

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

Tobias da Paixão Fiegenbaum

**ALGORITMO DO GRADIENTE APLICADO À  
AMOSTRAGEM COMPRESSIVA EM IMAGENS DE  
RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO DE  
EPILEPSIA**

Santa Maria, RS

2022

**Tobias da Paixão Fiegenbaum**

**ALGORITMO DO GRADIENTE APLICADO À AMOSTRAGEM COMPRESSIVA  
EM IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO DE  
EPILEPSIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia de Telecomunicações da  
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,  
RS), como requisito parcial para a obtenção do  
grau de **Bacharel em Engenharia de Telecomunicações**

Orientador: Prof. Dr. Marcos Maruo

Santa Maria, RS

2022

da Paixão Fiegenbaum, Tobias

Algoritmo do gradiente aplicado à amostragem compressiva em imagens de ressonância magnética para tratamento de epilepsia / por Tobias da Paixão Fiegenbaum. – 2022.

60 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Marcos Maruo

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia de Telecomunicações, RS, 2022.

1. Amostragem compressiva. 2. Ressonância Magnética. 3. Imagens médicas. 4. Epilepsia. 5. Algoritmo do gradiente. I. Maruo, Marcos. II. Algoritmo do gradiente aplicado à amostragem compressiva em imagens de ressonância magnética para tratamento de epilepsia.

---

© 2022

Todos os direitos autorais reservados a Tobias da Paixão Fiegenbaum. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: tobiasdpf@gmail.com

**Tobias da Paixão Fiegenbaum**  
**ALGORITMO DO GRADIENTE APLICADO À AMOSTRAGEM COMPRESSIVA**  
**EM IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO DE**  
**EPILEPSIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia de Telecomunicações**

**Aprovado em 15 de Agosto de 2022:**

---

**Marcos Maruo, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Marcelo Zanetti, Dr. (UFSM)**

---

**Samuel Valduga, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, RS

2022

## **DEDICATÓRIA**

*Dedico este trabalho a minha mãe e meu pai, que desde cedo me incentivaram a buscar conhecimento.*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço à minha mãe Márcia Eliane Leindcker da Paixão pelo apoio, à minha namorada Fernanda Elisa Bartz por me incentivar e estar comigo nas vitórias e derrotas, à minha terapeuta Fabiane Bortoluzzi Angelo por me ensinar sobre prioridades, ao meu irmão João Dérick da Paixão Fiegenbaum pelo alívio cômico nesse período ao contar as histórias e experiências, e ao meu professor orientador Marcos Hideo Maruo por aceitar me orientar em um assunto desconhecido por ambos e lembrar que de pouco em pouco o trabalho era feito.*

*“O passo mais importante que alguém pode tomar. Realmente não é o primeiro passo, entende? É o seguinte. Sempre o próximo passo, Dalinar.”*

(BRANDON SANDERSON, OATHBRINGER,  
TRADUÇÃO PRÓPRIA)

## RESUMO

### ALGORITMO DO GRADIENTE APLICADO À AMOSTRAGEM COMPRESSIVA EM IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO DE EPILEPSIA

AUTOR: TOBIAS DA PAIXÃO FIEGENBAUM  
ORIENTADOR: MARCOS MARUO

Epilepsias são problemas sérios e comuns que afetam o cérebro e, em geral, podem ser tratadas com medicamentos. A medicina moderna e seus equipamentos de imageamento são úteis para determinar o tipo de epilepsia e como lidar com ela. Epilepsias diagnosticadas como focais tendem a estar em uma área do cérebro, e o equipamento médico para ter prognóstico da área é imageamento por ressonância magnética. Os exames de IRM são feitos quando não é possível tratar a epilepsia com medicamentos e cirurgia é necessária para lidar com a área onde a doença ocorre.

IRM possui um limite na sua velocidade de obter amostras e conseguir uma imagem. Esses limites têm a ver com o *hardware* necessário para a ressonância magnética e a resposta do corpo aos campos magnéticos variantes. No entanto, existe a possibilidade de usar *software* (e talvez outro tipo de implementação de *hardware*) para acelerar a velocidade de obtenção de amostras para diminuir o tempo de exame.

Essa possibilidade vem de um ramo da teoria da informação chamado amostragem compressiva, onde o objetivo é amostrar diretamente a forma compacta da informação e recuperar o sinal esparso. O foco de estudo desse trabalho é sobre o algoritmo de reconstrução do sinal esparso na amostragem compressiva, de forma a processar imagens de RM e mostrar outra possibilidade para o algoritmo de reconstrução da amostragem compressiva.

**Palavras-chave:** Amostragem compressiva. Ressonância Magnética. Imagens médicas. Epilepsia. Algoritmo do gradiente.

## ABSTRACT

### GRADIENT ALGORITHM APPLIED TO COMPRESSIVE SENSING IN MAGNETIC RESONANCE IMAGING FOR EPILEPSY TREATMENT

AUTHOR: TOBIAS DA PAIXÃO FIEGENBAUM

ADVISOR: MARCOS MARUO

Epilepsies are serious and common diseases of the brain that, in general, can be treated with medicine intake. Modern medicine and its imaging equipment are useful for determining the kind of epilepsy and ways to deal with it. Focal epilepsies are focused on an area of the brain, and the equipment used for prognosis of the area is magnetic resonance imaging. MRI exams are done when it is not possible to treat epilepsy with medication, and so surgery is needed to deal with the area where the disease happens.

MRI has limits in its measurement speed to get an image. Those limits are related to the necessary hardware for magnetic resonance and the body's response to changing magnetic fields. Nonetheless, one can use software (and maybe another implementation of hardware) to speed up the measurement process so the exam time is lower.

This possibility comes from a branch in information theory called compressive sensing, where the goal is to directly measure the information's compacted structure and recover the sparse signal. The study focus of this paper is the compressive sensing's reconstruction algorithm of the sparse signal, such that it processes magnetic resonance images, and shows another possibility for a reconstruction algorithm for compressive sensing.

**Keywords:** Compressive sensing. Magnetic Resonance. Medical images. Epilepsy. Gradient algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

1	Projeção Ortogonal.....	33
2	Representação gráfica da expansão das normas $l_2, l_0, l_1$ .....	35
3	Imagem Teste Lenna em Escala Cinza 128 pixels por 128 pixels .....	43
4	Coeficientes da Imagem Teste Lenna no Domínio Wavelet .....	44
5	Coeficientes da Imagem Teste Lenna Recuperada após Amostragem Compressiva.....	44
6	Sinal Recuperado Imagem Teste Lenna.....	45
7	Diferença Pixel a Pixel entre Imagem Teste Lenna Original e Recuperada ...	46
8	Imagem Teste Lenna filtrada após recuperação.....	46
9	Comparação entre Imagem Original Lenna, Recuperação, Filtragem .....	47
10	Imagem Teste Shepp-Logan em Escala Cinza 128 pixels por 128 pixels .....	47
11	Coeficientes Wavelet Haar da Imagem Teste Shepp-Logan <i>Phantom</i> após Projeção Lexicográfica .....	48
12	Coeficientes da Imagem Teste Shepp-Logan Recuperada após Amostragem Compressiva .....	48
13	Sinal Recuperado Imagem Teste Shepp-Logan.....	49
14	Diferença Pixel a Pixel entre sinal recuperado e sinal original Shepp-Logan .	49
15	Imagem Teste Shepp-Logan filtrada após recuperação .....	50
16	Comparação entre Imagem Original Shepp-Logan, Recuperação, Filtragem .	50
17	Imagem do Cérebro por RM .....	51
18	Coeficientes Wavelet Haar da Projeção Lexicográfica da Imagem por RM Original .....	52
19	Coeficientes Wavelet Haar Reconstruídos da Projeção Lexicográfica da Imagem por RM .....	52
20	Comparação entre Imagem por RM Original e Recuperada .....	53
21	Diferença Pixel a Pixel entre Imagem RM Original e Recuperada .....	53

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DICOM	<i>Digital Imaging and Communications in Medicine</i>
EEG	Eletronecefalograma
IRM	Imageamento por Ressonância Magnética
NIFTI	<i>Neuroimaging Informatics Technology Initiative</i>
PIR	Propriedade da Isometria Restrita
RF	Radiofrequência
RM	Ressonância Magnética
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
1.1	USO DE IMAGEM POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO E PROGNÓSTICO DE EPILEPSIA .....	12
1.1.1	<b>Quanto a epilepsia é um problema</b> .....	13
1.1.2	<b>Uso de ressonância magnética em prognóstico de epilepsia</b> .....	14
1.1.3	<b>Ressonância magnética e tentativas de acelerar o processo</b> .....	15
1.1.4	<b>Amostragem compressiva em ressonância magnética</b> .....	17
1.2	OBJETIVOS .....	18
1.3	CONTEÚDO .....	18
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b> .....	19
2.1	AMOSTRAGEM COMPRESSIVA PARA OBTER UMA IMAGEM SIGNIFICATIVA COM MENOS AMOSTRAS .....	19
2.1.1	<b>Amostragem Uniforme</b> .....	20
2.1.2	<b>Sinais Podem ser Comprimidos</b> .....	21
2.1.3	<b>Esparsidade</b> .....	22
2.1.4	<b>E se capturar direto sinais esparsos?</b> .....	23
2.1.4.1	<i>E se não forem esparsos?</i> .....	23
2.1.5	<b>Adquirir sinal ou medições esparsas</b> .....	25
2.1.5.1	<i>Como adquirir diretamente as medições compressivas?</i> .....	25
2.1.5.2	<i>Propriedade da Isometria Restrita</i> .....	28
2.2	RESTAURAÇÃO DO SINAL EM AMOSTRAGEM COMPRESSIVA .....	30
2.2.1	<b>Sistema de Equações Lineares e Hiperplano de Soluções</b> .....	30
2.2.2	<b>Representação da Solução</b> .....	32
2.2.3	<b>A partir da norma <math>l_1</math></b> .....	34
2.2.4	<b>Como reconstruir o sinal a partir do vetor <math>y</math></b> .....	36
<b>3</b>	<b>ALGORITMO DO GRADIENTE PARA A RECONSTRUÇÃO DO SINAL POR AMOSTRAGEM COMPRESSIVA</b> .....	38
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA .....	38
3.2	CUSTO COMPUTACIONAL .....	40
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	42
4.1	IMAGENS TESTE PARA PROCESSAMENTO DE IMAGENS .....	42
4.1.1	<b>Lenna</b> .....	43
4.1.2	<b>Shepp-Logan Phantom</b> .....	46
4.2	IMAGEM POR RM .....	50
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	54
5.1	TRABALHOS FUTUROS .....	55
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	58

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 USO DE IMAGEM POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA TRATAMENTO E PROGNÓSTICO DE EPILEPSIA

O processamento de informações, cujas ferramentas vêm da engenharia de telecomunicações, é muito importante para o avanço da humanidade. Principalmente quando há possibilidade de encontrar convergência entre assuntos de áreas de conhecimento distintas, pois nessas situações existe a oportunidade de encontrar perguntas ainda não respondidas.

Portanto, adquirir informação é algo relevante. Isso é importante não só para pessoas, quando buscam informações ou as adquirem para estarem cientes do seu entorno, mas também para tecnologia e telecomunicações, pois com devidas informações as decisões podem ocorrer com maior estratégia.

Na medicina e tratamento de doenças, a informação sobre a presença ou ausência das características da doença e onde está localizada contribui para um diagnóstico mais preciso pois permite a tomada de decisões com maior probabilidade de sucesso por saber o que —e onde— está sendo tratado.

Antes dos exames eletrônicos serem realizados, há uma rodada de perguntas feitas para adquirir informações; esse processo é chamado de anamnese. Quando usados em conjunto com entrevistas médicas, exames físicos são uma das maneiras de se adquirir informações sobre o estado de saúde de um paciente através do emprego das técnicas de observação e protocolos que dependem da área anatômica a ser analisada (YOSHIKAWA; CASTRO, 2015).

Recomenda-se que o exame físico foque em sinais físicos dicotômicos (CAMPBELL; LYNN, 1990), como a presença ou ausência de um som anormal, ao invés de sinais avaliados, como a avaliação da intensidade de uma tosse, pois pode haver variabilidade na interpretação da intensidade do sintoma.

Para situações onde seja necessária a avaliação do sintoma, o uso de equipamentos biomédicos torna a avaliação possível ao fornecer tipos diversos de exames para análises objetivas; por exemplo, ondas cerebrais através de eletroencefalogramas (EEG), imagens médicas de diversas partes do corpo por ressonância magnética (RM), ultrassom e raios-x, dados sobre o coração através de eletrocardiogramas, dentre outros.

Uma das doenças documentadas mais antigas do mundo é a epilepsia (WHO, 2022),

cuja avaliação inicial do sintoma e seguinte diagnóstico ocorre a partir da análise das ondas cerebrais com EEG. Em geral, seu tratamento é por medicamentos. Síndromes epilépticas e epilepsias se dividem em focais e generalizadas, sendo a epilepsia focal o tipo concentrado em uma área específica do cérebro (SALMENPERA; DUNCAN, 2005).

Se a(o) paciente possui epilepsia focal e medicamentos não funcionam, então o imageamento cerebral por ressonância magnética (IRM) é utilizado para o prognóstico da epilepsia focal para tratamento por cirurgia. Nesse sentido, IRM serve para a avaliação do diagnóstico e para apontar circunstâncias futuras da epilepsia. Como epilepsia focal acontece com maior frequência no lobo temporal (SALMENPERA; DUNCAN, 2005), a cirurgia acontece em casos de epilepsia crônica intratável nesse local porque remover a lesão que provoca a epilepsia possui maiores taxas de sucesso que outro tratamento médico (SALMENPERA; DUNCAN, 2005).

Assim, IRM contribui para o prognóstico de epilepsia focal no lobo temporal ao identificar pacientes propícios à cirurgia e detectar os locais das anomalias ao permitir o acesso intracorporal e a devida localização da área cerebral de maneira não invasiva (SALMENPERA; DUNCAN, 2005).

### **1.1.1 Quanto a epilepsia é um problema**

A epilepsia é uma doença crônica não transmitível que afeta pessoas de todas as idades. Ela é considerada uma enfermidade de ocorrência comum por afetar em torno de 50 milhões de pessoas no mundo, e é um problema em especial para países subdesenvolvidos de pequena e média riqueza porque a taxa de ocorrência é maior nesses países (WHO, 2022).

