos criaram uma introdução para o trabalho que foi constituída por uma espécie de propaganda e

[6] Disponível em: https://www.solidworks.com/pt-br/choosing-solidworks

depois um dos integrantes explica a situação proposta (figura 44), onde apresentou elementos teatrais.

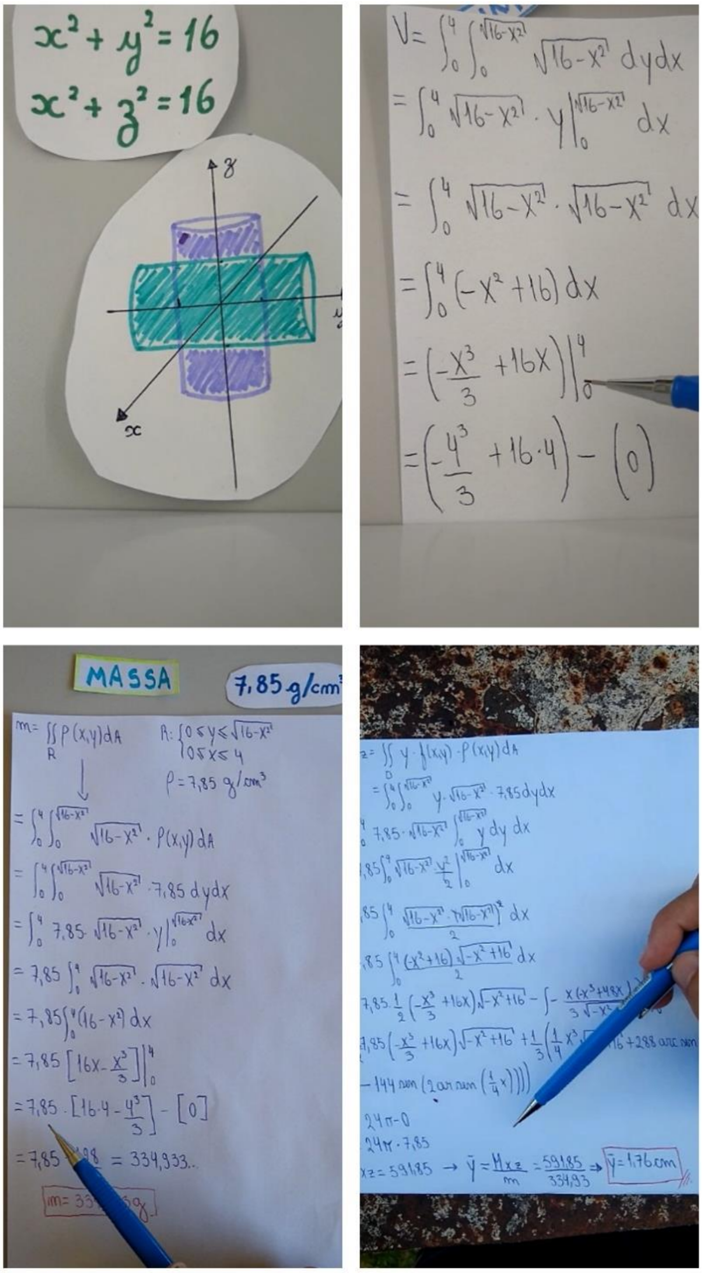
Figura 44- Introdução do Vídeo do Grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução dos problemas, os alunos optaram por apresentar um esboço da região proposta, sem o auxílio de nenhum software. Com a resolução previamente realizada, o grupo foi explicando os cálculos realizados (figura 45).

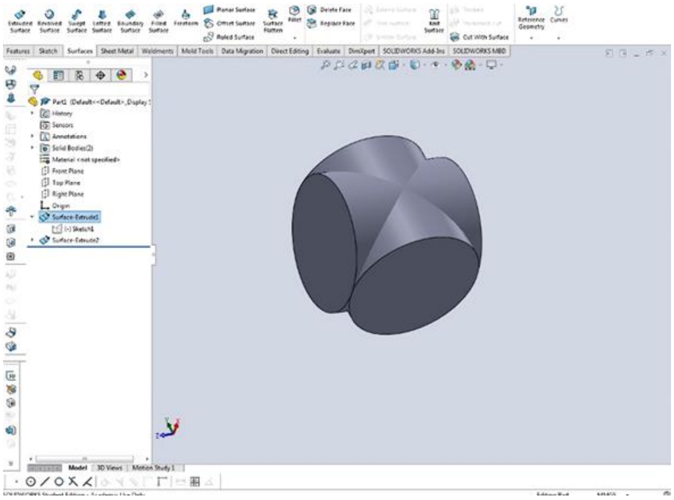
Figura 45- Recorte das resoluções do problema apresentadas no vídeo do grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo 3, assim como o grupo 1, optou pelo SolidWorks para a produção digital da peça recebida, conforme ilustra a figura 46.

Figura 46 - Recorte do vídeo do Grupo 3, representando a peça produzida no SolidWorks.

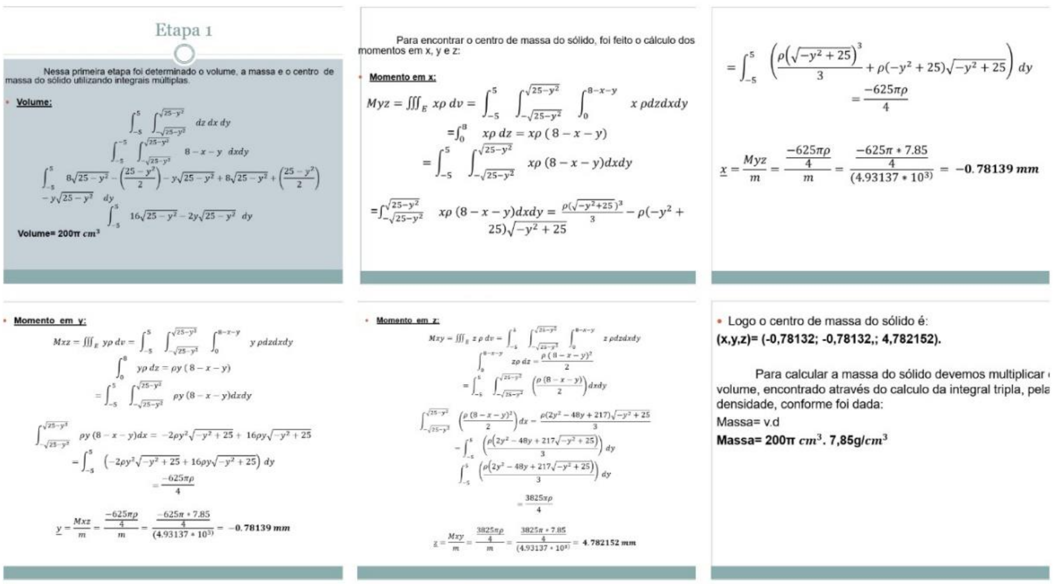


Fonte: Dados da pesquisa.

Foi observado, que este grupo também não apresentou problema na resolução matemática do problema, demonstrando conhecimento e domínio sobre o que estava sendo explicado.

O grupo 4 optou por não gravar um vídeo, mas sim realizar uma apresentação no formato .ppt. A montagem da peça “em $\mathbb{R}^3$” foi entregue em formato .gif, . ou seja, não foi apresentado um vídeo na resolução do problema (figura 47) e no caso da peça foi entregue uma animação desconectada da parte analítica.

