

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Ian Gabriel Souza Lanza

**CONTROLE DE ATITUDE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS
APLICADO A UM CUBESAT-3U**

Santa Maria, RS
2022

Ian Gabriel Souza Lanza

CONTROLE DE ATITUDE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS APLICADO A UM CUBESAT-3U

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. André Luís da Silva

Santa Maria, RS
2022

Ian Gabriel Souza Lanza

CONTROLE DE ATITUDE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS APLICADO A UM CUBESAT-3U

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

Aprovado em 26 de agosto de 2022:

André Luís da Silva, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Andrei Piccinini Legg, Dr. (UFSM)

Lucas Vizzotto Bellinaso, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas oportunidades.

Agradeço à minha família, pois a eles devo tudo. Especialmente minha mãe, Andrea e meus irmãos, Victor e Breno, que estiveram ao meu lado vivenciando cada momento.

Agradeço às minhas amigas Deny e Letícia que compartilharam comigo essa aventura de virem estudar em outro estado e também por estarem ao meu lado durante os desafios que enfrentei.

Agradeço ao meu professor orientador Dr. André Luís pela sua dedicação em lecionar, não somente no TCC mas também nas disciplinas durante minha graduação.

Agradeço ao Dr. André Schuch e o Dr. Nelson Schuch por me ajudarem a me tornar uma pessoa mais íntegra e profissional.

Agradeço à Universidade Federal de Santa Maria por ter tido a oportunidade de morar na Casa do Estudante.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram para o meu crescimento acadêmico e profissional durante esses anos.

It always seems impossible until it's done.

(Nelson Mandela)

RESUMO

CONTROLE DE ATITUDE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS APLICADO A UM CUBESAT-3U

AUTOR: Ian Gabriel Souza Lanza
ORIENTADOR: André Luís da Silva

O controle de atitude de veículos espaciais tem sido tema de bastante relevância nos últimos anos, apresentando requisitos de missão cada vez mais restritivos, por exemplo: o controle de apontamento com precisão; a aquisição rápida de vários alvos; e o rastreamento, sendo requisitos indispensáveis. O presente trabalho apresenta o estudo da aplicação de um controlador por realimentação de quatérnios considerando a manobra de reorientação repouso-repouso em torno do eixo de Euler. A rotação em torno do eixo de Euler provê a trajetória angular mais curta entre duas orientações. A lei de controle consiste basicamente na realimentação de quatérnios de erro e da velocidade angular do veículo. Com os resultados obtidos, foi possível demonstrar que a manobra repouso-repouso - com grande variação angular em torno do eixo de Euler - pode ser alcançada pela escolha adequada das matrizes de ganhos do controlador. Para a implementação do controlador, considerou-se como atuador um conjunto de rodas de reação na configuração pirâmide. Além disso, foi inserido ruído branco gaussiano como distúrbio externo, associado à atuação das rodas de reação.

Palavras-chave: CubeSat-3U; Atitude; Quatérnio; Rodas de reação; Repouso-repouso.

ABSTRACT

QUATERNION FEEDBACK ATTITUDE CONTROL APPLIED TO A CUBESAT-3U

AUTHOR: Ian Gabriel Souza Lanza

ADVISOR: André Luís da Silva

The attitude control of a spacecraft has been subject of great relevance in recent years, presenting increasingly restrictive mission requirements, for example: precision points control; rapid multi target acquisition; and tracking capabilities, which are indispensable requirements. This work aims to develop a quaternion feedback controller for spacecraft eigenaxis rotational rest-to-rest maneuver. The Euler's eigenaxis rotation that provides the shortest angular path between two orientations. The control law basically consists of the feedback of error quaternions and body rates. The obtained results show that large-angle, rest-to-rest maneuver about the Euler's eigenaxis can be simply achieved by a proper selection of feedback gain matrices of the quaternion feedback controller. For the implementation of the controller, a set of reaction wheels in pyramid configuration was considered as an actuator. In addition, white Gaussian noise was injected as an external disturbance, associated with the reaction wheels.

Keywords: CubeSat-3U; Attitude; Quaternion; Reaction wheels; Rest-to-rest.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Número de lançamentos de satélites por ano, com previsões	10
Figura 1.2 – Cronograma de atividades do TCC II	13
Figura 2.1 – Variações de unidades de CubeSats	14
Figura 2.2 – Representação do P-POD para CubeSats 1U ou 2U	15
Figura 2.3 – Arquitetura geral do sistema de controle de atitude	18
Figura 2.4 – Configurações de montagem da roda de reação.	21
Figura 2.5 – Representação dos dois sistemas de referência A e B	24
Figura 2.6 – Rotação representada por um eixo e ângulo de Euler	27
Figura 2.7 – Corpo rígido em movimento em relação a um referencial newtoniano	31
Figura 2.8 – Veículo rígido com o referencial B fixo ao corpo com origem no cm	32
Figura 2.9 – Corpo rígido com dois sistemas de referência fixos ao corpo, B e B'	36
Figura 3.1 – Modelo representativo de um CubeSat-3U	47
Figura 3.2 – Rodas de reação de CubeSat 4RW0 na configuração pirâmide	48
Figura 4.1 – (a) Velocidade angular simulada; (b) Gráfico q_i vs. q_j ; (c) Comportamento temporal dos quatérnios	52
Figura 4.2 – (a)-(c) Torque de controle sobre os eixos do corpo; (d) Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação	53
Figura 4.3 – Torque de controle referente a cada uma das rodas de reação u_{ri}	54
Figura 4.4 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ ..	55
Figura 4.5 – (a) Velocidade angular simulada; (b) Gráfico q_i vs. q_j ; (c) Comportamento temporal dos quatérnios	56
Figura 4.6 – (a)-(c) Torque de controle sobre os eixos do corpo; (d) Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação	56
Figura 4.7 – Torque de controle referente a cada uma das rodas de reação u_{ri}	57
Figura 4.8 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ ..	58
Figura 4.9 – (a) Velocidade angular simulada; (b) Gráfico q_i vs. q_j ; (c) Comportamento temporal dos quatérnios	59
Figura 4.10 – (a)-(c) Torque de controle sobre os eixos do corpo; (d) Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação	60
Figura 4.11 – (a) Velocidade angular simulada; (b) Gráfico q_i vs. q_j ; (c) Comportamento temporal dos quatérnios	61
Figura 4.12 – (a)-(c) Torque de controle sobre os eixos do corpo; (d) Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação	62
Figura 4.13 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ ..	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	MOTIVAÇÃO	11
1.2	OBJETIVOS	12
1.3	CRONOGRAMA	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	CUBESAT	14
2.2	SUBSISTEMAS DOS CUBESATS	15
2.2.1	Sistema Elétrico de Potência - EPS	16
2.2.2	Determinação de Atitude e Sistema de Controle - ADCS	16
2.2.3	Sistema de Comunicações	16
2.2.4	Sistema de Telemetria, Rastreamento e Comando - TT&C	16
2.2.5	Sistema de Estruturas e Mecanismos	17
2.2.6	Sistema de controle térmico - TCS	17
2.3	SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE	17
2.3.1	Sistema de Controle de Atitude	18
2.3.2	Atuadores de atitude - rodas de reação	19
2.3.2.1	<i>Características das rodas de reação</i>	20
2.3.2.2	<i>Distúrbios das rodas de reação</i>	20
2.3.2.3	<i>Configurações de rodas de reação</i>	21
2.3.3	Modos de operação do ADCS	22
2.4	CINEMÁTICA DE ROTAÇÃO	23
2.4.1	Matriz de cossenos diretores	23
2.4.2	Rotação em torno do eixo de Euler	26
2.4.3	Quatérnios	27
2.5	DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO	30
2.5.1	Momento angular de um corpo rígido	30
2.5.2	Matriz de inércia e diádica de inércia	32
2.5.3	Eixos Principais	35
2.5.4	Equações do movimento de rotação de Euler	38
2.5.5	Dinâmica de um veículo rígido com rotores	41
2.6	MANOBRAS DE REORIENTAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS	42
2.6.1	Controle por realimentação de Quatérnio	42
2.6.2	Manobras de rotação em torno do Eixo de Euler	44
3	METODOLOGIA	46
3.1	CUBESAT-3U	46
3.2	ATUADORES	47
3.3	REQUISITOS DO ADCS	48
3.4	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS	49
3.5	DISTÚRBIOS EXTERNOS	49
3.6	CONDIÇÕES INICIAIS DE SIMULAÇÃO	50
4	RESULTADOS	51
4.1	RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 1	52
4.2	RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 2	55
4.3	RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 3	58
4.4	RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 4	60

5	CONCLUSÕES.....	64
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	65

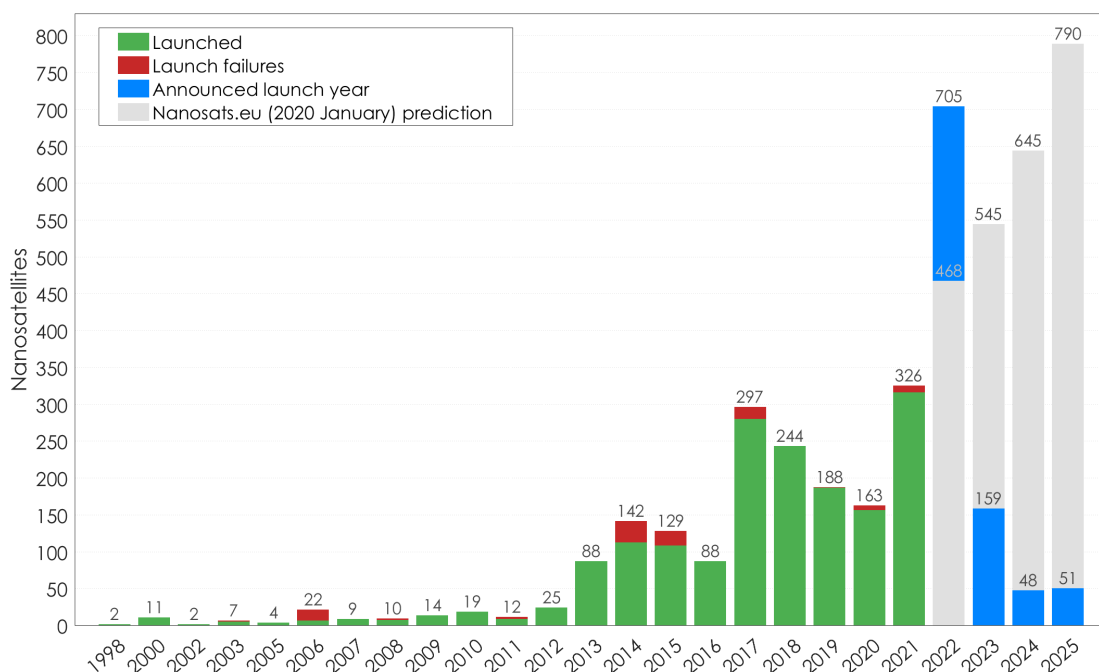
1 INTRODUÇÃO

Ao longo da última década, universidades, indústria e entidades governamentais vêm demonstrando que pequenos satélites são um instrumento capaz e viável de fornecer uma maneira mais rápida e acessível ao espaço. Essa democratização de acesso ao espaço se deu através de uma classe revolucionária denominada CubeSats.

Segundo Fortescue (2011), essa nova categoria revolucionou as práticas *hands-on* na área espacial. Obviamente, os CubeSats não atendem a todos os objetivos de uma missão, no entanto, com o avanço da capacidade de processamento a bordo, muitas missões, até agora viáveis somente com grandes satélites, tornaram-se possíveis com os satélites de pequeno porte a uma fração do custo da missão convencional. Ao contrário dos satélites maiores, que exigem grandes compromissos financeiros e têm longos ciclos de desenvolvimento.

O uso de CubeSats proporcionou um crescimento significativo ao longo da última década. A Figura 1.1 mostra a evolução do número de lançamentos de nanosatélites, entre os quais os CubeSats correspondem a mais de 90% do total de lançamentos, de acordo com Nanosats (2022).

Figura 1.1 – Número de lançamentos de satélites por ano, com previsões



Fonte: Nanosats (2022).

Apesar dos CubeSats não terem surgido com requisitos rígidos em relação aos seus subsistemas, com o passar do tempo, os desenvolvedores tornaram-se mais ambiciosos em relação as missões realizadas por estes satélites. Isso resultou em requisitos

cada vez mais exigentes, que só se tornaram viáveis à medida que as tecnologias relevantes progrediram e se tornaram disponíveis. Esta evolução nos requisitos é, em especial, relevante ao ADCS - Sistema de Determinação e Controle de Atitude (XIA, 2017).

Os primeiros CubeSats não tinham determinação de atitude ou sistema de controle, pois não havia requisitos de atitude. Como alguns conceitos de missão começaram a exigir conhecimento da atitude e da velocidade angular, e até mesmo estabilização, alguns CubeSats foram equipados com sensores e utilizaram métodos de controle passivo para atender às suas necessidades. Sendo assim, algumas missões começaram a exigir conhecimento preciso de atitude e controle total de 3 eixos. A crescente demanda de atitude dos satélites impôs um desafio significativo no projeto e desenvolvimento de ADCSs à medida que se tornaram gradualmente menores.

1.1 MOTIVAÇÃO

O **Programa NanosatC-BR** de Desenvolvimento de Cubesats tem como objetivos gerais a capacitação de recursos humanos para a realização de pesquisa e desenvolvimento no setor espacial, e conseqüentemente a melhoria da qualidade e do nível dos cursos de graduação nas instituições em que se faz presente. O primeiro nanossatélite desenvolvido pelo programa foi o NanosatC-BR1, sendo este o primeiro CubeSat brasileiro - lançado em 2014. O BR1 trouxe grandes oportunidades em diversas áreas dentro do programa, pois possibilitou criar laços entre universidades nacionais e internacionais e empresas do setor aeroespacial, além disso, fomentou a pesquisa e desenvolvimento para alunos de graduação e pós-graduação. O sucesso do NanosatC-Br1 impulsionou outras missões brasileiras com CubeSats.

O segundo nanossatélite desenvolvido foi o NanoSatC-BR2, sendo lançado no início de 2021. A expectativa de sucesso da missão era ainda maior, pela experiência adquirida com o primeiro e também por trazer mais desafio no desenvolvimento das cargas úteis.

Atualmente ambos os satélites encontram-se funcionais e em órbita. No entanto, o BR2 não atingiu todos os objetivos da missão devido a uma limitação de comunicação com o satélite. Em ambas as missões foi possível adquirir "lições aprendidas", que estão sendo levadas em consideração para a concepção e desenvolvimento do terceiro satélite do programa, o NanoSatC-BR3. Este ainda se encontra em fase de concepção.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho de conclusão de curso pode ser escrito como: "Implementar e avaliar o desempenho de uma técnica de controle de atitude de um CubeSat por realimentação de quatérnios". Dos objetivos específicos, propõe-se:

- Obter as equações de cinemática dos quatérnios considerando um corpo rígido;
- Obter as equações do movimento de rotação de Euler para um veículo rígido, considerando a dinâmica dos atuadores;
- Compreender e implementar a técnica de controle por realimentação de quatérnios para manobras de reorientação;
- Implementar as equações de cinemática e dinâmica, além da lei de controle em rotinas no *software* MATLAB;
- Analisar os resultados obtidos.

1.3 CRONOGRAMA

Considerando o calendário oficial 2022 da Universidade Federal de Santa Maria, as atividades a serem desenvolvidas no TCC II estão compreendidas dentro do período letivo de 2022.1. Na Figura 1.2 é apresentado o cronograma proposto para o desenvolvimento das atividades semanalmente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

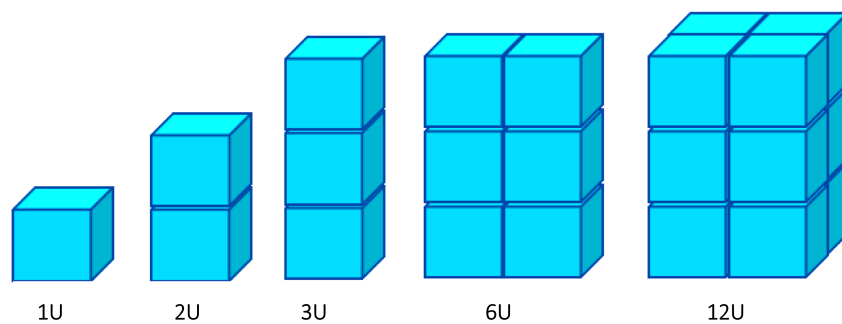
2.1 CUBESAT

O conceito CubeSat iniciou-se em 1999 como um projeto colaborativo entre a Universidade Politécnica do Estado da Califórnia (Cal Poly) e a Universidade de Stanford. O objetivo era padronizar o desenvolvimento de pico e nanossatélites, a fim de reduzir custos e tempo de desenvolvimento, aumentando assim a acessibilidade ao espaço. Conforme *CubeSat Design Specification* (LEE, 2014), CubeSat é uma categoria de satélites com tamanho e formato padronizados, em que são baseados na unidade padrão "U". Um CubeSat 1U é definido como um cubo de 10cm e com massa de até 2kg. Unidades maiores se tornaram populares devido a necessidade de maiores cargas úteis. As dimensões apresentadas a seguir consideram os trilhos (*rails*) de suporte:

- 1,5U apresenta dimensões 10 cm x 10 cm x 17,02 cm e com massa até 3 kg;
- 2U é um cubo com 10 cm x 10 cm x 22,70 cm e massa até 4 kg;
- 3U é um cubo com 10 cm x 10 cm x 34,05 cm e massa até 6 kg.

