UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Gleidson Machado Bragança

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM SUAS FORMAS CANÔNICA E FATORADA

Santa Maria, RS
2022

Gleidson Machado Bragança

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM SUAS FORMAS CANÔNICA E FATORADA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Profa. Dra. Janice Rachelli

Santa Maria, RS
2022

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001

Bragança, Gleidson Machado
TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM SUAS FORMAS CANÔNICA E FATORADA / Gleidson Machado Bragança.- 2022.
92 p.; 30 cm

Orientadora: Janice Rachelli
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2022

1. Teoria das Situações Didáticas 2. Função quadrática 3. Forma canônica 4. Forma fatorada 5. GeoGebra I. Rachelli, Janice II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, GLEIDSON MACHADO BRAGANçA, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Gleidson Machado Bragança

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM SUAS FORMAS CANÔNICA E FATORADA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em 24 de fevereiro de 2022:

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Leonardo Dalla Porta, Dr. (UFN)

Maria Cecília P. Santarosa

Maria Cecília Pereira Santarosa, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

À CAPES:

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

“Os tempos são líquidos porque tudo muda tão rapidamente. Nada é feito para durar, para ser sólido”. (Zygmunt Bauman)

RESUMO

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM SUAS FORMAS CANÔNICA E FATORADA

AUTOR: Gleidson Machado Bragança
ORIENTADORA: Janice Rachelli

Considerando os estudos analisados ao longo do desenvolvimento da revisão bibliográfica deste trabalho, envolvendo a solução de equações do segundo grau, sendo estas associadas à busca das raízes de funções quadráticas e a importância salientada pelos documentos oficiais e orientadores quanto à resolução e elaboração de problemas que possam ser representados por equações/funções polinomiais do segundo grau, assim como, as competências e habilidades correlatas, compreendemos que esses tópicos tornam-se imprescindíveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, diversos são os estudos voltados aos processos de ensino e aprendizagem de equações/funções polinomiais do segundo grau, em busca de uma compreensão mais profunda dos fatores influentes na aprendizagem efetiva desses conceitos. Dessa forma, essa pesquisa tem por objetivo analisar a aprendizagem da Função Quadrática observando a forma canônica e fatorada tendo como pressupostos teóricos a Teoria das Situações Didáticas, visto que, essa teoria vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de organizar situações de ensino e avaliar o ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino. O estudo foi desenvolvido com acadêmicos, do primeiro semestre, dos cursos de Matemática - Licenciatura e Bacharelado de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, pois entendemos que a compreensão dos conceitos básicos relacionados as funções e a aplicação desses conceitos na solução de problemas práticos, constitui uma base de conhecimentos tanto no âmbito do desenvolvimento pessoal/cognitivo como para o desenvolvimento profissional, visto que serão futuros professores. Para tanto, selecionamos oito atividades que abordam a forma canônica e a forma fatorada da função quadrática e que contemplam as fases das situações didáticas e adidáticas previstas na Teoria das Situações Didáticas. Além disso, essas atividades abordaram a resolução de tarefas com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra e em lápis e papel, com os vinte e três participantes da pesquisa. Diante da análise dos dados foi possível perceber que ao percorrer as situações de ação, formulação e validação, fases previstas na Teoria das Situações Didáticas, os alunos agiram de forma ativa na construção de seus conhecimentos no momento em que testaram conjecturas, formularam hipóteses, provaram, construíram modelos, conceitos e teorias. Dessa forma, na fase da institucionalização, em que o professor organiza metodicamente em linguagem matemática os saberes envolvidos nas atividades, os alunos já compreendiam e/ou conseguiram relacionar as hipóteses formuladas, durante o desenvolvimento das atividades, com os conceitos apresentados pelo professor.

Palavras-chave: Teoria das Situações Didáticas. Função quadrática. Forma canônica. Forma fatorada. GeoGebra.

ABSTRACT

THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS: A PROPOSAL FOR THE TEACHING OF THE SQUARE FUNCTION IN ITS CANONICAL AND FACTORED FORMS

AUTHOR: Gleidson Machado Bragança
ADVISOR: Janice Rachelli

Considering the studies analyzed during the development of the bibliographic review of this work, involving the solution of quadratic equations, which are associated with the search for the roots of quadratic functions and the importance highlighted by official and guiding documents regarding the resolution and elaboration of problems that can be represented by polynomial equations/functions of the second degree, as well as related competencies and skills, we understand that these topics become essential for the development of algebraic thinking. Thus, there are several studies focused on the teaching and learning processes of polynomial equations/functions of the second degree, in search of a deeper understanding of the influential factors in the effective learning of these concepts. Thus, this research aims to analyze the learning of the Quadratic Function observing the canonical and factored form having as theoretical assumptions the Theory of Didactic Situations, since this theory has been used by researchers as a way of organizing teaching situations and evaluating the teaching and learning of Mathematics at different levels of education. The study was developed with academics, from the first semester, of the Mathematics courses – Degree and Bachelor's degree of a federal institution of higher education in the state of Rio Grande do Sul, because we understand that the understanding of the basic concepts related to the functions and the application of these concepts in the solution of problems practical, constitutes a knowledge base both in the scope of personal/cognitive development and for professional development, as they will be future teachers. For that, we selected eight activities that approach the canonical form and the factored form of the quadratic function and that contemplate the phases of the didactic and didactic situations foreseen in the Theory of Didactic Situations. In addition, these activities addressed the resolution of tasks using the GeoGebra dynamic geometry software and in pencil and paper, with the twenty-three research participants. In view of the data analysis, it was possible to perceive that when going through the situations of action, formulation and validation, phases foreseen in the Theory of Didactic Situations, the students acted actively in the construction of their knowledge when they tested conjectures, formulated hypotheses, proved, built models, concepts and theories. Thus, in the institutionalization phase, in which the teacher methodically organizes the knowledge involved in the activities in mathematical language, the students already understood and/or were able to relate the hypotheses formulated, during the development of the activities, with the concepts presented by the teacher.

Keywords: Theory of Didactic Situations. Quadratic function. Canonical form. Factored form. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Visão geométrica do método de completar quadrados..... 19
Figura 2 – Representação geométrica da parábola..... 22
Figura 3 – Representação gráfica da função $f(x)=x^2$ 23
Figura 4 – O triângulo didático..... 26
Figura 5 – Ilustração da situação de Ação..... 29
Figura 6 – Ilustração da situação da Formulação..... 29
Figura 7 – Ilustração da situação de Validação..... 30
Figura 8 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 1..... 45
Figura 9 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 2..... 47
Figura 10 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 3..... 49
Figura 11 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 4..... 51
Figura 12 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 5..... 53
Figura 13 – Ilustração do gráfico da função na Atividade 6..... 55
Figura 14 – Ilustração do gráfico da função na Atividade 7..... 57
Figura 15 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 8..... 59
Figura 16 – Construção da Atividade 1 pelo aluno A18..... 61
Figura 17 – Resolução da Atividade 1 pelos alunos A1 e A3..... 62
Figura 18 – Construção da Atividade 2 pelo aluno A17..... 63
Figura 19 – Resolução da Atividade 2 pelos alunos A4 e A9..... 63
Figura 20 – Construção da Atividade 3 pelo aluno A9..... 65
Figura 21 – Resolução da Atividade 3 pelos alunos A7 e A8..... 65
Figura 22 – Construção da Atividade 4 pelo aluno A16..... 66
Figura 23 – Resolução da Atividade 4 pelos alunos A9 e A10..... 67
Figura 24 – Construção da Atividade 5 pelo aluno A17..... 68
Figura 25 – Resolução da Atividade 5 pelo aluno A11..... 69
Figura 26 – Resolução da Atividade 5 pelos alunos A1 e A7..... 70
Figura 27 – Resolução da Atividade 6 pelo aluno A8..... 71
Figura 28 – Resolução da Atividade 6 pelo aluno A10..... 72
Figura 29 – Resolução da Atividade 7 pelo aluno A11..... 73
Figura 30 – Resolução da Atividade 7 pelo aluno A4..... 74
Figura 31 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A23..... 75
Figura 32 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A9..... 76
Figura 33 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A11..... 77
Figura 34 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A5..... 77
Figura 35 – Momento de institucionalização na Atividade 1..... 78
Figura 36 – Momento de institucionalização na Atividade 6..... 79
Figura 37 – Momento de institucionalização na Atividade 8..... 80

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição das situações didáticas e adidáticas...……28
Quadro 2 – Identificação dos trabalhos……..……...33
Quadro 3 – Caracterização das pesquisas em termos de objetivos, conteúdo matemático e sujeitos..……..34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....12
2 ALGUNS ELEMENTOS SOBRE A FUNÇÃO QUADRÁTICA.....18
2.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA.....18
2.2 FORMA CANÔNICA.....19
2.3 FORMA FATORADA.....21
2.4 GRÁFICO.....22
3 ALGUNS ELEMENTOS SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS 25
3.1 SOBRE A TEORIA.....25
3.2 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E ADIDÁTICAS.....27
3.3 CONTRATO DIDÁTICO.....30
3.4 ESTUDOS CORRELATOS.....33
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....41
4.1 PESQUISA QUALITATIVA.....41
4.2 SUJEITOS E CONTEXTO DA PESQUISA.....42
4.3 SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROPOSTAS.....43
5 DISCUSSÕES ACERCA DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES.....60
5.1 ATIVIDADE 1.....61
5.2 ATIVIDADE 2.....63
5.3 ATIVIDADE 3.....64
5.4 ATIVIDADE 4.....66
5.5 ATIVIDADE 5.....68
5.6 ATIVIDADE 6.....71
5.7 ATIVIDADE 7.....73
5.8 ATIVIDADE 8.....75
5.9 A FASE DA INSTITUCIONALIZAÇÃO.....78
5.10 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS.....80
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....82
REFERÊNCIAS.....85
ANEXO A – TUTORIAL DO GEOGEBRA.....88

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da história, diversos foram os estudiosos que se dedicaram a resolver o que atualmente chamamos de equações do segundo grau com uma incógnita. O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau e problemas que recaem nestas, estão entre os mais antigos da Matemática. Lima et al. (1997, p. 119) relatam que "em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma *s* e seu produto *p*" e que "em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro *s* e a área *p*", ou seja, procuram-se as raízes da equação do 2º grau $x^2 - sx + p = 0$, em que $s, p \in \mathbb{R}$ e $s^2 - 4p > 0$. (Ibid., p. 119).

Outrossim, de acordo com Lima et al. (1997), até o fim do século XVI, não usava-se uma fórmula específica para determinar os valores das raízes, pois os coeficientes de uma equação não eram representados através de letras/incógnitas, condição que passou a ser realizada a partir do matemático francês François Vietè (1540-1603). Dessa forma, antes de Vietè, usava-se um algoritmo que ensinava como proceder em exemplos concretos, isto é, situações em que os coeficientes são numéricos, sendo enunciado pelos babilônios como: "Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença; Some ao resultado a metade da soma; Isso dará o maior dos números procurados; Subtraia-o da soma para obter o outro número". (LIMA et al., 1997, p. 120).

Como *s* e *p*, anteriormente citados, eram, geralmente, números positivos, os babilônios nunca tiveram preocupações com soluções negativas obtidas pelo seu algoritmo, mas deviam ocorrer situações como, por exemplo, determinar dois números cuja soma e cujo produto são ambos iguais a 2, em que os mesmos acabavam considerando que os números procurados não existiam e que de fato é válido para o conjunto dos números reais, pois os números complexos só foram admitidos no século XVI, através da forma de obtenção das raízes de equações do terceiro grau. (LIMA et al., 1997).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017a, p. 272), "[…] a equivalência de áreas já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área […]" o qual era chamado pelos gregos de "[…] fazer a quadratura de uma figura [...]", ou seja, situações/problemas que envolvem equações do segundo grau podem ser resolvidos geometricamente.

A BNCC (BRASIL, 2017a, p. 271) destaca, ainda, que no estudo da Álgebra, no Ensino Fundamental, é "[…] necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação […]", bem como, "[…] estabelecer a variação entre duas grandezas […]" como fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo este essencial no "[…] estabelecimento de generalizações, análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações". E se encontra no 8º ano do Ensino Fundamental a habilidade EF08MA09 que destaca como importante "[…] resolver e elaborar, com e sem o uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$" (BRASIL, 2017a, p. 313).

Além disso, a compreensão dos processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, corresponde a uma das habilidades previstas na BNCC para o 9º ano do Ensino Fundamental, em que é esperado, que o aluno utilize esses processos para "[...] resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau" (BRASIL, 2017a, p. 317). A fatoração de expressões algébricas nos permite obter a forma canônica da função quadrática, a qual pode ser utilizada na obtenção de informações importantes sobre a função, como, por exemplo, as raízes e o vértice.

Com relação ao Ensino Médio, a BNCC (2017b) divide a área da Matemática e suas Tecnologias em cinco competências específicas, sendo que todas elas apresentam habilidades relacionadas, explicitamente ou implicitamente, aos conceitos de funções, sejam elas polinomiais do 1º grau, 2º grau ou de maior grau, exponenciais e logarítmicas. Propõe ainda que possa ser dividido em unidades temáticas citando, como exemplo, funções polinomiais de 1º e 2º graus, organizando habilidades, correlatas à unidade, das cinco competências específicas.

Rollof (2019), ao analisar cinco livros didáticos, disponibilizados pelo Plano Nacional do Livro Didático – PNLD 2018, observou que três obras abordaram a forma canônica da função quadrática: Chavante e Prestes (2016), Dante (2016), Iezzi et al. (2016). Com relação a forma fatorada da função quadrática, Dante (2016), Iezzi et al. (2016) foram os autores que versaram acerca deste tópico. Outro ponto a ser observado é com relação ao esboço do gráfico da função quadrática, onde Chavante e Prestes (2016), acompanhados de Dante (2016), trataram o gráfico da função a partir de transformações/translações. Ademais, todos os

autores, exceto Smole e Diniz (2016), abordaram o gráfico da função quadrática na forma clássica, utilizando a marcação de pontos no plano cartesiano.

Por outro lado, o estudo da função quadrática tem sido tema de pesquisas na área de Educação Matemática. Dentre elas, podem-se destacar os trabalhos de Silva, Madruga e Silva (2019), Thiel, Barbosa e Moretti (2018), Mendes et al. (2017), Lutz e Bona (2015) e Maia (2007).

As pesquisas realizadas por esses autores apontam dificuldades no ensino da função quadrática e apresentam algumas possibilidades para a melhoria da aprendizagem. Um dos resultados é que os estudantes têm melhor aprendizagem quando realizam atividades que estão pautadas no uso de recursos computacionais, bem como em teorias que atentam aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no contexto de sala de aula, como por exemplo, a Modelagem Matemática, a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, dentre outras.

Silva, Madruga e Silva (2019), ao analisar as contribuições da Modelagem Matemática à aprendizagem de função quadrática, perceberam que esse processo foi significativo aos alunos, pois ancorou-se em situações reais e que envolviam conceitos de outros campos do conhecimento, possibilitando aos mesmos se posicionar criticamente nas situações investigativas e, com isso, deixam de atuar como expectadores e tornam-se indivíduos ativos e pensantes.

Segundo Thiel, Barbosa e Moretti (2018), para que ocorra uma aprendizagem significativa de matemática, no que tange as conversões de registros de representações, além de sequências de ensino bem estruturadas, é necessário que estas estejam em consonância com outros elementos da aprendizagem como, por exemplo, a natureza das tarefas escolares, aspectos da aprendizagem matemática, condições socioeconômicas dos alunos, dentre outros.

Ademais, Mendes et al. (2017) consideram que a compartimentalização de conteúdos acerca de funções no 1º ano do Ensino Médio, como abordados em livros didáticos adotado nas escolas, não contribui para uma aprendizagem significativa, pelos estudantes, os quais acabam memorizando métodos e conteúdos para enfrentar situações-problema que, muitas vezes, não possuem relação com conhecimentos prévios e experiências. No estudo, os autores ressaltam que por meio do uso de tecnologias na disciplina de Matemática, o professor tem a possibilidade de proporcionar aos alunos momentos de visualização, testes e conjecturas necessárias para o seu aprendizado, diante das atividades de experimentação.

Ainda, Lutz e Bona (2015) argumentam que um recurso muito utilizado nas escolas é o livro didático, porém, o uso de metodologias, que incluem a utilização de recursos tecnológicos, permite ao professor aprofundamentos e melhorias nos processos de ensino e aprendizagem.

Maia (2007), ao utilizar um software gráfico, para complementar os estudos acerca da função quadrática percebeu que a utilização de uma ferramenta computacional favoreceu a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida, se comparado ao lápis e papel, permitindo que os alunos façam simulações em busca de resultados que satisfaçam o objetivo proposto e, ainda, desenvolvendo a capacidade de realizar previsões e indagar resultados. Em seu estudo, a autora enfatiza que a Teoria das Situações Didáticas foi um forte instrumento na análise e aplicação da sequência didática que tornou possível caracterizar as ações dos alunos e avaliar a compreensão sobre a construção gráfica da função quadrática.

Torna-se perceptível que softwares ou ambientes computacionais vêm sendo utilizados para contribuir na resolução de atividades ou problemas matemáticos. Com isso, Borba (2013) salienta que o uso de softwares complementa o uso do lápis e papel, proporcionando diferentes feedbacks aos usuários. O autor enfatiza, ainda, que softwares educacionais possuem a capacidade de destacar a visualização da matemática, tendo em vista que, ao considerarmos um ambiente de aprendizagem com computadores como um peculiar coletivo pensante, os professores, alunos, mídias e conteúdos matemáticos situam-se juntos e pensam juntos, tornando o software um ator no processo de fazer matemática.

A Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de organizar situações de ensino e avaliar o ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino. A teoria de Brousseau se apresenta como uma contraposição à didática clássica centrada no ensino com ênfase na divulgação do conhecimento; sua proposta é desenvolver um trabalho didático que torna possível o envolvimento entre professor, aluno e saber. As situações didáticas, as situações adidáticas e o contrato didático são elementos principais da Teoria das Situações Didáticas e desempenham papel central na análise e construção de situações para o ensino e a aprendizagem da Matemática. (BROUSSEAU, 2008).

Sendo assim, propomos esta pesquisa, com o objetivo de analisar a aprendizagem da Função Quadrática observando a forma canônica e fatorada tendo como pressupostos teóricos a Teoria das Situações Didáticas. O estudo foi desenvolvido com acadêmicos do curso de

Matemática de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, matriculados, no primeiro semestre de 2021 em uma disciplina que trata de conjuntos numéricos, conceitos básicos de funções, funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas. Destacamos que, a compreensão dos conceitos básicos relacionados as funções e a aplicação desses conceitos na solução de problemas práticos, constitui uma base de conhecimentos para auxiliar os estudantes na compreensão das demais disciplinas que compõe o currículo do curso, bem como, no desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a prática docente dos futuros licenciados e a formação dos futuros bacharéis. Acreditamos que o desenvolvimento das atividades propostas nesta pesquisa possibilitou aos estudantes a experiência com metodologias diferenciadas contribuindo para a formação de futuros professores de matemática e pesquisadores em matemática. Para tanto, selecionamos atividades que abordam a forma canônica e a forma fatorada da função quadrática e que contemplam as fases das situações didáticas e adidáticas previstas na Teoria das Situações Didáticas. Estas atividades abordam a resolução de tarefas com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra e em lápis e papel.