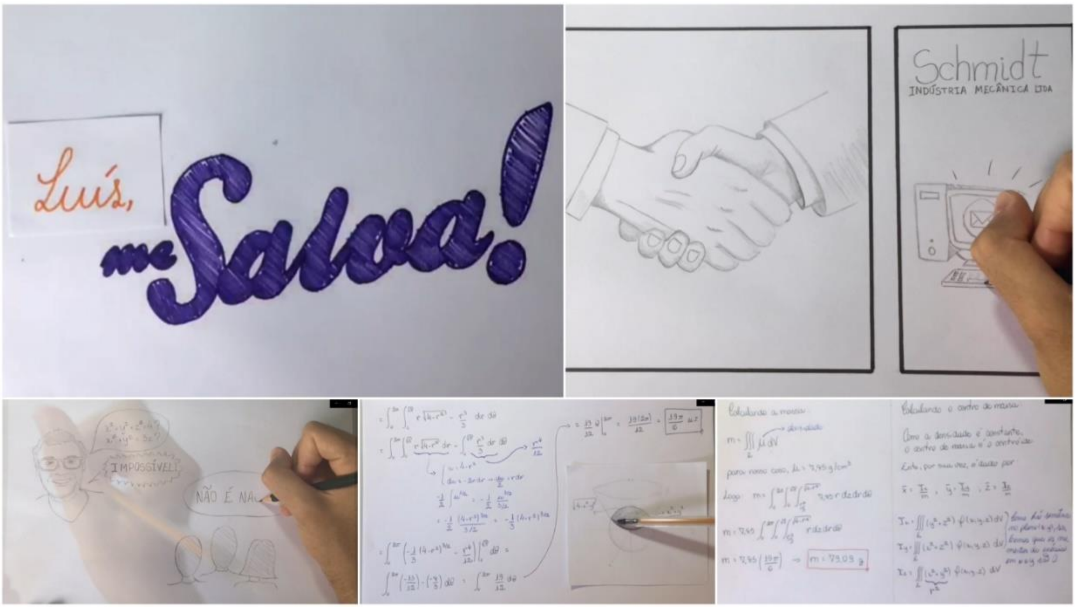
Figura 47- Recortes da apresentação do grupo.



Fonte: Dados da pesquisa.

O vídeo do grupo 5 foi um dos mais criativos. Para realizar a introdução ao vídeo, foi narrado o problema com o fundo sendo cartoonizado por um integrante do grupo. Este grupo também não apresentou erro matemático na resolução das questões, como ilustra a figura 48.

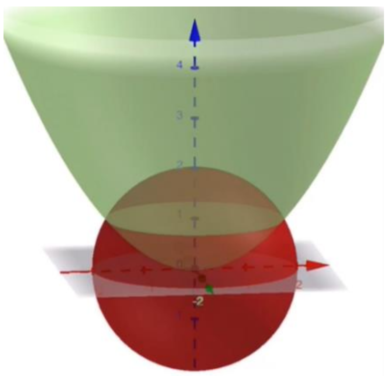
Figura 48- Recorte do Vídeo produzido pelo Grupo 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste grupo, para fazer a representação tridimensional da peça dada, foi utilizado o GeoGebra[7]. Este, consiste em um aplicativo que mistura geometria e álgebra. Diferentemente do SolidWorks, é de distribuição gratuita. A figura 49 ilustra a peça feita pelo grupo.

Figura 49- Sólido Gerado no GeoGebra pelo grupo 5.

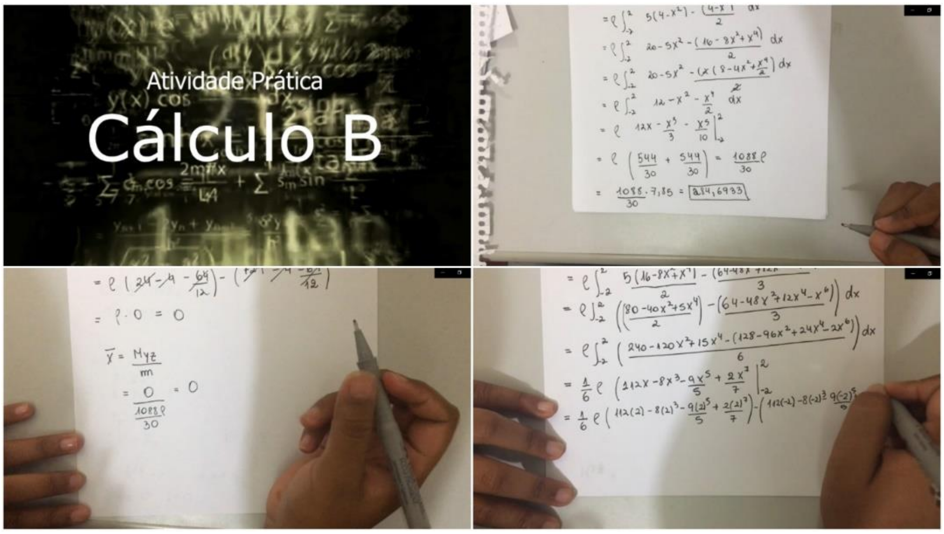


Fonte: Dados da pesquisa.

[7] Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt

O sexto grupo, apresentou um vídeo bem característico de vídeo-aulas, como os que podemos encontrar na internet. Eles apresentaram um vídeo bem longo, onde foi realizado todo o desenvolvimento das integrais passo a passo. Observamos que não foi apresentado erro matemático na resolução e não teve nenhum elemento de destaque em questões de PMD, conforme ilustra a figura 50.

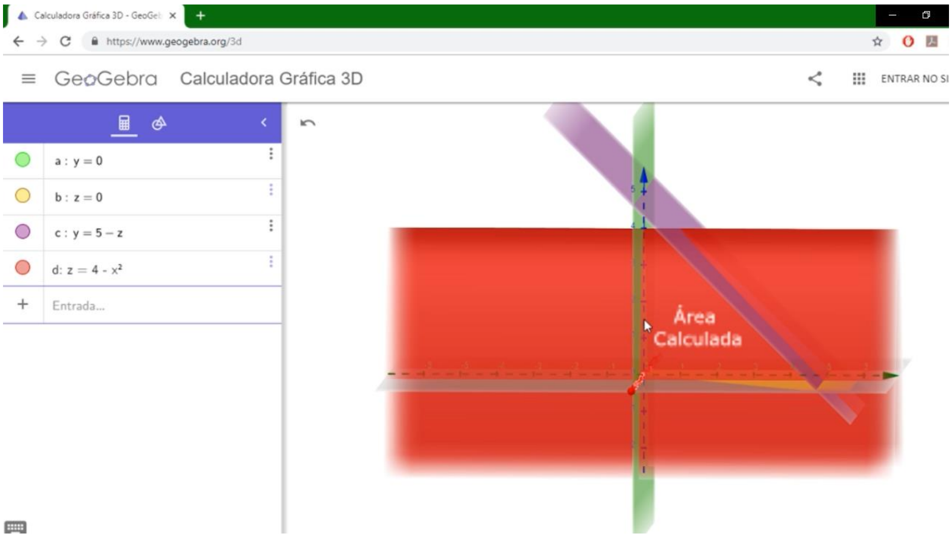
Figura 50 - Recortes do Vídeo do Grupo 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

Este grupo, também optou por utilizar o GeoGebra para a montagem da sua peça. Podemos notar que eles utilizaram a versão online do mesmo. Os alunos não conseguiram delimitar somente a peça, mas deixaram todas as equações de uma forma geral, construindo uma imagem bem poluída e de difícil compreensão (figura 51).

Figura 51 - Recorte do Vídeo onde aparece a peça gerada pelo grupo 6.