A doença pode afetar as pessoas de maneiras diferentes, com intensidades de sintomas diferentes. Ela se caracteriza pela existência de descargas elétricas anômalas no cérebro, cuja consequência são sintomas característicos como convulsões recorrentes parciais ou no corpo inteiro, perda de consciência ou até perda de controle da bexiga ou intestinos.

Em países subdesenvolvidos, a doença é um problema maior porque até 75% de pessoas com a doença não recebem o tratamento que precisam para poderem viver sem os ataques epilépticos (WHO, 2022).

Seria desejável poder diagnosticar casos de epilepsia, porém a dificuldade de tratamento vem da falta de medicações disponíveis para a população. Pode levar a mortes prematuras evitáveis se não tratada, porque situações como quedas, afogamentos, queimaduras ou convulsões longas são agravadas quando se há a possibilidade de ter uma convulsão.

A partir do diagnóstico com EEG, o tratamento com remédios antiepiléticos pode ser administrado e possui uma eficiência em 70% dos casos para lidar com os sintomas da epilepsia. Para os 30% de pessoas que não respondem ao tratamento por meio de remédios, a opção de cirurgia é a escolha para poder tratar da epilepsia.

Nesse caso, é importante saber onde se encontra a lesão que levou à epilepsia. Para identificar o local, IRM é usada; o uso de ressonância magnética em casos de pessoas com epilepsia acontece quando os remédios anticonvulsão não são suficientes para conter as convulsões da pessoa. Nessa situação, o IRM promove uma visualização do local para a cirurgia, auxiliando no prognóstico e tratamento com acesso intracorporal sem cortes (SALMENPERA; DUNCAN, 2005).

### **1.1.2 Uso de ressonância magnética em prognóstico de epilepsia**

A IRM produz imagens de tecidos moles —músculos, líquido— com alto contraste (YOSHIKAWA; CASTRO, 2015), (DEKA; DATTA, 2019). Para prognóstico de epilepsia, IRM é uma opção porque o tecido mole em questão é o cérebro. Um alto contraste da parte afetada pela doença confere uma garantia que a cirurgia ocorrerá no local crítico para o tratamento cirúrgico.

O tipo de radiação que um equipamento de ressonância magnética usa é não-ionizante. Isso significa que não há energia suficiente para remover elétrons que orbitam as moléculas do corpo, e assim esse tipo de radiação contribui para que as moléculas de um paciente continuem sem alterações mesmo após o exame (DEKA; DATTA, 2019). Assim, é uma opção interessante para realizar imageamento do corpo humano porque não provoca danos permanentes com a radiação se a intensidade estiver dentro de um limite.

A ressonância magnética funciona através da excitação de prótons nos átomos de hidrogênio, a partir de um campo magnético, presentes no corpo humano. Para obter um sinal, uma onda eletromagnética de radiofrequência (RF) é aplicada nos prótons para que eles se movam de um estado de baixa energia para um estado de alta energia (DEKA; DATTA, 2019), enquanto permanecem afetados pelo campo magnético.

Quando a onda RF termina de ser aplicada, os prótons tendem a voltar para seus estados originais de energia ao dissiparem para o ambiente a energia em excesso que receberam da onda RF, o que gera uma parte do sinal da ressonância magnética. Esse sinal é específico para uma fatia da imagem, e é um processo que se repete várias vezes até formar o sinal de ressonância

magnética que represente o local a ser visualizado no exame. Isso acontece porque precisa-se de várias aquisições do sinal de ressonância magnética (RM), o que é uma aplicação da onda RF (DEKA; DATTA, 2019). Então uma imagem de RM é um conjunto dessas aquisições de sinal. Quanto menor a distância entre as fatias da RM, mais detalhado será o exame.

Já que o cérebro é um órgão vital para a sobrevivência e qualidade de vida do paciente, o exame de IRM desse órgão pede um número elevado de fatias para se obter mais detalhes e informações importantes.

Com a quantidade elevada de fatias, a espera pela excitação e retorno ao estado original realizada pelos prótons, IRM possui um processo de obtenção de imagens lento. Isso se torna uma limitação principal da tecnologia, e a impede de ser usada em mais cenários e situações.

### **1.1.3 Ressonância magnética e tentativas de acelerar o processo**

Por ter um processo lento e de custo elevado, a IRM por vezes não é tão usada. Ela até poderia ser mais usada se tivesse um tempo de exame menor. Além disso, é um tipo de exame sensível a movimentos durante a obtenção das fatias da imagem, pois eles interferem no resultado final ao tornarem difícil a interpretação da imagem.

Há situações em que o movimento é muito difícil de evitar durante o exame, como quando crianças precisam de IRM para algum prognóstico ou também em pacientes com epilepsia, já que há o risco de convulsão involuntária. Por isso, acelerar o processo é desejável.

Há algumas formas de se acelerar o processo que dependem da construção da máquina, ou seja, do seu *hardware*. Uma das maneiras de se acelerar o processo é aumentar a intensidade do campo magnético (DEKA; DATTA, 2019), o que diminui o tempo de repetição entre as aplicações da onda RF. Porém isso não é recomendado porque um campo magnético grande em magnitude produz efeitos indesejáveis nos nervos periféricos de pacientes, já que ultrapassaria o limite de segurança.

Como a opção de aumentar o gradiente do campo magnético pode causar efeitos indesejáveis em quem faz o exame, buscaram-se outras alternativas. Pode-se, por exemplo, mudar a sequência dos pulsos para obter as linhas e colunas da imagem, ou usar um maior número de bobinas receptoras. Dependendo do número de bobinas receptoras, o IRM pode ser classificado como monocanal ou multicanal. (DEKA; DATTA, 2019)

O IRM monocanal utiliza uma única bobina receptora com sensibilidade uniforme sobre o campo de visão da máquina (DEKA; DATTA, 2019). Essa única bobina receptora adquire o

espaço inteiro da imagem. O IRM monocanal é dividido em duas categorias, sendo elas eco único e multieco. Isso acontece porque parâmetros diferentes do IRM produzem, para um mesmo tecido, valores de pixels diferentes. Então o que se faz para ter um contraste desejável é adquirir várias medições e realizar um ajuste de curva em cima de cada valor adquirido. Se for um único eco no monocanal, esse processo leva tempo considerável.

Logo, IRM monocanal multieco é usado para suprimir essa ineficiência. A ideia do multieco é coletar múltiplos ecos dentro de um tempo de repetição da onda RF. Além de resolver a ineficiência, a imagem por monocanal multieco possui melhor contraste entre tecidos distintos, o que torna mais fácil o diagnóstico (DEKA; DATTA, 2019).

Uma limitação da aquisição monocanal é que o corpo não aguenta a mudança rápida dos campos magnéticos para adquirir os múltiplos ecos, porque isso causa reações fisiológicas. Deste modo, outra maneira de obter imagens de RM é a partir de imageamento multicanal.

Uma das diferenças entre monocanal e multicanal é que na última existem múltiplas bobinas receptoras em paralelo (DEKA; DATTA, 2019). As bobinas são distribuídas espacialmente pelo equipamento e elas obtêm medições ao mesmo tempo, de forma que a imagem é construída paralelamente. Sem entrar em muitos detalhes de técnicas diferentes para multicanal, o essencial é a tentativa de aplicar várias medições de fatias do paciente em um único intervalo.

No entanto, há limitações práticas para essa maneira de adquirir imagens por RM. É preciso saber a sensibilidade de cada bobina individualmente e, na prática, essa é uma informação complicada de se obter. Assim, IRM por multicanal é uma área ainda em desenvolvimento (DEKA; DATTA, 2019).

Apesar de equipamentos de IRM já possuírem implementações comerciais onde considera-se a aceleração do processo de imageamento, nota-se que ainda há espaço para inovações e avanços para acelerar o mesmo. Além disso, as limitações mencionadas têm a ver com o *hardware* e a construção ou avaliação dos parâmetros das bobinas, ou a quantidade de mudanças de "ressonância" que o corpo aguenta até que sejam estimulados os nervos periféricos.

Por isso, analisam-se outras possibilidades para acelerar o processo. Se o *hardware* tem limitações, será que *software* poderia oferecer alguma melhoria?

Surpreendentemente, a resposta é sim, e depende das características dos sinais biomédicos.

#### 1.1.4 Amostragem compressiva em ressonância magnética

Amostragem compressiva faz parte da área de processamento de sinais e teoria da informação. A técnica propõe determinar uma versão equivalentemente esparsa (ou comprimida) de um sinal que se deseja adquirir de forma a se ter poucas medições em comparação com o tamanho total do sinal, e restaurar o sinal original a partir da versão comprimida. Essa busca pelo sinal comprimido ocorre na amostragem, por isso o nome amostragem compressiva. Assim como a amostragem uniforme possui restrição para garantir a restauração do sinal, a amostragem compressiva também tem uma restrição: é necessário que o sinal amostrado tenha a característica de esparsidade.

Sinais de imagem biomédicas são compressíveis porque até com taxas de alta compressão, da ordem de 8:1, eles mantêm sua qualidade de imagem sem degradação perceptível e por isso permanecem úteis para diagnóstico e prognóstico (VASANAWALA et al., 2010). Portanto, sua característica de compressibilidade é de suma importância para usar a solução por *software* para adquirir imagens por RM.

Por buscar pela compressão de sinal esparsa, a amostragem compressiva pode ter algoritmos que promovam uma aquisição de dados mais rápida e eficiente por precisarem de menos amostras para recuperarem o sinal (CANDÈS; WAKIN, 2008). Essa é a "mágica" de amostragem compressiva.

O IRM e amostragem compressiva combinam porque imagens por RM têm esparsidade em bases como wavelets ou transformada discreta de cossenos (DEKA; DATTA, 2019), o que satisfaz um pré-requisito para a aquisição por amostragem compressiva.

Além disso, quando a amostragem compressiva usa uma matriz de medição aleatória, existe a garantia de que imagens por RM possuam artefatos<sup>1</sup> que são incoerentes com o resultado do exame desejado. Ou seja, artefatos na imagem por RM não podem lembrar possíveis patologias, já que uma interpretação de um artefato que poluiu a imagem reconstruída e lembra uma característica de patologia pode prejudicar o diagnóstico do exame, e um artefato aleatório tem pouca probabilidade de lembrar uma patologia (DEKA; DATTA, 2019).

---

<sup>1</sup> Artefatos são traços que aparecem na imagem obtida e não na original.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é adquirir o conhecimento da técnica de amostragem compressiva e como funciona a reconstrução de um sinal esparso após a obtenção do mesmo. A classe de sinais será imagens biomédicas da cabeça feitas por imageamento por ressonância magnética. Além disso, espera-se mostrar que a amostragem compressiva é uma técnica viável a ser aplicada quando se sabe a característica de esparsidade do sinal, e que possui relevância para a área de telecomunicações porque sua aplicação não se restringe à imagens biomédicas; é uma técnica feita para adquirir informação de uma maneira diferente da amostragem tradicional de Nyquist-Shannon.

Para imagens médicas, erros de recuperação incoerentes<sup>2</sup> não afetam tanto a interpretação e leitura da imagem. Assim, um algoritmo que consiga recuperar a imagem do exame em menos tempo com um certo limiar de ruído ainda pode ter utilidade. Deseja-se mostrar que esse algoritmo é capaz de reconstruir uma imagem próxima à original a partir do gradiente do lagrangeano de uma função objetiva.

Quando a aplicação da amostragem compressiva é relevante<sup>3</sup>, o número de amostras na amostragem compressiva tem o potencial de ser muito menor que o número de amostras necessárias para amostragem uniforme e, por isso, o tempo de exames pode ser menor quando a técnica é aplicada em exames médicos no lugar da amostragem uniforme.

## 1.3 CONTEÚDO

O trabalho está dividido em introdução e delimitação do tema no Capítulo 1, desenvolvimento do tema e explicações sobre como funciona a amostragem compressiva no Capítulo 2, modelagem matemática do algoritmo do gradiente para recuperação do sinal por amostragem compressiva no Capítulo 3, resultados sobre três tipos de imagens como entrada do algoritmo do gradiente no Capítulo 4. A conclusão termina o trabalho no Capítulo 5.

---

<sup>2</sup> Aqueles erros que lembram traços aleatórios e não partes orgânicas em imagens médicas.

<sup>3</sup> Quando há um sinal esparso a ser recuperado.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 AMOSTRAGEM COMPRESSIVA PARA OBTER UMA IMAGEM SIGNIFICATIVA COM MENOS AMOSTRAS

Métodos de compressão ajudam a diminuir o tempo que leva para transferir dados através de um canal de comunicação (SALOMON, 2004). No entanto, não afetam a aquisição do sinal justamente porque os algoritmos atuam sobre sinais previamente amostrados. Amostragem compressiva lida com essa melhora na velocidade de obtenção do sinal ao realizar o processo de compressão durante a aquisição dele. Por vezes essa maneira é vantajosa porque permite que se opere com uma menor quantidade de informação.

A amostragem compressiva depende da suposição que o sinal é esparso ou possui alguma medida de esparsidade ao ser compressível. Há momentos que isso pode ser uma desvantagem, porque é uma característica que depende do sinal ao invés do sistema. Isso torna diferente a condição da amostragem compressiva em comparação a amostragem uniforme, porque para amostragem uniforme a frequência de amostragem depende do sistema que adquire a informação e não do sinal.

O problema de amostragem compressiva é relevante porque propõe uma maneira diferente de adquirir e reconstruir sinais sem precisar amostrar o sinal a uma frequência duas vezes maior que a largura de banda do mesmo. É outra maneira de adquirir informação, fundamentalmente diferente da amostragem "ouvir a cada pequeno instante ( $f \leq 2B$ )".

Sem utilizar amostragem compressiva, o método convencional para conseguir um sinal comprimido a partir da amostragem uniforme era usá-la para adquirir o sinal não esparso com  $N$  coeficientes, calcular os  $N$  coeficientes de transformada para um domínio esparso, e manter os  $k$  maiores coeficientes enquanto se descarta os componentes mais próximos de zero. Essa abordagem possui ineficiências (BARANIUK, 2007): obter  $N$  componentes e descartar a maioria é ineficiente se for possível adquirir direto os  $k$  coeficientes do sinal comprimido. Essas ineficiências ocorrem principalmente quando a dimensão  $N$  é muito maior que  $k$ .

O objetivo de amostragem compressiva é realizar menos medições  $m$  que o total de coeficientes  $N$  do sinal e representá-lo a partir da sua esparsidade sem precisar adquirir os  $N$  componentes.