Dessa forma, faz-se necessário:

- Elaborar atividades observando as fases das situações propostas pela Teoria das Situações Didáticas;
- Investigar como os estudantes compreendem e como relacionam as formas canônica e fatorada da função quadrática na resolução de tarefas;
- Investigar as estratégias utilizadas pelos estudantes para solucionar determinadas situações-problema envolvendo conceitos referentes à função quadrática;

Para o desenvolvimento desta pesquisa, a dissertação está organizada em seis capítulos. Neste capítulo, Introdução, apresentamos o tema, a justificativa, os objetivos e a estrutura do trabalho. No capítulo 2 – Alguns Elementos Sobre a Função Quadrática – abordamos o objeto matemático envolvido no estudo, assim como, os tratamentos algébricos, geométricos e gráficos disponíveis para se obter dados e informações acerca do mesmo. No capítulo 3 – Alguns Elementos Sobre a Teoria das Situações Didáticas – é apresentado o referencial teórico utilizado na pesquisa em que destacamos aspectos essenciais da Teoria das Situações Didáticas: sua origem, o que são situações didáticas e adidáticas, contrato didático e alguns estudos correlatos à teoria. No capítulo 4 – Procedimentos Metodológicos – são descritos os procedimentos metodológicos, o tipo de pesquisa, o contexto e os sujeitos

envolvidos na pesquisa, assim como, as atividades que foram planejadas para serem desenvolvidas com vistas a analisar a aprendizagem da função quadrática observando a forma canônica e fatorada, com acadêmicos de um curso de Matemática, tendo como pressupostos teóricos a Teoria das Situações Didáticas. No capítulo 5 – Discussão Acerca das Atividades Desenvolvidas – são apresentados os dados obtidos durante a pesquisa e uma discussão acerca do que foi observado, de acordo com o referencial teórico, nas atividades realizadas pelos participantes da mesma. Para finalizar a dissertação, apresentamos o capítulo 6 – Considerações Finais – no qual constam discussões importantes e conclusões acerca do trabalho, assim como, recomendações e sugestões para pesquisas futuras. Além disso, fazem parte deste trabalho, as Referências, constituída por livros, dissertações, documentos oficiais e artigos científicos utilizados para fundamentar a pesquisa e o Anexo A, em que se encontra o tutorial de GeoGebra utilizado para auxiliar os estudantes no desenvolvimento das atividades e investigações.

2 ALGUNS ELEMENTOS SOBRE A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos tratados no estudo da função quadrática e que são utilizados nas atividades propostas neste trabalho. Abordamos a definição de função quadrática, gráfico, raízes, vértice e forma canônica e fatorada. Para isso, usamos como principal referencial a obra de Lima et al. (1997).

2.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste trabalho, vamos nos deter ao estudo das funções polinomiais do segundo grau, isto é, as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que são da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, com a , b e c números reais tais que $a\neq 0$, as quais tratam-se de funções polinomiais da forma $g(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ em que $a_0,a_1,...,a_n$ são números reais, os quais são denominados coeficientes da função g . Ademais, se $a_n\neq 0$, dizemos que f tem grau n , e no caso da função quadrática, esse grau é 2.

Essas funções se encontram presentes no ensino devido às suas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento, como também, seu estudo contribui na abordagem de importantes habilidades. Ainda, denominamos essas funções como quadráticas e existem inúmeras situações que podem ser descritas e/ou representadas por elas.

Podemos utilizar a seguinte situação para exemplificar sua utilização: um automóvel em movimento, ao ser freado pelo motorista, percorre uma distância até parar, denominada distância de frenagem. Motoristas experientes sabem que a distância de frenagem aumenta muito com o aumento da velocidade. Um instrutor de uma autoescola, ao preparar futuros motoristas, estima a distância de frenagem da seguinte forma: elevar a velocidade ao quadrado e dividir o resultado por 100. Portanto, a função que estima a distância de frenagem com uma velocidade inicial v pode ser escrita como $d(v)=\frac{v^2}{100}$, sendo essa uma função quadrática da forma $d(v)=av^2+bv+c$, com $a=\frac{1}{100}$, $b=0$ e $c=0$.

Outro exemplo que podemos citar é a situação em que deseja-se formar uma pipa em forma de losango com a maior área possível, dispondo de apenas uma vareta de 3 metros, a qual deve ser partida em dois para a confecção das diagonais do losango. Se chamarmos de z a medida de uma das partes oriundas da divisão da vareta, a outra parte medirá $3-z$.

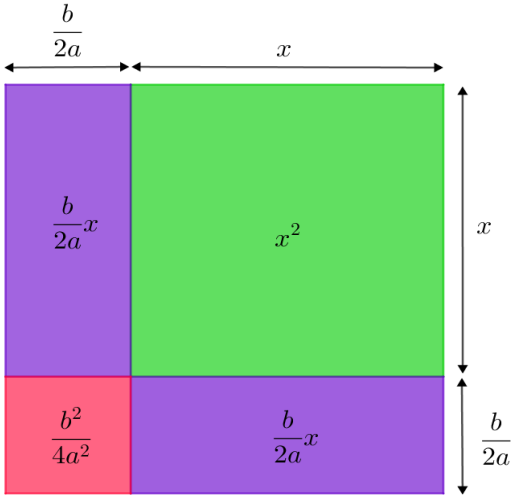
Sabemos que a área de um losango é dado por $A=\frac{diagonal\,maior\cdot diagonal\,menor}{2}$, o que, ao considerarmos as medidas supostas, resultará em $A(z)=\frac{z(3-z)}{2}\Leftrightarrow A(z)=\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{2}z$, isto é, a função descreve a área A dessa pipa em relação à variável z, determinada pela medida de uma das partições da vareta. A função A é uma função quadrática da forma $A(z)=az^2+bz+c$, com $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ e $c=0$.

2.2 FORMA CANÔNICA

Podemos reescrever a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, a qual se encontra na forma desenvolvida, em outras representações ou formas algébricas, uma delas é a forma canônica, a qual podemos obter do seguinte modo: primeiramente, trabalharemos com o trinômio ao lado direito da igualdade e evidenciamos o coeficiente a, isto é, $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$.

Nota-se que alguns elementos dentro dos colchetes são semelhantes aos do desenvolvimento do quadrado perfeito $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Pelo método de completar quadrados, apresentado na Figura 1, temos que $ax^2+bx+c=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$.

Figura 1 – Visão geométrica do método de completar quadrados



Fonte: Autor.

Assim, reescrevendo o quadrado perfeito $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ e agrupando os demais elementos dentro dos colchetes, obtemos $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. Essa forma de escrever o trinômio é chamada de forma canônica e pode ser reescrita como $ax^2+bx+c=a(x-m)^2+k$, em que $m=\frac{-b}{2a}$ e $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

É possível de se obter as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, a qual surge da busca dos zeros ou raízes da função $f(x)=ax^2+bx+c$, utilizando a forma canônica. Assim, reescrevendo o trinômio da equação em sua forma canônica, temos que $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0$. Nesse caso, basta isolar o x para obter as raízes da equação, ou seja, $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

. Essa última equação é denominada de fórmula resolutiva ou, em alguns casos, também é chamada de fórmula de Bhaskara. Ainda, podemos escrever $\Delta=b^2-4ac$, o qual denominamos discriminante.

Outra forma de se obter as raízes de uma função quadrática, diante da equação polinomial do segundo grau, é por meio da soma e do produto dessas raízes. Dessa forma, se $\Delta>0$, então a equação $ax^2+bx+c=0$ tem duas raízes reais e distintas $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, sendo $x_1<x_2$. A soma é dada por $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-2\frac{b}{2a}=-\frac{b}{a}$ e nesse sentido, o produto é $x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

Além disso, a média aritmética das raízes é dada por $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, isto é, as raízes x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$ sobre o eixo x . No entanto, se $\Delta=0$, então a equação $ax^2+bx+c=0$ tem duas raízes reais e iguais, dadas por $-\frac{b}{2a}$.

Vejamos um exemplo em que deseja-se obter as raízes da função quadrática $h(x)=x^2-8x+12$, a qual podemos utilizar a forma canônica. Primeiramente, é necessário reescrever a função h para a forma canônica por meio do método de completar quadrados: $h(x)=x^2-8x+12\Leftrightarrow h(x)=x^2-8x+16-16+12$, em que os três primeiros termos do lado direito da igualdade são componentes do quadrado perfeito $(x-4)^2$. Dessa forma, podemos reescrever essa função e ao organizar os termos semelhantes, obtemos $h(x)=x^2-8x+16-16+12\Leftrightarrow h(x)=(x-4)^2-4$, sendo essa última a forma canônica da função h .

Após obter a forma canônica, basta isolar x , visto que para obter as raízes da função h deve-se resolver a equação $(x-4)^2-4=0$. Com isso, temos que $(x-4)^2-4=0\Leftrightarrow(x-4)^2=4\Leftrightarrow x-4=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x=4\pm2$ e, concluímos que as raízes da função h são $x_1=4-2=2$ e $x_2=4+2=6$.

2.3 FORMA FATORADA

Além da forma canônica, também podemos reescrever a função $f(x)=ax^2+bx+c$ na forma fatorada, ou seja, se $\Delta\geq0$ a função f possui raízes x_1 e x_2 , então a forma fatorada é dada por $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Essa forma pode ser obtida isolando-se o coeficiente a da função f , isto é, $f(x)=ax^2+bx+c\Leftrightarrow f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$. Como, da soma e do produto das raízes, temos que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, podemos substituí-los no encontrado, obtendo $f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)\Leftrightarrow f(x)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]\Leftrightarrow f(x)=a\left[x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right]$. Ainda, podemos evidenciar x e x_2 , encontrando

$$f(x)=a\left[x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right]\Leftrightarrow f(x)=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]\Leftrightarrow f(x)=a\left[(x-x_1)(x-x_2)\right]$$

, sendo essa última a forma fatorada da função quadrática.

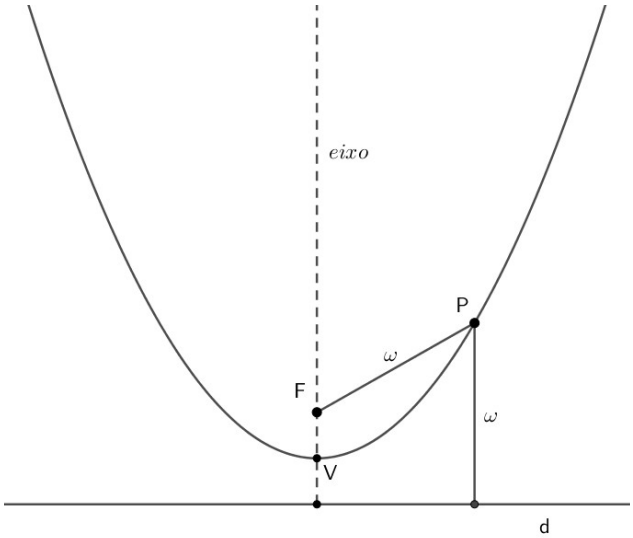
Uma característica da forma fatorada é que ela nos proporciona uma escrita em que é imediatamente perceptível as raízes da função, ou até mesmo, facilitar a obtenção da lei da função dadas as duas raízes.

Utilizando a mesma função h do exemplo anterior, podemos representá-la por meio da forma fatorada, sabendo que suas raízes são $x_1=2$ e $x_2=6$. Sendo assim, a forma fatorada da função é $h(x)=(x-2)(x-6)$.

2.4 GRÁFICO

Com relação à sua representação no plano cartesiano, o gráfico da função quadrática é uma parábola, isto é, dados um ponto F e uma reta d que não contenha o ponto F, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos do plano que distam por ω unidades de medida equivalentemente de F e de d. Pode-se ainda, traçar uma reta perpendicular a diretriz, passando pelo foco, a qual denominamos de eixo da parábola. O ponto da parábola que mais se aproxima da diretriz é o vértice da parábola e encontra-se no ponto médio entre o foco e a intersecção do eixo da parábola com a diretriz. Essa representação está apresentada na Figura 2.

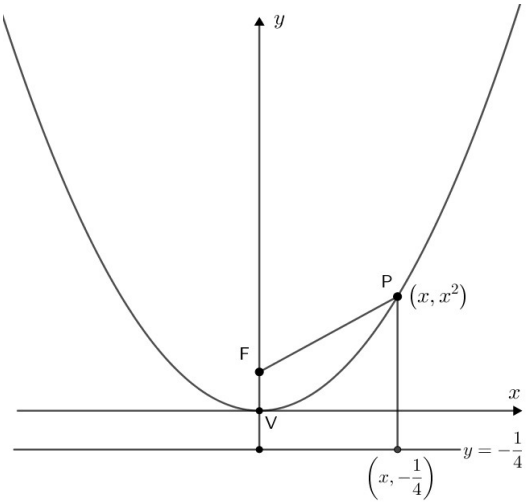
Figura 2 – Representação geométrica da parábola



Fonte: Autor.

Dessa forma, o gráfico da função quadrática $f(x)=x^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F=\left(0,\frac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta $y=-\frac{1}{4}$, o que pode ser verificado calculando-se as distâncias entre o foco e um ponto da parábola, e entre o ponto e a reta diretriz, isto é, $\sqrt{(x)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}=x^2+\frac{1}{4}$. A Figura 3 apresenta uma representação gráfica dessa situação.

Figura 3 – Representação gráfica da função $f(x)=x^2$



Fonte: Autor.

Ademais, para $a\neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2$ é a parábola cujo foco é $F=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta $y=-\frac{1}{4a}$, o que pode ser verificado de forma análoga ao exemplo anterior. Também, para todo $a\neq 0$ e $m\in\mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x)=a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F=\left(m,\frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta $y=-\frac{1}{4a}$, visto que o gráfico $f(x)=a(x-m)^2$ é resultante de uma translação horizontal da função $g(x)=x^2$ para a esquerda ou para a direita, dependendo de m ser positivo ou negativo, respectivamente, tal que $(x,y)\rightarrow(x+m,y)$, ou seja, leva o eixo $x=0$ ao eixo $x=m$.

De maneira semelhante, dados $a,m,k\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x)=a(x-m)^2+k$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F=\left(m,k+\frac{1}{4a}\right)$ e

cuja diretriz é a reta $y=k-\frac{1}{4a}$, visto que o gráfico $f(x)=a(x-m)^2+k$ é resultante de uma translação vertical da função $h(x)=a(x-m)^2$ vertical para cima ou para baixo, dependendo do valor de k ser positivo ou negativo, respectivamente, tal que $(x,y)\rightarrow(x,y+k)$, ou seja, leva o eixo $y=0$ na reta $y=k$ e a reta $y=-\frac{1}{4a}$ na reta $y=k-\frac{1}{4a}$.

Com isso, podemos perceber que, para uma função quadrática escrita na forma $f(x)=ax^2+bx+c$, como $m=\frac{-b}{2a}$ e $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, seu gráfico será uma parábola em que a diretriz é a reta $y=\frac{-b^2+4ac-1}{4a}$ e o foco é $F=\left(-\frac{b}{2a},\frac{-b^2+4ac+1}{4a}\right)$. Como o vértice encontra-se no ponto médio entre o foco e a intersecção do eixo da parábola com a diretriz, temos que $V=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, ou podemos reescrever como $V=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Ademais, o ponto mas próximo da diretriz é o vértice, o qual tem abscissa $x=-\frac{b}{2a}$ e, nesse ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a>0$ e seu valor máximo quando $a<0$. Logo, para $f(x)=ax^2+bx+c$, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)=c-\left(\frac{b^2}{4a}\right)$ é o menor valor assumido quando $a>0$ e o maior valor assumido por f quando $a<0$.

3 ALGUNS ELEMENTOS SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Neste capítulo, apresentamos alguns fundamentos da Teoria das Situações Didáticas que é utilizada nesta dissertação como referencial teórico. Para tanto, focalizamos os aspectos essenciais da teoria: situações didáticas e adidáticas, situação de ação, formulação, validação, devolução e institucionalização, bem como, o contrato didático. Além disso, buscamos exemplificar o alcance da Teoria das Situações Didáticas em pesquisas correlatas.

3.1 SOBRE A TEORIA

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi proposta por Guy Brousseau, um educador matemático francês, em 1986, e trata da relação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no processo de ensino e aprendizagem. Essa teoria faz referência aos processos de ensino e aprendizagem de matemática, em um contexto de sala de aula, refletindo sobre a maneira com que podemos conceber e apresentar o conteúdo matemático ao aluno. Ademais, tem como objeto central a situação didática e não o sujeito cognitivo, sendo identificadas as interações entre professor–aluno–saber. Sendo assim, o professor, ao elaborar sua práxis, analisa as possíveis variáveis, bem como os problemas que podem vir a surgir, a fim de que o aluno alcance seus objetivos.

Na Teoria das Situações Didáticas, a atividade do aluno aproxima-se à de um pesquisador, no momento em que testa conjecturas, formula hipóteses, prova, constrói modelos, conceitos e teorias. Logo, cabe ao professor realizar a devolução de um problema e não a simples comunicação de um determinado conhecimento. Cabe destacar que, os equívocos cometidos pelo aluno constituem uma significativa fonte de informações para a elaboração de novas questões ou situações que se aproximem dos objetivos desejados.

O surgimento da Teoria das Situações Didáticas deu-se em um momento no qual a visão cognitiva, fortemente influenciada pela epistemologia piagetiana, dominava o ensino e a aprendizagem de matemática. Para Brousseau (2008), era necessário ter um novo enfoque: uma construção que permitisse a compreensão das interações sociais dos alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em sala de aula, os quais condicionam o que se aprende e a forma como isso ocorre.

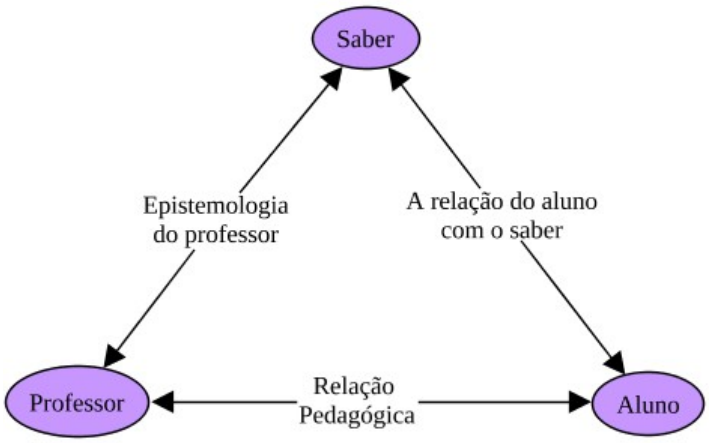
Para Brousseau (2008), o ensino é, frequentemente, concebido como as relações entre o sistema educacional e o aluno, vinculadas à transmissão de um determinado conhecimento.

Dessa forma, o professor organiza o conhecimento a ser transmitido em uma série de mensagens, das quais o aluno capta e toma para si o que se deve adquirir.

A questão evidenciada por Brousseau (2008, p. 18) em seus estudos foi: “Que condições podem ser propiciadas para que um sujeito qualquer tenha a necessidade de um conhecimento matemático determinado para tomar certas decisões?”. A resposta do ensino tradicional para essa questão é ensinar e praticar. Porém, para Brousseau, os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio (*milieu*) e, portanto, o mesmo deve ser modelado.

A teoria de Brousseau se apresenta como uma contraposição à didática clássica centrada no ensino com ênfase na divulgação do conhecimento, e sua proposta é desenvolver um trabalho didático em que fosse possível o envolvimento entre professor, aluno e saber. Esses três elementos compõem um sistema didático, denominado triângulo didático, conforme está ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – O triângulo didático



Fonte: Adaptado de Almouloud (2007).

O triângulo didático relaciona os elementos que compõem seus vértices, sendo eles, o saber, o professor e o aluno. Nessa relação triangular, a relação saber-professor contempla a didática, a gestão das informações e o processo de ensinar; na relação professor-aluno, encontra-se a interação da epistemologia do professor com o aluno em prol de sua formação; e na relação aluno-saber, situa-se a construção dos conhecimentos pelo aluno, ou seja, o processo de aprendizagem.

A Teoria das Situações Didáticas apoia-se em três pressupostos, que apresentamos a seguir:

> 1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é um fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem [...].
> 2. O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar o *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
> 3. [...] esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. (ALMOLOUD, 2007, p. 32-33).

