

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Ricardo Ivan Philippsen**

**MERGULHO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA E  
CURVATURA TOTAL DE SEU BORDO**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2021**

**Ricardo Ivan Philippsen**

**MERGULHO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA E CURVATURA  
TOTAL DE SEU BORDO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção de grau de **Mestre em Matemática**

**Orientador: Prof. Dr. Ari Aiolfi**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2021**

Philippsen, Ricardo  
MERGULHO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA E CURVATURA TOTAL DE  
SEU BORDO / Ricardo Philippsen.- 2021.  
84 p.; 30 cm

Orientador: Ari Aiolfi  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2021

1. Superfícies mínimas mergulhadas 2. Curvatura Total  
3. Densidade 4. Ângulo de visão I. Aiolfi, Ari II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

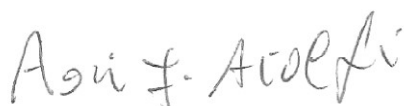
Declaro, RICARDO PHILIPPSEN, para os devidos fins e sob as penas dalei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso(Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias, objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

**Ricardo Ivan Philippsen**

**MERGULHO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA E CURVATURA TOTAL DE  
SEU BORDO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção de grau de **Mestre em Matemática**

**Aprovada em 07 de outubro de 2021**



**Ari Aiolfi, Dr.**  
(Presidente/Orientador)



**Patrícia Kruse Klaser, Dr. (UFSM)**



**Miriam Telichevesky, Dr. (UFRGS)**

Santa Maria, 07 de Outubro de 2021.

## **AGRADECIMENTOS**

A concretização deste trabalho ocorreu, principalmente, pelo auxílio, compreensão e dedicação de algumas pessoas. Agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste estudo e, de uma maneira especial, agradeço:

- ao meu orientador Ari Aiolfi pela paciência e ensinamentos passados.
- a minha namorada Raiana Lazzaretti por sempre estar ao meu lado me apoiando.
- aos meus pais Irlení Marisa Philippsen e Clairton José Philippsen por todo amor e atenção.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

## RESUMO

### MERGULHO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA E CURVATURA TOTAL DE SEU BORDO

AUTOR: Ricardo Ivan Philippsen

ORIENTADOR: Ari Aiolfi

Dada uma subvariedade mínima  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  com bordo compacto  $\Gamma^{n-1}$ , neste trabalho procuramos analisar sob quais condições sobre  $\Gamma$  podemos concluir que  $\Sigma$  é mergulhada. Mostramos que se uma curva fechada simples  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , suave por partes e de curvatura total menor ou igual a  $4\pi$  é o bordo de uma superfície mínima  $\Sigma$ , então  $\Sigma$  é mergulhada (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002). Além disso, seguindo os passos de (CHOE; GULLIVER, 2017), acompanhamos um possível caminho para obter uma generalização desse resultado para dimensões maiores.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas mergulhadas. Curvatura Total. Densidade. Ângulo de visão.

## ABSTRACT

### EMBEDDED OF MINIMAL SURFACE AND TOTAL CURVATURE OF THEIR BOUNDARY

AUTHOR: Ricardo Ivan Philippsen

ADVISOR: Ari Aiolfi

Given a minimal submanifold  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  with compact boundary  $\Gamma^{n-1}$ , in this work we analyze under which conditions on  $\Gamma$  we can conclude that  $\Sigma$  is embedded. We show that if a simple closed curve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , piecewise regular and with total curvature less than or equal to  $4\pi$  is the boundary of a minimal surface  $\Sigma$ , then  $\Sigma$  is embedded (EKHOLM; WHITE ; WIENHOLTZ, 2002). Moreover, following the steps of (CHOE; GULLIVER, 2017), we present a possible way to obtain a generalization of this result to higher dimensions.

**Keywords:** Embedded Minimal Surfaces, Total Curvature, Density, Vision Angle.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	8
<b>1 DOIS RESULTADOS CLÁSSICOS ENVOLVENDO CURVATURA TOTAL DE CURVAS EM <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	11
<b>1.1 O Teorema de Fenchel</b> .....	15
<b>1.2 O Teorema de Fàry-Milnor</b> .....	19
<b>2 RELACIONANDO VOLUMES DE SUBVARIÉDADES MÍNIMAS E DE CONES</b> .....	22
<b>2.1 Expressões envolvendo a curvatura média de uma subvariedade e o Laplaciano da função distância</b> .....	22
<b>2.2 A fórmula da primeira variação do volume e algumas de suas consequências</b> .....	30
<b>2.2.1 Comparando volumes de variedades mínimas compactas e de cones <math>n</math>-dimensionais</b> .....	33
<b>3 SOBRE A DENSIDADE DE UMA SUBVARIÉDADE MÍNIMA</b> .....	43
<b>3.1 Algumas considerações sobre a densidade de uma subvariedade em um ponto</b> ...	43
<b>3.2 Os Teoremas da Monotonicidade</b> .....	48
<b>3.3 Um resultado de comparação entre densidade de superfícies mínimas e cones em um ponto</b> .....	53
<b>4 SUPERFÍCIES MÍNIMAS MERGULHADAS E A CURVATURA TOTAL DE SEU BORDO</b> .....	57
<b>4.1 Superfícies mínimas mergulhadas com curvatura total de seu bordo menor do que <math>4\pi</math></b> .....	57
<b>4.2 Subvariedades mínimas mergulhadas e o ângulo de visão de seu bordo</b> .....	64
<b>4.2.1 Um resultado devido à Choe-Gulliver</b> .....	64
<b>4.2.2 O ângulo de visão</b> .....	67
<b>4.3 Adendo: Uma extensão particular do Teorema de Ekholm-White-Wienholtz para dimensões maiores</b> .....	68
<b>4.3.1 A aplicação normal de Gauss generalizada</b> .....	69
<b>4.3.2 A curvatura total e curvatura total absoluta de Lipschitz-Killing</b> .....	71
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	78
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	79
<b>APÊNDICE</b> .....	81



## INTRODUÇÃO

O estudo de subvariedades mínimas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  é, sem dúvida, um assunto fundamental da Geometria Diferencial e tem tido enormes avanços desde os primeiros experimentos do físico belga J. Plateau com películas de sabão, na metade do século XIX, o qual buscava mostrar fisicamente a existência de superfícies mínimas (estáveis) para determinados contornos prefixados. A saber, subvariedades mínimas são definidas como subvariedades de curvatura média igual a zero.

Dado que os contornos podem ser muito complicados, em um primeiro momento procurou-se estudar matematicamente o que veio a ser conhecido como o "problema clássico de Plateau", na versão dada por Lagrange (1760), o qual pode ser colocado como segue: *determinar uma superfície mínima tendo como bordo uma curva fechada simples dada.*

Inicialmente as tentativas para resolver tal problema consistiam em determinar explicitamente uma superfície mínima limitada cujo bordo é o dado contorno (em particular, a de área mínima), o que não é nada trivial, mesmo para um bordo "bem comportado". Posteriormente, o foco passou a ser provar a existência de uma superfície mínima que realizasse um bordo prefixado, sem se preocupar em determinar explicitamente a superfície, e importantes contribuições foram dadas por J. Douglas e T. Radó, por volta dos anos trinta do século XX (DOUGLAS, 1931) e (RADO, 1930). Em particular, quando um contorno prefixado tem projeção injetiva sobre um plano, passou-se a verificar a existência de gráficos mínimos sobre o domínio limitado nesse plano cujo bordo é tal projeção, o que é conhecido como o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios limitados com dado contínuo no bordo. Existe uma vasta literatura a respeito e sugerimos (LAWSON, 1973) e as sugestões de leitura lá postas para maiores detalhes sobre o assunto.

Além de se preocupar com a existência de solução para o problema de Plateau, outra questão que surge concomitantemente é o estudo das propriedades de tal solução, como por exemplo, se a superfície é mergulhada ou não. Neste trabalho, procuramos analisar sob quais hipóteses sobre uma curva fechada simples dada podemos garantir que uma superfície mínima que tenha por bordo tal curva é mergulhada. Faremos isto também para dimensões maiores.

Começamos procurando entender qual a relação entre a curvatura total de uma curva fechada e o modo como tal curva está imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Neste sentido, exploramos no Capítulo 1, os teoremas de Fenchel e de Fàry-Milnor em sua versão para  $\mathbb{R}^3$ . O Teorema de Fenchel nos

diz que a curvatura total de uma curva fechada  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^m$  é no mínimo  $2\pi$  e é igual a  $2\pi$  se, e somente se,  $\gamma$  é uma curva planar convexa. Já Fàry e Milnor provaram que uma curva fechada simples e regular em  $\mathbb{R}^3$  que é um nó tem curvatura total maior do que  $4\pi$ . Estes resultados indicam que uma curva fechada simples em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura total no máximo o dobro do mínimo é isotopicamente simples.

A questão imediata que se põe na sequência é saber se uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^m$  que tem por bordo uma curva  $\gamma$  fechada simples, cuja curvatura total é no máximo o dobro do mínimo, isto é,  $4\pi$ , é também de certa forma "simples". De fato é. Observamos que no caso em que  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  é curva de Jordan regular,  $\gamma$  é o bordo de exatamente um disco mínimo (NITSCHKE, 1973). No caso  $\gamma \subset \mathbb{R}^m$  e não necessariamente regular, Ekholm, White and Wienholtz (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002) provaram mais recentemente que se uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^m$  tem por bordo tal  $\gamma$ , então a superfície é mergulhada.

Tratamos do resultado acima mencionado de (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002) no Capítulo 4, no contexto de curvas suaves por partes, e sem nos preocuparmos com conclusões sobre não existência de pontos de ramificações interiores (ver Definição 63 para o que tange à pontos de ramificações) explorando várias nuances e culminando com o seguinte teorema que reúne os vários resultados que o precedem:

**Teorema** (Ver Teorema 41) *Seja  $\Gamma$  uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , suave por partes, com curvatura total menor ou igual a  $4\pi$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima com bordo  $\Gamma$ . Então  $\Sigma$  é mergulhada até o bordo.*

Também no Capítulo 4, tratamos de estender parte do resultado acima para dimensões maiores, ou seja, procuramos entender sob quais hipóteses sobre uma subvariedade compacta  $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{R}^m$ , uma subvariedade mínima  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  que tem por bordo  $\Gamma$  é mergulhada. Nossa referência para este contexto é o artigo (CHOE; GULLIVER, 2017). O resultado que exploramos faz uso do que se entende por ângulo de visão de uma subvariedade compacta  $\Gamma^{n-1}$ . Dizemos que o ângulo de visão de uma subvariedade  $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{R}^m$  em um ponto  $p \in \mathbb{R}^m$ , é o volume da projeção radial de  $\Gamma$  sobre a esfera unitária de dimensão  $m - 1$  centrada em  $p$  (contado com multiplicidade), que é denotado por  $\Pi_p(\Gamma)$ , isto é,  $\Pi_p(\Gamma) = \text{vol}(\pi_p(\Gamma))$ , onde  $\pi_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(p)$  é a projeção radial. Chamamos  $\Pi(\Gamma) = \sup_{p \in \mathbb{R}^m} \Pi_p(\Gamma)$  de ângulo de visão de  $\Gamma$ . Provamos então o seguinte resultado de Choe e Gulliver:

**Teorema** (Ver Teorema 47) *Se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é uma subvariedade compacta  $(n - 1)$ -dimensional com  $\Pi(\Gamma) < 2c_{n-1}$ , onde  $c_{n-1}$  é o volume da esfera  $(n - 1)$  dimensional, então qualquer*

*subvariedade mínima imersa  $\Sigma^n$  com bordo  $\Gamma$  é mergulhada.*

Finalizamos o Capítulo 4 com um adendo, onde procuramos entender minimamente o contexto de uma conjectura devido à Choe-Gulliver, apresentada em (CHOE; GULLIVER, 2017), a qual pode ser objeto de estudos futuros. Exploramos (sem entrar em muitos detalhes) um caso particular que dá a intuição que a conjectura pode ser verdadeira.

O caminho para provar os resultados do Capítulo 4 é relativamente longo e exige uma série de resultados intermediários.

No Capítulo 2, tratamos de mostrar que o volume de uma subvariedade mínima  $n$ -dimensional compacta e conexa em  $\mathbb{R}^m$ ,  $n < m$ , é menor ou igual ao volume de qualquer cone  $n$ -dimensional determinado pelo bordo da subvariedade e tendo por vértice um ponto qualquer da subvariedade (Proposição 24). São explorados vários resultados de Geometria Riemanniana necessários para tal fim.

O que este trabalho evidencia é que estimativas para a densidade (Ver definição de densidade em (3.1), Capítulo 4) de subvariedades mínimas compactas, com bordo, em variedades Riemannianas, podem ser usadas para provar que tais subvariedades são mergulhadas. Consideramos subvariedades mínimas com bordo, no caso particular em que a variedade é  $\mathbb{R}^m$  e tratamos, no Capítulo 4, de obter estimativas para a densidade de uma subvariedade mínima em um ponto sob hipóteses envolvendo a curvatura total do bordo de tais subvariedades. Tratamos dos teoremas da Monotonicidade e da Monotonicidade Estendida para tal contexto (teoremas 31 e 32) e de sua aplicação para a obtenção de um resultado que compara a densidade de uma subvariedade mínima  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  com bordo em um ponto  $p$  e a densidade em  $p$ , do cone determinado por  $\partial\Sigma$  com vértice em  $p$  (Teorema 34).

Os resultados explorados nos capítulos 2 e 3 formam a base necessária para as provas dos teoremas principais de nosso trabalho que estão no Capítulo 4. Por fim, gostaríamos de observar que utilizaremos, sem provar, alguns resultados que envolvem Teoria Geométrica da Medida, dado que tal teoria foge um pouco do nosso escopo, o qual pretende ser um primeiro olhar para o assunto base desta dissertação.

# 1 DOIS RESULTADOS CLÁSSICOS ENVOLVENDO CURVATURA TOTAL DE CURVAS EM $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo vamos nos concentrar nos clássicos teoremas de Fenchel e de Fàry-Milnor (Teorema 6 e Teorema 8 abaixo, respectivamente). Estes resultados nos dizem que uma curva fechada e simples em  $\mathbb{R}^3$  tem curvatura total maior ou igual a  $2\pi$ , sendo igual a  $2\pi$  se, e somente se, a curva é plana e convexa (Fenchel) e, que se a curva tiver um nó, então sua curvatura total é maior do que  $4\pi$  (Fàry-Milnor). Desta maneira é possível relacionar a forma como a curva está imersa em  $\mathbb{R}^3$  e a sua curvatura total.

No próximo capítulo reobteremos o Teorema de Fàry-Milnor como um corolário de um resultado bem mais geral, o qual relaciona a curvatura total de uma curva fechada simples em  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , com o modo como a superfície mínima que tem por bordo tal curva está mergulhada em  $\mathbb{R}^m$ .

Inicialmente, lembramos de algumas definições e resultados preliminares que usaremos já neste capítulo. Começamos com o conceito de curvatura total para curvas regulares em  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 1** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, isto é, com  $|\alpha'(s)| = 1$  para todo  $s \in I$ . Se  $k(s)$  representa a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ , a curvatura total de  $\alpha$  é definida por*

$$K_T(\alpha) = \int_I |k(s)| ds.$$

Quando  $\alpha$  for uma curva plana, estaremos considerando a curvatura com sinal, por esse motivo a necessidade do módulo. No caso de curvas que não são planas, o módulo dentro da integral é desnecessário pois  $k(s) = |\alpha''(s)|$ .

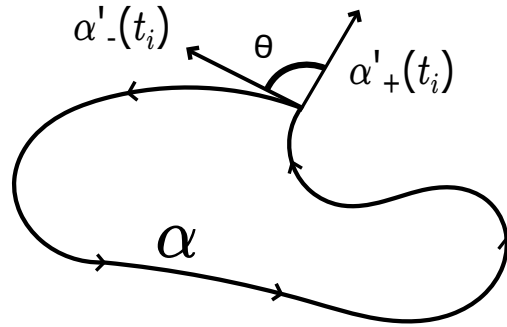
Observamos que, quando estamos no contexto de uma curva  $\alpha$  regular (suave) por partes, orientada, também temos uma noção de curvatura total, como segue: se  $t_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são os pontos não regulares de  $\alpha$ , a curvatura total de  $\alpha$  é dada por

$$K_T(\alpha) = \int_{\alpha_{reg}} |k(s)| ds + \sum_{i=1}^n \theta(t_i)$$

onde  $\alpha_{reg}$  é o conjunto formado pelas partes separadas em que  $\alpha$  é regular (suave), sem os seus pontos iniciais e finais e  $\theta(t_i) \in [0, \pi]$  é o ângulo exterior à  $\alpha$  nos pontos  $t_i$ , isto é,

$$\cos(\theta(t_i)) = \langle \alpha'_+(t_i), -\alpha'_-(t_i) \rangle, \quad (1.1)$$

Figura 2.1: Ângulo exterior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $\alpha'_-(t_i)$  e  $\alpha'_+(t_i)$  representam respectivamente as derivadas a esquerda e a direita de  $\alpha$  em  $t_i$ . Naturalmente,  $\theta(t_i)$  não depende da orientação de  $\alpha$ , já que ângulos opostos por um vértice são iguais. Maiores informações no que se refere a curvatura total de curvas suaves por partes pode ser vista em (SULLIVAN, 2008).

Como lidaremos com questões envolvendo área de uma região contida em uma superfície regular, damos aqui a definição do que se entende por área nesse contexto.

**Definição 2** (CARMO, 2014) *Seja  $S$  uma superfície regular e seja  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ , com  $x = x(u, v)$ . Se  $R \subset S$  é uma região (ou seja, é um aberto e conexo em  $S$ ) limitada contida em  $x(U)$ , a área de  $R$ , denotada por  $A(R)$ , é definida por*

$$A(R) = \iint_{x^{-1}(R)} |x_u \times x_v| \, du \, dv.$$

Esta definição é bastante intuitiva, quando queremos calcular a área de uma região em uma superfície não plana, aproximamos ela por paralelogramos infinitesimalmente pequenos, dos quais a soma infinita das áreas resulta na área desejada.

Podemos relacionar a área da imagem da aplicação normal de Gauss (área esférica) com a curvatura Gaussiana da superfície, cuja definição é dada por:

**Definição 3** (Curvatura Gaussiana)(CARMO, 2014) *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $x(u, v)$  uma parametrização local em torno de um ponto  $p \in S$ . Sejam  $E, F, G, e, f$  e  $g$  os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na base  $\{x_u, x_v\}$ , a curvatura Gaussiana de  $S$  em torno de  $p$  é dada por*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Observamos também que se  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  é a aplicação normal de Gauss, então  $K(p) = \det[-dN_p]$ .

**Proposição 4** *Seja  $S$  uma superfície regular do  $\mathbb{R}^3$  e seja  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $S$ . Suponha que  $V \subset \varphi(U)$  seja uma região em  $S$  onde a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  não muda de sinal e seja  $B = N(V)$ , onde  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  é a aplicação normal de Gauss. Então a área de  $B$  é dada por*

$$A(B) = \iint_{\varphi^{-1}(V)} |K| \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$  relativamente à parametrização  $(U, \varphi)$ .

**Prova.** Note que  $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  dado por  $\psi = N \circ \varphi$  é uma carta local de  $\mathbb{S}^2$  com  $\psi(R) = B$ . Assim, como  $\psi^{-1}(B) = R$  e  $R$  é uma região, segue da Definição 2 de área que

$$A(B) = \int \int_R |\psi_u \times \psi_v| dudv. \quad (1.2)$$

Dado  $p \in \varphi(R)$ , seja  $q \in R$  tal que  $p = \varphi(q)$ . Visto que  $N$  é a aplicação normal de Gauss, temos  $T_p S = T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ , ou seja,  $T_p S = T_{\psi(q)} \mathbb{S}^2$  e, assim, podemos escrever  $\psi_u(q)$  e  $\psi_v(q)$  na base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}_p$  de  $T_p S$ . Temos então

$$\psi_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

e

$$\psi_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi_u \times \psi_v &= a_{11}a_{12}(\varphi_u \times \varphi_u) + a_{11}a_{22}(\varphi_u \times \varphi_v) + a_{12}a_{21}(\varphi_v \times \varphi_u) + a_{21}a_{22}(\varphi_v \times \varphi_v) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\varphi_u \times \varphi_v) = \det(a_{ij})(\varphi_u \times \varphi_v). \end{aligned}$$

Pela definição de curvatura Gaussiana, temos  $K(p) = \det(a_{ij}(p))$ , pois  $(a_{ij}(p))$  é a matriz de  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$ . Logo,

$$|\psi_u \times \psi_v| = |\det(a_{ij})| |\varphi_u \times \varphi_v| = |K| |\varphi_u \times \varphi_v|. \quad (1.3)$$

Por outro lado, é imediato verificar que

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (1.4)$$

Concluimos de (1.2), (1.4) e (1.3) que

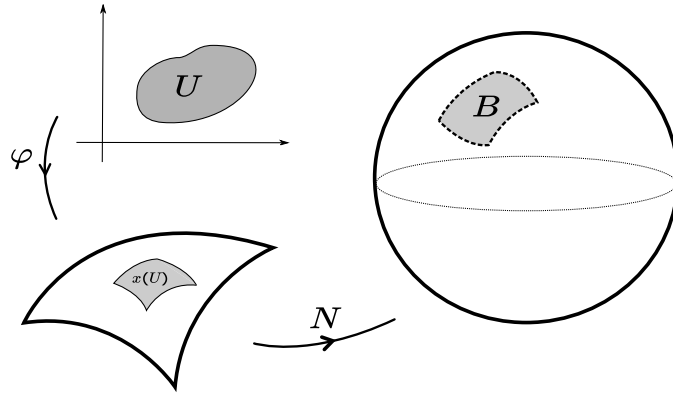
$$A(B) = \int \int_R |K| \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

■

Tal fato é bem intuitivo, visto que quanto mais uma superfície se curva, maior será a porção que a imagem da aplicação de Gauss cobrirá da esfera, portanto sua área esférica será maior.

A imagem a seguir ilustra o que está acontecendo na proposição anterior.

Figura 2.2: Área Esférica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas provas dos teoremas de Fenchel e de Fàry-Milnor, será necessário relacionarmos a curvatura de uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$  com a curvatura Gaussiana de um tubo regular de raio adequado em torno da curva em questão. Tal relação é feita no lema a seguir.

**Lema 5** *Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular simples e fechada, parametrizada por comprimento de arco e seja  $T$  um tubo de raio*

$$0 < r < \frac{1}{\max\{k(s), s \in [0, l]\}} \quad (1.5)$$

em torno de  $\alpha$ , isto é,  $T$  é a superfície parametrizada por

$$x(s, v) = \alpha(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v), \quad s \in [0, l], v \in [0, 2\pi],$$

onde  $n(s)$  e  $b(s)$  são os respectivos vetores normal e binormal ao longo de  $\alpha$ . A curvatura Gaussiana  $K$  da superfície  $T$  é dada por

$$K(s, v) = \frac{-k(s) \cos v}{r(1 - rk(s) \cos v)}.$$

**Prova.** Como  $E = (1 + k(s) \cos v)^2$ ,  $F = 0$  e  $G = r^2$ , segue que

$$\|x_s \times x_v\|^2 = EG - F^2 = r^2(1 - rk(s) \cos v)^2$$

e, como  $r < \frac{1}{\max\{k(s); s \in [0, l]\}}$  obtemos que,

$$rk(s) \cos v \leq rk(s) |\cos v| \leq r \max\{k(s)\} < 1.$$

Sendo  $\alpha$  simples, observe que a limitação (1.5) faz com que  $T$  seja regular. Seja  $N(s, v)$  a aplicação normal de Gauss de  $T$ . Temos

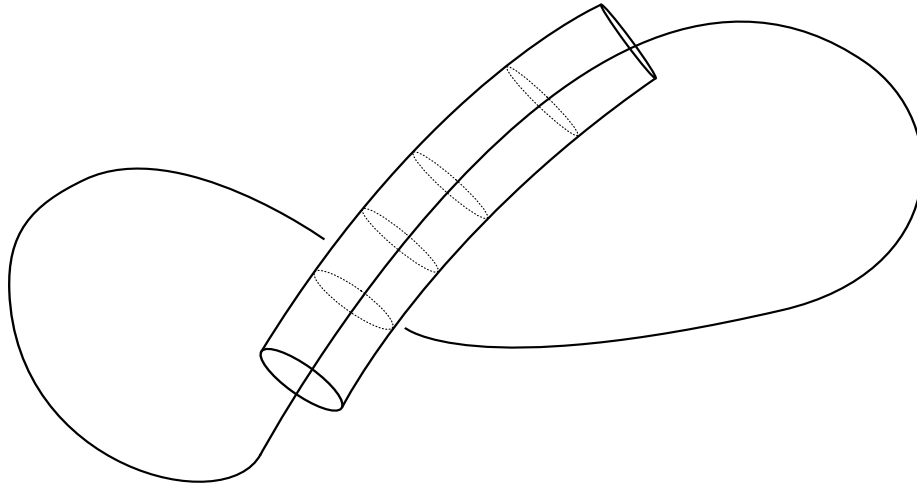
$$\begin{aligned} N(s, v) &= -(n(s) \cos v + b(s) \sin v); \\ x_s \times x_v &= r(1 - rk(s) \cos v)N(s, v); \\ N_s \times N_v &= k(s) \cos v (n(s) \cos v + b(s) \sin v) \\ &= -k(s) \cos v N(s, v) \\ &= \frac{-k(s) \cos v}{r(1 - rk(s) \cos v)} x_s \times x_v. \end{aligned}$$

Portanto a curvatura Gaussiana  $K$  (Definição 3) da superfície  $T$  é dada por,

$$K(s, v) = \frac{-k(s) \cos v}{r(1 - rk(s) \cos v)}.$$

■

Figura 2.3: Tubo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que as definições de vetores normal e binormal ao longo de uma curva podem ser encontradas em ((CARMO, 2014), 2014), p. 23.