Outras unidades ainda maiores podem ser encontradas, conforme é apresentado na Figura 2.1:

Figura 2.1 – Variações de unidades de CubeSats

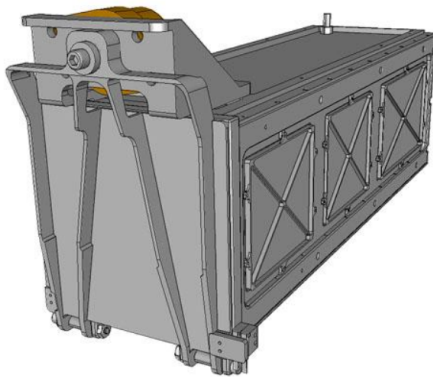


Fonte: Autor.

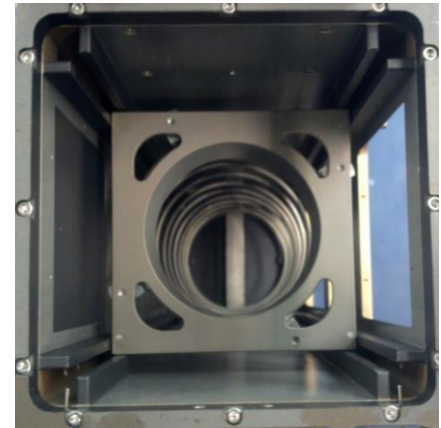
A interface entre as cargas úteis e o veículo lançador é denominada *CubeSat Dispenser*, mais conhecido como P-POD, o qual pode transportar até três CubeSats 1U, fornecendo segurança a eles, à carga útil primária e aos outros CubeSats. A Figura 2.2 apresenta o P-POD e a sua seção transversal, onde é possível observar uma porta e um mecanismo de mola utilizados durante a injeção em órbita.

Figura 2.2 – Representação do P-POD para CubeSats 1U ou 2U

(a) P-POD



(b) Seção transversal do P-POD.



Fonte: Lee (2014).

A padronização do *CubeSat Dispenser* permitiu a atuação de novas entidades no ramo espacial, como pequenas empresas e universidades, já que o baixo custo de produção desse tipo de satélite se mostra bastante atrativo para eles. Além disso, no campo educacional, o conceito de CubeSat permite o desenvolvimento de projetos em aplicações reais, sendo capaz de vivenciar todas as etapas de desenvolvimento, operação e exploração de satélites por meio de pesquisa prática e experiências de forma barata.

De acordo com a Space News (2015), empresas espaciais têm mostrado grande interesse nesse negócio, pois é possível obter excelentes resultados a partir de um baixo investimento. Além disso, esta pode ser uma forma de testar novas tecnologias ou de verificar a viabilidade de grandes missões a um baixo custo, já que esses satélites fornecem uma plataforma de baixo custo para vários tipos de missões, tais como: exploração espacial planetária, observação da Terra e ciências da Terra e do espaço.

As missões de CubeSats são desenvolvidas para órbita terrestre baixa (LEO), de modo que os efeitos da radiação possam ser ignorados, sendo assim possível a utilização de COTS - componentes eletrônicos pronto para uso (TRIANA, 2015).

2.2 SUBSISTEMAS DOS CUBESATS

Os vários subsistemas de um satélite são responsáveis pelas tarefas necessárias ao seu bom funcionamento. As divisões típicas de um nanossatélite consistem nos seguintes sistemas.

2.2.1 Sistema Elétrico de Potência - EPS

A principal tarefa do sistema elétrico de potência (EPS) é fornecer aos demais subsistemas uma fonte de alimentação segura e contínua. Os principais componentes desse sistema são painéis solares, baterias e reguladores, que levam à conversão da energia solar em elétrica, armazenamento de energia em baterias, regulação da energia elétrica e distribuição da energia para outros subsistemas.

2.2.2 Determinação de Atitude e Sistema de Controle - ADCS

O sistema de determinação e controle de atitude (ADCS) é responsável por manter a orientação de um veículo espacial, além de realizar as manobras necessárias. O man-
timento da orientação no espaço é chamado de estabilização de atitude. A manobra de atitude é o processo de reorientação, alterando o apontamento do veículo.

O ADCS coleta dados dos sensores de atitude e os processa para determinar a atitude atual do satélite. Em seguida, ele compara a atitude atual com a atitude desejada e calcula a diferença entre elas, usando um algoritmo específico para ativar os atuadores apropriados, e assim remover ou reduzir o erro.

2.2.3 Sistema de Comunicações

Um dos principais requisitos de um satélite é a capacidade de se comunicar com a Terra de maneira segura, enviando e recebendo dados da estação terrena. Estes dados podem ser a saída de sensores, os quais fornecem detalhes sobre a saúde do satélite, dados de telemetria, fornecendo a localização orbital do satélite e telecomandos enviados da estação terrena para executar uma tarefa específica.

2.2.4 Sistema de Telemetria, Rastreamento e Comando - TT&C

O sistema de telemetria, rastreamento e comando (TT&C) de um satélite fornece o elo de comunicação mais importante entre ele e a estação terrena. Este sistema coleta todos os dados dos sensores e os convertem em dados contínuos a fim de transmiti-los à estação terrena via *downlink*. Esses dados de telemetria representam as características de desempenho do satélite, sua localização orbital e os dados de configuração operacional.

Na estação terrena, o sistema de rastreamento fornece as informações necessárias para calcular os elementos orbitais. O sistema de controle da estação terrena utiliza os

dados recebidos do satélite para corrigir o posicionamento da antena e a configuração do sistema de comunicação. O sistema de telecomando envia comandos da Terra para o satélite via *uplink* para realizar ações específicas, como manobras orbitais, acionamento das cargas úteis e controle da antena (WERTZ, 1999).

2.2.5 Sistema de Estruturas e Mecanismos

O sistema de estruturas e mecanismos representa o esqueleto do satélite. A estrutura fornece um chassi extremamente resistente e leve para comportar todos os outros subsistemas do satélite. A estrutura deve manter sua integridade durante todos os modos da missão. Durante o lançamento, a estrutura deve resistir às forças e vibrações para manter os componentes no lugar, para uma operação adequada.

2.2.6 Sistema de controle térmico - TCS

O subsistema de controle térmico (TCS) mantém as temperaturas da carga útil e de todos os componentes do satélite dentro dos limites especificados, de modo a não comprometer os revestimentos, isolamentos e radiadores. As principais fontes externas de calor são a luz solar direta, a luz solar refletida da Terra e o infravermelho irradiado da Terra.

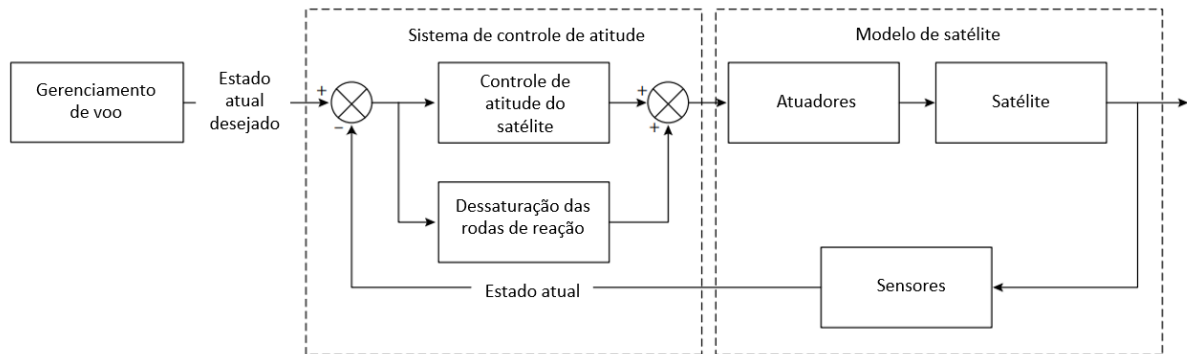
2.3 SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE

O Sistema de Determinação e Controle de Atitude (ADCS) pode ser dividido em dois subsistemas, o subsistema de determinação de atitude (ADS) e o subsistema de controle de atitude (ACS).

A determinação da atitude é o processo de calcular a orientação do veículo espacial em relação a um referencial inercial ou a algum objeto de interesse, como a Terra. O ADS usa uma combinação de sensores e modelos matemáticos para obter as componentes vetoriais no referencial do corpo e no inercial, usualmente na forma de quatérnios, ângulos de Euler ou matriz de rotação. Sensores são necessários para detectar a orientação do satélite.

Os sensores são usados para medir a atitude de um veículo espacial em relação ao espaço inercial, bem como a velocidade angular do veículo, o que leva à detecção da orientação do satélite. Os principais sensores disponíveis na área de satélites são: **Sensor da Terra**, o qual detecta a direção para a Terra por meio de uma câmera infravermelha;

Figura 2.3 – Arquitetura geral do sistema de controle de atitude



Fonte: Adaptado de Narkiewicz, Sochacki e Zakrzewski (2020).

Sensor solar: é usado para fornecer uma medição vetorial para o Sol medindo o ângulo do vetor solar em relação ao plano no qual o sensor é colocado; **Sensor de estrelas:** é um instrumento de precisão dependente da luz, que determina a atitude de um veículo espacial observando estrelas com alta precisão; **Magnetômetros:** são sensores baratos, leves e altamente confiáveis, os quais medem a densidade de fluxo do campo magnético em que é colocado; **Giroscópios:** determinam a atitude medindo a velocidade de rotação do veículo; e **GPS:** a determinação precisa da posição é obtida por meio de um receptor GPS comercial de baixo custo que foi modificado para funcionar em LEO.

Já o controle de atitude (ACS) é o processo de orientar o veículo espacial na atitude desejada com precisão. Este consiste em duas áreas: estabilização de atitude e **controle de manobra de atitude**. A estabilização da atitude é o processo de manutenção de uma atitude existente em relação a algum sistema de referência externo relativo. O controle de manobra de atitude é o processo de reorientar o veículo espacial de uma atitude para outra. O atuador e o controlador são as partes principais do sistema de controle de atitude. O atuador, que pode ser ativo ou passivo, aplica o torque desejado para ajustar a atitude. A arquitetura geral de um sistema de controle de atitude de satélite é apresentada na Figura 2.3. Vale ressaltar, que o estudo apresentado aqui não considera o bloco de "Sensores".

2.3.1 Sistema de Controle de Atitude

O objetivo principal do Sistema de Controle de Atitude (ACS) é orientar o satélite para a atitude desejada com precisão suficiente no ambiente espacial. Algum tipo de controle de atitude é necessário para alterar a atitude do satélite ou mantê-lo em uma posição estável. O controle de atitude pode ser considerado como controle ativo (ou seja, um controlador calcula os torques de controle necessários e atua no satélite para ajustar sua

atitude à posição desejada) ou controle passivo (ou seja, o satélite usa torques externos que ocorrem devido a sua interação com o ambiente e, portanto, não pode ser evitada. Neste caso, as perturbações estão sendo usadas para forçar a atitude do satélite). Dos atuadores de atitude comumente utilizados, pode-se citar: os **thrusters**, os quais funcionam como um sistema para alcançar a estabilização sobre os três eixos - dois thrusters são posicionados em cada eixo para fornecer torque como binário; o **reaction wheel**, sendo este um rotor que é acelerado por motor elétrico fornecendo alta inércia; e o **magnetorquer**, utilizado para produzir um momento magnético controlável que interage com o campo magnético da Terra para produzir um torque mecânico no satélite. Além disso, há os atuadores por estabilização passiva, sendo uma solução quando é necessária baixa precisão de apontamento, especialmente com estabilização de volume, massa e potência. A seguir é apresentado o tipo de atuador a ser considerado neste estudo.

2.3.2 Atuadores de atitude - rodas de reação

As rodas de reação (*reaction wheels*, RWs, em inglês) são usadas como os principais atuadores de controle de atitude na maioria dos veículos espaciais. O veículo com *bias* de momento pode usar uma ou duas rodas de reação, mas o controle total de atitude de três eixos requer três ou mais rodas.

Como dito anteriormente, uma roda de reação é constituída por um rotor com alta inércia que é acelerado. Essa aceleração produzirá um torque sobre as rodas que, consequentemente, irá gerar um torque com sinal oposto no satélite, podendo ser usado para controlar a sua velocidade angular. A principal vantagem desse dispositivo é que ele tem precisões muito altas, e sua principal desvantagem é que apresenta elevado consumo de energia e compõe grande percentual de massa do satélite, além do torque residual e distúrbios presentes.

Segundo Markley (2014), embora grande parte das rodas de reação tenham operado sem falhas por décadas, falhas têm sido um problema em muitas missões espaciais. Fornecer rodas de reação extras para redundância dá alguma proteção, mas a falha de uma roda de reação é frequentemente seguida pela falha de outras rodas do mesmo projeto no mesmo veículo, que foi o caso, por exemplo, do satélite americano Far Ultraviolet Spectroscopy Explorer com suas quatro rodas de reação tornando-se inoperante uma após a outra entre os anos de 2001 e 2007.

2.3.2.1 Características das rodas de reação

Um conjunto de rodas de reação contém um disco giratório, normalmente suportado por rolamentos esféricos, um motor elétrico CC e componentes eletrônicos associados. As rodas de reação são produzidas para uma ampla faixa operacional, atingindo torque máximo de 0,01 a 1,0 Nm, momento angular máximo de 2 a 250 Nms e velocidades de rotação máximas de 1.000 a 6.000 rpm.

Os motores de algumas rodas de reação tem como entrada um comando de torque, em outras, há um controlador interno de malha fechada que mantém a velocidade da roda de reação em um valor comandado.

2.3.2.2 Distúrbios das rodas de reação

Apesar das rodas de reação serem uma ótima opção para fornecer controle preciso em veículos espaciais, elas também são uma das principais fontes de distúrbios de atitude.

De acordo com Dennehy (2019), as fontes primárias de distúrbios em mecanismos rotativos como RWs são:

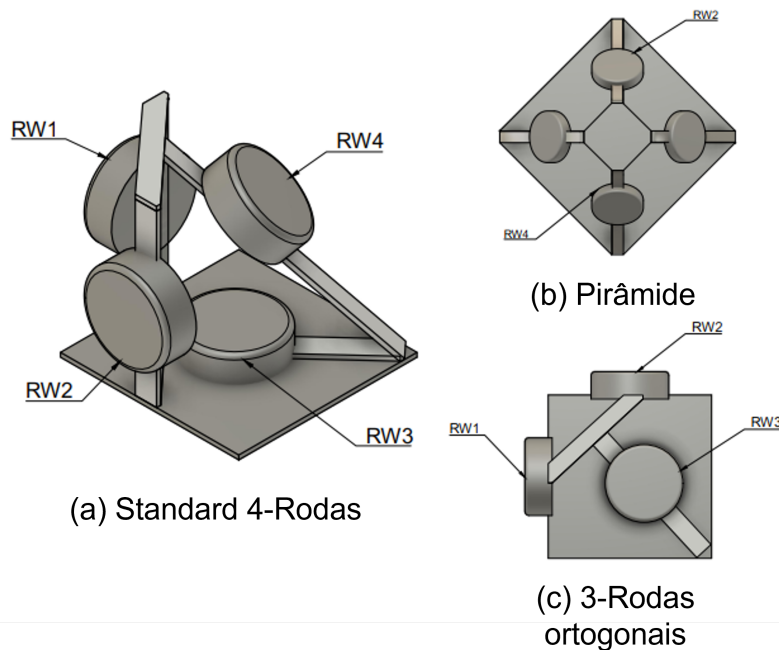
- **Desbalanceamento de massa das rodas**, tanto estático quanto dinâmico. Esta é geralmente a fonte mais significativa das perturbações emitidas por uma roda. O desbalanceamento estático diz respeito ao deslocamento do centro de gravidade da roda em relação ao seu eixo de rotação. O resultado é um distúrbio de força radial. Já o desbalanceamento dinâmico resulta em um distúrbio de torque de rotação na roda, o qual está relacionado com o produto de inércia da roda em torno do seu eixo de rotação.
- **Imperfeições nos rolamentos**, tanto nas esferas de rolamento quanto no separador. Essas imperfeições incluem defeitos na esfera, rugosidade da superfície, irregularidade e excentricidade mecânica. Tais irregularidades podem produzir distúrbios nos sub-harmônicos e harmônicos de ordem superior na velocidade de rotação das RWs.
- **Efeitos de atrito viscoso e amortecimento de Coulomb do rolamento**: em um motor de RW, os efeitos de atrito podem ser: atrito viscoso, que varia com a velocidade e temperatura; e o amortecimento de Coulomb, que é constante com a dependência da direção de rotação da roda. Efeitos de atrito *Stiction* e *Stribeck* raramente são vistos.
- **Onda de torque**: isso é causado pela comutação de fase de alta frequência em um motor CC *brushless*. A ondulação de torque representa a quantidade de variação no torque do motor, e a sua magnitude é inversamente proporcional à velocidade da roda, que pode ser significativa quando operando próximo de zero.