Ao juntar os passos para ter um sinal compressivo e amostrá-lo, a técnica traz uma

melhoria na obtenção de um sinal, dado que a suposição dele ser esparso ou compressível esteja satisfeita. Usa menos amostras e não precisa de *overhead* para anotar onde estão os elementos. Isso traz importância porque na prática mais amostras podem significar mais tempo de medição e custos maiores quando se usam mais sensores (DAVENPORT et al., 2012). Logo, seu uso ocorre em locais onde os sensores ou método de medição são caros e o cálculo para a reconstrução do sinal no receptor é relativamente curto (BARANIUK, 2007). Em outras palavras, é propício para IRM.

O instigante na amostragem compressiva é que não se sabe onde estão as amostras que representam o sinal esparso, o que traz um desafio à sua aplicação, já que precisamos de uma maneira de adquirir essas amostras significativas para conseguir reconstruir o sinal esparso. Se a noção do local onde cada amostra significativa fosse conhecida, seria um problema trivial. Ao saber onde está cada amostra diferente de zero de um vetor esparso, seria só selecioná-las e descartar os coeficientes nulos.

Ao não saber onde ficam as amostras significativas e tentar resolver para uma situação mais geral, pode-se aplicar para sinais mais abrangentes, classes de sinais esparsos que tenham a possibilidade de reconstrução. Ou seja, a ideia é aplicar a técnica em qualquer sinal que possa ser comprimido, sem saber onde estão os elementos para que sirva para qualquer vetor esparso.

Amostragem compressiva não vem para substituir a amostragem uniforme pelo fato que sua aplicação é específica para sinais compressíveis. É uma alternativa para quando houver essa informação sobre o sinal.

### **2.1.1 Amostragem Uniforme**

A amostragem uniforme é uma técnica para converter um sinal contínuo em um sinal discreto. Ela estabelece uma condição suficiente, mas não necessária, para restauração do sinal contínuo. A condição típica na frequência é um intervalo entre as amostras em uma frequência pelo menos duas vezes maior que a banda de frequência do sinal para garantir a reconstrução completa do mesmo.

Essa é uma maneira conhecida de se adquirir sinais no mundo real, e é ensinada de acordo com a teoria da informação. Por causa da condição, a frequência em que as amostras devem ser realizadas depende da largura de banda do sinal. Quanto maior a largura de banda de um sinal, maior a densidade de amostras que a amostragem uniforme precisará para reconstruí-lo.

O campo da teoria da informação teve grandes avanços com o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon (SHANNON, 1948), porque a suposição da amostragem uniforme permite adquirir sinais através de canais de comunicação ou através de sensores e garante que haja a recuperação do sinal original reconstruído. Para que seja possível adquirir o sinal completo, existem condições a serem alcançadas. Seja  $f_s$  a frequência de amostragem e  $B$  a largura da banda de frequência do sinal. Assim, o teorema de Nyquist-Shannon descreve:

$$f_s \geq 2B \quad (2.1)$$

A particularidade da amostragem com essa condição é que se a taxa de amostragem for elevada, há um número significativo de amostras (DAVENPORT et al., 2012). O tempo para adquirir o sinal por completo aumenta conforme mais amostras são consideradas. Há certas aplicações que desejam adquirir um sinal fiel ao original através de um processo rápido e confiável, como é o caso na obtenção de imagens médicas já que mais amostras significam maior tempo de exame (WANG et al., 2012). Nos casos médicos e exames de IRM, um tempo menor é desejado pois o paciente pode ficar menos tempo sujeito ao exame; pode ser difícil para crianças ficarem paradas durante o exame, ou para pacientes de coração manterem a respiração presa por dois minutos para manter a caixa torácica o mais imóvel possível.

O detalhe relevante para o campo da amostragem compressiva é que a condição da amostragem uniforme para a obtenção e reconstrução do sinal é suficiente, mas não é *necessária*.

### 2.1.2 Sinais Podem ser Comprimidos

Considerando que existe essa procura por um processo de obtenção de sinais com uma duração mais curta possível, outro ponto importante a se contemplar é que alguns sinais que ocorrem na natureza possuem informações redundantes ou até insignificantes em relação ao seu conteúdo inteligível. Isso fica evidente porque existe o ramo de conhecimento que estuda a compressão de sinais, onde certas partes do sinal podem ser removidas porque são redundantes (SALOMON, 2004).

Há dois tipos de compressão: compressão sem perdas e compressão com perdas (SALOMON, 2004). O objetivo da compressão sem perdas é a recuperação exata da informação comprimida e é utilizada em tipos de arquivos como zip, rar, 7z, dentre outros, enquanto que a opção de compressão com perdas é uma escolha viável porque, mesmo com perdas na compactação, seres humanos não percebem diferenças entre o sinal pré e pós compactação, e é utilizada

em arquivos de imagens e áudio como mp3, mp4, jpeg, etc.

Portanto, há vantagens em combinar a amostragem de sinais com a sua compressão. Por exemplo, há menor custo dos conversores analógico-digitais pois, em média, menos amostras são convertidas. Também há a vantagem de menor uso de memória para armazenar esses sinais em memória volátil.

A possibilidade de desprezar parte da informação de um sinal, mantendo sua integridade, denomina o sinal como um sinal compressível, que pode ser comprimido. Em especial, essa característica acontece em sinais biomédicos (VASANAWALA et al., 2010).

### 2.1.3 Esparsidade

A esparsidade é uma ideia abstrata de quanto um objeto (ou local) está preenchido, e está relacionada ao conceito de que sinais podem ser comprimidos. Por exemplo, um cinema com restrições devido à COVID19 não podia ser preenchido completamente, e assim sua esparsidade indicava a quantidade de cadeiras ocupadas —e, por consequência, deixaria implícito que haveriam cadeiras vazias. Na matemática, essa definição pode ser aplicada a vetores, onde são chamados vetores  $k$ -esparsos quando possuem  $k$  elementos diferentes de zero.

Define-se um vetor  $\mathbf{x}$  no espaço  $\mathbb{R}^N$  com  $N$  coeficientes como

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T \quad (2.2)$$

Esse vetor é considerado  $k$ -esparso quando apresenta somente  $k < N$  elementos não-nulos e  $(N - k)$  elementos nulos. Em geral, não se sabe os índices dos elementos não-nulos. Outra forma de colocar essa declaração é que as posições dos  $k$  coeficientes não-nulos são desconhecidas.

Acontece que informações obtidas do mundo real seguidamente são aproximadamente esparsas (ROUGHGARDEN; VALIANT, 2021). Assim, é interessante considerar um tipo de vetor que pode ser aproximado por um vetor esparso, cuja denominação é vetor compressível. Em relação ao exemplo do cinema, pode-se dizer que vetores compressíveis seriam uma sala de cinema com cadeiras preenchidas parcialmente com, digamos, objetos deixados pelos ocupantes de outras cadeiras. Elas têm alguma maneira de ocupação, porém podem ser aproximadas por uma sala de cinema só com pessoas ao se desprezar as cadeiras parcialmente preenchidas.

Em termos matemáticos, desconsideram-se coeficientes abaixo de um limiar, o que transforma um vetor compressível em um vetor esparso. Essa aproximação é viável quando um

vetor possui elementos com valores muito próximos de zero que, por sua vez, são aproximados ao serem zerados. Essa condição pode ocorrer em domínios alternativos como transformadas de Fourier, wavelet, cosseno, Hilbert, etc, ou em vetores representados em bases não-canônicas.

A noção de compressibilidade é útil ao se adquirir sinais na natureza porque sinais esparsos são uma condição muito forte para impor a esses sinais.

Quando o sinal é esparsos ou aproximadamente esparsos, capturar todas as amostras de um vetor  $\boldsymbol{x}$  usa recursos desnecessários, porque se há elementos nulos, não é preciso capturá-los pois sabe-se que seus valores são iguais a zero. Pode-se dizer que  $(N - k)$  elementos do vetor não possuem peso para afetar a representação do vetor  $\boldsymbol{x}$ , já que são nulos; os elementos que influenciam a representação são os  $k$  diferentes de zero e a informação de onde estão distribuídos.

#### **2.1.4 E se capturar direto sinais esparsos?**

Capturar direto sinais esparsos seria valioso precisamente porque diminuiria-se a quantidade de recursos gastos de forma a manter somente o necessário para representação do sinal, o que aumentaria a eficiência da captura de informações do mesmo.

A teoria da amostragem compressiva mostra que recuperar sinais e imagens com menos amostras em relação a técnicas de amostragem tradicional é, de fato, possível (CANDÈS; WAKIN, 2008).

Nota-se a importância da esparsidade para garantir que se recupere sinais com menos amostras; a esparsidade ou compressibilidade de um sinal proporciona a reconstrução do mesmo através da amostragem compressiva porque um sinal esparsos sempre vai estar contido em um subespaço do tamanho total possível.

Como a dimensão do subespaço é menor —pois há elementos nulos no sinal— que a do espaço vetorial completo, são necessários menos coeficientes para descrever o sinal. Quando ocorrer a reconstrução, se há conhecimento sobre o subespaço e quais são os coeficientes, o sinal é reconstruído sem perdas.

##### *2.1.4.1 E se não forem esparsos?*

Quando não há esparsidade no sinal a ser capturado, a amostragem compressiva não pode realizar a reconstrução. Felizmente, concebe-se que existem representações dos sinais em bases diferentes ou a partir de transformações que as tornam esparsas ou compressíveis.

Caso o vetor não seja esparso, há pelo menos três opções: pode ser esparso em outra base, ou é compressível e pode ser tornado esparso por aproximação. Caso contrário, sem a compressão do sinal, a amostragem compressiva se reduz a amostragem aleatória, quando se considera somente a aquisição do sinal e não sua reconstrução (HAJAR et al., 2019).

Uma das bases para representar um sinal é uma base trivial, onde o próprio sinal se representa como vetor de base, ao usá-lo como vetor de base escalonado com um coeficiente, enquanto que cada outro vetor da base fique multiplicado por zero.

Uma base vetorial é um conjunto mínimo de vetores que cobre o espaço vetorial completo (MEYER, 2001), de forma que representa-se qualquer outro vetor dentro desse espaço de maneira completa somente com uma combinação linear dos vetores base. Para um espaço vetorial, existem infinitas bases vetoriais possíveis que podem representar o mesmo espaço (MEYER, 2001). Seja  $\mathbf{u}$  um vetor qualquer dentro do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Ele é representado pelos vetores de base na Equação (2.3).

$$\mathbf{u} = a_0\mathbf{b}_0 + a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} \quad (2.3)$$

Sendo  $\mathbf{b}_k$  o  $k$ -ésimo vetor da base no  $\mathbb{R}^n$  e  $a_k$  o coeficiente associado ao vetor da base específico.

A base trivial não soluciona problemas gerais, porque essa base é específica para um só sinal. Um sistema é feito para lidar com vários sinais diferentes, então esse tipo de base não contribui para um resultado para uma classe de sinais. Ao encontrar uma base para comprimir um sinal de um joelho, não há garantia que essa mesma base irá comprimir um sinal de um pulmão, por exemplo.

Além disso, pode ser que o sinal seja esparso em uma base *não conhecida*, e assim é preciso encontrar uma base adequada para representar a esparsidade para que a amostragem compressiva possa ser utilizada. Uma maneira de encontrar bases para conjuntos de dados é a partir da análise de componentes principais (MEYER, 2001). A princípio, apenas vetores aleatórios em que seus componentes são amostras de um ruído branco não podem ser comprimidos (PAPOULIS; PILLAI, 2002).

Por isso é importante considerar a classe dos sinais e encontrar as características em comum para esses tipos de sinais biomédicos de forma que seja possível usar uma base "biomédica" e representar qualquer sinal que entrar no sistema como compressível. Para o caso de sinais biomédicos (VASANAWALA et al., 2010), sabe-se que são compressíveis em bases wa-

velet e que sua representação compressível não acarreta em perda de informação no diagnóstico a partir da imagem.

### 2.1.5 Adquirir sinal ou medições esparsas

O objetivo de amostragem compressiva é encontrar como e quando pode-se reconstruir um sinal com menos medidas que o tamanho completo dele ao supor que ele é esparsos em algum domínio (VASWANI, 2022). Essa suposição é importante porque o processo de reconstrução recupera um sinal esparsos.

Assim, a esparsidade é a primeira condição para amostragem compressiva.

Quando os sinais possuem característica esparsa ou compressível<sup>4</sup>, a amostragem compressiva permite adquirir o sinal e reconstruí-lo com um número consideravelmente menor de amostras que o teorema de Nyquist-Shannon. Portanto, combina-se a saída esparsa com a restrição que a entrada é esparsa também. Assim se garante que o resultado é o mais próximo do original.

A segunda condição para amostragem compressiva é a incoerência entre a matriz de medição e uma base que transforma um sinal não esparsos em um sinal esparsos, já que há momentos em que o sinal possui características esparsas quando é representado em uma base diferente.

A característica dessa base de trazer o sinal para um espaço menor é chamada de incoerência e expressa a ideia de um sinal estar espalhado em um domínio e comprimido em outro (CANDÈS; WAKIN, 2008). Matrizes de medição aleatórias satisfazem a condição de incoerência porque sua aleatoriedade torna complicado serem similares e coerentes com outros vetores e matrizes, o que é desejável para amostragem compressiva pois garante uma solução estável (BARANIUK, 2007).

#### 2.1.5.1 Como adquirir diretamente as medições compressivas?

Primeiro, a amostragem compressiva adquire as amostras através da operação de produto interno entre uma matriz de medição e o vetor original  $\mathbf{x}$  de  $N$  coeficientes. O produto interno atribui peso para cada elemento-amostra do vetor de amostras  $\mathbf{y}$ , e a quantidade de elementos no vetor de amostras  $\mathbf{y}$  é  $m$ , sendo  $m \ll N$  para ter menos amostras que o total de elementos no vetor original  $\mathbf{x}$ .

<sup>4</sup> No caso de compressibilidade, existe a possibilidade de desconsiderar aquelas partes ou elementos que possuem pouca energia e manter somente aquelas que tenham alta energia.