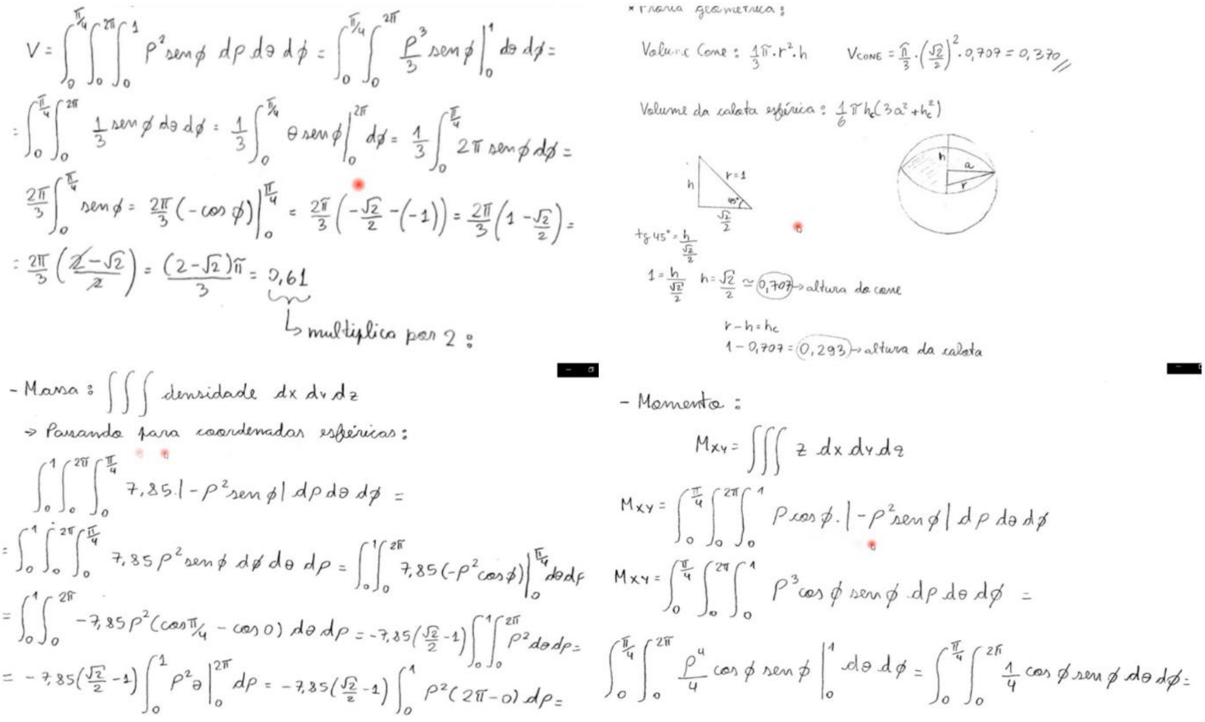


Fonte: Dados da pesquisa.

O sexto grupo, também não demonstrou dificuldade, apresentando com domínio os conteúdos envolvidos no problema, tanto é, que o vídeo deles é construído resolvendo passo a passo da integral, demonstrando engajamento e propriedade das suas falas.

O grupo 7, assim como o grupo 3, apresentou um vídeo com a resolução das equações prontas, e os alunos foram explicando toda a resolução que foi realizada. Observamos que A resolução apresentada pelo grupo é ilustrada pela figura 50.

Figura 52 - Recortes do Vídeo do Grupo 7



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste trabalho, foi utilizado a linguagem de programação Python[8] para gerar a ilustração da peça proposta, o grupo disponibilizou um vídeo mostrando como ”programa-la”, conforme ilustra a figura 53.

Figura 53 - Recorte do Vídeo do Grupo 7 ilustrando aa figura construída em Python.

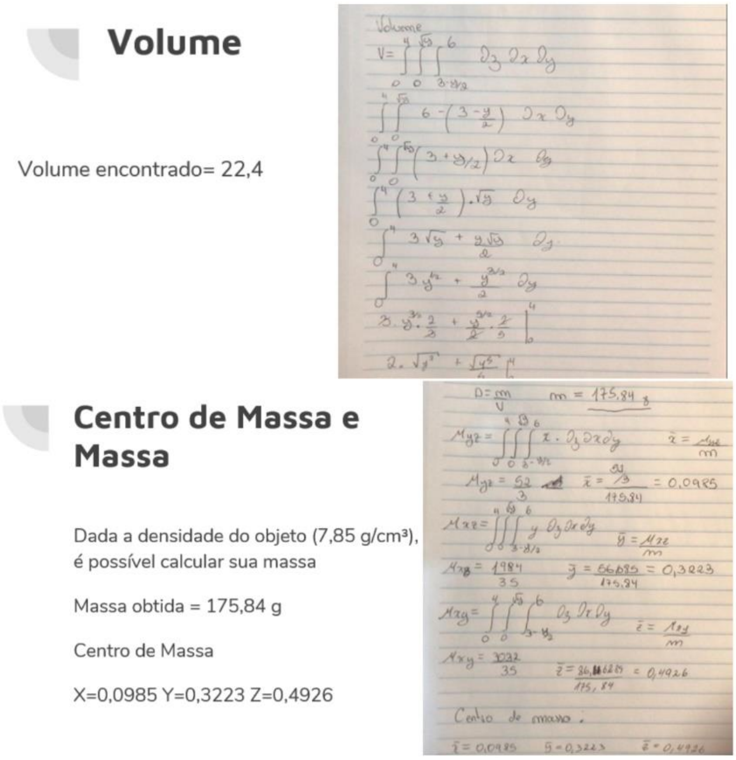
Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo 8, assim como o grupo 4, optou por fazer a apresentação da atividade em formato .ppt, com um .gif da peça no final da apresentação. Os cálculos foram desenvolvidos

[8] Mais informações em: https://www.python.org/

em folha de caderno e colocados na apresentação, sem muita explicação do conteúdo, conforme ilustra a figura 54.

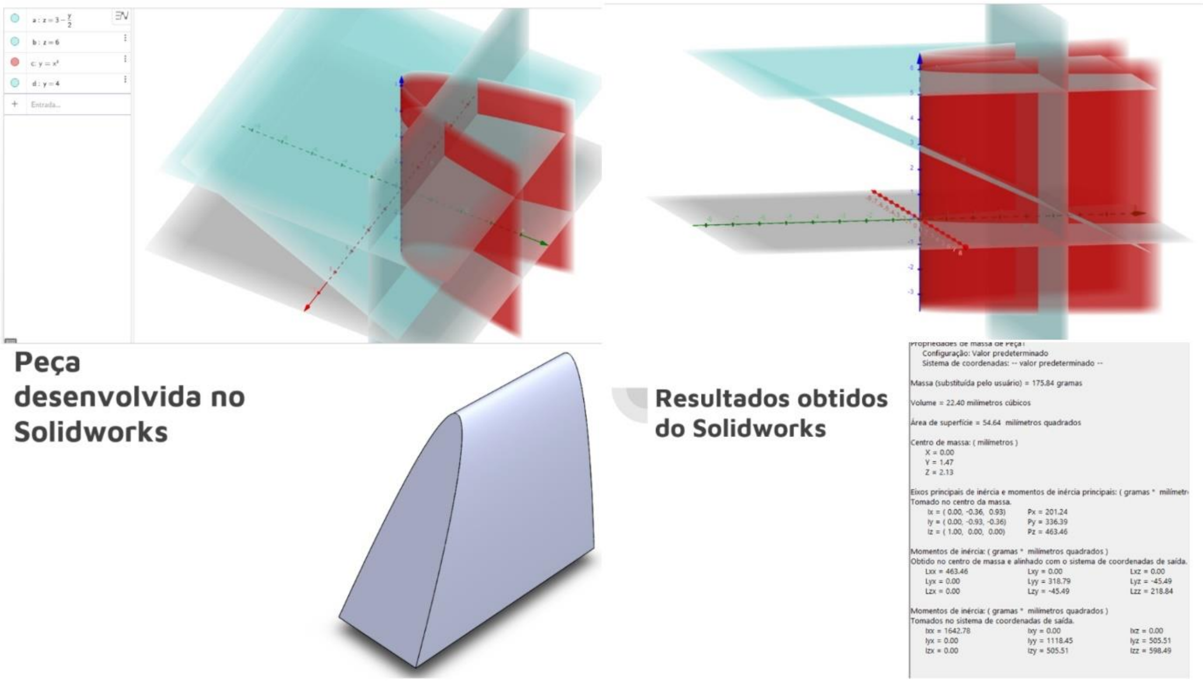
Figura 54- Recortes da Apresentação do Grupo 8.



Fonte: Dados da pesquisa.