- **Torque de engrenagem** (ou retenção): é uma perturbação que está presente em motor CC *brushless*. É devido à mudança na relutância magnética do estator de ferro, sendo independente da velocidade da roda.

2.3.2.3 Configurações de rodas de reação

Existem diversos tipos de configurações de rodas de reação. Na Figura 2.4 são apresentados as três configurações mais comuns encontradas em veículos espaciais: Standard 4-Rodas, com três rodas ortogonais e uma roda oblíqua redundante; configuração em pirâmide com quatro rodas; e 3-Rodas ortogonais.

Figura 2.4 – Configurações de montagem da roda de reação.



Fonte: Folami (2021).

Ismail e Varatharajoo (2010) definem a contribuição de torque do atuador, considerando os tipos de configurações de RWs, para cada eixo principal $\{x, y, z\}$ do veículo espacial por meio de uma relação com a matriz de mapeamento, apresentada na Equação (2.1):

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = A_{RW} \begin{bmatrix} \tau_{rw1} \\ \tau_{rw2} \\ \tau_{rw3} \\ \tau_{rw4} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde τ_x , τ_y e τ_z são os torques aplicados ao satélite nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente, e τ_{rw_i} é o torque gerado por cada roda de reação em seu respectivo eixo de rotação. Já a matriz de mapeamento A_{RW} varia de acordo com o tipo de configuração, a qual é apresentada na Equações (2.2), (2.3) e (2.4).

$$A_{RW1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos(\delta) \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 & -\cos(\delta) \sin(\gamma) \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$A_{RW2} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \sin(\gamma) & -\cos(\delta) \cos(\gamma) & -\cos(\delta) \sin(\gamma) & \cos(\delta) \sin(\gamma) \\ -\cos(\delta) \sin(\gamma) & -\cos(\delta) \cos(\gamma) & \cos(\delta) \cos(\gamma) & \cos(\delta) \cos(\gamma) \\ \sin(\delta) & \sin(\delta) & \sin(\delta) & \sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$A_{RW3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde A_{RW_i} é a matriz de mapeamento para a configuração i , e $i = 1$ refere-se à configuração Standard 4-Rodas, $i = 2$ refere-se à configuração Pirâmide e $i = 3$ refere-se à configuração 3-Rodas ortogonais. Os ângulos δ e γ são, respectivamente, os ângulos das rodas no plano e fora do plano.

A configuração Pirâmide das rodas de reação tem a vantagem de ter um momento angular resultante nulo quando todas as rodas estão girando na mesma velocidade angular, além disso, é capaz de gerar torque em qualquer direção mesmo quando uma das rodas de reação venha a ficar inoperante. As configurações Standard 4-Rodas e Pirâmide apresentam quatro rodas de reação e fornecem controle de estabilização redundante nos três eixos, aumentando assim a capacidade de total de torque. Em contrapartida, a configuração 3-Rodas ortogonais torna o ADCS ineficaz caso ocorra falha em uma das rodas.

2.3.3 Modos de operação do ADCS

O sistema de determinação e controle de atitude deve ser capaz de estimar a atitude e prover controle do veículo espacial. A seguir são apresentados os principais modos de operação presente nos satélites:

- **Detumbling mode (modo de estabilização de atitude):** Após ser ejetado do veículo lançador, o satélite cairá em um movimento descontrolado. O objetivo do modo *detumbling* é diminuir a velocidade angular do satélite de um valor máximo esperado para um velocidade angular mínima, para fins de controle subsequentes.

- **Sun pointing mode (modo de apontamento para o Sol):** após *detumbling*, o satélite deve atingir e manter uma atitude com seus painéis solares orientados para o Sol, visando maximizar a geração de energia elétrica a partir do Sol e carregar as baterias de bordo.
- **Safe-mode (modo de segurança):** o modo é acionado quando detecta-se falha a bordo para o seu diagnóstico ou para a mudança de modos. Todos os sistemas não essenciais são desligados e apenas funções essenciais como gerenciamento térmico, comunicação e controle de atitude estão ativadas.
- **Nominal-mode (modo nominal):** neste modo diferentes componentes podem ser ligados conforme necessário, uma vez que há energia suficiente disponível (provida dos painéis solares para carregar a bateria). As cargas úteis podem ser alimentadas e o OBC (*On-board Computer*) opera na máxima frequência de *clock*.
- **Attitude acquisition mode (modo de aquisição de atitude):** Neste modo, o sistema faz o apontamento geocêntrico do satélite. Isto pode ser feito a partir de qualquer orientação deixada pelo modo de estabilização de atitude. Ele é acionado quando o ADCS está em condições operacionais e o satélite está com baixa velocidade angular. As manobras de aquisição e reaquisição de atitude são geralmente realizadas por meio da interrupção do modo nominal de operação, e por meio de um circuito em malha fechada do sistema de controle de atitude, iniciando-se uma sequência de manobra de atitude.

2.4 CINEMÁTICA DE ROTAÇÃO

As relações de cinemática de atitude de um corpo rígido representam a variação dos parâmetros de orientação do corpo. A seguir são desenvolvidas as equações de cinemática de atitude.

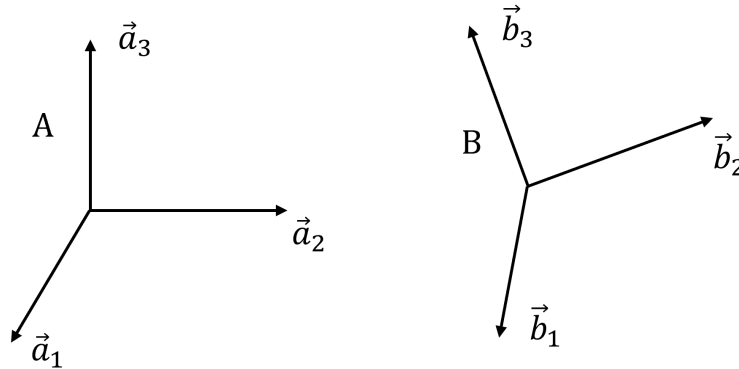
2.4.1 Matriz de cossenos diretores

Considere um sistema de referência A com um conjunto três vetores unitários ortogonais entre si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ e um sistema de referência B com outro conjunto de vetores unitários ortogonais $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, ambos respeitando o sentido da mão direita, conforme mostrado na Figura 2.5. Reescrevendo os vetores de base do sistema B em termos dos

vetores de base do sistema A , tem-se que

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= C_{11}\vec{a}_1 + C_{12}\vec{a}_2 + C_{13}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 &= C_{21}\vec{a}_1 + C_{22}\vec{a}_2 + C_{23}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 &= C_{31}\vec{a}_1 + C_{32}\vec{a}_2 + C_{33}\vec{a}_3\end{aligned}\quad (2.5)$$

Figura 2.5 – Representação dos dois sistemas de referência A e B .



Fonte: Autor.

onde $C_{ij} \equiv \vec{b}_i \cdot \vec{a}_j$ é o cosseno do ângulo entre \vec{b}_i e \vec{a}_j , sendo chamado de cosseno diretor.

Reescrevendo a Equação (2.5) em notação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{B/A} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix}\quad (2.6)$$

onde $\mathbf{C}^{B/A} \equiv [C_{ij}]$ é chamada de matriz de cossenos diretores, a qual descreve a orientação de B em relação ao sistema A .

A matriz de cossenos diretores $\mathbf{C}^{B/A}$ também é chamada de matriz de rotação ou matriz de transformação de coordenadas de A para B . Tal transformação de coordenadas é representada simbolicamente como

$$\mathbf{C}^{B/A} : \quad B \leftarrow A\quad (2.7)$$

Para fins de simplificação, geralmente utiliza-se a notação \mathbf{C} para $\mathbf{C}^{B/A}$. Como cada conjunto de vetores de base de A e B consiste em vetores unitários ortogonais, a matriz de cossenos diretores \mathbf{C} é uma matriz ortonormal; Sendo assim, tem-se que

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T\quad (2.8)$$

Considerando os dois referenciais A e B , mostrados na Figura 2.5, que estão se movendo um em relação ao outro. O vetor de velocidade angular de um referencial B em

relação a um referencial A é denotado por $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/A}$, e é expresso em termos de vetores de base de B conforme segue:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (2.9)$$

onde o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ é dependente do tempo.

Como os referenciais A e B estão girando em relação um ao outro, a matriz de cossenos diretores e seus elementos C_{ij} são funções do tempo. Em relação ao referencial A , aplica-se a derivada no tempo na Equação (2.6) e obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \dot{\mathbf{C}}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \dot{\vec{b}}_1 \\ \dot{\vec{b}}_2 \\ \dot{\vec{b}}_3 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{C}}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times \vec{b}_1 \\ \vec{\omega} \times \vec{b}_2 \\ \vec{\omega} \times \vec{b}_3 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{C}}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$\dot{\mathbf{C}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Definindo a matriz assimétrica $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{\Omega}$ na Equação (2.10) como

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Assim, obtém-se que

$$\left[\dot{\mathbf{C}}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{\Omega} \right] \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Utilizando a notação matricial simplificada, tem-se

$$\dot{\mathbf{C}}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{\Omega} = 0 \quad (2.14)$$

Fazendo a transposta da Equação (2.14) e usando a relação $\Omega^T = -\Omega$, é possível obter a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{C}} + \Omega \mathbf{C} = 0 \quad (2.15)$$

a qual é chamada de equação diferencial cinemática da matriz de cossenos de diretores \mathbf{C} .

Isolando as velocidades angulares ω_1 , ω_2 e ω_3 na Equação (2.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{C}_{21}C_{31} + \dot{C}_{22}C_{32} + \dot{C}_{23}C_{33} \\ \omega_2 &= \dot{C}_{31}C_{11} + \dot{C}_{32}C_{12} + \dot{C}_{33}C_{13} \\ \omega_3 &= \dot{C}_{11}C_{21} + \dot{C}_{12}C_{22} + \dot{C}_{13}C_{23} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim, é possível determinar as componentes da velocidade angular a partir da cinemática da matriz de cossenos diretores.

2.4.2 Rotação em torno do eixo de Euler

Considerando a rotação de um corpo rígido (ou de um sistema referencial) em torno de um eixo arbitrário que é fixo ao corpo e estacionário em relação a um referencial inercial. Uma relação entre as rotações do eixo do corpo e do eixo espacial é obtida. Tal relação fornece uma melhor compreensão da rotação em torno do eixo de Euler e da rotação do eixo espacial.

O teorema de rotação em torno do eixo de Euler afirma que, ao girar um corpo rígido em torno de um eixo que é fixo ao corpo e estacionário em um referencial inercial, a atitude do corpo rígido pode ser alterada de qualquer orientação dada para qualquer outra orientação. Esse eixo de rotação, cuja orientação em relação a um referencial inercial e ao corpo permanece inalterado durante todo o movimento, é chamado de eixo de Euler ou *eigenaxis*.

Supondo que os vetores unitários \vec{a}_i e \vec{b}_i ($i = 1, 2, 3$) sejam fixos nos referenciais A e B , respectivamente. A orientação de B em relação a A é caracterizada por um vetor unitário \vec{e} ao longo do eixo de Euler, como segue:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_1\vec{a}_1 + e_2\vec{a}_2 + e_3\vec{a}_3 \\ &= e_1\vec{b}_1 + e_2\vec{b}_2 + e_3\vec{b}_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde e_i são os cossenos diretores do eixo de Euler em relação aos referenciais A e B , de tal maneira que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Seja $\mathbf{C}^{B/A} = \mathbf{C} = [C_{ij}]$ a matriz de cossenos diretores de B em relação a A , então

a rotação em torno do eixo de Euler também é caracterizada por

$$\begin{bmatrix} e_{1_b} \\ e_{2_b} \\ e_{3_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1_a} \\ e_{2_a} \\ e_{3_a} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

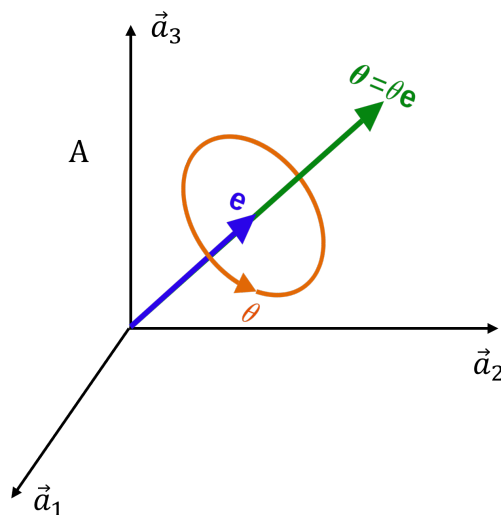
Definindo o eixo de Euler como sendo $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, é possível determinar o eixo de Euler em termos da matriz de cossenos diretores \mathbf{C} e do ângulo principal de rotação θ em torno desse eixo. Assim é obtida a relação apresentada na Equação (2.19):

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.4.3 Quatérnios

Considerando novamente a rotação do eixo de Euler \mathbf{e} em torno de um eixo arbitrário fixo em um referencial B quanto em um referencial inercial A , conforme apresentado na Figura 2.6. A partir da Equação (2.17), é possível definir os quatro **parâmetros de Euler**, conforme mostrado na Equação (2.20):

Figura 2.6 – Rotação representada por um eixo e ângulo de Euler



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin(\theta/2) \\ q_2 &= e_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 &= e_3 \sin(\theta/2) \\ q_4 &= \cos(\theta/2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde θ é o ângulo principal de rotação em torno do eixo de Euler. Como o vetor e é definido por $e = (e_1, e_2, e_3)$, define-se um vetor de quatérnios $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e a parte escalar q_4 tal que

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} + q_4^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (2.21)$$

Isso porque $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Os parâmetros de Euler também são chamados de **quatérnios**. Segundo Wie, Weiss e Arapostathis (1989), os quatérnios definem a atitude de corpo rígido como uma rotação do eixo de Euler. A parte vetorial do quatérnio (as três primeiras componentes) indica a direção do eixo de Euler. A parte escalar do quatérnio (a quarta componente) está relacionada com ângulo principal de rotação em torno do eixo de Euler.

A matriz de cossenos diretores, $\mathbf{C}^{B/A}$, pode ser parametrizada em termos dos quatérnios da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}^{B/A} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, q_4) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde (q_1, q_2, q_3, q_4) é o quatérnio associado com a matriz de cossenos diretores $\mathbf{C}^{B/A}$.

Reescrevendo a matriz de cossenos diretores em termos do vetor quatérnio \mathbf{q} e da matriz antissimétrica $\mathbf{S}(q) = \mathbf{Q}$, sendo eles

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

tem-se que

$$\mathbf{C} = (q_4^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4\mathbf{Q} \quad (2.25)$$

Dada uma matriz de cossenos diretores \mathbf{C} , é possível determinar q_4 e \mathbf{q} da seguinte forma:

$$q_4 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.26)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{4q_4} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad \text{se } q_4 \neq 0 \quad (2.27)$$

Substituindo C_{ij} da Equação (2.25) nas equações diferenciais (2.16), obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\dot{q}_1 q_4 + \dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2 - \dot{q}_4 q_1) \\ \omega_2 &= 2(\dot{q}_2 q_4 + \dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_4 q_2) \\ \omega_3 &= 2(\dot{q}_3 q_4 + \dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_4 q_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Diferenciando a Equação (2.25):

$$0 = 2(\dot{q}_1 q_1 + \dot{q}_2 q_2 + \dot{q}_3 q_3 + \dot{q}_4 q_4) \quad (2.29)$$

Essas quatro equações podem ser combinadas em forma de matriz, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Como a matriz 4×4 na Equação (2.30) é ortogonal, é obtida então a equação diferencial cinemática dos quatérnios, como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Em termos de \mathbf{q} e $\boldsymbol{\omega}$, definidos como $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, é possível reescrever a equação diferencial cinemática (2.31) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} (\omega_4 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Em sistemas de referência inerciais de veículos aeroespaciais, as velocidades angulares, ω_1 , ω_2 e ω_3 são medidas por giroscópios de taxa que são posicionados nos veí-

culos. A equação diferencial cinemática (2.31) é então integrada numericamente usando um computador de bordo para determinar a orientação dos veículos em termos de quatérnios. Os quatérnios não têm singularidade geométrica inerente como os ângulos de Euler. Além disso, eles são adequados para computação em tempo real *on-board* porque não há relações trigonométricas, somente produtos nas equações diferenciais cinemáticas dos quatérnios. Assim, a orientação do veículo atualmente é comumente descrita em termos de quatérnios.

2.5 DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO

O movimento de um corpo rígido no espaço é composto por dois tipos de movimento: o de translação de seu centro de massa (*cm*); e o de rotação do corpo em torno de seu centro de massa; assim, um corpo rígido no espaço é um sistema dinâmico com seis graus de liberdade. A seguir é apresentado o equacionamento do movimento rotacional de um veículo rígido.

2.5.1 Momento angular de um corpo rígido

Considerando um corpo rígido, que está em movimento em relação a um referencial inercial newtoniano N , sendo este referencial fixo no espaço, o que o torna um referencial não acelerado, no qual as Leis de Newton são válidas. A origem do referencial está localizada no centro da Terra. O eixo n_3 aponta para o Polo Norte, o eixo n_1 aponta para o Equinócio Vernal e o eixo n_2 completa o sistema de coordenadas cartesianas de mão direita. Este referencial é comumente chamado ECI - *Earth Centered Inertial*.