Considera-se que o vetor de amostras  $\mathbf{y}$  recebe  $m$  medições por meio de combinações lineares dos elementos de  $\mathbf{x}$

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_{jk} x_k \quad (2.4)$$

Definindo  $\mathbf{y}$  como

$$\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{m-1}]^\top \quad (2.5)$$

A obtenção das amostras é feita a partir de uma matriz de medição. Seja a matriz de medição  $\mathbf{A}$  definida como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ela possui menos linhas que colunas e mapeia o sinal de entrada  $\mathbf{x}$  do  $\mathbb{R}^N$  para  $\mathbb{R}^m$ . A matriz de medição é aleatória para satisfazer a condição de incoerência.

Ao se obter os produtos internos e colocá-los no sinal de amostras  $\mathbf{y}$ , estrutura-se um sistema de equações lineares da forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.7)$$

Esse sistema de equações lineares possui  $m$  equações e  $k$  incógnitas (devido à  $k$ -esparsidade de  $\mathbf{x}$ ). Existe a garantia de solução da Equação (2.7) desde que as  $m$  equações lineares sejam linearmente independentes e  $m > 3k$  (FOUCART; RAUHUT, 2013). O sistema de equações lineares subdeterminado restringe a solução a um subespaço de  $\mathbb{R}^N$ , e uma discussão mais detalhada de subespaços e sistemas de equações lineares será discutida na Seção 2.2.

Os produtos internos permitem medir a similaridade entre dois vetores e, assim, o vetor  $\mathbf{y}$  é composto por essas "medidas de similaridade". Em outras palavras, os produtos internos apresentam a correlação entre os vetores linhas de medição da  $\mathbf{A}$  e o vetor original  $\mathbf{x}$  (CANDÈS; WAKIN, 2008).

É preciso mais que uma medição porque, em geral,  $k$  é maior que 1, e somente com  $m > 3k$  se garante a recuperação do sinal original.

As medições ocorrem em todos os índices do vetor original  $\mathbf{x}$  com pesos aleatórios<sup>5</sup>, porque precisa-se do máximo possível de informações sobre o vetor considerando o menor número de medições viável.

<sup>5</sup> Dependendo da distribuição estatística da matriz de medição, existe a possibilidade do peso ser igual a zero.

A seleção das amostras depende do valor dos coeficientes da matriz de medição  $\mathbf{A}$ . Quando o valor específico de  $a_{jk}$  é nulo, então a  $k$ -ésima amostra não contribui para a formação de  $y_j$ . Isso leva a um cenário interessante: se a seleção de amostras para  $\mathbf{y}$  ocorrer em ordem crescente na Equação (2.6) —como se fosse uma matriz identidade— significa que os coeficientes  $a_{jk}$  são

$$a_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

e essa seleção dos  $m$  primeiros elementos de  $\mathbf{x}$  decorre na perda de informações, já que as amostras de  $m + 1$  até  $N$  não influenciam na amostra adquirida. Não há informação sobre os elementos diferentes de zero que não foram capturados por essas linhas. Como se espera que a medição seja válida para qualquer vetor, realiza-se o produto interno entre cada linha  $a_{(0\dots m-1)}$  e  $\mathbf{x}$ , para que o vetor de amostras  $\mathbf{y}$  possua os resultados dos produtos internos. Portanto, uma matriz preenchida com valores diferentes de zero é mais apropriada.

O processo de aquisição das medidas de similaridade no vetor  $\mathbf{y}$  na Equação (2.7) considera implicitamente que o sinal  $\mathbf{x}$  é esparso. No entanto, pode não ser o caso, e assim é necessário transformar da versão não esparsa  $\mathbf{v}$  para a representação esparsa  $\mathbf{x}$  com uma matriz de mudança de base  $\Psi$  conforme a Equação (2.8):

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{v} \tag{2.8}$$

Juntando as Equações (2.7) e (2.8), tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\Psi \mathbf{v} \tag{2.9}$$

A Equação (2.9) com ambas as matrizes é uma situação geral. É importante haver incoerência entre as matrizes, porque faz parte da garantia da reconstrução. Uma propriedade que é considerada sobre a matriz resultante é a propriedade da isometria restrita, e será estabelecida na Subseção 2.1.5.2, assim como a noção de incoerência entre matrizes. Para essa seção, nota-se que existem matrizes aleatórias que satisfazem ambas as propriedades e por isso são usadas como matrizes de medição. Para simplificar a notação, considera-se que o vetor  $\mathbf{x}$  na Equação (2.7) é esparso sem definir qual é a matriz  $\Psi$ .

As medições realizadas pela matriz de medição são lineares e não adaptativas. As medições adaptativas, aquelas que dependem de dados observados anteriormente, não necessariamente trazem melhorias na performance da técnica em geral (FOUCART; RAUHUT, 2013).

Portanto, gerar a matriz aleatória uma vez é suficiente para a reconstrução de *qualquer* sinal esparso, pois a matriz de medição não depende do sinal que irá medir.

Uma matriz de medição estável é indispensável (BARANIUK, 2007) para que a redução de dimensionalidade de  $\mathbb{R}^N$  para  $\mathbb{R}^m$  não danifique a informação essencial do sinal compressível ou esparso. Uma forma de projetar uma matriz de medição estável é ao considerar a propriedade da isometria restrita.

Essa propriedade aparece porque considera-se uma matriz de medição  $\mathbf{A}$  como sendo responsável por adquirir valores de  $\mathbf{x}$  para possibilitar uma reconstrução.

### 2.1.5.2 Propriedade da Isometria Restrita

Isometria significa "igualdade de dimensões"(FOUCART; RAUHUT, 2013). Para o caso da propriedade da isometria restrita (PIR) em amostragem compressiva, a dimensão a ser mantida igual é a distância entre vetores esparsos arbitrários. A escolha da matriz de medição, de acordo com a Equação (2.9),

$$\Theta = \mathbf{A}\Psi$$

depende dessa propriedade porque ela precisa conservar a distância entre qualquer vetor esparso considerado como solução. Além disso, quando o vetor original  $\mathbf{x}$  é esparso, a matriz de transformação  $\Psi$  é igual à matriz identidade, e por isso a matriz  $\Theta$  é igual à própria matriz de medição  $\mathbf{A}$ .

Em geral, não se sabe a posição dos  $k$  elementos não nulos do vetor, e espera-se uma recuperação estável do sinal original. O tipo de matriz que faz isso com alta probabilidade são matrizes aleatórias com distribuições gaussianas ou de Bernoulli (FOUCART; RAUHUT, 2013). Quando a matriz de medição  $\mathbf{A}$  é aleatória, existe a garantia que as linhas da matriz são linearmente independentes.

Assim, a PIR é conforme a Equação (2.10) (BARANIUK, 2007), estando restrita conforme uma constante  $\epsilon$  e um vetor  $k$ -esparso arbitrário  $\mathbf{u}$ . A distância é considerada através da norma  $l_2$  ou euclidiana.

$$1 - \epsilon \leq \frac{\|\Theta\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq 1 + \epsilon \quad (2.10)$$

$$\epsilon > 0$$

A constante  $\epsilon$  é o menor valor que satisfaz a equação (2.10) (DEKA; DATTA, 2019). Além disso, o mais importante é limitar a matriz  $\Theta$ , pois é a partir dela que ocorre a amostragem compressiva e a subsequente aquisição do vetor  $\mathbf{y}$ .

Como ela preserva a distância entre dois vetores  $\mathbf{u}$  quaisquer  $k$ -esparsos, o pior caso é quando nenhum dos elementos entre os dois vetores compartilha posição entre seus elementos não nulos. Nesse caso, quando se combinam ambos os vetores  $k$ -esparsos em um só, existem  $2k$ -posições diferentes de zero. Ao garantir que a matriz  $\Theta$  é estável para vetores  $2k$  esparsos, certifica-se que ela será esparsa para vetores  $k$  esparsos (DAVENPORT et al., 2012). Se a matriz de medição tiver a propriedade de isometria restrita, ela não amplifica a distância entre esses dois vetores esparsos quaisquer.

A característica de incoerência entre duas matrizes é relacionada à PIR, e dita que as linhas da matriz de medição  $\mathbf{A}$  não podem representar esparsamente as colunas da matriz de transformação  $\Psi$  (BARANIUK, 2007).

Sobre as características da matriz de medição, a PIR é mais completa que a medida de coerência de uma matriz (FOUCART; RAUHUT, 2013). Em contrapartida, a incoerência entre matrizes é mais fácil de se testar (DAVENPORT et al., 2012), pois não precisa passar por subconjuntos  $\binom{N}{k}$  da matriz.

No entanto, tanto a PIR quanto a incoerência têm altas chances de serem alcançadas quando a matriz de medição é aleatória. Especialmente quando a matriz de medição  $\mathbf{A}$  for uma matriz gaussiana com variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, a PIR garante que a matriz está dentro desse intervalo quando um vetor arbitrário  $3k$ -esparso é escolhido (BARANIUK, 2007).

Além disso, é necessário que a quantidade mínima de medições  $m$  seja como na Equação (2.11) para garantir a reconstrução do sinal original. A quantidade mínima depende da esparsidade  $k$  do sinal, do tamanho  $N$  do sinal e de uma constante  $C$ .

$$m \geq Ck \log \left( \frac{N}{k} \right) \quad (2.11)$$

e

$$m \ll N$$

O coeficiente  $C$  que aparece na equação (2.11) não influencia no número de medições necessárias para a reconstrução do sinal original tanto quanto a esparsidade  $k$  do sinal. O

crescimento é aproximado e assintótico, de forma que um valor exato para a constante não é tão relevante.

## 2.2 RESTAURAÇÃO DO SINAL EM AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Após obter as amostras do sinal original  $\mathbf{x}$  a partir da matriz de medição  $\mathbf{A}$ , o sinal é reconstruído a partir das projeções lineares não adaptativas usando um processo de otimização (BARANIUK, 2007). Esse processo leva a um sistema de equações lineares subdeterminado por causa da subamostragem na região vetorial ( $m \ll N$ ), pois há  $m$  equações e  $N$  incógnitas. A reconstrução consegue recuperar um sinal único quando supõe-se que o sinal a ser recuperado é esparso.

Ao considerar que o sinal é esparso ou equivalentemente esparso, então o processo consiste em reconstruir o sinal  $\mathbf{x}$  a partir das  $m$  medições  $\mathbf{y}$ , da matriz de amostragem e da matriz de base. A equação a ser resolvida é

$$\mathbf{Az} = \mathbf{y} \quad (2.12)$$

Sendo  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ . Não se sabe o vetor original  $\mathbf{x}$ , somente o vetor  $\mathbf{y}$ . A partir do vetor de medições  $\mathbf{y}$  que acontece a reconstrução para encontrar um argumento que minimize um vetor resposta  $\mathbf{z}$ . Esse vetor será o próprio vetor original, se a reconstrução der certo.

Para garantir a recuperação do sinal com um número de amostras significativamente menor, o sinal precisa ter esparsidade ou ser possível receber compressão (CANDÈS; WAKIN, 2008), pois a equação (2.12) é um sistema de equações lineares subdeterminado. O vetor  $\mathbf{y}$  de uma maneira geral identifica um hiperplano em uma orientação aleatória por causa da aleatoriedade matriz de medição  $\mathbf{A}$  (BARANIUK, 2007). A esparsidade do sinal original, junto com projeções ortogonais e a noção de hiperplanos, determina quão eficientemente se encontra uma solução única para o sistema subdeterminado (CANDÈS; WAKIN, 2008).

### 2.2.1 Sistema de Equações Lineares e Hiperplano de Soluções

A Equação (2.12) indica um sistema de equações lineares com  $N$  incógnitas em  $\mathbf{z}$  e  $m$  equações. Quando há menos equações lineares que incógnitas, o sistema de equações lineares é classificado como um sistema subdeterminado (MEYER, 2001). Essa classificação implica que

existem infinitas soluções para o sistema de equações lineares, já que "faltam" informações para encontrar uma solução única.

O motivo do sistema de equações lineares ser subdeterminado é porque ele transforma um sinal com  $N$  elementos de um espaço  $\mathbb{R}^N$  para um espaço  $\mathbb{R}^m$ . O espaço de dimensão  $m$  é menor, talvez até muito menor, que o espaço com dimensão  $N$ , e assim o sistema linear possui infinitas soluções.

Nesse caso, a amostragem compressiva garante a reconstrução do sinal esparso. Contudo, somente dispor da esparsidade e do sistema de equações lineares junto com a aquisição do vetor de amostras  $\mathbf{y}$  não é suficiente para encontrar uma solução. É preciso um processo para recuperar o sinal.

Esse processo é uma otimização da solução do sistema de equações lineares. Por saber que a resposta final será esparsa, a ideia é minimizar o número de elementos não nulos do vetor  $\mathbf{z}$ . A esse tipo de otimização também se nomeia programação linear (CANDÈS; TAO, 2005). Para desbloquear esse processo, existe a noção de hiperplanos, já que as infinitas possibilidades de solução do sistema de equações lineares subdeterminado formam um hiperplano no espaço vetorial  $\mathbb{R}^N$ .

Para definir um hiperplano, começa-se com a ideia de um plano no  $\mathbb{R}^3$ . Esse plano é definido por dois vetores linearmente independentes que são ortogonais a um terceiro vetor, o chamado de normal ao plano formado pelos dois primeiros vetores. Com a base canônica no  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo, há um plano formado pelos vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , sendo o vetor normal  $\mathbf{z}$ . Esse é só um plano e uma orientação dentre as infinitas orientações para infinitos planos em cada espaço vetorial (MEYER, 2001).

Quando o espaço vetorial é  $\mathbb{R}^N$ , com  $N > 3$ , planos nessa dimensão são chamados de hiperplanos (BINMORE, 1981).

Sintetizando a noção de hiperplanos, a obtenção das amostras  $\mathbf{y}$  a partir da matriz de medição  $\mathbf{A}$  resulta em um hiperplano composto por infinitas soluções porque o sistema de equações lineares é subdeterminado e tem  $(N - m)$  graus de liberdade, enquanto que a esparsidade permite encontrar uma só resposta, desde que  $m$  seja maior que  $k$ . Por fim, a formação do hiperplano não resulta em perda de informação porque o sinal é esparso. Esse conceito será trabalhado na Subseção 2.2.2.

