

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

Luciano Mello Raguzzoni

**ANÁLISE DE UMA LAJE MACIÇA UTILIZANDO-SE O MÉTODO DAS
TABELAS E O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE**

Santa Maria, RS

2019

Luciano Mello Raguzzoni

**ANÁLISE DE UMA LAJE MACIÇA UTILIZANDO-SE O MÉTODO DAS TABELAS E
O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia Civil,
da Universidade Federal de Santa Maria,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof. ^a Dr. ^a Larissa Degliuomini Kirchhof

Santa Maria, RS
2019

Luciano Mello Raguzzoni

**ANÁLISE DE UMA LAJE MACIÇA UTILIZANDO-SE O MÉTODO DAS TABELAS E
O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia Civil,
da Universidade Federal de Santa Maria,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 19 de Julho de 2019:

.....
Larissa Degliuomini Kirchhof, Prof. Dra. (UFSM)
(Orientadora)

.....
Almir Barros da Silva Santos Neto, Prof. Dr. (UFSM)

.....
André Lübeck, Prof. Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

RESUMO

ANÁLISE DE UMA LAJE MACIÇA UTILIZANDO-SE O MÉTODO DAS TABELAS E O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE

AUTOR: Luciano Mello Raguzzoni

ORIENTADORA: Larissa Degliuomini Kirchhof

Este trabalho tem como objetivo de estudo analisar uma laje maciça, comparando os resultados obtidos entre dois métodos de cálculo: Método das Tabelas e Método de Analogia de Grelha Equivalente. O primeiro método é usualmente ensinado em sala de aula, nos cursos de Engenharia Civil, por ser um método simples para o cálculo de lajes maciças e nervuradas. O segundo é comumente utilizado em *softwares* de cálculo estrutural para a análise destas estruturas. A comparação dos resultados destes dois métodos de cálculo se torna importante para analisar o uso de cada método na hora do cálculo estrutural da laje maciça. Para a realização desta comparação, foi abordado estudos e conceitos pertinentes e realizado os cálculos estruturais através dos dois métodos. Utilizou-se o software SAP2000 V12 para o cálculo e modelagem de diversos modelos estruturais da grelha equivalente. Assim, comparando os resultados obtidos pelos dois métodos, foi possível compreender as diferenças do uso de cada método para basear na escolha do projetista.

Palavras-chave: Método das Tabelas. Método de Analogia de Grelha Equivalente. Cálculo Estrutural. Laje Maciça.

ABSTRACT

ANALYSIS OF A SLAB USING THE TABLE'S METHOD AND THE EQUIVALENT GRILLAGE ANALOGY METHOD

AUTHOR: Luciano Mello Raguzzoni
ADVISOR: Larissa Degliuomini Kirchhof

This work aims to analyze a slab, comparing the results obtained between two calculations methods: Table's Method and Equivalent Grillage Analogy Method. The first method is usually taught in the classroom in Civil Engineering courses, as it is a simple method for the calculation of slab and ribbed slabs. The second is normally used in structural analysis software for the analysis of these structures. The comparison of the results of these two calculations methods becomes important to analyze the use of each method at the time of the structural calculation of the slab. To carry out this comparison, relevant studies and concepts were approached and the structural analysis were performed through the two methods. The software SAP2000 V12 was used for the calculation and modeling of some structural models of the equivalent grillage. Then, comparing the results obtained by the two methods, it was possible to understand the differences in the use of each method and to base the designer's choice.

Keywords: Table's Method. Equivalent Grillage Analogy Method. Structural Analysis. Slab.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Tipos de lajes e suas vinculações com a borda.....	14
Figura 02 – Área de influência dos nós e das barras.....	19
Figura 03 – Barra de borda da grelha.....	20
Figura 04 – Trechos rígidos.....	21
Figura 05 – Área de influência das barras.....	28
Figura 06 – Vista superior da malha.....	29
Figura 07 – Corte esquemático da laje.....	29
Figura 08 – Restrições consideradas (Modelo 1).....	29
Figura 09 – Restrições consideradas (Modelo 2).....	30
Figura 10 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 1.....	31
Figura 11 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 2.....	31
Figura 12 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 3.....	32
Figura 13 – Eixo de rotação no centro de gravidade da seção.....	32
Figura 14 – Eixo de rotação deslocado para o ponto A.....	33
Figura 15 – Corte esquemático da laje com as vigas.....	33
Figura 16 – Trecho rígido horizontal da ligação laje-viga.....	34
Figura 17 – Vista superior (Modelo 4).....	34
Figura 18 – Restrições consideradas (Modelo 4).....	35
Figura 19 – Restrições consideradas (Modelo 5).....	36
Figura 20 – Trecho rígido vertical da ligação laje-viga.....	36
Figura 21 – Diagrama de momento fletor (Modelo 1).....	39
Figura 22 – Deformada com escala aumentada (Modelo 1).....	39
Figura 23 – Diagrama de momento fletor (Modelo 2).....	40
Figura 24 – Deformada com escala aumentada (Modelo 2).....	40
Figura 25 – Diagrama de momento fletor (Modelo 3).....	41
Figura 26 – Deformada com escala aumentada (Modelo 3).....	41
Figura 27 – Diagrama de momento fletor (Modelo 4).....	42
Figura 28 – Deformada com escala aumentada (Modelo 4).....	42
Figura 29 – Diagrama de momento fletor (Modelo 5).....	43
Figura 30 – Deformada com escala aumentada (Modelo 5).....	43

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 – Valores do coeficiente γ_{f2}	17
Quadro 02 – Valores do coeficiente ξ em função do tempo.....	17
Quadro 03 – Valores de razões J/I	24
Quadro 04 – Coeficientes adimensionais.....	26
Quadro 05 – Resultados dos momentos fletores e deslocamentos.....	37
Quadro 06 – Diferença dos momentos positivos entre os métodos.....	44
Quadro 07 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de momento positivo da laje.....	45
Quadro 08 – Influência do uso de trecho rígido nos resultados de momento positivo.....	45
Quadro 09 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de momento negativo da laje com a Viga 01.....	46
Quadro 10 – Influência do uso de trecho rígido nos resultados de momento negativo.....	47
Quadro 11 – Diferença das flechas imediatas da laje entre os métodos.....	48
Quadro 12 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de flecha imediata da laje	48
Quadro 13 - Influência do uso de trecho rígido nos resultados da flecha imediata da laje.....	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	8
1.2	OBJETIVOS.....	9
1.2.1	Objetivo Geral	9
1.2.2	Objetivos Específicos	9
1.3	JUSTIFICATIVA.....	10
2	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	11
2.1	PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS COM LAJES MACIÇAS.....	11
2.1.1	Cálculo de Lajes em Regime Elástico	11
2.2	MÉTODO DAS TABELAS.....	12
2.2.1	Tabelas de PINHEIRO (1993)	15
2.2.1.1	<i>Cálculo das Reações de Apoio</i>	15
2.2.1.2	<i>Cálculo dos Momentos Fletores</i>	16
2.2.1.3	<i>Cálculo do Deslocamento</i>	16
2.3	MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE.....	18
2.3.1	Carga no modelo de grelha	19
2.3.2	Propriedades Físicas e Geométricas	19
2.3.2.1	<i>Trecho rígido</i>	21
2.3.2.2	<i>Momento de Inércia à Flexão</i>	22
2.3.2.3	<i>Momento de Inércia à Torção</i>	22
3	METODOLOGIA	26
3.1	MÉTODO DAS TABELAS.....	26
3.2	MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE.....	27
3.2.1	Modelo 1	28
3.2.2	Modelo 2	30
3.2.3	Modelo 3	30
3.2.4	Modelo 4	33
3.2.5	Modelo 5	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
4.1	ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS.....	37
4.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	44
4.2.1	Momento Positivo	44
4.2.2	Momento Negativo	46
4.2.3	Deslocamento	47
5	CONCLUSÕES	50
5.1	DIFERENÇAS ENTRE O USO DOS MÉTODOS.....	50
5.2	MOMENTO POSITIVO.....	51
5.3	MOMENTO NEGATIVO.....	51
5.4	DESLOCAMENTO.....	52
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No Brasil, grande parte das estruturas de edifícios atualmente é executada em concreto armado, visto que o concreto é o material estrutural de maior uso na atualidade. O mesmo é empregado na fabricação dos mais diversos tipos de estruturas e sua grande aceitação se deve, principalmente, ao seu custo relativamente baixo, considerável resistência mecânica, baixa permeabilidade, grande disponibilidade dos materiais constituintes e facilidade de produção em diversas formas e tamanhos (MEHTA e MONTEIRO, 2010; NEVILLE, 2015).

Além disso, geralmente, os edifícios de múltiplos andares em concreto armado são executados de maneira tradicional, ou seja, a laje recebendo o carregamento perpendicular ao seu plano e transmitindo às vigas, que por sua vez recebem e transmitem aos pilares e, deste último, para as fundações. Em relação às lajes, existem vários modelos que podem ser utilizados para representá-la estruturalmente, desde modelos mais simplificados como aqueles propostos em tabelas, como mais elaborados, obtidos a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Um dos modelos de cálculo bastante consagrados para a análise de lajes é analogia da grelha equivalente, visto que esta permite a análise de lajes poligonais de diversas formas, incluindo também a contribuição das vigas de apoio, ou seja, consegue-se calcular os esforços no pavimento com um todo, levando-se em conta as deformações da viga (ARAÚJO, 2014). No método por Tabelas, por exemplo, só é possível considerar lajes de geometria bem específica (quadrada ou retangular), além de não se considerar no dimensionamento, o comportamento das vigas do entorno, ou seja, sua rigidez à flexão e à torção. Essa análise estrutural simplificada pode resultar, em alguns casos, em esforços solicitantes diferentes no elemento estrutural, o que deve ser analisado no cálculo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo comparativo dos esforços solicitantes em lajes maciças de concreto armado, utilizando-se o Método das Tabelas e o Método de Analogia de Grelha Equivalente, considerando-se diferentes situações de apoio.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar um estudo comparativo, em termos de resultados de momentos fletores e deslocamentos da análise estrutural de uma laje maciça, entre dois métodos de cálculo: Método das Tabelas e o Método de Analogia de Grelha Equivalente;
- Obter os valores dos esforços da laje através do Método das Tabelas usando as tabelas desenvolvidas por Barés e adaptadas por PINHEIRO (1993);
- Modelar e obter os esforços da laje através do Método de Analogia de Grelha Equivalente, com o auxílio do software SAP2000 V12;
- Comparar os resultados dos esforços de diferentes modelos estruturais pelo Método de Analogia de Grelha, buscando:
 - a) Comparar os resultados dos esforços e deslocamentos entre modelos de grelha equivalente com o uso de vigas e com a desconsideração destas;
 - b) Entender a influência da rigidez das vigas nos momentos fletores e no valor de deslocamento da laje;
 - c) Considerar trecho rígido entre a laje e a viga e analisar sua influência nos resultados dos esforços e deslocamento;
- Analisar quantitativamente os resultados obtidos pelos dois métodos e entre os modelos de grelha equivalente;

1.3 JUSTIFICATIVA

O principal motivo do estudo deste trabalho é realizar um comparativo de resultados entre o Método das Tabelas e o Método de Analogia de Grelha Equivalente. O primeiro método é usualmente usado como primeiro contato dos alunos no cálculo de lajes maciças e nervuradas, pela simplicidade do método. Já o segundo é comumente usado para análise de estruturas espaciais de multi-pavimentos e se faz interessante o seu estudo. O tipo de laje estudada neste trabalho é a laje maciça, visto que é a mais comum entre os edifícios executados em concreto armado.

2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

2.1 PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS COM LAJES MACIÇAS

Segundo GUERRIN (2002), lajes ou placas são caracterizadas por apresentarem duas dimensões, sua largura e seu comprimento, significativamente maiores que sua terceira dimensão, a espessura. Ainda, é o elemento que recebe as sobrecargas, definidas pela ABNT NBR 6120:1980 – Projeto de estruturas de concreto, e carregamentos proveniente do uso da construção, transferindo-os para as vigas ou para os pilares.

Embora essa transferência ocorra com as lajes em regime elástico, o procedimento de cálculo proposto pela ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto, baseia-se no comportamento em regime plástico, a partir da posição aproximada das linhas de plastificação, também chamadas de charneiras plásticas. Esse procedimento é conhecido como processo das áreas (PINHEIRO, 2007).

2.1.1 Cálculo de Lajes em Regime Elástico

Em se tratando de esforços solicitantes e deslocamentos, a análise é geralmente realizada em regime elástico, a partir da Teoria de Placas Delgadas, conhecida como Teoria de Kirchhoff, a qual supõe o material homogêneo, isótropo e elástico linear (ARAÚJO, 2014). Dessa forma, a partir das equações de equilíbrio, das leis constitutivas do material e das relações entre deslocamentos e deformações, obtidas em um elemento infinitesimal, e fazendo-se as operações matemáticas necessárias, obtém-se a equação fundamental que rege o problema de placas, conhecida por Lagrange (TIMOSHENKO, 1959).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (01)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (02)$$

w = função que representa os deslocamentos verticais

p = carga total uniformemente distribuída

D = rigidez a placa à flexão

E = módulo de elasticidade

h = espessura da placa

ν = coeficiente de Poisson

Esta equação é válida para uma placa com rigidez à flexão (D) constante. No entanto, a solução exata da equação diferencial da placa pode ser obtida apenas para uns poucos casos particulares. Em casos gerais, as soluções são obtidas adotando-se expansões em série de Fourier, com duas soluções disponíveis: a solução de Navier e a solução de Lévy (ARAÚJO, 2014). Outra consideração para estas soluções é admitir os apoios indeformáveis, o que não corresponde exatamente a casos de lajes apoiadas em vigas deformáveis.