Um diferencial desta apresentação, foi que o grupo fez o esboço da peça tanto no GeoGebra, quanto no SolidWorks e ainda disponibilizaram as informações técnicas disponíveis nesse software, como ilustra a figura 55.

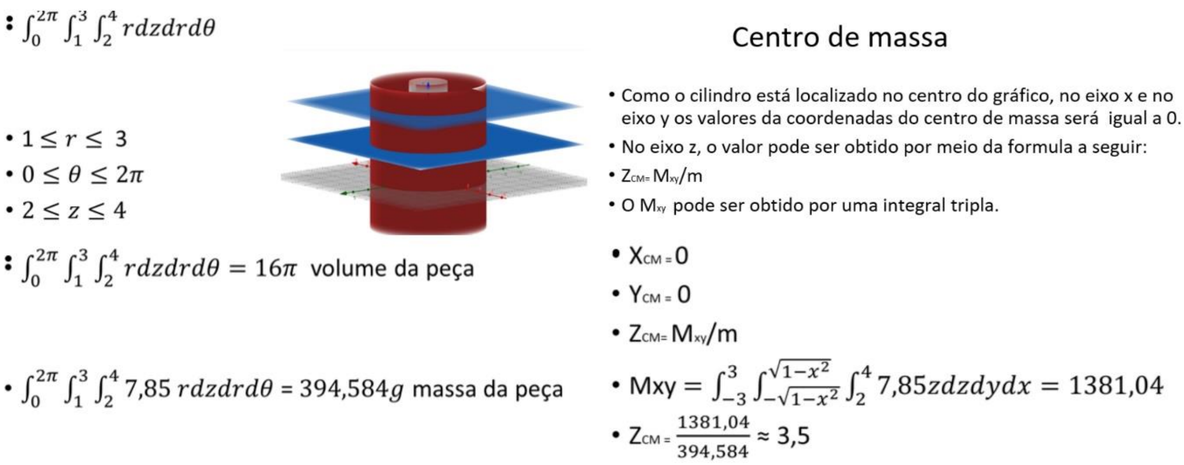
Figura 55 - Recortes da peça feita pelo grupo 8.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo 9 também optou por apresentar o trabalho em formato de .ppt. Porém, diferentemente dos grupos 8 e 4, apresentou um vídeo curto, explicando a produção da peça. Neste trabalho, não foram apresentadas as resoluções das integrais, apenas o resultado final da mesma, conforme ilustra a figura 56.

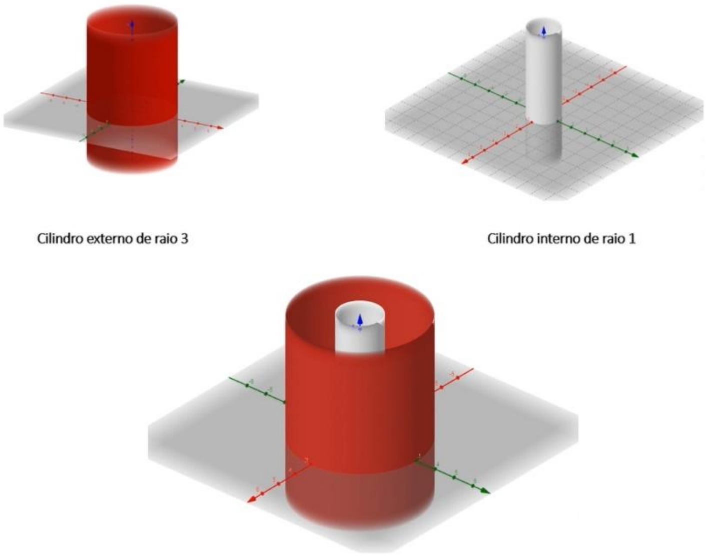
Figura 56- Recortes da Apresentação do Grupo 9



Fonte: Dados da pesquisa.

No vídeo que foi exposto o sólido, o grupo utilizou o GeoGebra também para a produção do mesmo, de acordo com a ilustração da figura 57.

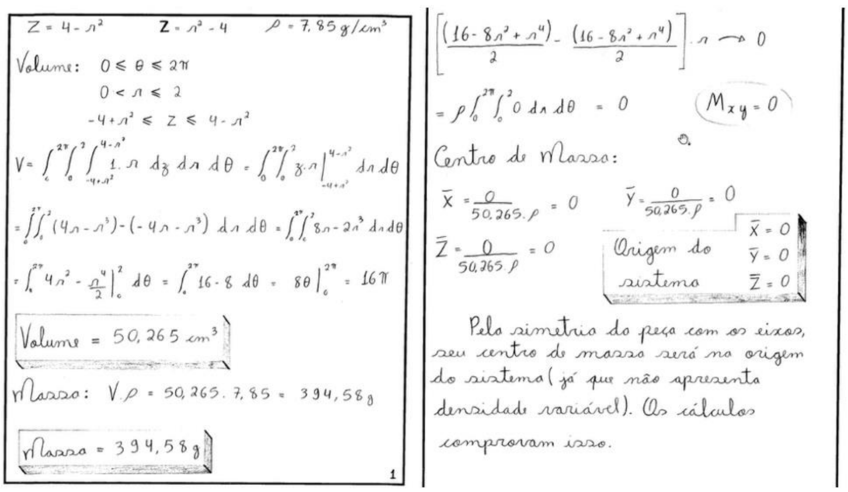
Figura 57 - Recortes do Vídeo mostrando a peça do Grupo 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo 10 optou em seu vídeo, colocar as resoluções das integrais prontas e ir explicando. A resolução apresentada pelo grupo é ilustrada pela figura 58.

Figura 58 - Recortes do Vídeo do Grupo 10



$Z = 4 - r^2$ $\quad Z = r^2 - 4$ $\quad \rho = 7,85\, g/cm^3$

Volume: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 < r \leq 2$

$-4 + r^2 \leq Z \leq 4 - r^2$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-4+r^2}^{4-r^2} 1.\, r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 z.r\Big|_{-4+r^2}^{4-r^2} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r - r^3) - (-4r - r^3)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 8r - 2r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 4r^2 - \frac{r^4}{2}\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 16 - 8\, d\theta = 8\theta\Big|_0^{2\pi} = 16\pi$$

$\boxed{\text{Volume} = 50,265\ cm^3}$

Massa: $V.\rho = 50,265 . 7,85 = 394,58\,g$

$\boxed{\text{Massa} = 394,58\,g}$

1

$$\left[\frac{(16 - 8r^2 + r^4)}{2} - \frac{(16 - 8r^2 + r^4)}{2}\right] . r \rightarrow 0$$

$$= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^2 0\, dr\, d\theta = 0 \qquad M_{xy} = 0$$

Centro de Massa:

$\bar{X} = \frac{0}{50,265.\rho} = 0$ $\quad \bar{Y} = \frac{0}{50,265.\rho} = 0$

$\bar{Z} = \frac{0}{50,265.\rho} = 0$

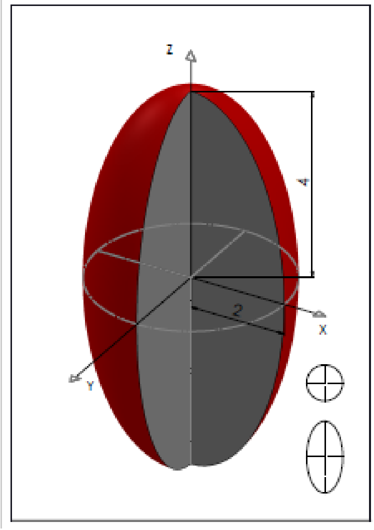
Origem do sistema $\quad \bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = 0$

Pela simetria da peça com os eixos, seu centro de massa será na origem do sistema (já que não apresenta densidade variável). Os cálculos comprovam isso.

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses alunos fizeram um vídeo curto, e disponibilizaram a imagem da figura gerada no Solidworks em .pdf , conforme ilustra a figura 59.