## 1.1 O Teorema de Fenchel

Com os resultados obtidos na seção anterior podemos passar à prova da seguinte versão do Teorema de Fenchel.



**Teorema 6 (Fenchel)** *A curvatura total de uma curva regular simples e fechada em  $\mathbb{R}^3$  é maior ou igual a  $2\pi$  e a igualdade ocorre se, e somente se, a curva é plana e convexa.*

**Prova.** Considere a curva  $\alpha$  parametrizada por comprimento de arco. Seja  $T$  o tubo em torno de  $\alpha$ , de raio suficientemente pequeno, assim como considerado no Lema 5. Considere  $V \subset T$  o conjunto dos pontos de  $T$  com curvatura Gaussiana não negativa, assim, para esses pontos temos

$$\frac{-k(s) \cos v}{r(1 - rk(s) \cos v)} \geq 0$$

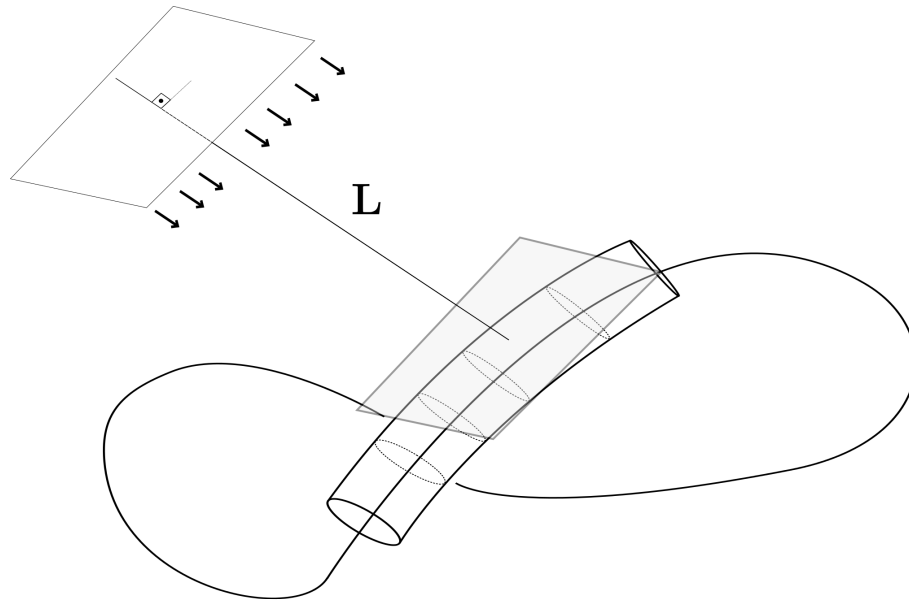
e, portanto,  $v \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ . Seja  $l$  o comprimento de  $\alpha$ . Logo, pela Proposição 4,

$$\begin{aligned} \iint_V K dA &= \iint_{x^{-1}(V)} K \sqrt{EG - F^2} ds dv \\ &= \int_{x^{-1}(V)} \left[ \frac{-k(s) \cos v}{r(1 - rk(s) \cos v)} \right] r(1 - rk(s) \cos v) ds dv \\ &= \iint_{x^{-1}(V)} -k(s) \cos v ds dv \\ &= \int_0^l k(s) ds \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos v dv \\ &= 2 \int_0^l k(s) ds \leq 2 \int_0^l |k(s)| ds = 2K_T(\alpha), \end{aligned}$$

isto é, a integral da curvatura Gaussiana sobre a região  $V$  é igual ao dobro da curvatura total de  $\alpha$  e observe que obtemos uma integral sobre toda curva, pois cada seção transversal de  $T$  relativamente a  $\alpha$  possui pontos de curvatura não negativa. Vamos mostrar agora que a aplicação normal de Gauss  $N : V \rightarrow \mathbb{S}^2$  é sobrejetiva, para depois, utilizando a Proposição 4, concluirmos o que queremos.

Considere um ponto  $p$  de  $\mathbb{S}^2$  qualquer. Tal ponto gera uma semirreta  $L$  passando pela origem. Seja  $P$  um plano perpendicular à  $L$  de modo que  $P \cap T = \emptyset$ . Movendo  $P$  na direção de  $L$  até que  $P$  toque  $T$ , vemos que o primeiro ponto de contato está em um ponto  $q$  onde a curvatura Gaussiana é não negativa, então  $q \in V$  e  $N(q) = p$ , provando a sobrejetividade de  $N$ .

Figura 2.1.1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, pela Proposição 4,

$$2 \int_0^l |k(s)| ds \geq 2 \int_0^l k(s) ds = \iint_V K d\sigma \geq \text{area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$$

Portanto

$$\int_0^l |k(s)| ds \geq 2\pi.$$

O que prova a primeira parte do teorema.

Para a segunda afirmação, observe que a aplicação de Gauss de  $T$  restrita às curvas coordenadas  $s = cte$  é injetiva. Tal fato pode ser visualizado pois  $T$  é localmente homeomorfo a um toro.

Seja  $\gamma_s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $s \in [0, l]$ , definida por  $\gamma_s(v) = N(x(s, v))$ . Note que  $\gamma_s$  é um círculo máximo. De fato, as curvas  $x(s, v)$ , com  $s$  constante, são resultado da intersecção de um plano perpendicular à  $\alpha$  com  $T$ , de modo que  $\gamma_s(v)$  é um círculo máximo em  $\mathbb{S}^2$ , visto que  $\gamma_s(v) = N(x(s, v)) = \alpha(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v)$ . Seja  $\gamma_s^+ \subset \gamma_s$  o semicírculo fechado correspondendo aos pontos de  $\gamma_s$  que são provenientes de pontos de  $T$  que tem curvatura não negativa. Supondo  $\alpha$  plana e convexa, então todos os conjuntos  $\gamma_s^+$  possuem os mesmos pontos final  $p$  e  $q$ , e o vetor  $\vec{pq}$  é ortogonal ao plano que contém  $\alpha$ . Por ser convexa, a curvatura de  $\alpha$  não muda de sinal, isso implica que os vetores que são normais à curva  $\alpha$  varrerão exatamente um círculo máximo em  $\mathbb{S}^2$  e não poderão assumir duas vezes o mesmo valor pois se isso ocorresse

a curvatura mudaria de sinal. Segue então que

$$\iint_R K dA = \text{area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi \Rightarrow \int_0^l |k(s)| ds = 2\pi,$$

visto que  $R = \bigcup_{s \in [0, l]} l_s$ .

Reciprocamente, suponha que  $\int_0^l |k(s)| ds = 2\pi$ . Passemos então a provar a seguinte afirmação: Todos os  $\gamma_s^+$  terão os mesmos pontos finais  $p$  e  $q$ . Suponha que não, então existem dois grandes círculos  $\gamma_{s_1}$  e  $\gamma_{s_2}$  com  $s_1$  e  $s_2$  arbitrariamente próximos cruzando-se em dois pontos antípodas que não estão em  $N(R \cap Q)$  onde

$$Q = \{x \in T; K(x) \leq 0\},$$

ou seja,  $\gamma_{s_1}$  e  $\gamma_{s_2}$ , por serem círculos máximos, se intersectam em dois pontos antípodas de  $\mathbb{S}^2$  e tais serão pontos onde a curvatura Gaussiana de  $T$  é igual a zero. Existem então pelo menos dois pontos de curvatura positiva em  $T$  que  $N$  mapeia em um único ponto de  $\mathbb{S}^2$ . Consideremos então vizinhanças desses pontos. Sejam  $x_1, x_2 \in N^{-1}(\gamma_{s_1}^+ \cap \gamma_{s_2}^+)$  e  $U_1, U_2 \subset T$  vizinhanças abertas de  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $N(U_1) \subset \gamma_{s_1}^+ \cap \gamma_{s_2}^+$  e o mesmo para  $U_2$ . Note que  $N$  cobre  $V = N(U_1) \cap N(U_2)$  duas vezes. Logo,

$$\iint_R K dA = \text{area}(N(R)) < \text{area}(\mathbb{S}^2) + \text{area}(V) = 4\pi + \text{area}(V).$$

Veja agora que temos  $\iint_R K dA < 4\pi$  e por hipótese  $4\pi \leq \iint_R K dA$  o que é um absurdo, e isso prova a afirmação.

Os pontos de curvatura zero em  $T$  estão na interseção de  $T$  com o binormal  $b(s)$  de  $\alpha$ . Então  $b(s)$  é paralelo à  $\vec{p}\vec{q}$  para todo  $s$ . Temos

$$\int_0^l k(s) ds \leq \int_0^l |k(s)| ds = 2\pi. \quad (1.6)$$

Seja

$$J = \{s \in [0, l]; k(s) \geq 0\}$$

e seja  $t : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $t(s) = \alpha'(s)$  e  $\Gamma = t([0, l])$ . Então o comprimento de  $\Gamma$  é

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \int_0^l |t'(s)| ds \\ &= \int_0^l |k(s)| ds = 2\pi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como  $\alpha$  é fechada, o vetor  $t$  varrerá pelo menos um círculo completo ao longo de  $\alpha$  quando assumido  $J$ . Assim, temos por (1.6) e (1.7) que

$$\begin{aligned} 2\pi &\geq \int_0^l k(s)ds \geq \int_J k(s)ds \geq 2\pi \\ &\Rightarrow \int_0^l |k(s)|ds = \int_J kds = 2\pi. \end{aligned}$$

Mas  $2\pi \geq \int_0^l k(s)ds$  e com isso,  $\bar{J} = [0, l] \setminus J$  tem medida nula e  $\int_J (-k(s))ds = 0$ . Logo,

$$\int_J k(s)ds + \int_{\bar{J}} k(s)ds = \int_0^l k(s)ds = \int_0^l |k(s)|ds = 2\pi,$$

ou seja,  $|k(s)| = k(s) \Rightarrow k(s) \geq 0$  para todo  $s$  e, portanto,  $\alpha$  é plana e convexa. ■

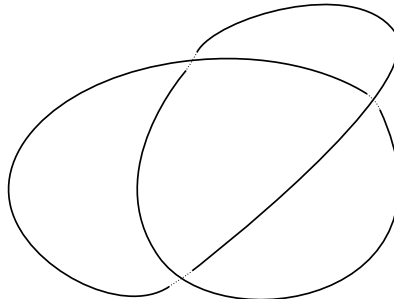
Observamos que o teorema continuaria sendo válido somente com a hipótese da curva  $\alpha$  ser fechada. Maiores detalhes podem ser visto em (CARMO, 2014), Seção 5.7 e em (FENCHEL, 1929). No entanto, para nossos propósitos neste primeiro contato com o assunto, a versão apresentada acima é suficiente.

## 1.2 O Teorema de Fàry-Milnor

Iremos provar agora o teorema de Fàry-Milnor, que faz uso da definição de curva que é um nó, a qual segue abaixo.

**Definição 7** Uma curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  é um nó se não existe uma homotopia entre  $\Gamma$  e  $\mathbb{S}^1$ .

Figura 2.2.1: Nó



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em outras palavras, dizer que uma curva é um nó, significa dizer que ela não pode ser deformada continuamente em um círculo. Como já mencionamos na introdução deste capítulo, veremos no Capítulo 3 este teorema como um caso particular de um resultado bem mais geral.

**Teorema 8 (Fary-Milnor)** *A curvatura total de uma curva regular simples e fechada em  $\mathbb{R}^3$  que é um nó é maior do que  $4\pi$ .*

**Prova.** Suponha  $\alpha$  parametrizada por comprimento de arco e seja  $T$  o tubo em torno de  $\alpha$  (conforme o Lema 5). Seja  $R \subset T$  a região de  $T$  onde  $K \geq 0$ ,  $b = b(s)$  o vetor binormal de  $\alpha$  e  $w \in \mathbb{R}^3$  um vetor unitário tal que  $w \neq \pm b(s) \forall s \in [0, l]$ . Defina  $h_w : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  a função altura de  $\alpha$  na direção de  $w$ , ou seja,

$$h_w(s) = \langle \alpha(s), w \rangle, s \in [0, l].$$

Note que  $s$  é ponto crítico de  $h_w$  se, e somente se,  $w$  é perpendicular a reta tangente a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . Além disso, em um ponto crítico,

$$\frac{d^2}{ds^2} h_w(s) = \left\langle \frac{d^2}{ds^2} \alpha(s), w \right\rangle = k(s) \langle n(s), w \rangle \neq 0.$$

Esse fato é devido ao triedro de Frenet, por um lado,  $w$  não pode ser o vetor binormal e por outro, sendo  $s$  um ponto crítico de  $h_w$ ,  $w$  é perpendicular ao vetor tangente a  $\alpha$ , portanto  $w$  não pertence ao complemento ortogonal de  $n(s)$ . Como  $h_w'' \neq 0$  nos pontos críticos, os pontos críticos são pontos de máximo ou mínimo, que sempre existem, visto que  $\alpha$  é fechada. Suponha que a curvatura total de  $\alpha$  seja menor ou igual a  $4\pi$ , então, usando a identidade obtida pelo Teorema 6,

$$\iint_R K dA = 2 \int_0^l k(s) ds \leq 2 \int_0^l |k(s)| ds \leq 8\pi.$$

Afirmção: para algum  $w_0 \notin b([0, l])$ ,  $h_{w_0}$  tem exatamente dois pontos críticos. Assim, por  $[0, l]$  ser compacto, tais pontos serão o máximo e o mínimo de  $h_{w_0}$ . De fato, suponha que o contrário vale, isto é, para todo  $w \notin b([0, l])$ ,  $h_w$  têm pelo menos três pontos críticos,  $h_w$  não pode ter somente um ponto crítico pois  $\alpha$  é fechada. Se  $h_w$  tem um máximo local em  $s$ , então o plano tangente à  $T$  no ponto  $p = \alpha(s) + rv$  é ortogonal à  $w$ , já que  $T$  é uma superfície regular. Além disso uma vizinhança de  $p$  em  $T$  fica contida em um dos semi-espacos determinados por esse plano. Com isso,  $K(p) \geq 0$  e, como  $w \neq \pm b(s)$ , ocorre que  $K(p) > 0$ . Note que a aplicação de Gauss de  $T$ , dada por  $N : T \rightarrow \mathbb{S}^2$ , satisfaz  $N(p) = w$ .

Como estamos assumindo três pontos críticos, temos dois pontos máximos ou dois pontos mínimos. Suponha dois pontos máximos, portanto os dois máximos de  $h_{w_0}$  são dois pontos  $p$  e  $q$  satisfazendo  $N(p) = N(q) = w$ , com  $K(p) > 0$  e  $K(q) > 0$ . Como o conjunto de vetores unitários  $w \neq \pm b([0, l])$  é denso em  $\mathbb{S}^2$ , temos que

$$\iint_R K dA \geq 8\pi.$$

E isso prova a afirmação.

Considere então  $s_1$  e  $s_2$  os pontos críticos de  $h_{w_0}$  e sejam  $P_1$  e  $P_2$  planos perpendiculares a  $w_0$  que passam por  $\alpha(s_1)$  e  $\alpha(s_2)$ . Cada um dos planos paralelos à  $P_1$  e  $P_2$  intercepta  $\alpha$  em exatamente dois pontos, pois se houvesse mais algum ponto, deveria haver necessariamente mais um ponto crítico. Se unirmos todos esses pares de pontos ao longo de todos os planos paralelos entre  $P_1$  e  $P_2$ , obtemos uma superfície limitada que é homeomorfa a um disco, dado que  $\alpha$  é regular. Portanto  $C$  não é um nó. ■

Maiores detalhes sobre o teorema acima pode ser encontrado em (CARMO, 2014) (p. 484)

## 2 RELACIONANDO VOLUMES DE SUBVARIÉDADES MÍNIMAS E DE CONES

Nosso objetivo principal com este capítulo é mostrar que o volume de uma subvariedade mínima  $n$ -dimensional compacta e conexa em  $\mathbb{R}^m$ ,  $n < m$ , é menor ou igual ao volume de qualquer cone (ver Definição (20))  $n$ -dimensional determinado pelo bordo da subvariedade e tendo por vértice um ponto de tal subvariedade. Para tal, necessitaremos de vários resultados preliminares de Geometria Riemanniana que trataremos aqui.

Usaremos a notação  $\Sigma^n$  para designar uma subvariedade de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $M$  de dimensão  $m := n + k$ ,  $k \geq 1$ , que em geral consideraremos como sendo  $\mathbb{R}^m$ .

Para um ponto  $p \in \Sigma$ , consideramos um referencial ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^n$  em uma vizinhança de  $p$ , tangente à  $\Sigma$  e geodésico em  $p$ . Estendemos suavemente esses campos de vetores para um referencial ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^m$  em uma vizinhança de  $p$  em  $M$ . Denotaremos por  $\bar{\nabla}$ ,  $\nabla$  as conexões Riemannianas de  $M$  e  $\Sigma$ , respectivamente e por  $\bar{\Delta}$ ,  $\Delta$  os Laplacianos em  $M$  e  $\Sigma$ , respectivamente. Usaremos  $\vec{H}$  para denotar o vetor curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$ , além disso, para um ponto  $q \in M$  fixado,  $r(x) = d(q, x)$ ,  $x \in M$ , indica a distância em  $M$  de  $x$  à  $q$ .

### 2.1 Expressões envolvendo a curvatura média de uma subvariedade e o Laplaciano da função distância

Primeiramente, vemos que podemos escrever o vetor curvatura média de uma subvariedade  $\Sigma^n$  de  $M^m$  como sendo

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i}^\perp e_i). \end{aligned} \tag{2.1}$$

De fato, da definição de vetor curvatura média dada no Apêndice (Definição 59), temos que

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \sum_{j=n+1}^m \text{tr}(S_{e_j})e_j \\
&= \sum_{j=n+1}^m \sum_{i=1}^n \langle S_{e_j}(e_i), e_i \rangle e_j \\
&= \sum_{j=n+1}^m \sum_{i=1}^n \langle -(\bar{\nabla}_{e_i} e_j)^T, e_i \rangle e_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^m \langle (\bar{\nabla}_{e_i} e_j)^\perp - \bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_i \rangle e_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^m \langle -\bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_i \rangle e_j.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo o lado direito da expressão (2.1),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} e_i &= \sum_{i=1}^n \left[ (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^T + (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^\perp \right] - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \nabla_{e_i} e_i + (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^\perp \right] - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} e_i \\
&= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^\perp = \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i}^\perp e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i}^\perp e_i, e_j \rangle e_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j \rangle e_j.
\end{aligned}$$

Do fato de termos  $0 = \langle e_j, e_i \rangle$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = n + 1, \dots, m$  em uma vizinhança de  $p$ , obtemos que

$$0 = e_i \langle e_j, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_i \rangle + \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle$$

e, portanto,  $\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j \rangle = \langle -\bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_i \rangle$ , concluindo a igualdade desejada.

Expressar o vetor curvatura média de uma subvariedade como em (2.1), nos favorece em varias situações, como na escrita da prova do seguinte resultado:

**Lema 9** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de uma variedade Riemanniana  $M^m$ . Para  $f \in C^\infty(M)$ , tem-se*

$$\Delta f = \bar{\Delta} f + \vec{H}(f) - \sum_{i=n+1}^m \bar{\nabla}^2 f(e_i, e_i),$$

onde  $\bar{\nabla}^2 f(e_i, e_i)$  denota a Hess  $f(e_i, e_i)$  e  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média relativamente à  $\Sigma$ .



**Prova.** Lembramos primeiramente que  $\bar{\Delta}f$  representa o Laplaciano de  $f$  em  $M$  e  $\Delta f$  o Laplaciano em  $\Sigma$ . Temos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla f) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Por outro lado, para  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}
e_i \langle \bar{\nabla} f, e_i \rangle &= e_i \langle (\bar{\nabla} f)^{\perp} + (\bar{\nabla} f)^T, e_i \rangle \\
&= e_i \langle (\bar{\nabla} f)^{\perp}, e_i \rangle + e_i \langle (\bar{\nabla} f)^T, e_i \rangle \\
&= e_i \langle (\bar{\nabla} f)^T, e_i \rangle \\
&= e_i \langle \nabla f, e_i \rangle,
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla} f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n e_i \langle \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \bar{\nabla} f, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Assim, de (2.3), vem que

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} f &= \sum_{i=1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle + \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle. \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle + \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n e_i (e_i(f)) - \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)(f) + \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.1) e observando que se  $X$  é um campo de vetores de  $M$  então  $X(f) = \langle \bar{\nabla} f, X \rangle$ , vê-se que

$$\begin{aligned} \vec{H}(f) &= \left( \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} e_i \right) (f) \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)(f) - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)(f). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} \bar{\nabla}^2 f(e_i, e_i) = \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle,$$

segue de (2.4) e (2.5) que

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f + \vec{H}(f) - \sum_{i=n+1}^{n+k} \bar{\nabla}^2 f(e_i, e_i) &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)(f) + \\ &\quad + \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} f, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle + \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)(f) - \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)(f) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i(f)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6) segue o resultado. ■

O lema acima permite então vermos uma maneira que não é muito comum de calcularmos o Laplaciano de  $f$  em  $\Sigma$ .

Na próxima proposição, temos um resultado envolvendo o Laplaciano da função distância. Provamos uma versão geral para a variedade de Hadamard, apesar de usarmos apenas o caso Euclidiano nos próximos capítulos.

**Proposição 10** *Seja  $M^m$  uma variedade de Hadamard (completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional não positiva) e seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de  $M$ . Seja  $r(x) = d(p, x)$ ,*

$x \in M$ , onde  $p$  é um ponto fixado de  $M$ . Tem-se

$$2 \left[ n + r \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \right] \leq \Delta r^2, \quad (2.7)$$

$$\frac{n - |\nabla r|^2}{r} + \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \leq \Delta r, \quad (2.8)$$

e, ainda,

$$\frac{2(1 - |\nabla r|^2)}{r^2} + \frac{1}{r} \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \leq \Delta \log r \text{ se } n = 2 \quad (2.9)$$

e

$$\Delta r^{2-n} \leq n(n-2)r^{-n}(|\nabla r|^2 - 1) + (2-n)r^{1-n} \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \text{ se } 3 \leq n. \quad (2.10)$$

Ainda, quando  $M = \mathbb{R}^m$ , as desigualdades acima tornam-se igualdades.