Em geral, recorre-se a processos numéricos para a resolução dessa equação, como por exemplo, Diferenças Finitas, Elementos Finitos, Elementos de Contorno, ou Analogia de Grelha Equivalente (PINHEIRO, 2007). A seguir, serão descritos os dois métodos de cálculo utilizados neste trabalho para a obtenção dos esforços e deslocamentos: Método das Tabelas e Método de Analogia de Grelha Equivalente.

2.2 MÉTODO DAS TABELAS

Diversas tabelas para o cálculo de esforços e reações de apoio em placas estão disponíveis na literatura, como a de Barés (1972), Hahn (1982) e Kalmanok (1961). Em geral, as diferenças nas tabelas são decorrentes do valor adotado para o coeficiente de Poisson, bem como de aproximações devidas ao truncamento por séries de Fourier (ARAÚJO, 2014).

Pelo Método das Tabelas, o cálculo das reações pode ser realizado pelo Processo das Áreas ou Charneiras Plásticas (PINHEIRO, 2007). Este processo permite calcular as reações de lajes retangulares sob a ação de carregamentos uniformemente distribuídos. Cada apoio apresentará uma área de influência sob a laje que dependerá da rigidez do apoio em questão (engastado ou simplesmente apoiado) e da rigidez do apoio vizinho a este.

As áreas são formadas traçando-se, a partir dos vértices da laje, retas inclinadas que, ao encontrar as retas inclinadas dos outros vértices, formam triângulos

ou trapézios. A NBR 6118:2014 apresenta os ângulos que as restas devem apresentar:

- a) 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
- b) 60° a partir do apoio considerado engastado, se o outro for considerado simplesmente apoiado;
- c) 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Assim, as reações são obtidas multiplicando as áreas de influência com o carregamento da laje. Estas reações são distribuídas uniformemente nas vigas de apoio. Segundo PINHEIRO (2007), este método apresenta uma simplificação de cálculo pois, na verdade, as reações de apoio apresentam uma distribuição não uniforme, com valores máximos na parte central das bordas, diminuindo nas extremidades, em geral.

Já o cálculo dos momentos fletores e forças cortantes, por meio de tabelas, são obtidos por diferenças finitas. Araújo (2014) salienta que o emprego de tabelas para se obter as soluções com a teoria de placas, só é permitido desde que sejam verificadas as seguintes condições:

- a) Lajes quadradas ou retangulares, sem furos;
- b) Apoios rígidos;
- c) Emprego de armaduras canto;
- d) Consideração de cargas triangulares e trapezoidais, ou cargas parcialmente distribuídas, para o cálculo das vigas de apoio;

Na prática, essas condições limitam bastante o seu emprego, já que só podem ser aplicadas em alguns casos. No caso de apoio em vigas, a flexibilidade é desprezada com o uso das tabelas, o que pode resultar em diferenças significativas dos esforços e dos deslocamentos (COELHO, 2000). Para o uso das tabelas, precisamos classificar o tipo de laje, conforme a sua vinculação, e determinar o valor da relação entre o maior vão (l_y) e o menor vão (l_x), λ .

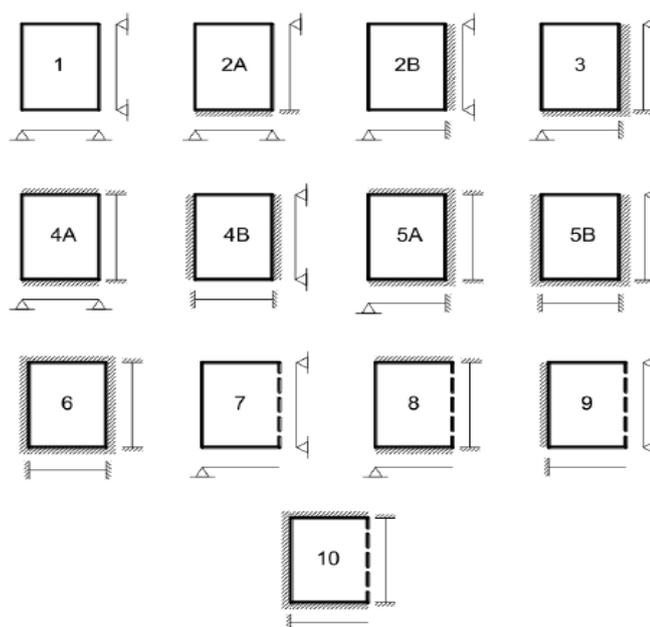
$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (3)$$

O tipo de laje é obtido conforme a vinculação que a laje tem com as suas bordas. Existem três tipos de vinculações nas bordas e são determinadas conforme a análise da estrutura:

- a) Apoiada: quando não há continuidade da laje com lajes vizinhas, representada por uma linha cheia;
- b) Engastada: quando há continuidade da laje, representada por uma linha cheia com linhas a 45° em sua extensão;
- c) Livre: não apresenta apoio, representada por uma linha tracejada;

Na Figura 01 podemos observar os tipos de lajes conforme suas vinculações. O número apresentado no interior da laje representa o tipo da laje.

Figura 01 – Tipos de lajes e suas vinculações com a borda



Fonte: SANTOS NETO (2018).

Com a laje classificada e com a relação entre os vãos calculada, podemos, com o auxílio das tabelas, calcular as reações de apoio, os momentos fletores e o deslocamento. Neste trabalho utilizaremos as tabelas desenvolvidas por Barés e adaptadas por PINHEIRO (1993).

2.2.1 Tabelas de PINHEIRO (1993)

As tabelas de PINHEIRO (1993) foram baseadas nas de BARES (1972), com coeficiente de Poisson igual a 0,15, e feitas algumas correções nos valores obtidos pelo processo das áreas. Estas correções previnem a possibilidade de os momentos nos apoios atuarem com intensidades menores que as previstas. Quando isto ocorre, o alívio na borda apoiada, decorrente do momento na borda oposta, não acontece com o valor integral. Para não correr o risco de considerar reações de apoio menores do que aquelas que efetivamente possam acontecer, os alívios foram considerados pela metade. (PINHEIRO, 2007).

2.2.1.1 Cálculo das Reações de Apoio

Como já comentado, o cálculo das reações nos bordos pode ser feito com o processo das áreas ou com o uso de tabelas, como as apresentadas em PINHEIRO (1993). As tabelas nos fornecem coeficientes adimensionais (v_x , v'_x , v_y , v'_y), que dependem do tipo da laje e de λ , com os quais se calculam as reações de apoio com as seguintes equações:

$$V_x = v_x \frac{p lx}{10} \quad (4)$$

$$V'_x = v'_x \frac{p lx}{10} \quad (5)$$

$$V_y = v_y \frac{p lx}{10} \quad (6)$$

$$V'_y = v'_y \frac{p lx}{10} \quad (7)$$

Onde lx é o menor vão da laje e p é o carregamento uniformemente distribuído na laje. As letras x e y correspondem a direção das reações de apoio.

2.2.1.2 Cálculo dos Momentos Fletores

O cálculo dos momentos fletores com o uso das tabelas apresenta metodologia similar ao do cálculo das reações de apoio. As tabelas fornecem os coeficientes adimensionais (μ_x , μ'_x , μ_y , μ'_y) e o cálculo é feito com as seguintes equações:

$$M_x = \mu_x \frac{p l_x^2}{100} \quad (8)$$

$$M'_x = \mu'_x \frac{p l_x^2}{100} \quad (9)$$

$$M_y = \mu_y \frac{p l_x^2}{100} \quad (10)$$

$$M'_y = \mu'_y \frac{p l_x^2}{100} \quad (11)$$

O resultado é dado por unidade de largura e, o apóstrofo presente na variável dependente, significa que o momento calculado é negativo.

2.2.1.3 Cálculo do Deslocamento

O deslocamento no meio do vão, mais comumente chamado de flecha, pode ser calculado com o uso das primeiras tabelas. O cálculo da flecha imediata da laje é realizado usando a seguinte equação:

$$\alpha_i = \frac{\alpha p l_x^4}{12 E I} \quad (12)$$

Nessa equação, o valor de α é retirado da tabela conforme o tipo de laje, o tipo de carregamento e λ . Conforme orientação da NBR 6118:2014, a variável p , para o cálculo da flecha imediata, será a soma da carga permanente com a sobre carga multiplicada pelo fator de redução ψ_2 (tabela 11.2 da NBR 6118:2014, Quadro 01).

Quadro 01 – Valores do coeficiente γ_{f2}

Ações		γ_{f2}		
		ψ_0	ψ_1^a	ψ_2
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas ^b	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas ^c	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

^a Para os valores de ψ_1 relativos às pontes e principalmente para os problemas de fadiga, ver Seção 23.
^b Edifícios residenciais.
^c Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

Fonte: tabela 11.2 da NBR 6118:2014.

Antes de calcularmos a flecha total, precisamos da flecha diferida no tempo, α_f . Essa flecha depende de um coeficiente que é função do tempo, ξ (que pode ser obtida na tabela 17.1 da NBR 6118:2014, Quadro 02, conforme o tempo que se deseja obter o valor da flecha) e ρ' , dada pela expressão:

$$\rho' = \frac{A's}{b d} \quad (13)$$

Quadro 02 – Valores do coeficiente ξ em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: tabela 17.1 da NBR 6118:2014.

Onde A_s é a área de aço comprimido (se existir), b a largura da seção transversal e d a altura útil. Com isto, a equação que representa a flecha diferida no tempo é:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (14)$$

Finalmente, com a flecha imediata e com a flecha diferida no tempo, podemos obter a flecha total:

$$\alpha_t = \alpha_i (1 + \alpha_f) \quad (15)$$

2.3 MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE

A analogia de grelha equivalente, de acordo com ARAÚJO (2014), é um dos métodos numéricos mais utilizados para a análise de lajes de concreto armado, estando implementado em diversos softwares comerciais. Além disso, o método pode ser utilizado para análise de lajes poligonais, de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio (FERREIRA DA SILVA, 2003; ARAÚJO, 2014).

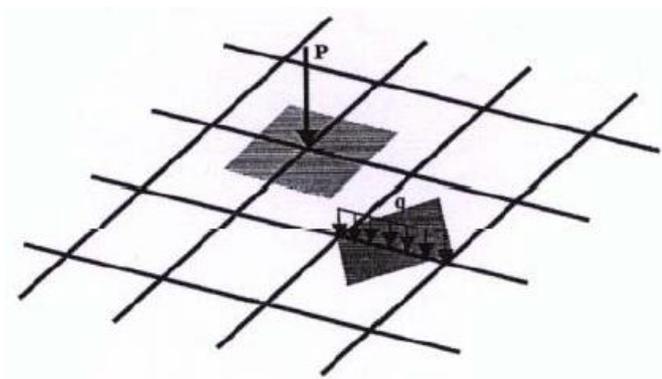
De acordo com STRAMANDINOLI (2003), o procedimento de analogia de grelha consiste em substituir a laje por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente). Além disso, o método permite que sejam levadas em consideração a rigidez à torção e flexão em cada parte da laje. FONTES (2005) afirma que a utilização desse processo é pouco comum no cálculo somente de vigas, porém, as lajes são satisfatoriamente representadas por uma malha de barras.

Uma das vantagens, em relação ao método de tabela, é analisar outras condições de contorno, como vigas deformáveis e lajes apoiadas somente em pilares. Além disso, esse procedimento permite que sejam levadas em consideração as rigidezes dos elementos de apoio, inclusive o procedimento permite avaliar as descontinuidades no diagrama de momentos fletores segundo cada direção, devido à torção das barras na direção ortogonal (ARAÚJO, 2014).

2.3.1 Carga no modelo de grelha

A carga pode ser aplicada nas barras como carga distribuída linearmente ou nos nós como carga concentrada, calculada através da área de influência de cada barra ou nós, como mostra a Figura 02. Em modo geral, as barras e os nós localizados nas bordas recebem menos carregamento, pois apresentam área de influência menor que outros, localizados no restante da malha.

Figura 02 – Área de influência dos nós e das barras



Fonte: STRAMANDINOLI e LORIGGIO (2003).

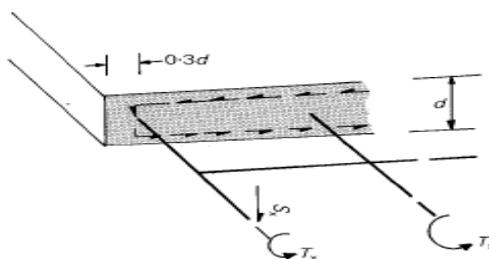
2.3.2 Propriedades Físicas e Geométricas

Para analisar a laje por analogia de grelha, primeiramente devemos dividi-la em faixas que possam ser substituídas por barras, localizadas nos eixos destas faixas. Já as vigas podem ser substituídas por barras exatamente em seus eixos. Na ligação entre a viga e a laje, segundo FERREIRA DA SILVA (2003), podemos considerar uma parte da laje como mesa da viga, configurando uma viga de seção T ou meio T (dependendo da situação). FONTES (2005) enfatiza que quanto mais refinada a malha da grelha, isto é, menor o espaçamento entre as barras, resultados mais precisos serão obtidos. Em contraponto, na pesquisa de STRAMANDINOLI (2003), concluiu-se que não foi a grelha mais refinada (menor espaçamento) que apresentou resultados mais próximos ao da teoria da elasticidade.