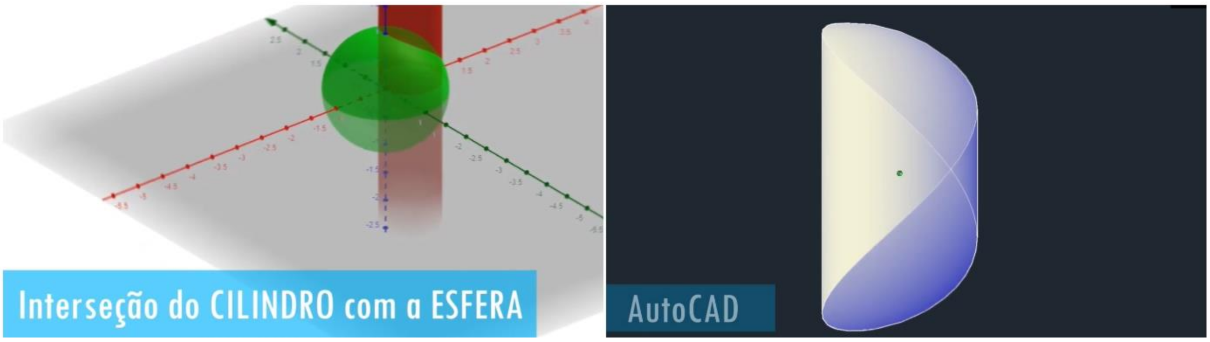
Figura 59 - Sólido Gerado pelo Grupo 10



Fonte: Dados da pesquisa.

O trabalho do grupo 11, começa mostrando o sólido gerado pela interseção das duas superfícies no GeoGebra, e após isso, mostra como fica o sólido gerado pelo AutoCAD[9]. Observamos que o AutoCAD é um software pago, é utilizado para a elaboração de peças e desenhos técnicos em duas e três dimensões. É um software muito utilizado em todos os cursos de Engenharia. A figura 60 ilustra essas duas etapas do vídeo.

Figura 60 - Sólidos gerados no GeoGebra e no AutoCAD pelo Grupo 11.



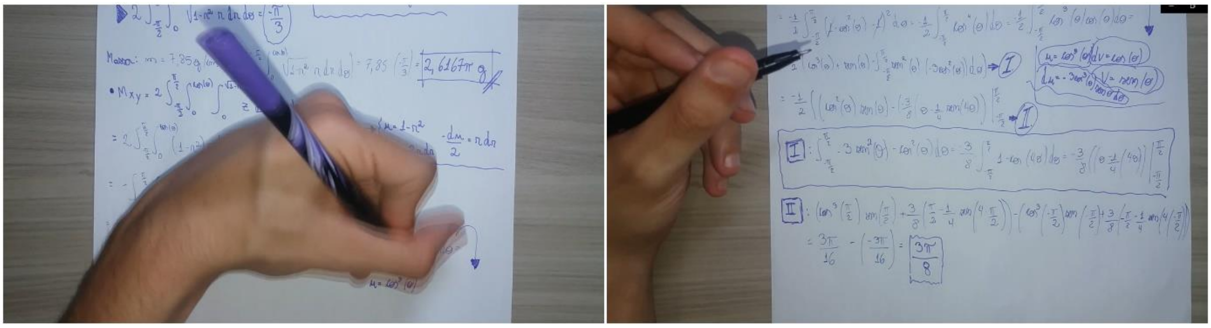
Fonte: Dados da pesquisa.

---

[9] Disponível em: https://autode.sk/2Ozi17u

Após a apresentação da representação da figura em $\mathbb{R}^3$, o vídeo apresenta a resolução das equações, também no estilo de um vídeo aula. Observamos que nesse caso, diferente do Grupo 6, não apresenta narração, apenas os cálculos feitos a mão, conforme ilustra os recortes da figura 61.

Figura 61 - Recortes do Vídeo do Grupo 11.

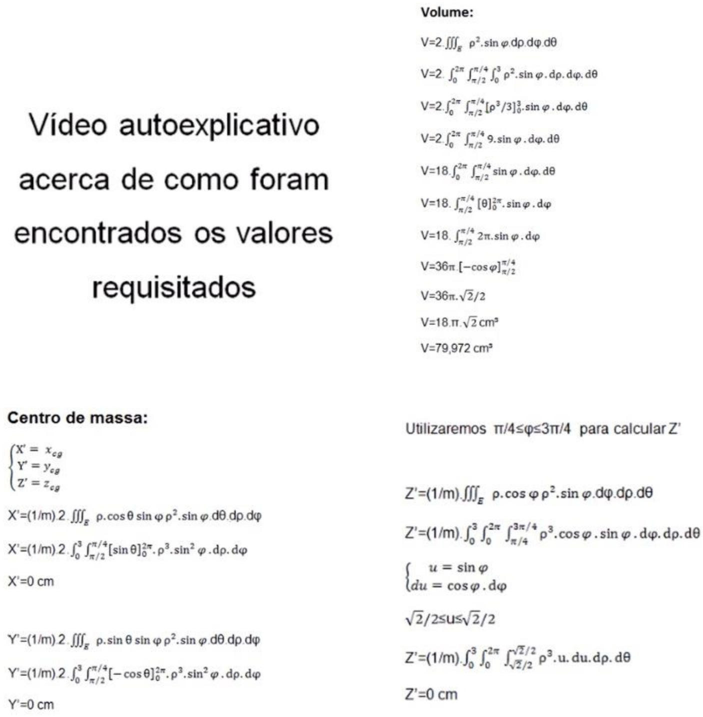


Fonte: Dados da pesquisa.

Os Grupo 12 e 14, optaram também por não realizar a atividade. O Grupo 12 relatou que como o trabalho não era obrigatório para a disciplina, e não afetaria o desempenho dos integrantes, eles optaram por não realizar a atividade. A justificativa foi que estavam se encaminhando para o final de semestre e já estavam com muitas coisas para fazer. Em contraponto, o Grupo14, apenas não entregou.

O grupo 13, apresentou um vídeo de curta duração que não possuía narração, apenas uma música de fundo. Os alunos relataram que o vídeo é ”autoexplicativo”. Nesse caso o vídeo mostra as resoluções das integrais digitadas, conforme ilustra a figura 62.

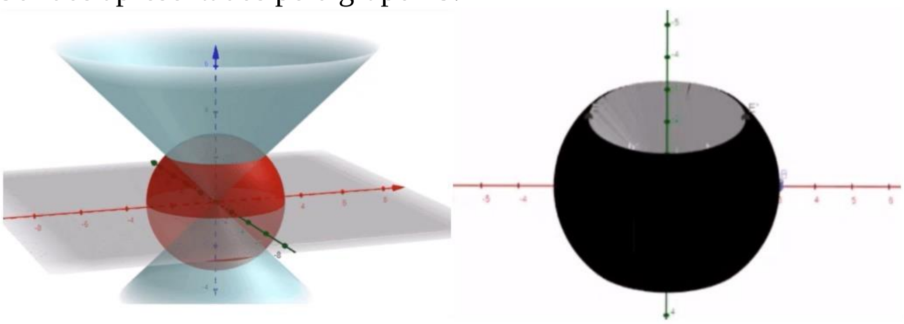
Figura 62 - Recortes do Vídeo do Grupo 13.



Fonte: Dados da pesquisa.

Um diferencial que pode ser notado neste grupo, foi o fato de apresentar o sólido gerado através de uma superfície de revolução. Em um primeiro momento os alunos apresentam o gráfico das duas equações entregues ao grupo, e após é mostram a superfície gerada pela curva rotacionada, em torno do eixo y, como ilustra a figura 63.

Figura 63 - Sólidos apresentados pelo grupo 13.