Conforme é apresentado na Figura 2.7, a equação de rotação do movimento do corpo em torno de um ponto arbitrário O é dada como

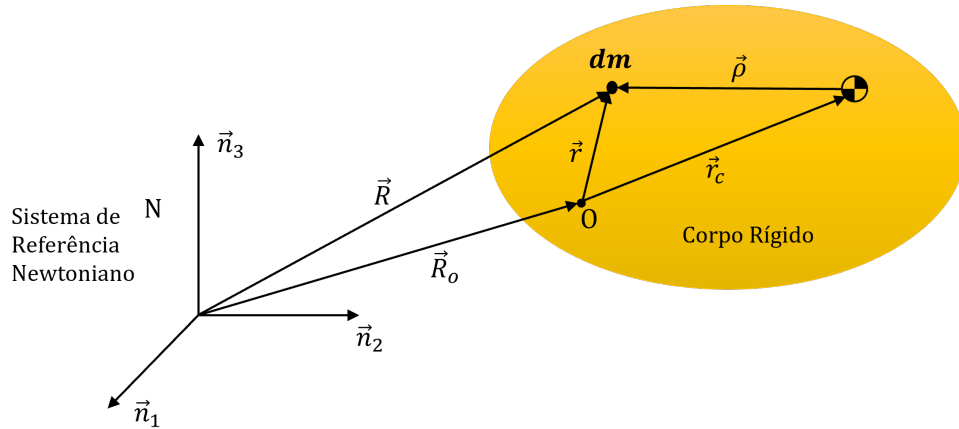
$$\int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm = \vec{M}_o \quad (2.34)$$

onde \vec{r} é o vetor posição de um elemento infinitesimal de massa dm em relação ao ponto O , \vec{R} é o vetor posição de dm em relação a origem do sistema inercial N , $\ddot{\vec{R}}$ é a aceleração inercial de dm e \vec{M}_o é o momento externo total (ou torque) em relação ao ponto O . Seja \vec{r}_c o vetor posição do centro de massa em relação ao ponto O e $\vec{\rho}$ o vetor posição de dm em relação ao centro de massa. Assim, pela definição de centro de massa, obtém-se que

$$\int \vec{r} dm = m\vec{r}_c \quad (2.35)$$

$$\int \vec{\rho} dm = 0 \quad (2.36)$$

Figura 2.7 – Corpo rígido em movimento em relação a um referencial newtoniano



Fonte: Autor.

onde m é a massa do corpo rígido.

A partir da soma vetorial $\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r}$, é possível reescrever a Equação (2.34) da seguinte forma:

$$\dot{\vec{h}}_o + m\vec{r}_c \times \ddot{\vec{R}}_o = \vec{M}_o \quad (2.37)$$

onde \vec{h}_o , chamado de momento angular relativo em torno do ponto O , é definido conforme a Equação (2.38). Já o momento angular absoluto, \vec{H}_o , é definido de acordo com a Equação (2.39):

$$\vec{h}_o = \int \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm \quad (2.38)$$

$$\vec{H}_o = \int \vec{r} \times \dot{\vec{R}} dm \quad (2.39)$$

Combinando as Equações (2.34) e (2.39), obtém-se

$$\dot{\vec{H}}_o + m\dot{\vec{R}}_o \times \dot{\vec{r}}_c = \vec{M}_o \quad (2.40)$$

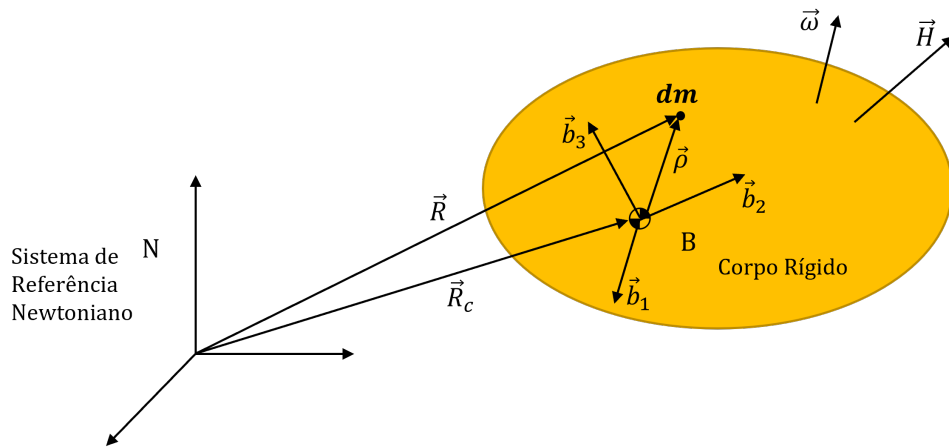
Se o ponto de referência O é fixo inercialmente ou localizado no centro de massa do corpo rígido, não haverá distinção entre o momento angular absoluto e o relativo, e a equação do momento angular simplesmente se torna

$$\dot{\vec{H}}_o = \dot{\vec{h}}_o = \vec{M}_o \quad (2.41)$$

2.5.2 Matriz de inércia e diádica de inércia

Considere um veículo rígido com um sistema de referência B fixo ao corpo com origem no seu centro de massa, conforme mostrado na Figura 2.8. Nesta figura, ρ representa o vetor posição de um elemento infinitesimal de massa dm em relação ao centro de massa, \vec{R}_c e \vec{R} são, respectivamente, o vetor posição do centro de massa e o vetor posição de dm , ambos com origem no sistema de referência inercial N .

Figura 2.8 – Veículo rígido com o referencial B fixo ao corpo com origem no cm .



Fonte: Autor.

Seja $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/N}$ o vetor velocidade angular do veículo rígido em um referencial inercial N . O vetor momento angular \vec{H} de um corpo rígido em torno de seu centro de massa é então definido como

$$\vec{H} = \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm = \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (2.42)$$

sendo que $\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{\rho}$, $\int \vec{\rho} dm = 0$, $\dot{\vec{R}} \equiv \{d\vec{R}/dt\}_N$ e

$$\dot{\vec{\rho}} = \left\{ \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \vec{\rho} \quad (2.43)$$

Note que $\{d\vec{\rho}/dt\}_B = 0$ para um corpo rígido.

Sejam ρ e ω definidos como

$$\vec{\rho} = \rho_1 \vec{b}_1 + \rho_2 \vec{b}_2 + \rho_3 \vec{b}_3 \quad (2.44)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (2.45)$$

onde $\{b_1, b_2, b_3\}$ é um conjunto de três vetores unitários ortogonais, chamados vetores de base de um referencial fixo ao corpo B . O vetor momento angular descrito pela Equação

(2.42) pode ser escrito como

$$\vec{H} = (J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3)\vec{b}_1 + (J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3)\vec{b}_2 + (J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3)\vec{b}_3 \quad (2.46)$$

onde J_{11} , J_{22} e J_{33} são os momentos de inércia definidos da seguinte forma:

$$J_{11} = \int (\rho_2^2 + \rho_3^2) dm \quad (2.47)$$

$$J_{22} = \int (\rho_1^2 + \rho_3^2) dm \quad (2.48)$$

$$J_{33} = \int (\rho_1^2 + \rho_2^2) dm \quad (2.49)$$

e J_{ij} ($i \neq j$) são os produtos de inércia definidos por

$$J_{12} = J_{21} = - \int \rho_1 \rho_2 dm \quad (2.50)$$

$$J_{13} = J_{31} = - \int \rho_1 \rho_3 dm \quad (2.51)$$

$$J_{23} = J_{32} = - \int \rho_2 \rho_3 dm \quad (2.52)$$

O vetor momento angular pode ser expresso no sistema de referência do corpo conforme apresentado na Equação (2.53):

$$\vec{H} = H_1\vec{b}_1 + H_2\vec{b}_2 + H_3\vec{b}_3 \quad (2.53)$$

Reescrevendo a Equação (2.46), obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} H_1 &= J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\ H_2 &= J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\ H_3 &= J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Também é possível escrever na forma matricial, conforme segue:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.56)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

A matriz \mathbf{J} é chamada de matriz de inércia de um corpo rígido em torno de um referencial fixo B com sua origem no centro de massa.

Para representar a diádica de inércia de um corpo rígido, considera-se um par de vetores sem intersecções entre eles, como $\vec{b}_i \vec{b}_j$. Esse par de vetores é chamado de diádica com as seguintes propriedades:

$$\left(\vec{b}_i \vec{b}_j \right) \cdot \vec{b}_k = \vec{b}_i \left(\vec{b}_j \cdot \vec{b}_k \right) \quad (2.60)$$

$$\vec{b}_i \cdot \left(\vec{b}_j \vec{b}_k \right) = \left(\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \right) \vec{b}_k$$

A unidade de diádica é definida por

$$\hat{I} = \vec{b}_1 \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

A velocidade angular pode ser escrita como $\vec{\omega} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$. Assim, reescrevendo a Equação (2.42) com a notação de diádica, o vetor momento angular \vec{H} é expresso da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \\
 &= \int [\rho^2 \vec{\omega} - \vec{\rho}(\vec{\rho} \cdot \vec{\omega})] dm \\
 &= \int [\rho^2 \hat{I} \cdot \vec{\omega} - (\vec{\rho}\vec{\rho}) \cdot \vec{\omega}] dm \\
 &= \left[\int (\rho^2 \hat{I} - \vec{\rho}\vec{\rho}) dm \right] \cdot \vec{\omega} \\
 &= \hat{J} \cdot \vec{\omega}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

onde \hat{J} é a diádica de inércia definida como

$$\hat{J} = \int (\rho^2 \hat{I} - \vec{\rho}\vec{\rho}) dm \tag{2.63}$$

A diádica de inércia está relacionada com a matriz de inércia por

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Conseqüentemente, o ij -ésimo elemento da matriz de inércia está relacionado com a diádica de inércia, conforme segue

$$J_{ij} = \vec{b}_i \cdot \hat{J} \cdot \vec{b}_j \tag{2.65}$$

Observe que a Equação (2.62) é uma expressão matemática concisa da relação entre o vetor velocidade angular e o vetor momento angular usando a diádica de inércia \hat{J} . Uma relação equivalente do vetor momento angular pode ser expresso utilizando a diádica de inércia:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

2.5.3 Eixos Principais

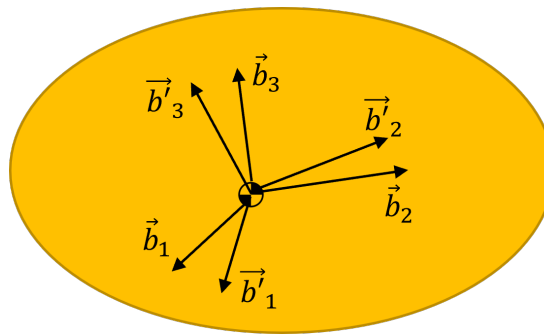
Considere dois sistemas de referência fixos ao corpo, B e B' , com vetores de base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ e $\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$, respectivamente, conforme é apresentado na Figura 2.9. O vetor momento angular e o vetor velocidade angular de um corpo rígido são expressos em

termos desses vetores de base da seguinte forma:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}'_1 & \vec{b}'_2 & \vec{b}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}'_1 & \vec{b}'_2 & \vec{b}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Figura 2.9 – Corpo rígido com dois sistemas de referência fixos ao corpo, B e B'



Fonte: Autor.

As componentes dos vetores momento angular e velocidade angular estão relacionadas entre si pelas Equações (2.69) e (2.70).

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{J}'\boldsymbol{\omega}' \quad (2.70)$$

onde $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, $\mathbf{H}' = (H'_1, H'_2, H'_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$, \mathbf{J} é a matriz de inércia em torno do referencial do corpo B , e \mathbf{J}' é a matriz de inércia em torno do referencial B' .

Dada uma matriz de cossenos diretores, $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^{B'/B}$ que leva do referencial B para o B' , obtém-se as seguintes relações de transformação:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{C}\mathbf{H} \\ \boldsymbol{\omega}' &= \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Relacionando as Equações (2.69), (2.70) e (2.71), obtém-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{J} &= \mathbf{C}^T\mathbf{J}'\mathbf{C} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Sendo que $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$.

Para um corpo rígido de forma qualquer, existe um conjunto de eixos para os quais os produtos de inércia são todos iguais a zero. Esses eixos são chamados de eixos principais e os momentos de inércia correspondentes são chamados de momentos principais de inércia. Os eixos principais com a menor inércia, intermediária e maior são comumente chamados de eixos menor, intermediário e maior, respectivamente.

Dada uma matriz de inércia \mathbf{J} em torno de um referencial B com vetores de base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, os momentos principais de inércia e o conjunto correspondente de eixos principais de B' , com vetores de base $\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$, podem ser encontrados resolvendo o problema de autovalor e autovetor apresentado na Equação (2.73):

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}] \mathbf{e} = 0 \quad (2.73)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 , e λ e \mathbf{e} são o autovalor e o autovetor, respectivamente, a serem determinados. Os autovalores se tornam os momentos principais de inércia, enquanto os autovetores fornecem a orientação dos eixos principais correspondentes em relação ao referencial B .

Os autovalores são as raízes da equação característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}| = 0 \quad (2.74)$$

Após determinar os três autovalores λ_1, λ_2 , e λ_3 , que são os momentos principais de inércia, determina-se os autovetores correspondentes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, e \mathbf{e}_3 resolvendo a expressão:

$$[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{J}] \mathbf{e}_i = 0 \quad (2.75)$$

onde $\mathbf{e}_i = (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3})$ para $i = 1, 2, 3$, ou

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & \lambda_i - J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & \lambda_i - J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ e_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Cada autovetor \mathbf{e}_i é normalizado de tal forma que

$$e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{i3}^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.77)$$

Assim, os vetores de base $\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$ do sistema referencial de eixos principais de inércia B' são escritos como

$$\begin{aligned} \vec{b}'_1 &\equiv \vec{e}_1 = e_{11}\vec{b}_1 + e_{12}\vec{b}_2 + e_{13}\vec{b}_3 \\ \vec{b}'_2 &\equiv \vec{e}_2 = e_{21}\vec{b}_1 + e_{22}\vec{b}_2 + e_{23}\vec{b}_3 \\ \vec{b}'_3 &\equiv \vec{e}_3 = e_{31}\vec{b}_1 + e_{32}\vec{b}_2 + e_{33}\vec{b}_3 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como e_{ij} é, de fato, o cosseno diretor entre \vec{b}'_i e \vec{b}_j , a matriz de cosseno diretor de

B' em relação a B é definida como

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{B'/B} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Sendo assim, a matriz de inércia de com os momentos principais de inércia, \mathbf{J}' , pode ser obtida conforme segue:

$$\mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^T = \mathbf{J}' = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) \quad (2.80)$$

onde $J_i \equiv \lambda_i$ denotam os momentos principais de inércia. A diádica de inércia correspondente em torno dos eixos principais é obtida conforme a Equação (2.81):

$$\hat{J}' = J_1 \vec{b}'_1 \vec{b}'_1 + J_2 \vec{b}'_2 \vec{b}'_2 + J_3 \vec{b}'_3 \vec{b}'_3 \quad (2.81)$$

2.5.4 Equações do movimento de rotação de Euler

Conforme obtido na Equação (2.41), o momento angular de um corpo rígido em torno de seu centro de massa é simplesmente dado como

$$\vec{M} = \dot{\vec{H}} \quad (2.82)$$

onde \vec{H} é o vetor momento angular do veículo rígido em torno de seu centro de massa, \vec{M} é o momento externo que atua sobre o veículo em torno do seu centro de massa. Por definição, a derivada do vetor momento angular no sistema de referência inercial N é dada como

$$\dot{\vec{H}} = \left\{ \frac{d\vec{H}}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d\vec{H}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \vec{H} \quad (2.83)$$

onde $\vec{H} = \hat{J} \cdot \vec{\omega}^{B/N}$.

A equação do movimento de rotação do veículo rígido em torno de seu centro de massa é então escrita como

$$\vec{M} = \left\{ \frac{d\vec{H}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \vec{H} \quad (2.84)$$

Para simplificação da notação, $\vec{\omega}^{B/N} = \vec{\omega}$, assim a Equação (2.84) pode ser escrita

como

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \left\{ \frac{d}{dt} (\hat{J} \cdot \vec{\omega}) \right\}_B + \vec{\omega} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega} \\ &= \left\{ \frac{d\hat{J}}{dt} \right\}_B \cdot \vec{\omega} + \hat{J} \cdot \left\{ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega}\end{aligned}\quad (2.85)$$

onde $\{d\hat{J}/dt\}_B = 0$ e $\{d\vec{\omega}/dt\}_B = \{d\vec{\omega}/dt\}_N = \dot{\vec{\omega}}$. Por fim, obtém-se que

$$\vec{M} = \hat{J} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega} \quad (2.86)$$

que é chamada de Equação do movimento de rotação de Euler na forma vetorial/diádica.