**Prova.** Primeiramente, façamos a prova de (2.7). Segue do Lema 9 que

$$\begin{aligned} \Delta r^2 &= \bar{\Delta} r^2 + \vec{H}(r^2) - \sum_{i=n+1}^m \bar{\nabla}^2 r^2(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r^2, e_i \rangle + \langle \bar{\nabla} r^2, \vec{H} \rangle - \sum_{i=n+1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r^2, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r^2, e_i \rangle + \langle \bar{\nabla} r^2, \vec{H} \rangle \\ &= 2 \left[ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle + \langle r \bar{\nabla} r, \vec{H} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é geodésico em  $p$ , temos  $(\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p))^\top = 0$ . Então,

$$\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i(p) = \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i(p))^\perp = \vec{H}(p), \quad (2.12)$$

onde a última igualdade segue da equação (2.1).

Façamos primeiro o caso particular  $M = \mathbb{R}^m$  e, sem perda de generalidade, tome  $p$  como sendo a origem de  $\mathbb{R}^m$ . Assim, podemos escrever  $r(x) = \|x\|$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$  e, então

$$\begin{aligned} \Delta r^2(x) &= \Delta \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n e_i(e_i \langle x, x \rangle) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n e_i(\langle e_i, x \rangle) = 2 \left[ \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, x \rangle + \langle e_i, e_i \rangle) \right] = 2 \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i(x), x \rangle + 1) \\ &= 2n + 2 \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i(x), x \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim, de (2.13) e (2.12) vem que

$$\frac{\Delta r^2(x)}{2} = n + \left\langle \vec{H}(x), x \right\rangle. \quad (2.14)$$

Temos  $r(x) \bar{\nabla} r(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  (visto que  $p = O$  é a origem de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\nabla} r$  é ortogonal as esferas centradas na origem e  $|\bar{\nabla} r| = 1$ ). Assim,

$$\left\langle \vec{H}(x), x \right\rangle = \left\langle \vec{H}(x), r(x) \bar{\nabla} r(x) \right\rangle.$$

Segue então de (2.11) e (2.14) que

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \right\rangle = n. \quad (2.15)$$

Isto mostra que, quando  $M = \mathbb{R}^m$ ,

$$2 \left[ n + r \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \right] = \Delta r^2. \quad (2.16)$$

Para mostrar a segunda identidade (2.8), vamos utilizar a igualdade (2.16). Temos pelas propriedades do laplaciano,

$$\begin{aligned} 2 \left[ n + r \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle \right] &= \Delta r^2 \\ &= r \Delta r + 2 \langle \nabla r, \nabla r \rangle + r \nabla r \\ &= 2r \nabla r + 2 |\nabla r|^2. \end{aligned}$$

Assim, se isolamos o termo  $\Delta r$  na última igualdade,

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{1}{r} \left\{ n + r \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle - |\nabla r|^2 \right\} \\ &= \frac{n - |\nabla r|^2}{r} + \left\langle \vec{H}, \bar{\nabla} r \right\rangle. \end{aligned}$$

Passamos então a justificativa de (2.9).

Temos

$$\begin{aligned} \Delta \log r &= \operatorname{div}_{\Sigma} (\nabla (\log r)) \\ &= \operatorname{div}_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} \nabla r \right) \\ &= \frac{1}{r} \Delta r + \left\langle \nabla r, \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\Delta r}{r} - \left\langle \nabla r, \frac{\nabla r}{r^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{r} \left( \Delta r - \frac{|\nabla r|^2}{r} \right) \end{aligned}$$

e por (2.8),

$$\begin{aligned}\Delta \log r &= \frac{1}{r} \left( \frac{2 - |\nabla r|^2}{r} + \langle \vec{H}, \overline{\nabla} r \rangle \right) - \frac{|\nabla r|^2}{r^2} \\ &= \frac{2(1 - |\nabla r|^2)}{r^2} + \frac{1}{r} \langle \vec{H}, \overline{\nabla} r \rangle.\end{aligned}$$

Por fim, mostremos que vale a última identidade (2.10) em  $\mathbb{R}^m$ . Temos

$$\begin{aligned}\Delta r^{2-n} &= \operatorname{div}_\Sigma (\nabla (r^{2-n})) \\ &= \operatorname{div}_\Sigma ((2-n)r^{-n}r\nabla r) \\ &= \operatorname{div}_\Sigma \left( (2-n)r^{-n} \frac{1}{2} \nabla r^2 \right) \\ &= \frac{(2-n)}{2} \operatorname{div}_\Sigma (r^{-n} \nabla r^2) \\ &= \frac{(2-n)}{2} [r^{-n} (\operatorname{div}_\Sigma (\nabla r^2)) + \langle \nabla r^{-n}, \nabla r^2 \rangle] \\ &= \frac{(2-n)}{2} [r^{-n} \Delta r^2 + \langle 2r \nabla r, -nr^{-n-1} \nabla r \rangle] \\ &= \frac{(2-n)}{2} r^{-n} \Delta r^2 + (n-2) nr^{-n} |\nabla r|^2 \\ &= \frac{(2-n)}{2} r^{-n} [2n + 2r \langle \vec{H}, \overline{\nabla} r \rangle] + (n-2) nr^{-n} |\nabla r|^2 \\ &= (n-2) nr^{-n} (|\nabla r|^2 - 1) + (2-n) r^{-n+1} \langle \vec{H}, \overline{\nabla} r \rangle,\end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos (2.16).

Agora, se  $M$  é uma variedade de Hadamard, pelo Teorema da Comparação do Laplaciano, que pode ser encontrado em (ESCOBAR, 2002), temos

$$\overline{\Delta} r_E \leq \overline{\Delta} r$$

onde  $r_E$  é a distância em  $\mathbb{R}^m$ . Usando-se isto, as igualdades demonstradas para  $\mathbb{R}^m$  se tornam desigualdades em relação à  $M$ , conforme estabelecido no enunciado da proposição, e isto conclui a demonstração da proposição. ■

No que segue, adotaremos a notação utilizada nos artigos em que fundamentamos este trabalho, como (CHOE; GULLIVER, 2017) e (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002), no que se refere ao divergente de um campo  $X$  definido sobre uma subvariedade  $\Sigma^n \subset M^m$ .

**Definição 11** *Seja  $X \in TM$  um campo de vetores (suave) arbitrário ao longo de uma subvariedade  $\Sigma^n \subset M^m$ . Definimos o divergente de  $X$  sobre  $\Sigma$  como*

$$\operatorname{div}_\Sigma X(p) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle(p), \quad (2.17)$$

onde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$ .

Temos o seguinte resultado:

**Lema 12** *Seja  $X$  um campo de vetores (suave) arbitrário sobre uma subvariedade  $\Sigma^n \subset M^m$ .*

*Então*

$$\operatorname{div}_\Sigma X = \operatorname{div}_\Sigma X^T - \langle X, \vec{H} \rangle.$$

**Prova.** *Decomponha  $X$  em suas partes tangente e normal,  $X = X^T + X^\perp$ . Segue que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma X &= \operatorname{div}_\Sigma X^T + \operatorname{div}_\Sigma X^\perp \\ &= \operatorname{div}_\Sigma X^T + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^\perp, e_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

*Temos*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^\perp, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n [e_i \langle X^\perp, e_i \rangle - \langle X^\perp, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle] \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle X^\perp, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = - \left\langle X^\perp, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle \\ &= - \left\langle X^\perp, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i}^\perp e_i \right\rangle \\ &= - \langle X^\perp, \vec{H} \rangle = - \langle X, \vec{H} \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

*Segue de (2.18) e de (2.19) que*

$$\operatorname{div}_\Sigma X = \operatorname{div}_\Sigma X^T - \langle X, \vec{H} \rangle.$$

■

Quando  $X$  é o campo de vetor posição de  $\mathbb{R}^m$ ,  $X(x) = \vec{x}$ , obtemos em particular o seguinte resultado:

**Corolário 13** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de  $\mathbb{R}^m$ . Considere o campo de vetores  $X$  de  $\mathbb{R}^m$  dado por  $X(x) = \vec{x}$ . Então*

$$\operatorname{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle = n.$$

**Prova.** *Seja  $r(x) = \|x\|$  (a distância Euclidiana de  $x$  à origem de  $\mathbb{R}^m$ ). Podemos escrever então*

$$\vec{x} = r(x) \bar{\nabla} r(x),$$

visto que  $\bar{\nabla}r$  é ortogonal às esferas  $\mathbb{S}^{m-1}$ , as quais são as hipersuperfícies de nível de  $r$  e  $|\bar{\nabla}r| = 1$ . Como  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é um referencial ortonormal relativo à  $\Sigma$ , geodésico em  $x \in \Sigma$ , segue direto da igualdade (2.15) da Proposição 10 que

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla}r, e_i \rangle = n,$$

e isto conclui a prova visto que, por definição,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Sigma} X &= \operatorname{div}_{\Sigma} r \bar{\nabla}r \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla}r, e_i \rangle. \end{aligned}$$

■

## 2.2 A fórmula da primeira variação do volume e algumas de suas consequências

No decorrer do texto será feito inúmeras vezes cálculos de área, volume e comprimento, por isso vamos utilizar as seguintes notações: para um domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^m$ ,  $\Sigma$  uma subvariedade  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^m$  e  $\Gamma$  uma subvariedade  $(n - 1)$ -dimensional em  $\mathbb{R}^m$ , relativamente à respectiva forma volume, usaremos as notações:

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dV, \operatorname{Vol}(\Sigma) = \int_{\Sigma} dA \text{ e } \operatorname{Vol}(\Gamma) = \int_{\Gamma} dS.$$

Observe que essa notação é bastante coerente, visto que quando  $n = 3$ , de fato estaremos nos referindo ao volume, a área e ao comprimento.

Na sequência provaremos a Fórmula da Primeira Variação do Volume quando  $M = \mathbb{R}^m$ , que será muito útil em todo nosso trabalho.

**Teorema 14** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de dimensão  $n$  de  $\mathbb{R}^m$ . Considere a variação de  $\Sigma$  dada por uma aplicação diferenciável ( $C^\infty$ )  $\phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, pondo  $\phi_t(p) = \phi(p, t)$ , tem-se  $\phi_0(p) = p$ ,  $p \in \Sigma$ . Então*

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(X) dA, \quad (2.20)$$

onde  $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$  e  $X(p) = \frac{d}{dt} \phi_t(p) \Big|_{t=0}$ .

**Prova.** Observe que, para  $|t|$  suficientemente pequeno, a variação é tal que  $\Sigma_t$  é uma subvariedade diferenciável com a mesma dimensão de  $\Sigma$  visto que, pelo Teorema da Função Implícita,

$\phi_t(\cdot) = \phi(\cdot, t)$  é um difeomorfismo de  $\Sigma$  na subvariedade  $\Sigma_t$  de  $\mathbb{R}^m$ . Estamos assumindo aqui  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de tal forma que este é o caso para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Seja  $p \in \Sigma$  e seja  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$ ,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^n$ , uma parametrização de  $\Sigma$  na vizinhança de  $p$  e já assumimos que  $\frac{\partial x}{\partial x_i}(q) = e_i$ ,  $q = x^{-1}(p)$ , onde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é o nosso referencial ortonormal tangente à  $\Sigma$ . Visto que  $\phi_t$  é um difeomorfismo, temos que  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_t$ , dado por  $\bar{x} = \phi_t \circ x$  é uma parametrização de  $\Sigma_t$  em uma vizinhança de  $\phi_t(p)$ . Pondo  $p = x(x_1, \dots, x_n)$  e supondo  $\phi_t$  expressa nessas coordenadas,

$$\phi_t(x_1, \dots, x_n) = (\phi_t^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_t^n(x_1, \dots, x_n)),$$

onde  $\phi_t^i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é subentendida como  $\phi_t^i \circ x$ , temos que a matriz de

$$d(\phi_t)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\phi_t(p)}\Sigma_t \subset T_{\phi_t(p)}\mathbb{R}^m$$

na base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $T_p\Sigma$  e  $\{d(\phi_t)_p(e_i)\}_{i=1}^n$  de  $T_{\phi_t(p)}\Sigma_t$ , que denotamos por  $[d(\phi_t)_p]$ , é dada então por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_t^1(p)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_t^1(p)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_t^n(p)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_t^n(p)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sabemos de (CARMO, 2014) que

$$\text{Vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \sqrt{\det([d\phi_t]^T [d\phi_t])} dA.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t) &= \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \sqrt{\det([d\phi_t]^T [d\phi_t])} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{\det([d\phi_t]^T [d\phi_t])}} \frac{d}{dt} \det([d\phi_t]^T [d\phi_t]) dA. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{\det([d\phi_0]^T [d\phi_0])}} \frac{d}{dt} \det([d\phi_t]^T [d\phi_t])|_{t=0} dA.$$

Mas  $\phi_0$  é a identidade em  $\Sigma$ , logo  $[d\phi_0] = Id_{\Sigma}$  e  $\det[d\phi_0]^T [d\phi_0] = 1$ . Então

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\phi_t(\Sigma))|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \det([d\phi_t]^T [d\phi_t])|_{t=0} dA.$$

Agora, pelo Lema (58) (Apêndice B), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \det([d\phi_t]^T [d\phi_t])|_{t=0} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{tr} \left( \frac{d}{dt} [d\phi_t]^T [d\phi_t]|_{t=0} \right) dA. \end{aligned}$$



Note que  $[d\phi_t]^T [d\phi_t]$  é dado pela matriz

$$[d\phi_t]^T [d\phi_t] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_1} \right)^2 & \cdots & \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_n} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_n} \right) \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_1} \right) & \cdots & \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \phi_t^j}{\partial x_n} \right)^2 \end{bmatrix}.$$

Então, podemos reescrever a expressão dentro da última integral da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \frac{d}{dt} [d\phi_t]^T [d\phi_t] \Big|_{t=0} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi_t^k}{\partial x_i} \right)^2 \Big|_{t=0} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial (\phi_0)^k}{\partial x_i} \frac{\partial X^k}{\partial x_i} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma} (X) dA.$$

■

Em geral, são consideradas variações normais, isto é, a variação é tomada de modo que para cada ponto da subvariedade define-se um múltiplo do vetor normal. No Teorema 14, contudo, foi tomada uma variação qualquer para mostrar a fórmula da variação do volume, pois no decorrer do trabalho queremos utilizar a variação em relação ao campo de vetores posição.

Quando consideramos subvariedades com bordo, o resultado anterior pode ser reescrito, de modo que se obtém uma versão do teorema acima para subvariedades com bordo, uma consequência disso será que, para subvariedades mínimas, a derivada do volume da variação depende apenas do comportamento da variação no bordo.

**Corolário 15** *Com as mesmas hipóteses do Teorema 14, se  $\Sigma^n$  é uma subvariedade com bordo  $\partial\Sigma$  e, assumindo além disso que  $X$  é de classe  $C^1$  em  $\bar{\Sigma}$ , então*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle dS - \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, X \rangle dA, \quad (2.21)$$

onde  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média de  $\Sigma$  e  $\nu$  é o campo de vetores unitário normal à  $\partial\Sigma$ , tangente à  $\Sigma$  e que aponta para fora de  $\Sigma$ . Em particular, quando  $\Sigma$  é mínima, tem-se

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle dS.$$

**Prova.** Note que, pelo Lema 12,

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \operatorname{div}_{\Sigma} X^T - \langle X, \vec{H} \rangle.$$

Então,

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} (X) dA = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} (X^T) dA - \int_{\Sigma} \langle X, \vec{H} \rangle dA,$$

onde  $X^T$  é a componente tangente de  $X$ . Pelo Teorema da Divergência (Teorema 57 do Apêndice A) segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} (X^T) dA &= \int_{\partial\Sigma} \langle X^T, \nu \rangle dS \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle dS. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\Sigma_t) |_{t=0} &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X dA \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle dS - \int_{\Sigma} \langle H, X \rangle dA. \end{aligned}$$

Em particular, quando  $\Sigma$  é mínima, a segunda parcela da última expressão acima é igual a zero e isto conclui a prova. ■

### 2.2.1 Comparando volumes de variedades mínimas compactas e de cones $n$ -dimensionais

Nesta seção trataremos da relação do volume de uma subvariedade mínima compacta e conexa  $\Sigma^n$  em  $\mathbb{R}^m$ , com o volume de cones determinados por  $\partial\Sigma$  cujo vértice está em  $\Sigma$ .

Já que trabalharemos com subvariiedades mínimas compactas conexas e sua *envolvente convexa* precisaremos de algumas informações sobre o princípio do máximo, que colocamos abaixo.

Sabemos que o princípio do máximo relativo as equações diferenciais elípticas lineares é bem conhecido e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em (GILBARG; TRUDINGER, 1983) p. 15, na versão conhecida como Princípio do Máximo Fraco. Pode ser encontrada também em inúmeras dissertações de mestrado envolvendo o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas como por exemplo em (ABE, 2019) e (MULLER, 2018), razão pela qual não faremos aqui. Para nós, no entanto, é suficiente sua versão aplicada ao Laplaciano.

**Teorema 16** (GILBARG; TRUDINGER, 1983) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um domínio limitado. Se  $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  é uma função satisfazendo  $\Delta f \geq 0$  ( $\leq 0$ ) em  $\Omega$ , então  $\sup_{\Omega} f = \sup_{\partial\Omega} f$  ( $\inf_{\Omega} f = \inf_{\partial\Omega} f$ ).*

Em resumo, o Princípio do Máximo Fraco diz que se uma função tem o Laplaciano não negativo, então os valores da função são limitados superiormente pelo seu valor máximo em  $\partial\Omega$ .

Note que o Laplaciano é um operador que é aplicado em uma função escalar. No entanto, é possível estender o conceito de Laplaciano, a fim de que seja possível aplicá-lo a campos vetoriais, como segue: seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  uma subvariedade e  $X = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  um campo vetorial em  $\Sigma$ , onde  $f_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  é de classe  $C^2$ . Então o Laplaciano de  $X$  em  $\Sigma$  é definido como

$$\Delta_{\Sigma} X = (\Delta_{\Sigma} f_1, \dots, \Delta_{\Sigma} f_m).$$

Usando o Laplaciano de um campo vetorial conforme definido acima, provamos que toda subvariedade mínima compacta e conexa está contida na *envolvente convexa* de seu bordo. Vamos definir, antes, o que se entende por *envolvente convexa* de um subconjunto em  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 17** (BONNESEN; FENCHEL, 1987) *Dado um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^m$ , chamamos de envolvente convexa (ou convex hull) de  $A$  (ou  $\text{conv}(A)$ ) a interseção de todos os semiespaços de  $\mathbb{R}^m$  que contém  $A$ , isto é,*

$$\text{conv}(A) := \bigcap \{H; H \text{ é um semiespaço de } \mathbb{R}^m \text{ contendo } A\}.$$

Um semiespaço é definido como sendo um dos subconjuntos que um hiperplano divide  $\mathbb{R}^m$ . Pode-se dizer também que  $\text{conv}(A)$  é o menor conjunto convexo que contém  $A$ . É possível ver a envolvente convexa como a aplicação  $\text{conv} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ , a qual leva subconjuntos quaisquer de  $\mathbb{R}^m$  em subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^m$ , sendo assim, invariante por conjuntos convexos, isto é, se  $A \subset \mathbb{R}^m$  é um conjunto convexo então  $\text{conv}(A) = A$ .

**Proposição 18** *Seja  $i : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  um mergulho (Definição 55, Apêndice A) suave e seja  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  o campo de vetores posição em  $\mathbb{R}^m$ , então  $\Delta_{\Sigma} X|_{\Sigma} = \vec{H}$ , onde  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média de  $\Sigma$ .*

**Prova.** Começamos tomando nosso referencial ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , tangente à  $\Sigma$ , em uma vizinhança de um ponto  $p \in \Sigma$  (um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T\Sigma$  - o fibrado

tangente de  $\Sigma$ . Temos de (2.2), que

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \sum_{j=1}^n (e_j(e_j(x_i)) - (\nabla_{e_j} e_j)(x_i)) \\ &= \sum_{j=1}^n (\bar{\nabla}_{e_j}^\perp e_j)(x_i).\end{aligned}$$

Assim, de (2.1) podemos ver que estes coeficientes formam exatamente o vetor curvatura média,

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i}^\perp e_i) = \Delta_\Sigma X|_\Sigma.$$

■

Com isso, podemos passar à prova do nosso resultado em questão:

**Teorema 19** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  uma subvariedade mínima compacta conexa com bordo  $\partial\Sigma = \Gamma$ . Então  $\Sigma \subset \text{conv}(\Gamma)$ .*

**Prova.** Para fazermos esta prova, vamos mostrar que qualquer semiespaço  $L$  que contém  $\Gamma$  também vai conter  $\Sigma$ . De fato, seja  $L$  um semiespaço que contém  $\Gamma$ . Observe que podemos caracterizar tal semiespaço da seguinte maneira,

$$L = \{x \in \mathbb{R}^m : l(x) \leq a, a \in \mathbb{R}\},$$

sendo  $l : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  alguma aplicação linear. Agora, quando restringimos  $l$  à  $\Sigma$ , temos que

$$\Delta_\Sigma l(x) = l(\Delta_\Sigma x) = 0,$$

onde na última igualdade usamos que  $\Sigma$  é mínima e que  $x$  é o campo de vetores posição, portanto, como  $\vec{H} = \Delta_\Sigma x|_\Sigma$ , temos  $\Delta_\Sigma x = 0$ . Desse modo,  $l$  é harmônica em  $\Sigma$  e, sabendo que  $l|_{\partial\Sigma} \leq a$ , pelo Teorema (16) segue que  $l|_\Sigma \leq a$  e, portanto,  $\Sigma \subset L$  o que conclui a demonstração. ■

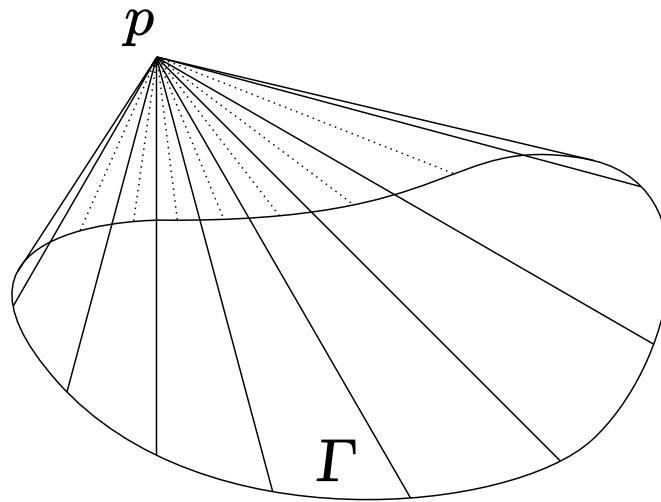
Com o exposto acima, podemos dar sequência ao assunto principal desta seção. Começamos com a definição do que entendemos por um cone determinado por uma subvariedade de  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 20 (Cone)** *Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  uma subvariedade de dimensão  $n - 1$  e  $p$  um ponto de  $\mathbb{R}^m$ . Definimos o cone determinado por  $\Gamma$  em  $p$  como sendo o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{C} = p * \Gamma = \{p + t(x - p); x \in \Gamma \text{ e } 0 \leq t \leq 1\}.$$

*Isto é, é a união de todos os segmentos que ligam  $p$  aos pontos de  $\Gamma$ .*

Figura 3.2.1: Cone



Fonte: Elaborado pelo autor.

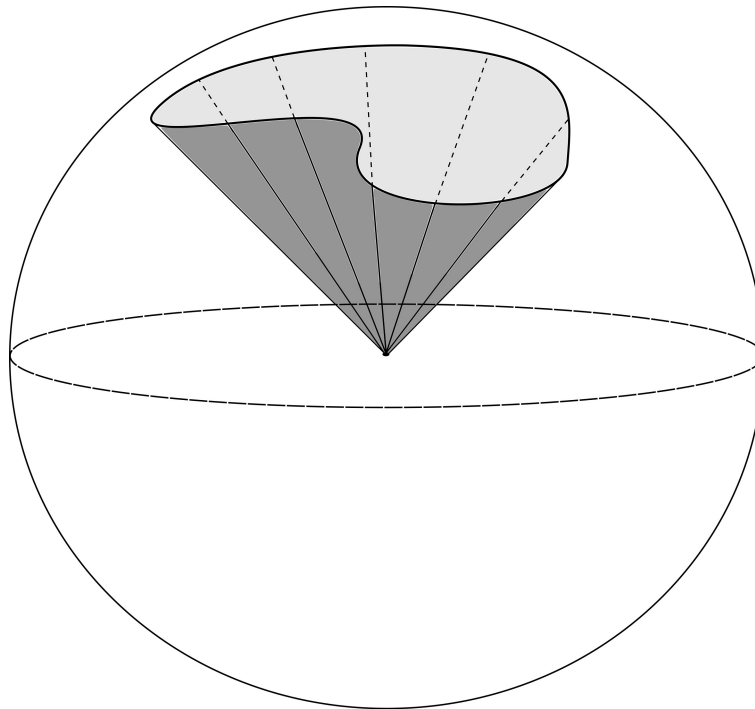
Essa definição é uma maneira bastante intuitiva e coincide com a definição que aprendemos em geometria.