As situações didáticas, as situações adidáticas e o contrato didático são elementos principais da Teoria das Situações Didáticas e desempenham papel central na análise e construção de situações para o ensino e a aprendizagem da matemática.

3.2 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E ADIDÁTICAS

O objeto central da Teoria das Situações Didáticas é a situação didática, definida como:

> […] o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 2007, p. 33).

A teoria salienta que, uma situação didática deve possuir contribuição de uma situação adidática, a qual trata-se de uma situação pensada, planejada e elaborada pelo professor, de forma que a intenção de ensinar não é exposta ao aluno. Isto exige que o professor provoque no aluno, por meio da seleção sensata de problemas, as adaptações desejadas gerando contradições, dificuldades e desequilíbrios, levando-o às novas respostas que serão a marca da aprendizagem (BROUSSEAU, 2008).

Para Brousseau (2008), uma situação adidática tem as seguintes características: desde o início do problema até sua resolução, o professor não deve fornecer os conhecimentos que quer ver surgir; o aluno deve estar ciente de que o problema escolhido propiciará a construção de um novo conhecimento; e que esse saber só será realmente consolidado, até que possa ser utilizado fora do contexto de ensino e sem indicações intencionais.

Ademais, essa situação proporciona condições propícias para o enriquecimento de novos saberes, que se deseja ensinar, pois segundo Brousseau (2008, p. 90), “o aluno só pode aprender produzindo, fazendo com que os conhecimentos […] funcionem e evoluam em condições […] semelhantes às que ele encontrará no futuro, se não a todo instante, pelo menos com bastante frequência”, tornando-se imprescindível que o professor prepare os alunos para defrontar-se com situações adidáticas, fazendo uso das fases didáticas, abordadas nos próximos parágrafos.

Com relação ao processo de ensino e aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas analisa e decompõe esse processo em quatro fases distintas: ação, formulação, validação e institucionalização. Estas fases estão relacionadas entre si sendo que em cada uma delas o saber tem papéis diversos e os alunos apresentam relações diferentes com este saber. Estas fases também são chamadas de dialéticas e de situações (ALMOULOUD, 2007; BROUSSEAU, 2008).

No Quadro 1, são apresentadas as características referentes a cada uma das fases que modelam as situações didáticas e adidáticas.

Quadro 1 – Descrição das situações didáticas e adidáticas

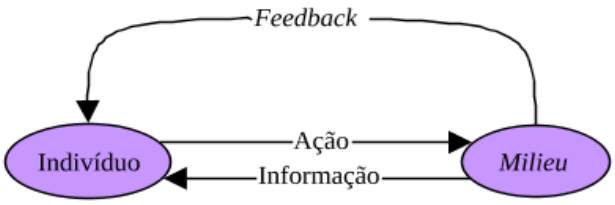
Fases	**Características**
Ação	Essa situação coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação. Deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem intervenção do professor, graças à retroação do meio. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação. As interações estão centradas na tomada de decisões, embora possa haver trocas de informações, mesmo que não sejam necessárias à ação. (ALMOULOUD, 2007, p. 37-38)
Formulação	O aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. Estas mensagens podem estar redigidas em língua natural ou matemática, segundo cada emissor. Como resultado, permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. O objetivo dessa situação é a troca de informações. (ALMOULOUD, 2007, p. 38)
Validação	É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor. O emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição. O objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação. (ALMOULOUD, 2007, p. 39)
Institucionalização	Situação na qual o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber

	social. (ALMOULOUD, 2007, p. 40)

Fonte: Autor.

A situação de Ação consiste em colocar o aluno em uma determinada situação, onde o mesmo possa agir, analisar o resultado de sua ação e, se necessário, modificá-lo, sem auxílio/intervenção do docente, de acordo com o *feedback* do *milieu*, conforme ilustrado na Figura 5.

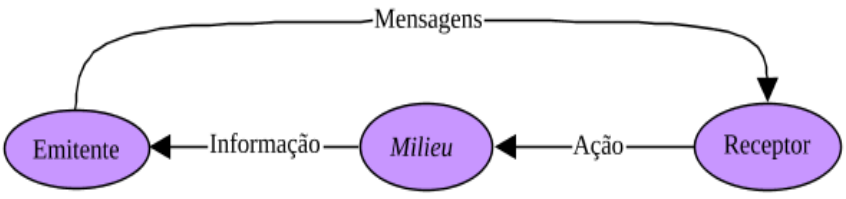
Figura 5 – Ilustração da situação de Ação



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

A situação de Formulação objetiva a troca de informações entre os sujeitos, acerca das estratégias tomadas e soluções encontradas, através de comunicados, tanto na sua forma escrita como oral, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Ilustração da situação de Formulação

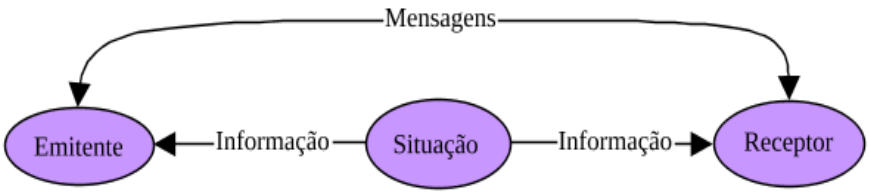


Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Salienta-se que essa comunicação pode utilizar a língua natural ou uma linguagem matemática, o que contribui para um desenvolvimento gradual de uma linguagem que seja compreensível para os demais sujeitos.

A situação de Validação é a etapa onde o aluno demonstra a validade do modelo, por ele elaborado, expondo-o para julgamentos dos demais sujeitos. Desta forma, busca-se o debate acerca dos argumentos, formulados nos momentos de Ação e Formulação, permitindo a organização das interações com o *milieu*, como pode ser observado na Figura 7.

Figura 7 – Ilustração da situação de Validação



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Já a situação de Institucionalização, é o momento em que o professor estipula e informa o estudo cognitivo do saber e, desta forma, o saber torna-se verídico para a classe de alunos, tornando-se à disposição na resolução de problemas matemáticos.

3.3 CONTRATO DIDÁTICO

A interação entre o professor, o aluno e o meio (*milieu*) pressupõe regras, que são chamadas, por Brousseau (2008), de contrato didático. Assim, o contrato didático refere-se ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar e dizem respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre professor e alunos. Certas características do saber matemático, tais como formalismo, abstração e rigor, condicionam algumas regras implícitas do contrato didático.

Brousseau (2008) discute e apresenta diversos tipos de contratos, estabelecendo três exemplos: contratos sem intenção didática, contratos pouco didáticos e contratos didáticos.

No primeiro, a ênfase está na importância do conteúdo, em que o professor se considera o detentor do conhecimento e o aluno sabe nada do que vai ser ensinado. Dessa forma, o professor impõe o uso de um único método para organização e apresentação dos conceitos (sequência linear de axiomas, definições, teoremas, demonstrações e exercícios), cabendo ao aluno atentar-se à aula, tomar notas, repetir exercícios clássicos, estudar e

reproduzir em provas. O aluno, geralmente, considera que o nível de exigência das provas é superior ao nível das aulas, podendo ocorrer certo conflito entre alunos e professor, sendo assim, a avaliação pode ser utilizada como instrumento de controle.

No segundo exemplo, a ênfase está no relacionamento entre aluno e saber. Neste cenário, o aluno é quem efetivamente deve aprender e não é o professor quem tem o poder de transmitir conhecimentos. Assim, o professor propõe a realização de trabalhos em grupo, realizando poucas intervenções para não "atrapalhar" (educação não diretiva), além de deixar de analisar os conceitos em formação, como se a aprendizagem escolar fosse uma atividade espontânea (saber cotidiano) e a ideia tradicional de currículo fica essencialmente modificada.

No último exemplo, a ênfase está no relacionamento do aluno com o saber. Neste caso, o professor não é considerado fonte de conhecimento, mas tenta estabelecer um nível de intervenção, em que, o mesmo, planeja as situações didáticas (problemas, jogos, atividades, trabalhos de pesquisa, entre outros) e os alunos podem trabalhar individualmente, em pequenos grupos ou, ainda, a classe como um todo. Neste exemplo de contrato didático há uma maior valorização da resolução de problemas, fazendo com que o aluno seja levado a atuar ativamente na elaboração dos conceitos matemáticos.

Em ambos os casos de contrato didático, podem ocorrer rupturas, por exemplo, o aluno pode apresentar desinteresse pela resolução de problemas propostos pelo professor ou não demonstrar um envolvimento necessário nas atividades propostas. Assim como, o professor pode propor a resolução de um problema para a qual a estratégia de solução não está compatível com o nível intelectual e cognitivo do aluno, ou ainda, o professor pode apresentar uma postura pedagógica não compatível com sua função de orientador das situações de aprendizagem.

Para Brousseau (2008), quando ocorrem essas rupturas, cabe ao professor, planejar as atividades que serão propostas para facilitar a elaboração do conhecimento pelo aluno, verificar em que condições essa elaboração foi efetivada pelo aluno e redirecionar o trabalho, caso a aprendizagem não tenha ocorrido de forma satisfatória.

Com relação aos Contratos sem Intenção Didática, Suleiman (2015) os define em quatro:

> […] Contrato de Emissão (situação mínima: professor monologa e os alunos emitem ruídos, também os programas de rádio e televisão); Contrato de Comunicação (a mensagem chega ao receptor quando o emissor usa os repertórios próprios para isso); Contrato de Habilidade (é mais exigente, onde o emissor garante a validade do que está emitindo, como por exemplo, enunciar teoremas que compõem uma teoria matemática, um após o outro: os

> enunciados se tornam assertivas, isto é, verdadeiros) e Contrato de Produção do Saber (o emissor garante o ineditismo de sua mensagem, omitindo sua prova; exemplo, apresentar as raízes de certas equações, sem publicar o método que utiliza). (SULEIMAN, 2015, p. 203).

Já os Contratos Pouco Didáticos, os quais possuem relação com novo saber, são quantificados em quatro, segundo Brousseau (2008), e são descritos por Suleiman (2015) como:

> […] Contrato de Informação (é o que está vigente na comunidade matemática para a divulgação de resultados, onde o emissor garante a novidade, a validade e a prova de sua mensagem); Contrato de Utilização dos Conhecimentos (amplia o anterior, agregando um campo de aplicações); Contrato de Iniciação ou de Controle (emissor fornece ao receptor um critério para determinar se compreendeu bem e não somente recebeu a mensagem) e Contrato de Instrução ou de Direção de Estudos (utiliza todos os dados dos anteriores e indica como se pode aprender um novo saber, por exemplo, a demonstração já é um cálculo ou um algoritmo e aquele que aprende pode verificar se executou ou reproduziu bem o algoritmo). (SULEIMAN, 2015, p. 203).

E para os Contratos Didáticos, Brousseau (2008) designa uma simbologia para os sujeitos pertencentes ao contrato, sendo eles: o indivíduo a quem se ensina (E), o professor (P), a instituição relacionada ao estudante (M), a qual, por exemplo, determina a matéria a ser ensinada, e a instituição que toma decisões relativas ao professor (I), decidindo que (P) deve preparar (E) para as práticas da instituição (M). Ademais, essas quatro designações podem ser assumidas, ou não, por diferentes instituições como, por exemplo, o caso de um sujeito autodidata, este assume no mínimo três designações, sendo elas (I), (P) e (E), para suprir a demanda de (M).

Retornando à relação professor-aluno, o contrato didático, pode ser considerado como as decisões do professor que são esperadas pelo aluno, assim como as decisões do aluno que são esperadas pelo professor. No entanto, é impossível estabelecer um contrato didático real entre (P) e (E), pois o aluno não sabe onde se quer chegar, nem como esse processo se sucederá, mas precisa aceitar esse fato. Do mesmo modo, o docente não deve se comprometer a “fazer o aluno entender” um determinado conhecimento e “fazer com que este se produza”, pois não existem algoritmos e convenções de como se produz Matemática e de que forma se produz Matemática. (BROUSSEAU, 2008, p. 73).

Destarte, tendo por hipótese a existência de um contrato acerca dos conhecimentos a serem produzidos, o mesmo tenderia à ruptura de suas cláusulas, pois, os novos conhecimentos ancoram-se aos prévios e, até mesmo, os modificam ou substituem. Considerando que os conhecimentos dos alunos são oriundos de suas decisões diante

determinadas situações, o professor não deve lhe dizer quais ações realizar e decisões tomar, caso contrário, impossibilitaria o ato de ensinar e vetaria o aluno da produção de seus conhecimentos e, desse modo, Brousseau (2008, p. 76) coloca que “aprender não consiste em cumprir ordens, nem em copiar soluções para problemas”. Esses argumentos contribuem para que o contrato didático seja uma convenção ilusória, mas indispensável, para uma boa relação e para as possibilidades de intervenção, de devolução das situações adidáticas e de institucionalização.

Um componente importante do contrato didático é a noção de devolução, sendo esta definida por Brousseau (2008, p. 91) como “[…] o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência”, ou seja, o professor não deve dar a resposta correta ao aluno, mas deve influenciar para que o mesmo aceite a responsabilidade de se envolver na resolução dos problemas/atividades cujas respostas são desconhecidas.

3.4 ESTUDOS CORRELATOS

Na busca de trabalhos relacionados ao tema proposto ou que venham a contribuir para o desenvolvimento desta pesquisa, foi utilizado o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), utilizando como termos de pesquisa: Teoria das Situações Didáticas e Funções.

Foram encontrados 26 trabalhos, sem delimitações de período cronológico, com os termos supracitados, em que 21 tratam de funções propriamente ditas e não da palavra no sentido de incumbência. Ao fazer uma leitura preliminar, constatamos que apenas 10 trabalhos aproximam-se ou abordam em partes os conceitos referentes às funções quadráticas, além de utilizar um referencial teórico baseado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Os referidos trabalhos estão identificados no Quadro 2, em ordem decrescente ao ano de publicação, conforme o tipo de trabalho, autor(es), título e ano.

Quadro 2 - Identificação dos trabalhos

Tipo de trabalho	Autor(a)	Título	Ano
Dissertação (Universidade Federal do Ceará)	Franscisco Daniel Souza de Lima	Situações Didáticas Olímpicas para o ensino de funções: o contributo da Engenharia Didática de Segunda Geração	2019

Dissertação (Universidade Federal do Ceará)	Meirivâni Meneses de Oliveira	Ensino de funções por meio da videoanálise: um contributo da Engenharia Didática	2019
Dissertação (Universidade Federal de Alagoas)	André Carlos Nascimento Maia da Silva	O GeoGebra como ferramenta didática para um ensino integrado de cinemática, funções afins e quadráticas	2014
Dissertação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo)	Cláudia Pereira dos Santos	Função seno: um estudo com o uso do *software* Winplot com alunos do Ensino Médio	2013
Dissertação (Universidade Federal de Alagoas)	Anayara Gomes dos Santos	O GeoGebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias	2013
Dissertação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo)	Edson Rodrigues da Silva	Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio	2012
Dissertação (Universidade Federal de Alagoas)	Vívia Dayana Gomes dos Santos	Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e GeoGebra: funções afins e funções quadráticas	2012
Dissertação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo)	Edvaldo Vale de Sousa	Objetos de aprendizagem no ensino de matemática e física: uma proposta interdisciplinar	2010
Dissertação (Universidade Federal Rural de Pernambuco)	Maurício Ademir Saraiva de Matos Filho	Análise de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus instrumentalizada por uma ferramenta computacional: possibilidades e dificuldades	2010
Dissertação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo)	Sérgio Aparecido dos Santos	Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio	2009

Fonte: Autor.

A seguir, no Quadro 3, exibimos os objetivos de cada uma das pesquisas selecionadas, os conteúdos matemáticos abordados e seus sujeitos.

Quadro 3 - Caracterização das pesquisas em termos de objetivos, conteúdo matemático e sujeitos

Pesquisa	**Objetivo**	**Conteúdo**	**Sujeitos da pesquisa**
LIMA, F. D. S. de (2019)	[…] oferecer uma metodologia de ensino focada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e na metodologia de pesquisa Engenharia Didática de Segunda Geração (EDSG).	Questões da OBMEP relacionadas à funções.	Professores em formação continuada
OLIVEIRA, M. M. de (2019)	[…] verificar como situações didáticas, mediadas pelo uso do aplicativo VidAnalysis, contribuem no ensino de funções.	Taxa de variação e funções afim, quadrática e exponencial.	15 estudantes do 2º ano do Ensino Médio.
SILVA, A. C. N. M. da (2014)	Apresentar uma proposta didática para subsidiar uma abordagem interdisciplinar de física e matemática no primeiro ano do ensino médio.	Funções afim e quadrática.	14 estudantes do 1º ano do Ensino Médio.
SANTOS, C. P. dos (2013)	Investigar de que modo uma estratégia pedagógica apresentada na forma de sequências de atividades, com o uso do *software* Winplot, pode promover a	Funções afim, quadrática, constante e seno.	3 estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

	aprendizagem da função seno para o aluno da 2ª série do ensino médio e ainda se pode contribuir na compreensão em um contexto físico-matemático.		
SANTOS, A. G. dos (2013)	[...] o desenvolvimento, a aplicação e a análise de uma sequência didática destinada à promoção da aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de determinadas funções por isometrias e homotetias destinada a estudantes do segundo ano do Ensino Médio.	Funções afim, seno, potência e modular.	27 alunos do Programa de Apoio a Escolas Públicas do Estado (PAESPE).
SILVA, E. R. da (2012)	[…] conduzir estudantes do 3º ano do Ensino Médio a construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea.	Taxa de variação e funções afim, quadrática e racional.	8 estudantes do 3º ano do Ensino Médio.
SANTOS, V. D. G. dos (2012)	[...] verificar a eficiência de um roteiro produzido em forma de cartilha explicativa e metodológica.	Funções polinomiais de 1º e 2º graus.	10 alunos voluntários de escolas públicas, que participaram do Programa Institucional de Bolsas de Inciciação Científica Junior (PIBIC-Jr)
SOUSA, E. V. de (2010)	[…] verificar como uma abordagem baseada no uso de "Objetos de Aprendizagem" concebidos no contexto da Física pode promover a aprendizagem do conceito matemático de função e das representações deste conceito em estudantes do ensino médio e que benefícios um ambiente informático baseado em simulações de fenômenos físicos ligados à cinemática pode trazer a uma metodologia de sequência didática que leve esses estudantes a construir esse conceito.	Taxa de variação e funções polinomiais de 1º e 2º graus.	34 estudantes do 1º ano do Ensino Médio.
MATOS FILHO, M. A. S. de (2010)	[...] analisar uma sequência didática destinada ao ensino de Funções Polinomiais de 1º e 2º graus, mediada pelo uso do *software* Winplot.	Funções polinomiais de 1º e 2º graus.	56 estudantes do 1º ano do Ensino Médio.
SANTOS, S. A. dos (2009)	[…] desenvolver um ambiente informatizado voltado ao ensino, para favorecer o aprofundamento dos conhecimentos relacionados à função polinomial de segundo grau.	Função polinomial do 2º grau.	30 estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Fonte: Autor.

Posto isto, quanto à metodologia utilizada e os resultados ou considerações, podemos destacar que Lima (2019) realizou uma pesquisa bibliográfica em busca de trabalhos, com uma abordagem nas olimpíadas de matemática, no repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, que o conduziu a perceber a carência de dissertações que abordam uma metodologia de ensino a qual desloque o aluno de uma posição de expectador nas resoluções de exercícios para uma posição de sujeito ativo.

Assim, Lima (2019) verificou uma carência de materiais que possuem tratamentos diferenciados e que ofereçam aos professores de matemática formas alternativas de abordagens das olimpíadas de matemática, decidindo, para o seu trabalho, focar na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, em específico acerca de um tema recorrente nas mesmas: funções. Logo, o autor selecionou três de onze Situações Didáticas Olímpicas escolhidas da OBMEP, propondo uma abordagem para esses problemas através da Engenharia Didática de Formação, juntamente, com a Teoria das Situações Didáticas e suas fases, tendo como recurso tecnológico o GeoGebra.