Sejam \vec{M} , \vec{H} e $\vec{\omega}$ expressos em termos de vetores de base do sistema de referência do corpo $\{b_1, b_2, b_3\}$, conforme segue

$$\vec{M} = M_1 \vec{b}_1 + M_2 \vec{b}_2 + M_3 \vec{b}_3 \quad (2.87)$$

$$\vec{H} = H_1 \vec{b}_1 + H_2 \vec{b}_2 + H_3 \vec{b}_3 \quad (2.88)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (2.89)$$

Substituindo as expressões na Equação (2.84), obtém-se a equação do movimento de rotação na forma matricial, conforme a seguir:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

O vetor momento angular é definido como

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Assim, obtém-se a equação do movimento de rotação na forma matricial em termos da matriz de inércia e das velocidades angulares, de acordo com a Equação (2.92):

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Considerando a matriz antissimétrica da velocidade angular, Ω , é possível reescre-

ver a Equação (2.92) na forma simplificada

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \quad (2.93)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Utilizando a notação de produto vetorial de dois vetores de coluna, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, definidos como

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.97)$$

De modo geral, a Equação (2.93) é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \quad (2.98)$$

Vale ressaltar que a expressão obtida é distinta daquela apresentada na forma de diádica, apresentada na Equação (2.86).

Considerando um referencial de eixos principais no sistema do corpo B (com vetores de base b_1, b_2, b_3), as equações do movimento de rotação de Euler para um veículo rígido se tornam:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde J_1, J_2 e J_3 são os momentos principais de inércia, $\vec{M}_i = M \cdot \vec{b}_i$ é o momento externo aplicado sobre cada eixo no sistema de referência do corpo e $\vec{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \vec{b}_i$ a velocidade angular. Estas são três equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas para as variáveis de estado ω_1, ω_2 e ω_3 de um veículo rígido.

2.5.5 Dinâmica de um veículo rígido com rotores

A seguir são apresentadas as equações de dinâmica de um veículo rígido com a presença de um conjunto de inércia rotativa, as rodas de reação.

Segundo Yang (2019), a orientação do veículo espacial é realizada usando rodas de reação que são alinhadas ao longo de três eixos de controle fixos ao corpo. Os torques da roda de reação são gerados a partir da aceleração ou desaceleração do volante de inércia, e o torque pode ser calculado pela seguinte relação:

$$\mathbf{u} = -\dot{\mathbf{h}}_{rr} \quad (2.100)$$

onde \mathbf{h}_{rr} é o vetor momento angular das rodas.

Seja o vetor momento angular (ou quantidade de movimento angular) das rodas de reação definido por

$$\vec{h}_{rr} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{rr1} \\ h_{rr2} \\ h_{rr3} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

onde, h_{rr_i} ($i = 1, 2, 3$) é a quantidade de movimento angular associada a cada eixo do sistema de referência do corpo.

Da Equação (2.66), a quantidade de movimento angular do veículo é definida como

$$\vec{H}_{ve} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

A quantidade de movimento angular total é dada por:

$$\vec{H}_{total} = \vec{H}_{ve} + \vec{h}_{rr} \quad (2.103)$$

Considerando a expressão da equação de dinâmica para um corpo rígido representada na Equação (2.98), é possível incluir a dinâmica das rodas de reação a partir da quantidade de movimento angular total obtida na Equação (2.103). Assim, a equação de dinâmica de um veículo rígido com um conjunto de rodas de reação pode ser definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}_{rr}) &= \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{h}}_{rr} &= -\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.104)$$

onde $\dot{\mathbf{h}}_{rr}$ é a derivada da quantidade de movimento angular das rodas de reação, sendo esta igual ao negativo do torque externo aplicado.

Vale ressaltar que a dinâmica do conjunto de rodas de reação apresentada anteriormente considera um tempo de resposta instantâneo dos atuadores e sem atraso de transporte.

2.6 MANOBRAS DE REORIENTAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS

2.6.1 Controle por realimentação de Quatérnio

A maioria dos veículos espaciais com estabilização de três eixos utiliza uma sequência de manobras rotacionais em torno de cada eixo de controle. Muitos veículos também realizam manobras rotacionais em torno de um eixo inercial fixo durante um modo de aquisição, por exemplo, aquisição do Sol ou aquisição da Terra, de modo que um sensor em particular capture um determinado alvo. Em alguns casos, os veículos espaciais são obrigados a realizar manobras o mais rápido possível dentro dos limites físicos dos atuadores e sensores. A seguir, é apresentada uma lógica de controle de realimentação para manobras de reorientação de três eixos que necessitam de uma grande variação angular.

Considere a dinâmica de atitude de um veículo rígido descrita pela equação do movimento de rotação de Euler:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \quad (2.105)$$

onde \mathbf{J} é a matriz de inércia, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ o vetor de velocidade angular e $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ o vetor de torque de controle, sendo este uma entrada. O produto vetorial dos dois vetores é representado em notação matricial como

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

onde \mathbf{h} é o vetor momento angular. Assume-se que as componentes ω_i do vetor velocidade angular ao longo dos eixos de controle fixos ao corpo são medidas por meio de sensores giroscópios, os quais são capazes de medir a taxa de mudança do ângulo ao longo do tempo.

O Teorema de rotação de Euler afirma que a atitude do corpo rígido pode ser alterada de qualquer orientação dada para qualquer outra orientação girando o corpo em torno de um eixo, chamado eixo de Euler, que é fixo ao corpo rígido e estacionário no espaço inercial. Essa rotação de corpo rígido em torno do eixo de Euler é comumente chamada de *eigenaxis rotation*. Além disso, o teorema também afirma que o ângulo θ é sempre menor que a soma algébrica de três ângulos de Euler sucessivos, e representa o caminho angular mais curto entre duas orientações.

Considerando o vetor unitário ao longo do eixo de Euler denotado por $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, onde e_i ($i = 1, 2, 3$) são os cossenos diretores do eixo de Euler em relação a um referencial inercial ou aos eixos de controle fixos ao corpo. Os quatro elementos de quatérnios são então definidos conforme a Equação (2.20), anteriormente apresentada.

Os quatérnios são uma representação conveniente para o movimento espacial, pois oferecem algumas vantagens computacionais sobre outros métodos, por exemplo, o processamento em tempo real. Por isso, atualmente utiliza-se quatérnios para descrever a orientação dos veículos, além de um controlador de realimentação de estado linear. A implementação em tempo real desse tipo de controlador pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{q}_e - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \quad (2.107)$$

onde $\mathbf{q}_e = (q_{1e}, q_{2e}, q_{3e})$ é o vetor quatérnio do erro de atitude e \mathbf{K} e \mathbf{C} são matrizes de ganho do controlador a serem devidamente determinadas. Os quatérnios de erro de atitude $(q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}, q_{4e})$ são calculados usando os quatérnios de atitude desejados ou comandados $(q_{1c}, q_{2c}, q_{3c}, q_{4c})$ e os quatérnios de atitude atuais (q_1, q_2, q_3, q_4) , como segue:

$$\begin{bmatrix} q_{1e} \\ q_{2e} \\ q_{3e} \\ q_{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{4c} & q_{3c} & -q_{2c} & -q_{1c} \\ -q_{3c} & q_{4c} & q_{1c} & -q_{2c} \\ q_{2c} & -q_{1c} & q_{4c} & -q_{3c} \\ q_{1c} & q_{2c} & q_{3c} & q_{4c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Se o vetor de quatérnios de atitude comandado é a origem, a qual é definida como

$$(q_{1c}, q_{2c}, q_{3c}, q_{4c}) = (0, 0, 0, +1) \quad (2.109)$$

então a lógica de controle apresentada na Equação (2.107) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= \mathbf{q} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Por outro lado, se a origem for escolhida como $(0, 0, 0, -1)$, então a lógica de controle da Equação (2.107) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= -\mathbf{q} \\ \mathbf{u} &= +\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Vale ressaltar que ambos os quatérnios $(0, 0, 0, +1)$ e $(0, 0, 0, -1)$ correspondem à orientação fisicamente idêntica.

Segundo Wie, Weiss e Arapostathis (1989) e Wie e Barba (1985), considerando a lógica de controle apresentada na Equação (2.110), a origem, seja ela $(0, 0, 0, +1)$ ou $(0, 0, 0, -1)$, de um sistema não linear de malha fechada de um veículo rígido é globalmente assintoticamente estável para as seguintes seleções de ganho.

- **Controlador 1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= k\mathbf{I} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.112)$$

• **Controlador 2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{k}{q_4^3} \mathbf{I} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.113)$$

• **Controlador 3:**

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= k \operatorname{sgn}(q_4) \mathbf{I} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde

$$\operatorname{sgn}(q_4) = \begin{cases} +1 & \text{se } q_4 > 0 \\ 0 & \text{se } q_4 = 0 \\ -1 & \text{se } q_4 < 0 \end{cases} \quad (2.115)$$

• **Controlador 4:**

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha \mathbf{J} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \\ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} &> 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde k e c_i são constantes escalares positivas, \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 , $\operatorname{sgn}(\cdot)$ denota a função sinal e α e β são escalares não negativos.

Essas escolhas de ganhos apresentados anteriormente se referem ao caso de um regulador, ou seja, quando a referência é a origem $q_f = (0, 0, 0, \pm 1)$. Dessa forma, o objetivo é alinhar os eixos do satélite com os eixos do referencial inercial.

2.6.2 Manobras de rotação em torno do Eixo de Euler

O termo giroscópico da equação do movimento de rotação de Euler não é significativo para a maioria das manobras rotacionais práticas. Em alguns casos, no entanto, pode

ser desejável neutralizar diretamente o termo pelo torque de controle, conforme apresentado na Equação (2.117):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.117)$$

O sistema com o controlador em malha fechada é estável globalmente assintoticamente se a matriz $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$ for positiva definida.

Em certos casos, pode ser desejável rotacionar o veículo em torno do eixo de Euler para realizar uma manobra de trajetória angular mínima. Isso pode ser obtido a partir de uma realimentação de quatérnios na forma: $\mathbf{K} = k\mathbf{J}$ e $\mathbf{C} = c\mathbf{J}$, onde k e c são constantes escalares positivas a serem escolhidas adequadamente e \mathbf{J} é matriz de inércia. Dessa forma, o corpo rígido apresentará um controlador na forma

$$\mathbf{u} = -k\mathbf{J}\mathbf{q} - c\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.118)$$

o qual executa uma manobra de reorientação *rest-to-rest* em torno de um eixo de Euler ao longo do vetor de quatérnios inicial, $\mathbf{q}(0)$.

A manobra de reorientação *rest-to-rest* (em português, repouso-repouso) é definida como uma manobra em que se considera velocidade angular inicial nula, $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, nos três eixos, partindo de um determinado quatérnio inicial $\mathbf{q}(0)$ até um quatérnio final \mathbf{q}_f . Dessa forma, durante a manobra de reorientação, a velocidade angular irá variar e retornar para zero novamente quando atingir o quatérnio \mathbf{q}_f . Vale ressaltar que uma rotação *rest-to-rest* do eixo de Euler é caracterizada por uma linha reta em gráficos q_i vs q_j .

O teorema de rotação de Euler se preocupa apenas com a cinemática de rotação em torno do eixo de Euler. A seguir são apresentadas as equações de dinâmica de rotação completa para um veículo rígido com um conjunto de rodas de reação em malha fechada. Baseando-se na lógica de controle de realimentação de quatérnio da Equação (2.117), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -k\mathbf{q} - c\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_{rr}) \\ \dot{\mathbf{h}}_{rr} &= -\mathbf{u} = k\mathbf{J}\mathbf{q} + c\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \\ 2\dot{\mathbf{q}} &= q_4\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \\ 2\dot{q}_4 &= -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.119)$$

3 METODOLOGIA

Considerando que os veículos espaciais executam manobras de elevados ângulos e se iniciam, em geral, de condições iniciais quaisquer, a estratégia abordada neste trabalho consiste em utilizar a realimentação de quatérnios, já que eles não apresentam singularidades, quando comparados com a realimentação por ângulos de Euler. Sendo assim, será aplicada uma lei de controle não-linear ao sistema de controle de atitude do CubeSat 3U - NanoSatC-BR3 (o qual encontra-se atualmente na fase de concepção), com o intuito de orientar o satélite para a atitude desejada com precisão suficiente no ambiente espacial. Ou seja, determinar os ganhos do controlador de tal forma que os eixos do satélite se alinhem com os eixos do referencial inercial.

Primeiramente são apresentados os momentos de inércia do satélite, os quais refletem diretamente nas equações de dinâmica de atitude. Em seguida, são apresentadas as características de performance dos atuadores escolhidos - as rodas de reações na configuração pirâmide. Vale ressaltar que este trabalho considera que as velocidades angulares do satélite são medidas por giroscópios de taxa ideais instalados sobre os eixos de controle do corpo. Após isso, apresenta-se o modelo de saturação utilizado para as rodas de reação, bem como as equações para a lei de controle escolhida. Por fim, são apresentadas as condições iniciais de simulação e os distúrbios externos considerados.

A seguir são detalhados os passos para a implementação do controlador de atitude proposto ao terceiro nanossatélite desenvolvido pelo Programa NanoSatC-BR.

3.1 CUBESAT-3U

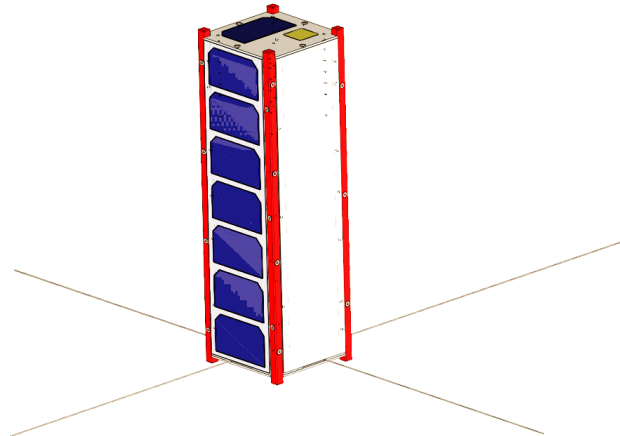
Este trabalho considera um modelo de CubeSat-3U, ou seja, com três unidades. Ele apresenta uma estrutura similar àquelas utilizadas nos CubeSats BR1 e BR2 do Programa NanoSatC, conforme apresentado na Figura 3.1.

A matriz de inércia do satélite foi estimada com base na Tabela 3.1, a qual apresenta os momentos de inércia de três modelos de CubeSats (OLAND; SCHLANBUSCH, 2009), e os momentos de inércia do NanoSatC-BR2.

Modelo	Oland e Schlanbusch (2009)			NanoSatC
[kg.m ²]	1U	2U	3U	2U
J_1	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$8.33 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-3}$
J_2	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$8.33 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$	$8.11 \cdot 10^{-3}$
J_3	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3.09 \cdot 10^{-3}$

Tabela 3.1 – Momentos principais de inércia.

Figura 3.1 – Modelo representativo de um CubeSat-3U



Fonte: GRABCAD.

Comparando os modelos 2U da Tabela 3.1 e considerando que ambos apresentam dimensões baseadas em Lee (2014), os momentos de inércia apresentam valores muito próximos, resultado de uma distribuição de massa similar. Sendo assim, Oland e Schlanbusch (2009) fornece uma boa estimativa para os momentos de inércia do modelo considerado neste trabalho. A Equação (3.1) apresenta a matriz de inércia a ser utilizada nas simulações.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 25 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 25 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{kgm}^2 \quad (3.1)$$

3.2 ATUADORES

Para este trabalho, considerou-se a utilização de atuadores por rodas de reação na configuração pirâmide. Na Figura 3.2 é apresentado o conjunto de rodas de reação comercializado pela empresa NanoAvionics (2022). A configuração pirâmide foi escolhida por conter quatro rodas de reação e oferecer controle de estabilização redundante nos 3 eixos, aumentando assim sua capacidade total de torque.

Como mencionando, o conjunto conta com quatro rodas de reação, as quais são alimentadas por um motor CC *brushless*. As especificações de performance são apresentadas na Tabela 3.2.

Figura 3.2 – Rodas de reação de CubeSat 4RW0 na configuração pirâmide



Fonte: NanoAvionics (2022).

Eixo	Máximo torque [mNm]	Máximo momento angular [mNms]
x	5.9	37.0
y	5.9	37.0
z	5.0	31.3

Tabela 3.2 – Especificações de performance do conjunto de rodas de reação.

Modelo de saturação dos atuadores

Um modelo de saturação das rodas de reação foi considerado para as simulações. Para isso, levou-se em conta as especificações de torque máximo dos atuadores apresentadas na Tabela 3.2. A Equação (3.2) descreve um modelo clássico de saturação desenvolvido.

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_{0,i} & \text{se } u_i > u_{0,i} \\ u_i & \text{se } -u_{0,i} \leq u_i \leq u_{0,i} \\ -u_{0,i} & \text{se } u_i < -u_{0,i} \end{cases} \quad (3.2)$$

em que u_i é o componente u associado ao i -ésimo eixo e $u_{0,i}$ é o limite de torque máximo relativo a cada eixo. O modelo descreve um nível de saturação simétrico.

3.3 REQUISITOS DO ADCS

Baseando-se nos requisitos apresentados em Narkiewicz, Sochacki e Zakrzewski (2020) e Wie, Weiss e Arapostathis (1989), o sistema de determinação e controle de atitude

do CubeSat-3U considerado neste trabalho deve apresentar os seguintes requisitos:

- O satélite deve ser capaz de atingir a atitude comandada a partir de uma atitude inicial qualquer;
- O tempo de reorientação desejado ou tempo de acomodação deve ser de até 100 segundos;
- Deve ser capaz de atingir e manter, ao final da reorientação, os ângulos de Euler nulos, em termos de quatérnios, $\mathbf{q} = (0, 0, 0, \pm 1)$;
- A atitude comandada (ou seja, alinhamento com os eixos do sistema inercial) deve apresentar erro menor do que 0.1° ;

3.4 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE QUATÉRNIOS

Nesta seção serão apresentadas as equações utilizadas para o projeto do controlador de atitude do ADCS. O controlador foi desenvolvido para garantir uma manobra de reorientação em torno do eixo de Euler respeitando, assim, os limites de torque máximo associados ao conjunto de rodas de reação.