Introduzimos então uma maneira de calcular o volume de um cone  $n$ -dimensional com vértice na origem de  $\mathbb{R}^m$ , determinado por uma subvariedade  $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{S}^{m-1}(r)$ .

**Lema 21** *Seja  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$  a  $(m - 1)$ -dimensional esfera de raio  $r > 0$  em  $\mathbb{R}^m$  com centro na origem  $O$  de  $\mathbb{R}^m$  e seja  $n < m$ . Seja  $\Gamma^{n-1}$  uma subvariedade contida em  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$  e seja  $\mathcal{C}$  o cone  $n$ -dimensional com vértice  $O$  determinado por  $\Gamma$ . Então*

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) = \frac{r}{n} \text{Vol}(\Gamma).$$

Figura 3.2.2: Cone na esfera



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Prova.** Seja  $X$  o campo de vetores posição de  $\mathbb{R}^m$ . Temos

$$X(x) = \vec{x} = r(x) \bar{\nabla} r(x)$$

onde  $r(x) = d(x, O) = \|x\|$ . Visto que  $\mathcal{C}$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional (podemos ignorar o ponto  $O$ ), pelo Corolário 13, temos

$$n = \operatorname{div}_{\mathcal{C}} X. \quad (2.22)$$

Do Teorema 14 e do Corolário 15, considerando uma variação  $\phi(t, p)$  tal que  $X(p) = \frac{d}{dt} \phi_t(p) |_{t=0}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\mathcal{C}_t) |_{t=0} &= \int_{\mathcal{C}} \operatorname{div}_{\mathcal{C}} X dA \\ &= \int_{\Gamma} \langle X, \nu_{\mathcal{C}} \rangle dS - \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{H}_{\mathcal{C}}, X \rangle dA. \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\nu_{\mathcal{C}}$  é o campo de vetores unitário normal à  $\Gamma$ , tangente à  $\mathcal{C}$  e que aponta para fora de  $\mathcal{C}$  e  $\vec{H}_{\mathcal{C}}$  é o vetor curvatura média de  $\mathcal{C}$ . Assim, como  $\mathcal{C}$  é um cone com vértice em  $O$ , temos  $X|_{\mathcal{C}}$  tangente à  $\mathcal{C}$ , donde, como  $\vec{H}_{\mathcal{C}}$  é normal à  $\mathcal{C}$ , segue de (2.22) e (2.23) que

$$\int_{\mathcal{C}} n dA = \int_{\Gamma} \langle X, \nu_{\mathcal{C}} \rangle dS.$$

isto é,

$$\begin{aligned} n\text{Vol}(\mathcal{C}) &= \int_{\Gamma} \langle X, \nu_{\mathcal{C}} \rangle dS. \\ &= r \int_{\Gamma} \langle \bar{\nabla} r, \nu_{\mathcal{C}} \rangle dS. \end{aligned}$$

Temos  $|\bar{\nabla} r| = 1$  e, como  $\Gamma$  está sobre a esfera  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ , também ocorre que  $\bar{\nabla} r = \nu_{\mathcal{C}}$ . Logo  $\langle \bar{\nabla} r, \nu_{\mathcal{C}} \rangle = 1$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{C}) &= \frac{r}{n} \int_{\Gamma} dS \\ &= \frac{r}{n} \text{Vol}(\Gamma). \end{aligned}$$

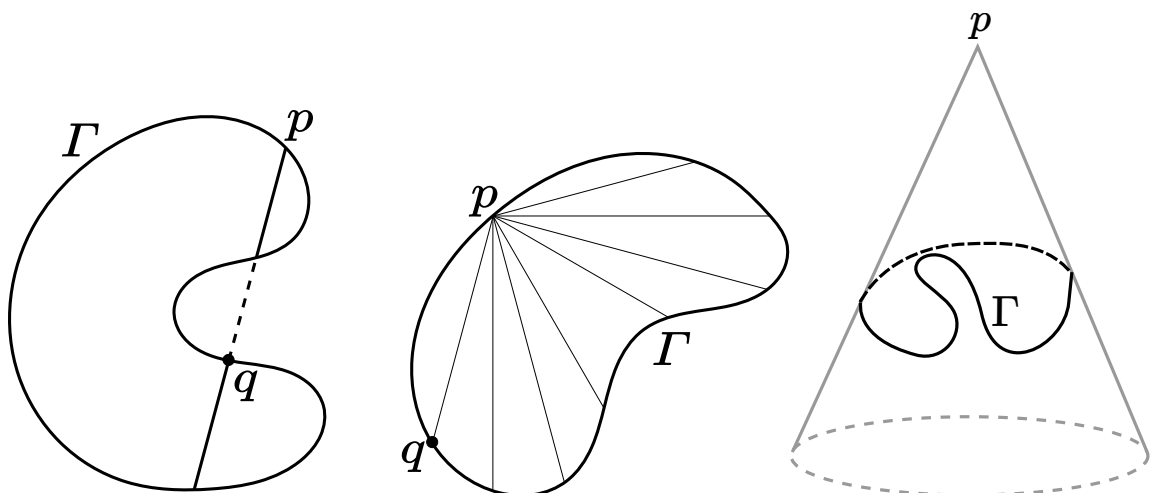
■

Utilizados em topologia, os conjuntos estrelados são muito importantes em diversas áreas. Usaremos aqui uma definição de conjunto estrelado em relação a um ponto, posteriormente será explicitado o motivo de definirmos tais conjuntos.

**Definição 22** Dizemos que uma subvariedade compacta  $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{R}^m$  é um conjunto estrelado com relação a um ponto  $p \in \mathbb{R}^m$ , se para todo  $q \in \Gamma$ , considerando o segmento  $pq$ , temos  $pq \cap \Gamma \setminus \{p\} = \{q\}$ .

Seja  $\Gamma^{n-1}$  uma subvariedade compacta e seja  $\mathcal{C} = p * \Gamma$  o cone com vértice em  $p$  determinado por  $\Gamma$ . Note que, se  $\Gamma$  é um conjunto estrelado com relação à  $p$ , então  $\partial\mathcal{C} = \Gamma$ . Porém se  $\Gamma$  não é estrelado, pode ocorrer que partes de  $\Gamma$  estejam contidas no interior de  $\mathcal{C}$  donde  $\partial\mathcal{C}$  não é necessariamente  $\Gamma$ .

Figura 3.2.3: Conjuntos estrelado e não estrelado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Faremos algumas considerações relativamente ao caso onde  $\Gamma$  é estrelado em relação a um ponto que está sobre uma subvariedade mínima que tem por bordo  $\Gamma$ .

O cone exterior sobre  $\partial\Sigma$  com vértice em  $p$  é o conjunto

$$E := \{p + t(q - p) ; q \in \partial\Sigma, t \geq 1\}. \quad (2.24)$$

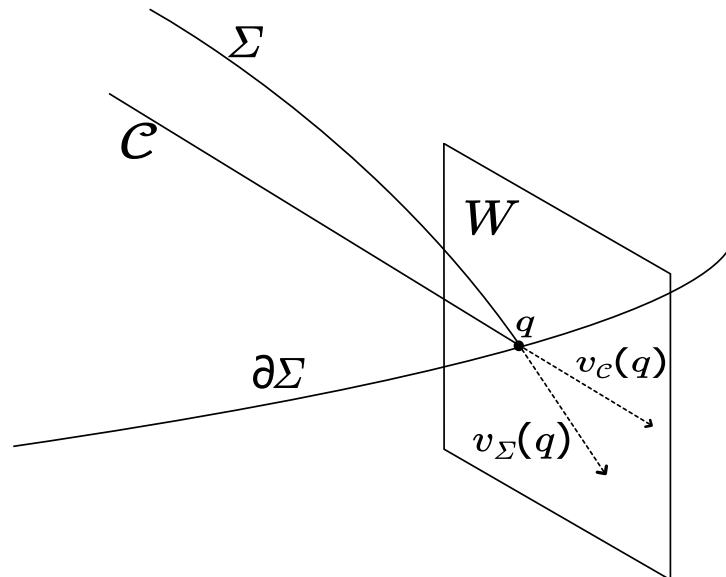
**Proposição 23** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade compacta de  $\mathbb{R}^m$  com bordo  $\partial\Sigma$  uma única componente conexa e seja  $p \in \mathbb{R}^m$ . Seja  $\mathcal{C}$  o cone com vértice em  $p$  e determinado por  $\partial\Sigma$ .*

*Dado  $q \in \partial\Sigma$ , seja  $v_{\mathcal{C}}(q)$  o vetor unitário normal à  $\partial\Sigma$  em  $q$ , tangente à  $\mathcal{C}$  e que aponta para  $E$  e seja  $v_{\Sigma}(q)$  o vetor unitário normal à  $\partial\Sigma$  em  $q$ , tangente à  $\Sigma$  e que aponta para fora de  $\Sigma$ . Seja  $W$  um subespaço vetorial bidimensional, normal à  $T_q\partial\Sigma$ , que contenha  $v_{\mathcal{C}}(q)$  e  $v_{\Sigma}(q)$ . Se  $\partial\Sigma$  é estrelado com relação à  $p$ , dentre todos os vetores unitários  $v \in W$ , o valor máximo de  $\langle q - p, v \rangle$  é atingido quando  $v = v_{\mathcal{C}}(q)$ , ou seja,*

$$\langle q - p, v \rangle \leq \langle q - p, v_{\mathcal{C}} \rangle. \quad (2.25)$$

*Em particular,  $\langle q - p, v_{\Sigma} \rangle \leq \langle q - p, v_{\mathcal{C}} \rangle$ .*

Figura 3.2.4



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Prova.** Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $p$  é a origem  $O$  de  $\mathbb{R}^m$  e observe que  $v_{\mathcal{C}} = -v_E$ , onde  $v_E$  é o vetor unitário normal à  $\partial\Sigma$ , tangente à  $E$  e que aponta para fora de  $E$ .



Seja  $q \in \partial\Sigma$  e seja  $W$  como no enunciado, que contém  $v_C(q)$  e  $v_\Sigma(q)$ . Vamos mostrar que dentre todos os vetores unitários  $v \in W$ , o produto  $\langle q, v \rangle$  é maximizado quando  $v = v_C$ . De fato, como  $v \notin T_q\partial\Sigma$ , considere o subespaço soma direta  $T_q\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}v$ . O vetor  $q$  pode não pertencer a este subespaço, assim, pelo Teorema de Pitágoras

$$\|q\|^2 \geq \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}v} q\|^2 = \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma} q\|^2 + \|\text{proj}_{\mathbb{R}v} q\|^2 = \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma} q\|^2 + |\langle v, q \rangle|^2.$$

Por outro lado, temos que

$$T_q\mathcal{C} = T_q\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}v_C,$$

e como  $q \in T_q\mathcal{C}$ , significa que a projeção de  $q$  sobre este espaço resulta no próprio  $q$ . Então

$$\|q\|^2 = \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}v_C} q\|^2 = \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma} q\|^2 + \|\text{proj}_{\mathbb{R}v_C} q\|^2 = \|\text{proj}_{T_q\partial\Sigma} q\|^2 + |\langle v_C, q \rangle|^2.$$

Assim,

$$|\langle v, q \rangle|^2 \leq |\langle v_C, q \rangle|^2 \Rightarrow |\langle v, q \rangle| \leq |\langle v_C, q \rangle|.$$

Mas note que  $\langle v_C, q \rangle \geq 0$  pois ambos estão no mesmo plano e apontam para  $E$ . Logo

$$\langle v, q \rangle \leq |\langle v, q \rangle| \leq |\langle v_C, q \rangle| = \langle v_C, q \rangle, \quad (2.26)$$

o que conclui a prova. ■

Observamos que a desigualdade (2.26) é relevante para nosso contexto

Estamos interessados na subvariedade mínima compacta com bordo  $\partial\Sigma$  não contido em um plano e notamos que, para  $p \in \Sigma$ , é possível que  $\partial\Sigma$  seja não estrelado em relação à  $p$ . A seguir descrevemos um exemplo onde isto ocorre.

Seja  $\Sigma$  um helicóide em  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que  $\Sigma$  é uma superfície mínima regrada. Considere em  $\Sigma$  um domínio  $U$  cujo bordo é uma curva fechada simples  $\Gamma$  que intercepta uma reta contida em  $\Sigma$  em 4 pontos distintos. Tome  $p$  um ponto desta reta que esteja em  $U$ . Obviamente um raio do cone  $\mathcal{C}$  determinado por  $\Gamma$  com vértice em  $p$  está sobre esta reta, donde  $\Gamma$  não é estrelado com relação à  $p$ .

Usaremos as informações acima e o Lema 23 para a provar um resultado que relaciona o volume de uma subvariedade mínima e compacta  $\Sigma$  com o volume do cone determinado pelo bordo de  $\Sigma$  cujo vértice está em  $\Sigma$ . Precisamente:

**Proposição 24** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade mínima compacta e conexa de  $\mathbb{R}^m$ , seja  $p \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathcal{C} = p * \Gamma$ . Então*

$$\text{Vol}(\Sigma) \leq \text{Vol}(\mathcal{C}).$$

**Prova.** Visto que as translações em  $\mathbb{R}^m$  são isometrias, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $p$  é a origem de  $\mathbb{R}^m$ , que denotamos por  $O$ . Seja  $X$  o campo de vetores posição de  $\mathbb{R}^m$  dado por  $X(x) = \vec{x}$ . Pelo Corolário 13, temos

$$n = \operatorname{div}_\Sigma X.$$

Do Teorema 14 do Corolário 15 temos que se  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^m$  com bordo, considerando uma variação  $\phi(t, p)$  tal que  $X(p) = \frac{d}{dt}\phi_t(p)|_{t=0}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\operatorname{Vol}(S_t)|_{t=0} &= \int_S \operatorname{div}_S X dA \\ &= \int_{\partial S} \langle X, \nu_S \rangle dS - \int_S \langle \vec{H}_S, X \rangle dA. \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $\nu_S$  é o campo de vetores unitário normal à  $\partial S$ , tangente à  $S$  e que aponta para fora de  $S$  e  $\vec{H}_S$  é o vetor curvatura média de  $S$ . Assim, como  $\Sigma$  é mínima, temos de (2.27) que

$$\int_\Sigma n dA = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\Sigma \rangle dS$$

ou seja,

$$n \operatorname{Vol}(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\Sigma \rangle dS, \quad (2.28)$$

onde  $\nu_\Sigma$  é o campo de vetores unitário normal à  $\partial\Sigma$ , tangente à  $\Sigma$  e que aponta para fora de  $\Sigma$ .

Seja  $\mathcal{C}$  o cone com vértice em  $O$  e determinado por  $\partial\Sigma$ , o qual denotamos por  $\mathcal{C} = O * \partial\Sigma$ . Segue de Corolário 13 que

$$n = \operatorname{div}_\mathcal{C} X,$$

e de (2.27) vem que

$$\begin{aligned} \int_\mathcal{C} n dA &= \int_{\partial\mathcal{C}} \langle X, \nu_\mathcal{C} \rangle dS - \int_\mathcal{C} \langle \vec{H}_\mathcal{C}, X \rangle dA \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\mathcal{C} \rangle dS - \int_\mathcal{C} \langle \vec{H}_\mathcal{C}, X \rangle dA \end{aligned}$$

ou seja

$$n \operatorname{Vol}(\mathcal{C}) = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\mathcal{C} \rangle dS - \int_\mathcal{C} \langle \vec{H}_\mathcal{C}, X \rangle dA$$

onde  $\nu_\mathcal{C} : \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o campo de vetores unitário normal à  $\partial\mathcal{C} = \partial\Sigma$ , tangente à  $\mathcal{C}$  e que aponta para fora de  $\mathcal{C}$ . Mas  $X|_\mathcal{C}$  é tangente à  $\mathcal{C}$  pois  $X(x) = \vec{x}$  e  $\mathcal{C} \subset O * \partial\Sigma$ . Então, como  $\vec{H}_\mathcal{C}$  é normal à  $\mathcal{C}$ , resulta que

$$n \operatorname{Vol}(\mathcal{C}) = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\mathcal{C} \rangle dS. \quad (2.29)$$

Se  $\partial\Sigma$  não é estrelado com relação à  $O$ , pondo  $\partial\Sigma = \Gamma$ . Assim,

$$\int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_C \rangle dS = \int_{\mathcal{C}} \langle X, \nu_C \rangle dS$$

Pelo Lema 23, para todo ponto  $q$  de  $\Gamma$ ,

$$\langle X, \nu_\Sigma \rangle (q) \leq \langle X, \nu_C \rangle (q).$$

Assim,

$$n\text{Vol}(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu_\Sigma \rangle dS = \int_{\partial\mathcal{C}} \langle X, \nu_\Sigma \rangle dS \leq \int_{\partial\mathcal{C}} \langle X, \nu_C \rangle dS = n\text{Vol}(\mathcal{C}),$$

donde concluímos que

$$\text{Vol}(\Sigma) \leq \text{Vol}(\mathcal{C}).$$

Se  $\partial\Sigma$  não é estrelado em relação à  $O$ , então  $\partial\Sigma \neq \partial\mathcal{C}$  pois  $\partial\Sigma$  tem partes inteiramente contidas em  $\mathcal{C}$ . Neste caso, como  $\partial\Sigma$  está contida na envolvente convexa de  $\partial\Sigma$ , então estará contida na envolvente convexa de  $\partial\mathcal{C}$  e o resultado segue. ■

**Observação 25** *Visto que a definição que usamos para subvariedade mínima é a de que o vetor curvatura média é nulo, não se pode afirmar que se  $\Sigma^n$  é mínima então  $\Sigma$  é minimizante para a área, no sentido clássico. Porém o resultado anterior nos diz que quando  $\Sigma$  for mínima, ela terá seu volume  $n$ -dimensional menor ou igual ao volume  $n$ -dimensional de qualquer cone definido a partir de seu bordo e com vértice na superfície. Então o termo "mínima" usado para definir subvariedades com vetor curvatura média nulo é bastante apropriado.*

### 3 SOBRE A DENSIDADE DE UMA SUBVARIEDADE MÍNIMA

Neste capítulo, veremos o que se entende por densidade de uma subvariedade em um ponto. Trataremos dos teoremas da monotonicidade relativo à subvariedades mínimas em  $\mathbb{R}^m$ . Finalizaremos com um resultado que nos dá uma relação entre a densidade em um ponto  $p$  de uma subvariedade mínima em  $\mathbb{R}^m$  com bordo e a densidade em  $p$  do cone determinado por tal bordo com vértice em  $p$ .

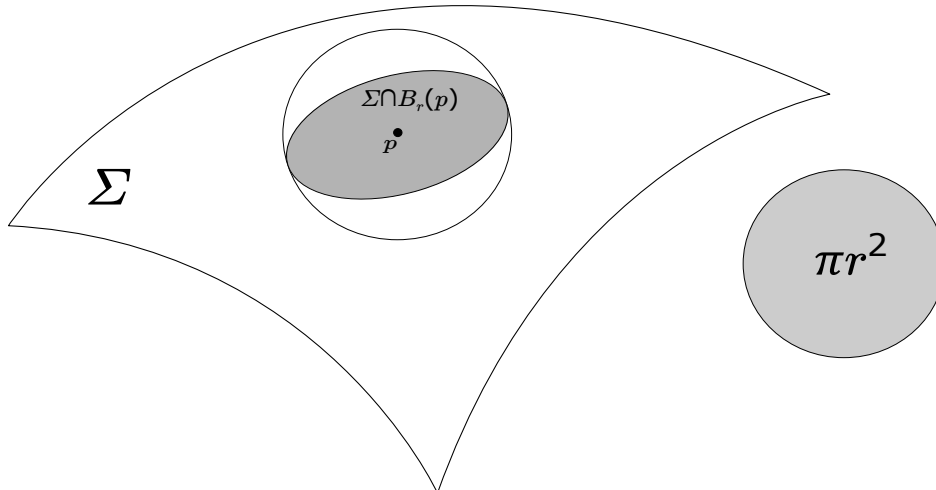
#### 3.1 Algumas considerações sobre a densidade de uma subvariedade em um ponto

Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $M$  de dimensão  $m := n + k$ ,  $k \geq 1$ . A *densidade* de  $\Sigma$  em  $p$  é dada por

$$\Theta_{\Sigma}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\omega_n r^n}, \quad (3.1)$$

sendo que  $B_r(p) \subset M$  denota a bola geodésica centrada em  $p$  com raio  $r$  e  $\omega_n$  é o volume da bola unitária  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^n$ .

Figura 4.1.1 - Densidade de  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}^3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

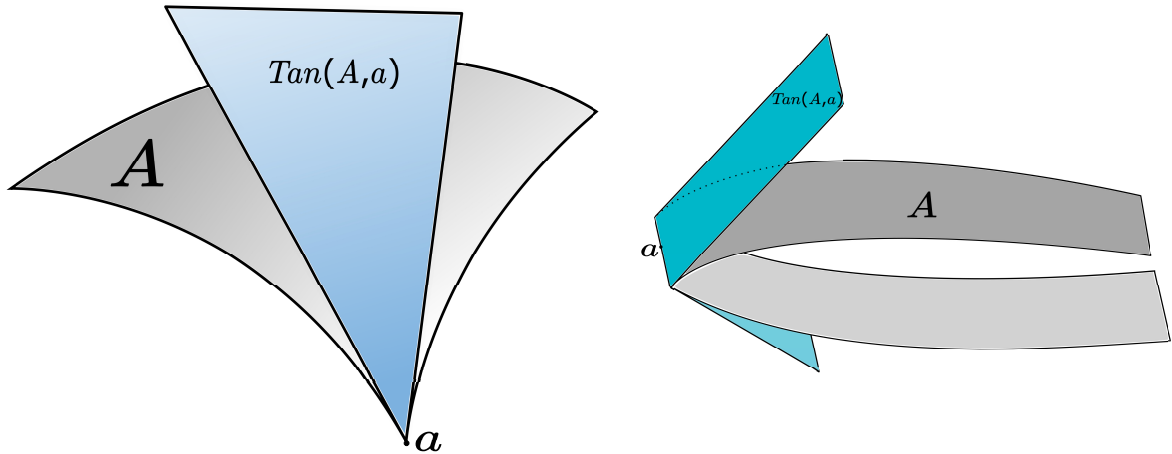
Note que este valor é sempre nulo quando  $p \notin \Sigma$ . De fato, se  $p$  não está em  $\Sigma$ , existe  $r_0 > 0$  de modo que  $\Sigma \cap B_{r_0}(p) = \emptyset$  e, conseqüentemente,  $\text{vol}(\Sigma \cap B_r(p)) = 0$  para  $r < r_0$ .

É possível reescrevermos a definição de densidade definindo o que chamamos de *cone tangente*.

**Definição 26** Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  e  $a \in A$ . O cone tangente à  $A$  em  $a$  é dado por

$$\text{Tan}(A, a) = \text{Fecho} \left\{ v \in \mathbb{R}^m; \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A, x_n \rightarrow a \text{ tal que } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{x_n - a}{r} = v \right\}.$$

Figura 4.1.2 - Cone Tangente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vê-se que  $v$  é tangente à  $a \in A$  se o raio iniciando em  $a$  e apontando na direção de  $v$  aproxima-se de  $A$  mais rápido do que linearmente.

Suponha  $\Sigma$  uma subvariedade (suave ou não) de  $\mathbb{R}^m$ . O cone tangente à  $\Sigma$  em  $p \in \Sigma$  é, em resumo, o conjunto de semirretas partindo de  $p$  que tangenciam  $\Sigma$  em  $p$ , ou seja, nos casos em que  $p$  é um ponto "suave" de  $\Sigma$  o cone tangente é uma boa generalização do que se entende por  $n$ -plano tangente  $T_p \Sigma$ . A função do cone tangente é fornecer uma definição compatível com a de espaço tangente em pontos em que não é possível defini-lo, por exemplo, nos chamados bicos. Em pontos em que está bem definido o espaço tangente, ele coincide com o cone tangente.