HAMBLY (1976) faz algumas considerações sobre a geometria da grelha:

- a) Para garantir a maior precisão possível do protótipo, a barra da grelha localizada na borda deve estar $0,3d$ de distância a partir da borda, onde d é a espessura da laje (Figura 03);
- b) O espaçamento das barras longitudinais e transversais devem ser próximos para permitir a sensibilidade estática da distribuição de cargas;
- c) As barras não devem ficar mais próximas que 2 a 3 vezes a espessura da laje;
- d) O espaçamento máximo, para lajes isotrópicas, não deve passar de $\frac{1}{4}$ do vão efetivo;
- e) Regiões com mudança de seções súbitas, pode-se usar espaçamentos menores, mas não menores que a consideração anterior.

Figura 03 – Barra de borda da grelha



Fonte: HAMBLY (1976)

DÓRIA (2008) realizou um estudo onde obteve esforços de uma fundação do tipo radier com 10 cm de espessura, usando a Analogia de Grelha para a obtenção dos resultados. A conclusão foi que, os resultados mais consistentes foram da grelha com espaçamento de 30 cm, 3 vezes a espessura do radier, que é uma das recomendações de HAMBLY (1976). Ainda, DÓRIA (2008) explica que, em espaçamentos pequenos entre as barras, a grelha deixa de ser representada por uma laje (elemento de placa) e sim por um elemento de bloco. Com isto podemos dizer que o espaçamento entre as barras de uma grelha, ideal para representar um elemento de placa satisfatoriamente, está na faixa de:

$$2 \times h \leq e \leq 1/4 \times l \quad (16)$$

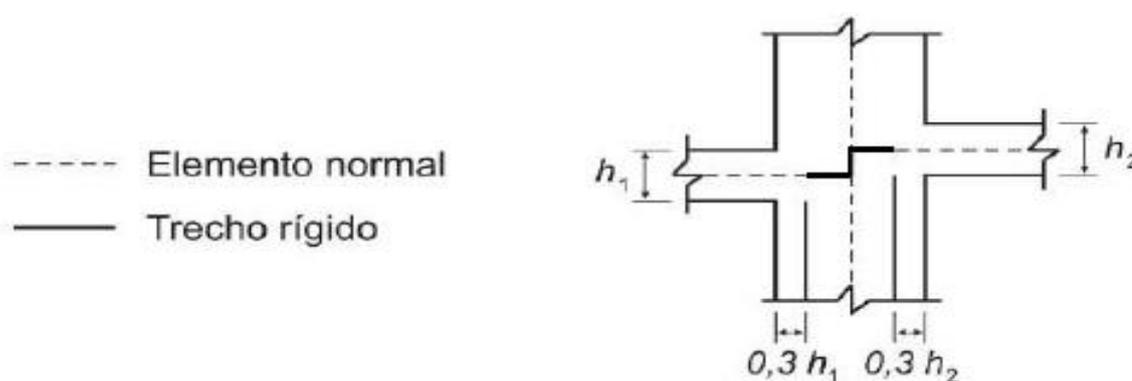
Onde h é a espessura do elemento de placa, e l o vão efetivo da placa.

2.3.2.1 Trecho Rígido

Em estruturas de concreto armado é comum existirem regiões de ligação entre os elementos estruturais, chamados de trecho rígido. Fontes (2005) menciona que esses encontros podem ser modelados como elementos com grande rigidez, garantindo maior realismo ao comportamento da estrutura. Entretanto, quando consideramos esses trechos como elementos infinitamente rígidos, a flexibilidade destes pontos é afetada, diminuindo-a, não podendo assim, serem considerados totalmente rígidos (ALMEIDA, 2009).

A NBR 6118:2014 afirma que estes trechos podem ser considerados rígidos (nós de dimensões finitas) como ilustrado na Figura 04. CORRÊA e VENTURINI (2010) comentam que a simulação do trecho rígido pode ser feita substituindo-o por um elemento de grande rigidez. Porém, isto levaria à acréscimos de nós e barras no modelo da estrutura analisada, aumentando o tempo de processamento desta. No trabalho de CORRÊA (1991) concluiu-se, no caso de ligações entre viga-pilar, bem-sucedido o uso de trechos de viga de largura igual ao do pilar e altura igual ao pé-direito.

Figura 04 – Trechos rígidos



Fonte: ALMEIDA (2009).

2.3.2.2 Momento de Inércia à Flexão

Cada barra da grelha irá representar uma faixa da laje, onde, a base da barra (b) será igual à largura desta faixa, valor que depende do grau de refinamento da malha da grelha, e a altura da barra (h) será a espessura da laje. Com isto, podemos calcular o momento de inércia à flexão (I) das barras usando a seguinte equação:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (17)$$

2.3.2.3 Momento de Inércia à Torção

O momento de inércia à torção (J) da seção transversal de uma barra não é simplesmente uma propriedade geométrica, como o momento de inércia à flexão. Conforme STRAMANDINOLI e LORIGGIO (2003) apresentam em seu trabalho, não existe uma regra geral para o cálculo do momento de inércia à torção para seções transversais diferentes a de um cilindro (onde J será igual ao momento polar de inércia). Como as barras da grelha possuem seção retangular, o momento de inércia à torção pode ser calculado pela equação (GERE e WEAVER, 1980):

$$J = \beta b h^3 \quad (18)$$

b = maior dimensão da seção transversal

h = menor dimensão da seção transversal

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{h}{b}\right) \left(1 - \frac{h^4}{12b^4}\right)$$

Em contraponto, HAMBLY (1976) sugere usar a inércia à torção o dobro da inércia à flexão, e demonstrou do porquê dessa relação. A tensão de cisalhamento é uniforme e varia linearmente a partir da linha média de um elemento de placa.

$$\frac{\tau_{xz}}{z} = \frac{-M_{xy}}{i} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (19)$$

Onde $i = \frac{h^3}{12}$ é o momento de inércia da laje por unidade de largura. A rigidez a torção para as malhas de grelhas é composta pelo módulo de elasticidade transversal (G) do material e pelo momento de inércia à torção da seção transversal da barra. Segundo a Lei de Hooke, para materiais isotrópicos homogêneos, a equação do módulo de elasticidade transversal é:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (20)$$

Portanto:

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{(1 + \nu)12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{Gh^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (21)$$

Pode-se considerar que, a inércia à torção de uma placa, por unidade de largura, é:

$$J_{placa} = \frac{h^3}{6} \quad (22)$$

Sabendo-se que para vigas de seção retangular, em que $b > 5h$, a inércia à torção pode ser escrita de forma simplificada:

$$J_{viga} = \frac{bh^3}{3} \quad (23)$$

Podemos perceber que a inércia à torção de uma placa é duas vezes a inércia à torção de uma viga, comparando as equações 22 e 23. Finalmente, analisando a

equação da inércia à flexão com a equação da inércia à torção da placa, obtemos a relação sugerida por HAMBLY (1976):

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{b J_{placa}}{2} \quad (24)$$

Considerando $b = 1$ (por unidade de largura):

$$J_{placa} = 2I \quad (25)$$

STRAMANDINOLI (2003) realizou um estudo comparativo entre diversas razões entre a inércia à flexão e a inércia à torção, sugerindo razões que obtivessem os resultados mais próximos dos obtidos das Tabelas de Czerny, com coeficiente de Poisson igual a 0,2 (Teoria da Elasticidade). O Quadro 03 abaixo apresenta os valores das razões sugeridas pela autora.

Quadro 03 – Valores de razões J/I

APOIOS	FLECHA	MOMENTO POSITIVO	MOMENTO NEGATIVO
4 lados apoiados	2,8	1,75	-
2 lados adjacentes engastados e 2 apoiados	3	1,9	2,2
4 lados engastados	2,8	1,2	2,5

Fonte: Resultados retirados de STRAMANDINOLI (2003).

COELHO (2000), em seu estudo, concluiu que razões de inércia à flexão e a inércia à torção entre 2 e 2,5 apresentaram resultados de esforços e deslocamentos próximos ao da teoria da elasticidade. Ainda em seu estudo, comenta que existem inúmeras soluções ao se calcular uma laje por Analogia de Grelha, em função da variação dos parâmetros de rigidez das barras da grelha. Por isso, estudos

comparativos com os resultados da teoria elástica não são, necessariamente, prova da validade do processo de Analogia de Grelha, mas servem para orientar nas escolhas dos parâmetros, e assim, obter resultados muito próximos aos da teoria elástica.

3 METODOLOGIA

As características físicas e geométricas, bem como as cargas solicitadas da laje estudada nesse trabalho, são:

- Módulo de Elasticidade (E) = 24 GPa (valor estimado apresentado na tabela 8.1 da NBR 6118:2014, para f_{ck} de 25 MPa);
- Módulo de Elasticidade Transversal (G) = 10,43 GPa (calculado através da equação (19) e atribuindo o valor de 0,15 para o coeficiente de Poisson (ν), igual valor usado nas tabelas de PINHEIRO (1993);
- Laje maciça de vão 4 x 4m (de eixo a eixo das barras);
- Espessura $h = 8\text{cm}$;
- Carga uniformemente distribuída (q) = 5 kN/m² (2kN/m² de carga permanente mais 3kN/m² de sobre carga);

3.1 MÉTODO DAS TABELAS

Em um primeiro momento, foi realizado o cálculo de esforços e deslocamentos de uma laje maciça com o auxílio das tabelas desenvolvidas por Barés (1972) e adaptadas por PINHEIRO (1993). Como a laje não apresenta continuidade, consideremos essa simplesmente apoiada em todo seu contorno, classificando assim, laje tipo 1. A relação entre os vãos é igual a um ($\lambda = 1$), visto que a laje é quadrada e apresenta vãos iguais. O Quadro 04 a seguir apresenta os coeficientes adimensionais obtidos das tabelas.

Quadro 04 – Coeficientes adimensionais

Coeficiente Adimensional			
v_x	v_y	μ_x	μ_y
2,5	2,5	4,23	4,23

Para o cálculo da flecha imediata, encontrou-se o valor do coeficiente adimensional α , obtido pelas tabelas, e calculou-se o valor de p , com ψ_2 igual a 0,3. Com isto, utilizando-se a equação 12, podemos achar o valor da flecha imediata.

3.2 MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA EQUIVALENTE

Para a modelagem da grelha equivalente e obtenção dos momentos e do deslocamento, usou-se o software SAP2000 V12. Conforme as orientações de HAMBLY (1976), uma laje de espessura 8cm será melhor representada por uma grelha equivalente com um espaçamento entre as barras de 16 a 24cm. O espaçamento adotado será do valor médio deste intervalo, logo, 20cm nas duas direções.

Os momentos e a flecha serão obtidos sob quatro modelos diferentes:

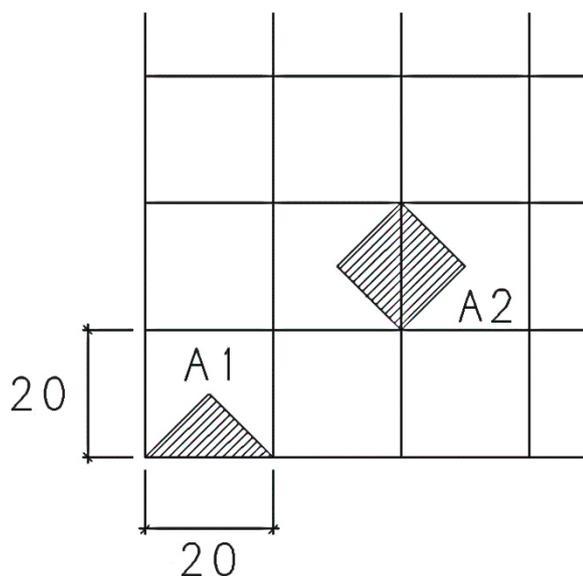
- Modelo 1: a grelha apoiada nos bordos com apoios indeslocáveis e desconsiderando as vigas do entorno;
- Modelo 2: desconsiderando as vigas do entorno, apoios apenas nos quatro cantos, representando pilares, e as bordas indeslocáveis;
- Modelo 3: considerando as vigas do entorno com apenas 15% da rigidez à torção delas, para avaliar a fissuração do concreto;
- Modelo 4: as mesmas considerações feitas no Modelo 3, acrescentando agora os trechos rígidos horizontal na ligação entre as vigas e a laje;
- Modelo 5: as mesmas considerações feitas no Modelo 3, acrescentando trecho rígido vertical;

Dentro dos Modelos 3 e 4, iremos avaliar a influência da rigidez das vigas na obtenção dos esforços e deslocamento da laje. Este estudo será feito supondo três casos diferentes: o primeiro com as vigas apresentando a mesma inércia, no segundo caso uma das vigas terá inércia diferente das demais e, no terceiro caso, haverá duas vigas com inércias diferentes das demais. No primeiro caso as vigas terão as dimensões de 20x30cm (Viga 01), no segundo as vigas serão de 20x30cm e apenas uma de 20x60cm (Viga 02) e, no terceiro caso, teremos duas vigas com as dimensões de 20x60cm. No Modelo 5 será analisado apenas o Caso 1.