A estratégia de controle a ser utilizada nas simulações considera uma lei de controle não-linear, a qual foi apresentada na Seção 2.6. Considerando a Equação (2.118) que descreve o vetor de controle \mathbf{u} , as matrizes de ganhos \mathbf{K} e \mathbf{C} devem ser escolhidas de tal forma que a matriz $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$ seja positiva definida. Assim, é possível garantir que o sistema com o controlador em malha fechada é globalmente assintoticamente estável.

O controlador a ser utilizado é constituído pela realimentação dos quatérnios, \mathbf{q} , pela matriz de ganhos \mathbf{K} , do vetor velocidade angular, $\boldsymbol{\omega}$, pela matriz \mathbf{C} e do termo giroscópico da equação do movimento de rotação de Euler, conforme apresentado na Equação (3.3).

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{K} &= k\mathbf{J} \\ \mathbf{C} &= c\mathbf{J}\end{aligned}\tag{3.3}$$

3.5 DISTÚRBIOS EXTERNOS

Os tipos de distúrbios das rodas de reação, apresentados na Seção 2.3.2.2, são modelados de forma genérica através de um Ruído Branco Gaussiano (em inglês, *White*

Gaussian Noise), o qual é injetado no sistema a fim de verificar o desempenho do controlador projetado. Para isso, foi utilizada a função do MATLAB *wgn*. A equação do distúrbio de torque é apresentada a seguir:

$$d_i(t) = wgn \quad (3.4)$$

em que d_i é o distúrbio associado a cada roda de reação i .

3.6 CONDIÇÕES INICIAIS DE SIMULAÇÃO

A seguir são apresentadas as condições iniciais utilizadas na simulação, e são destacados pontos importantes sobre os códigos desenvolvidos.

A orientação inicial do satélite expressa em quatérnios (considerando a sequência x-y-z) é definida como $\mathbf{q}(t_i) = [0.5, 0.5, 0.5, -0.5]^T$ em $t_i = 0$, que corresponde a uma rotação do eixo de Euler de 240° ou 120° dependendo da direção da reorientação. A orientação final esperada em termos de quatérnio é $\mathbf{q}(t_f) = [0, 0, 0, \pm 1]^T$, que corresponde a origem, ou seja, alinhamento do referencial do corpo com o referencial inercial.

Além disso, também é preciso definir a velocidade angular inicial do satélite. As simulações consideram uma manobra de reorientação *rest-to-rest*, ou seja, com velocidades inicial e final iguais a zero sob os três eixos. Sendo assim, $\omega(t_i) = \omega(t_f) = [0, 0, 0]^T$.

Os códigos de simulação são escritos em linguagem MATLAB, onde foram desenvolvidas as rotinas para implementação de:

- Equações de cinemática de quatérnios para um veículo rígido;
- Equações de dinâmica para um veículo rígido, considerando a dinâmica do conjunto de rodas de reações, sendo apresentadas nas Equações (2.104) e (2.119);
- O modelo clássico de saturação dos atuadores, da Equação (3.2);
- As equações dos controladores e seus respectivos ganhos, apresentados na Equação (3.3);
- Os distúrbios do conjunto de atuadores, conforme a Equação (3.4).

4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos no presente trabalho. Primeiramente é apresentado o projeto de controle por realimentação de quatérnios, conforme a metodologia apresentada na Seção 3.4. Em seguida, são mostrados os resultados obtidos a partir das simulações.

As simulações foram realizadas considerando os quatro casos apresentados na Seção 2.6.1. No entanto, para cada caso foi escolhida a mesma matriz de ganho C , apresentada na Equação (4.1).

$$c = 0.32$$
$$\mathbf{C} = c\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 8 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Para as matrizes \mathbf{K} , os ganhos foram escolhidos respeitando a especificidade de cada caso, sendo apresentados nas Equações (4.2)-(4.5):

- **Caso 1:**

$$k = 0.04$$
$$\mathbf{K} = k\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- **Caso 2:**

$$k = 0.04$$
$$\mathbf{K} = \frac{k}{[q_4(t)]^3} \mathbf{J} = \frac{1}{[q_4(t)]^3} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

- **Caso 3:**

$$k = 0.04$$
$$\mathbf{K} = k \operatorname{sgn}(q_4(t)) \mathbf{J} = \operatorname{sgn}(q_4(t)) \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

• **Caso 4:**

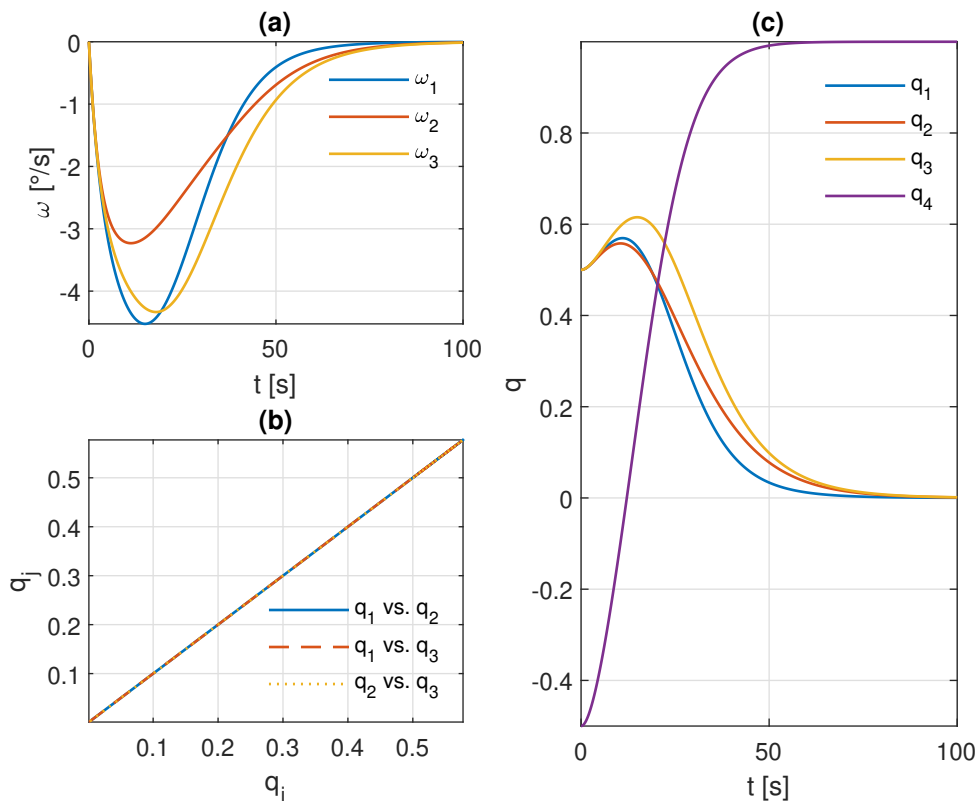
$$\begin{aligned}\alpha &= 12000 \\ \beta &= 25 \\ \mathbf{K} &= [\alpha \mathbf{J} + \beta \mathbf{I}]^{-1}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Como mencionado anteriormente, para garantir uma rotação do satélite em torno do eixo de Euler com uma trajetória angular mínima, a realimentação de quatérnios deve ser na forma $\mathbf{K} = k\mathbf{J}$ e $\mathbf{C} = c\mathbf{J}$. Os ganhos foram escolhidos de modo que a atitude inicial convergisse para a origem (alinhamento com o referencial inercial) em, no máximo, 100 segundos, atendendo o requisito de reorientação e tempo de acomodação.

4.1 RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 1

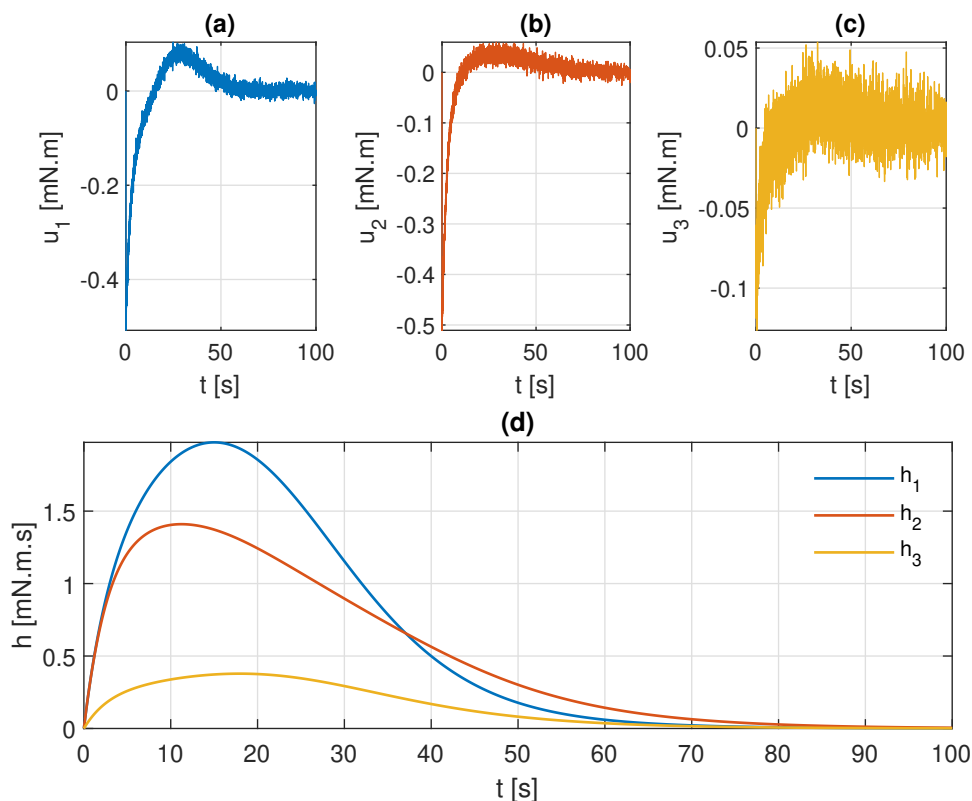
Primeiramente foram realizadas as simulações para o tipo de controlador mais simples dentre os quatro casos. Considerou-se as matrizes de ganhos das Equações (4.1) e (4.2). A seguir são apresentados os resultados obtidos da simulação.

Figura 4.1 – **(a)** Velocidade angular simulada; **(b)** Gráfico q_i vs. q_j ; **(c)** Comportamento temporal dos quatérnios



Na Figura 4.1.(a) são apresentadas as velocidades angulares descritas no sistema de referência do corpo. É possível observar que para a manobra de reorientação repouso-repouso, a velocidade inicial e final do veículo são nulas nos três eixos, ocorrendo uma variação a partir do instante inicial, de modo a reorientar o veículo para a atitude comandada. A velocidade angular máxima atingida durante a manobra, em cada eixo, é de $\omega_1 = -4.53^\circ/\text{s}$, $\omega_2 = -3.23^\circ/\text{s}$ e $\omega_3 = -4.34^\circ/\text{s}$. Observando a Figura 4.1.(c), nota-se que a medida que as componentes do vetor de quatérnios q se aproximam de zero e a parte escalar q_4 se aproxima de 1, a velocidade angular desacelera até o repouso, ou seja, quando o veículo atinge a atitude comandada, caracterizada pelo quatérnio $\mathbf{q} = (0, 0, 0, +1)$. Na Figura 4.1.(b) é apresentado o comportamento linear dos gráficos de quatérnios q_i vs. q_j . Esse é um comportamento característico da manobra de reorientação repouso-repouso em torno do eixo de Euler.

Figura 4.2 – **(a)-(c)** Torque de controle sobre os eixos do corpo; **(d)** Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação



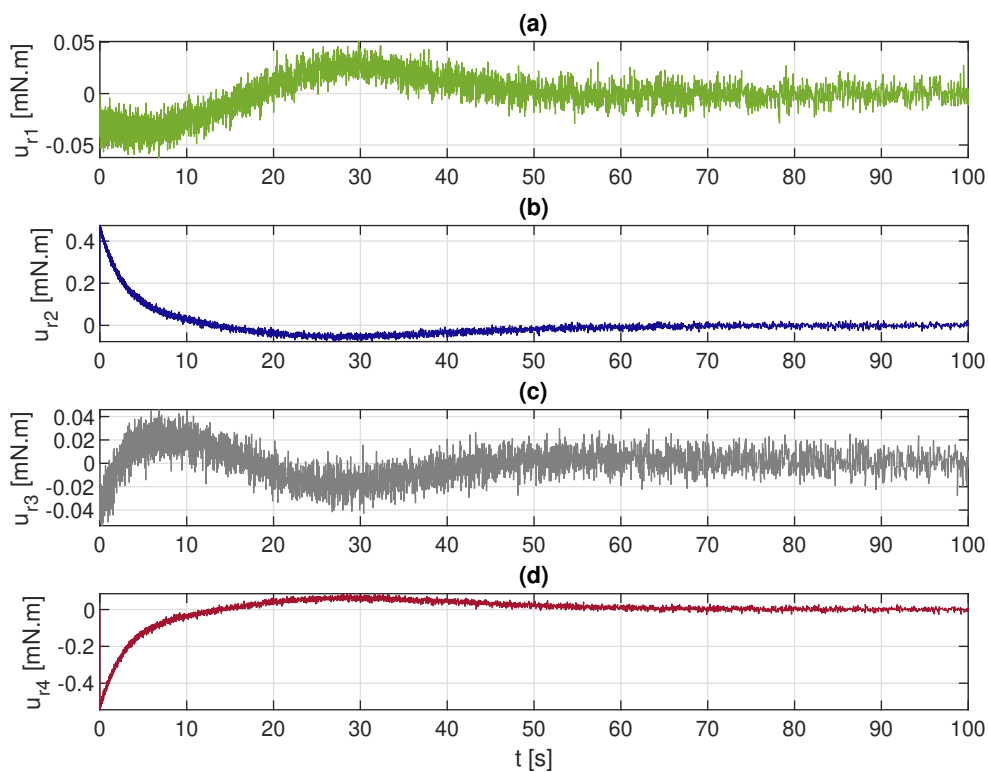
Fonte: Autor.

Na Figura 4.2.(a)-(c) são apresentados os gráficos de torque de controle aplicados sobre os eixos no sistema de referência do corpo. É possível notar o torque de maior magnitude foi de -0.515mN.m em u_1 , durante os instantes iniciais da manobra, estando dentro dos limites de performance do conjunto de rodas de reação. Devido a presença de distúrbios intrínsecos das rodas de reação, ao final da reorientação os atuadores continuam

operando, de modo a compensar o seu efeito no sistema. No gráfico (d) é apresentada a quantidade de movimento angular do conjunto de atuadores.

A partir da matriz de mapeamento, A_{RW} , apresentada na Equação (2.3), foi possível obter o torque de controle exercido por cada roda de reação, considerando que o sistema conta com um conjunto de quatro rodas. A Figura 4.3 apresenta o comportamento do torque de controle relativo a cada uma das rodas. Observa-se que o torque de controle de uma única roda é menor do que o torque total aplicado sobre cada um dos eixos do veículo.

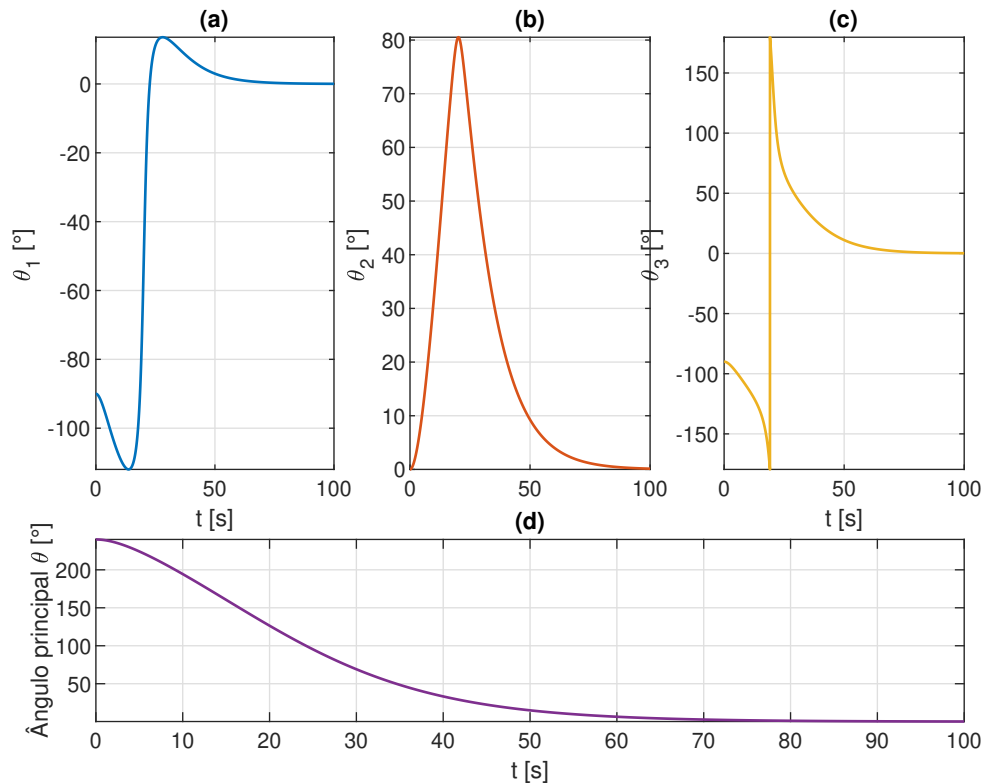
Figura 4.3 – Torque de controle referente a cada uma das rodas de reação u_{r_i}



Fonte: Autor.