Note que isto nos dá uma maneira alternativa de ver a densidade de uma subvariedade em um ponto, visto que se  $\Sigma^n$  uma subvariedade de  $\mathbb{R}^m$  com bordo (suave ou não), então para  $p \in \Sigma \cup \partial \Sigma$  tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\text{Tan}(\Sigma, p) \cap B_r(p))}{\omega_n r^n}.$$

Com isso, segue que a densidade de uma subvariedade em um ponto é igual a densidade do cone tangente a essa subvariedade nesse mesmo ponto, ou seja,

$$\Theta_{\Sigma}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\text{Tan}(\Sigma, p) \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} = \Theta_{\text{Tan}(\Sigma, p)}(p).$$

É imediato concluir que nos pontos  $p \in \Sigma$  que são regulares (suaves), se  $\Sigma$  é mergulhada, visto que  $\text{Tan}(\Sigma, p) = T_p\Sigma$ , tem-se  $\Theta_\Sigma(p) = 1$ , já que nesse caso

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma \cap B_r(p)) &= \text{vol}(\text{Tan}(\Sigma, p) \cap B_r(p)) \\ &= \text{vol}(T_p\Sigma \cap B_r(p)) \end{aligned}$$

quando tomamos  $r \rightarrow 0$ .

Note que, se  $\Sigma$  é mergulhada até o bordo e se  $\partial\Sigma$  é suave em  $p$ , então, pondo  $\tilde{v}_\Sigma(p)$  o vetor unitário normal à  $T_p\partial\Sigma$  o qual é tangente à  $\Sigma$  em  $p$  e que aponta para  $\Sigma$ , vê-se que

$$\text{Tan}(\Sigma, p) = \{v \in T_p\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}\tilde{v}_\Sigma(p); \langle v, \tilde{v}_\Sigma(p) \rangle \geq 0\},$$

ou seja,  $\text{Tan}(\Sigma, p)$  é um semiespaço, donde se conclui que, neste caso,  $\Theta_\Sigma(p) = 1/2$ , pois  $\text{vol}(\Sigma \cap B_r(p)) = \text{vol}(\text{Tan}(\Sigma, p) \cap B_r(p))$  quando tomamos  $r \rightarrow 0$ .

Assim, é natural o seguinte resultado:

**Proposição 27** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade regular (suave) de  $\mathbb{R}^m$ . Então, para todo  $p \in \Sigma$ ,*

$$1 \leq \Theta_\Sigma(p).$$

*Ainda, se  $\partial\Sigma$  é regular em  $p \in \partial\Sigma$ , então*

$$\frac{1}{2} \leq \Theta_\Sigma(p).$$

Como consequência, para os pontos de auto-interseção de uma subvariedade mínima  $\Sigma$ , temos:

**Corolário 28** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade mínima de  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $p \notin \partial\Sigma$  um ponto de auto-interseção de  $\Sigma$ , então*

$$2 \leq \Theta_\Sigma(p).$$

*Se  $\partial\Sigma$  é regular e  $p \in \partial\Sigma$  for um ponto de intersecção com  $\Sigma$ , então*

$$\frac{3}{2} \leq \Theta_\Sigma(p).$$

Intuitivamente, a prova deste corolário pode ser visualizada da seguinte maneira: um ponto de auto-inteseção  $p \in \Sigma$ , com  $\Sigma$  regular, está no encontro de duas ou mais regiões de  $\Sigma$  que são localmente subvariedades de dimensão  $n$ . Em cada uma dessas regiões irá acontecer como na Proposição 27 e, conseqüentemente, a densidade nesse ponto será maior ou igual a 2.

Se  $\partial\Sigma$  é regular e  $p$  é um ponto de  $\partial\Sigma$ , e também um ponto onde o interior de  $\Sigma$  toca  $p$ , então por um lado,  $T_p\Sigma \subset \text{Tan}(\Sigma, p)$  e por outro lado,

$$\{v \in T_p\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}\tilde{v}_\Sigma(p); \langle v, \tilde{v}_\Sigma(p) \rangle \geq 0\} \subset \text{Tan}(\Sigma, p).$$

Segue daí que  $\Theta_\Sigma(p) \geq 1 + 1/2 = 3/2$ .

É claro que pode ocorrer que  $\{v \in T_p\partial\Sigma \oplus \mathbb{R}\tilde{v}_\Sigma(p); \langle v, \tilde{v}_\Sigma(p) \rangle \geq 0\} \subset T_p\Sigma$ , e nesse caso tem-se a impressão de que o resultado não seria válido, porém é preciso lembrar que a função densidade conta o volume da interseção, ou seja, esta contado com multiplicidade e podem haver sobreposições.

As provas da proposição e do corolário fogem um pouco do escopo de nosso trabalho, visto que é necessário conhecimentos de Teoria Geométrica da Medida. Maiores detalhes podem ser vistos em (GROMOV, 1983), seção 8.2 e, mais aprofundado em (ALLARD, 1972).

Em geral, iremos trabalhar com curvas/subvariedades suaves por partes. Mas determinados resultados podem ser estendidos para conjuntos retificáveis ou  $n$ -retificáveis. A definição a seguir generaliza o conceito de um conjunto ser retificável.

**Definição 29** Dizemos que um subconjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é  $n$ -retificável quando existe alguma aplicação de Lipschitz de um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$  para  $\Gamma$ .

Relembremos que uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma$  é de Lipschitz se existe uma constante positiva não nula de modo que para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ , e isso pode ser observado como se o contra-domínio fosse limitado pelo tamanho do domínio, a menos de uma constante. Com isso em mente, fica natural definir um conjunto  $n$ -retificável utilizando aplicações de Lipschitz.

O resultado seguinte é o cálculo da densidade de um cone em seu vértice.

**Proposição 30** Dado  $p \in \mathbb{R}^m$  e uma subvariedade (subconjunto)  $(n-1)$ -dimensional (retificável)  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , tem-se

$$\Theta_C(p) = \frac{\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})},$$

onde  $C = p * \Gamma$  é o cone com vértice em  $p$  determinado por  $\Gamma$  e  $\pi_p$  é a projeção radial de  $\Gamma$  em  $\partial B_1(p)$  dada por

$$\pi_p(x) = p + \frac{x - p}{\|x - p\|}.$$

**Prova.** Temos, da definição de densidade (3.1), que

$$\Theta_{\mathcal{C}}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\mathcal{C} \cap B_r(p))}{\omega_n r^n}.$$

Denote por  $\mathcal{C}_\infty$  o cone ilimitado de vértice  $p$  determinado por  $\Gamma$  ( $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C} \cup E$ , onde  $E$  é o respectivo cone exterior). Para fins de contas e simplificações, podemos considerar sem perda de generalidade o ponto  $p$  como sendo a origem  $O$  de  $\mathbb{R}^m$ . Observe que, pelo Lema 21,

$$\text{vol}(\mathcal{C}_\infty \cap B_r(p)) = \frac{r}{n} \text{vol}(\mathcal{C}_\infty \cap \partial B_r(p)) \quad (3.2)$$

pois  $\mathcal{C}_\infty \cap \partial B_r(p)$  é uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional contida em  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ . Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{C}_\infty \cap B_1(p)) &= \frac{1}{n} \text{vol}(\mathcal{C}_\infty \cap \partial B_1(p)) \\ &= \frac{1}{n} \text{vol}(\pi_p(\Gamma)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

já que

$$\mathcal{C}_\infty \cap \partial B_1(p) = \pi_p(\Gamma).$$

Note que, para  $r$  suficientemente pequeno,  $\mathcal{C}_\infty \cap B_r(p) = \mathcal{C} \cap B_r(p)$  (donde  $\mathcal{C}_\infty \cap \partial B_r(p) = \mathcal{C} \cap \partial B_r(p)$ ). Para tal  $r$ ,  $\mathcal{C} \cap \partial B_r(p)$  e  $\pi_p(\Gamma)$  são figuras semelhantes (homotéticas) e elas têm dimensão  $n-1$ , então temos

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_r(p))}{r^{n-1}} = \frac{\text{vol}(\pi_p(\Gamma))}{1^{n-1}},$$

ou seja,

$$\text{vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_r(p)) = r^{n-1} \text{vol}(\pi_p(\Gamma)). \quad (3.4)$$

De (3.2) e (3.4) vem que, para  $r$  pequeno,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{C} \cap B_r(p)) &= \frac{r}{n} \text{vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_r(p)) \\ &= \frac{r}{n} (r^{n-1} \text{vol}(\pi_p(\Gamma))) \\ &= \frac{r^n}{n} \text{vol}(\pi_p(\Gamma)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{C}}(p) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\mathcal{C} \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^n}{n} \text{vol}(\pi_p(\Gamma))}{\omega_n r^n} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\pi_p(\Gamma))}{n \omega_n} \\ &= \frac{\text{vol}(\pi_p(\Gamma))}{n \omega_n}. \end{aligned}$$



Agora, como  $\omega_n = \frac{1}{n} \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ , segue que

$$\Theta_C(p) = \frac{\text{vol}(\pi_p(\Gamma))}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

■

Note que a densidade de uma subvariedade em um ponto é definida pelo limite (3.1) e o que a última proposição mostrou foi que, para um cone determinado por uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional ou um subconjunto  $(n-1)$ -retificável  $\Gamma$ , basta saber o volume da projeção  $\pi_p(\Gamma)$ .

### 3.2 Os Teoremas da Monotonicidade

Nesta seção vamos provar os teoremas da monotonicidade em suas versões simplificada e estendida. São resultados bastante relevantes e que usaremos para provar um teorema que compara a densidade de uma superfície mínima compacta conexa  $\Sigma$  em um ponto  $p$ , com a densidade do cone  $\mathcal{C} = p * \partial\Sigma$  nesse mesmo ponto.

**Teorema 31** (*Teorema da Monotonicidade*) *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade mínima compacta e conexa de  $\mathbb{R}^m$  e seja  $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ . Então*

$$\Theta_\Sigma(p, r) := \frac{\text{Vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} \quad (3.6)$$

*é uma função não decrescente de  $r$  para*

$$0 < r \leq R := \text{dist}(p, \partial\Sigma),$$

*conhecida como raio de densidade de  $\Sigma$  em  $B_r(p)$ . Ou ainda,*

$$\left(\frac{d}{dr}\right) \Theta_\Sigma(p, r) \geq 0,$$

*e a função é constante se  $\Sigma = \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C} = p * \partial\Sigma$  indica o cone com vértice em  $p$  e determinado por  $\partial\Sigma$ .*

**Prova.** Para demonstrar esse resultado faremos inicialmente algumas adequações para o contexto, visando aplicar a fórmula da co-área dada pelo Teorema 60. Considere  $p \in \Sigma$  e  $R = d_{\mathbb{R}^m}(p, \partial\Sigma) > 0$ . Sendo  $B_R(p)$  a bola em  $\mathbb{R}^m$  de raio  $R$  e centrada em  $p$ , podemos definir  $f : \overline{B_R(p)} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = d_{\mathbb{R}^m}(x, \partial B_R(p))$ ,  $x$  pertencente a  $\overline{B_R(p)}$ . Temos  $f \in C^\infty(\overline{B_R(p)})$  com  $f|_{\partial B_R(p)} = 0$ . A partir da aplicação  $f$  definimos  $g : \overline{B_R(p)} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira

$$g(x) = R - f(x).$$

Então  $g \in C^\infty(\overline{B_R(p)})$  com  $g(p) = 0$ .

Note que, para todo  $x \in \overline{B_R(p)}$ , temos  $f(x) = R - g(x)$ . Segue daí que  $\overline{\nabla}f = -\overline{\nabla}g$  e, em particular,  $|\overline{\nabla}f| = |\overline{\nabla}g| = 1$ . Tome  $r$  tal que  $0 < r < R$ . Então  $\overline{\nabla}f = -\overline{\nabla}g$  é ortogonal às superfícies de nível  $r$  de  $g$  e  $R - r$  de  $f$ , pois tais superfícies são dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma_f(R - r) & : = \{x \in B_R(p); f(x) = R - r\} \\ & = \{x \in B_R(p); g(x) = r\} =: \Gamma_g(r) = \partial B_r(p).\end{aligned}$$

Além disso, definimos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_f(R - r) & = \{x \in B_R(p); f(x) > R - r\} \\ & = \{x \in B_R(p); g(x) < r\} = \Omega_g(r) = B_r(p).\end{aligned}$$

Note então que,

$$V_f(R - r) := \text{Vol}(\Omega_f(R - r)) = \text{Vol}(\Omega_g(r))$$

e, pondo

$$V_g(r) := \text{Vol}(\Omega_g(r))$$

temos  $V_f(R - r) = V_g(r)$ . Da fórmula da co-área (Teorema 60) segue que

$$V_f'(R - r) = - \int_{\Gamma_f(R - r)} |\overline{\nabla}f|^{-1} dS_{R - r}.$$

Agora,  $V_f$  é uma função decrescente enquanto  $V_g$  é crescente ( $\overline{\nabla}f = -\overline{\nabla}g$ ), donde

$$-V_f'(R - r) = V_g'(r)$$

ou seja,

$$V_g'(r) = \int_{\Gamma_g(r)} |\overline{\nabla}f|^{-1} dS_r$$

e, como  $|\overline{\nabla}f| = 1$  e  $\Gamma_g(r) = \partial B_r(p)$ , temos

$$\begin{aligned}V_g'(r) & = \int_{\partial B_r(p)} dS_r \\ & = \text{Vol}(\partial B_r(p)).\end{aligned}$$

Considerando

$$V(r) := \text{Vol}(\Sigma \cap B_r(p)) \tag{3.7}$$

e  $\delta(r) := \Sigma \cap \partial B_r(p)$ , podemos olhar para estas funções da mesma maneira que olhamos para  $V_g(r)$  e  $\Gamma_g(r)$ , ou seja, estamos considerando suas restrições à parte de  $\Sigma$  que está em  $B_r(p)$  e a parte de  $\Sigma$  que está em  $\partial B_r(p)$ . Assim

$$\begin{aligned} V'(r) &= \int_{\delta(r)} dS_r \geq \text{Vol}(\delta(r)) \\ &= \text{Vol}(\Sigma \cap \partial B_r(p)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por outro lado, pondo  $\mathcal{C}_r = p * \delta(r)$ , o cone com vértice em  $p$  determinado por  $\delta(r) = \Sigma \cap \partial B_r(p)$ , temos pela Proposição (24) que

$$V(r) \leq \text{Vol}(\mathcal{C}_r). \quad (3.9)$$

Ainda, veja que do Lema (21) temos que

$$\text{Vol}(\mathcal{C}_r) = \frac{r}{n} \text{Vol}(\delta(r)). \quad (3.10)$$

Assim, de (3.9) e de (3.10) obtemos

$$V(r) \leq \frac{r}{n} \text{Vol}(\delta(r)) \quad (3.11)$$

e de (3.8) vem que

$$V'(r) \geq \text{Vol}(\delta(r)) \geq \frac{n}{r} V(r).$$

Portanto  $V'(r) \geq \frac{n}{r} V(r)$ , ou seja,

$$V'(r) - \frac{n}{r} V(r) \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\left( \frac{V(r)}{\omega_n r^n} \right)' = \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{V'(r)}{r^n} - \frac{n}{r^{1+n}} V(r) \right) = \frac{1}{\omega_n r^n} \left( V'(r) - \frac{n}{r} V(r) \right) \geq 0. \quad (3.12)$$

Mas, de (3.6) e (3.7), tem-se

$$\frac{V(r)}{\omega_n r^n} = \Theta_\Sigma(p, r),$$

donde concluimos que,

$$\left( \frac{d}{dr} \right) \Theta_\Sigma(p, r) \geq 0.$$

Agora note que se  $\Sigma$  está contida em um cone, então, por ser mínima, a curvatura média de  $\Sigma$  é nula e vamos ter a curvatura Gaussiana igualmente nula, forçando assim  $\Sigma$  a ser plana e nessa caso é fácil ver que  $\Theta_\Sigma(p, r)$  é constante. ■

Note que, para valores grandes de  $r$ ,  $r > d(p, \partial\Sigma)$ , tem-se  $\Sigma \cap B_r(p) = \Sigma$ , fazendo  $\Theta_\Sigma(p, r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , o que não ocorre se considerarmos  $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup E$ , onde  $E$  é o cone exterior em relação à  $p$  determinado por  $\partial\Sigma$ .

Considerando  $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup E$ , obtemos um resultado na mesma direção do Teorema 31, conhecido como Teorema da *Monotonicidade Estendida*, o qual segue abaixo.

**Teorema 32** *Suponha  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  uma subvariedade mínima compacta e seja  $p \in \mathbb{R}^m \setminus \partial\Sigma$ . Seja  $E$  o cone exterior em relação à  $p$  determinado por  $\partial\Sigma$ , isto é,*

$$E := \{p + t(q - p); q \in \partial\Sigma, t \geq 1\}.$$

Defina  $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup E$ . Então o raio de densidade

$$\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) := \frac{\text{vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_r(p))}{\omega_n r^n}$$

é uma função não decrescente para todo  $r > 0$ . Isto é equivalente a termos

$$\left(\frac{d}{dr}\right) \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) \geq 0,$$

com a função sendo constante se, e somente se,  $\Sigma$  é está contida no cone com vértice em  $p$  determinado por  $\partial\Sigma$ .

**Prova.** Considere sem perda de generalidade  $p$  a origem de  $\mathbb{R}^m$ . Dado  $r > 0$ , seja  $B_r := B_r(O)$  a bola aberta em  $\mathbb{R}^m$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Sejam  $\Sigma_r = \Sigma \cap B_r$ ,  $E_r = E \cap B_r$ ,  $\partial\Sigma_r = \partial\Sigma \cap B_r$  e  $\tilde{\Sigma}_r = \tilde{\Sigma} \cap B_r$ , isto é, as partes de  $\Sigma$ ,  $E$ ,  $\tilde{\Sigma}$  e  $\partial\Sigma$  contidas em  $B_r$ . Considere o campo de vetores em  $\mathbb{R}^m$  dado por  $X(x) = \vec{x}$ . Pelo Teorema 14 e seu Corolário 15, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \text{div}_\Sigma X dA &= \int_{\partial\Sigma_r} \langle X, v_{\partial\Sigma_r} \rangle dS - \int_{\Sigma_r} \langle \vec{H}, X \rangle dA \\ &= \int_{\partial\Sigma_r} \langle X, v_{\partial\Sigma_r} \rangle dS, \end{aligned} \quad (3.13)$$

pois  $\vec{H}_\Sigma \equiv 0$  em  $\Sigma$ . De modo semelhante,

$$\begin{aligned} \int_{E_r} \text{div}_E X dA &= \int_{\partial E_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS - \int_{E_r} \langle \vec{H}, X \rangle dA \\ &= \int_{\partial E_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS, \end{aligned} \quad (3.14)$$

já que  $\langle \vec{H}, X \rangle = 0$  em  $E$ , pois  $\vec{H}_E$  é perpendicular a  $E$  e  $X$  é tangente a  $E$ . Ainda, do Corolário 13 vem que

$$\text{div}_\Sigma X = \text{div}_E X = n.$$

Assim, de (3.13) e (3.14) obtemos que

$$n \text{Vol}(\Sigma_r) = \int_{\partial \Sigma_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle dS$$

e

$$n \text{Vol}(E_r) = \int_{\partial E_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS.$$

Somando as equações

$$n (\text{Vol}(\Sigma_r) + \text{Vol}(E_r)) = \int_{\partial \Sigma_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle dS + \int_{\partial E_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS,$$

ou seja,

$$n \text{vol}(\tilde{\Sigma}_r) \leq n (\text{Vol}(\Sigma_r) + \text{Vol}(E_r)) = \int_{\partial \Sigma_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle dS + \int_{\partial E_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS.$$

Note que

$$\partial \Sigma_r = (\Sigma \cap \partial B_r) \cup (\partial \Sigma \cap B_r)$$

e, como  $\partial E = \partial \Sigma$

$$\partial E_r = (E \cap \partial B_r) \cup (\partial \Sigma \cap B_r).$$

Assim

$$\begin{aligned} n \text{vol}(\tilde{\Sigma}_r) &\leq \int_{\Sigma \cap \partial B_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle dA + \int_{\partial \Sigma \cap B_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle dS \\ &\quad + \int_{E \cap \partial B_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dA + \int_{\partial \Sigma \cap B_r} \langle X, v_{\partial E_r} \rangle dS, \end{aligned}$$

ou seja

$$n \text{vol}(\tilde{\Sigma}_r) \leq \int_{\partial \tilde{\Sigma}_r} \langle X, v_{\partial \tilde{\Sigma}_r} \rangle dS + \int_{\partial \Sigma \cap B_r} \langle X, v_{\partial \Sigma_r} + v_{\partial E_r} \rangle dS.$$

Pelo Lema 23 temos que

$$\langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle \leq \langle X, -v_{\partial E_r} \rangle$$

donde

$$\langle X, v_{\partial \Sigma_r} + v_{\partial E_r} \rangle = \langle X, v_{\partial \Sigma_r} \rangle + \langle X, v_{\partial E_r} \rangle \leq 0$$

e, portanto,

$$n \text{vol}(\tilde{\Sigma}_r) \leq \int_{\partial \tilde{\Sigma}_r} \langle X, v_{\partial \tilde{\Sigma}_r} \rangle dS.$$

Agora, note que resulta dos mesmos argumentos feitos no Teorema 31 a partir da equação (3.11)

que

$$\text{vol}(\tilde{\Sigma}_r) = \text{vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_r(p)) \leq \frac{r}{n} \text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap \partial B_r)$$

exatamente como em (3.11) e pela fórmula da Co-area (Teorema 60).

$$\text{vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap \partial B_r \right) \leq \frac{d}{dr} \text{vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap B_r(p) \right),$$

seguindo os mesmos argumentos feitos em (3.12), chegamos que

$$\omega_n \frac{d}{dr} \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) = \frac{d}{dr} \frac{\text{vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap B_r(p) \right)}{r^n} \geq 0,$$

donde

$$\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) = \frac{\text{vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap B_r(p) \right)}{\omega_n r^n}$$

é uma função não decrescente.

A prova da afirmação final é análoga ao raciocínio feito no Teorema 31. ■

**Observação 33** Na definição de  $\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r)$  está sendo contado  $\text{vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap B_r(p) \right)$  com multiplicidade. Por exemplo, se exatamente duas porções de  $\tilde{\Sigma} \cap B_r$  se sobrepõem em uma região, contamos o volume dessa região duas vezes. É claro que se  $\Sigma$  é mergulhada tal overlap não ocorre.

### 3.3 Um resultado de comparação entre densidade de superfícies mínimas e cones em um ponto

Os resultados das seções anteriores nos permitem obter uma comparação entre a densidade em um ponto  $p$  de uma superfície mínima com bordo  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}^m$ , com a densidade do cone  $C = p * \partial \Sigma$  nesse mesmo ponto. Precisamente:

**Proposição 34** Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^m$  com bordo suave por partes  $\partial \Sigma$ . Seja  $p$  um ponto de  $\mathbb{R}^m$  e seja  $C = p * \partial \Sigma$ . Então

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \Theta_C(p), \tag{3.15}$$

valendo a desigualdade estrita a não ser que  $\Sigma = C$ .