Oliveira (2019), também utilizou para sua pesquisa a metodologia de Engenharia Didática, percorrendo suas etapas, e fez uso da Teoria das Situações Didáticas como metodologia de ensino. Com isso, a autora propõe e discute três situações didáticas para o estudo de funções, sendo elas: lineares, quadráticas e exponenciais, utilizando como recurso tecnológico o aplicativo VidAnalysis. Essa proposta foi aplicada, inicialmente, com 10 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, momento em que foram realizadas adequações nos enunciados das atividades que compõem as situações a fim de facilitar a compreensão das mesmas, pelos estudantes. Após as modificações, as três situações foram aplicadas novamente com 15 estudantes do 2º ano do Ensino Médio, momento em que percorreram-se as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, tornando possível as análises a posteriori, donde observou-se a contribuição do aplicativo VidAnalysis com a coleta de dados, visualização de gráficos e tabelas, elaboração de conjecturas e validação de suas resoluções. Por fim, a autora retrata que, diante de suas observações, um ensino baseado em uma linguagem predominantemente algébrica dificulta a relação dos conceitos de funções com situações cotidianas e que um estudo gráfico de movimentos reais, complementado de características algébricas possibilita uma compreensão mais significativa pelos estudantes.

Já Silva (2014), em seu trabalho, propõe seis oficinas, contendo 15 atividades apoiadas na Teoria das Situações Didáticas, as quais visam propiciar uma compreensão de alguns conceitos relacionados à função, como também, estabelecer uma analogia entre a matemática e a física aos alunos do 1º ano do Ensino Médio, utilizando como recurso tecnológico o GeoGebra. Após a realização das oficinas, em que fizeram-se presentes 14 alunos do 1º ano do Ensino Médio, o autor constatou que várias foram as discussões e os processos de resolução das atividades propostas, no qual, grande maioria eram oriundas de alunos durante momentos de investigação e manipulação. Neste trabalho, destacou-se que os momentos de

institucionalização despertaram, nos alunos, o interesse de expor suas observações, sejam elas acerca dos problemas específicos, como também, para casos mais gerais, contribuindo para o ensino e a aprendizagem.

Santos (2013), ao analisar documentos oficiais e pesquisas correlatas que tratam de funções trigonométricas com o uso de softwares gráficos e envolvendo a interdisciplinaridade, percebeu uma pequena quantidade de pesquisas versando acerca da função seno. Dessa forma, utilizando como metodologia os princípios da Engenharia Didática, a autora propôs uma sequência de 19 atividades, envolvendo a função seno com enfoque na interdisciplinaridade, contando com o auxílio do software Winplot, além de basear-se na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria de Registros de Representação Semiótica. A sequência de atividades foi realizada com 3 alunos do 2º ano do Ensino Médio, dividindo-se em cinco partes, em que nas duas primeiras, a autora abordou atividades correlatas à funções polinomiais do 1º, 2º e 3º graus e as partes III, IV e V, estavam relacionadas à função seno. Dessa forma, a autora concluiu que a utilização do software Winplot auxiliou o estudo da função seno com relação à interpretação dos gráficos e na compreensão dos registros de representação semiótica e que as atividades apresentadas na forma de situação adidática buscavam o progresso dos alunos, diante de questionamentos, respostas, provocando situações de ação, formulação, validação e institucionalização num contexto interdisciplinar.

Por outro lado, Santos (2013) utilizou em sua pesquisa os princípios da Engenharia Didática e teve como referenciais a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, na busca de investigar a influência dos efeitos de tratamentos realizados na representação algébrica de uma função no favorecimento de uma aprendizagem no esboço de gráficos, diante do ambiente lápis e papel. Dessa forma, a autora propôs uma sequência didática, composta por dez oficinas, as quais continham atividades em consonância com as fases de ação, formulação, validação e institucionalização. E assim, através dos dados coletados, Santos (2013) argumentou que os estudantes apresentaram um grau de conhecimento em torno da dinâmica dos movimentos causados nos gráficos pelas transformações de isometrias e homotetias, tornando possível o distanciamento da necessidade de utilizar computadores para esboçar gráficos.

De forma semelhante aos autores supracitados, Silva (2012) adotou os pressupostos da Engenharia Didática, utilizando-se da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria de Registros de Representação Semiótica a fim de conduzir estudantes do 3º ano do Ensino Médio a

construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea. Para tanto, o autor elaborou uma sequência didática, composta por quatro situações, contendo atividades que constituem situações de ação. Após a realização da sequência, o autor salienta que a construção de significado para os conceitos iniciais de taxa de variação instantânea originou-se através da mobilização simultânea de registros de representação algébrica, gráfica e tabular, além de verificar que os estudantes podem construir esse significado a partir de situações com abordagens intuitivas, sem a estrutura e terminologias utilizadas no Ensino Superior.

Santos (2012), ao refletir sobre sua prática docente no Ensino Superior, percebeu que grande parte dos alunos que ingressam no curso de Licenciatura em Matemática e Química apresenta um grau de dificuldade em conceitos relacionados às funções e seus gráficos. Assim, a autora propôs seis encontros com a participação de 10 estudantes voluntários do Ensino Médio da rede pública de ensino, em que foram aplicados questionários, realizadas aulas expositivas, apresentação de um roteiro e práticas no laboratório de informática. As atividades desenvolvidas nesses encontros basearam-se na Teoria das Situações Didáticas e a noção de Contrato Didático, contando com alguns pressupostos da Teoria de Registros de Representação Semiótica e as quais abordavam conceitos acerca de funções afins e quadráticas, destacando suas representações algébricas, tabulares e gráficas. Ao utilizar o GeoGebra para esboço dos gráficos, anteriormente construídos através do lápis e papel, houve a percepção, por parte dos estudantes, da influência dos coeficientes das funções sobre o comportamento de seus gráficos. Dessa forma, a autora notou que ao substituir um contrato tradicionalista por um novo, o qual propicia a interação entre os alunos, o professor e o meio, os resultados alcançados foram positivos, se comparados ao ambiente quadro e giz, lápis e papel.

Já Souza (2010), buscou introduzir no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função do 1º e 2º grau, o recurso tecnológico digital Objetos de Aprendizagem para promover uma visão interdisciplinar entre a matemática e a física com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Para o desenvolvimento de sua pesquisa, utilizou como metodologia a Engenharia Didática, contando com a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica para selecionar os Objetos de Aprendizagem. Assim como o autor anterior, Souza (2010) expõe que o trabalho só se tornou possível diante da mudança no contrato didático, em que antes os recursos e as aulas tinham um caráter expositivo e o contrato didático seguia uma forma tradicional, colocando o aluno em uma condição de

sujeito passivo. Com a introdução de novas tecnologias digitais, mudança de local e professor, esse novo contrato possibilitou que os alunos tomassem suas decisões diante das situações proporcionadas pelos Objetos de Aprendizagem, colocando-os em posições de sujeitos ativos na construção de seus conhecimentos.

Matos Filho (2010), em busca de analisar uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus mediada pela utilização do software Winplot, utilizou as concepções da Engenharia Didática como metodologia. As atividades desenvolvidas nesta pesquisa foram divididas em seis sessões, e foram direcionadas à leitura, interpretação e construção de gráficos. Com isso, o autor considerou que a sequência didática constituiu um elemento importante significativo para a verificação das possibilidades e dificuldades de utilizar-se o software como uma ferramenta computacional que favorecesse a construção de conhecimentos referentes às funções, pelos estudantes.

Por fim, Santos (2009) optou por utilizar os princípios do Design Instrucional, e fundamentou-se em alguns pressupostos da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria de Registros de Representação Semiótica. Sua proposta pautou-se na elaboração e implementação de um ambiente informatizado online, contendo explicações, vídeos, informações e atividades, o qual proporcionou momentos de discussões entre os alunos, sem a intervenção do pesquisador. A utilização do software GeoGebra tornou-se um fator importante para a construção do ambiente, pois contribui para a compreensão do comportamento gráfico e sua relação com a representação algébrica da função polinomial do 2º grau, contidas nas atividades do ambiente.

Os estudos consultados foram desenvolvidos, em sua maioria, junto aos estudantes da Educação Básica e, somente um deles teve como sujeitos de pesquisa professores em formação continuada. Dos resultados obtidos, podemos destacar a utilização de softwares que facilitaram a compreensão entre as representações algébricas e gráficas das funções e o desenvolvimento de atividades que envolvem situações de ação, formulação, validação e institucionalização proporcionando a interação entre os alunos, o professor e o meio, que favoreceu a construção de conhecimentos referentes às funções, pelos estudantes.

Os trabalhos analisados nesta revisão evidenciam que há necessidade de abordar diferentes metodologias de ensino nas quais o aluno passe de uma posição de expectador na resolução de exercícios para uma posição de sujeito ativo, possibilitando uma compreensão mais significativa dos conceitos abordados. Neste sentido, em nossa pesquisa, propomos

atividades que envolvem a utilização do software GeoGebra e que possibilitam aos estudantes o desenvolvimento de situações de ação, formulação, validação e institucionalização para a aquisição dos conhecimentos matemáticos referentes ao estudo da Função Quadrática.

A presente pesquisa torna-se diferenciada dos demais estudos que abordam a Teoria das Situações Didáticas e Funções, por investigar a aprendizagem sob a influência das formas canônica e fatorada da Função Quadrática em relação às suas características, junto aos acadêmicos do curso de Matemática, professores e bacharéis em formação inicial, de uma instituição federal de ensino superior. O desenvolvimento das atividades deve possibilitar aos estudantes a experiência com metodologias diferenciadas contribuindo para a formação de futuros professores de Matemática e o desenvolvimento profissional dos futuros bacharéis.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos os aspectos metodológicos empregados na pesquisa. Inicialmente, caracterizamos nosso trabalho como uma pesquisa qualitativa, salientando suas particularidades. Descrevemos a forma de obtenção dos dados, os instrumentos que foram utilizados para coleta e a análise dos mesmos. Após, definem-se os sujeitos participantes da pesquisa, assim como, o contexto no qual a mesma foi realizada e um relato das atividades que foram desenvolvidas.

4.1 PESQUISA QUALITATIVA

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa qualitativa, pois, tendo em vista Creswell (2014, p. 50) a mesma "[…] começa com pressupostos e o uso de estruturas interpretativas/teóricas que informam o estudo dos problemas da pesquisa, abordando os significados que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano […]" e, dessa forma, para compreender melhor essa situação utiliza-se "[…] uma abordagem qualitativa da investigação, a coleta de dados em um contexto natural sensível às pessoas e aos lugares em estudo e a análise dos dados que é tanto indutiva quando dedutiva e estabelece padrões ou temas". (Ibid., p. 50).

Assim, a pesquisa qualitativa tem por característica principal uma compreensão mais profunda, crítica e reflexiva, por parte do pesquisador, em relação os fenômenos ocorridos na sala de aula, pois trata-se de situações humanas e sociais, cabendo ainda destacar outras características que se fazem presentes em pesquisas qualitativas. Como destaca Creswell (2014):

> É conduzida em um ambiente natural (o campo), uma fonte de dados para uma estreita interação; Baseia-se no pesquisador como instrumento-chave na coleta de dados; Envolve o uso de múltiplos métodos; Envolve raciocínio complexo que circula entre o indutivo e o dedutivo; Tem seu foco nas perspectivas dos participantes, seus significados, suas múltiplas visões subjetivas; Está situada dentro do contexto ou ambiente dos participantes/locais (social/político/histórico); Envolve um projeto emergente e em evolução, em vez de um projeto rigidamente prefigurado. (CRESWELL, 2014, p. 51).

Posto isto, nesta pesquisa, a coleta de dados ocorreu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, de forma síncrona e assíncrona, em sala de aula virtual, onde utilizou-se o registro dos alunos nas atividades propostas e o diário de campo como instrumentos de coleta de dados. Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 119) argumentam que é no diário de campo "[…]

que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos […]" e salientam ainda que, os diários "[…] podem conter uma dupla perspectiva: uma descritiva e outra interpretativa […]" as quais devem estar em equilíbrio para evitar que o diário seja "[…] meramente técnicos ou genérico e superficial". (Ibid., p. 120).

Foram disponibilizadas oito atividades, dispostas a seguir, as quais permeiam o esboço de gráficos de funções quadráticas em suas formas canônica e fatorada, assim como, o tratamento algébrico no ambiente lápis e papel, visando a análise e conjecturas em torno da influência dos parâmetros presentes em ambas as formas.

Cada uma das quatro primeiras atividades possuem enfoque em coeficientes específicos que induzem a translações particulares, possibilitando uma investigação completa dos elementos que compõem a forma canônica da função quadrática e como os mesmos influenciam no comportamento gráfico da função.

A quinta atividade aborda a forma fatorada da função quadrática, salientando o destaque para as raízes explícitas da função. A sexta e a sétima atividades enfatizam a utilização dos conhecimentos (re)construídos a respeito das formas canônica e fatorada para a resolução de dois problemas, no qual cada um realça uma das formas, em que deve-se perfazer conjecturas semelhantes às das investigações anteriores. E, por fim, a oitava atividade enfatiza os tratamentos algébricos necessários para transitar entre as formas desenvolvida, fatorada e canônica da função quadrática.

A análise dos dados foi feita levando em conta as fases das situações didáticas e avaliando como se deu a aprendizagem em cada uma das atividades que foram propostas aos alunos. Esta análise possibilitou a compreensão de como os estudantes construíram seu conhecimento por meio de situações de ação, formulação, validação e institucionalização.

4.2 SUJEITOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Os participantes desta pesquisa foram 23 estudantes dos cursos de Matemática - Licenciatura e Bacharelado de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, matriculados, no primeiro semestre de 2021, na disciplina de Matemática Elementar. Esta disciplina integra o primeiro semestre do curso de Matemática e contempla tópicos de conjuntos numéricos, conceitos básicos de funções, funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas. Como já dito na Introdução esta disciplina tem por objetivo a

compreensão dos conceitos básicos relacionados as funções e a aplicação desses conceitos na solução de problemas práticos, visando a construção de uma base de conhecimentos que venham auxiliar os estudantes na compreensão das demais disciplinas que compõe o currículo do curso, bem como, desenvolver habilidades e competências necessárias para a prática docente dos futuros licenciados e o desenvolvimento profissional dos futuros bacharéis.

4.3 SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROPOSTAS

Aqui, apresentamos as atividades que foram propostas aos acadêmicos do curso de Matemática com o objetivo de analisar a aprendizagem da Função Quadrática observando a forma canônica e fatorada tendo a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como referencial teórico.

Para a elaboração da sequência didática, tivemos como referencial relacionar as fases das situações didáticas/adidáticas: ação, formulação, validação e institucionalização, buscando dar condições para a construção do conhecimento dos conceitos tratados por parte dos estudantes.

O contrato didático foi estabelecido no início das atividades junto aos alunos visando acordar, intrinsecamente, as ações e almejos que são esperados pelo professor, assim como, o que é esperado pelos alunos, no momento de apresentação e conversas iniciais. No entanto, cabe destacar que, esse contrato foi sempre revisto no decorrer das atividades, visto que foi necessário considerar as adequações na relação pedagógica, procedimentos pedagógicos e a postura dos alunos perante suas hipóteses e conjecturas, pois, de acordo com Brousseau (2008), o professor não tem controle, ou não deveria ter, sobre os conhecimentos desenvolvidos pelos alunos diante de suas investigações, cabendo ao professor repensar seu contrato em busca de um progresso mais significativo possível para os alunos.

A seguir, apresentamos as atividades e uma breve descrição do que foi esperado, a priori, em cada uma das fases das situações didáticas.

Atividade 1:

Por meio do software GeoGebra, esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e responda as questões:

- $f_1(x)=x^2$

- $f_2(x)=\frac{1}{2}x^2$
- $f_3(x)=3x^2$
- $f_4(x)=\frac{1}{6}x^2$

a) Qual a influência do coeficiente a no gráfico da função $f(x)=ax^2$, quando positivo?

b) O que pode ser percebido, com relação à abertura da concavidade, ao modificarmos o valor de a ?

- $f_5(x)=-x^2$
- $f_6(x)=\frac{-1}{2}x^2$
- $f_7(x)=-3x^2$
- $f_8(x)=\frac{-1}{6}x^2$

c) Qual a influência do coeficiente a no gráfico da função $f(x)=ax^2$, quando negativo?

d) Os gráficos possuem algum ponto em comum ou semelhanças?

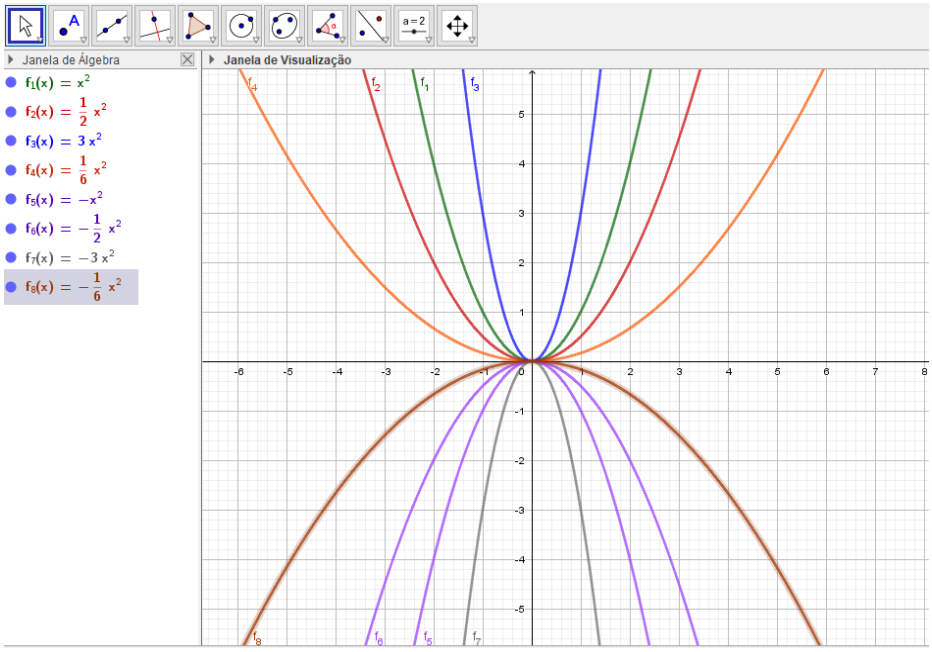
e) Agora, utilizando controles deslizantes, esboce o gráfico de $f(x)=ax^2$. Diante de suas investigações e conclusões anteriores, o que podemos concluir a respeito da influência do coeficiente a na função $f(x)=ax^2$?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Os alunos utilizaram o software GeoGebra para construir as representações gráficas das funções propostas, momento em que precisaram interagir com o software e, concomitantemente, lidar com as informações que o mesmo disponibilizou (situação de ação).

Ainda, diante das informações disponibilizadas pelo GeoGebra, os alunos conjecturariam e comporiam hipóteses quanto à influência do coeficiente do termo ax^2, utilizando conhecimentos acerca do plano cartesiano, coordenadas cartesianas, noção de ponto, simetrias, reflexões, translações, junto às respostas para os questionamentos da atividade (situação de formulação).

Esperou-se que os alunos, diante dos gráficos elaborados (Figura 8), percebessem que os gráficos das funções quadráticas são curvas com características específicas, denominadas de parábolas, assim como, o impacto do coeficiente a do termo ax^2, em que, conforme o mesmo aumenta, isto é, distancia-se de zero no sentido positivo do plano, a concavidade da parábola aproxima-se do seu eixo de simetria. De forma análoga, conforme o coeficiente aproxima-se de zero, no sentido positivo do plano, a concavidade da parábola afasta-se do eixo de simetria e aproxima-se do eixo x.

Figura 8 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 1



Fonte: Autor.