Outra interpretação sobre o surgimento do hiperplano no problema da reconstrução em amostragem compressiva é o espaço nulo. O espaço nulo de uma matriz consiste no conjunto

de vetores que ela não representa (MEYER, 2001). Por exemplo, o vetor de amostras  $\mathbf{y}$  tem  $m$  medições tiradas de um espaço  $\mathbb{R}^N$  através da matriz de medição. O espaço nulo consiste, portanto, em vetores que se encontram em um espaço nulo de dimensão  $N - m$ . Em termos matemáticos, se um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$  está no espaço nulo de  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Em outras palavras, o caso da matriz de medição  $\mathbf{A}$  em amostragem compressiva possui espaço nulo, definido de acordo com a Equação (2.13), porque há somente  $m$  vetores linha na matriz e, por isso, faltam  $N - m$  vetores para representar o espaço vetorial  $\mathbb{R}^N$  completo.

A existência do espaço nulo permite que o vetor  $\mathbf{z}$  seja representado por uma parcela ( $\mathbf{z}_R$ ) que satisfaz a restrição da Equação (2.12) e outra parcela ortogonal à anterior ( $\mathbf{z}_{EN}$ ) alinhada ao espaço nulo.

### 2.2.2 Representação da Solução

Para representar a solução e considerar o espaço nulo, projeções ortogonais são usadas. O uso delas é feito como uma ferramenta matemática e se aproveita das definições em (MEYER, 2001), que não serão discutidas em detalhes nesse trabalho. Todavia, alguns resultados notáveis de projeções ortogonais serão mostrados a seguir, pois serão utilizadas na busca por soluções. Nesse sentido, nota-se que as projeções ortogonais dividem um espaço vetorial em dois subespaços complementares e ortogonais.

Assim, o vetor  $\mathbf{z}$  da Equação (2.12) é representado com uma matriz de projeção  $\mathbf{P}$  e matriz identidade  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{z} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{z} \quad (2.14)$$

Quando a projeção é ortogonal, os elementos da soma da Equação (2.14) são ortogonais e alinhados a espaços vetoriais ortogonais.

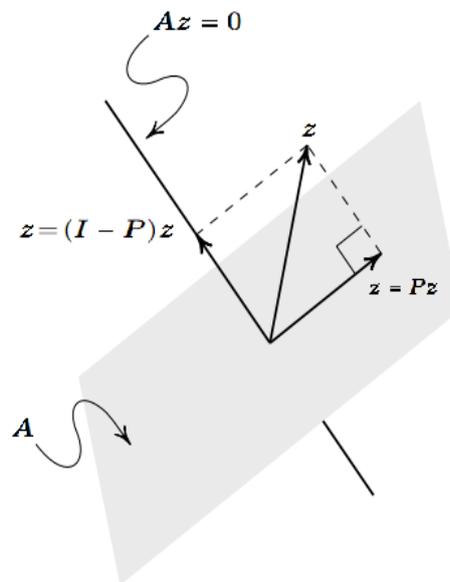
A matriz de projeção  $\mathbf{P}$  e sua matriz ortogonal e complementar  $\mathbf{P}_\perp$  podem ser definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A} \\ \mathbf{P}_\perp &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Quando a projeção é ortogonal, ela divide o espaço completo  $\mathbb{R}^N$  em duas partes, e, na busca de uma solução, essas partes são alinhadas ortogonalmente ao espaço de linhas da matriz de medição  $\mathbf{A}$  e ao espaço nulo da matriz. Quando a projeção é alinhada ao espaço de linhas, então é possível encontrar uma forma fechada para uma solução que respeite a restrição da Equação (2.12), visto que a solução é representada pelas linhas de  $\mathbf{A}$ . A solução da Equação (2.12) de menor norma  $l_2$  é chamada de solução quiescente.

A Figura 1 ilustra uma projeção ortogonal no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ . Como denotado pela Equação (2.14), um vetor pode ser decomposto por duas parcelas alinhadas a espaços vetoriais também ortogonais.

Figura 1 – Projeção Ortogonal



Fonte: (MEYER, 2001).

As infinitas soluções do sistema de equações lineares subdeterminado formam um hiperplano no espaço nulo da matriz de medição  $\mathbf{A}$ , cuja dimensão é  $N - m$ . Dessa maneira, qualquer solução viável ou factível  $z$  possui uma parcela quiescente  $z_R$  expressa pela combinação linear das linhas de  $\mathbf{A}$  e uma parcela ortogonal  $z_{EN}$  a  $\mathbf{A}$  que cai no espaço nulo da matriz de medição. Portanto, representa-se o vetor  $z$  como

$$z = z_R + z_{EN} \quad (2.16)$$

onde

$$\mathbf{A}z_{EN} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

e

$$\mathbf{A}z_R = \mathbf{y} \quad (2.18)$$

$$z_R = \mathbf{P}z = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}z$$

$$z_R = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{y}$$

Se mudar a parcela quiescente (solução factível de menor norma  $l_2$ ), o plano de restrições também muda. Isso impede a restauração do vetor original  $\mathbf{x}$  pois a Equação (2.18) não será mais válida. Por isso, a busca por soluções ocorre no espaço nulo da matriz de medição  $\mathbf{A}$ .

Existe a possibilidade de encontrar uma única solução dentro do hiperplano de infinitas soluções, porém para isso é necessário um critério de escolha. Sabe-se que o sinal é esparsos. Assim, dentro do hiperplano, reconstrói-se o sinal ao se selecionar a solução mais esparsa e que não altere a parcela quiescente da Equação (2.16). A maneira mais simples de fazer isso é ao minimizar a norma  $l_1$ .

### 2.2.3 A partir da norma $l_1$

A segunda pergunta que a amostragem compressiva tenta responder é sobre a reconstrução. Como reconstruir o sinal  $x$  a partir do vetor de amostras  $\mathbf{y}$  e da matriz de medição  $\mathbf{A}$ ?

Começa-se com a definição de norma  $l_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) de um vetor através da Equação (2.19) (FOUCART; RAUHUT, 2013):

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \quad (2.19)$$

Um caso especial é a norma  $l_0$ , tomada quando  $p \rightarrow 0$ , que expressa a soma de todos os elementos não-nulos do vetor.

Uma maneira conhecida para resolver o problema de minimização é com a norma euclidiana ou  $l_2$ . Essa é uma norma que retrata a energia de um sinal, e é utilizada em regressão linear para encontrar coeficientes que minimizem uma reta, por exemplo, com o nome de minimização por quadrados mínimos.

Apesar da simplicidade computacional, minimizar a norma  $l_2$  gera um resultado com a menor energia, e o resultado esperado é que minimize-se o número de elementos não nulos (BARANIUK, 2007). O motivo para a minimização da norma  $l_2$  não dar um resultado de mínima esparsidade é porque, geometricamente, a hipersfera da norma se expande em todas

as direções de maneira igual, como mostra a Figura 2. Uma hiperesfera unitária é análoga à círculos unitários no  $\mathbb{R}^2$  e esferas unitárias no  $\mathbb{R}^3$ , e por isso serve para dimensões  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 4$ . Deste modo, hiperesfera é uma definição geral.

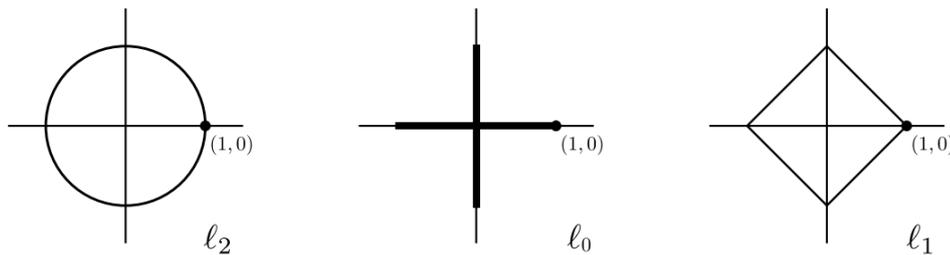
Sem restrições computacionais, o algoritmo mais direto para reconstrução é contar o número de elementos não nulos da Equação (2.12) de forma a minimizar essa quantidade em  $z$  para que este fique o mais próximo possível do sinal original  $x$ . Ou seja, contar os elementos não nulos do sinal e selecionar o sinal que possui o mínimo valor para encontrar o vetor mais esparsos que condiz com o vetor de medições  $y$  e a Equação 2.20.

$$\min \|z\|_{0_{z \in \mathbb{C}^n}} \rightarrow Az = y \quad (2.20)$$

No entanto, existem restrições computacionais, e assim nota-se que resolver o problema com a minimização da norma  $l_0$  é um problema NP difícil por ser uma otimização combinatorial, o que o torna custoso em relação aos recursos computacionais (FOUCART; RAUHUT, 2013). Esse seria a solução mais direta porque se expande somente nos eixos —vide Figura 2— e garante uma solução esparsa, porém não é prática.

Para visualizar as normas  $l_2$ ,  $l_0$  e  $l_1$ , considera-se o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  na Figura 2. Uma hiperesfera unitária representa a norma  $l_2$  ao se expandir, com o crescimento igual para qualquer direção, como na Figura 2. Por mais que as normas  $l_0$  e  $l_1$  não sejam estritamente esferas ou círculos unitários, são referidas pela nomenclatura "hiperesferas unitárias".

Figura 2 – Representação gráfica da expansão das normas  $l_2$ ,  $l_0$ ,  $l_1$



Fonte: Baseado em (ROUGHGARDEN; VALIANT, 2021)

A Figura 2 apresenta a norma  $l_1$ , e nota-se que o crescimento da hiperesfera unitária é maior na direção dos eixos. Isso é um indício que representa uma solução esparsa, e que minimizar a norma  $l_1$  sujeita à Equação (2.12) é uma possibilidade.

Discutindo de maneira geométrica, quando o plano de soluções está orientado aleatoriamente —o que é o caso quando se usam matrizes aleatórias como matrizes de medição—

a maior probabilidade de se encontrar uma solução esparsa é quando se minimiza a norma  $l_1$ , visto que vetores esparsos possuem coeficientes alinhados aos eixos de coordenadas do espaço vetorial total e, pela Figura 2, quando ocorre a expansão da hipersfera referente à norma  $l_1$ , as pontas do losanglo chegam primeiro no plano de soluções, com alta probabilidade.

Assim, a minimização da norma  $l_1$  garante que a recuperação do sinal é um sinal esparsa, desde que o número de medições  $m$  seja

$$m \geq Ck \log \left( \frac{N}{k} \right) \quad (2.21)$$

#### 2.2.4 Como reconstruir o sinal a partir do vetor $y$

Quando o plano de soluções é encontrado respeitando a Equação (2.21), vários sinais se encaixam com as medições porque  $m < N$ . Se o sinal original é esparsa, existe a garantia que a solução o recupera quando ocorrer a menor norma  $l_1$ .

Considerando isso, a Equação para a reconstrução do sinal a partir do vetor  $y$  é a minimização da norma  $l_1$  de  $z$  sujeita a  $Az = y$ .

$$\begin{aligned} \min \|z\|_1, z \in \mathbb{R}^N \\ \text{sujeito a } Az = y \end{aligned} \quad (2.22)$$

Esse é um problema de otimização convexa que pode ser aproximado por programação linear quando trata de soluções reais (CANDÈS; TAO, 2005) (FOUCART; RAUHUT, 2013). A reconstrução do sinal por meios convencionais ocorre por métodos não lineares; o método mais simples para a reconstrução segue a Equação (2.22) e é conhecido como *basis pursuit*, cuja complexidade é  $O(N^3)$ .

A escolha do algoritmo depende das variáveis do sinal  $k$ ,  $m$  e  $N$ , além da matriz de medição escolhida (FOUCART; RAUHUT, 2013). Até onde foi pesquisado, a influência das variáveis nas taxas de recuperação e velocidade de cada algoritmo aparece somente quando se realizam testes numéricos. Então é importante verificar a eficácia de algoritmos para amostragem compressiva através destes testes.

Para o método de *basis pursuit*, o algoritmo que é menos afetado pela esparsidade  $k$  do sinal é o primal-dual de Chambolle e Pock (FOUCART; RAUHUT, 2013). Possui velocidade considerável para esparsidade de tamanho médio-grande.

A proposta para esse trabalho é estudar outra técnica para a recuperação do sinal original que funcione assim como o método de *basis pursuit*, o que levou a um algoritmo com baixa complexidade computacional. Os detalhes e modelagem matemática são apresentados no capítulo seguinte.

### 3 ALGORITMO DO GRADIENTE PARA A RECONSTRUÇÃO DO SINAL POR AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Esse capítulo propõe uma solução do problema de amostragem compressiva, que parte do princípio que se utiliza a minimização da norma  $l_1$ , e a ideia é utilizar o algoritmo do gradiente proposto por (FROST, 1972) para outra função objetivo.

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O problema que a amostragem compressiva resolve para obter um vetor solução  $z$  similar ao vetor original  $x$  vem da Equação (2.22).

O algoritmo do gradiente propõe uma "substituição" da maneira que seria minimizada a norma  $l_1$  ao se utilizar da função lagrangeana e seu gradiente. É importante utilizar a função lagrangeana porque o problema de minimização possui restrições, e elas servem para manter a solução no espaço factível. A função associa-se à Equação (2.22) e garante que a nova solução pertença ao espaço de soluções factíveis da seguinte maneira, de acordo com (FLETCHER, 2000):

$$\mathcal{L}(z) = \|z\|_1 + \lambda^T (Az - y) \quad (3.1)$$

O vetor  $\lambda$  representa o vetor de multiplicadores de Lagrange.

O algoritmo atualiza a solução na direção oposta ao gradiente do lagrangeano. Para justificar essa situação, considera-se que há uma expansão de série de Taylor da função objetivo com infinitos termos. Para atualizações da solução com baixa magnitude, o declive máximo da função corresponde ao negativo do gradiente da função porque componentes de derivadas de segunda ordem ou maior (proporcionais a termos na segunda potência ou maior) possuem magnitude desprezável, o que torna viável manter somente as derivadas de primeira ordem. Essa é a hipótese para o uso do gradiente do lagrangeano.