As cargas foram aplicadas nas barras da grelha como carga distribuída linearmente, multiplicando a área de influência de cada barra pelo valor da carga distribuída, de 5kN/m², e, posteriormente, dividindo pelo comprimento da barra. As áreas de influência podem ser identificadas na Figura 05 onde, A1 é igual a 0,01m² e

A2 igual a $0,02\text{m}^2$. Com isto, a carga aplicada nas barras das bordas foi $0,25\text{kN/m}$ e, nas barras restantes, de $0,5\text{kN/m}$.

Figura 05 – Área de influência das barras



Por fim, as relações entre a inércia à torção e a inércia à flexão usadas para obter os momentos e o deslocamento serão de 2 (sugestão de HAMBLY, 1976) e 2,8 (seguindo os resultados de STRAMANDINOLI, 2003), respectivamente.

3.2.1 Modelo 1

A grelha representante do modelo 1, que pode ser visto nas Figuras 06 e 07, apresenta 21 barras no sentido do eixo x e 21 barras no sentido do eixo y com seção transversal de $20 \times 8\text{cm}$. Como o modelo terá os quatro bordos apoiados, foi considerado apoios simples aos nós presentes nas bordas (Figura 08).

Figura 06 – Vista superior da malha

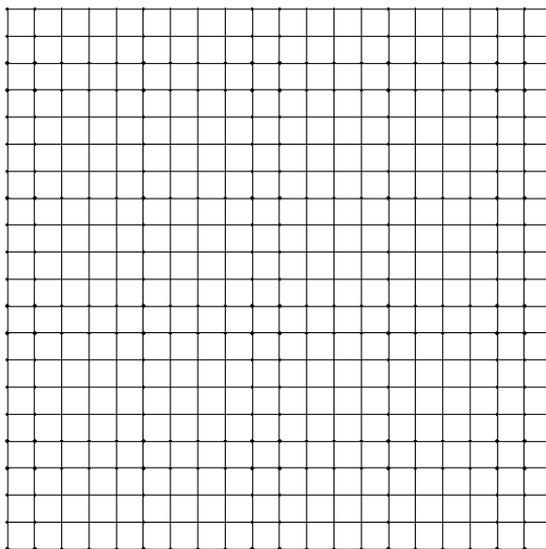


Figura 07 – Corte esquemático da laje

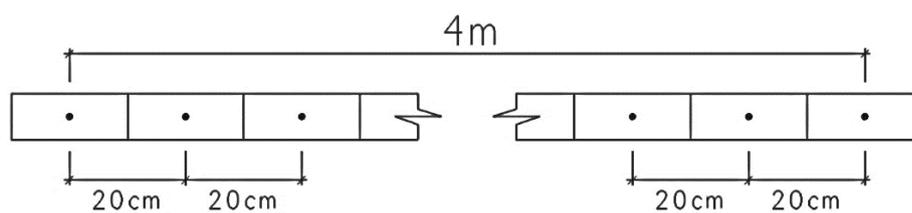
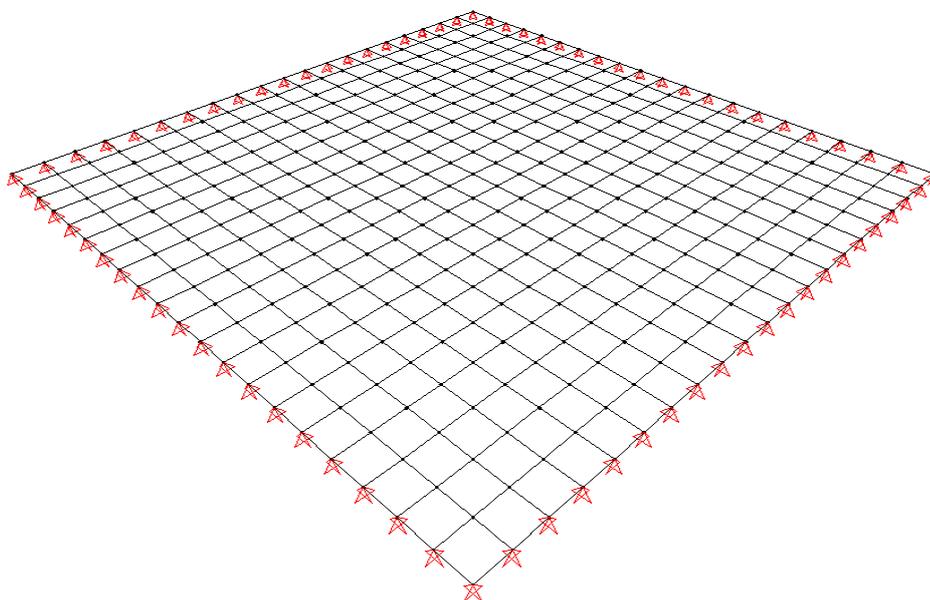


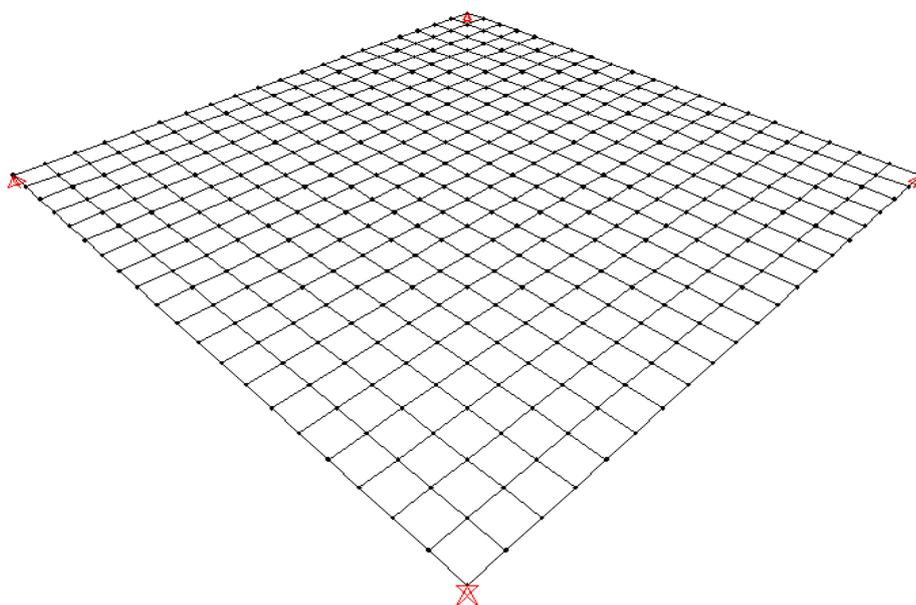
Figura 08 – Restrições consideradas (Modelo 1)



3.2.2 Modelo 2

Agora iremos considerar apenas apoios simples nos quatro cantos da laje, representando pilares (Figura 09). As barras das bordas foram consideradas indeslocáveis, aumentando suas rigidezes até o deslocamento nesta região tendesse a zero.

Figura 09 – Restrições consideradas (Modelo 2)



3.2.3 Modelo 3

Neste modelo, diferentemente dos modelos anteriores, considerou-se vigas em suas bordas. Com isto, as barras das bordas da grelha apresentarão as dimensões das vigas respectivas em casa caso. As posições das vigas podem ser vistas nas Figuras 10, 11 e 12 e as condições de apoio serão iguais ao modelo anterior (Figura 09).

Figura 10 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 1

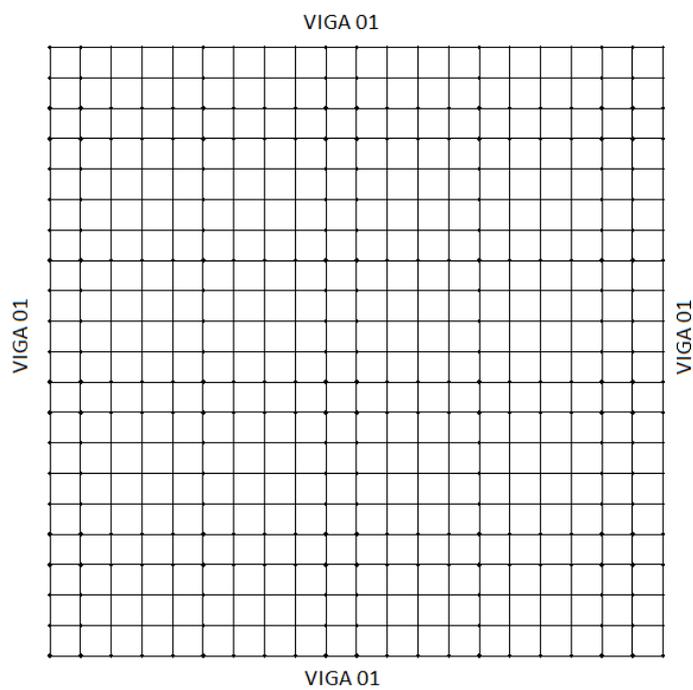


Figura 11 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 2

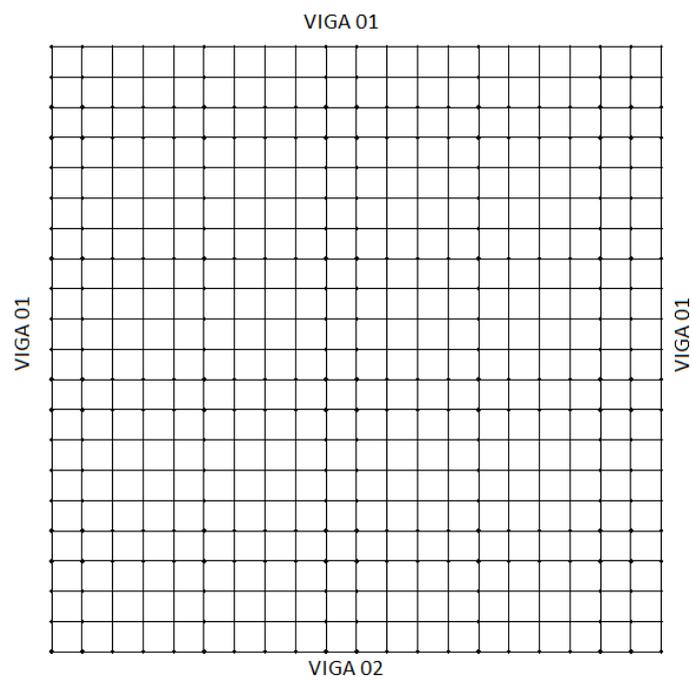
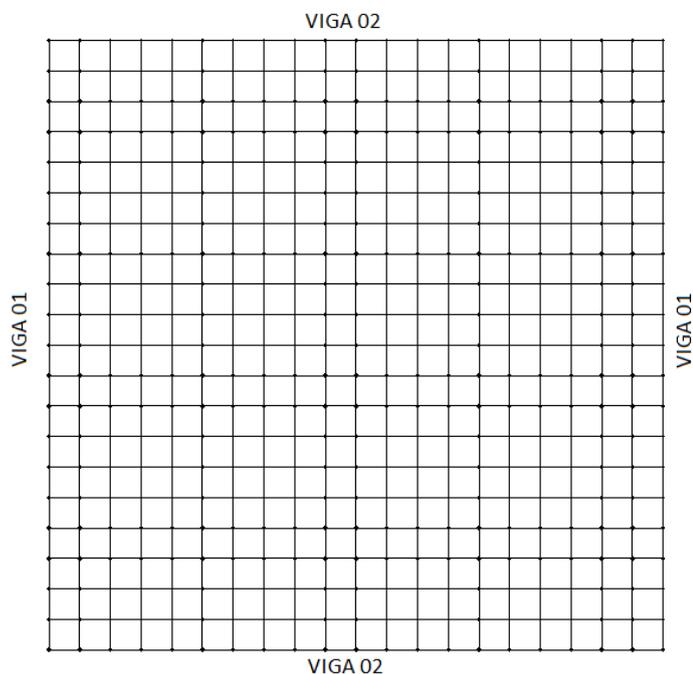
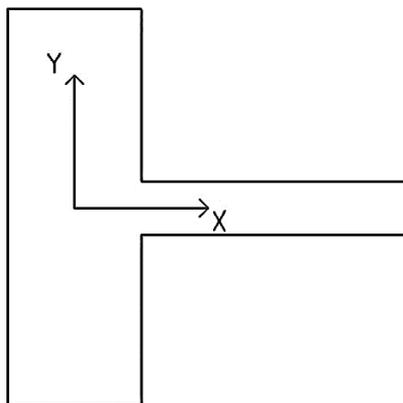


Figura 12 – Vista superior da malha, modelo 3, caso 3



No software SAP2000, ao atribuir às barras das bordas dimensões das vigas 01 e 02, estamos considerando que os eixos de rotação dessas estão passando no eixo da barra, no centro de gravidade da seção, como é mostrado na Figura 13.