**Prova.** Vamos assumir que  $\Theta_C(p) < \infty$ , caso contrário nada há o que provar. Considere primeiramente o caso em que  $p \notin \partial \Sigma$ . Seja  $E$  o cone exterior sobre  $\partial \Sigma$  com vértice em  $p$  (como em 2.24). Seja  $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup E$  e, dado  $r > 0$ , ponha

$$\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) := \frac{\text{Vol} \left( \tilde{\Sigma} \cap B_r(p) \right)}{\pi r^2}$$

que é o raio de densidade de  $\tilde{\Sigma}$  na bola  $B_r(p)$ . Então, pelos teoremas 31 e 32 a função  $\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r)$  é não decrescente para  $0 < r < \infty$  e, se tomarmos  $0 < r < R < \infty$ , temos que

$$\Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) \leq \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, R). \quad (3.16)$$

Se fizermos  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , a desigualdade se mantém. Temos, por um lado,

$$\Theta_{\Sigma}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_r(p))}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) = \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p),$$

pois, para  $r$  suficientemente pequeno  $\tilde{\Sigma} \cap B_r(p) = \Sigma \cap B_r(p)$ , já que  $p \notin \partial\Sigma$ . Por outro lado, considerando-se o cone  $\mathcal{C}_{\infty} := \mathcal{C} \cup E = \{p + t(q - p); q \in \partial\Sigma, t \geq 0\}$ , para  $R$  suficientemente grande, como

$$\tilde{\Sigma} \cap \partial B_R(p) = E \cap \partial B_R(p)$$

e

$$\mathcal{C}_{\infty} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p) = \mathcal{C} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p)$$

os conjuntos  $E \cap \partial B_R(p)$  e  $\mathcal{C} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p)$  são homotéticos, ou seja, figuras semelhantes, segue que

$$\frac{\text{Vol}(E \cap \partial B_R(p))}{R} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p))}{1/R}.$$

Do Lema 21 temos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \text{Vol}(E \cap B_R(p)) &= \text{Vol}(E \cap \partial B_R(p)) \\ &= \text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap \partial B_R(p)) \end{aligned}$$

e

$$2R \text{Vol}(\mathcal{C} \cap B_{\frac{1}{R}}(p)) = \text{Vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p)).$$

Assim

$$\frac{2 \text{Vol}(E \cap B_R(p))}{R^2} = \frac{2R \text{Vol}(\mathcal{C} \cap B_{\frac{1}{R}}(p))}{1/R}$$

ou seja,

$$\frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_R(p))}{\pi R^2} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{C} \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(p))}{\pi \left(\frac{1}{R}\right)^2}$$

e, portanto, quando  $R \rightarrow \infty$  tem-se  $\delta := \frac{1}{R} \rightarrow 0$  e, então,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_R(p))}{\pi R^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\mathcal{C} \cap B_{\delta}(p))}{\pi \delta^2} = \Theta_{\mathcal{C}}(p).$$

Assim, vê-se que

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \Theta_{\mathcal{C}}(p).$$

Agora consideramos o caso em que  $p \in \partial\Sigma$ . Se  $\partial\Sigma$  é uma curva plana é imediato, visto que nesse caso  $\Sigma$  e  $\mathcal{C}$  são planos. Suponha  $\partial\Sigma$  não plana e  $p \in \partial\Sigma$ . A fórmula da monotonicidade estendida continua sendo válida, mostraremos aqui a parte menos intuitiva, que é mostrar que

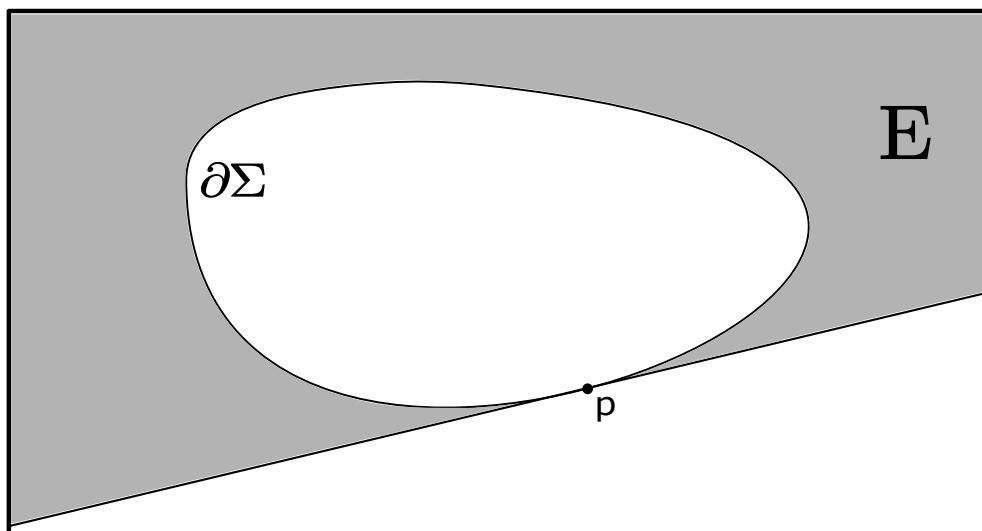
$$\lim_{r \rightarrow 0} \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) = \Theta_{\Sigma}(p).$$

Se  $\partial\Sigma$  é estrelado em relação à  $p$ , então  $\partial\Sigma = \partial E$ . Nesse caso, vamos ter

$$\begin{aligned} \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) &= \frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma} \cap B_r(p))}{\pi r^2} \\ &= \frac{\text{Vol}((\Sigma \cup E) \cap B_r(p))}{\pi r^2} \\ &= \frac{\text{Vol}((\Sigma \cap B_r(p)) + \text{Vol}(E \cap B_r(p))) + \text{Vol}((\Sigma \cap E) \cap B_r(p))}{\pi r^2} \\ &= \frac{\text{Vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\pi r^2} + \frac{\text{Vol}(E \cap B_r(p))}{\pi r^2} \\ &= \Theta_{\Sigma}(p, r) + \Theta_E(p, r). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se  $\partial\Sigma$  não é estrelado em relação à  $p$ , de forma análoga ao que já relatamos em outros momentos relativamente ao cone  $\mathcal{C} = p * \partial\Sigma$ , temos uma parte  $\Lambda$  de  $\partial\Sigma$  que está contida em  $E$  (a mesma parte que está contida em  $\mathcal{C}$ ). Como  $\Sigma$  é mínima, podemos usar o mesmo argumento utilizado na prova da Proposição (24) e chegar em (3.17).

Figura 4.1.3 - Cone Exterior





Resta-nos agora mostrar que  $\lim_{r \rightarrow 0} \Theta_E(p, r) = 0$  para concluir o teorema. Este é um fato bastante geométrico (ver Figura 4.1.3), porém, note que se  $\partial\Sigma$  é suave em  $p$  então  $E$  se aproxima de  $p$  de maneira assintótica, fazendo com que o limite ocorra. No caso de  $\partial\Sigma$  não ser suave em  $p$  irá acontecer o mesmo, basta visualizar  $E$  separado localmente, como sendo gerado pela porção da curva partindo de  $p$  em cada um dos dois sentidos possíveis, em cada uma das porções, teremos um caso semelhante ao caso em que  $\partial\Sigma$  é suave. Portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Theta_{\tilde{\Sigma}}(p, r) = \Theta_{\Sigma}(p)$$

e o resultado segue. ■

Como veremos adiante, não lidaremos exatamente com a densidade da superfície mínima em  $p$  para mostrar que ela é mergulhada e, sim, usaremos uma limitação superior para tal densidade dada pela densidade em  $p$  do cone  $\mathcal{C} = p * \partial\Sigma$ . A importância do resultado acima reside então no fato que, se conhecermos a densidade do cone  $\mathcal{C}$  em seu vértice (o qual temos uma maneira de calcular - vide Proposição 30) temos uma cota superior para a densidade da superfície mínima nesse ponto e usaremos isto para mostrar que, sob certas hipóteses,  $\Sigma$  é mergulhada.

A observação a seguir, em particular, mostra que para obtermos uma estimativa superior para  $\Theta_{\Sigma}(p)$ , basta termos o conhecimento do volume da projeção radial de  $\partial\Sigma$  sobre  $\partial B_1(p)$ , onde  $B_1(p)$  é a bola unitária centrada em  $p$  em  $\mathbb{R}^m$ .

**Observação 35** *Segue direto das Proposições 43 e 30 que, se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é uma curva fechada simples, suave por partes, então qualquer superfície mínima  $\Sigma$  que tenha por bordo  $\Gamma$  satisfaz*

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \Theta_{\mathcal{C}}(p) = \frac{\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))}{\text{Vol}(\mathbb{S}^1)}$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^m$ .

Observamos que as proposições 30 e 43 valem em um contexto muito mais geral, como será visto no decorrer do trabalho.

## 4 SUPERFÍCIES MÍNIMAS MERGULHADAS E A CURVATURA TOTAL DE SEU BORDO

Neste capítulo, veremos que estimativas para a curvatura total de curvas e do ângulo de visão de subvariedades (Veja Definição 45), podem ser condições suficientes para argumentar que as superfícies e variedades mínimas em  $\mathbb{R}^m$  que as tenham por bordo, são mergulhadas.

### 4.1 Superfícies mínimas mergulhadas com curvatura total de seu bordo menor do que $4\pi$ .

Nesta seção veremos que uma hipótese acerca da curvatura total de uma curva simples e fechada, será condição suficiente para provarmos que a superfície mínima por ela determinada é mergulhada, incluindo o bordo. As técnicas utilizadas na demonstração de tal fato são de grande valia, visto que são bastante geométricas.

Passamos então a enunciar e provar os resultados que nos conduzirão ao teorema principal desta seção. O primeiro deles é uma desigualdade que relaciona a curvatura total de uma curva regular fechada, simples e suave por partes com o volume da projeção radial desta curva na esfera unitária.

**Proposição 36** *Seja  $\Gamma$  uma curva suave por partes, simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$  e seja  $p$  um ponto que não está em  $\Gamma$ . Então*

$$\text{Vol}(\pi_p(\Gamma)) \leq K_T(\Gamma),$$

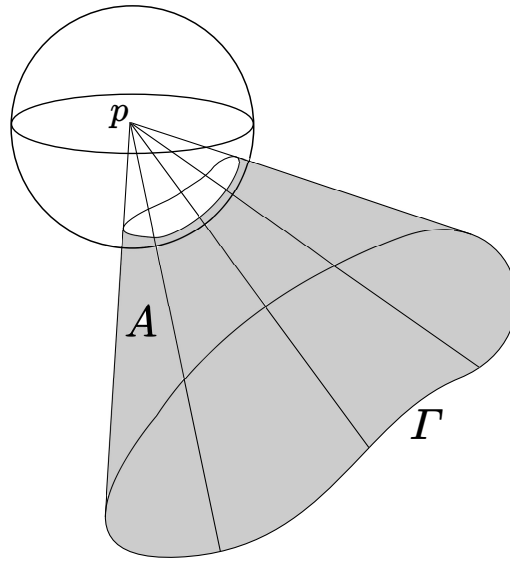
onde  $\pi_p(\Gamma)$  é a projeção radial de  $\Gamma$  sobre a esfera unitária de dimensão  $m - 1$  centrada em  $p$ .

**Prova.** Suponha inicialmente  $\Gamma$  uma curva suave, simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $p \in \mathbb{R}^m$  e seja  $S := \partial B_1(p)$ , a esfera unitária centrada em  $p$ . Seja  $\pi_p$  a projeção radial de  $\mathbb{R}^m - \{p\}$  em  $S$ ,

$$\pi_p(x) = p + \frac{x - p}{\|x - p\|}.$$

Considere o cone com vértice em  $p$  determinado por  $\Gamma$ . Temos  $\Gamma$  e  $\pi_p(\Gamma)$  curvas fechadas simples e suaves contidas neste cone. Seja  $A$  o anel 2-dimensional (ver Figura 5.1.1) contido neste cone cujos bordos são  $\Gamma$  e  $\pi_p(\Gamma)$ . Note que  $\pi_p(\Gamma)$  é uma curva em  $S$  donde  $\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))$  é o comprimento de  $\pi_p(\Gamma)$ .

Figura 5.1.1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como  $A$  é parte de um cone, donde para cada ponto passa um segmento de reta contida nele, uma curvatura principal é zero, com isso, a curvatura Gaussiana em  $A$  é nula, isto é  $K_A = 0$ . Por outro lado,  $A$  é um anel 2-dimensional, segue que a característica de Euler de  $A$  é  $\chi(A) = 0$ .

Parametrize cada componente conexa de  $\partial A$ , ou seja  $\Gamma$  e  $\pi_p(\Gamma)$ , por comprimento de arco, digamos  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sendo  $\gamma$  uma curva suave em  $\mathbb{R}^m$ , ela tem curvatura (como uma curva em  $\mathbb{R}^m$ ) dada por

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \vec{k}(s) = k(s)N(s)$$

onde  $k$  é a curvatura de  $\partial A$  (na respectiva componente), sendo que assumimos  $k(s)$  não negativa se  $\gamma$  não é plana, e  $N(s)$  é o vetor unitário normal à curva. Agora considere cada componente conexa  $\gamma$  de  $\partial A$  como uma curva em  $A$ . Observe agora que a curvatura geodésica  $k_g$  de  $\gamma$  é definida como a projeção de  $\vec{k}(s)$  sobre  $A$ , isto é,

$$\begin{aligned} k_g(s) &= \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle \\ &= k(s) \langle N(s), \eta(s) \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde aqui  $\eta$  é o vetor unitário tangente à  $A$  em  $\partial A$ , normal à  $\partial A$ , o qual aponta para fora (vetor conormal). Assim, o Teorema de Gauss-Bonnet (CARMO, 2014) nos dá que

$$\int_{\partial A} k_g ds + \int_A K dS = \int_{\partial A} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds + \int_A K dS = 2\pi\chi(A).$$

Pelo exposto acima, temos  $K = 0$  em  $A$  e  $\chi(A) = 0$ , donde segue que

$$\int_{\partial A} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds = 0$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds + \int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds = 0. \quad (4.2)$$

Note que, de (4.1), como  $k(s)$  é não negativo, vem que

$$\left| \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle \right| \leq k(s).$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \right| &\leq \int_{\Gamma} \left| \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle \right| ds \\ &\leq \int_{\Gamma} k(s) ds = \int_{\Gamma} |k(s)| ds = K_T(\Gamma). \end{aligned}$$

Em particular, de (4.2),

$$\left| \int_{\Gamma} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \right| = \left| \int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \right|. \quad (4.3)$$

Observamos, por outro lado, que

$$\int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds = \text{Vol}(\pi_p(\Gamma)).$$

De fato, para ver isto, sem perda de generalidade, assumamos  $p = 0$ . Para evitar confusão, agora chamamos a parametrização de  $\pi_p(\Gamma)$  por comprimento de arco por  $\alpha : [0, c] \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ . Como  $\pi_p(\Gamma)$  está em  $\mathbb{S}^{m-1}$ , temos  $\alpha = -\eta$  visto que  $\eta$  é tangente à  $A$ , é unitário, normal à  $\partial A$  e aponta para fora de  $A$ . Ponha  $\alpha'(s) = T(s)$ , temos  $\alpha''(s) = T'(s) = k(s)N(s)$ . Como  $\alpha$  é parametrizada por comprimento de arco, temos  $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = 0$  e, derivando em relação a  $s$ , obtemos para todo  $s \in [0, c]$  que

$$\langle T(s), T(s) \rangle + \langle -\eta(s), k(s)N(s) \rangle = 0,$$

isto é

$$1 - k(s) \langle N(s), \eta(s) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle = 1.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds &= \int_{\pi_p(\Gamma)} 1 ds \\ &= \text{Vol}(\pi_p(\Gamma)). \end{aligned}$$

Segue então que  $\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))$  pode ser escrito em termos de curvatura total de  $\Gamma$ , como segue:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\pi_p(\Gamma)) &= \int_{\pi_p(\Gamma)} 1 ds = \int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \\ &= \left| \int_{\pi_p(\Gamma)} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \right| = \left| \int_{\Gamma} \langle \vec{k}(s), \eta(s) \rangle ds \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} |k(s)| ds = K_T(\Gamma). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Isto prova o caso suave.

Para o caso de  $\Gamma$  ser suave por partes, a prova é feita aproximando  $\Gamma$  por curvas suaves.

■

Como nosso objetivo é encontrar relações envolvendo a densidade de uma superfície mínima que tenha por bordo  $\Gamma$ , então podemos relembrar a observação final do capítulo anterior, que limitava a densidade de  $\Sigma$  em  $p$ , pelo volume da projeção radial de  $\Gamma$ , dividido pelo volume da esfera unidimensional e assim concluir que já possuímos uma limitação para a densidade de  $\Sigma$  quando limitamos a curvatura total de  $\Gamma$ . O próximo resultado fará isso e dará uma condição necessária para que uma superfície mínima com bordo  $\Gamma$  tenha interior mergulhado.

**Proposição 37** *Seja  $\Gamma$  uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , com curvatura total menor ou igual a  $4\pi$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima com bordo  $\Gamma$ . Então  $\Sigma$  tem interior mergulhado.*

**Prova.** Primeiramente, note que se  $\Sigma$  está contida em um cone, então tanto o vetor curvatura média, quanto a curvatura Gaussiana são nulos, assim  $\Sigma$  está contida em um plano, e o resultado segue. Suponha então que  $\Sigma$  não está contida em nenhum cone. Pela Observação 35, como  $\Gamma$  tem dimensão igual a 1,

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \frac{\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))}{\text{Vol}(\mathbb{S}^1)} = \frac{\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))}{2\pi}$$

para todo  $p \in \text{int}(\Sigma)$ . Assim, de (4.4) e da hipótese sobre a curvatura total de  $\Gamma$ , vem que

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \frac{K_T(\Gamma)}{2\pi} \leq \frac{4\pi}{2\pi} = 2,$$

sendo a desigualdade estrita pois como mencionado no início da demonstração,  $\Sigma$  não está contida em um cone. A conclusão agora segue direto do Corolário 28. ■

Antes de prosseguirmos, estamos em condições de refazer a prova do Teorema de Fàry-Milnor, que decorrerá como um corolário da proposição anterior, e sua demonstração se torna muito mais sucinta do que a que foi feita no capítulo inicial.

**Corolário 38** (*Fary-Milnor*) *Se  $\Gamma$  é uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura total no máximo  $4\pi$ , então  $\Gamma$  não é um nó.*

**Prova.** Pela Proposição 36, se  $\Sigma$  é uma superfície mínima que tem  $\Gamma$  como bordo,  $\Sigma$  tem interior mergulhado, ou ainda que o interior de  $\Sigma$  não tem auto-interseções. Com isso,  $\Sigma$  é homeomorfa a um disco, o que implica que  $\Gamma$  não pode ser um nó. ■

Até o momento temos que, dada a hipótese da limitação da curvatura total de  $\Gamma$ , vamos ter  $\Sigma$  com interior mergulhado. Os próximos resultados são voltados ao objetivo de obter resultados que nos forneçam informações para concluir quando  $\Sigma$  é mergulhada até o bordo.

Sabe-se (ver (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002), Teorema 10.1) que se  $\Gamma$  é uma curva compacta e conexa em  $\mathbb{R}^m$  com curvatura total finita então  $\Gamma$  tem comprimento finito. Significa então que nos resultados anteriores estamos supondo  $\Gamma$  retificável. Visto que até então não nos importamos em ver o que ocorre com  $\Sigma$  no bordo, não foi necessário esse fato até agora.

Os pontos em que  $\Gamma$  pode possivelmente ser não regular possuem um ângulo exterior diferente de 0 (ver (1.1)). Então, da mesma forma que na Proposição 36 obtivemos uma comparação entre o volume da projeção radial de  $\Gamma$  em relação à  $p$  e a curvatura total de  $\Gamma$ , para pontos que não pertenciam a  $\Gamma$ , agora teremos uma comparação semelhante para pontos que estão em  $\Gamma$ .

**Proposição 39** *Seja  $\Gamma$  uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$ , suave por partes (donde com curvatura total finita). Seja  $p \in \Gamma$ , então*

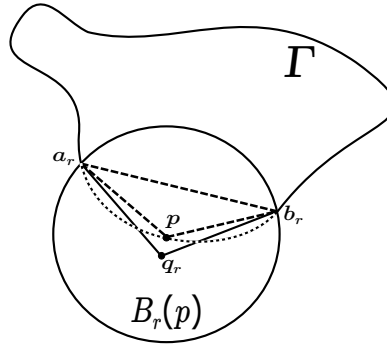
$$\text{Vol}(\pi_p(\Gamma)) \leq K_T(\Gamma) - \pi - \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo exterior a  $\Gamma$  em  $p$ .

**Prova.** Dado  $p \in \Gamma$ , considere  $r > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $\Gamma \cap \partial B_r(p) = \{a_r, b_r\}$ , ou seja, a esfera unitária centrada em  $p$  só intercepta  $\Gamma$  nos pontos  $a_r$  e  $b_r$ , o que é sempre possível visto que  $\Gamma$  é suave por partes. Seja  $\theta(r)$  o ângulo exterior ao triângulo  $a_r p b_r$  com vértice em  $p$ , se  $\Gamma \cap B_r(p)$  não é uma reta (caso contrário  $\theta(r) = 0$ ). Seja  $q_r$  um ponto próximo de  $p$  tal que  $p$  é um ponto do interior da região plana limitada cujo bordo é o triângulo

$a_r q_r b_r$ , Considere  $\tilde{\Gamma}$  a curva simples e fechada obtida quando substituímos em  $\Gamma$  o conjunto  $\Gamma \cap \overline{B_r(p)}$  por  $\alpha := a_r q_r \cup q_r b_r$  (veja as figuras abaixo). Observe que a definição de  $\tilde{\Gamma}$  depende de  $p$  e  $r$ .

Figura 5.1.2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então pelo Teorema 36, como  $p \notin \tilde{\Gamma}$ ,

$$\text{Vol}(\pi_p(\tilde{\Gamma})) \leq K_T(\tilde{\Gamma}),$$

onde  $\pi_p$  é a projeção radial sobre  $\partial B_1(p)$ .

Seja  $\Lambda$  o plano que contém o triângulo  $a_r q_r b_r$ . Seja  $C = \Lambda \cap \partial B_1(p)$  a circunferência unitária centrada em  $p$ . Veja que  $\pi_p(\alpha)$  é um arco dessa circunferência e, como  $p$  está no interior da região de  $\Lambda$  limitada por  $a_r q_r b_r$ , o complementar de  $\pi_p(\alpha)$  em relação à  $C$  é o arco em  $C$  correspondente ao ângulo central  $a_r \hat{p} b_r$ . Da geometria Euclidiana plana, como o ângulo central  $a_r \hat{p} b_r$  é  $\pi - \theta(r)$ , obtemos então que  $l(\pi_p(\alpha)) = \pi + \theta(r)$ , visto que  $C$  tem raio 1.

Agora, veja que

$$\pi_p(\tilde{\Gamma}) = \pi_p(\Gamma \setminus B_r(p)) \cup \pi_p(\alpha)$$

donde,

$$\text{Vol}(\pi_p(\tilde{\Gamma})) = \text{Vol}(\pi_p(\Gamma \setminus B_r(p))) + \pi + \theta(r) \leq K_T(\tilde{\Gamma})$$

ou seja,

$$\text{Vol}(\pi_p(\Gamma \setminus B_r(p))) \leq K_T(\tilde{\Gamma}) - \pi - \theta(r).$$

Veja que é evidente que quando fazemos  $q_r \rightarrow p$ , vamos fazer  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  e, em seguida, tomando  $r \rightarrow 0$ , vê-se que  $\Gamma \setminus B_r(p) \rightarrow \Gamma$  e  $\theta(r) \rightarrow \theta$ , donde obtem-se

$$\text{Vol}(\pi_p(\Gamma)) \leq K_T(\Gamma) - \pi - \theta.$$

■

Essa prova foi feita para uma curva suave por partes, mas ela vale de uma forma mais geral para curvas retificáveis, e sua prova torna-se bem mais complicada, já que precisamos de alguns resultados de Teoria Geométrica da Medida.

Com essa última proposição, estamos novamente em condições de mostrar um resultado que nos dá informações sobre quando podemos garantir que uma superfície  $\Sigma$  com bordo  $\Gamma$  é mergulhada até e inclusive em  $\Gamma$ .