Para uma representação em termos dos ângulos de Euler, conforme apresentado na Figura 4.4.(a)-(c), é possível observar que o veículo partiu da atitude inicial (com $\theta_1(0) = -90^\circ$, $\theta_2(0) = -0$ e $\theta_3(0) = -90^\circ$) até convergirem para zero, indicando que o corpo se alinhou com o sistema referencial inercial. Ainda na Figura 4.4, é possível ver o comportamento do ângulo principal do eixo de Euler.

Figura 4.4 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ



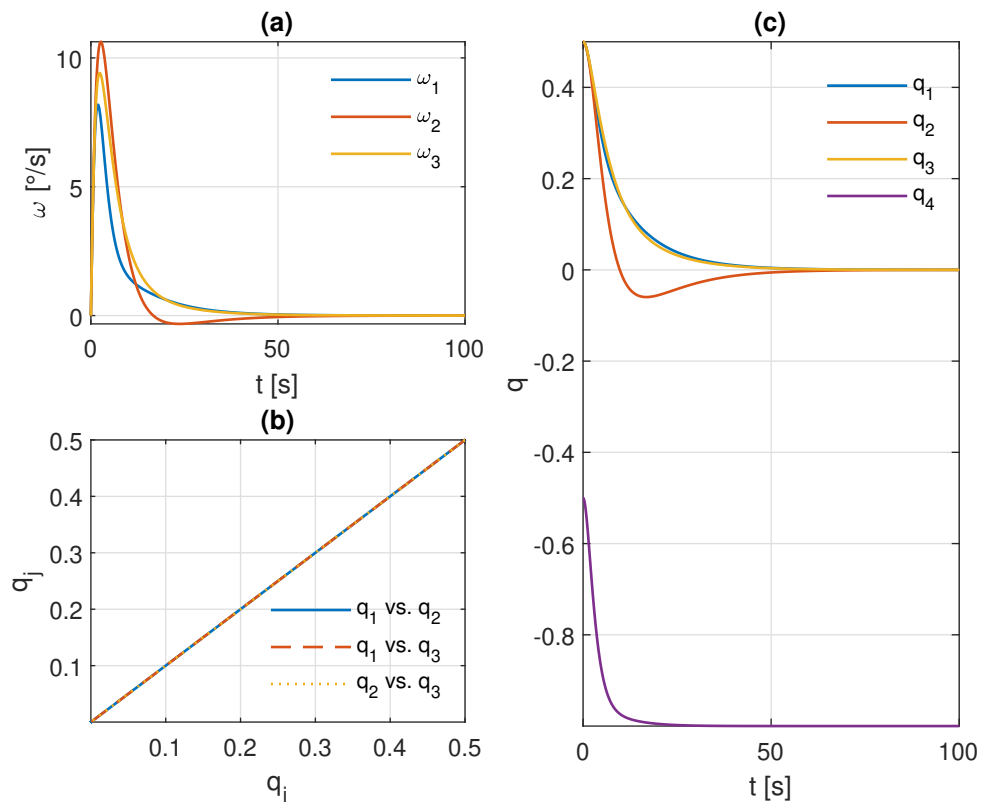
Fonte: Autor.

4.2 RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 2

A seguir são apresentados os resultados obtidos das simulações para o controlador apresentado no caso 2. Considerou-se as matrizes de ganhos das Equações (4.1) e (4.3).

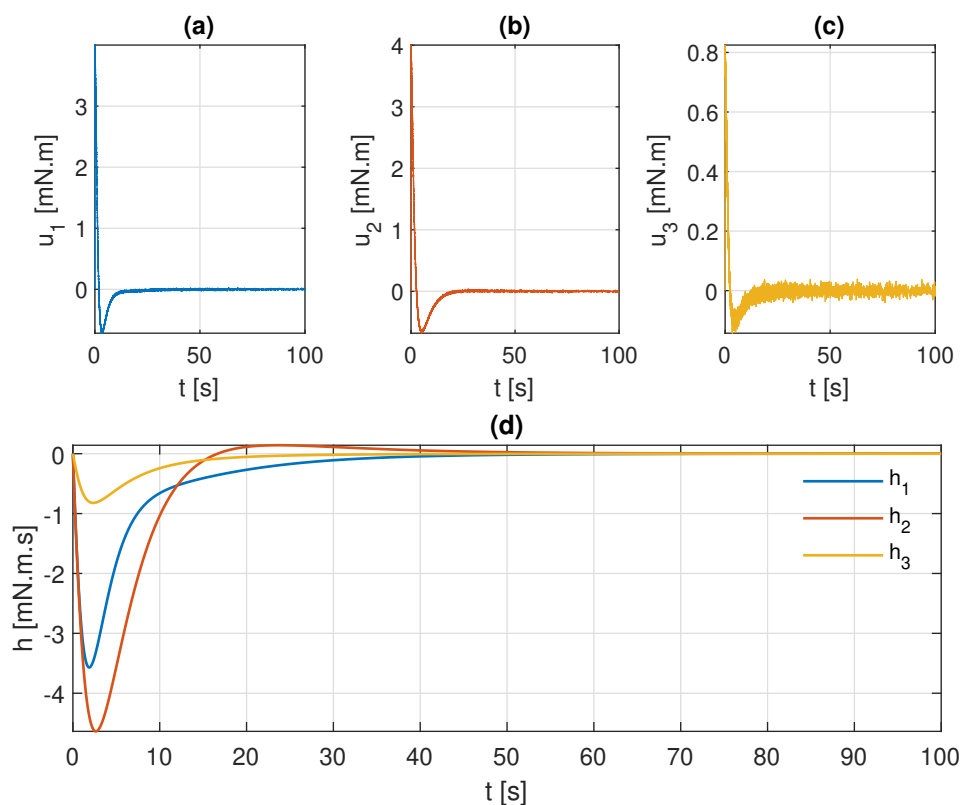
Na Figura 4.5.(a) são apresentadas as velocidades angulares que o veículo atingiu durante a manobra de reorientação. Comparando com o caso 1 apresentado anteriormente, nota-se que as velocidades angulares tiveram uma variação mais abrupta nos três eixos e atingiram uma magnitude bem maior, chegando a $\omega_1 = 8.18^\circ/\text{s}$, $\omega_2 = 10.63^\circ/\text{s}$ e $\omega_3 = 9.41^\circ/\text{s}$. Observando a Figura 4.5, nota-se um comportamento do escalar de quatérnio q_4 diferente daquele apresentado no caso 1. Desta vez o q_4 convergiu para -1, no entanto, o quatérnio $\mathbf{q} = (0, 0, 0, -1)$ também representa a origem (ou a atitude final desejada), conforme mencionado na Seção 3.6.

Figura 4.5 – **(a)** Velocidade angular simulada; **(b)** Gráfico q_i vs. q_j ; **(c)** Comportamento temporal dos quatérnios



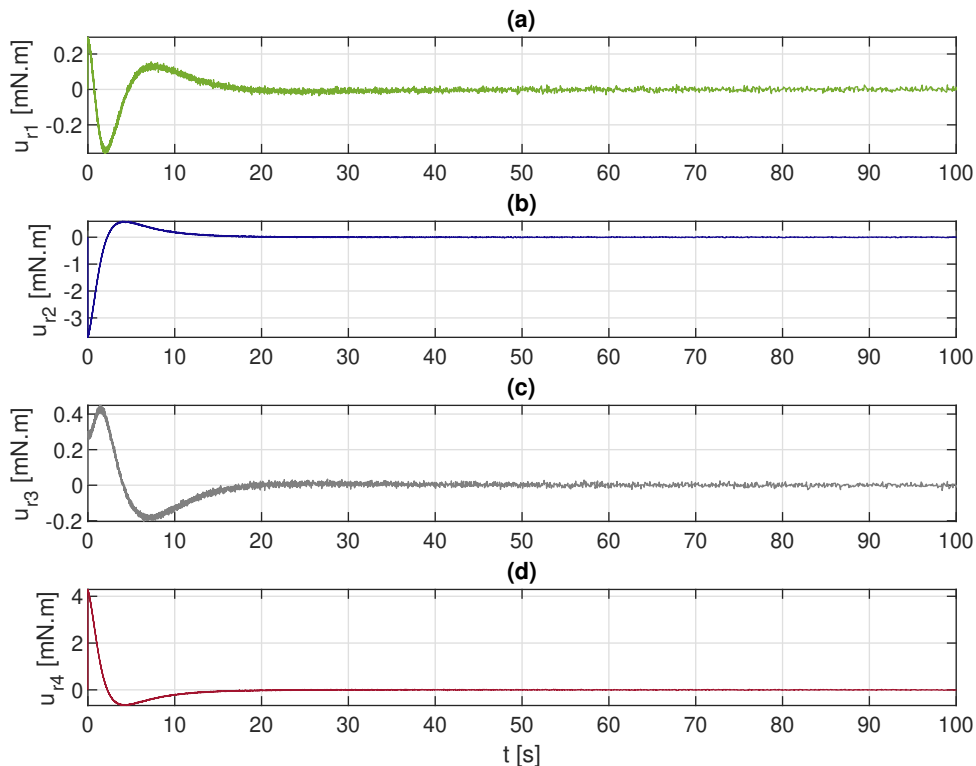
Fonte: Autor.

Figura 4.6 – **(a)-(c)** Torque de controle sobre os eixos do corpo; **(d)** Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação



Na Figura 4.6.(a)-(c) são apresentados os torques de controles aplicados sobre os eixos do veículo. Com os ganhos escolhidos para o caso 2, nota-se um torque de controle bem mais significativo, fazendo com que a manobra de reorientação ocorra de forma mais rápida. O torque máximo aplicado sobre cada eixo foi de $u_1 = 4\text{mN.m}$, $u_2 = 4\text{mN.m}$, $u_3 = 0.82\text{mN.m}$. Apesar destes torque estarem próximos dos batentes, apresentados na Tabela 3.2, não ocorre saturação do atuador.

Figura 4.7 – Torque de controle referente a cada uma das rodas de reação u_{r_i}

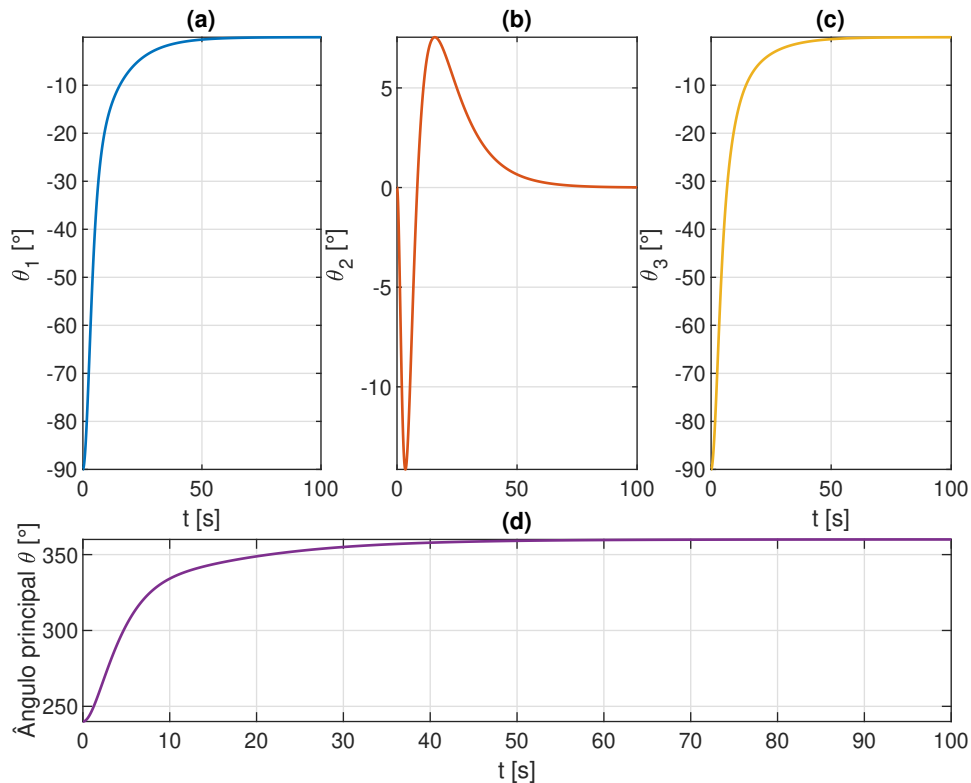


Fonte: Autor.

Na Figura 4.7 são apresentados os torques de controle relativos a cada roda de reação utilizando a matriz de mapeamento, A_{RW} . A ação de controle relativa a cada uma das rodas ainda continua sendo menor que os limites de performe apresentado.

Observando o comportamento dos ângulos de Euler, percebe-se que eles continuam convergindo para zero, alinhando os eixos do corpo com o sistema de referencia inercial. No entanto, o ângulo de rotação principal ocasionou uma rotação em torno do eixo de Euler de $+120^\circ$ durante a manobra de reorientação, até atingir 360° . Como mencionado na Seção 3.6, a reorientação pode ser de 120° ou 240° dependendo da direção da manobra.

Figura 4.8 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ



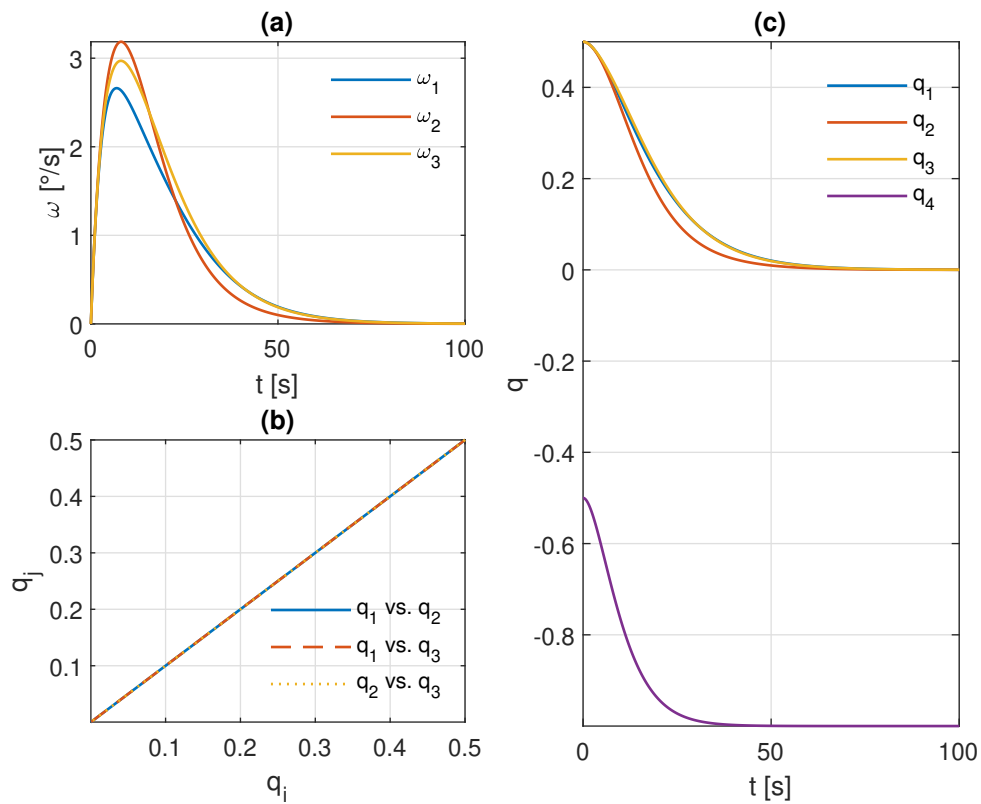
Fonte: Autor.

4.3 RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 3

As simulações obtidas para o caso 3 foram bem similares às aquelas apresentadas para o caso 2. Considerou-se as matrizes de ganhos das Equações (4.1) e (4.4).

De acordo com a Figura 4.9 nota-se que a partir da atitude inicial, indicada pelo quatérnio $\mathbf{q}(0) = (0.5, 0.5, 0.5, -0.5)$, ocorre uma variação positiva da velocidade angular sob os três eixos, atingindo uma velocidade máxima de rotação $\omega_1 = 2.66^\circ/\text{s}$, $\omega_2 = 3.19^\circ/\text{s}$ e $\omega_3 = 2.97^\circ/\text{s}$, e em seguida caem para zero novamente. Além do comportamento da velocidade angular, o comportamento linear dos gráficos q_i vs. q_j evidenciam o tipo de manobra de reorientação realizada pelo veículo, a manobra repouso-repouso. Com relação aos gráficos dos quatérnios, mais uma vez o escalar q_4 converge para -1 , o qual também representa a origem (considerando que o vetor de quatérnios q convirja para zero).