Figura 13 – Eixo de rotação no centro de gravidade da seção



A solução encontrada para localizar a viga de uma forma mais realista na estrutura, foi calcular a inércia à flexão da viga usando o Teorema de Steiner passando o eixo de rotação para o ponto A, como visto na Figura 14 e Figura 15.

Figura 14 – Eixo de rotação deslocado para o ponto A

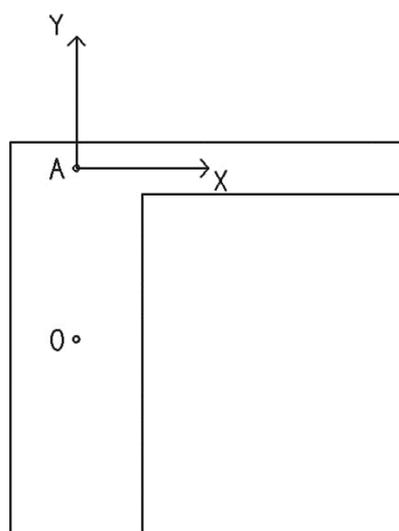
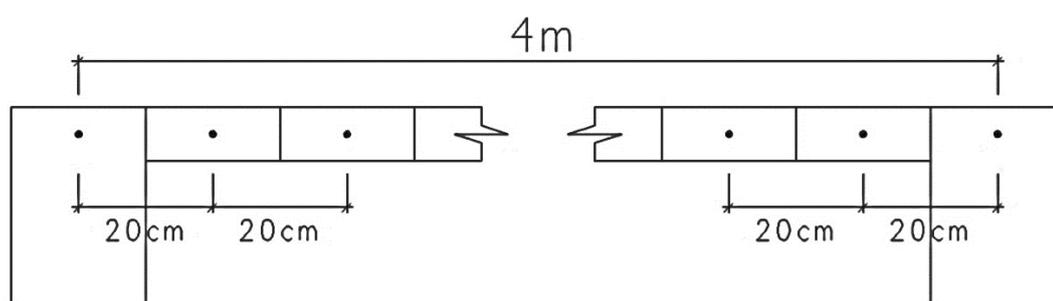


Figura 15 – Corte esquemático da laje com as vigas



3.2.4 Modelo 4

O modelo 4 apresentará em sua estrutura os trechos rígidos entre a laje e a viga. Para considerar este trecho no modelo, foram adicionadas pequenas barras, com inércia maior que as barras da grelha, na ligação entre as barras da grelha e a viga. O comprimento destas barras está apresentado na Figura 16 e foi considerada uma rigidez significativamente para este trecho. Com isto, a vista superior da malha e as restrições podem ser vistas nas Figuras 17 e 18, respectivamente.

Figura 16 – Trecho rígido horizontal da ligação laje-viga

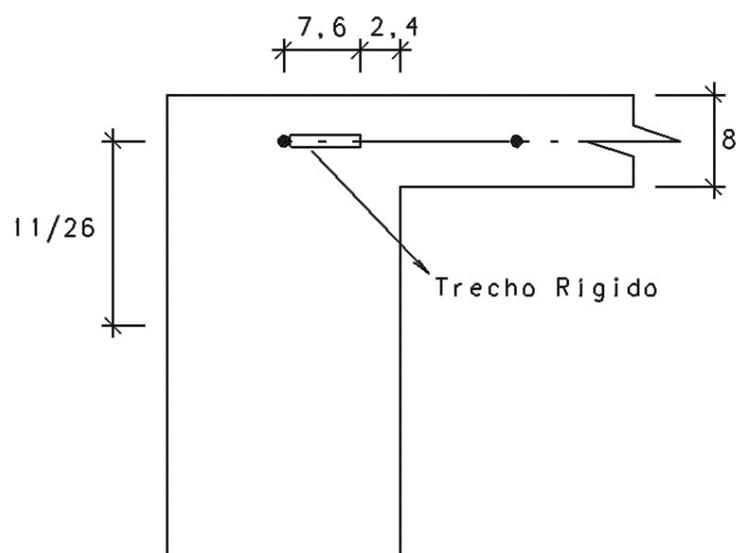


Figura 17 – Vista superior (Modelo 4)

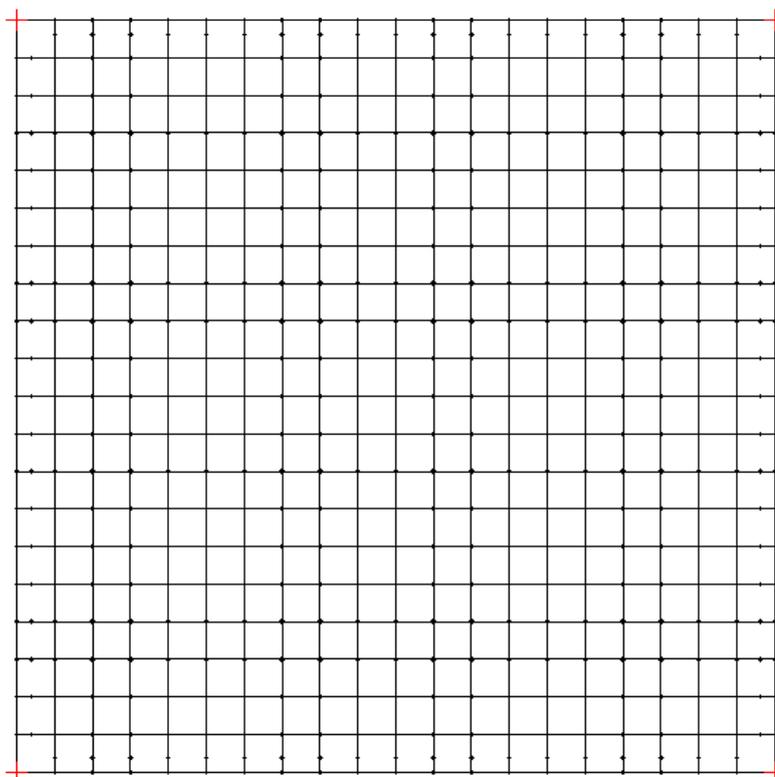
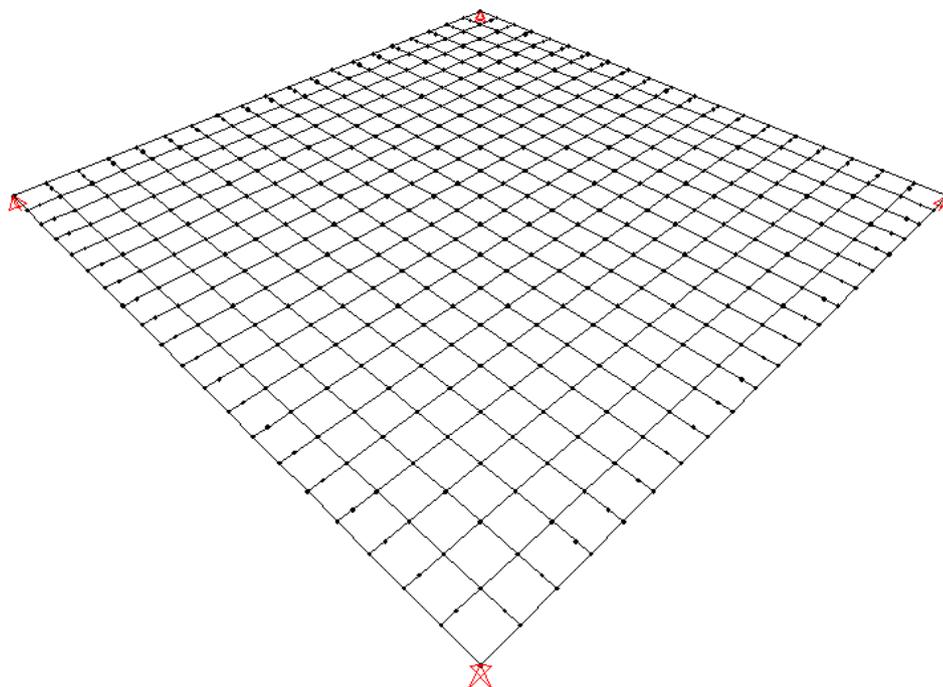


Figura 18 – Restrições consideradas (Modelo 4)



3.2.5 Modelo 5

Por fim, o último modelo analisado apresentará trecho rígido vertical. A justificativa para a orientação do trecho é para dispensar o uso do Teorema de Steiner, localizando as barras, que representam as vigas, onde ficaria o centroide da viga. O resultado é um modelo tridimensional, algo semelhante a um pórtico (Figura 19).

A comprimento do trecho rígido é de 11cm (metade da altura da viga menos a metade da espessura da laje) e foi considerada uma rigidez significativamente para este trecho (Figura 20).

Figura 19 – Restrições consideradas (Modelo 5)

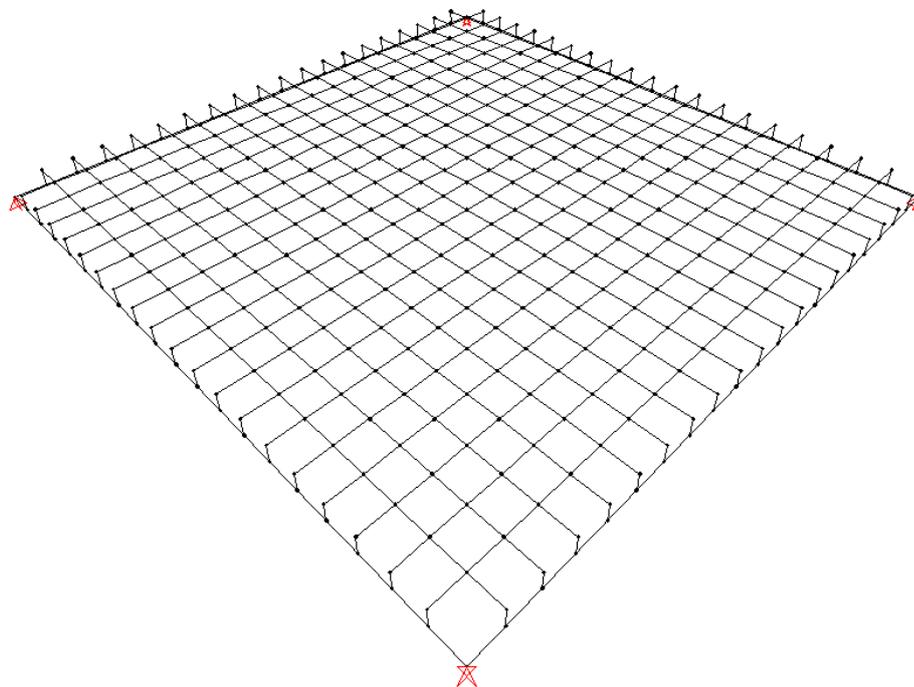
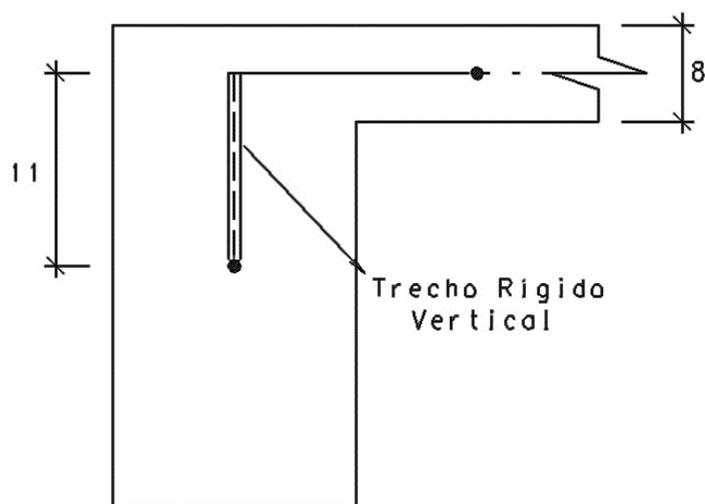


Figura 20 – Trecho rígido vertical da ligação laje-viga



4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS

O Quadro 05 apresenta os resultados dos esforços e deslocamento obtidos pelos dois métodos e, no Método de Analogia de Grelha Equivalente, os resultados dos diferentes modelos.

Quadro 05 – Resultados dos momentos fletores e deslocamentos

Métodos	Modelos	Casos		Momento Positivo (kN.m/m)	Momento Negativo (kN.m/m)	Flecha (cm)
Método das Tabelas	-	-		3,380	-	0,290
Método de Analogia de Grelha Equivalente	Modelo 1	-		3,720	-	0,270
	Modelo 2	-		3,735	-	0,290
	Modelo 3	Caso 1	Viga 01	3,250	-1,335	0,250
			Viga 02	3,255	-1,320	
		Caso 2	Viga 01	3,255	-2,800	0,247
			Viga 02			
		Caso 3	Viga 01	3,255	-1,305	0,217
			Viga 02		-2,610	
	Modelo 4	Caso 1	Viga 01	3,200	-1,320	0,270
			Viga 02	3,215	-1,305	
		Caso 2	Viga 01		3,215	-2,840
			Viga 02			
		Caso 3	Viga 01	3,205	-1,290	0,227
Viga 02			-2,640			
Modelo 5	Caso 1	Viga 1	1,625	-4,260	0,100	

A seguir, as Figuras 21, 23, 25, 27 e 29 mostrarão os diagramas dos momentos fletores (DMF) das malhas dos modelos 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Em seguida, nas Figuras 22, 24, 26, 28 e 30 podem ser vistas as deformadas destes mesmos modelos. Os DMF de cada caso dos modelos 3 e 4 não foram inseridos visto que os valores são muito próximos entre estes e, visualmente, não resultou em figuras significativamente diferentes das Figuras 25 e 27. Outro detalhe é que foram retirados do DMF as barras das bordas do Modelo 2 (Figura 23) e as vigas dos Modelos 3 e 4 (Figuras 25 e 27) pois os momentos nestas barras eram significativamente maiores que no restante da estrutura, gerando um diagrama que dificultava seu entendimento e visualização.