**Proposição 40** *Seja  $\Gamma$  uma curva suave, simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$  com curvatura total menor ou igual a  $4\pi$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima com bordo  $\Gamma$ . Então  $\Sigma$  é uma superfície suave mergulhada com bordo.*

**Prova.** Em decorrência do Teorema 37 o interior de  $\Sigma$  é suave e mergulhado. Considere  $p \in \Gamma$ . Pelo Teorema 34, temos  $\Theta_\Sigma(p) \leq \Theta_C(p)$  e, pelo mesmo argumento usado no Teorema 37, podemos supor que  $\Sigma$  não está contida em nenhum cone, donde obtemos que  $\Theta_\Sigma(p) < \Theta_C(p)$ . Pelo Teorema 39, como  $\Gamma$  é suave, temos

$$\text{Vol}(\pi_p(\Gamma)) \leq K_T(\Gamma) - \pi.$$

Segue então da Observação 35 que

$$\begin{aligned} \Theta_C(p) &\leq \frac{\text{Vol}(\pi_p(\Gamma))}{2\pi} \leq \frac{K_T(\Gamma) - \pi}{2\pi} \\ &\leq \frac{4\pi}{2\pi} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\Theta_\Sigma(p) < \Theta_C(p) \leq \frac{3}{2}$$

e, do Corolário 28, segue que  $p$  não é um ponto de auto-interseção com  $\Sigma$ , donde  $\Sigma$  é uma superfície suavemente mergulhada com bordo. ■

As proposições anteriores resumem-se no teorema a seguir, que dá uma condição suficiente para que uma curva simples, fechada e suave por partes, admita uma superfície mínima que é mergulhada cujo bordo é tal curva.

**Teorema 41** *Seja  $\Gamma$  uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , suave por partes, com curvatura total menor ou igual a  $4\pi$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima com bordo  $\Gamma$ . Então  $\Sigma$  é mergulhada até o bordo.*

**Prova.** Basta aplicar as proposições 36, 37, 39 e 40. ■



**Observação 42** *O Teorema 41 é verdadeiro sem a hipótese adicional de que  $\Gamma$  seja suave por partes, visto que a hipótese de ter curvatura total menor ou igual a  $4\pi$  (portanto finita) implica em  $\Gamma$  retificável e esta informação seria suficiente. Mas os argumentos para as provas das proposições 36, 37, 39 e 40 teriam que levar em conta este fato, entrando em outras áreas, que fugiria um pouco dos nossos objetivos com este primeiro contato. Também é possível concluir a partir da Proposição 40, que  $\Sigma$  não tem pontos de ramificações (Definição 63) interiores. No entanto, como não nos aprofundamos no que tange à pontos de ramificações, optamos por não mencionar este fato, o qual pode ser visto no resultado de (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002).*

Os maiores detalhes dessas demonstrações podem ser encontrados em (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002).

## 4.2 Subvariedades mínimas mergulhadas e o ângulo de visão de seu bordo

Nesta seção, falaremos sobre a relação entre a densidade de uma subvariedade com bordo e a densidade de um cone determinado por esse mesmo bordo. Semelhante ao que foi feito no Teorema 34, porém agora serão feitos resultados que podem ser aplicados a subvariedades quaisquer, não mais a apenas superfícies, conseqüentemente, as demonstrações são um pouco distintas.

Uma extensão do Teorema 34 pode ser feita para subvariedades mínimas  $\Sigma^n$  de  $\mathbb{R}^m$ , obtendo uma prova sem passar pelos teoremas de monotonicidade como feito na prova do Teorema 34.

### 4.2.1 Um resultado devido à Choe-Gulliver

Começamos então estendendo o Teorema 34 para dimensões maiores, o que é feito em (CHOE; GULLIVER, 2017), Teorema 1.

**Proposição 43** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade mínima de  $\mathbb{R}^m$  com  $\partial\Sigma$  sendo um conjunto  $(n - 1)$ -retificável. Seja  $p \in \mathbb{R}^m$  e seja  $\mathcal{C} = p * \partial\Sigma$ , o cone com vértice em  $p$  que subentende  $\partial\Sigma$ . Então*

$$\Theta_{\Sigma}(p) \leq \Theta_{\mathcal{C}}(p) \tag{4.5}$$

*e a igualdade vale se, e somente se,  $\Sigma = \mathcal{C}$  e  $\partial\Sigma$  é estrelado com respeito a  $p$ .*

**Prova.** Inicialmente observe que se  $p \notin \Sigma$  então existe um  $r' > 0$  tal que  $\Sigma \cap B_{r'}(p) = \emptyset$  assim

$$\Theta_{\Sigma}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\Sigma \cap B_r(p))}{\omega_n r^n} = 0 \leq \Theta_C(p).$$

Considere então  $p \in \Sigma$ . Sem perda de generalidade, suponha  $p$  a origem 0 de  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal na vizinhança de  $p$ , tangentes à  $\Sigma$ , o qual é geodésico em  $p$ . Temos, do Corolário 13 que

$$\text{div}_{\Sigma}(r \bar{\nabla} r) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle.$$

Temos então, de (2.15), que

$$\text{div}_{\Sigma}(r \bar{\nabla} r)(x) = n. \quad (4.6)$$

Seguindo o mesmo princípio, definimos

$$\text{div}_{\Sigma} r^{1-n} \bar{\nabla} r = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r^{1-n} \bar{\nabla} r, e_i \rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned} \text{div}_{\Sigma} r^{1-n} \bar{\nabla} r &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r^{-n} (r \bar{\nabla} r), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -nr^{-n-1} \langle \bar{\nabla} r, e_i \rangle r \bar{\nabla} r + r^{-n} \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (-nr^{-n-1} \langle r \bar{\nabla} r, \langle \bar{\nabla} r, e_i \rangle e_i \rangle + r^{-n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle) \\ &= -nr^{-n-1} \left\langle r \bar{\nabla} r, \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla} r, e_i \rangle e_i \right\rangle + r^{-n} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} r \bar{\nabla} r, e_i \rangle \\ &= -nr^{-n-1} \langle r \bar{\nabla} r, \nabla r \rangle + r^{-n} \text{div}_{\Sigma} r \bar{\nabla} r \\ &= -nr^{-n} |\nabla r|^2 + r^{-n} \text{div}_{\Sigma} r \bar{\nabla} r, \end{aligned}$$

e, de (4.6), como  $\Sigma$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^m$ , temos então

$$\begin{aligned} \text{div}_{\Sigma} r^{1-n} \bar{\nabla} r &= -nr^{-n} |\nabla r|^2 + r^{-n} n \\ &= nr^{-n} (1 - |\nabla r|^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora note que, pelo Teorema de Pitágoras,  $|\nabla r| \leq |\bar{\nabla} r| = 1$ . Então

$$\text{div}_{\Sigma} r^{1-n} \bar{\nabla} r \geq 0. \quad (4.8)$$

Em particular, se  $\Sigma$  é um cone  $\mathcal{C}$ , suave por partes, com vértice em  $p$ , como neste caso  $|\nabla r| = |\bar{\nabla} r| = 1$ , temos

$$\operatorname{div}_{\mathcal{C}} r^{1-n} \bar{\nabla} r = 0. \quad (4.9)$$

Dado  $p \in \Sigma$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $B_\varepsilon(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ , defina o campo de vetores  $Y$  como segue:

$$Y = \begin{cases} r^{1-n} \bar{\nabla} r & \text{se } r \geq \varepsilon \\ \varepsilon^{-n} r \bar{\nabla} r & \text{se } r < \varepsilon \end{cases}.$$

Temos, pelo Teorema da Divergência, que

$$\int_{B_\varepsilon(p) \cap \Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} Y dA + \int_{\Sigma - B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}_{\Sigma} Y dA = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} Y dA = \int_{\partial\Sigma} \langle Y, \eta \rangle dS,$$

onde  $\eta$  é tangente à  $\Sigma$  e normal à  $\partial\Sigma$  (conormal). Então, de (4.6) e (4.7), segue que

$$n\varepsilon^{-n} \int_{B_\varepsilon(p) \cap \Sigma} dA + \int_{\Sigma - B_\varepsilon(p)} nr^{-n} (1 - |\nabla r|^2) dA = \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta \rangle dS,$$

isto é,

$$\begin{aligned} n\varepsilon^{-n} \operatorname{Vol}(B_\varepsilon(p) \cap \Sigma) &= \int_{\Gamma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta \rangle dS - \int_{\Sigma - B_\varepsilon(p)} nr^{-n} (1 - |\nabla r|^2) dA \\ &\leq \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta \rangle dS. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dividindo por  $\omega_n$ , onde  $\omega_n$  é o volume da bola unitária  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^n$  e tomando em (4.10) o limite de  $\varepsilon$  tendendo a zero, obtemos a seguinte estimativa para a densidade de  $\Sigma$  em  $p$ :

$$\theta_{\Sigma}(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(p) \cap \Sigma)}{\omega_n \varepsilon^n} \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta \rangle dS. \quad (4.11)$$

Agora, quando consideramos o cone  $\mathcal{C}$  suave por partes com vértice em  $p$  no lugar de  $\Sigma$ , de (4.10) e, visto que neste caso  $|\nabla r| = |\bar{\nabla} r| = 1$ , obtemos

$$n\varepsilon^{-n} \operatorname{Vol}(B_\varepsilon(p) \cap \mathcal{C}) = \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta_{\mathcal{C}} \rangle dS$$

onde  $\eta_{\mathcal{C}}$  é tangente à  $\mathcal{C}$  e normal à  $\Gamma$  (conormal respectiva). Segue que,

$$\theta_{\mathcal{C}}(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(p) \cap \mathcal{C})}{\omega_n \varepsilon^n} = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta_{\mathcal{C}} \rangle dS.$$

Agora, note que  $r\bar{\nabla} r$  é exatamente o vetor posição e pelo mesmo argumento dado na Proposição (24), temos que

$$\langle r\bar{\nabla} r, \eta \rangle \leq \langle r\bar{\nabla} r, \eta_{\mathcal{C}} \rangle \quad (4.12)$$

e portanto

$$\theta_{\Sigma}(p) \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta \rangle dS \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\Sigma} \langle r^{1-n} \bar{\nabla} r, \eta_C \rangle dS = \theta_C(p).$$

No caso de termos a igualdade em (4.5), necessariamente vamos ter igualdade em (4.8) e (4.12). E concluímos que  $\Sigma = C$  e  $\partial\Sigma$  é *estrelado* com relação a  $p$ . Reciprocamente, se tivermos  $\Sigma = C$  e  $\partial\Sigma$  é *estrelado*, teremos claramente que  $\Theta_{\Sigma}(p) = \Theta_C(p)$ , o que conclui a demonstração. ■

**Observação 44** *Este resultado vale de maneira mais geral e seu enunciado completo pode ser encontrado em (CHOE; GULLIVER, 2017) p. 4.*

Esse resultado implica no Teorema 34, porém as duas demonstrações foram feitas visando a diversificação de conteúdos para ampliar os conhecimentos sobre o assunto.

#### 4.2.2 O ângulo de visão

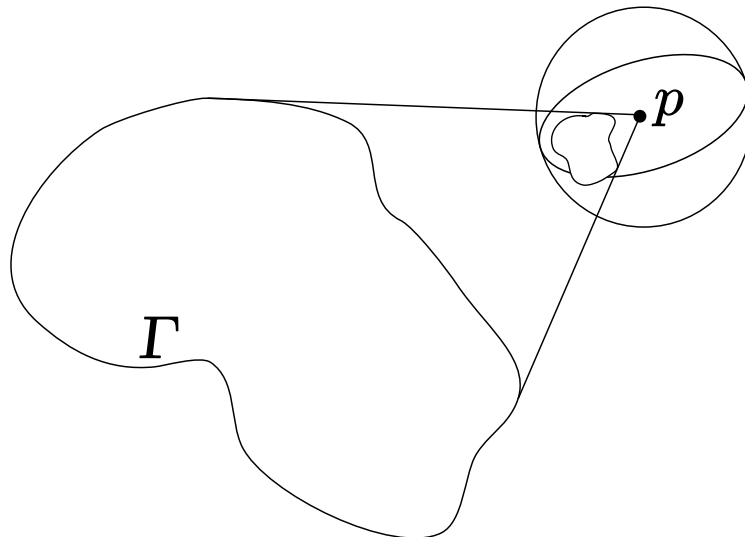
Assim como feito no artigo de Choe e Gulliver, iremos definir o que é o ângulo de visão, que será utilizado no teorema a seguir neste capítulo.

**Definição 45** *O ângulo de visão em um ponto  $p \in \mathbb{R}^m$  de um conjunto  $(n-1)$ -retificável  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é definido como sendo  $\Pi_p(\Gamma) := \text{Vol}(\pi_p(\Gamma))$ , sendo  $\pi_p$  a projeção radial definida na Proposição 30. O ângulo de visão de  $\Gamma$  é dado por*

$$\Pi(\Gamma) := \sup_{p \in \mathbb{R}^m} \Pi_p(\Gamma),$$

onde aqui  $\Pi_p(\Gamma)$  é contado com multiplicidade.

Figura 5.2.1.1 - Ângulo de visão de  $\Gamma$  em  $p$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O ângulo de visão em  $p$  de  $\Gamma$  já foi utilizado anteriormente, sem ser definido. A sua função aqui será a mesma. No entanto, iremos utilizar agora também a noção de ângulo de visão de  $\Gamma$ , sendo que uma limitação dele nos dá uma condição suficiente para ver quando uma subvariedade mínima com bordo  $\Gamma$  é mergulhada.

Observamos que podemos ter uma estimativa para  $\Theta_C(p)$  (e, pela Proposição 43, para  $\Theta_\Sigma(p)$ ), tendo uma estimativa para  $\Pi_p(\partial\Sigma)$ .

**Observação 46** *Segue direto das Proposições 43 e 30 que se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é uma subvariedade compacta  $(n-1)$ -dimensional, então qualquer subvariedade mínima  $\Sigma^n$  que tenha por bordo  $\Gamma$  satisfaz*

$$\Theta_\Sigma(p) \leq \Theta_C(p) = \frac{\Pi_p(\Gamma)}{c_{n-1}} \quad (4.13)$$

para todo  $p \in \Sigma$ , onde  $c_{n-1}$  indica o volume da esfera unitária  $(n-1)$ -dimensional.

Com os resultados expostos até esse momento, podemos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 47** *Se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  é uma subvariedade compacta  $(n-1)$ -dimensional com  $\Pi(\Gamma) < 2c_{n-1}$  então qualquer subvariedade mínima imersa  $\Sigma^n$  com bordo  $\Gamma$  é mergulhada.*

**Prova.** Seja  $p \in \Sigma$  com  $p \notin \partial\Sigma$ . Pela Proposição 30 e a observação 46 temos que

$$\begin{aligned} \Theta_\Sigma(p) &\leq \Theta_C(p) \\ &= \frac{\Pi_p(\Gamma)}{c_{n-1}} \leq \frac{\sup_{p \in \Sigma} \{\Pi_p(\Gamma)\}}{c_{n-1}} = \frac{\Pi(\Gamma)}{c_{n-1}} < 2. \end{aligned}$$

E pelo Corolário 28  $p$  não é um ponto de auto-interseção. Portanto  $\Sigma \setminus \Gamma$  é mergulhada. ■

Note que a principal diferença entre os Teoremas 41 e 47 se resume ao fato de que, no primeiro, assumimos que a curvatura total do bordo era menor ou igual a  $4\pi$ , enquanto no teorema acima a hipótese do ângulo de visão, que é a hipótese que substitui a curvatura total, não pode ser tomada da mesma maneira, isto é, não podemos supor que ele pode atingir o valor  $2c_{n-1}$ .

### 4.3 Adendo: Uma extensão particular do Teorema de Ekholm-White-Wienholtz para dimensões maiores

Nosso objetivo aqui é procurar entender um pouco o contexto de uma conjectura enunciada por Choe e Gulliver e algumas de suas possíveis consequências, caso seja verdadeira. Nossa

ideia é ao menos visualizar (assumindo alguns resultados) um caso particular desta conjectura, provado em (CHOE; GULLIVER, 2017). Explorar nuances dessa conjectura poderá se tornar numa possível atividade de pesquisa no futuro e, por isso, optamos por falar um pouco dela aqui.

**Conjectura 48** (CHOE; GULLIVER, 2017) *Se  $q \in \Sigma^n$ , onde  $\Sigma$  é uma subvariedade mínima em  $\mathbb{R}^m$  que tem como bordo uma variedade  $(n - 1)$ -dimensional compacta  $\Gamma$ , então*

$$\Theta_{\Sigma}(q) \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} K^* dV_{\Gamma},$$

onde  $K^*$  indica a curvatura de Lipschitz-Killing de  $\Gamma$  (Ver 4.14 abaixo).

Uma coisa que é comum de ser feita é imaginar quais são as consequências no caso da conjectura ser verdadeira. Uma delas é que seria possível provar o seguinte resultado:

*Se uma variedade compacta e conexa  $(n - 1)$ -dimensional satisfaz  $\int_{\Gamma} K^* dV_{\Gamma} < 4$ , então qualquer subvariedade mínima imersa  $\Sigma^n$  gerada por  $\Gamma$  é mergulhada.*

Observamos que, se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , são  $(n - 1)$ -subvariedades compactas e convexas, contidas em  $n$ -planos afins de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ , respectivamente, e pondo  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , a conjectura pode ser provada neste caso, o que é feito em Choe-Gulliver e do qual seguimos os passos.

Para tal, precisamos entender o conceito de curvatura de Lipschitz-Killing, o que é feito a seguir.

#### 4.3.1 A aplicação normal de Gauss generalizada

Precisaremos de algumas definições e resultados preliminares, os quais discutimos agora.

Como anteriormente, consideremos  $M = \mathbb{R}^m$  e  $\Sigma^n$  uma subvariedade orientável de dimensão  $n < m$  imersa em  $M$ . Se  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície de  $M$ , isto é,  $n = m - 1$ , visto que temos somente uma direção normal à  $\Sigma$ , fixado um campo de vetores unitários  $\eta$  normal à  $\Sigma$ , é bem conhecida a aplicação normal de Gauss,

$$\eta : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$$

e a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\Sigma^n$  é definida como sendo

$$K_{\Sigma} = \det [S_{\eta}],$$

sendo que  $S_{\eta}$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$ .

Quando se trata de codimensão maior do que 1, ou seja, quando  $n < m - 1$ , nos deparamos com o problema de que não há uma maneira de associar a cada ponto de  $\Sigma^n$ , uma única direção ortogonal relativa a  $\Sigma$ . No que segue, procuramos explorar esta situação. Começamos vendo o que entendemos por Variedades Grassmannianas.

Seja  $V$  um espaço vetorial real  $m$ -dimensional. Para todo inteiro  $0 \leq n \leq m$ , denote por  $G_n(V)$  o conjunto de todos os subespaços vetoriais  $n$ -dimensionais de  $V$ . Observamos que à  $G_n(V)$  pode ser dado naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $n(m - n)$  (ver (LEE, 2012)) e, com esta estrutura,  $G_n(V)$  é chamado uma variedade Grassmanniana (ou simplesmente uma Grassmanniana).

No caso especial em que  $V = \mathbb{R}^m$ , a Grassmanniana  $G_n(\mathbb{R}^m)$  é frequentemente denotada por  $G(n, m)$  e é esta última notação que utilizaremos. Observe que  $G(1, m + 1)$  é exatamente o espaço projetivo  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}P^m$ , ou seja, as Grassmannianas são uma extensão natural dos espaços projetivos.

Considere a aplicação

$$\xi : \Sigma^n \longrightarrow G(n, m)$$

que associa a cada ponto  $p \in \Sigma^n$ , o respectivo hiperplano de dimensão  $n$  tangente a  $\Sigma^n$  em  $p$ , o qual chamaremos simplesmente de  $n$ -plano  $T_p\Sigma^n$ . Esta aplicação é conhecida como a aplicação de Gauss generalizada.

Note que, dado  $p \in \Sigma^n$ , o  $n$ -plano  $T_p\Sigma^n$  pode ser caracterizado pelo seu complemento ortogonal  $[T_p\Sigma^n]^\perp$  (seu respectivo subespaço normal orientado  $(m - n)$ -dimensional), donde podemos ver a aplicação normal de Gauss generalizada como

$$\xi^\perp : \Sigma^n \longrightarrow G(m - n, m),$$

$\xi^\perp(p) = [T_p\Sigma^n]^\perp$ . Estas definições são equivalentes, pois  $G(n, m)$  e  $G(m - n, m)$  são difeomorfos, via complemento ortogonal.

Veja que esta definição, quando aplicado para o caso  $n = m - 1$ , é consistente com a definição usual, visto que um  $n$ -plano orientado é caracterizado pelo seu complemento ortogonal, que neste caso é uma reta pela origem de  $T_p\Sigma$ , normal à este  $n$ -plano, a qual pode ser identificada com um vetor normal unitário, isso ilustra que  $G(1, m) \cong \mathbb{S}^{m-1}$ .

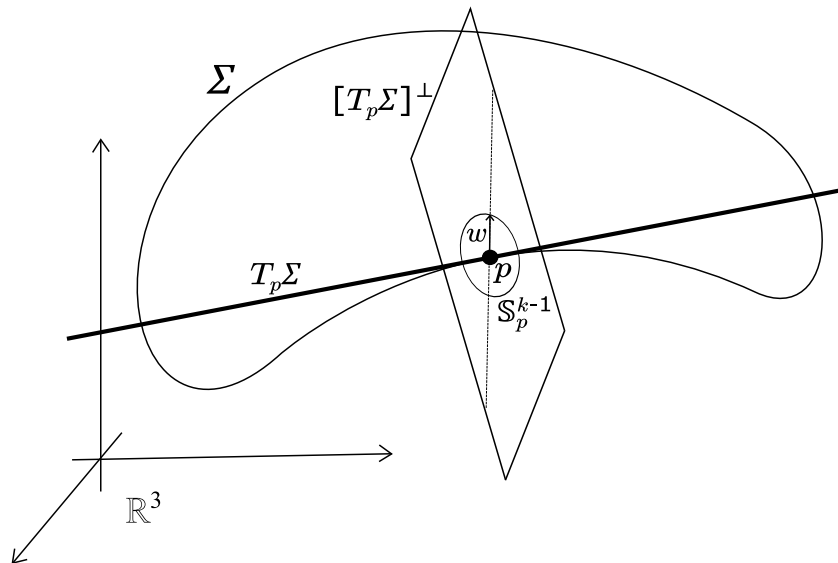
### 4.3.2 A curvatura total e curvatura total absoluta de Lipschitz-Killing

Vamos agora definir as curvaturas total e total absoluta de Lipschitz-Killing. Considere  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$  e seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + k$  com  $k \geq 1$ . Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade orientada, de dimensão  $n$ , de  $\mathbb{R}^m$ .

Dado  $p \in \Sigma^n$  considere o  $n$ -plano  $T_p\Sigma^n$  e seu complemento ortogonal  $[T_p\Sigma^n]^\perp$ , o qual então tem dimensão  $k$ . Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^{k-1} \subset [T_p\Sigma^n]^\perp$  (esfera unitária de dimensão  $k - 1$  contida em  $[T_p\Sigma^n]^\perp$  e centrada na origem de  $[T_p\Sigma^n]^\perp$ ). Para facilitar a compreensão do que se seguirá, vamos indexá-la chamando-a de  $\mathbb{S}_p^{k-1}$ .

Dado  $w \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ , ou seja, uma direção em  $[T_p\Sigma^n]^\perp$ , olhe para o subespaço  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$  que tem, então, dimensão  $n + 1$ , isto é, é um  $(n + 1)$ -plano em  $\mathbb{R}^m$ , que é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^m$ , ou seja, é um elemento de  $G(n + 1, m)$ . Na ilustração a seguir vamos considerar  $\Sigma$  unidimensional, para que seja mais simples essa visualização.

Figura 5.3.2.1

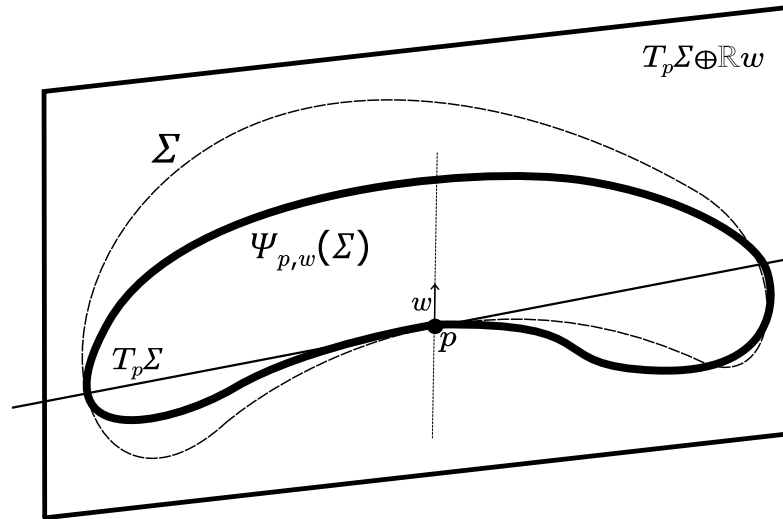


Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora veja a projeção ortogonal de  $\Sigma^n$  em  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$  via projeção  $\Psi_{p,w} : \Sigma^n \longrightarrow T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ .



Figura 5.2.1.2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora na projeção possa ocorrer intersecções, a projeção é "bem comportada" quase todo ponto. Assim, desconsiderando esse possível conjunto de medida nula, podemos olhar  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  como sendo, ao menos localmente, uma hipersuperfície de  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$  de dimensão  $n$  (pois tem codimensão 1 em relação à  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ ).

Veja então que, em relação à  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ , só há uma direção normal à  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  já que  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  é uma hipersuperfície de  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ .

Seja agora  $\nu$  o campo de vetores unitário e normal à  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  relativamente à  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ , na orientação considerada (o qual, como visto acima, é bem definido ao menos em uma vizinhança de  $p$ ). Fica então bem definida (ao menos localmente) a aplicação de Gauss

$$\nu : \Psi_{p,w}(\Sigma^n) \longrightarrow \mathbb{S}_p^n \subset T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w,$$

onde  $\mathbb{S}_p^n \subset T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$  é a esfera unitária  $n$ -dimensional centrada na origem de  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ .

Consideramos então a curvatura de Gauss-Kronecker relativa à hipersuperfície  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  em  $p \in \Sigma^n$ , a qual denotemos por  $K(p, w)$ , que é então dada por  $\det[S_\nu(p)]$ , onde  $S_\nu$  é a segunda forma fundamental relativa à aplicação  $\nu$  acima. Temos então

$$K(p, w) = \det[S_\nu(p)]$$

onde  $\nu$  é o campo de vetores unitário em  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  na direção normal à  $\Psi_{p,w}(\Sigma^n)$  relativamente à  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ , na orientação considerada. O número  $K(p, w)$  é conhecida como a curvatura de Lipschitz-Killing de  $\Sigma$  em  $p$  na direção de  $w$ .

Como um exemplo ilustrativo sobre o que se entende por  $K(p, w)$ , considere o caso em que  $n = 1$ ,  $m = 3$  e  $\Sigma^1$  é o círculo unitário no plano  $\{y = 0\}$  com centro em  $(0, 0, 1)$ . Considere o ponto  $p = (0, 0, 0) \in \Sigma^1$ . Temos  $T_p\Sigma^1$  como sendo o eixo- $x$  e os vetores ortonormais  $w_1 = (0, 0, 1)$  e  $w_2 = (0, 1, 0)$  são normais à  $T_p\Sigma^1$ , ou seja, formam uma base ortonormal para  $[T_p\Sigma^1]^\perp$ . Note que  $\Psi_{p,w_1}(\Sigma^1)$  é a projeção de  $\Sigma^1$  sobre o plano  $\{y = 0\}$ , donde  $\Psi_{p,w_1}(\Sigma^1) = \Sigma^1$ , enquanto  $\Psi_{p,w_2}(\Sigma^1)$  é a projeção de  $\Sigma^1$  sobre o plano  $\{z = 0\}$ , donde  $\Psi_{p,w_2}(\Sigma^1)$  é o segmento de reta sobre o eixo- $x$  entre  $(-1, 0, 0)$  e  $(1, 0, 0)$ . Assim, vê-se que

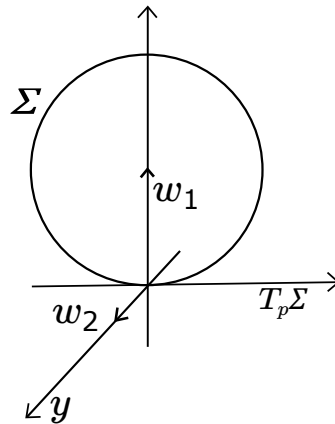
$$K(p, w_1) = 1,$$

pois é exatamente a curvatura de  $\Sigma^1$  em  $p$ , enquanto que

$$K(p, w_2) = 0$$

pois é a curvatura de um segmento de reta contendo  $p$ .

Figura 5.2.1.3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora estamos em condições de definir o que entendemos por curvatura total e curvatura total absoluta de Lipschitz-Killing.

As integrais

$$K(p) := \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbb{S}_p^{k-1}} K(p, w) dV$$

e

$$K^*(p) := \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbb{S}_p^{k-1}} |K(p, w)| dV \quad (4.14)$$

são conhecidas, respectivamente, como a curvatura total e a curvatura total absoluta de Lipschitz-Killing de  $\Sigma^n$  em  $p$ , onde aqui  $dV$  indica a forma volume para dimensão  $k - 1$ .

A curvatura total e a curvatura total absoluta (Lipschitz-Killing) de  $\Sigma^n$  é definida então como sendo

$$\tau(\Sigma^n) = \int_{\Sigma^n} K dV$$

e

$$\tau^*(\Sigma^n) = \int_{\Sigma^n} K^* dV$$

respectivamente, onde aqui  $dV$  indica a forma volume para dimensão  $n$ .

**Observação 49** *Observe que se  $\Sigma^n$  é uma subvariedade compacta e convexa contida em um  $(n + 1)$ -plano de  $\mathbb{R}^m$ , então  $\Psi_{p,w}(\Sigma)$  é subvariedade convexa em  $T_p\Sigma^n \oplus \mathbb{R}w$ . No Teorema 51 adiante, é assumido como hipóteses subvariedades compactas e convexas  $\Gamma^{n-1}$  contidas em  $n$ -planos e este fato é utilizado para garantirmos que a projeção sobre cada elemento  $\mathcal{P} \in G(n, m)$ , denotada por  $\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)$ , seja uma subvariedade convexa.*

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$  e considere a Grassmaniana  $G(n, m) \equiv G_n(\mathbb{R}^m)$ . Dado um  $n$ -plano  $\mathcal{P}$  em  $G(n, m)$ , considere a aplicação

$$\Psi_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}$$

a qual projeta ortogonalmente  $\mathbb{R}^m$  sobre o  $n$ -plano  $\mathcal{P}$ .

Seja  $\mathbb{S}^{n-1}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  centrada na origem  $0$  de  $\mathbb{R}^m$  e seja  $D \subset \mathbb{S}^{n-1}$  um domínio (aberto e conexo) em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Considere o cone sobre  $D$  com vértice em  $0$ , o qual denotamos por  $0 * D$ . Dado um plano  $\mathcal{P}$  de  $G(n, m)$ , considere a projeção ortogonal desse cone em  $\mathcal{P}$  via  $\Psi_{\mathcal{P}}$ , ou seja, o conjunto  $\Psi_{\mathcal{P}}(0 * D) \subset \mathcal{P}$ . Note que  $\Psi_{\mathcal{P}}(0 * D)$  é uma subvariedade de dimensão  $n$  para quase todo plano  $\mathcal{P}$  (poderemos desconsiderar então a projeção nos outros planos onde poderá ter dimensão  $n - 1$ ) e, então, faz sentido falarmos em densidade desse conjunto em um ponto  $p$  dele, ou seja, em  $\Theta_{\Psi_{\mathcal{P}}(0 * D)}(p)$ ,  $p \in \Psi_{\mathcal{P}}(0 * D)$ . O lema a seguir mostra uma relação entre as densidades de  $0 * D$  e  $\Psi_{\mathcal{P}}(0 * D)$  em  $0$ .

**Lema 50** *Seja  $\mathbb{S}^{n-1}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  centrada na origem  $0$  de  $\mathbb{R}^m$  e seja  $D \subset \mathbb{S}^{n-1}$  um domínio (aberto e conexo) em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Então*

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)} \{ \Theta_{\Psi_{\mathcal{P}}(0 * D)}(0) \} = \Theta_{0 * D}(0)$$

onde  $\mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)}$  indica a média sobre todos os planos  $\mathcal{P}$  em  $G(n, m)$ .

Vamos assumir este resultado, pois sua prova envolve alguns conceitos e resultados da Teoria Geométrica da Medida com os quais não estamos ainda familiarizados.

Para o próximo teorema será dada uma ideia da prova.

**Teorema 51** *Seja  $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{R}^m$  uma subvariedade compacta. Então, dado  $q \in \mathbb{R}^m$ ,*

$$\Pi_q(\Gamma) = \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \{ \Pi_{\Psi_{\mathcal{P}}(q)}(\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)) \},$$

onde  $\Pi_q(\Gamma)$  é o ângulo de visão de  $\Gamma$  em  $q$  e  $\Pi_{\Psi_{\mathcal{P}}(q)}(\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma))$  é o ângulo de visão de  $\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)$  em  $\Psi_{\mathcal{P}}(q)$ .

**Prova.** Note inicialmente que, a partir da igualdade (4.13), temos  $\Pi_q(\Gamma) = c_{n-1} \Theta_{q * \Gamma}(q)$  e do Lema 50 vem que  $\Theta_{q * \Gamma}(0) = \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \{ \Theta_{\Psi_{\mathcal{P}}(q * \Gamma)}(0) \}$ , assim, segue que

$$\begin{aligned} \Pi_q(\Gamma) &= c_{n-1} \Theta_{q * \Gamma}(q) \\ &= c_{n-1} \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \{ \Theta_{\Psi_{\mathcal{P}}(q * \Gamma)}(q) \} \\ &= \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \{ \omega_{n-1} \Theta_{\Psi_{\mathcal{P}}(q * \Gamma)}(q) \} \\ &= \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \{ \Pi_{\Psi_{\mathcal{P}}(q)}(\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)) \}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Note que na passagem (4.15) interpretamos que a projeção do cone  $q * \Gamma$  sobre cada plano  $\mathcal{P}$  também dá origem a um cone em  $\mathcal{P}$ . ■

**Teorema 52** (Langevin-Shifrin) *Seja  $\Gamma^{n-1}$  uma subvariedade suave de  $\mathbb{R}^m$ . Então a curvatura total absoluta de  $\Gamma$  é dada por*

$$\int_{\Gamma} K^* dV_{\Gamma} = \frac{2}{c_{n-1}} \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n,m)} \left\{ \int_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)} |K_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)}| dV_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma)} \right\}$$

onde  $K$  indica a curvatura de Gauss-Kronecker.

Este teorema é uma adaptação feita por (CHOE; GULLIVER, 2017), para se enquadrar ao resultado pretendido. A proposição original pode ser encontrada em (LANGEVIN; SHIFRIN, 1982), Proposição 2.15.

Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  hipersuperfícies compactas e convexas de um  $n$ -plano afim  $\Lambda_i^n \subset \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, 2$ . Note que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  têm dimensão  $n - 1$ . Seja  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Observe agora se  $\Sigma^n$  é uma subvariedade mínima com bordo  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , dado um ponto  $p \in \Sigma$ , o fato de ambas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  serem convexas, implica que  $\Gamma$  é estrelado em relação à  $p$ , pois  $\Sigma$  está contido na envolvente convexa de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Dos teoremas acima temos que, para  $q \in \mathbb{R}^m$ , como  $\Gamma_i$  é convexa,  $\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)$  é convexa, donde

$$\Pi_{\Psi_{\mathcal{P}}(q)}(\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)) \leq c_{n-1} = \int_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} |K_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)}| dV_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} \quad (4.16)$$

para  $i = 1, 2$ . Note que quando  $m = 2$ , a igualdade de (4.16) é vista como o Teorema de Fenchel (Teorema 6). Isso ocorre pois se deslocamos  $\Lambda_i^n$  paralelamente até conter a origem,  $\Lambda_i^n$  coincide com algum plano  $\mathcal{P} \in G(n, m)$ .

Com isto podemos obter o seguinte resultado:

**Teorema 53** *Dados dois  $n$ -planos afins  $\Lambda_i^n \subset \mathbb{R}^m$ , seja  $\Gamma_i$  uma hipersuperfície compacta e convexa de  $\Lambda_i^n$ ,  $i = 1, 2$ . Se  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , então qualquer subvariedade mínima  $\Sigma$  de dimensão  $n$  que tenha por bordo  $\Gamma$  é, ou a união das regiões limitadas em cada  $\Lambda_i^n$  cujo bordo é  $\Gamma_i$ , ou é não plana e sem auto-intersecções.*

**Prova.** Inicialmente note que

$$\int_{\Gamma} K^* dV_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} K^* dV_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} K^* dV_{\Gamma_2}.$$

Pelo Teorema 52 e a equação (4.16), para  $i = \{1, 2\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} K^* dV_{\Gamma_i} &= \frac{2}{c_{n-1}} \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)} \left\{ \int_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} |K_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)}| dV_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} \right\} \\ &= \frac{2}{c_{n-1}} \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)} \{c_{n-1}\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{\Gamma} K^* dV_{\Gamma} = 4.$$

Pela Proposição 30 e a Observação 46, temos que

$$\begin{aligned} c_{n-1} \Theta_{\Sigma}(q) &\leq \Pi_q(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^2 \Pi_q(\Gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^2 \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)} \{ \Pi_{\Psi_{\mathcal{P}}(q)}(\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)) \} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \mathfrak{M}_{\mathcal{P} \in G(n, m)} \left\{ \int_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} |K_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)}| dV_{\Psi_{\mathcal{P}}(\Gamma_i)} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \frac{c_{n-1}}{2} \int_{\Gamma_i} K^* dV_{\Gamma_i} \\ &= 2c_{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Theta_{\Sigma}(q) \leq 2.$$

Se tivermos  $\Theta_{\Sigma}(q) = 2$  então todas as desigualdades acima se tornam igualdades, sendo que isso implica que  $\Sigma$  é plana, e portanto mergulhada. Caso  $\Theta_{\Sigma}(q) < 2$ , então pela Proposição 28,  $\Sigma$  é mergulhada. ■

## 5 CONCLUSÃO

Mostramos neste trabalho, seguindo os passos de (EKHOLM; WHITE; WIENHOLTZ, 2002) e (CHOE; GULLIVER, 2017), que estimativas sobre o ângulo de visão e sobre a curvatura total de subvariedade compacta  $(n - 1)$ -dimensional em  $\mathbb{R}^m$ , sob certas condições, determinam quando uma subvariedade mínima que tenha tal subvariedade compacta por bordo, é mergulhada.

Possivelmente o ponto mais importante no desencadeamento de resultados que levaram ao principal teorema (Teorema 47), foi obter determinadas relações entre subvariedades mínima com bordo e cones determinados por esse bordo. Fazendo-se isso, foi possível encontrar uma relação entre as densidades dessas duas subvariedades, sendo que calcular a densidade do cone é relativamente mais simples, desta forma encontra-se uma limitação para a densidade da subvariedade e conseqüentemente usamos resultados que garantem o mergulhamento.

A conjectura enunciada por Choe-Gulliver (Conjectura 48) é um ótimo ponto de partida para uma seqüência deste trabalho, dado que se poderia, em princípio, explorar outros casos particulares e entender exemplos que indicassem um possível caminho para resolvê-la.

## REFERÊNCIAS

- ABE, S. **Superfícies de curvatura média constante com bordo plano em  $\mathbb{R}^3$** . 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) — UFSM, Santa Maria, Rio grande do sul.
- ALLARD, W. K. On the First Variation of a Varifold. **Annals of Mathematics**, [S.l.], v.95, n.3, p.417–491, 1972.
- BELLMAN, R. **Introduction to Matrix Analysis, Second Edition**. 2.ed. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- BONNESEN, T.; FENCHEL, W. **Theory of Convex Bodies**. , Idaho, USA, 1987.
- CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 608p.
- CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry / Isaac Chavel ; with a chapter by Burton Randol, with appendix by Jozef Dodziuk**. [S.l.]: Academic Press Orlando, 1984.
- CHOE, J.; GULLIVER, R. Density of a minimal submanifold and total curvature of its boundary. **Communications in Analysis and Geometry**, [S.l.], v.25, n.3, p.545–556, 2017.
- DOUGLAS, J. Solution of the problem of Plateau. **Transactions of the American Mathematical Society**, [S.l.], v.33, p.263–321, 1931.
- EKHOLM, T.; WHITE, B.; WIENHOLTZ, D. Embeddedness of Minimal Surfaces with Total Boundary Curvature at Most 4. **Annals of Mathematics**, [S.l.], v.155, n.1, p.209–234, 2002.
- ESCOBAR, J. F. **Topics in PDE's and differential geometry**. Goiânia, Universidade Federal de Goiás: [s.n.], 2002.
- FENCHEL, W. Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. **Mathematische Annalen**, [S.l.], v.265, p.1432–1807, 1929.
- GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. 2.ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- GROMOV, M. Filling Riemannian manifolds. **Journal of Differential Geometry**, [S.l.], v.18, n.1, p.1 – 147, 1983.



LANGEVIN, R.; SHIFRIN, T. Polar Varieties and Integral Geometry. **American Journal of Mathematics**, [S.l.], v.104, n.3, p.553–605, 1982.

LAWSON, H. B. Lectures on minimal submanifolds. **Publish or Perish, Inc**, [S.l.], v.1, p.178, 1973.

LEE, J. **Introduction to smooth manifolds**. 2.ed. [S.l.: s.n.], 2012. v.218.

MULLER, N. M. **O problema de Dirichlet para a EDP da curvatura média constante em variedades de curvatura de Ricci não negativa**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) — UFSM, Santa Maria, Rio grande do sul.

NITSCHKE, J. C. C. A new uniqueness theorem for minimal surfaces. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v.52, p.319–329, 1973.

RADO, T. On Plateau's Problem. **Annals of Mathematics**, [S.l.], v.31, p.457–469, 1930.

SULLIVAN, J. M. **Curves of Finite Total Curvature**. Basel: Birkhäuser Basel, 2008. 137–161p.

# APÊNDICE

---

## APÊNDICE A – Conceitos de Geometria

Neste apêndice, buscamos elencar algumas definições que foram utilizadas no decorrer deste trabalho, juntamente com resultados considerados preliminares mas que são de grande importância e necessitam ser mencionados.

**Definição 54** *Sejam  $M^n$  e  $N^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  for injetiva para qualquer  $p \in M$ . Além disso, se  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , então dizemos que  $\varphi$  é um mergulho.*

Podemos encontrar alguns exemplos de mergulhos olhando para as superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ . De fato, se  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular,  $S$  possui uma estrutura diferenciável dada por suas parametrizações  $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ , as aplicações  $x_\alpha$  são mergulhos de  $U_\alpha$  em  $S$ . Além disso, prova-se que toda imersão é localmente um mergulho.

**Definição 55** *Uma subvariedade imersa (mergulhada) de  $N$  de dimensão  $m$  é uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  tal que:*

- $M \subset N$
- A inclusão  $i : M \rightarrow N$  é uma imersão (mergulho).

**Definição 56** *(Variedade com Bordo) Dizemos que  $\Sigma$  é uma variedade com bordo de dimensão  $n$  se  $\Sigma$  for uma variedade em que o atlas local máximo é formado por aplicações que levam subconjuntos de  $\Sigma$  em subconjuntos de semi-espacos fechados de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 57** *(Teorema da Divergência) Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$  uma variedade Riemanniana orientada de dimensão  $n$  com bordo  $\partial\Sigma$ . Se  $X$  é um campo vetorial com suporte compacto, então*

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div} X \, dV = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \eta \rangle \, dS$$

onde  $\eta$  é um campo de vetores unitário, normal a  $\partial\Sigma$  e que aponta para fora de  $\Sigma$ .

Tanto o Teorema da Divergência quanto o conhecido teorema de Green, podem ser vistos como casos particulares do teorema de Stokes.

**Lema 58** *Seja  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^m$  uma família de matrizes  $m \times m$  para cada  $t$  em um intervalo, das quais todas as entradas são funções diferenciáveis tais que  $A(0) = Id_m$ , então*

$$\frac{d}{dt} \det(A(t))|_{t=0} = \text{tr}(A'(0)).$$

**Prova.** A fórmula de Jacobi (BELLMAN, 1997) diz que nesse caso,

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \text{tr} \left( \text{adj}(A(t)) \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

onde *adj* representa a matriz adjunta ou adjugada, que é transposta da matriz dos cofatores. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(A(t))|_{t=0} &= \text{tr} \left( \text{adj}(A(0)) \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} \right) \\ &= \text{tr}(A'(0)). \end{aligned}$$

■

A fórmula de Jacobi, utilizada no lema anterior é um conhecido resultado que une de forma muito interessante o conceito de derivada, proveniente da análise, e os conceitos de traço e adjunta de uma matriz, vindos da Álgebra Linear. O nome Jacobi é devido ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), o qual fez grandes contribuições nas áreas de equações diferenciais, sistemas dinâmicos, teoria dos números, entre outras.

Na sequência será introduzida a definição do vetor curvatura média de uma subvariedade. Existem outras maneiras equivalentes de ser definida, porém para nosso contexto esta será satisfatória.

**Definição 59** (*Vetor Curvatura média*) *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de uma variedade Riemanniana  $M^m$ . Seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  um referencial ortonormal em uma vizinhança de um ponto  $p \in \Sigma$ , tangente a  $\Sigma$  e geodésica em  $p$ , e considere uma extensão suave  $\{e_i\}_{i=1}^m$  a um referencial ortonormal em uma vizinhança de  $p \in M$ . O vetor curvatura média de  $\Sigma$  em  $p$  é dado por*

$$\vec{H}(p) = \sum_{j=n+1}^m \text{tr}(S_{e_j}) e_j$$

onde  $S_{e_j}$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ .

Introduzimos na sequência a fórmula da co-area, que pode ser encontrada em (CHAVEL, 1984), o qual faremos as devidas adaptações para simplicar e adequar ao nosso contexto.

**Teorema 60** (*Fórmula da Co-área*) Seja  $\Omega$  um domínio em uma variedade Riemanniana  $M$  com fecho compacto e seja  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$  e satisfazendo que  $f|_{\partial\Omega} = 0$ .  
Seja

$$\Omega(t) = \{p \in M; |f(p)| > t\}$$

$$V(t) = V(\Omega(t))$$

$$\Gamma(t) = \{p \in M; |f(p)| = t\}$$

onde  $V$  é a função volume. Seja  $A(t) = A(\Gamma(t))$  a área de  $\Gamma(t)$ . Então  $V$  é uma função  $C^\infty$  e

$$V'(t) = - \int_{\Gamma(t)} |\text{grad} f|^{-1} dA_t.$$

Falaremos sobre pontos de ramificação, um conceito não muito conhecido que tem sua origem associada ao famoso problema de Plateau, que é enunciado como: Dado uma curva de Jordan  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^m$ , encontrar uma superfície em  $\mathbb{R}^m$  de menor área que tenha  $\Gamma$  por bordo.

Uma resposta ao problema de Plateau foi introduzida por J. Douglas no seguinte teorema:

**Teorema 61** (*Teorema de Douglas*) Seja  $\Gamma$  uma curva de **Jordan** em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\inf_{\psi \in X_\Gamma} \text{Vol}(\psi) < \infty$  onde  $X_\Gamma = \{\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^n; \psi \text{ é } C^1 \text{ por partes e } \psi|_{\partial D} \text{ é uma parametrização monótona de } \Gamma\}$ . Então existe uma aplicação contínua  $\psi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

a)  $\psi_0|_{\partial D}$  aplica  $\partial D$  monotonicamente em  $\Gamma$ ;

b)  $\psi_0|_{\text{int}(D)}$  é harmônica e quase-conforme;

c)  $\text{Vol}(\psi_0) = \inf_{\psi \in X_\Gamma} \text{Vol}(\psi)$ .

Então a imagem de  $D$  por  $\psi_0$  é a solução desejada. Porém essa solução não é necessariamente uma imersão em todos os pontos, e o próximo lema caracteriza esses pontos.

**Lema 62** Uma superfície solução  $\psi_0|_{\text{int}(D)}$ , onde  $\psi_0$  é dada no Teorema 61 é uma imersão, exceto possivelmente em pontos isolados.

Estamos agora com todas as ferramentas para definir o que é um ponto de ramificação.

**Definição 63** Os pontos de irregularidade de que trata o Lema 62 são chamados de pontos de ramificação da superfície mínima.