Se a minimização ocorresse na direção contrária somente do gradiente da Equação (2.22) ao invés do gradiente do lagrangeano na Equação (3.1), poderia acontecer que a solução saísse do espaço de soluções factíveis, e espera-se que a solução reconstrua o sinal original. Assim, é usado o gradiente do lagrangeano como na Equação (3.2) porque este coincide aproximadamente com a direção de maior variação da função objetivo e garante que a nova solução

satisfaz a Equação (2.22).

$$\nabla \mathcal{L}(z) = \text{sgn}(z) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.2)$$

Um detalhe sobre a aplicação do gradiente na função lagrangeana é que a informação que se obtém do vetor  $z$  é somente sobre seu sinal. O gradiente é um operador que efetua derivadas parciais. Portanto, como

$$\|z\|_1 = \sum_{k=1}^N |z_k|$$

a operação do gradiente torna  $\|z\|_1$  em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|z\|_1}{\partial z_j} &= \frac{\partial \sum_{k=1}^N |z_k|}{\partial z_j} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial |z_k|}{\partial z_j} \\ &= \frac{\partial |z_j|}{\partial z_j} = \text{sgn}(z_j) \end{aligned}$$

Sendo a função sinal (*signal* ou *sgn*) definida como

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

O algoritmo do gradiente para minimizar uma função depende da Equação Recursiva de Z, com o passo de adaptação indicado por  $\mu$ :

$$z[n+1] = z[n] - \mu \nabla \mathcal{L}(z)|_{z=z[n]} \quad (3.4)$$

O passo de adaptação  $\mu$  é um escalar positivo de baixa magnitude, para que seja possível usar o gradiente do lagrangeano para obter uma solução dentro do espaço factível, como discutido anteriormente.

Substituir Equação (3.2) em Equação (3.4) resulta na Equação (3.5):

$$z[n+1] = z[n] - \mu(\text{sgn}(z) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}) \quad (3.5)$$

Ao pré-multiplicar a Equação (3.5) por  $\mathbf{A}$ , garante-se que as soluções  $z[n+1]$  e  $z[n]$  pertencem ao espaço factível de solução, já que

$$\mathbf{A}z[n+1] = \mathbf{A}z[n] = \mathbf{y}$$

Logo,

$$\mathbf{A}z[n+1] = \mathbf{A}z[n] - \mu(\mathbf{A}\text{sgn}(z) + \mathbf{A}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{y} \quad (3.6)$$

O vetor de multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  possui forma fechada ao se resolver a Equação (3.6) ao isolá-lo

$$\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\text{sgn}(z) \quad (3.7)$$

Considerando o resultado do vetor de multiplicadores de Lagrange ao substituí-lo da Equação (3.7) na Equação (3.5), tem-se que a equação recursiva do algoritmo é:

$$\begin{aligned} z[n+1] &= z[n] - \mu(\text{sgn}(z) - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\text{sgn}(z)) \\ &= z[n] - \mu\mathbf{P}_\perp\text{sgn}(z[n]) \end{aligned} \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) soluciona o problema proposto pela amostragem compressiva de se minimizar a norma  $l_1$  de  $z$  como a Equação (2.22), porém existem inconsistências decorrentes da aritmética de precisão finita. As inconsistências ou erros se acumulam conforme o algoritmo executa e podem tornar não-factíveis as soluções obtidas. Uma maneira de se resolver isso é decompor  $z[n] = \mathbf{P}_\perp z[n] + z_R[n]$ :

$$\begin{aligned} z[n+1] &= \mathbf{P}_\perp z[n] + z_R[n] - \mu\mathbf{P}_\perp\text{sgn}(z[n]) \\ &= \mathbf{P}_\perp[z[n] - \mu\text{sgn}(z[n])] + z_R[n] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Após essa alteração, a Equação (3.9) é robusta para enfrentar os erros de aritmética de precisão finita, assim como o algoritmo de Frost (FROST, 1972). Essa robustez à pequenos desvios implica que o algoritmo pode parar sua execução em qualquer ponto e ainda assim prover uma solução factível.

No contexto desse trabalho, a matriz  $\Psi$  vista na Subsecção 2.1.5.2 é uma transformação para domínio wavelet. Portanto, a recuperação do sinal original  $v$  é feita com a transformada wavelet inversa  $\Psi^{-1}$  da solução encontrada  $z$ , em que  $\hat{v}$  é a estimativa de  $v$ .

$$\hat{v} = \Psi^{-1}z \quad (3.10)$$

## 3.2 CUSTO COMPUTACIONAL

Como o algoritmo proposto é baseado no algoritmo para processos estocásticos de (FROST, 1972), a complexidade computacional é similar. O custo computacional é proporcio-

nal a  $O(N^2)$  por iteração, visto que cada iteração na Equação (3.9) possui a maior contribuição feita pela multiplicação da matriz de projeção ortogonal  $\mathbf{P}_\perp$  e o resultado de  $z[n] - \mu \operatorname{sgn}(z[n])$ .

É um custo pequeno por iteração, porém há necessidade de realizar várias iterações, o que pode consumir tempo. Se está longe da solução, o gradiente do lagrangeano da função objetivo tem magnitude alta e o passo de adaptação  $\mu$  é pequeno. O passo de adaptação é pequeno para que o algoritmo não possua divergência e mantenha verdadeira a hipótese formulada para o uso do gradiente do lagrangeano —se a hipótese fosse falsa, o comportamento do algoritmo ficaria imprevisível.

Quando a solução está próxima da solução ótima, a adaptação é muito lenta porque o gradiente do lagrangeano tem baixa magnitude e o passo de adaptação  $\mu$  tem baixa magnitude também, o que resulta em lentidão na proximidade da solução ótima ao se multiplicar dois valores de baixa magnitude. Portanto, buscas locais onde o gradiente não varia muito podem ser o ponto fraco do algoritmo.

Nesse sentido, uma possibilidade para trabalhos futuros seria usar a solução do algoritmo adaptativo como entrada ou passo inicial para outros algoritmos com complexidade computacional alta por iteração, e verificar a sinergia dessa combinação. A expectativa é que o produto final chegue próximo da solução ótima em menos complexidade computacional que a execução dos algoritmos separados, pois há baixa complexidade computacional por iteração no algoritmo adaptativo e uma finalização por um algoritmo que tenha alta complexidade computacional porém alta velocidade para encontrar a solução próxima.

O próximo capítulo contém os resultados provenientes de simulação para verificar a efetividade do algoritmo descrito nesse capítulo.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 IMAGENS TESTE PARA PROCESSAMENTO DE IMAGENS

Essa seção utiliza imagens teste da Lenna e de Shepp-Logan *Phantom* para mostrar resultados do algoritmo do gradiente em imagens padrão para a área de processamento de imagens. Em relação a esparsidade, o Shepp-Logan *Phantom* no domínio wavelet é mais esparsa que a imagem da Lenna.

Nesse sentido, nota-se que a imagem da Lenna é difícil de ser comprimida por sua quantidade de detalhes, variações de sombra e textura, dentre outras características (MUNSON, 1996), e a imagem do Shepp-Logan *Phantom* é muito similar aos resultados de exames médicos por ser um modelo de cabeça humana cortada no eixo axial (LOGAN, 1974). Isso produz um contraste interessante quanto ao uso do algoritmo e como fica a recuperação.

O primeiro passo para o algoritmo é tornar a matriz 2D que representa a imagem em um vetor de uma dimensão: uma das maneiras de se fazer isso é a partir da projeção lexicográfica, que é realizada ao se empilhar as diferentes colunas da imagem em um único vetor-coluna (PARREIRA, 2012), de forma a não se perder informação sobre o sinal ao mesmo tempo que se reduz a dimensão dele. Com o vetor-coluna resultante, efetua-se a transformação para o domínio wavelet Haar. O tipo wavelet escolhido foi Haar, que, através de testes empíricos, produziu o melhor resultado em quesito esparsidade.

Após o primeiro passo, o algoritmo é executado com o vetor-coluna como vetor a ser aproximado, e o processo inverso é realizado. Transforma-se o vetor-coluna do domínio wavelet Haar para o domínio original, e depois realiza-se a projeção lexicográfica inversa do vetor-coluna para a imagem 2D.

Outro ponto importante é que a determinação do limiar da compressão não foi realizada de maneira consistente. Espera-se que esse resultado seja similar para imagens que possuam características semelhantes, como é o caso do Shepp-Logan *Phantom* e da imagem por RM do cérebro. Os testes realizados consideraram uma quantidade de medições  $m = 0.8N$  em relação ao tamanho original  $N$ . Essa quantidade de medições  $m$  foi definida arbitrariamente porque o objetivo era testar a eficácia da técnica de amostragem compressiva com o algoritmo do gradiente ao usar menos amostras que o total de coeficientes no sinal original, e empiricamente esse valor foi escolhido por produzir resultados satisfatórios para o pior caso, imagem da Lenna,

que é difícil de ser comprimida.

O processo foi executado conforme o algoritmo do gradiente atualizava sua solução, acompanhando a alteração dos coeficientes da transformada Wavelet da imagem recuperada. O critério de parada foi quando não havia mais alteração significativa nos coeficientes, ou quando estacionavam em mesmos valores por várias iterações seguidas. Para as imagens teste, foi suficiente executar o algoritmo uma única vez pois a matriz aleatória de medição  $A$  permaneceu a mesma, e o vetor de medição  $y$  também permaneceu constante. Por consequência, a matriz de projeção  $P$  e resposta quiescente  $z_R$  não tiveram alterações. Finalmente, para a mesma inicialização, o algoritmo deve produzir sempre a mesma resposta.

#### 4.1.1 Lenna

Figura 3 – Imagem Teste Lenna em Escala Cinza 128 pixels por 128 pixels

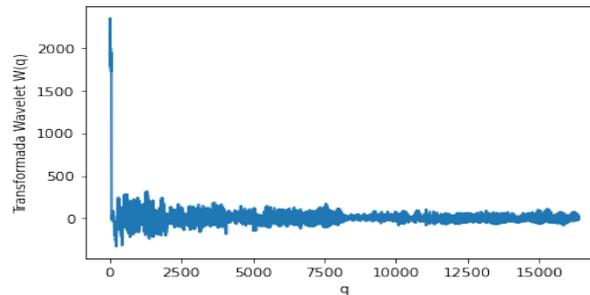


Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna#/media/File:Lenna\\_\(test\\_image\).png](https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna#/media/File:Lenna_(test_image).png).

A imagem da Lenna, Figura 3, é usada em testes de processamento de imagens por possuir detalhes variados em uma só imagem, como texturas, luz e sombra, e regiões planas (MUNSON, 1996). Assim, seu uso acontece para testar diversos tipos de algoritmos para processar imagens.

Esse é o primeiro teste do algoritmo do gradiente para a amostragem compressiva. A imagem da Lenna recebe um pré-processamento onde sua escala fica  $128 \times 128$  pixels e cores na escala cinza, para que o algoritmo rode o mais rápido possível (para fins de apresentar resultados). O primeiro passo para o algoritmo é realizar a projeção lexicográfica para que a imagem e suas duas dimensões se tornem um vetor com uma dimensão. O processo para a projeção lexicográfica é empilhar as colunas verticais em uma única coluna.

Figura 4 – Coeficientes da Imagem Teste Lenna no Domínio Wavelet



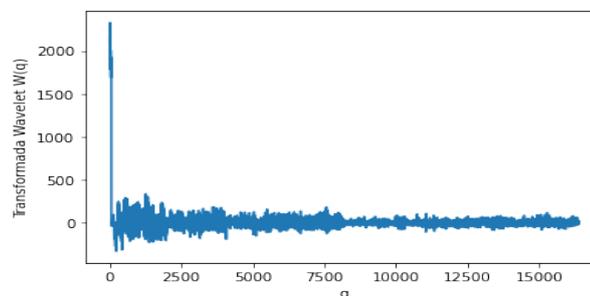
Fonte: Autor, 2022.

Após a projeção lexicográfica, ocorre a transformação para o domínio wavelet Haar, resultando em Figura 4. Essa família de transformadas aparece na literatura (DAUBECHIES, 1992) para transformar imagens biomédicas em imagens biomédicas esparsas, e a escolha da transformada wavelet Haar foi empírica. No entanto, a imagem da Lenna não é uma imagem biomédica. Nesse sentido, a ver por seus coeficientes após transformada para domínio wavelet Haar, a imagem possui pouca esparsidade nesse domínio, também pelo motivo de ser uma imagem com detalhes diversos.

Os coeficientes se concentram em torno de zero, porém como há detalhes variados na imagem, descartar coeficientes a partir de um *threshold* certamente implicará em perda de informações e da compreensibilidade da imagem original. Isso não é desejável, e assim mantêm-se os coeficientes como estão para a amostragem compressiva com o algoritmo de minimização por gradiente.

Essa situação com a imagem da Lenna serve para mostrar o que acontece se a esparsidade está escassamente presente.

Figura 5 – Coeficientes da Imagem Teste Lenna Recuperada após Amostragem Compressiva



Fonte: Autor, 2022.

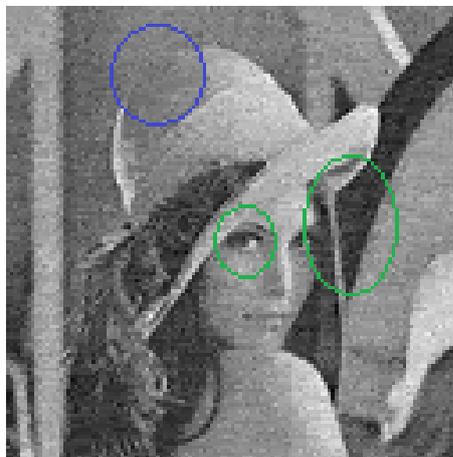
O algoritmo do gradiente adaptativo pode parar a sua execução em qualquer instante, pois há a garantia que o resultado estará dentro do espaço factível de soluções. Mesmo não

sendo um sinal esparso evidente, a imagem da Lenna possui coeficientes wavelet similares aos coeficientes originais, de acordo com a Figura 5. Os coeficientes a partir de 7500 apresentam ruído em comparação com a imagem original nesse mesmo intervalo. Os coeficientes da wavelet possuem componentes de alta frequência por causa da estrutura da transformada wavelet. Considerando que os detalhes na imagem têm a ver com componentes de alta frequência por trocarem de intensidade em intervalos espaciais pequenos, o ruído na alta frequência afetará essa parte da imagem.

A Figura 6 é o resultado proveniente da reconstrução pelo algoritmo do gradiente, transformado do domínio wavelet para o vetor-coluna e após projeção lexicográfica inversa até a imagem 2D.

A imagem inteira está ruidosa. Apesar disso, ainda é possível enxergar detalhes onde a diferença de contraste é alta, como no batente escuro do espelho e a luz que bate no cabelo da Lenna, ou entre a íris e a esclera no olho dela. Quando o contraste não é tão alto, como levemente à esquerda no topo do chapéu da Lenna e a parede cinza atrás, o ruído dificulta o entendimento da imagem.