Figura 21 – Diagrama de momento fletor (Modelo 1)

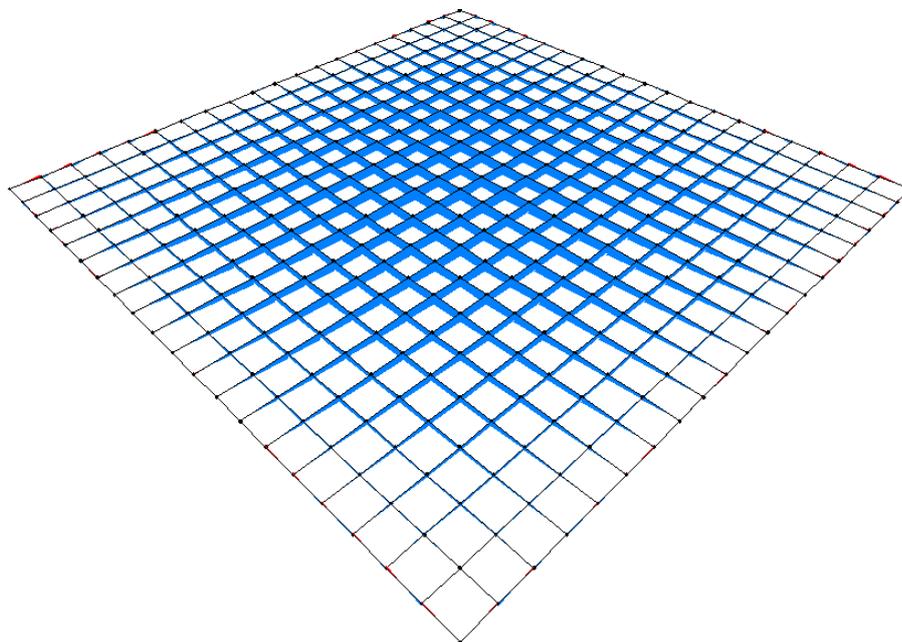


Figura 22 – Deformada com escala aumentada (Modelo 1)

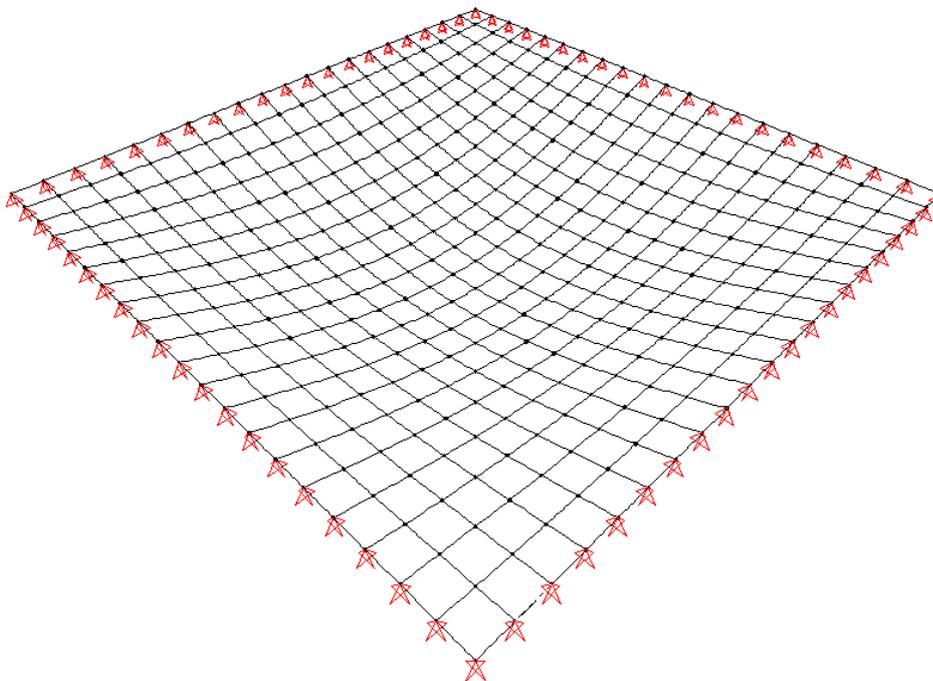


Figura 23 - Diagrama de momento fletor (Modelo 2)

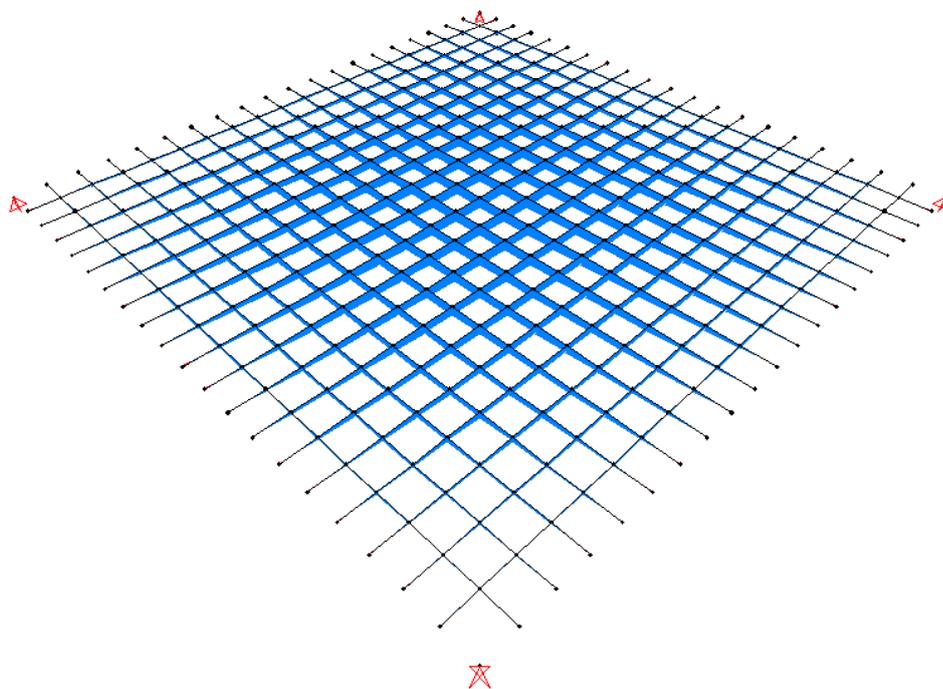


Figura 24 – Deformada com escala aumentada (Modelo 2)

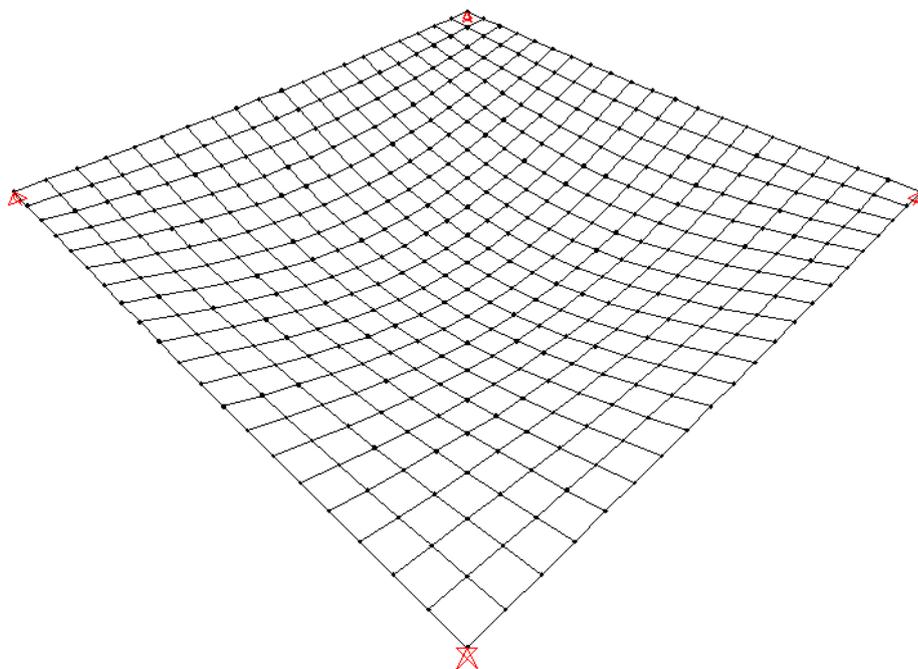


Figura 25 - Diagrama de momento fletor (Modelo 3)

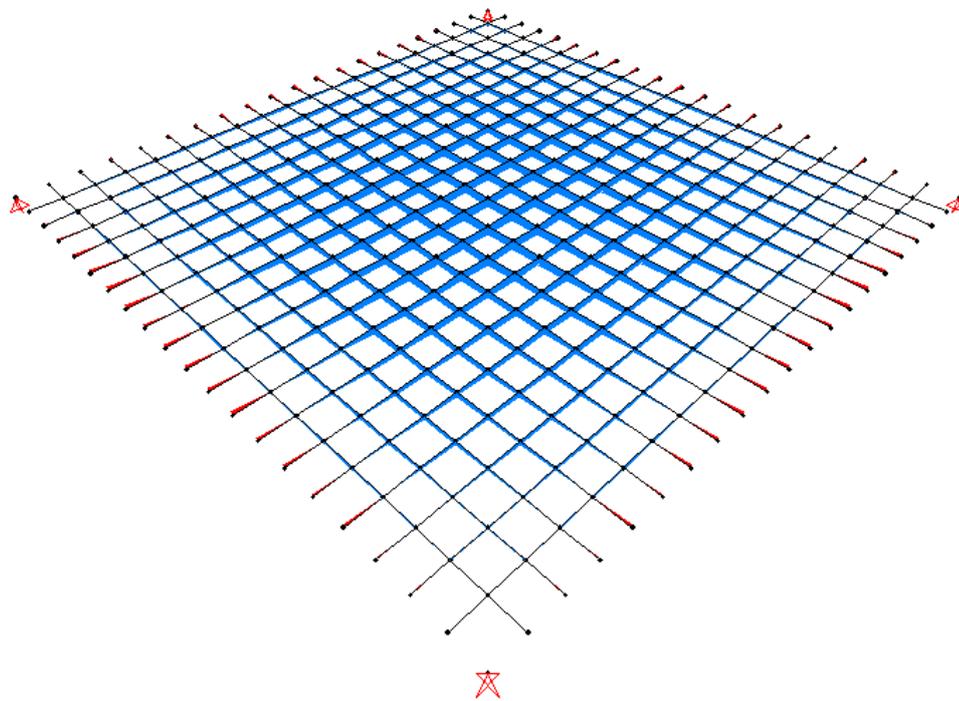


Figura 26 – Deformada com escala aumentada (Modelo 3)

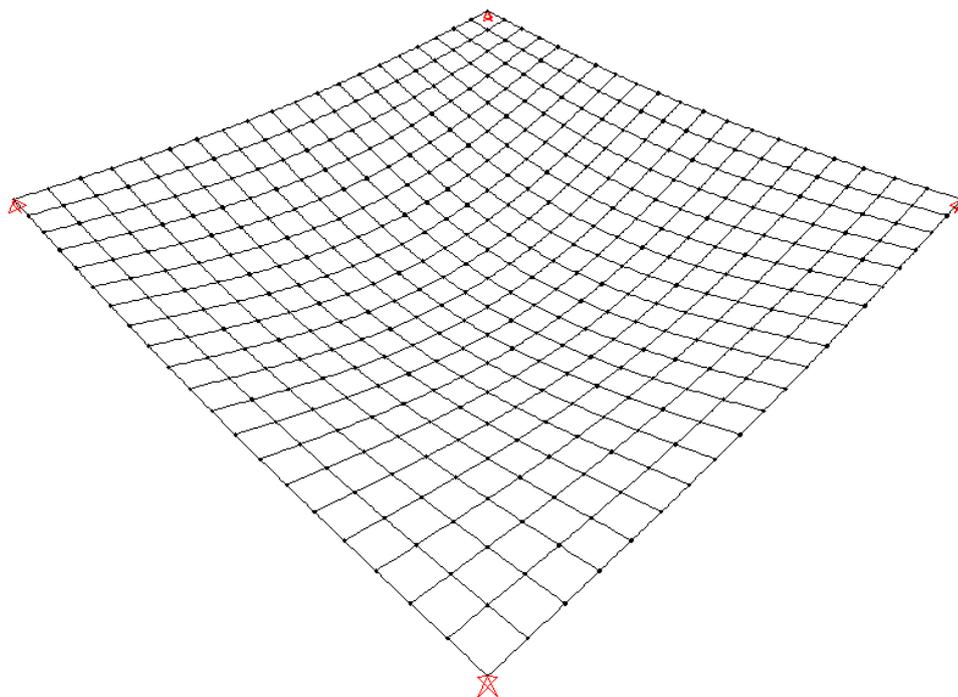


Figura 27 - Diagrama de momento fletor (Modelo 4)