Além disso, quando olha-se para o sentido negativo do plano cartesiano, ou seja, atribuindo valores negativos ao coeficiente a do termo ax^2, é perceptível um comportamento semelhante ao observado anteriormente, em que a concavidade da parábola aproxima-se do seu eixo de simetria conforme os valores do coeficiente distanciam-se de zero e vale a recíproca. Observa-se também reflexões em torno do eixo x do coeficiente negativo em relação ao coeficiente positivo, quando são iguais em módulo. Assim, ao comparar os gráficos de coeficientes negativos com os positivos, nota-se que no caso de ser positivo, a curva tem sua concavidade ou abertura voltada para cima e, no caso de ser negativo, a curva tem concavidade voltada para baixo. Também, todos os gráficos possuem

um ponto em comum, sendo esse a origem do plano cartesiano, logo, sempre que atribuímos $x=0$ obtemos $y=0$.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se identificar a funcionalidade e utilização do coeficiente a, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade (situação de institucionalização).

Atividade 2:

Ainda com o software GeoGebra, esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e responda as questões:

- $f_1(x)=x^2$
- $f_2(x)=x^2+1$
- $f_3(x)=x^2+2$
- $f_4(x)=x^2+4$

a) O que pode-se perceber ao acrescentar um valor positivo k , no comportamento gráfico da função $f(x)=x^2$, se comparado à função inicial?

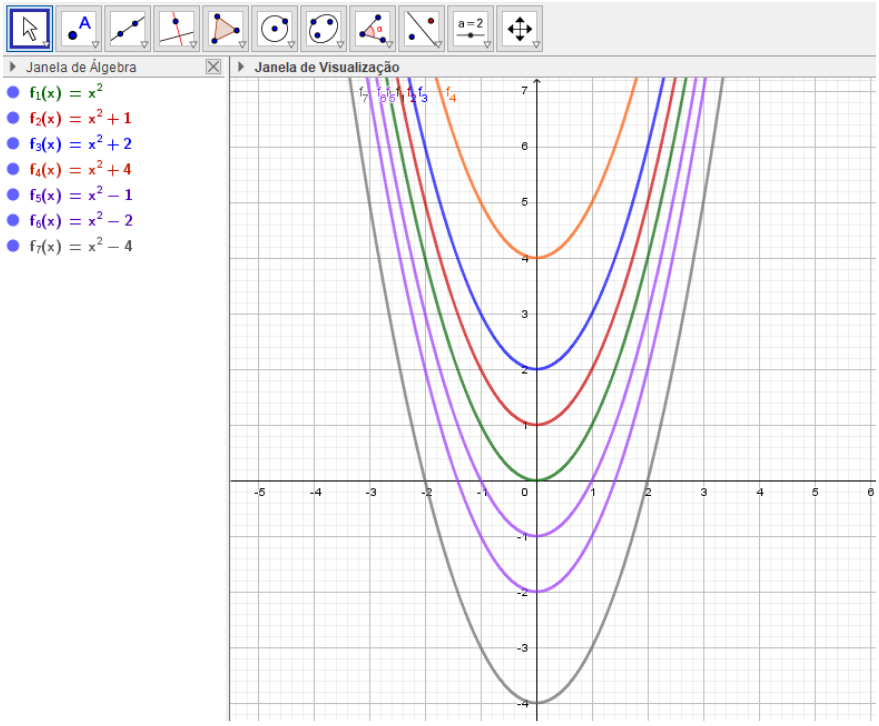
- $f_5(x)=x^2-1$
- $f_6(x)=x^2-2$
- $f_7(x)=x^2-4$

b) Em todos esses casos, onde se encontram os vértices da parábola?

c) Agora, utilizando controles deslizantes, esboce o gráfico de $f(x)=x^2+k$. O que podemos concluir a respeito do coeficiente k quando somado ou subtraído de x^2?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Os alunos utilizaram o software GeoGebra para construir as representações gráficas das funções propostas, momento em que precisam interagir com o software e, concomitantemente, lidar com as informações que o mesmo disponibilizou (situação de ação). O esboço, dos gráficos das funções da Atividade 2, está apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 2



Fonte: Autor.

Ainda, diante das informações disponibilizadas pelo GeoGebra, os alunos conjecturariam e comporiam hipóteses quanto à influência da constante à ser somada ou subtraída da função inicial $f(x)=x^2$, utilizando conhecimentos acerca do plano cartesiano, coordenadas cartesianas, noção de ponto, simetrias, reflexões, translações, junto às respostas para os questionamentos da atividade (situação de formulação).

Esperou-se dos estudantes a observação de que a constante, dependendo do acréscimo ou decréscimo da mesma, induz a uma translação vertical do gráfico, em relação à função inicial $f(x)=x^2$, isto é, para cada valor atribuído à variável x, subtrai-se ou acrescenta-se uma quantidade de unidades à variável y associada, deslocando todos os pontos e, consequentemente, o gráfico, seja verticalmente para cima quando a constante for positiva e verticalmente para baixo quando a constante for negativa.

Ademais, ao observar as posições ocupadas pelo vértice da parábola, após as translações, torna-se perceptível que as mesmas hipóteses elencadas acima continuam válidas, ou seja, o acréscimo ou decréscimo das unidades referentes à constante k transladam o vértice verticalmente. Também, os alunos deveriam perceber que um processo análogo acontece se

associarmos essa atividade à anterior, para os casos em que o coeficiente $a<0$ do termo x^2, isto é, para o caso em que a é negativo e a concavidade da parábola está voltada para baixo, as translações ocorrem da mesma forma.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se identificar a funcionalidade e utilização da constante k, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade (situação de institucionalização).

Atividade 3:

Continuando no software GeoGebra, esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e responda as questões:

- $f_1(x)=x^2$
- $f_2(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
- $f_3(x)=(x+1)^2$

a) O que pode-se perceber no comportamento do gráfico quando acrescentamos um valor m positivo dentro do termo quadrático?

- $f_4(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
- $f_5(x)=(x-1)^2$

b) O que pode-se perceber no comportamento do gráfico quando acrescentamos um valor m negativo dentro do termo quadrático?

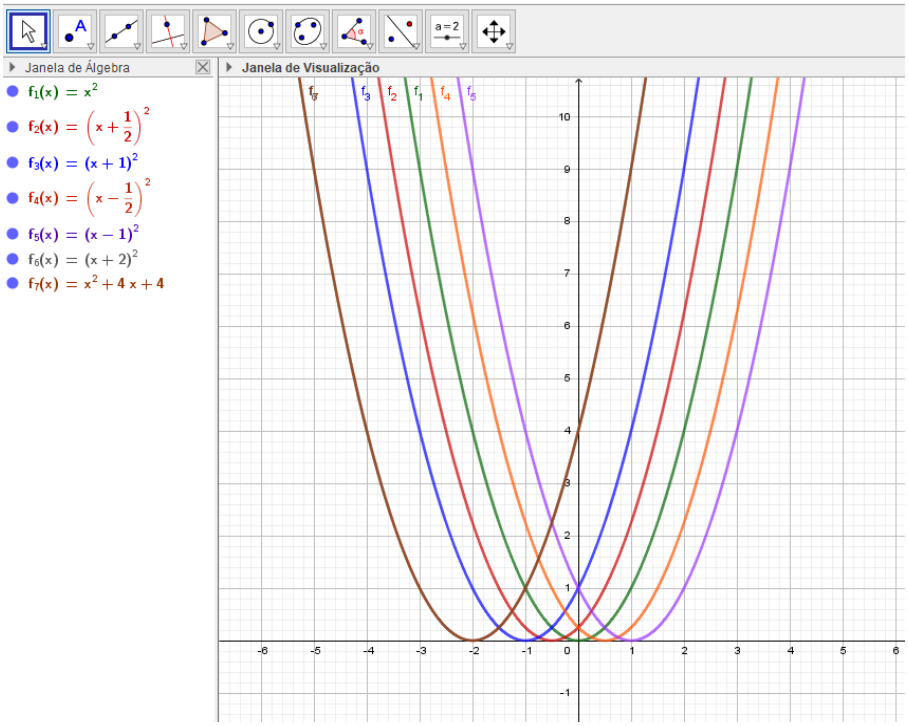
- $f_6(x)=(x+2)^2$
- $f_7(x)=x^2+4x+4$

c) Para todos esses casos, onde se encontram os vértices da parábola?

d) O que aconteceu com os gráficos das funções f_6 e f_7? E o que poderia explicar esse acontecido?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Os alunos utilizaram o software GeoGebra para construir as representações gráficas das funções propostas, momento em que precisam interagir com o software e, concomitantemente, lidar com as informações que o mesmo disponibilizou (situação de ação). Na Figura 10 estão apresentados os gráficos das funções da Atividade 3, gerados no GeoGebra.

Figura 10 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 3



Fonte: Autor.

Ainda, diante das informações disponibilizadas pelo GeoGebra, os alunos conjecturariam e comporiam hipóteses quanto à influência do coeficiente m que acompanha o termo x, sob a potência quadrática, ou seja, na função $f(x)=(x-m)^2$, no comportamento gráfico se comparado com a função inicial $f(x)=x^2$, utilizando conhecimentos acerca do plano cartesiano, coordenadas cartesianas, noção de ponto, simetrias, reflexões, translações, junto às respostas para os questionamentos da atividade (situação de formulação).

Nesse momento, os alunos deveriam perceber que o acréscimo da constante m não está realizando o mesmo movimento de translação vertical observado na Atividade 2 mas sim, um deslocamento horizontal em relação ao gráfico da função inicial $f(x)=x^2$, pois, o coeficiente

m acompanha o termo x dentro da potência quadrática e não como uma soma ou subtração ao termo quadrático.

Também, esperou-se que fossem notadas as translações horizontais ocasionadas ora pelo acréscimo do termo m, ora pelo decréscimo do mesmo, isto é, quando $m>0$ os gráficos das funções se deslocarão horizontalmente para a direita em m unidades e, de forma análoga, quando $m<0$ os gráficos das funções se deslocarão horizontalmente para a esquerda em m unidades.

Ademais, deveria-se concluir que as funções $f_6(x)=(x+2)^2$ e $f_7(x)=x^2+4x+4$ compreendem o mesmo gráfico, ou seja, são diferentes representações algébricas para descrever um mesmo comportamento. Sendo assim, torna-se necessário a retomada, por parte dos alunos, de conhecimentos que já deveriam compor seus saberes âncoras, sendo nesse caso, a noção de produtos notáveis.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se identificar a funcionalidade e utilização do coeficiente m, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade (situação de institucionalização).

Atividade 4:

Por meio do software GeoGebra, esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e responda as questões:

- $f_1(x)=x^2$
- $f_2(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
- $f_3(x)=(x+1)^2-1$
- $f_4(x)=(x+2)^2-4$

a) Qual a influência dos coeficientes m e k nos comportamentos gráficos das funções $f(x)=(x-m)^2+k$ acima?

- $f_5(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
- $f_6(x)=(x-1)^2-1$

- $f_7(x)=(x-2)^2-4$

b) Qual a influência dos coeficientes m e k nos comportamentos gráficos das funções $f(x)=(x-m)^2+k$ acima?

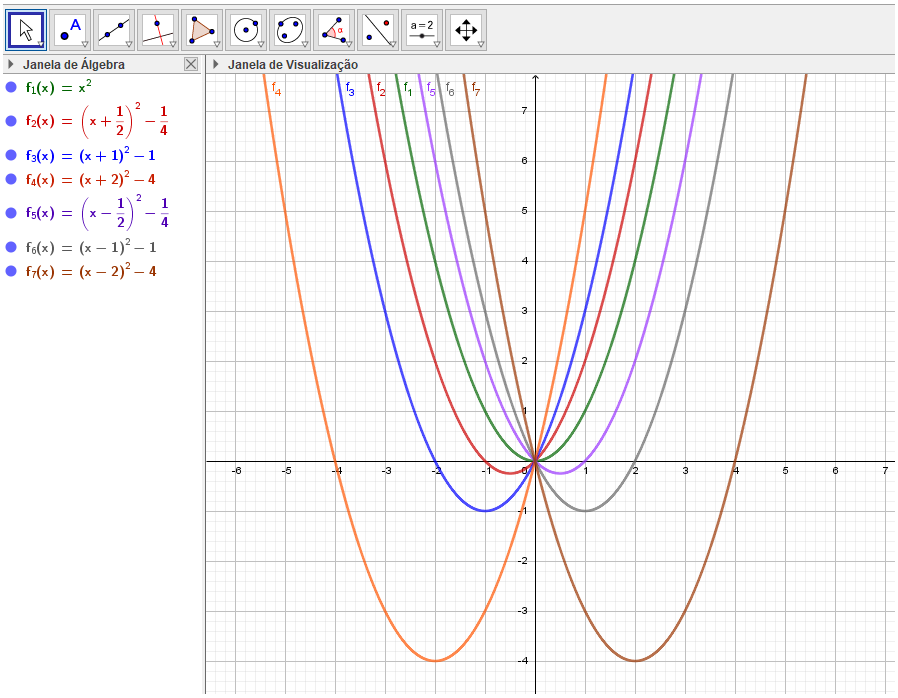
c) O que está acontecendo com os vértices de todas as funções, se comparados com a primeira?

d) O que podemos perceber ao comparar as funções f_6 e f_7 da atividade 3 com a alternativa f_4 dessa atividade?

e) Agora, utilizando os controles deslizantes, esboce o gráfico de $f(x)=a(x-m)^2+k$. Faça uma breve síntese acerca das influências dos coeficientes a, m e k no comportamento gráfico.

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Os alunos utilizaram o software GeoGebra para construir as representações gráficas das funções propostas, momento em que precisam interagir com o software e, concomitantemente, lidar com as informações que o mesmo disponibilizou (situação de ação). Os gráficos das funções da Atividade 4, gerados no GeoGebra, estão apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 4



Fonte: Autor.

Diante das informações disponibilizadas pelo GeoGebra, os alunos conjecturariam e comporiam hipóteses quanto à influência do coeficiente *m* que acompanha o termo *x*, sob a potência quadrática, e do coeficiente k no comportamento gráfico se comparado com a função inicial $f(x)=x^2$, utilizando conhecimentos acerca do plano cartesiano, coordenadas cartesianas, noção de ponto, simetrias, reflexões, translações, junto às respostas para os questionamentos da atividade (situação de formulação).

Aqui, esperou-se que os alunos percebessem que após a determinação de um valor para o coeficiente *m* que acompanha o termo *x*, sob a potência quadrática, e para o coeficiente k, a função translada-se não somente verticalmente, como também horizontalmente, deslocando seu vértice em $x_v=m$ unidades horizontalmente e $y_v=k$ unidades verticalmente. Em que, por exemplo, a função $f_5(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, em relação à função inicial $f(x)=x^2$, transladou-se horizontalmente em $\frac{1}{2}$ de unidades para a direita e verticalmente em $-\frac{1}{4}$ de unidades para baixo.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se identificar a funcionalidade e utilização do coeficiente *m* e da constante *k*, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade (situação de institucionalização).

Atividade 5:

Por meio do software GeoGebra, esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e responda as questões:

- $f_1(x)=x(x-3)$
- $f_2(x)=2x(x-3)$

a) Quais são as raízes das funções f_1 e f_2?

b) Quais as diferenças ou semelhanças entre f_1 e f_2?

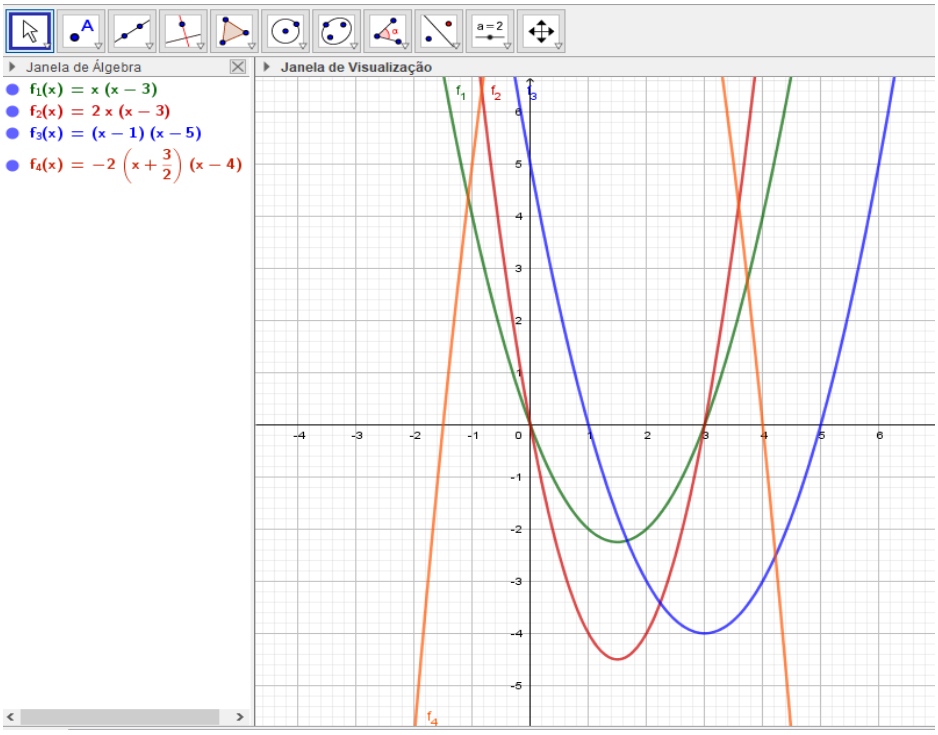
- $f_3(x)=(x-1)(x-5)$

- $f_4(x)=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)$

c) Quais são as raízes das funções f_3 e f_4?
d) De uma forma geral, quais são as raízes da função $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Os alunos utilizaram o software GeoGebra para construir as representações gráficas das funções propostas, momento em que precisam interagir com o software e, concomitantemente, lidar com as informações que o mesmo disponibilizou (situação de ação). O esboço dos gráficos das funções da Atividade 5 está apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Ilustração dos gráficos das funções na Atividade 5



Fonte: Autor.

Ainda, diante das informações disponibilizadas pelo GeoGebra, os alunos conjecturaram e compuseram hipóteses quanto à influência do coeficiente a e dos termos x_1 e x_2 no comportamento gráfico da função $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, utilizando conhecimentos acerca do plano cartesiano, coordenadas cartesianas, noção de ponto,

simetrias, reflexões, translações, junto às respostas para os questionamentos da atividade (situação de formulação).

Aqui, esperou-se que os alunos percebessem que os pontos de interseção da parábola com o eixo x, coincidem com os termos opostos à x_1 e x_2, isto é, as raízes da função $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ são x_1 e x_2. Ademais, nessas situações, o coeficiente a não influencia na localização das raízes da função e sim na abertura e no sentido da concavidade da parábola e, por estar fixada pelas raízes, ao modificar-se a abertura da concavidade, o seu vértice desloca-se verticalmente.

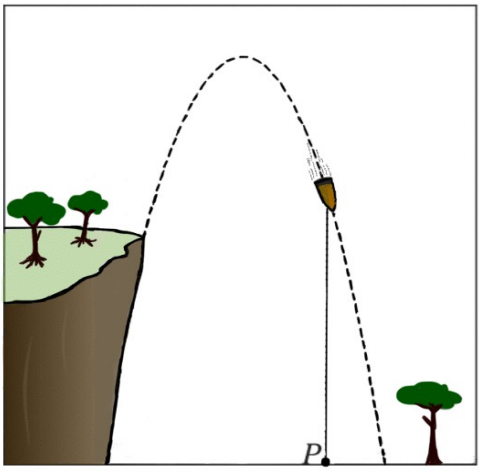
Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se identificar a funcionalidade e utilização do coeficiente a e dos termos x_1 e x_2, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade (situação de institucionalização).

Atividade 6:

Diante das discussões já realizadas e dos seus conhecimentos, busque uma solução para o seguinte problema:

A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura.

Figura – Trajetória do projétil



Fonte: Autor.