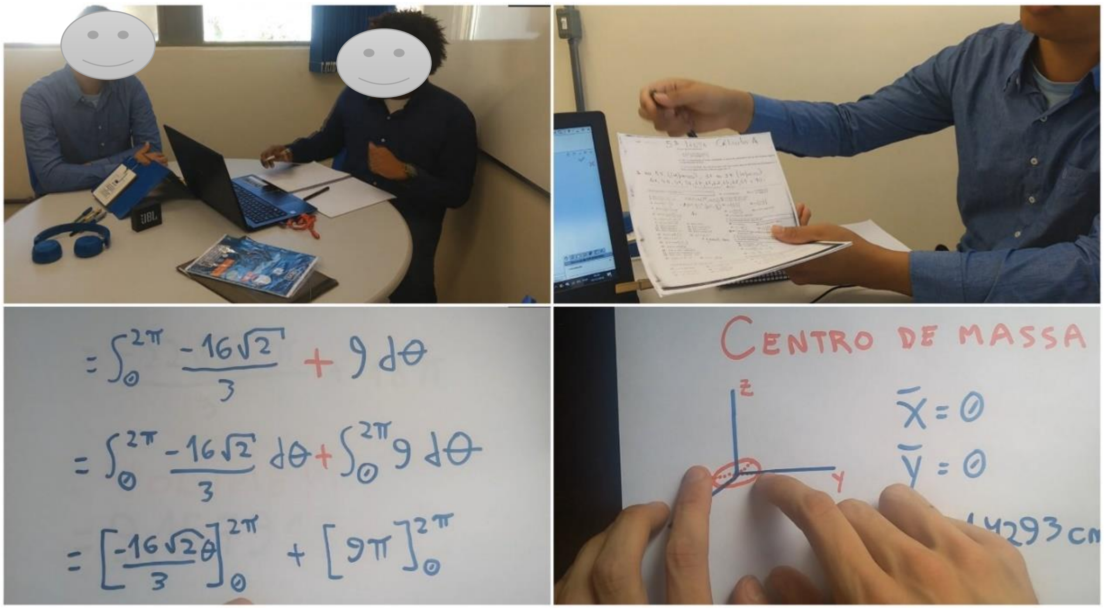


Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos do Grupo 15 simularam que estavam em um escritório e receberam a encomenda da peça, o que nos apresenta elementos teatrais, que se encaixam em uma PMD. O vídeo apresentou características de cenário e enredo, dando bastante ênfase aos elementos que destacamos no Quadro 4. Algumas cenas estão ilustradas na figura 64.

Nesta figura 64, é ilustrado duas cenas da simulação dos alunos no escritório recebendo a peça, e duas cenas onde explicam o desenvolvimento dela a partir das integrais múltiplas. Sobre as integrais, o grupo não apresentou problemas na resolução, desenvolvendo de maneira satisfatória os cálculos para as peças.

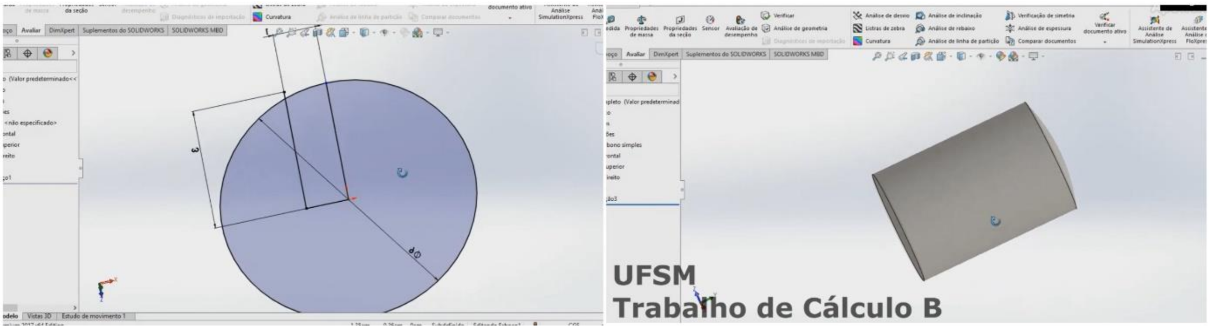
Figura 64 - Recortes do Vídeo do Grupo 15.



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste grupo também, foi apresentado o sólido gerado em SolidWorks, onde o grupo se preocupou em mostrara a produção da peça, conforme ilustra a figura 65.

Figura 65 - Recortes do Sólido Gerado pelo grupo 15.



Fonte: Dados da pesquisa.

De um modo geral, a atividade correspondeu à expectativa do pesquisador, pois os vídeos dos grupos 1, 3, 5 e 15 apresentaram características de PMD, pois neles, temos elementos de narrativos, e certas interpretações, relacionando a matemática e a arte.

Além disso, concluímos nossa UEPS com êxito, pois percebemos que houve indícios de aprendizagem significativa nas atividades, visto que houve engajamento dos alunos, e não foram identificados erros matemáticos nas atividades propostas.

A atividade agradou a grande maioria dos acadêmicos. Essa conclusão foi embasada no último questionamento: “ Você acredita que o trabalho proposto, auxiliou na sua aprendizagem na Disciplina MTM – 1020? De que maneira? ”. As respostas obtidas, foram organizadas no Quadro 5.

Quadro 5 – Compreensão dos alunos quanto a atividade realizada.

Aluno:	Repostas Obtidas no Questionamento:
Aluno 1	Sim, ajudou a desenvolver a solução de um problema proposto pelo professor.
Aluno 2	Sim. Com ele podemos ver alguns exemplos de aplicação e corroborar os conhecimentos obtidos da disciplina na "prática".
Aluno 3	Sim. O método em que ele foi proposto permitiu com que buscássemos o conhecimento e reforçar o aprendizado transmitindo a maneira com a qual aprendemos para os demais colegas.
Aluno 10	Sim, pois proporcionou um envolvimento maior com a disciplina.
Aluno 11	Sim, pois acrescentou horas de estudo às horas aula, tendo também oportunizado chances de interação entre os alunos da disciplina.

Aluno 13	Sim. Além de ajudar na compreensão da disciplina (pois o aluno precisa ter certo domínio sobre o que estará falando), propõe algo diferente que instiga a criatividade e desenvolve a comunicação. Foi uma proposta genial.
Aluno 15	Sim, ao meu ver aprendemos muito mais com esses trabalhos, pois dispomos de muito mais tempo pesquisando e estudando, do que se fossemos nos preparar para uma prova.
Aluno 16	Sim, porque possibilita aplicar conteúdos aprendidos.
Aluno 17	Sim, porque aplicações sempre acabam despertando maior interesse do que simplesmente exercícios gerais de fixação.
Aluno 18	Acredito que mostra que você aprendeu.
Aluno 19	Sim, pois propõe uma abordagem que incentiva o aprendizado conforme o trabalho é realizado, diferentemente de uma avaliação .
Aluno 20	Sim, conteúdo bem encaixado com o conteúdo do curso. Inclusive, não visto nada igual até então.
Aluno 22	Consegui aprender o conteúdo de coordenadas, no qual estudando pra prova quase zerei, mas no trabalho onde se tinha um objetivo mais palpável consegui aprender o conteúdo. Creio que se a prova 2 fosse agora, iria bem melhor na nota.
Aluno 23	Proporcionou aos alunos um momento de pesquisa e estudo relacionados a questões as quais ainda não tinha-se total domínio. Dessa forma foi possível aprofundar ainda mais o conteúdo e consequentemente o conhecimento de todos.
Aluno 24	Ajudou, a forma pratica auxilia a melhor compreensão e aplicabilidade da disciplina, justificando, disciplinas que você não entende suas serventias, é normal ter menos interesse e menor aprendizado
Aluno 25	Sim, ele demonstrou que algumas partes do conteúdo estão interligadas e isso me fez correr atrás de um conteúdo específico para poder fazer o trabalho.
Aluno 26	Pois ele nos faz ir a fundo e buscar alguns pontos do conteúdo, os quais não iríamos por conta própria ou via avaliações normais.
Aluno 27	Sim. Pois além de observar uma aplicação prática do que estou aprendendo na disciplina, o trabalho proposto está bem completo (abordando vários conteúdos da disciplina). Dessa forma, precisei me esforçar para resolver

	sozinho a questão (e somente depois discuti-la com o grupo). Foi muito bom pois realmente aprendi a fazer.
Aluno 28	Sim, para mim, aluno com uma certa de falta de empenho com os estudos, me obrigou a estudar ainda mais a matéria e a atividade em grupo beneficia quem tem menos domínio da mesma, uma vez que os integrantes do grupo se disponibilizam a ajudar.
Aluno 29	sim, pois as aplicações abordadas no trabalho auxiliam no conhecimento da disciplina
Aluno 30	Acredito que sim, uma vez que ele relaciona a teoria com a sua utilização nos problemas da engenharia e da sociedade.
Aluno 31	Sim, de modo que trouxe uma discussão para o grupo e um interesse em aplicar conhecimentos já adquiridos em sala de aula.
Aluno 32	Sim, o trabalho ajudou a aproximar a matéria aprendida em sala das tarefas do campo da engenharia que necessitam do conhecimento de integrais
Aluno 33	Trouxe uma nova perspectiva para o entendimento da matéria.