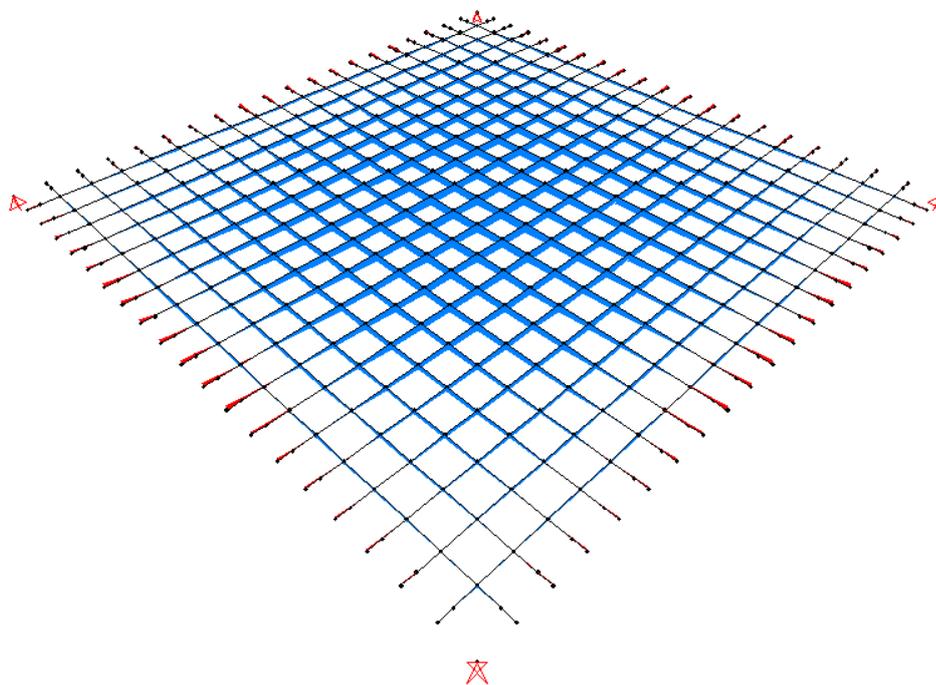


Figura 28 – Deformada com escala aumentada (Modelo 4)

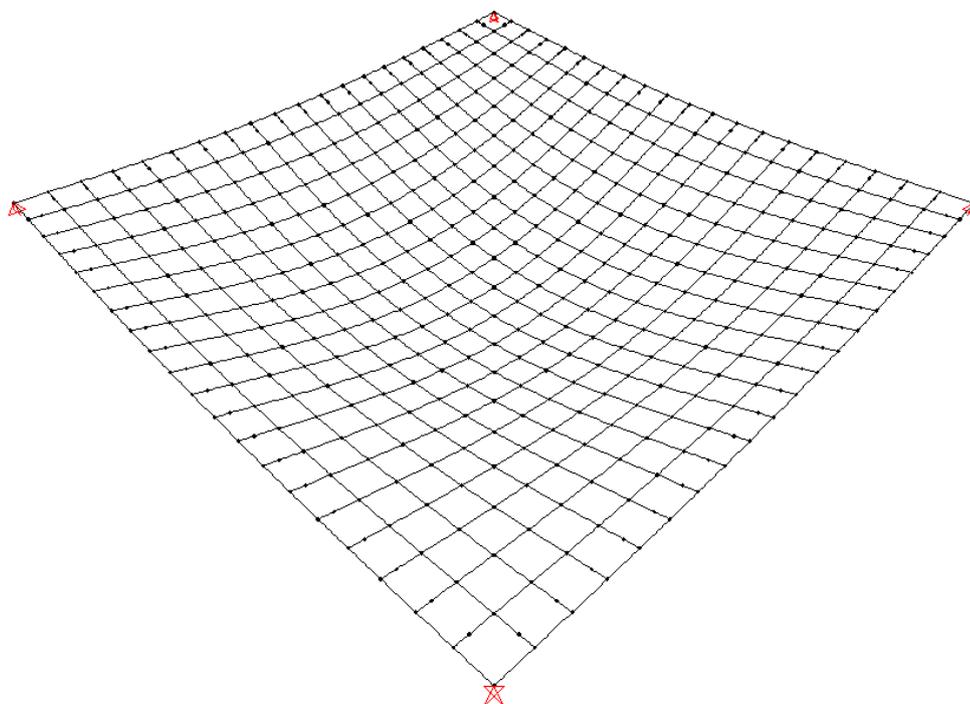


Figura 29 – Diagrama de momento fletor (Modelo 5)

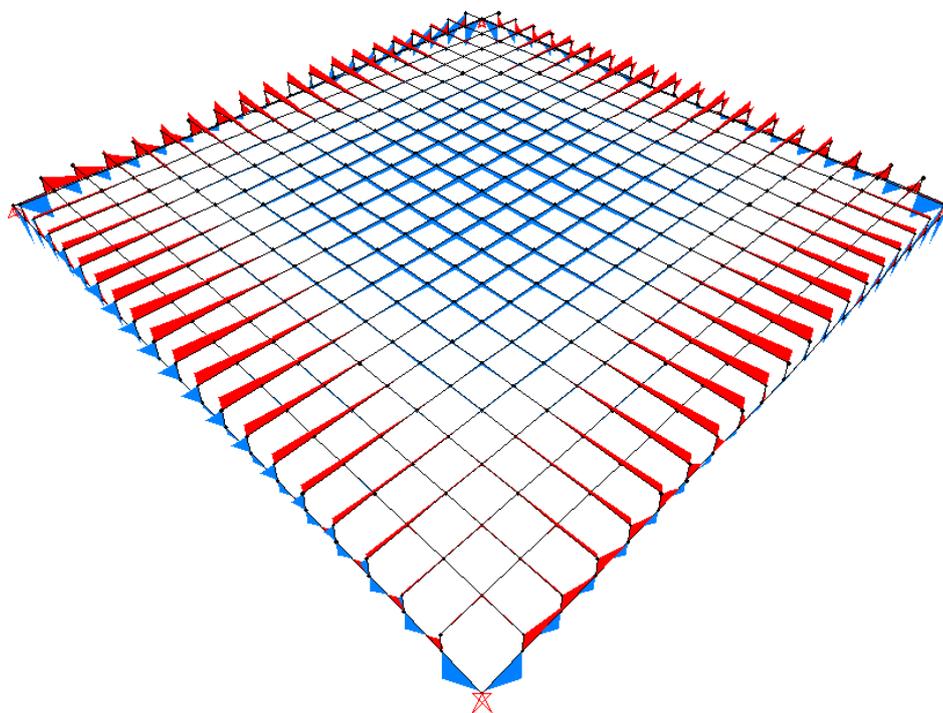
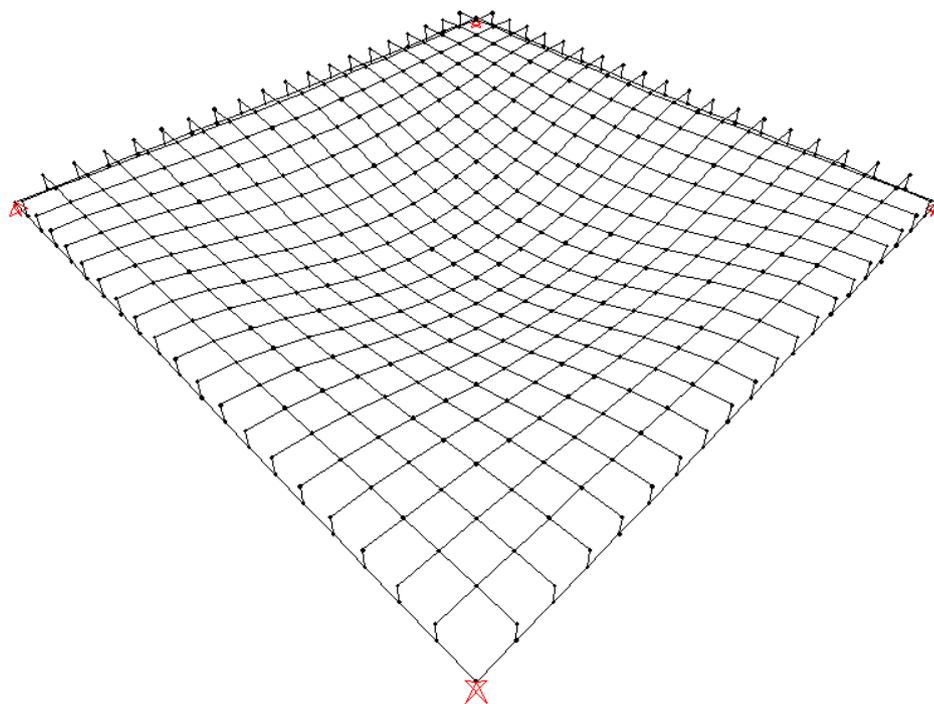


Figura 30 – Deformada com escala aumentada (Modelo 5)



4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.2.1 Momento Positivo

O Quadro 06 apresenta a diferença, em porcentagem, dos resultados dos momentos positivos, entre os dois métodos, em relação ao Método das Tabelas.

Quadro 06 – Diferença dos momentos positivos entre os métodos

Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3			Modelo 4			Modelo 5
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1
10,06%	10,50%	-3,85%	-3,70%	-3,70%	-5,33%	-4,88%	-5,18%	-51,92%
		Média		-3,75%	Média		-5,13%	

Os Modelos 1 e 2, por apresentarem suas bordas indeslocáveis, se assemelham mais, em comparação aos outros modelos, com o cálculo do Método das Tabelas onde as bordas são consideradas indeslocáveis. Mesmo com tal semelhança, houve uma diferença de 10,06% entre os resultados de momentos positivos entre o primeiro método com o Modelo 1 e de 10,50% com o Modelo 2.

Os Modelos 3 e 4 são modelos mais realistas, onde foram consideradas vigas deslocáveis nas bordas das lajes e apoios nos cantos, representando pilares. Com isto, podemos ver que os resultados destes modelos foram muito próximos em relação ao Método das Tabelas, com uma diferença média de 3,75% com o Modelo 3 e 5,13% com o Modelo 4. O Modelo 5 foi o modelo que apresentou o resultado com a maior diferença percentual em relação ao primeiro método, 51,92%.

Fazendo uma comparação entre os resultados obtidos entre os modelos do Método de Analogia de Grelha Equivalente notou-se que, o uso de vigas deslocáveis aproximou os resultados com os obtidos no Método das Tabelas. Esta análise pode ser feita comparando os Modelos 1 e 2 com os Modelos 3 e 4 onde, estes apresentaram pequenas diferenças em relação ao Método das Tabelas. Ainda

analisando a influência das vigas nos resultados, podemos perceber que a adição de vigas de maior inércia à flexão (Casos 2 e 3) resultaram em momentos positivos maiores, porém esses aumentos foram menores que 1% (Quadro 07)

Quadro 07 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de momento positivo da laje

Modelo	Adição de uma Viga 02 (Caso 2)	Adição de duas Vigas 02 (Caso 3)
Modelo 3 - Caso 1	0,15%	0,15%
Modelo 4 - Caso 1	0,47%	0,16%

Por fim, no Quadro 08, podemos analisar a diferença que o uso do trecho rígido ocasionou nos resultados. Em todos os casos, no Modelo 4, os valores diminuíram em relação ao Modelo 3, uma redução média de 1,434%. Já o uso do trecho rígido vertical no Modelo 5 ocasionou uma diferença de 50% com o valor obtido no Modelo 3.

Quadro 08 – Influência do uso de trecho rígido nos resultados de momento positivo

Casos		Momento Positivo (kN.m/m)			Diferença entre Modelos 3 e 4	Diferença entre Modelos 3 e 5
		Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5		
Caso 1	Viga 01	3,250	3,200	1,625	-1,538%	-50,00%
Caso 2	Viga 01	3,255	3,215	-	-1,229%	-
	Viga 02					
Caso3	Viga 01	3,255	3,205	-	-1,536%	-
	Viga 02					
Média					-1,434%	-50,00%

4.2.2 Momento Negativo

Apenas os resultados de momento negativo dos Modelos 3, 4 e 5 foram considerados, visto que no Método das Tabelas não há cálculo para momento negativo para laje tipo 1 e nos Modelos 1 e 2 as bordas eram simplesmente apoiadas e indeslocáveis, não gerando momento negativo.

No Caso 1 do Modelo 3, o valor de momento negativo da laje na ligação com a Viga 01 foi de $-1,335\text{kN.m/m}$, valor este que descesse com a adição das Vigas 02 nos seguintes casos (Casos 2 e 3). Podemos perceber a mesma tendência no Modelo 4 em relação a Viga 01. O Quadro 09 apresenta a diferença, em porcentagem, dos valores de momento negativo da laje com a Viga 01, comparando o Caso 1 com os Casos 2 e 3.