Figura 6 – Sinal Recuperado Imagem Teste Lenna

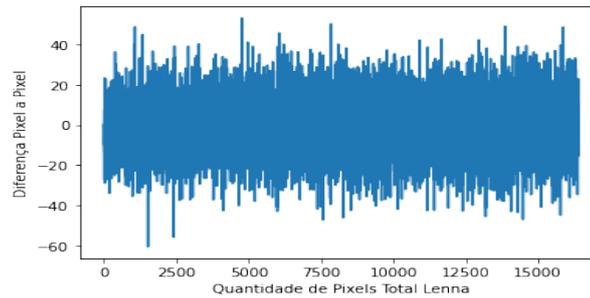


Fonte: Autor, 2022.

Uma maneira de conseguir uma medida objetiva de desempenho do algoritmo é realizar a diferença pixel a pixel entre a imagem recuperada e a imagem original, cujo resultado está na Figura 7. De acordo com essa Figura, a maior diferença observada está dentro do intervalo  $[-60, 50]$ . Esse é o erro decorrente da reconstrução pixel a pixel.

Considerando o intervalo notável na diferença pixel a pixel das imagens original e reconstruída, a ideia foi filtrá-la com um filtro de mediana, para que o ruído após amostragem compressiva fosse reduzido. O resultado foi a Figura 8. Esse filtro suavizou o ruído e deixou

Figura 7 – Diferença Pixel a Pixel entre Imagem Teste Lenna Original e Recuperada



Fonte: Autor, 2022.

a imagem desfocada. Apesar disso, ainda é possível identificar a Lenna, mesmo com perda de detalhes e falta de foco.

Figura 8 – Imagem Teste Lenna filtrada após recuperação



Fonte: Autor, 2022.

Por fim, a Figura 9 tem uma comparação direta entre as três imagens. A escolha da imagem recuperada depende do objetivo final da imagem: Caso se queira uma imagem com maior foco e contraste, porém com ruído, a escolha é Figura 9b. Caso se queira o menor nível de ruído, às custas de perda de foco e contraste, a escolha é Figura 9c.

#### 4.1.2 Shepp-Logan *Phantom*

Shepp-Logan *Phantom* é uma imagem de testes que representa um modelo de cabeça humana vista de cima (LOGAN, 1974) —essa vista de cima possui nome anatômico de eixo axial. É composto por dez elipses com diferentes contrastes como mostra a Figura 10. Assim como a imagem da Lenna, a Figura 10 está em escala cinza  $128 \times 128$  pixels.

Como o Shepp-Logan *Phantom* modela uma imagem de cabeça humana, ela também

Figura 9 – Comparação entre Imagem Original Lenna, Recuperação, Filtragem



(a) Imagem Original  $x$  Lenna

(b) Vetor  $z$  Recuperado Lenna

(c) Vetor  $z$  Filtrado Lenna

Fonte: Autor, 2022.

Figura 10 – Imagem Teste Shepp-Logan em Escala Cinza 128 pixels por 128 pixels



Fonte: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c7/SheppLogan\\_Phantom.svg/512px-SheppLogan\\_Phantom.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c7/SheppLogan_Phantom.svg/512px-SheppLogan_Phantom.svg.png).

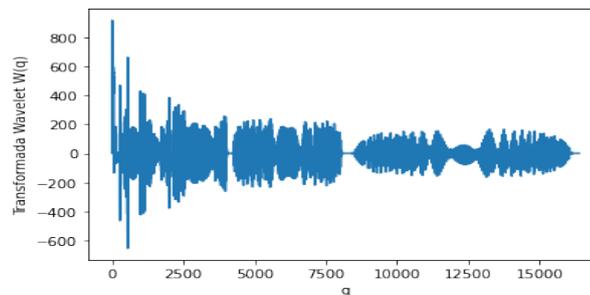
modela a esparsidade que ocorreria em uma imagem biomédica real. É possível notar a esparsidade porque há um grande espaço com a mesma informação; a elipse branca contorna outra elipse cinza escuro, e essa segunda forma geométrica tem informações redundantes por ter a mesma textura e cor em um grande espaço. Portanto, Shepp-Logan *Phantom* serve como uma imagem teste aproximada do que irá acontecer quando a imagem biomédica concreta for reconstruída pelo algoritmo do gradiente.

Em relação à imagem da Lenna, a imagem de Shepp-Logan *Phantom* possui maior esparsidade, o que favorece o desempenho das técnicas de amostragem compressiva. Assim sendo, as diferenças pixel a pixel devem ser menores e as imagens reconstruídas devem ser mais próximas à imagem original.

O primeiro passo é realizar a transformação para o domínio wavelet Haar após projeção

lexicográfica. Os coeficientes wavelet Haar aparecem na Figura 11, e ela possui intervalos onde os coeficientes são nulos ou próximos disso, o que aproxima o vetor coluna no domínio wavelet Haar a um vetor compressível.

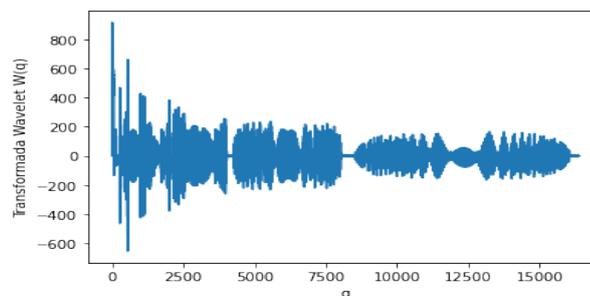
Figura 11 – Coeficientes Wavelet Haar da Imagem Teste Shepp-Logan *Phantom* após Projeção Lexicográfica



Fonte: Autor, 2022.

A Figura 12 mostra os coeficientes da wavelet do vetor recuperado pelo algoritmo do gradiente pós amostragem compressiva, e é possível afirmar que são muito próximos da versão original. Ainda assim, nas partes onde anteriormente o valor era muito próximo de zero, como nos intervalos  $[4000, 4500]$  e  $[8000, 9000]$ , o ruído aumentou.

Figura 12 – Coeficientes da Imagem Teste Shepp-Logan Recuperada após Amostragem Compressiva



Fonte: Autor, 2022.

Para recuperar a imagem Shepp-Logan *Phantom* original, realiza-se o processo inverso do primeiro passo: realiza-se a transformada inversa do domínio wavelet haar para a projeção lexicográfica, e após isso desempilha-se as colunas do vetor coluna para montar a imagem 2D. A Figura 13 mostra o sinal recuperado pelo processo de amostragem compressiva e o algoritmo do gradiente.

É possível notar ruído na imagem, porém ainda assim se consegue identificar as elipses que aparecem na imagem original. Importante também notar que as três elipses na parte inferior da imagem possuem menos detalhes, e mesmo assim a identificação delas pode acontecer. Isso

mostra que ruídos incoerentes, como esses que aparecem na Figura 13, não impactam na compreensibilidade do exame. Seria difícil interpretá-lo se o ruído lembrasse as elipses e formas específicas da imagem.

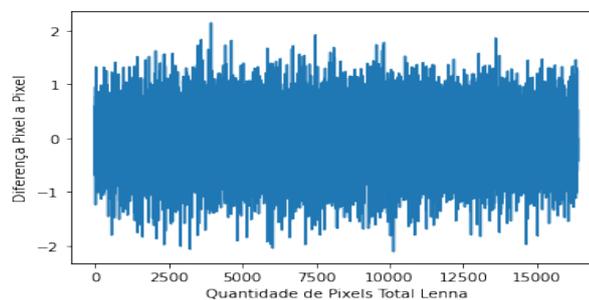
Figura 13 – Sinal Recuperado Imagem Teste Shepp-Logan



Fonte: Autor, 2022.

A evidência e importância da compressibilidade na imagem original aparece na Figura 14 porque a diferença pixel a pixel está dentro do intervalo  $[-2, 2]$ , corroborando com a afirmação que os sinais original e recuperado são muito próximos. Novamente, a presença da esparsidade ou compressibilidade permite uma recuperação mais aproximada do sinal. Além disso, de fato a diferença pixel a pixel foi menor que a diferença medida entre as imagens teste anteriores.

Figura 14 – Diferença Pixel a Pixel entre sinal recuperado e sinal original Shepp-Logan



Fonte: Autor, 2022.

O resultado da Figura 15 refere-se ao processo de filtragem por mediana para remover os ruídos da imagem recuperada. Como os ruídos eram incoerentes, essa filtragem não apresentou melhoras para a interpretação dos resultados; até tornou difícil identificar as três elipses menores na parte inferior da Figura. Elas ficaram menos nítidas que a versão sem a filtragem e isso

torna difícil identificar que são três entidades separadas ao invés de uma só, como a Figura 15 demonstra.

Figura 15 – Imagem Teste Shepp-Logan filtrada após recuperação



Fonte: Autor, 2022.

E aqui é a comparação entre os três resultados em uma Figura. Quando as três imagens estão lado a lado fica mais fácil notar as diferenças.

Figura 16 – Comparação entre Imagem Original Shepp-Logan, Recuperação, Filtragem



(a) Imagem Original  $x$   
Shepp-Logan



(b) Vetor  $z$  Recuperado  
Shepp-Logan



(c) Vetor  $z$  Filtrado  
Shepp-Logan

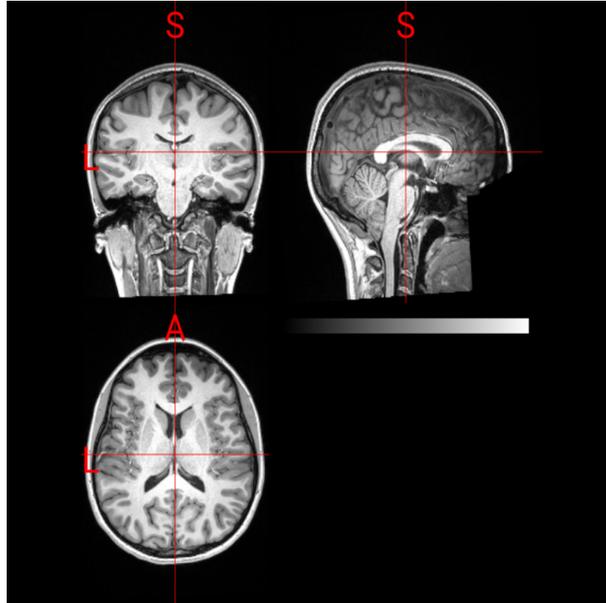
Fonte: Autor, 2022.

## 4.2 IMAGEM POR RM

O conjunto de dados para a imagem de RM escolhido foi baseado em (THORNTON; TAMIR, 2022). A Figura 17 contém os cortes transversal, lateral e frontal, cujos nomes anatômicos são axial, sagital e coronal (PRESTON, 2022). Esses dados são relacionados aos estados cerebrais e suas ações, além de situações para representações neurais aditivas, para ter infor-

mações sobre a situação cognitiva social. Não são especificamente de epilepsia, porém os três cortes anatômicos representam o cérebro em 3D e, assim, são úteis para mostrar a efetividade do algoritmo do gradiente.

Figura 17 – Imagem do Cérebro por RM



Fonte: (THORNTON; TAMIR, 2022).

O processo para encontrar os coeficientes wavelet de tipo Haar para as imagens do cérebro por IRM é diferente na sua natureza porque o tipo de imagem é tridimensional e o formato do arquivo é "NIFTI"<sup>6</sup> ao invés de ".png". Agora, como é um arquivo muito pesado em quantidade de amostras por ser uma imagem em três dimensões, há considerações sobre memória a serem feitas, pois não foi possível executar o algoritmo com a imagem original. Desta maneira, a forma escolhida para lidar com essa limitação de uso de memória foi subamostrar a imagem por RM por um fator de dezesseis. Na imagem tridimensional, isso significa três dimensões para amostrar, conforme os vetores de base canônica  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ . Em cada uma das dimensões, a cada dezesseis pixels, uma amostra é selecionada em cada eixo  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ .

A mudança em relação a projeção lexicográfica para a aplicação tridimensional é aplicá-la duas vezes, e então ocorre a transformação para o domínio wavelet Haar.

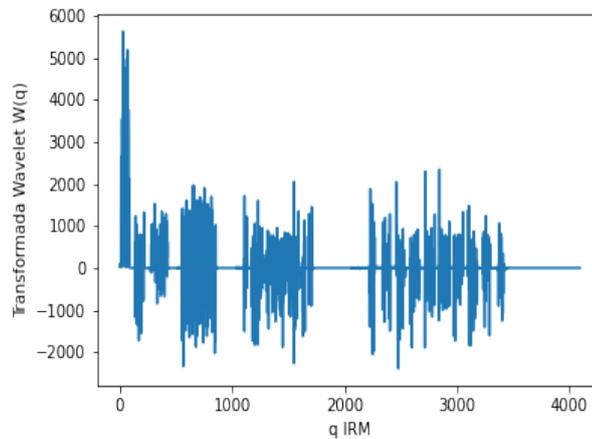
O número de coeficientes resultantes da subamostragem pelo fator 16 é  $N = 4096$ , e o número de medições escolhida foi de 80% desse valor, então  $m = 3276$ .

O processo inverso para recuperar a imagem por RM é aplicar a transformada inversa wavelet Haar e aplicar duas vezes a projeção lexicográfica inversa para encontrar a imagem 3D.

<sup>6</sup> Especialização de imagens DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) para imagens de ressonância magnética.

A Figura 18 contém muita esparsidade após a transformação para o domínio wavelet Haar, o que é observado nos intervalos com coeficientes nulos.

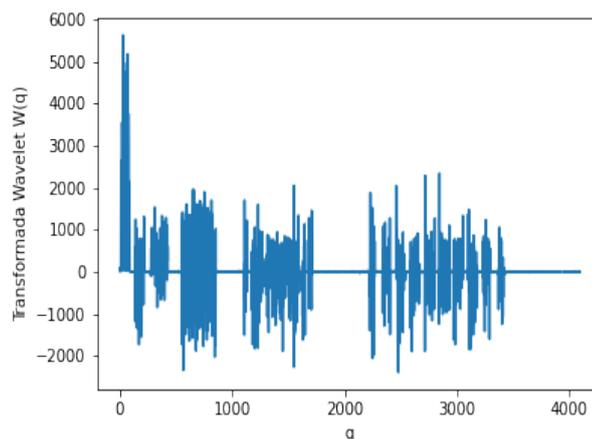
Figura 18 – Coeficientes Wavelet Haar da Projeção Lexicográfica da Imagem por RM Original



Fonte: Autor, 2022.