Fonte: Dados da pesquisa.

Sendo assim, afirmamos que com as respostas que obtivemos no questionário, a atividade foi de grande valia, pois mostrou uma parte prática do cálculo que muitas vezes é trabalhado as fórmulas, sem dar significado, mostrando aos acadêmicos a sua aplicabilidade no curso que irão se formar, pois entendemos que o ensino mecânico nem sempre é eficaz.

Em suma, trabalhar com uma UEPS do contexto do aluno, o auxilia a atribuir significado para aquilo que ele está estudando, trazendo novas perspectivas do conteúdo, através da PMD.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema de pesquisa que foi colocado nesse trabalho consistia do seguinte questionamento: Como a implementação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) fundamentada pelo uso das tecnologias digitais (TD) pode favorecer a aprendizagem significativa para o ensino de Integrais Múltiplas?

Tendo em vista os dados que obtivemos na execução desta pesquisa, acredita-se que o material proposto como UEPS tenha atendido as expectativas dos passos sugeridos por Moreira (2011). Este trabalho mostrou-se como potencialmente significativo, pois resgatou subsunsores necessários e aprofundou o conhecimento trabalhado na disciplina.

Entendemos também, que este trabalho tenha sido relevante e satisfatório, pois foi avaliado positivamente pelos alunos, onde eles relataram que a proposta os ajudou a dar significado aos conteúdos vistos durante o semestre letivo da disciplina de Cálculo B. O que proporcionou aos alunos perceber que a disciplina vai além da teoria, e que está diretamente ligada ao curso que estão fazendo. Acreditamos que os alunos puderam compreender que a matemática não serve somente para dar base à outras disciplinas do curso, mas para complementar.

Acreditamos que esta pesquisa foi de grande relevância para a vida acadêmica desses alunos, pois proporcionou uma visão diferente daquela de costume do ensino do Cálculo. As atividades propostas trouxeram possibilidades de ver o Cálculo dentro da sua realidade, dando ênfase a algo diferente do dito tradicional, contribuindo para a formação dos mesmos.

Trazer as PDM para o trabalho e para as análises, contribuiu com a fuga do tradicional, implementando um trabalho diferenciado, contribuindo para o ensino da disciplina, pois a partir dela fazemos os alunos ver a disciplina de um jeito diferente do que estão acostumados.

Concluímos entendendo que, a partir das referências aqui citadas, a magnitude de buscarmos maneiras diferentes de ensinar matemática, como por exemplo o uso das PMD na sala de aula, possibilitando uma ligação mais próxima do conteúdo com os alunos. Com isso foi possível apontar para a importância de atribuir significados aos conteúdos, utilizando situações práticas, buscando uma contextualização do para o aluno. Acreditamos que a partir do que foi realizado nessa turma, houve a possibilidade de sanar aqueles questionamentos: ”onde vamos usar isso? “’ ou ainda ”para que devo aprender isso? ” e não somente para o estudante passar nas suas provas e ir para o próximo ano escolar ou semestre letivo da Universidade.

O processo descrito nesta dissertação apenas apresenta seus primeiros passos, pois aqui mostramos perspectivas sobre o ensino do cálculo, de um modo que tentamos fazer mais agradável e ao mesmo tempo de maneira eficiente, fazendo o uso das Performances Matemáticas Digitais, que ainda é um ramo emergente dentro da Educação Matemática. Com isto, pretende-se avançar com esta pesquisa em relação ao futuro da matemática com o uso das artes na sala de aula, continuando dando ênfase aos cursos de Ensino Superior, com um olhar mais minucioso aos dados deste trabalho, na busca de mais informações e melhorando o entrelaçamento da pesquisa com o referencial teórico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H. R. F. L. Das **Tecnologias às Tecnologias Digitais e seu uso da Educação Matemática.** Nuances: estudos sobre Educação, v. 26, n. 2, p. 222–239, 2016.

ANTON, H. **Cálculo** / Howard Anton, Irl Biven, Stephen Davis; tradução Claus Ivo Doering. – 8 ed. – Porto Alegre: Bookman, 2007. 672 p.

AUSUBEL, D. P. **Educacional Psychology: A cognitive view.** Nova Yorkm Holt, Rinehart and Winston Inc., 1968.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D & Hanesian, H. ***Psicologia Educacional***. Rio de Janeiro: Editora Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. and Hanesian, H. **Educational psychology: a cognitive view.** 2nd ed. New York, Holt Rinehart and Winston, 1978.

AUSUBEL, D. P**. The Yacquisition and retention of knowledge: A cognitive view.** Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000. 210 p.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. **A presença da tecnologia na Educação Matemática: efetuando uma tessitura com situações/cenas do filme Avatar e vivências em um curso a distância de formação de professores.** ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 1, p. 61–103, 2013.

BORBA, M de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 98p. (Coleção Tendências da Educação Matemática).

BORBA, M. de C. **Informática Trará Mudanças na Educação Brasileira?** Zetetiké, Campinas, SP, v.4, n.6, p.123-134, jul./dez.1996.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; AMARAL, R. B. **Educação a Distância online.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BORBA, M. C. **Softwares e internet na sala de aula de matemática.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. Anais... Salvador: [s.n.], 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G**. Informática e Educação Matemática.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R. DA; GADANIDIS, G. **“Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática”**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

CAVASOTTO, M. **Dificuldade na aprendizagem de cálculo: O que os erros cometidos pelos alunos podem informar.** Dissertação de Mestrado defendida na PUC/RS – Porto Alegre – RS, 2010. 146p.

COMETTI, M. A. **Discutindo o ensino de integrais no cálculo de várias variáveis.** Dissertação de Mestrado defendida na UFOP – Minas Gerais – MG, 2018. 193p.

DIEHL, A. A. **Pesquisa em ciências sociais aplicadas: métodos e técnicas.** São Paulo: Prentice Hall, 2004.

ESCARLATE, A. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral.** Dissertação de Mestrado defendida na UFRJ – Rio de Janeiro – RJ, 2008. 154p.

Felcher, C. D. O. et al. **“Produzindo vídeos, construindo conhecimento: Uma investigação com acadêmicos da Matemática da Universidade Aberta do Brasil”.** Redin-Revista Educacional Interdisciplinar, v. 6, n. 1. 2017.

FELCHER, C. D. O; PINTO, A. C. M; FOLMER, V. **Performance Matemática Digital: O Aluno produzindo vídeos construindo conceitos.** 5° Senid – Cultura digital na educação. Anais do SENID. ISSN 22385916, 2018. Disponível em: <https://bit.ly/2r9jzNE>

FERREIRA, R. S**. Construções com régua e compasso: uma percepção sobre a aprendizagem significativa em tópicos de geometria plana.** Trabalho de Conclusão de Curso defendido em UFSM – Santa Maria – RS, 2017. 55 p.

FREIRE, P. **“Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa”**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa** / [organizado por] Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa** / Antonio Carlos Gil. 5 ed, São Paulo: Atlas, 2017.