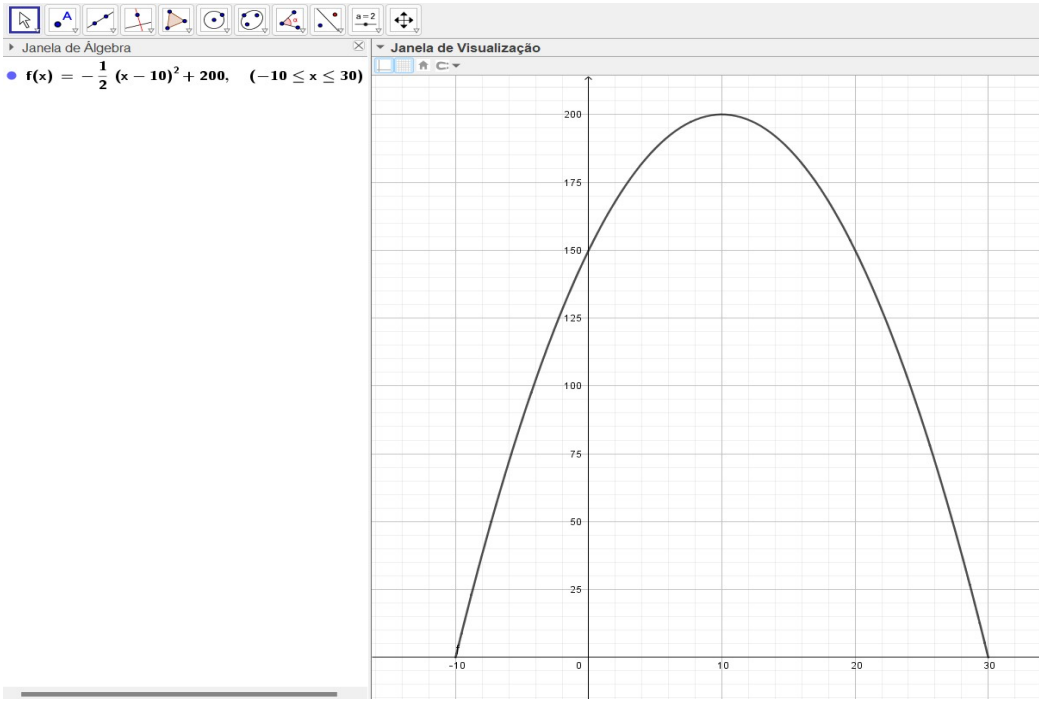
O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo

projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Também, que percebessem no plano cartesiano, que o ponto de lançamento do projétil pertence ao eixo y, já que o mesmo representa o penhasco. Além disso, o ponto $(10,200)$ representa o vértice da parábola. Dessa forma, já é possível pensar em uma função que adequa-se às condições analisadas, sendo essa definida por $f(x)=a(x-10)^2+200$ (situações de ação e formulação).

Prosseguindo na resolução, deve-se observar que o projétil atinge o solo em 30 m, então essa será uma das raízes da função, assim $f(30)=0$. Isso permite determinar o coeficiente $a=-\frac{1}{2}$. Dessa forma, a função que representa o problema, neste caso, é $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+200$, em que $-10\leq x\leq 30$. Para responder a questão, verifica-se qual a altura do penhasco em que o projétil foi lançado, ou seja, momento em que $x=0$ e substituindo na função deve-se obter 150 metros. O gráfico da função $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+200$ está apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Ilustração do gráfico da função na Atividade 6



Fonte: Autor.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se compreender a resolução do problema, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade, assim como, sua resolução (situação de institucionalização).

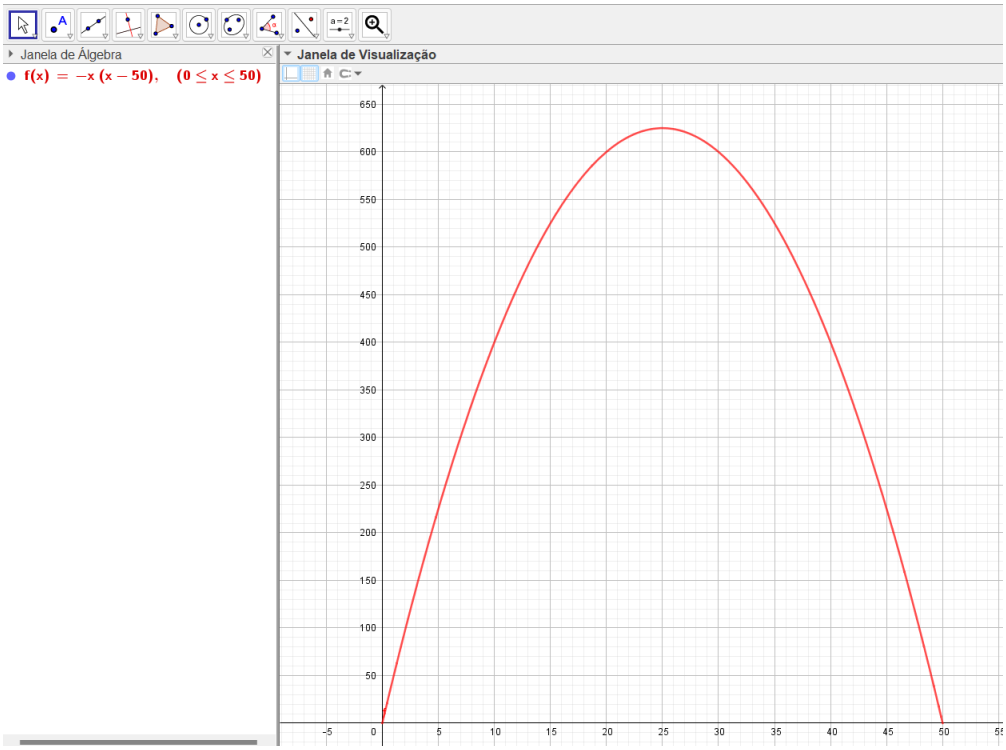
Atividade 7:
Um sitiante dispõe de um rolo de tela suficiente para fazer um cercado retangular com 100 m de perímetro, com o qual ele deseja proteger, das galinhas, sua plantação de couve. Quais devem ser as dimensões do cercado para que sua área seja máxima?

Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Além disso, que percebessem a multiplicidade de retângulos que podem ser formados, mantendo-se um perímetro de 100 m mas com distintas áreas. Assim, deve-se buscar uma função que represente a variação da área e, para isso, denomina-se um lado do retângulo de x e o outro de $50-x$(situações de ação e formulação).

Prosseguindo na resolução, deveria-se observar que a função que representa a área no problema é o produto dos lados supracitados, isto é, $A(x)=x(50-x)$, em que $0\leq x\leq 50$. Com isso, verifica-se que as raízes da função área são $x_1=0$ e $x_2=50$, pois, $A(x)=-(x-0)(x-50)$. Dessa forma, busca-se o vértice da parábola, o qual indica a área máxima da função, já que $a=-1$ e sua concavidade está voltada para baixo.

Para resolver a questão, basta determinar $x_v=25$, sendo esse o ponto médio entre as raízes $x_1=0$ e $x_2=50$. Substituindo o valor $x_v=25$ na função obtém-se o valor do y_v . Nesse caso, $A(25)=25(50-25)=25^2=625$, ou seja, têm-se um quadrado de lado 25 m com área máxima de 625 m^2. Na Figura 14, o gráfico da função $A(x)=-(x-0)(x-50)$ está apresentado.

Figura 14 – Ilustração do gráfico da função na Atividade 7



Fonte: Autor.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se compreender a resolução do problema, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificar ou validar suas resoluções, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor

organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade, assim como, sua resolução (situação de institucionalização).

Atividade 8:

Para cada uma das funções, determine a forma canônica, o vértice da parábola, as raízes e a forma fatorada.

Função quadrática	Forma canônica	Vértice	Raízes	Forma fatorada
$f_1(x)=x^2-5x+6$				
$f_2(x)=-2x^2+3x+5$				

Faça um esboço do gráfico das funções f_1 e f_2.

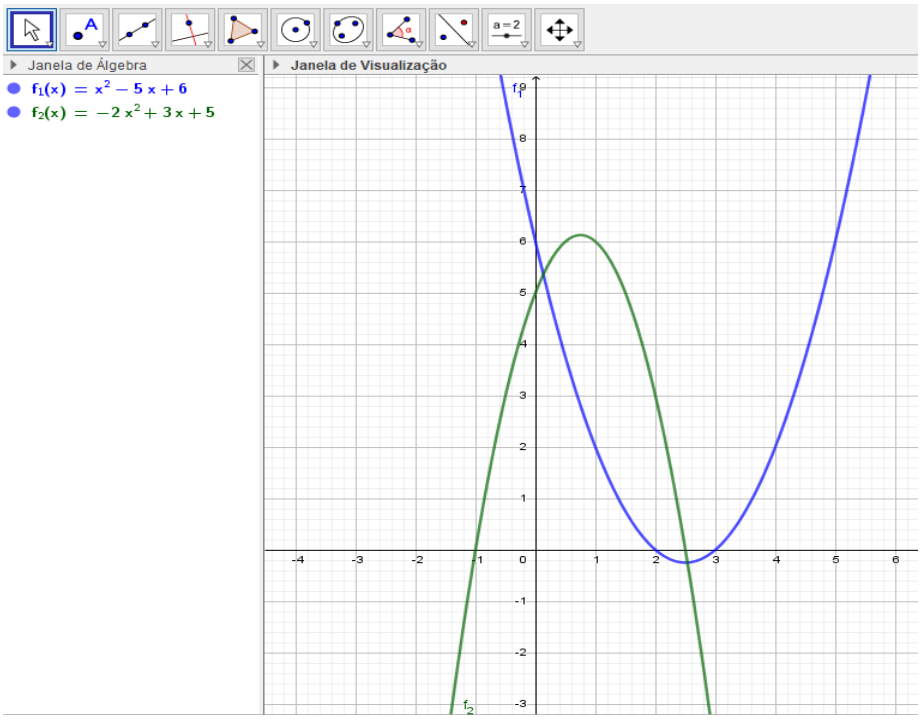
Nessa atividade, esperou-se que os alunos utilizassem seus conhecimentos prévios para esboçar estratégias e elaborar hipóteses a fim de desenvolver a atividade. Dessa forma, para a determinação da forma canônica das funções f_1 e f_2, deve-se utilizar um raciocínio algébrico para completar quadrados, ou seja, busca-se um trinômio que forme um quadrado perfeito. Tomamos como exemplo a função $f_1(x)=x^2-5x+6$, em que, na busca do trinômio quadrado perfeito, encontra-se $f_1(x)=x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6$. Nota-se que $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=x^2-5x+\frac{25}{4}$ e, com isso, podemos reescrever a função f_1, obtendo $f_1(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6$. Por fim, a forma canônica da função f_1 é $f_1(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ (situações de ação e formulação).

Com relação à forma fatorada, utiliza-se a forma canônica para determinar os valores de x que satisfazem $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$. Assim, isolando x, obtém-se $x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$, donde são determinadas as raízes $x_1=2$ e $x_2=3$. Por fim, a forma fatorada da função f_1 é $f_1(x)=(x-2)(x-3)$. Um processo análogo realiza-se para a função f_2.

Através das informações de vértice, obtido por meio da forma canônica, e das raízes, explícitas na forma fatorada, têm-se as principais características gráficas das funções propostas, sendo então possível o esboço de seus gráficos no ambiente lápis e papel. Destacamos que a Figura 15 serve como ilustração dos esboços esperados produzidos pelos

alunos no ambiente lápis e papel. Os gráficos das funções f_1 e f_2 estão apresentados na Figura 15.

Figura 15 – Ilustração do gráfico da função na Atividade 8



Fonte: Autor.

Posteriormente, considerando as investigações por meio do GeoGebra e as conjecturas levantadas pelos alunos, buscou-se compreender as resoluções das questões, fazendo uso de seus conhecimentos a fim de justificá-las ou validá-las, seja em forma de correção ou de evolução cognitiva, através da socialização (situação de validação). Ao fim, o professor organiza metodicamente as características e propriedades abordadas na atividade, assim como, sua resolução (situação de institucionalização).

5 DISCUSSÕES ACERCA DO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos detalhes do desenvolvimento das atividades propostas com os sujeitos da pesquisa, assim como, observações e discussões em torno dos dados obtidos e suas relações com a Teoria das Situações Didáticas.

As atividades supracitadas foram desenvolvidas, no período de julho a agosto de 2021, junto aos acadêmicos ingressantes no primeiro semestre de 2021 do curso de Matemática - Licenciatura e Bacharelado de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, matriculados, na disciplina de Matemática Elementar, em que participaram 23 alunos dos 43 matriculados. Denominaremos os estudantes, sem fazer distinção em ser aluno do Bacharelado ou da Licenciatura, por A1, A2, A3, …, A23.

Considerando a situação/organização do sistema de ensino no momento do desenvolvimento - visto que diversas foram as adaptações diante à pandemia de COVID-19, doença que pelo vírus SARS-CoV-2 que assolou o mundo a partir do final do ano de 2019 - as aulas ocorreram por meio de momentos síncronos, sendo estes momentos em que professores e alunos interagem simultaneamente por meio de plataformas de webconferência; e assíncronos, isto é, momentos em que os alunos dispõem de um tempo, não concomitante aos síncronos, para o desenvolvimento autônomo de atividades propostas pelo professor.

Dessa forma, os momentos síncronos foram realizados por meio da plataforma Google Meet em dois momentos durante a semana, enquanto nos momentos assíncronos, foi utilizada a plataforma Moodle disponibilizada pela instituição de ensino superior. Salientamos que, todas as atividades propostas nesta pesquisa fizeram parte do processo avaliativo dos alunos na disciplina de Matemática Elementar.

Ademais, antecedente ao desenvolvimento das atividades, a professora regente da disciplina abordou conceitos relevantes quanto às formas: desenvolvida, fatorada e canônica da função quadrática, assim como, o método de completar quadrados e a obtenção da fórmula resolutiva, conhecida como fórmula de Bhaskara.

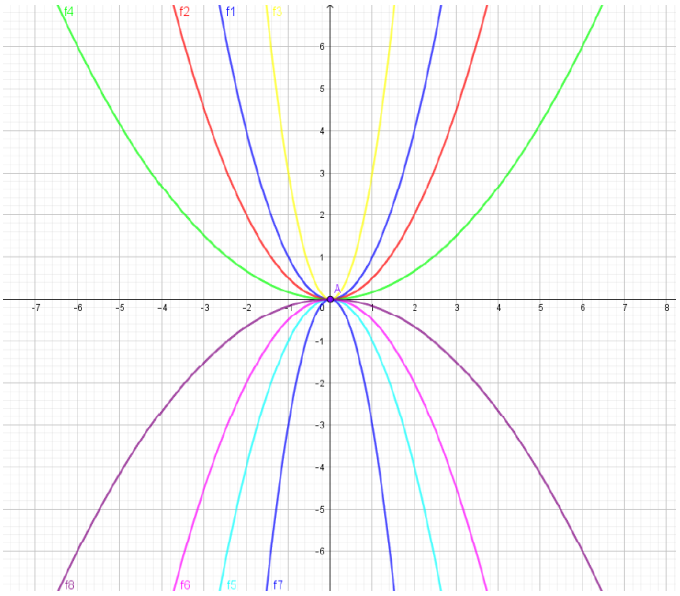
Também, durante as aulas da professora regente, foram introduzidas algumas noções de utilização do GeoGebra para realização de algumas atividades, com o intuito de apresentá-lo e criar uma familiaridade com o mesmo. Ainda, foi disponibilizado um tutorial contendo ilustrações de como digitar as funções para obter suas construções gráficas, como salvar as imagens que desejar para meios de estudos e/ou apresentações, assim como, a criação de controles deslizantes e como manipulá-los. O tutorial encontra-se no Anexo A.

A seguir, apresentamos as discussões sobre o desenvolvimento das atividades, em que a análise foi feita de acordo com a forma que foram propostas as situações didáticas e adidáticas, dispostas em oito atividades que constituem a sequência didática elaborada, levando em conta as fases categorizadas como situações de ação, formulação e validação. A fase da institucionalização será apresentada após a análise dos dados obtidos com o desenvolvimento das oito atividades.

5.1 ATIVIDADE 1

Inicialmente, para o desenvolvimento dessa atividade, visando responder aos questionamentos, foi necessário investigar a influência do coeficiente a no gráfico da função $f(x)=ax^2$. Assim, os alunos realizaram as construções gráficas das funções propostas, utilizando o GeoGebra, e disponibilizaram suas construções e hipóteses aos questionamentos na plataforma Moodle. A Figura 16 apresenta as construções realizadas no GeoGebra, o que mostra que as mesmas estão em consonância com o esperado no capítulo anterior (situação de ação).

Figura 16 – Construção da Atividade 1 pelo aluno A18

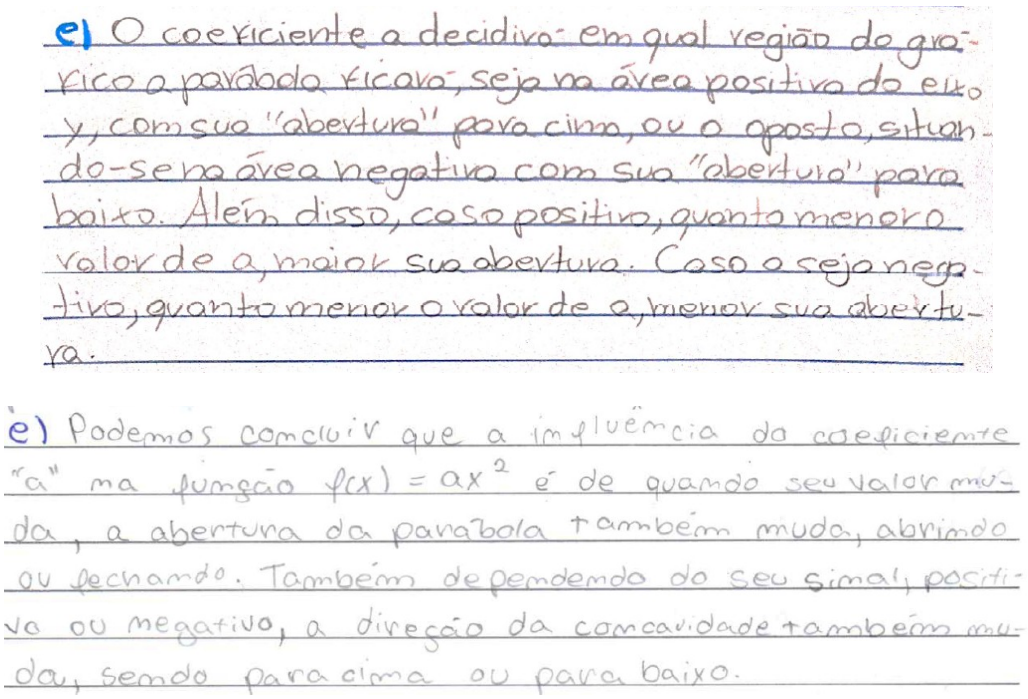


Fonte: Registro do aluno A18.

Podemos perceber, como apresentado na Figura 17, que os alunos buscaram formas de compreender o feedback dado pelo GeoGebra de acordo com as modificações realizadas e

sintetizar suas percepções e conjecturas (situações de ação e formulação). Ainda, todos os alunos obtiveram considerações semelhantes, variando apenas a organização de escrita e de pensamentos.

Figura 17 – Resolução da Atividade 1 pelos alunos A1 e A3



Fonte: Registros dos alunos A1 e A3.