Após a recuperação do sinal subamostrado a partir de amostragem compressiva, há erros de reconstrução aparentes nas partes onde anteriormente eram mais próximas de zero. A Figura 19 mostra os coeficientes recuperados após a execução do algoritmo do gradiente.

Figura 19 – Coeficientes Wavelet Haar Reconstruídos da Projeção Lexicográfica da Imagem por RM

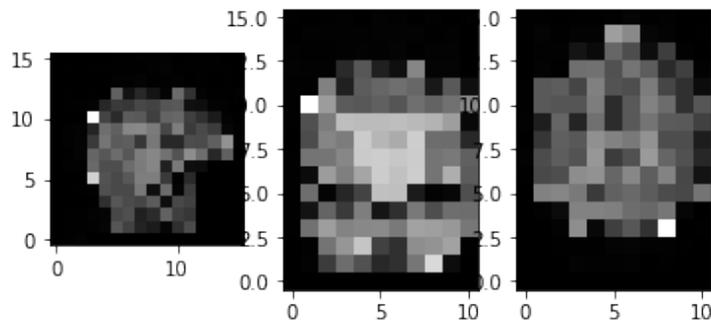


Fonte: Autor, 2022.

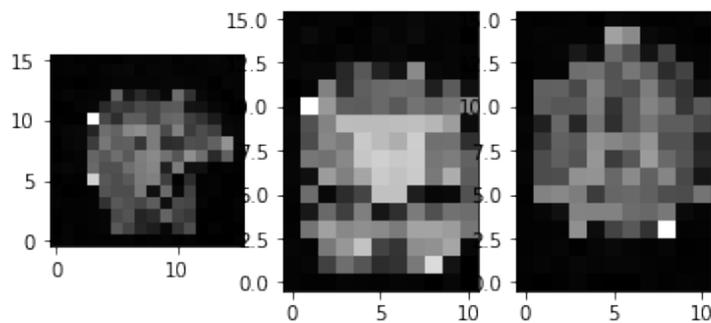
Como mencionado, a subamostragem ocorreu a cada dezesseis pixels. Isso torna pixelada a imagem de acordo com a Figura 20. No entanto, ainda é possível ver a reconstrução em ação. Quando comparadas simultaneamente, é possível notar que a recuperação foi um sucesso. A Figura 20a refere-se ao sinal original e a Figura 20b refere-se ao sinal recuperado.

A viabilidade da técnica de amostragem compressiva pelo algoritmo do gradiente em

Figura 20 – Comparação entre Imagem por RM Original e Recuperada



(a) Sinal Original  $x$  Subamostrado a cada 16 pixels

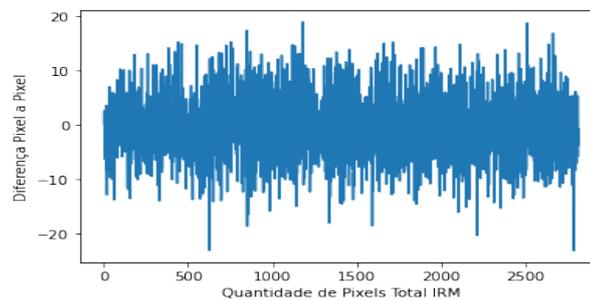


(b) Sinal Recuperado  $z$  Subamostrado a cada 16 pixels

Fonte: Autor, 2022.

imagens de ressonância magnética se mostrou promissora porque a diferença entre os pixels individuais das imagens está dentro do intervalo  $[-20, 20]$ , como na Figura 21, corroborando com a afirmação que os sinais original e recuperado são muito próximos.

Figura 21 – Diferença Pixel a Pixel entre Imagem RM Original e Recuperada



Fonte: Autor, 2022.

Além disso, os erros decorrentes do algoritmo e da aproximação para o hiperplano no espaço nulo são incoerentes com a imagem do exame de ressonância magnética, apesar da subamostragem por fator de 16. Nesse sentido, a simulação do algoritmo do gradiente foi bem-sucedida.

## 5 CONCLUSÃO

Ao perceber que sinais esparsos possuem informações redundantes para suas representações, por que não procurar uma forma de usar isso diretamente durante sua amostragem? Dessa forma, menos recursos seriam utilizados ao tomar menos amostras, e menos tempo para completar a amostragem.

A alternativa mais direta seria diminuir o número de amostras, pois se o período de amostragem é fixo, menos amostras resultam em um menor período de observação. No entanto, amostrar um sinal de largura de banda finita com frequência de amostragem menor que duas vezes a largura de banda não é possível a partir da amostragem uniforme, o que tornam necessárias algumas considerações: Primeiro, a característica de esparsidade do sinal se torna importante. Segundo, importa a maneira que ocorrem as medições e suas quantidades. Terceiro, precisa-se garantir a reconstrução do sinal, caso contrário a amostragem não teria qualquer propósito.

Assim, a maneira encontrada para se aproveitar de um sinal é explorar a característica de esparsidade. Para fazer menos medições que a amostragem uniforme demanda e ainda permitir a reconstrução, realizam-se produtos internos entre linhas de uma matriz e o sinal esparsos. Esses produtos internos servem como medidas de similaridade entre cada linha da matriz e cada elemento do vetor, acumulados em um valor. Quando a matriz de medição é aleatória, isso faz com que o número mínimo de medições seja dependente da esparsidade do sinal original, com alta probabilidade. Com  $m > 3k$ , garante-se medições suficientes para recuperar um sinal  $k$ -esparso.

A reconstrução mais simples do sinal ocorre a partir da minimização da norma  $l_1$  de  $z$  sujeita à restrição  $Az = y$ , de forma a obter a solução com o número mínimo de elementos não nulos. O algoritmo proposto mostrou que substituir a maneira de minimizar a norma  $l_1$  é completamente possível e trouxe melhorias no custo computacional, pois foi de  $O(N^3)$  para  $O(N^2)$ . Em especial, isso é relevante para a aplicação em IRM pois imagens desse tipo são tridimensionais e necessitam de várias fatias para possuírem informação relevante.

O uso de amostragem compressiva para contribuir no prognóstico de epilepsia no exame IRM pode trazer o sinal reconstruído em menos amostras, o que se traduz em menos tempo de exame. Especificamente para esse tipo de exame, a amostragem compressiva pode contribuir para um menor número de sensores utilizados, o que também pode diminuir o custo de construção de tal equipamento.

Nota-se que amostragem compressiva não se restringe a essa aplicação para epilepsia ou medicina, pois pode ser aplicada em qualquer área do conhecimento se os sinais envolvidos forem esparsos. Portanto, pode-se pensar em aplicações de telecomunicações onde a amostragem compressiva ocorre para enviar sinais comprimidos com menos equipamentos, pois a compressão ocorreria na amostragem. No entanto, a limitação da técnica é sua aplicação à sinais esparsos. Fundamentalmente, é uma restrição imposta ao sinal e requer que essa característica seja conhecida. Em contraste com amostragem compressiva, a amostragem uniforme pode adquirir qualquer sinal de largura de banda finita, então seu uso é mais geral e depende do sistema ao invés do sinal.

Assim, amostragem compressiva não vem para substituir a amostragem uniforme, nem algoritmos convencionais de compressão. É somente uma maneira de se aproveitar de sinais esparsos. Além disso, não é tão simples comparar as técnicas de amostragem compressiva e amostragem uniforme porque elas lidam com requisitos fundamentais diferentes. Por exemplo, a primeira requer que exista esparsidade ou compressibilidade no sinal, e a segunda refere-se à largura de banda do sinal. Também pode ser que existam casos hipotéticos onde o sinal possui largura de banda infinita e característica de esparsidade, e assim não seria possível aplicar amostragem uniforme, enquanto que seria possível aplicar amostragem compressiva.

Os resultados mostraram que os ruídos pós-reconstrução do sinal esparsos foram incoerentes porque foi possível distingui-los do conteúdo e detalhes da imagem. Isso fica aparente na Figura 10 de Shepp-Logan, onde os ruídos tiveram pouca relação com as elipses internas. Esse é um resultado importante porque torna possível adquirir imagens médicas com amostragem compressiva sem sacrificar a identificação de patologias.

## 5.1 TRABALHOS FUTUROS

Apesar do funcionamento do algoritmo, ainda são necessários mais testes para se ter ideia do alcance dele quanto aos sinais de entrada. Algo que pode contribuir para o algoritmo é testá-lo com mais imagens e dados de treinamento. Como exemplo, imagens que mostram a evidência de epilepsia.

Outras questões referem-se ao tamanho do passo  $\mu$  do algoritmo, como aparece na Equação (3.9) recursiva do algoritmo. Em geral, um tamanho de passo maior faz com que a solução aconteça mais rapidamente, porém existe a possibilidade de se encontrar um tamanho do passo que resulte na divergência da solução. Em outras palavras, não se sabe com muitos detalhes de

que forma o tamanho do passo influencia no algoritmo.

A princípio, o algoritmo funciona com os testes efetuados, mas não há análise mais profunda dele. Por exemplo, dependendo do número de medições  $m$ , há dúvidas sobre qual seria o teto de erro do algoritmo. Se o teto de erro do algoritmo fosse encontrado, seria possível encontrar famílias de distribuições, como as distribuições Gaussiana e de Bernoulli, da matriz de medição que satisfaçam a propriedade da isometria restrita, e isso implicaria em diferentes estratégias de amostragem, diferentes eficiências na amostragem ou distribuições com menor erro de aproximação.

Portanto, a efetividade do processo de amostragem compressiva com esse algoritmo é uma incógnita, mas existem caminhos a serem investigados para descobri-la, como o tamanho do passo do algoritmo, o teto de erro, as distribuições da matriz de medição.

Existem várias formas e algoritmos para recuperar o sinal, e mais experimentos são necessários para testar o algoritmo proposto. Para trabalhos futuros, nota-se a possibilidade do uso resultado do algoritmo proposto para inicialização de algum algoritmo não linear mais sofisticado.

Por fim, a proposta desse trabalho foi mostrar um algoritmo para a reconstrução de uma imagem de ressonância magnética por amostragem compressiva. Isso é uma solução em *software*, mas não precisa ficar somente nessa área. Talvez seja possível produzir o *hardware* que rode o algoritmo para que aja como interface para equipamento de ressonância magnética, ou até mesmo promover alterações no *hardware* existente ao permitir o uso de menos sensores.



## REFERÊNCIAS

- BARANIUK, R. G. Compressive Sensing: lecture notes. **IEEE Signal Processing Magazine**, [S.l.], v.24, n.4, p.118–121, Julho 2007.
- BINMORE, K. G. **The Foundations of Analysis**: a straightforward introduction — book 2: topological ideas. 1st.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- CAMPBELL, E. W.; LYNN, C. K. The Physical Examination. In: WALKER, H. K.; HALL, W. D.; HURST, J. W. (Ed.). **Clinical Methods**: the history, physical, and laboratory examinations. Boston: Butterworth, 1990.
- CANDÈS, E. J.; TAO, T. Decoding by Linear Programming. **IEEE Transactions on Information Theory**, [S.l.], v.51, n.12, p.4203–4215, Dezembro 2005.
- CANDÈS, E. J.; WAKIN, M. B. An Introduction To Compressive Sampling. **IEEE Signal Processing Magazine**, [S.l.], v.25, n.2, p.21–30, Março 2008.
- DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- DAVENPORT, M. A. et al. Introduction to Compressive Sensing. In: ELDAR, Y. C.; KUTYNIOK, G. (Ed.). **Compressive Sensing**: theory and applications. 1st.ed. London: Cambridge University Press, 2012.
- DEKA, B.; DATTA, S. **Compressed Sensing Magnetic Resonance Image Reconstruction Algorithms**: a convex optimization approach. 1st.ed. Singapore, Singapore: Springer Nature Singapore, 2019.
- FLETCHER, R. **Practical Methods of Optimization**. 2nd.ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- FOUCART, S.; RAUHUT, H. **A Mathematical Introduction to Compressive Sensing**. 1st.ed. New York, NY, USA: Birkhäuser, 2013.
- FROST, O. L. An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing. **Proceedings of the IEEE**, [S.l.], v.60, n.8, p.926–935, Agosto 1972.

HAJAR, M. et al. Discrete random sampling: theory and practice in machine monitoring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, [S.l.], v.123, p.386–402, 2019.

LOGAN, L. A. S. . B. F. The Fourier Reconstruction of a Head Section. **IEEE Transactions On Nuclear Science**, [S.l.], v.NS-21, n.3, p.21–43, June 1974.

MEYER, C. D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. 1st.ed. Philadelphia,: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

MUNSON, D. C. A Note on Lena. **IEEE Transactions On Image Processing**, [S.l.], v.5, n.1, p.3–3, January 1996.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. 4th.ed. Boston: McGraw Hill, 2002.

PARREIRA, W. D. **Comportamento estocástico do algoritmo kernel least-mean-square**. 2012. Tese (Doutorado) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

PRESTON, D. C. **Magnetic Resonance Imaging (MRI) of the Brain and Spine: basics**. 2022.

ROUGHGARDEN, T.; VALIANT, G. **CS168: the modern algorithmic toolbox compressive sensing**. 2021.

SALMENPERA, T. M.; DUNCAN, J. S. Imaging in Epilepsy. **Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry**, [S.l.], v.3, n.76, p.2–10, 2005.

SALOMON, D. **Data Compression: the complete reference**. 3rd.ed. [S.l.: s.n.], 2004. 876p.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell Systems Technical Journal**, [S.l.], v.27, n.3, p.379–423, Jul 1948.

THORNTON, M. A.; TAMIR, D. I. "**Summed social cognition: additive neural representations of situations, mental states, and actions**". [S.l.]: OpenNeuro, 2022.

VASANAWALA, S. S. et al. Improved Pediatric MR Imaging with Compressed Sensing. **Radiology**, [S.l.], v.256, n.2, p.607–616, August 2010.

VASWANI, N. **EE520 Special Topics Class on Compressive Sensing**. 2022.

WANG, H. et al. Three-dimensional hybrid-encoded MRI using compressed sensing. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON BIOMEDICAL IMAGING (ISBI), 2012. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2012. p.398–401.

WHO. **World Health Organization – Epilepsy**. Acessado em Abril de 2022, Disponível em: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/epilepsy>.

YOSHIKAWA, G. T.; CASTRO, R. C. **Manual da semiologia médica: a prática do exame físico**. 1st.ed. Belém, Pará: EDUEPA, 2015.