GONÇALVES, M. B; FLEMMING, D. M. **Cálculo B: Funções de Várias Variáveis, Integrais Mpultiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície** / 2 ed. – São Paulo : Pearson Prentice Hall, 5ª reimpressão, 2012.

KENSKI, V. M**. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação.** 1. ed. Campinas: Papirus, 2007.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.** 9. ed. São Paulo - SP: Papirus, 2012.

MACHADO, R. M. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP.** Tese de doutorado defendida na UNICAMP – Campinas – SP, 2008. 289p.

MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática in CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. P. 41-62.

MANRIQUE, A. L.; MEIRA, S S. **Aprendizagem significativa e suas contribuições para aprendizagem do Cálculo**, 2013, Montevideo. Anais do VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo – Uruguay: APM, 2013.

MAOR, E. **E: a história de um número**. Tradução de Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo.** Educação Matemática Pesquisa, v. 13, n. 3, 2011.

MELLO, J. M. R. **Conceito de integral: uma proposta computacional para o seu ensino eaprendizagem**. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa.** Dissertação de Mestrado defendida na UFOP – Ouro Preto – MG, 2010. 152p.

MORAN, J. M. **"O vídeo na sala de aula"**. São Paulo: Comunicação & Educação. 1995. Disponível em: < https://bit.ly/34pUZqD>. Acesso em 22 out. 2019.

MOREIRA, M. A. ***A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua Implementação em Sala de Aula.*** Brasília: Editora UnB. 2006.

MOREIRA, M; A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa. Subsídios Teóricos para Pesquisador em Ensino de Ciências.** Porto Alegre, Brasil, 1ª Ed. 2009. Acesso em 22 set. 2018. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios6.pdf.

MOREIRA, M. A**. Potentially Meaningfull Teaching Units - PMTU**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2011.

MOREIRA, M. A; **O que é afinal Aprendizagem Significativa?** (After all, what is meaningful learning?). Porto Alegre. 2010. Disponível em: < https://bit.ly/2qFywau>. Acesso em: 20 nov. 2017

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte – MG: SBEM, 2007.

NOVAK, J. D. GOWIN, D. B. ***Aprender a aprender.*** Lisboa: Plátano Edições Técnicas. 1984.

PAPERT, S. **Mindstorms: children, computers and powerful ideas.** New York: Basic Books, 1980

PIRES, L. F. R. **As influências das tecnologias da informação e comunicação nas estratégias de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** Dissertação de Mestrado defendida na UFJF – Juiz de Fora – MG, 2016. 242 p.

ROCHA, M. D. da. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I**. Dissertação de Mestrado defendida na UFOP – Minas Gerais – MG, 2010. 172 p.

SANTAROSA, M. C. P**. Investigação da aprendizagem em Física Básica Universitária a partir de um Ensino que integra situações e conceitos das disciplinas de Cálculo I e Física I**. Tese de doutorado defendida na UFRGS – Porto Alegre – RS, 2013. 382p.

SCUCUGLIA, R. **On the nature of students' digital mathematical performance: When elementary school students produce mathematical multimodal artistic narratives.** Alemanha: Verlag/LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

SCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas.** 2006. 145 f. Mestrado – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2006.

SILVA, R. S. R. DA; GREGORUTTI, G. S. **Explorando o Teorema das Quatro Cores em Perfomances Matemáticas Digitais.** BoEM, Joinvile, v.3. n.5, p. 02-17, ago./dez. 2015.

SOARES, E. M. do S.; SAUER, L. Z**. Um novo olhar sobre a aprendizagem de matemática para a engenharia**. In: CURY. Disciplinas matemáticas em cursos superiores. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1** / James Stewart; tradução EZ2 Translate. – São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, J. **Cálculo, volume 2** / James Stewart; tradução EZ2 Translate. – São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TORRES, T. I. M; GIRAFFA, L. M. M. **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao Moodle.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.1, p.18-25, UFSC: 2009.

UFSM. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Engenharia Mecânica**. Versão 2019. Disponível em < https://bit.ly/35zBKuT >. Acesso 23 de Setembro de 2019.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: SP – UNICAMP/NIED. 2002. 156p.

VINNER, S. **O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.** Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65-81. 1991.

VILARREAL, M. E**. O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.

Apêndice A – Questionário Inicial

Questionário Inicial da Disciplina MTM1020 – Cálculo B

Projeto de Pesquisa: Obstáculos na aprendizagem de Funções de Duas Variáveis

Pesquisador: Luis Felipe Tatsch Schmidt

Orientadora: Profª. Drª. Carmen Vieira Mathias

Período: 2º semestre de 2018

Prezado(a) aluno(a) !

O grupo de pesquisa Ensino de Matemática, composto por pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, atualmente está realizando uma pesquisa que busca analisar quais são os obstáculos na aprendizagem de alguns tópicos relacionados a funções de duas variáveis. O presente questionário faz parte da pesquisa de mestrado do professor Luis Felipe Tatsch Schmidt. Observamos que todos os dados obtidos serão confidenciais. Esperamos contar com a sua colaboração e desde já agradecemos sua disponibilidade !

Solicitamos que o questionário seja respondido na ordem que se apresenta, pois acreditamos que dessa forma os objetivos aos quais ele se destina, serão atingidos de forma fidedigna.

Parte 1

1) O que é uma antiderivada? O que ela representa?

2) O que é uma integral definida? O que ela representa?

3) Calcule as antiderivadas indicadas:

a) $\int x^{\frac{3}{4}}\, dx$

b) $\int \left(\dfrac{\sqrt{x} - 4x^2}{x} \right) dx$

4) Determine a área da região limitada pelas curvas $x = 1 + y^2$ e $y = x - 7$.

5) Resolva as integrais:

a) $\int_{0}^{\pi} \cos(x)\,dx$

b) $\int_{1}^{e^2} \frac{(\ln(x))^3}{x}\,dx$

c) $\int x.\text{sen}(x)\,dx$

d) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

e) $\int \frac{x-3}{(x+4)(x-5)}\,dx$

Parte 2

1) Identifique, e faça um esboço da superfície do $\mathbb{R}^3$ dada:

a) $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$.

b) $z = y^2 - x^2$.

c) $z = x^2$

2) Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leq z \leq 2$.

Parte 3

1) Como você descreveria sua experiência na disciplina MTM 1019 – Cálculo A?

____

____

____

____

____

____

2) Em qual semestre você cursou a disciplina de Cálculo A?

(   ) 2018/1

(   ) 2017/2

(   ) 2017/1

(   ) Outro. Qual? __________

3) Saberia citar um exemplo de onde as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral podem ser aplicadas em alguma prática em seu curso? Se sim, cite-a.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Apêndice B – Problemas Aplicados nos Outros Grupos:

Grupo 2:

⇨ **Delimitado por $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.**

Grupo 3:

⇨ **No primeiro octante, delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + z^2 = 16$**

Grupo 4:

⇨ **Delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$ e o plano $z = 8 - x - y$.**

Grupo 5:

⇨ **Região delimitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 3z$.**

Grupo 6:

⇨ **Delimitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 5$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$.**

Grupo 7:

⇨ **Interior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$.**

Grupo 8:

⇨ **Limitado inferiormente por $z = 3 - \frac{y}{2}$, superiormente por $z = 6$ e lateralmente pelo cilindro vertical que contorna a região limitada por $y = x^2$ e $y = 4$.**

Grupo 9:

⇨ **Região dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$, fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 2$ e $z = 4$.**

Grupo 10:

⇨ **Região delimitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2 - 4$.**

Grupo 11:

⇨ **Interior do cilindro $x^2 - x + y^2 = 0$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.**

Grupo 12:

⇨ **Interior a $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e exterior a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.**

Grupo 13:

⇨ **Exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.**

Grupo 14:

⇨ **Região onde é delimitada lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acima por $z = x^2 + y^2 + 3$ e abaixo por $z = 1 - x^2 - y^2$.**

Grupo 15:

⇨ **Região acima do plano xy e interior às superfícies $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$.**