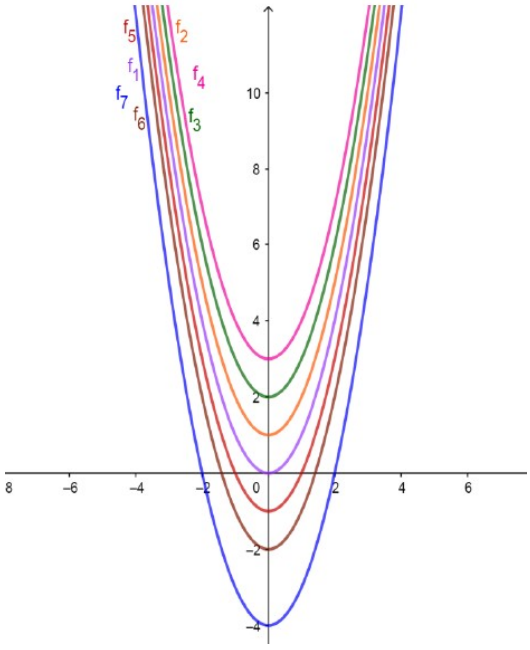
Dessa forma, há de indícios de uma compreensão, por parte dos alunos, a respeito da influência do coeficiente a na função $f(x)=ax^2$, em que, quando $a>0$ a concavidade da parábola está voltada para cima, quando $a<0$ a concavidade da parábola está voltada para baixo. Além disso, quanto menor for o módulo de a, mais aberta será sua concavidade e quanto maior for o módulo de a, mais fechada será sua concavidade.

Podemos observar que o que foi solicitado na Atividade 1 (e) permitiu que os alunos fossem colocados em uma situação de validação em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta sobre influência do coeficiente a na função $f(x)=ax^2$. Sendo assim, no momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

5.2 ATIVIDADE 2

Na Atividade 2, os alunos realizaram as construções gráficas das funções propostas, utilizando o GeoGebra, a fim de responder aos questionamentos. A Figura 18 apresenta as construções realizadas no GeoGebra, o que mostra que as mesmas estão em consonância com o esperado no capítulo anterior (situação de ação).

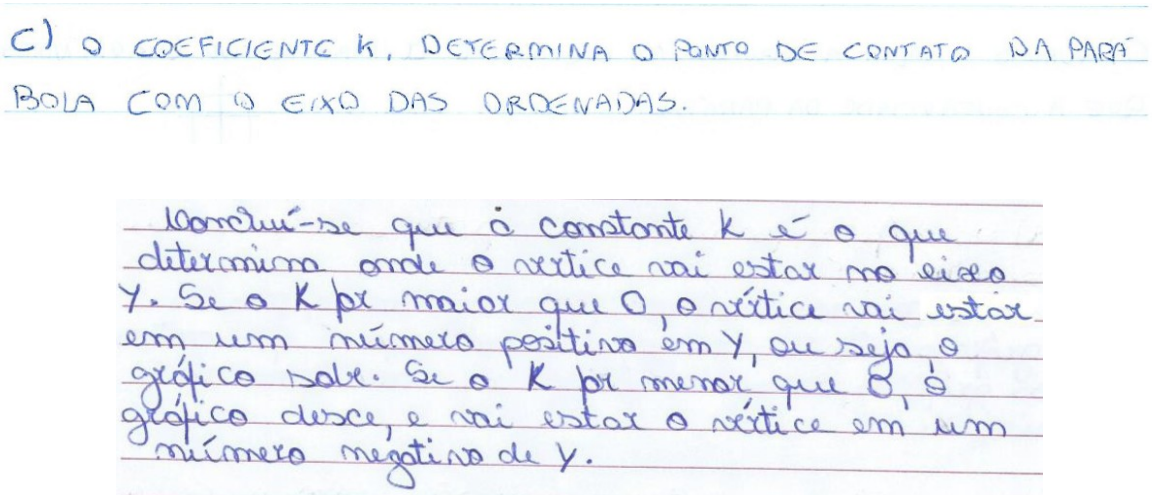
Figura 18 – Construção da Atividade 2 pelo aluno A17



Fonte: Registro do aluno A17.

Diante disso, os alunos puderam concluir que a variação do coeficiente k gera uma translação vertical da função inicial $f(x)=x^2$, assim como, a intersecção da parábola com o eixo y e a localização de seu vértice. A Figura 19 apresenta as conjecturas dos alunos diante das investigações realizadas e da interação com o GeoGebra (situações de ação e formulação).

Figura 19 – Resolução da Atividade 2 pelos alunos A4 e A9



Fonte: Registros dos alunos A4 e A9.

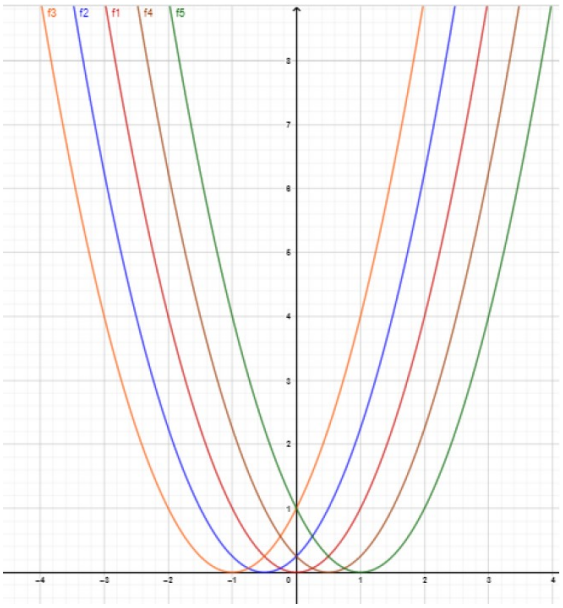
Assim, considerando o que foi solicitado na Atividade 2 (c), houve a possibilidade dos alunos se colocarem em uma situação de validação, em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta sobre a influência do coeficiente k, quando adicionado ou subtraído na função $f(x)=x^2$. Sendo assim, no momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

Diante da Figura 19, podemos perceber que ainda não há uma generalização para a influência do coeficiente k, visto que, em uma função escrita na forma $f(x)=a(x-m)^2+k$, em que $a\neq0$ e $m\neq0$, k não determina o ponto de intersecção da parábola com o eixo y, como formulado pelo aluno A4. Já a segunda formulação apresentada na Figura 19, se aproxima de uma relação entre o vértice da parábola e o eixo y, contribuindo para a compreensão de que o valor de k está diretamente ligado à coordenada y do vértice.

5.3 ATIVIDADE 3

Com relação à Atividade 3, os alunos realizaram as construções gráficas das funções propostas, utilizando o GeoGebra, a fim de responder aos questionamentos. A Figura 20 apresenta as construções realizadas no GeoGebra, o que mostra que as mesmas estão em consonância com o esperado no capítulo anterior (situação de ação).

Figura 20 – Construção da Atividade 3 pelo aluno A9



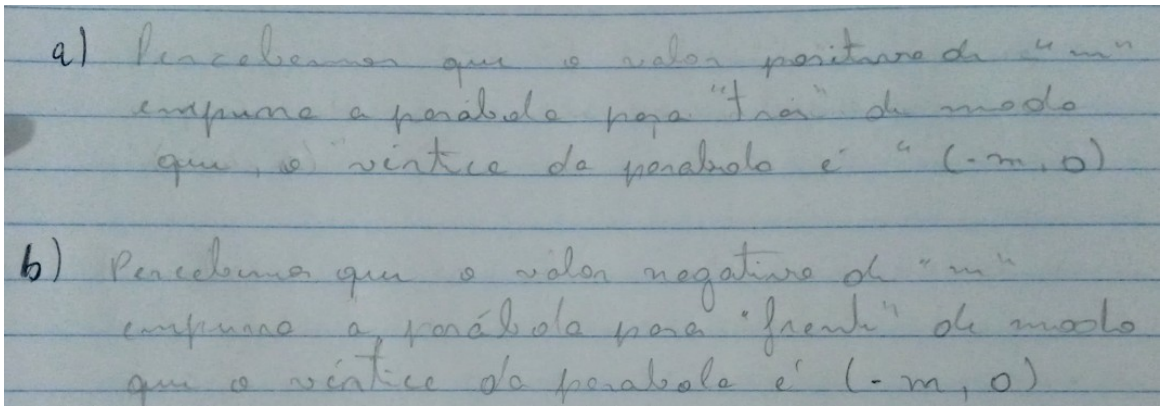
Fonte: Registro do aluno A9.

Diante disso, os alunos puderam concluir que a variação do coeficiente m gera uma translação horizontal da função inicial $f(x)=x^2$, visto que quando acrescentamos um valor m sob a potência quadrática, isto é, $f(x)=(x+m)^2$ os gráficos das funções se deslocarão horizontalmente para a esquerda em $-m$ unidades e, de forma análoga, quando subtraímos um valor m sob a potência quadrática, isto é, $f(x)=(x-m)^2$ os gráficos das funções se deslocarão horizontalmente para a direita em $-m$ unidades. A Figura 21 apresenta as conjecturas dos alunos diante das investigações realizadas e da interação com o GeoGebra (situações de ação e formulação).

Figura 21 – Resolução da Atividade 3 pelos alunos A7 e A8

a) Quando o valor é positivo, o gráfico toca sobre o eixo x para a esquerda, números negativos. O gráfico toca no valor acrescentado.

b) Quando o valor é negativo, o gráfico toca sobre o eixo x para a direita, números positivos. O gráfico toca no valor acrescentado.



Fonte: Registros dos alunos A7 e A8.

Dessa forma, a Atividade 3 (a) e (b) possibilitou um envolvimento dos alunos, colocando-os em uma situação de validação, em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta sobre a influência do valor de m, quando o mesmo assume um valor positivo ou um valor negativo, junto à variável x sob a potência quadrática.

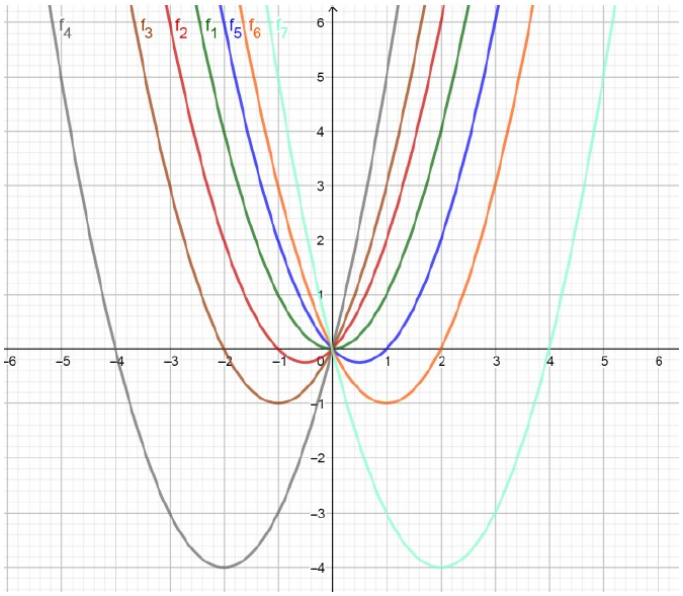
Há de se observar uma percepção dos alunos em que o deslocamento das parábolas, com relação à inicial $f(x)=x^2$, ocorre de acordo com o oposto do valor de m, fato este que pode contribuir para a compreensão da escrita da forma canônica $f(x)=a(x-m)^2+k$, em que há uma diferença sob a potência quadrática e não uma soma.

No momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação). Assim, percebemos que o termo “empurra”, utilizado por um dos alunos, é uma forma de explanar sua compreensão de que o valor de m, influencia diretamente no deslocamento horizontal de uma função inicial conhecida.

5.4 ATIVIDADE 4

Na Atividade 4, os alunos realizaram as construções gráficas das funções propostas, utilizando o GeoGebra, a fim de responder aos questionamentos. A Figura 22 apresenta as construções realizadas no GeoGebra, o que mostra que as mesmas estão em consonância com o esperado no capítulo anterior.

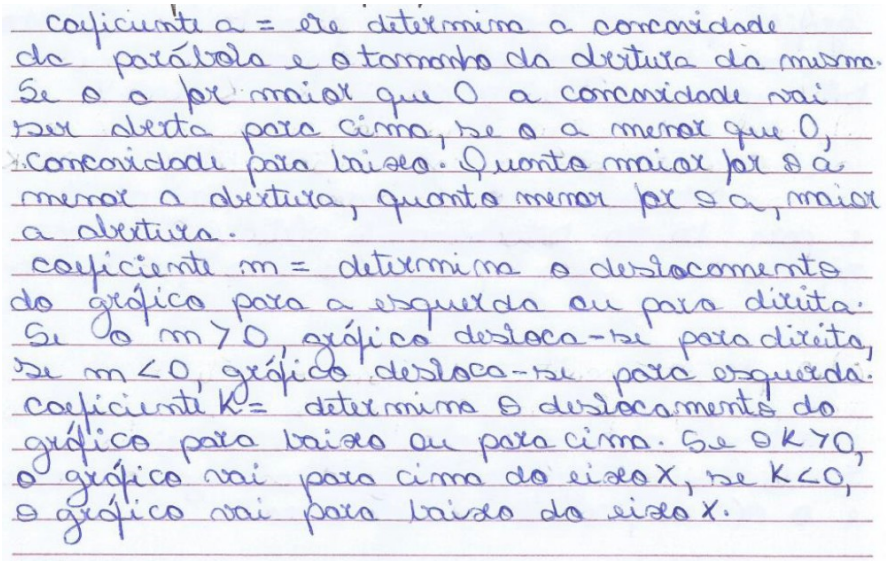
Figura 22 – Construção da Atividade 4 pelo aluno A16



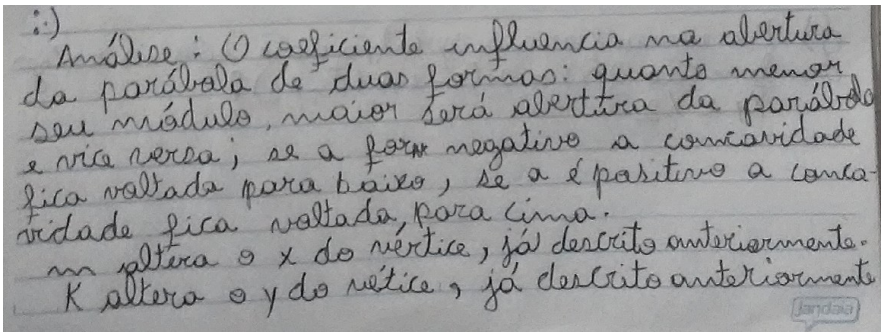
Fonte: Registro do aluno A16.

Diante disso, os alunos puderam concluir que a variação dos valores para o coeficiente *m* que acompanha o termo *x*, sob a potência quadrática, e para o coeficiente *k* , a função translada-se não somente verticalmente, como também horizontalmente, deslocando seu vértice em *m* unidades horizontalmente e *k* unidades verticalmente, se comparadas com a função inicial $f(x)=x^2$. A Figura 23 apresenta as conjecturas dos alunos diante das investigações realizadas e da interação com o GeoGebra (situações de ação e formulação).

Figura 23 – Resolução da Atividade 4 pelos alunos A9 e A10



Coeficiente a = ele determina a concavidade da parábola e o tamanho da abertura da mesma. Se o a for maior que 0 a concavidade vai ser deita para cima, se o a menor que 0, concavidade para baixo. Quanto maior for o a menor a abertura, quanto menor for o a, maior a abertura.
coeficiente m = determina o deslocamento do gráfico para a esquerda ou para direita. Se o m > 0, gráfico desloca-se para direita, se m < 0, gráfico desloca-se para esquerda.
Coeficiente K = determina o deslocamento do gráfico para baixo ou para cima. Se o K > 0, o gráfico vai para cima do eixo X, se K < 0, o gráfico vai para baixo do eixo X.



Fonte: Registros dos alunos A9 e A10.

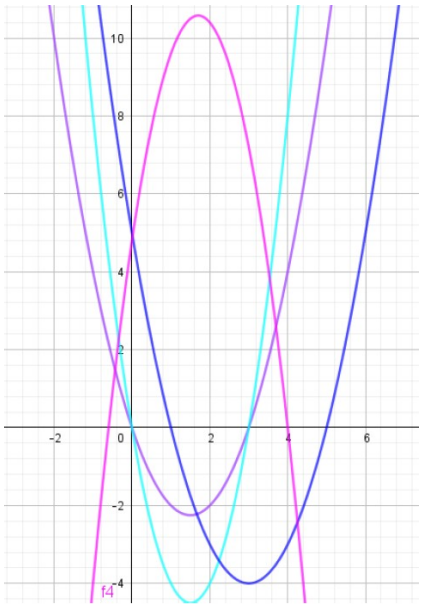
Dessa forma, percebemos que o que foi solicitado na Atividade 4 (e) permitiu que os alunos fossem colocados em uma situação de validação, em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta sobre influência dos coeficientes a , m e k , quando variados seus valores, no comportamento gráfico das funções resultantes em comparação à função inicial $f(x)=x^2$.

No momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou, em que, podemos perceber que ao percorrer todas investigações realizadas nas atividades anteriores, os alunos puderam confrontar suas hipóteses anteriores com as atuais, oriundas das novas investigações, a fim de validar suas novas conjecturas (situação de validação).

5.5 ATIVIDADE 5

Na Atividade 5, os alunos realizaram as construções gráficas das funções propostas, utilizando o GeoGebra, a fim de responder aos questionamentos. A Figura 24 apresenta as construções realizadas no GeoGebra, o que mostra que as mesmas estão em consonância com o esperado no capítulo anterior (situação de ação).

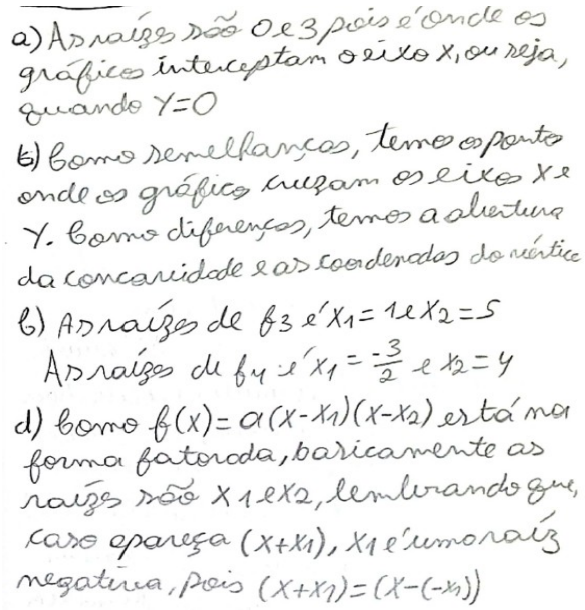
Figura 24 – Construção da Atividade 5 pelo aluno A17



Fonte: Registro do aluno A17.

Diante disso, uma parte dos alunos pôde concluir que os elementos x_1 e x_2 dentro dos fatores presentes nas funções possuem uma relação direta com as raízes das mesmas. A Figura 25 apresenta as conjecturas dessa parte dos alunos, diante das investigações realizadas e da interação com o GeoGebra (situações de ação e formulação).