Figura 4.9 – **(a)** Velocidade angular simulada; **(b)** Gráfico q_i vs. q_j ; **(c)** Comportamento temporal dos quatérnios

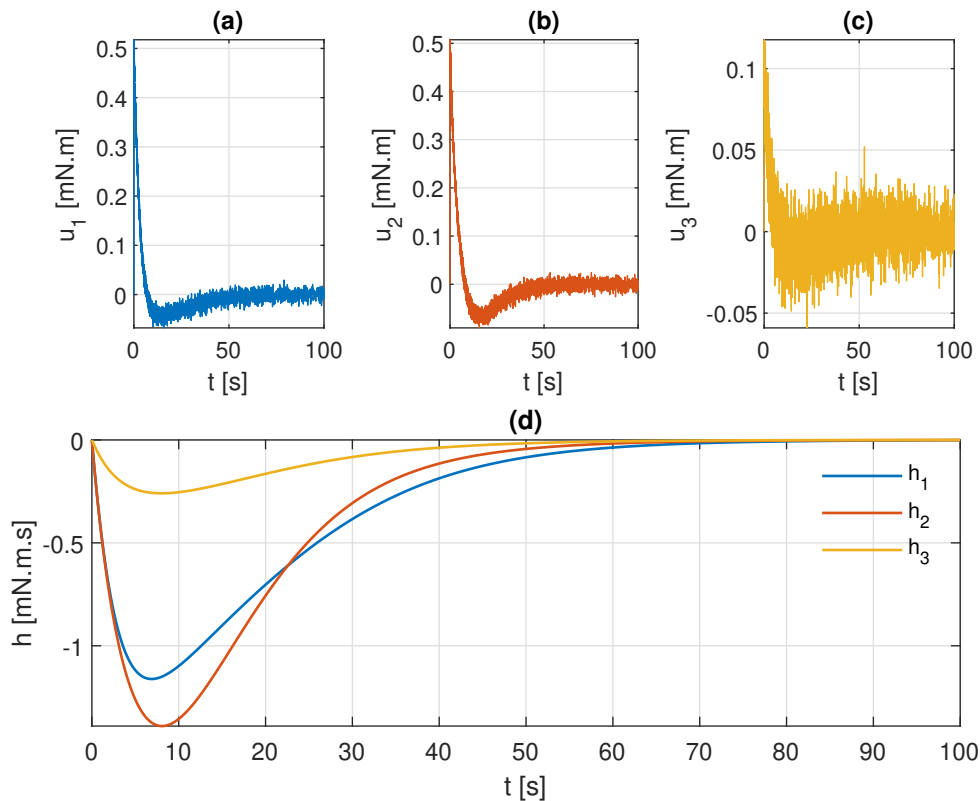


Fonte: Autor.

Os torques de controle aplicados aos eixos do satélite e sua respectiva quantidades de movimentos angulares são apresentados na Figura 4.10.

Já os torques de controle relativos as rodas de reações apresentam um comportamento similar aos do caso 2, assim como os ângulos de Euler e o ângulo principal θ , e por isso, foram omitidos.

Figura 4.10 – **(a)-(c)** Torque de controle sobre os eixos do corpo; **(d)** Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação



Fonte: Autor.

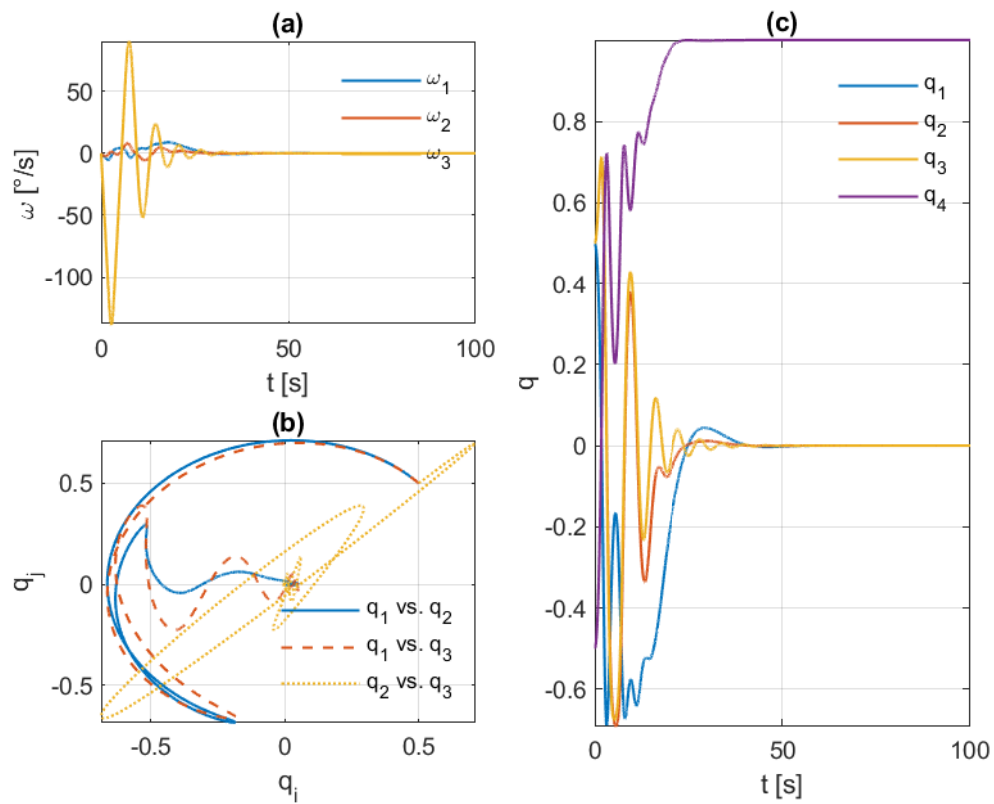
4.4 RESULTADOS PARA O CONTROLADOR DO CASO 4

Por fim, são apresentados os resultados das simulações para o caso 4. O controle foi baseado nos ganhos das Equações (4.1) e (4.5).

Os ganhos utilizados no projeto deste controlador proporcionou uma grande variação na velocidade angular, sendo a dentro os quatro casos simulados. A Figura 4.11.(a) apresenta a velocidade angular dos três eixos, chegando a atingir uma velocidade de rotação de $\omega_1 = -5.40^\circ/\text{s}$, $\omega_2 = -5.62^\circ/\text{s}$ e $\omega_3 = -139.41^\circ/\text{s}$. Entretanto, apresentou comportamento bastante oscilatório dos parâmetros de Euler, bem como um comportamento desordenado dos gráficos de q_i vs. q_j , incomum de uma manobra de reorientação repouso-repouso.

A atuação de controle, apresentada na Figura 4.12.(a)-(c) foi bem maior, quando comparado com os outros três casos, chegando a causar saturação nos atuadores. Conforme apresentado na 4.12.(c), o conjunto de rodas de reação atingiu os limites de performance durante os 10 primeiros segundos da manobra de reorientação. A quantidade de

Figura 4.11 – **(a)** Velocidade angular simulada; **(b)** Gráfico q_i vs. q_j ; **(c)** Comportamento temporal dos quatérnios

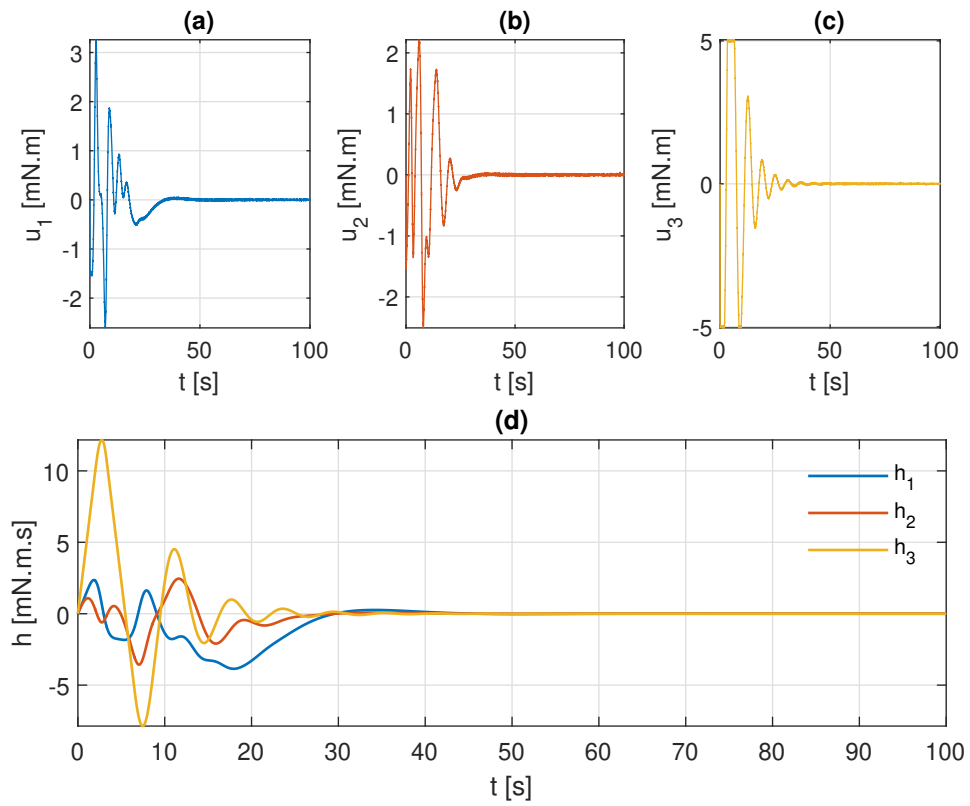


Fonte: Autor.

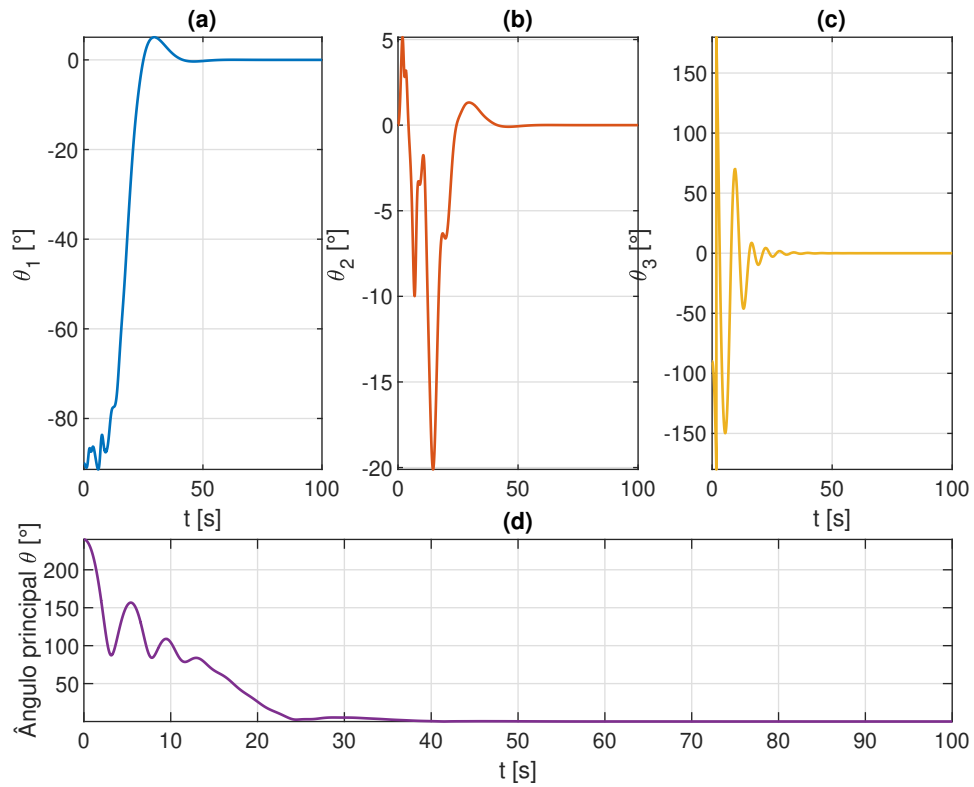
movimento angular (ou momento angular) ficou dentro dos limites do atuador, conforme apresentado na Tabela 3.2.

Apesar com comportamento desordenado, foi possível convergir a orientação do veículo para a atitude desejada, conforme mostrado na Figura 4.13, a qual descreve o comportamento dos ângulos de Euler e do ângulo principal.

Figura 4.12 – **(a)-(c)** Torque de controle sobre os eixos do corpo; **(d)** Quantidade de movimento angular do conjunto de rodas de reação



Fonte: Autor.

Figura 4.13 – Representação da atitude por ângulos de Euler e do ângulo principal θ 

Fonte: Autor.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi possível demonstrar que, para o caso ideal - em que a velocidade angular inicial de um satélite é nula - a manobra de reorientação em torno do eixo de Euler pode ser alcançada por meio da seleção das matrizes de ganho da realimentação, considerando a lei de controle por realimentação de quatérnios. Uma vez que a rotação em torno do eixo de Euler provê o caminho mais curto, o controlador proposto é uma solução simples para manobras de reorientação de veículos espaciais com grande variação angular.

Para as simulações, foram considerados quatro casos de seleção dos ganhos, de modo obter um sistema não-linear em malha fechada globalmente assintoticamente estável. Nas simulações do caso 1, os ganhos escolhidos proveram uma convergência mais lenta e sutil dos parâmetros de Euler, mas atendendo os requisitos de tempo de acomodação e precisão de apontamento. Além disso, o torque de controle aplicado pelo conjunto de atuadores permaneceu dentro dos limites de performance. Pode-se observar também as características da manobra de reorientação repouso-repouso a partir do comportamento linear dos quatérnios q_i vs. q_j .

Nos caso 2 e 3, a manobra de reorientação ocorreu de forma mais rápida, apresentando um torque de controle maior, e conseqüentemente, uma variação da velocidade angular maior, quando comparados com o caso 1. Além disso, foi possível obter o torque de controle relativo a cada roda de reação por meio da matriz de mapeamento, considerando que o conjunto de atuadores é composto por quatro rodas de reação na configuração pirâmide. Com relação a atitude final, em ambos os casos, a componente escalar do quatérnio, q_4 , convergiu para -1, o que também caracteriza o alinhamento com o referencial inercial, uma vez que o vetor de quatérnios q convergiu para zero.

Já no caso 4, o comportamento dos quatérnios q_i vs. q_j não ocorreu de forma esperada, uma vez que não apresentou uma forma linear. Apesar disso, foi possível convergir o sistema para a origem mas com um comportamento bastante oscilatório. Com relação aos atuadores, a ação de controle demanda provocou saturação nas rodas de reação durante os 10 segundos iniciais da manobra.

Os resultados obtidos neste trabalho demonstram a viabilidade de aplicação de um controle por realimentação de quatérnios para o controle de atitude de CubeSats devido a simplicidade no desenvolvimento e implementação do controlador e pela sua efetividade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DENNEHY, C. J. A survey of reaction wheel disturbance modeling approaches for spacecraft line-of-sight jitter performance analysis. **European Space Mechanisms and Tribology Symposium**, v. 18, n. 20, 2019.

FOLAMI, M. O. Reaction wheels fault isolation onboard 3-axis controlled satellite using enhanced random forest with multidomain features. **International Journal of Prognostics and Health Management**, v. 12i2, n. 3078, 2021.

FORTESCUE, P. **Spacecraft Systems Engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2011.

ISMAIL, Z.; VARATHARAJOO, R. A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control. **Advances in Space Research**, v. 45, p. 750–758, 2010.

LEE, S. **CubeSat Design Specification**. Cal Poly SLO, 2014. v. 13, 42 p. Acesso em 02 dez. 2021. Disponível em: <<https://www.cubesat.org/>>.

MARKLEY, F. **Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control**. [S.l.]: Springer New York, 2014.

NanoAvionics. **CubeSat Reaction Wheels Control System SatBus 4RW0**. 2022. Acesso em 10 ago. 2022. Disponível em: <<https://nanoavionics.com/>>.

Nanosats. **Nanosats Database - Launch with forecast**. 2022. Acesso em 17 jan. 2022. Disponível em: <<https://www.nanosats.eu/>>.

NARKIEWICZ, J.; SOCHACKI, M.; ZAKRZEWSKI, B. Generic model of a satellite attitude control system. **International Journal of Aerospace Engineering**, v. 2020, 2020.

OLAND, E.; SCHLANBUSCH, R. Reaction wheel design for cubesats. 2009.

Space News. **Launching the Small-satellite Revolution**. 2015. Acesso em 17 jan. 2022. Disponível em: <<https://spacenews.com/op-ed-launching-the-small-satellite-revolution/>>.

TRIANA, J. S. Identification of design considerations for small satellite remote sensing systems in low earth orbit. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 7, p. 121–134, 2015.

WERTZ, J. R. **Space Mission Analysis and Design**. California: Dover Publications, 1999. 976 p.

WIE, B.; BARBA, P. M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 8, 1985.

WIE, B.; WEISS, H.; ARAPOSTATHIS, A. Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 12, 1989.

XIA, G. S. X. Nanosats/cubesats adcs survey. **IEEE Explorer**, v. 7979410, n. 17041432, p. 5151–5158, 2017.

YANG, Y. **Spacecraft Modeling, Attitude Determination, and Control Quaternion-based Approach**. [S.l.]: CRC Press, 2019.