Quadro 09 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de momento negativo da laje com a Viga 01

Modelo	Viga	Adição de uma Viga 02 (Caso 2)	Adição de duas Vigas 02 (Caso 3)
Modelo 3	Viga 01	-1,12%	-2,25%
Modelo 4	Viga 01	-1,14%	-2,27%

Em relação a Viga 01, os valores de momento negativo da laje com a Viga 02 foram bem expressivos, sendo 2,12 vezes maior no Caso 2 e 2 vezes maior no Caso 3, no Modelo 3. Já no Modelo 4, os valores foram 2,18 vezes maior no Caso 2 e 2,05 vezes maior no Caso 3. Estes valores se justificam quando analisamos a rigidez das duas vigas onde, a Viga 02 apresenta maior rigidez que a Viga 01, apresentando, também, valores maiores de esforços da laje em sua região.

O Quadro 10 apresenta a diferença dos resultados dos esforços entre o Modelo 3 com os Modelos 4 e 5. Podemos perceber que o uso do trecho rígido horizontal diminuiu, em módulo, os resultados obtidos nas vigas de menor inércia (Viga 01) e

aumentou, em módulo, nas de maior (Viga 02). Em relação ao Modelo 5, a diferença foi maior que 200% com o uso do trecho rígido vertical.

Quadro 10 – Influência do uso de trecho rígido nos resultados de momento negativo

Casos		Momento Negativo (kN.m/m)			Diferença entre Modelos 3 e 4	Diferença entre Modelos 3 e 5
		Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5		
Caso 1	Viga 01	-1,335	-1,320	-4,260	1,124%	-219,101%
Caso 2	Viga 01	-1,320	-1,305	-	1,136%	-
	Viga 02	-2,800	-2,840		1,429%	
Caso3	Viga 01	-1,305	-1,290	-	1,149%	-
	Viga 02	-2,610	-2,640		1,149%	
				Média	1,197%	-219,101%

4.2.3 Deslocamento

O valor de deslocamento através do Método das Tabelas e o Modelo 2 do Método de Analogia de Grelha Equivalente apresentaram valores de flecha imediata iguais, 0,29cm. Este fato ocorre pela semelhança entre o tipo de cálculo do primeiro método com o Modelo 2 onde, em ambos os casos, foram consideradas bordas indeslocáveis e apoiadas. O Modelo 1 também apresenta bordas indeslocáveis, porém, com uso de vários apoios simples na extensão da borda para considerar esta condição. Este fato ocasionou uma diferença de 6,90% entre os resultados do Modelo 1 com o Método das Tabelas.

Os valores dos deslocamentos no Método de Analogia de Grelha Equivalente foram, em geral, menores que o Método das Tabelas. Semelhante à análise dos resultados dos esforços, o Modelo 5 foi o que apresentou o resultado com maior diferença em relação ao primeiro método. Como já dito anteriormente, os Modelos 3 e 4 apresentam um maior refinamento e realismo na modelagem, o que resultou uma diferença média de 18,05% pelo Modelo 3 e de 13,45% pelo Modelo 4, em módulo.

O Quadro 11 apresenta a diferença, em porcentagem, dos resultados das flechas imediatas entre os dois métodos, em relação ao Método das Tabelas.

Quadro 11 – Diferença das flechas imediatas da laje entre os métodos

Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3			Modelo 4			Modelo 5
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1
-6,90%	0,00%	-13,79%	-15,00%	-25,34%	-6,90%	-11,55%	-21,90%	-65,52%
		Média		-18,05%	Média		-13,45%	

O Quadro 12 mostra as diferenças dos resultados de flecha imediata quando adicionamos a estrutura, vigas de maior rigidez que as demais. Tanto no Caso 2 como no Caso 3, houveram diminuição nos valores de flecha imediata, sendo esta diferença maior no Caso 3.

Quadro 12 – Influência da adição de vigas de maior inércia a flexão aos valores de flecha imediata da laje

Modelo	Adição de uma Viga 02 (Caso 2)	Adição de duas Vigas 02 (Caso 3)
Modelo 3 - Caso 1	-1,40%	-13,40%
Modelo 4 - Caso 1	-5,00%	-16,11%

Diferentemente do esperado, o Modelo 4, que apresenta trecho rígido horizontal em sua estrutura, obteve flechas imediatas maiores que o Modelo 3, mesmo tendo maior rigidez que esse, como é mostrado no Quadro 13. Semelhante às outras análises, a flecha imediata do Modelo 5 apresentou uma grande diferença entre o

primeiro método e com os outros modelos do Método de Analogia de Grelha Equivalente.

Quadro 13 – Influência do uso de trecho rígido nos resultados da flecha imediata da laje

Casos		Flecha Imediata (cm)			Diferença entre Modelos 3 e 4	Diferença entre Modelos 3 e 5
		Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5		
Caso 1	Viga 01	0,250	0,270	0,100	8,000%	-60,000%
Caso 2	Viga 01	0,247	0,257	-	4,057%	-
	Viga 02					
Caso3	Viga 01	0,217	0,227	-	4,619%	-
	Viga 02					
				Média	5,559%	-60,000%

5 CONCLUSÕES

Primeiramente, comentarei os resultados obtidos no Modelo 5, Método de Analogia de Grelhas Equivalentes, resultados esses que apresentaram uma grande diferença com os outros modelos e com o outro método de cálculo. O uso do trecho rígido vertical neste modelo levou a resultados muito distantes e, em relação ao momento positivo e a flecha imediata, não a favor da segurança em comparação com os outros resultados. Podemos concluir com isto que, o Modelo 5 não é um modelo representativo para o cálculo através deste método, para esta estrutura.

Por este motivo, as próximas conclusões não levarão em conta os resultados do Modelo 5.

5.1 DIFERENÇAS ENTRE O USO DOS MÉTODOS

Fazendo uma análise do uso dos métodos de cálculo, podemos perceber que o Método das Tabelas é um recurso fácil e rápido na obtenção dos esforços e deslocamento de uma laje. Porém, as considerações nos cálculos feitas por este método podem não estar de acordo com o que realmente acontece em uma estrutura como, por exemplo, considerar as bordas indeslocáveis. Outros fatores desconsiderados no Método das Tabelas são a inércia das vigas e o uso de trecho rígido, fatores que podem ser considerados em outros métodos de cálculo.

Sobre o formato das lajes calculadas pelo Método das Tabelas, elas devem ser quadradas ou retangulares, sendo necessário o uso de outras ferramentas ou outro método de cálculo para lajes com formatos diferentes destes.

Continuando essa análise, com o Método de Analogia de Grelhas Equivalentes podemos analisar diversos fatores e estudar a influência de cada um na estrutura, como foi feito com alguns fatores neste trabalho. A inércia das vigas, o uso ou não de vigas e a consideração de trechos rígidos foram alguns dos fatores estudados que podem ser considerados com esse método, aproximando cada vez mais à uma estrutura real e obtendo resultados mais precisos. Outras diferenças do uso deste método com o outro são o cálculo diversos formatos de laje, e não apenas quadradas/retangulares, e modelagem da laje juntamente com outros elementos estruturais, como vigas e pilares.

Contudo, o Método de Analogia de Grelhas Equivalentes exige alguns recursos que o primeiro método não exige, como o uso de um *software* de análise estrutural e um *hardware* com eficiência compatível com a estrutura que se pretende analisar. Recursos estes mais dispendiosos que os recursos do Método das Tabelas. Outro recurso importante que deve ser analisado neste método é o tempo onde, quanto maior o refinamento dos modelos e o tamanho da estrutura processada, maior será o tempo de modelagem e processamento da estrutura.

5.2 MOMENTO POSITIVO

Os valores de momento positivos entre os métodos apresentaram pequenas diferenças, principalmente com os Modelos 3 e 4. Isto mostra que o refinamento dos modelos do Método de Analogia de Grelha Equivalente tende à aproximar os valores de momento positivo com os valores do Método das Tabelas.

A influência da inércia das vigas tendeu, em geral, a diminuir ainda mais esta diferença dos resultados entre os modelos mais refinados com o primeiro método. Já a o uso do trecho rígido no Modelo 4 gerou menores momentos positivos, em comparação com o Modelo 3, porém, com maior diferença percentual entre os métodos.

Com isto, podemos concluir em relação ao momento positivo, que o uso do primeiro método resulta em um valor maior, e a favor da segurança, em relação aos modelos com maior realismo (Modelos 3 e 4) e com pequenas diferenças. Neste estudo onde a laje é quadrada, toda apoiada nas bordas, sem continuidade da laje e sem vínculos com outros elementos estruturais (com exceção da laje com a viga), o uso do Método das Tabelas se torna mais vantajoso pela facilidade e rapidez. O uso do Método de Analogia de Grelha Equivalente se torna mais vantajoso em casos mais complexos, onde existem um maior trabalho e tempo envolvido, porém, com resultados mais precisos e realistas.

5.3 MOMENTO NEGATIVO

Como já visto neste trabalho, o Método das Tabelas não considera momento negativo na laje quando esta tem suas bordas simplesmente apoiadas. Mas essa

situação se distancia da realidade pois, em uma estrutura real, há tração na parte superior da laje com as vigas e pilares (geralmente nos cantos).

Comparando apenas os resultados do Método de Analogia de Grelha Equivalente, os Modelos 1 e 2 não apresentaram ou apresentaram valores insignificantes de momento negativo. Como esperado, os esforços da laje com as vigas de maior inércia foram maiores que com as vigas de menor inércia, mostrando a influência do número e da rigidez das vigas nos resultados. Em relação ao uso do trecho rígido horizontal nos modelos, a diferença com o modelo sem trecho rígido foi muito pequena.

Na análise dos momentos negativos, o uso do segundo método se torna mais eficiente que o primeiro. Em relação ao uso dos Modelos 3 ou 4, o primeiro resultou em valores muito próximos ao segundo, não justificando o uso do modelo com trecho rígido.

5.4 DESLOCAMENTO

Comparando os resultados de flecha imediata entre os dois métodos, podemos perceber que os resultados são muito próximos em relação aos Modelos 1 e 2, onde existe um menor refinamento, e apresentam uma diferença maior com os modelos mais refinados, Modelos 3 e 4.

Ao adicionarmos vigas com maior rigidez que as demais, os valores de flecha imediata caíram, como esperado, demonstrando a influência de vigas mais rígidas nos resultados. Em contraponto, o uso do trecho rígido horizontal no Modelo 4 levou a valores maiores de flecha imediata, em relação ao modelo sem este, Modelo 3.

Com isto, o Método das Tabelas apresentou o resultado mais conservador de flecha imediata, juntamente com o Modelo 2 do Método de Analogia de Grelha Equivalente. Porém o segundo método possibilita a junção de vários elementos estruturais e a consideração de seus deslocamentos, resultando em flechas imediatas mais precisas. O uso do trecho rígido apresentou uma diferença um pouco maior que 5%, diferença esta que pode ser significativa dependendo da estrutura que se tem, necessitando um estudo para analisar o tempo gasto na modelagem e de processamento com a precisão dos resultados que se quer obter.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA; Daniel G. C. de. Análise Comparativa de Deslocamentos e Esforços Solicitantes de um Edifício Alto Através de Modelos Estruturais Distintos pelo MEF. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- ARAÚJO, J. M. Curso de Concreto Armado. 4ª edição. Volume 2. Editora DUNAS. 2014.
- COELHO; Jano D'A. Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2000.
- CORRÊA, M. R. S. Aperfeiçoamento de Modelos Usualmente Empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.
- CORRÊA, M. R. S.; VENTURINI, W. S. Trechos Rígidos em Estruturas Reticuladas – Análise Linear e Não-Linear Geométrica. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 12, n. 57, p. 57-66, 2010.
- DÓRIA, L. E. S.; LIMA, F. B. Análise de Fundação Tipo Radier Empregando o Modelo de Analogia de Grelha. Congresso Brasileiro do Concreto – CBC. 2008.
- FERREIRA DA SILVA, M. A.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; CARVALHO, R. C. A Utilização da Analogia de Grelha para Análise de Pavimentos de Edifícios em Concreto Armado. Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. 2003.
- FONTES, F. F. Análise Estrutural de Elementos Lineares Segundo a NBR 6118:2003. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- GERE, J. M.; WEAVER JR., W. Análise de Estruturas Reticuladas. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1981.
- GUERRIN, A.; LAVAUUR, R. G. Tratado de Concreto Armado. V. 1. Hemus, 2002.
- HAMBLY, E. C. Bridge Deck Behavior. London, Chapman and Hall, 1976.
- MONTEIRO, P. J. M.; MEHTA, P. K. Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais. 3ª edição. Ipsilon Gráfica e Editora. 2010.
- NEVILLE; A. M. Propriedades do Concreto. 5ª edição. Bookman Editora. 2015.
- PINHEIRO, L. M. Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios. Apostila – Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2007.

SANTOS NETO, Almir B. da Silva. Lajes Maciças de Concreto Armado. Apostila – Departamento de Estruturas e Construção Civil, Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2018.

STRAMANDINOLI, J. S. B. Contribuição à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

STRAMANDINOLI, J. S. B.; LORIGGIO, D. D. Estudo da Rigidez à Torção para a Aplicação do Processo de Analogia de Grelha em Lajes Maciças. Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. 2003.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. McGraw – Hill Kogakusha, Ltda, 1959.