Figura 25 – Resolução da Atividade 5 pelo aluno A11


a) As raízes são 0 e 3 pois é onde os gráficos interceptam o eixo X, ou seja, quando Y=0

b) Como semelhanças, temos o ponto onde os gráficos cruzam os eixos X e Y. Como diferenças, temos a abertura da concavidade e as coordenadas do vértice

c) As raízes de f_3 é $X_1 = 1$ e $X_2 = 5$

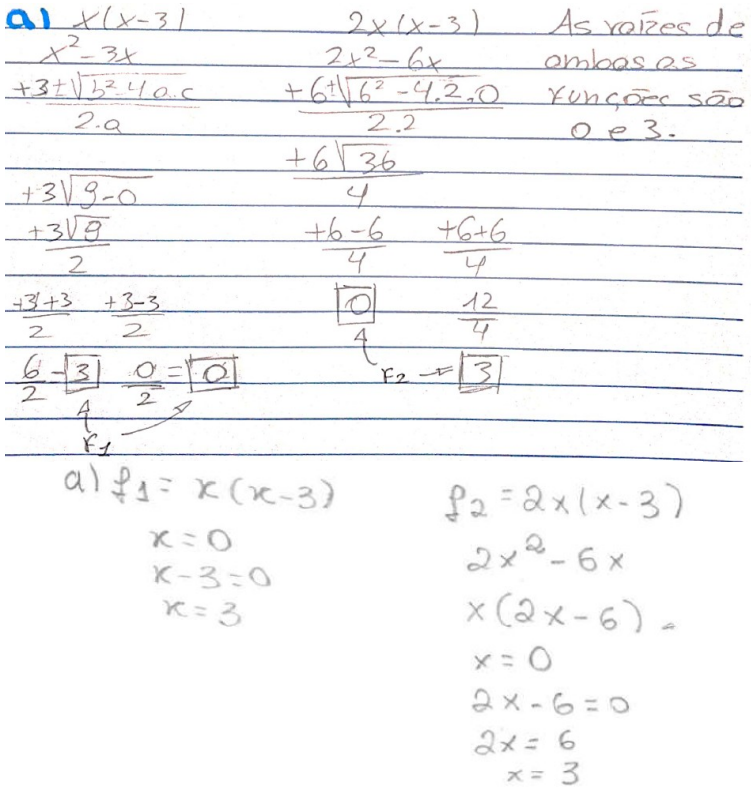
As raízes de f_4 é $X_1 = -\frac{3}{2}$ e $X_2 = 4$

d) Como $f(X) = a(X - X_1)(X - X_2)$ está na forma fatorada, basicamente as raízes são X_1 e X_2, lembrando que, caso apareça $(X + X_1)$, X_1 é uma raiz negativa, pois $(X + X_1) = (X - (-X_1))$

Fonte: Registro do aluno A11.

Entretanto, outra parte dos alunos sentiu a necessidade de basear suas investigações em outras formas de obter as raízes das funções. Dessa forma, a Figura 26 apresenta os cálculos realizados para obter as raízes, sendo eles: a fórmula resolutiva e a propriedade em que o produto de dois fatores é nulo, isto é, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, respectivamente.

Figura 26 – Resolução da Atividade 5 pelos alunos A1 e A7



Fonte: Registros dos alunos A1 e A7.

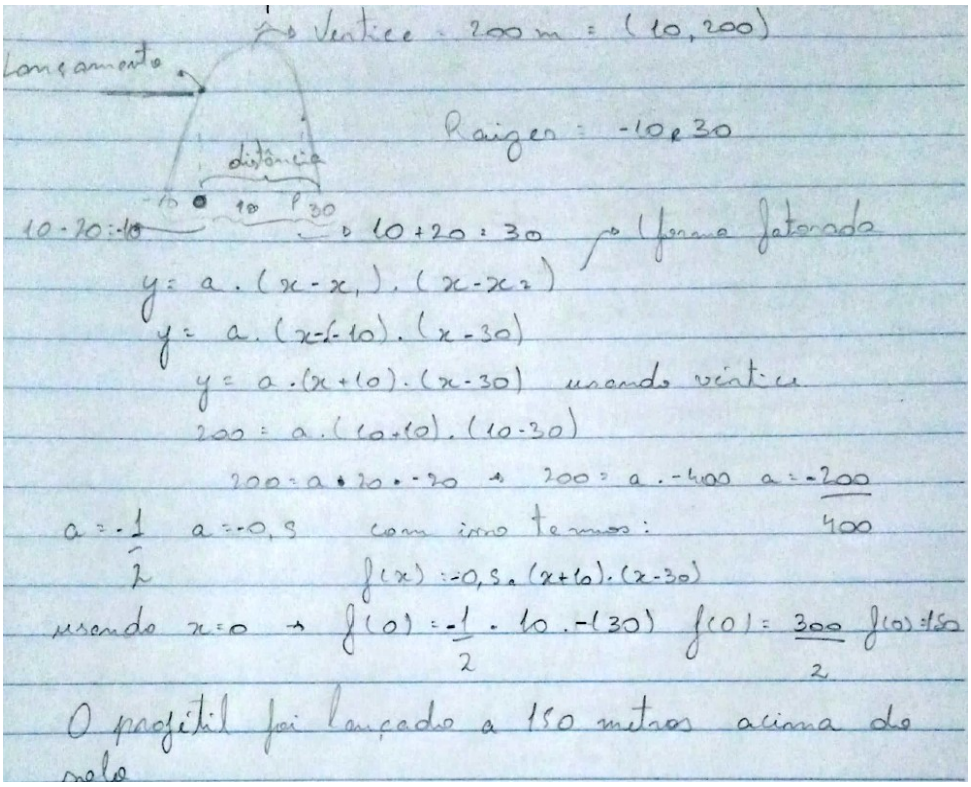
Ademais, diante do que foi solicitado na Atividade 5 (d), percebemos a possibilidade de os alunos se coloquem em uma situação de validação em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta sobre influência dos termos x_1 e x_2 presentes na forma fatorada da função quadrática. Com isso, no momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

Ainda, diante das diferentes formas de argumentação os alunos concluíram que dada a forma fatorada da função quadrática, ou seja, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, os elementos x_1 e x_2 representam as raízes das funções, quando escritas nessa forma.

5.6 ATIVIDADE 6

Com relação à Atividade 6, é perceptível distintas formas de pensamento para resolver o problema proposto, mas que, em alguns casos, convergem para conceitos específicos, no qual foi utilizada a forma fatorada da função quadrática, como podemos observar na Figura 27, ilustrando a resolução de um dos alunos (situações de ação e formulação).

Figura 27 – Resolução da Atividade 6 pelo aluno A8

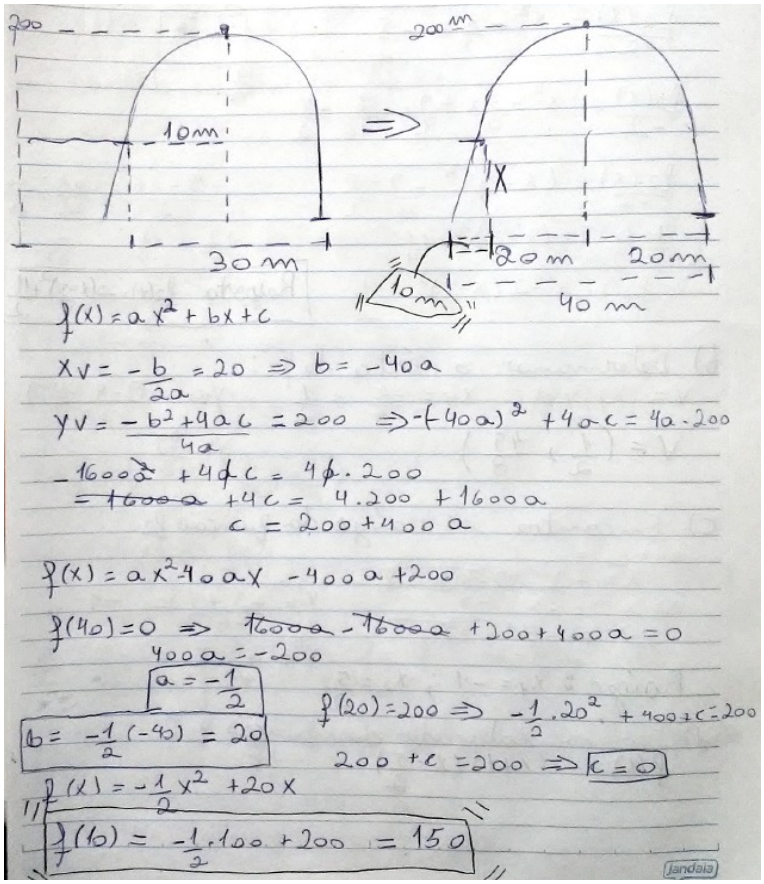


Fonte: Registro do aluno A8.

Observamos que, utilizando a particularidade de simetria da função quadrática, uma parte dos alunos optou por obter as raízes da função e fazer uso da forma fatorada para obtenção de uma lei e, posteriormente, solucionar o questionamento presente na atividade (situação de formulação).

Por outro lado, houve casos em que os alunos optaram por utilizar derivados da fórmula resolutiva para obtenção do x_v e y_v, como apresentado na Figura 28, visto que esses eram dados conhecidos no problema.

Figura 28 – Resolução da Atividade 6 pelo aluno A10



Fonte: Registro do aluno A10.

Na situação acima, vimos um trabalho algébrico intenso, envolvendo diversas substituições de variáveis para obtenção de uma lei da função que represente o caminho percorrido pelo projétil, fazendo uso da forma desenvolvida da função quadrática e a fórmula resolutiva para obtenção de x_v e y_v. Além disso, o aluno A10 não considerou a beira do penhasco como sendo o eixo y_v, transladando esse eixo a fim de que uma das raízes seja zero.

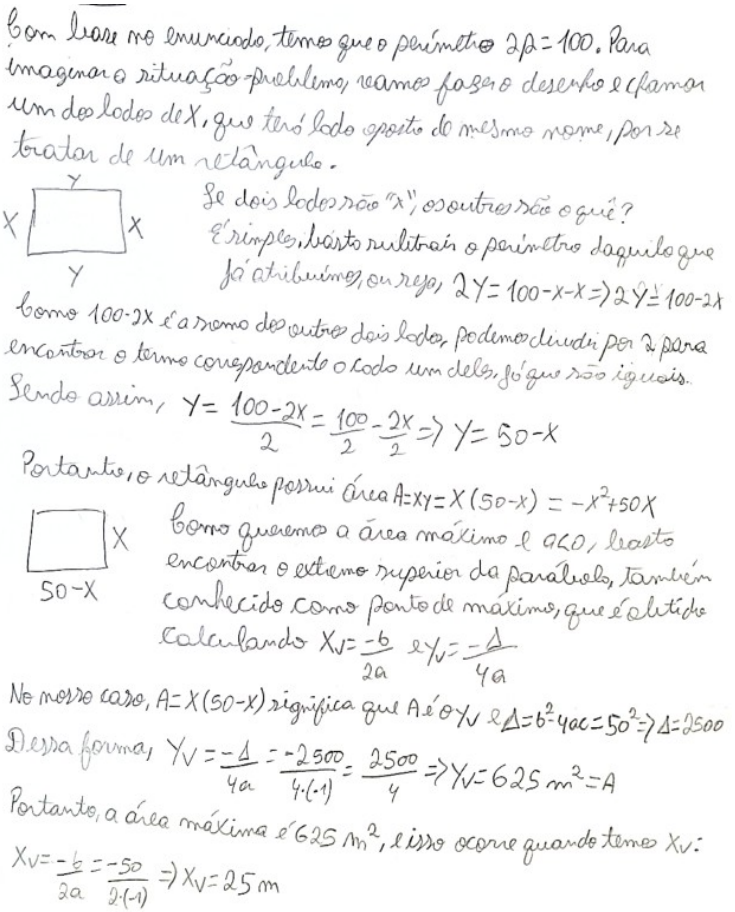
Assim, considerando o que foi solicitado na Atividade 6, houve a possibilidade dos alunos se colocarem em uma situação de validação, em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta para a situação em questão. Sendo assim, no momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

Há de se observar que, em todos os casos observados, não houve resoluções que utilizassem a forma canônica da função quadrática, como era esperado no capítulo anterior. Uma grande parte dos alunos optou pela utilização da forma fatorada da função quadrática, buscando outros dados por meio das coordenadas do vértice, dadas pela questão, em vez de fazer uso da forma canônica, a qual pode ser expressa fazendo uso dessas informações. Esses são indícios de que ainda não há uma familiaridade dos alunos com a forma canônica, ou até mesmo, que não haja uma compreensão de seus elementos.

5.7 ATIVIDADE 7

Quanto a Atividade 7, percebemos predominantemente dois tipos de pensamentos para a resolução da questão, sendo o primeiro através da fórmula resolutiva para obter os valores de x_v e y_v, tendo obtido a função quadrática que representa a área do retângulo. Podemos observar essa estratégia de resolução na Figura 29 (situações de ação e formulação).

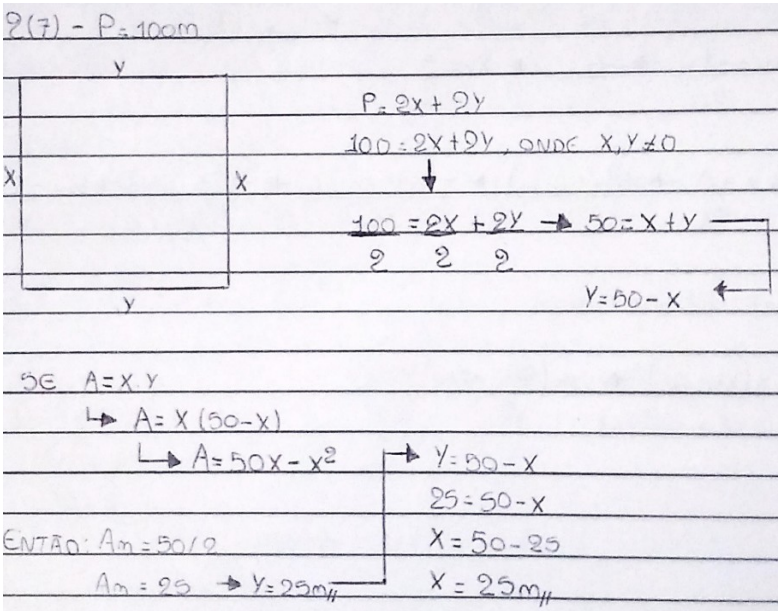
Figura 29 – Resolução da Atividade 7 pelo aluno A11



Fonte: Registro do aluno A11.

O segundo pensamento vai de acordo com o que era esperado e descrito no capítulo anterior, em que basta determinar $x_v=25$, calculando o ponto médio entre as raízes $x_1=0$ e $x_2=50$. Para obtenção da lei da função que representa a área de um retângulo, observamos um processo semelhante ao visto na resolução anterior (Figura 29). A segunda estratégia de resolução está apresentada na Figura 30 (situações de ação e formulação).

Figura 30 – Resolução da Atividade 7 pelo aluno A4



Fonte: Registro do aluno A4.

Dessa forma, percebemos que o que foi solicitado na Atividade 7 permitiu que os alunos se colocassem em uma situação de validação, em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta para a situação em questão. Sendo assim, no momento em que os alunos disponibilizaram suas construções e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

Ainda, com relação às hipóteses formuladas, podemos observar nas Figuras 29 e 30, que os alunos buscaram validar suas conjecturas de diferentes maneiras, isto é, alguns

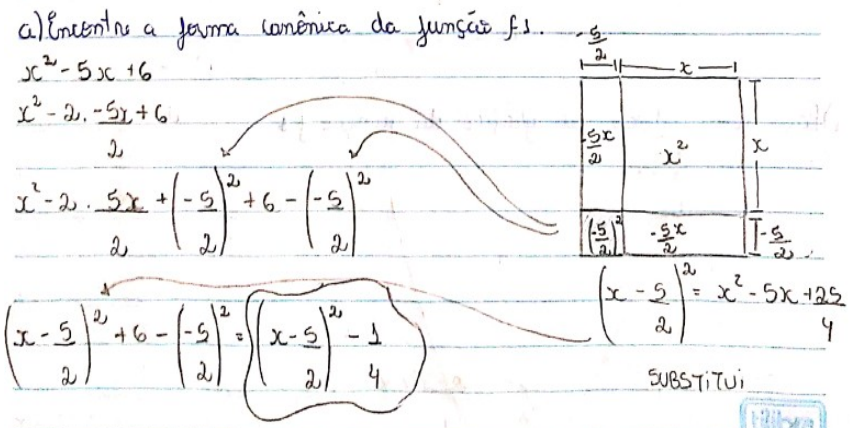
utilizaram a linguagem natural para expressar suas formulações, enquanto outros buscaram a linguagem matemática e conceitos correlatos para justificar seus pensamentos. Mas, em sua maioria, vemos mesclas entre a linguagem natural e a linguagem matemática, potencializando o entendimento do leitor quanto ao que se queria validar.

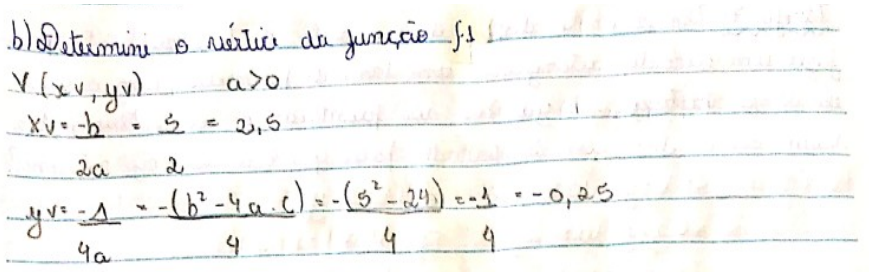
5.8 ATIVIDADE 8

Com relação à Atividade 8, em que, primeiramente, buscava-se encontrar a forma canônica das funções propostas para que fosse, também, determinado o vértice dessas funções. No entanto, das 23 participações apenas 6 utilizaram o método de completar quadrados para obtenção da forma canônica, enquanto os demais 17 participantes, fizeram uso da fórmula resolutiva para obter os valores de x_v e y_v, sabendo que os mesmos se fazem presentes na forma canônica (situações de ação e formulação).

Ainda, observamos que os alunos que utilizaram o método de completar quadrados para obter a forma canônica, quando solicitados a determinar o vértice dessas funções, fizeram uso da fórmula resolutiva para obter os valores de x_v e y_v, dando indícios de que os alunos não perceberam que ao obter a forma canônica, tais elementos podem facilmente ser obtidos (situações de ação e formulação). Esses indícios estão apresentados na Figura 31.

Figura 31 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A23

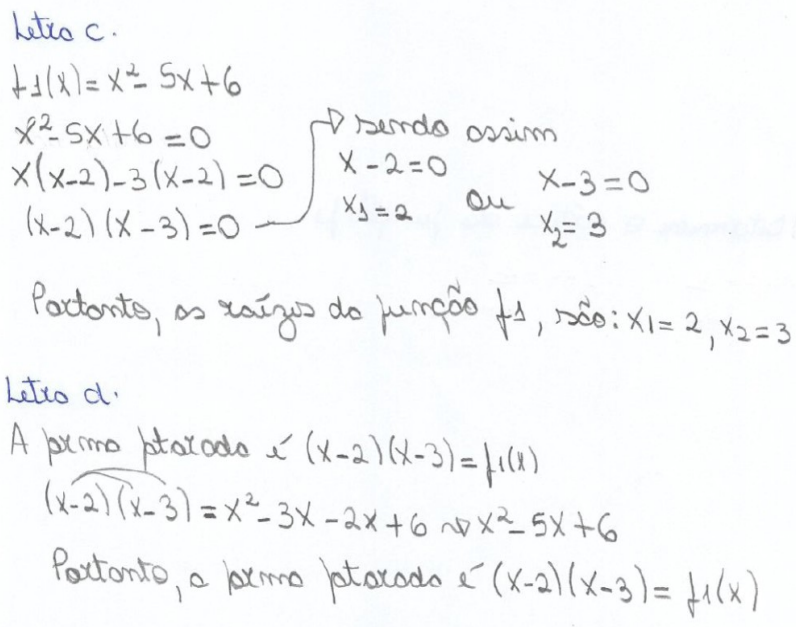




Fonte: Registro do aluno A23.

Além disso, na Atividade 8, era solicitado que se obtivessem as raízes junto a forma fatorada das funções propostas, o que poderia ser obtido realizando-se um pequeno trabalho algébrico com a forma canônica, visto que ela já estava disponível. Os dados obtidos apresentam três estratégias para obtenção das raízes das funções, em que, primeiramente, destacamos um trabalho algébrico para a escrita da forma fatorada e consequentemente a obtenção das raízes em 5 dos 23 participantes (situações de ação e formulação). Uma exemplificação dessa estratégia está apresentada na Figura 32.

Figura 32 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A9

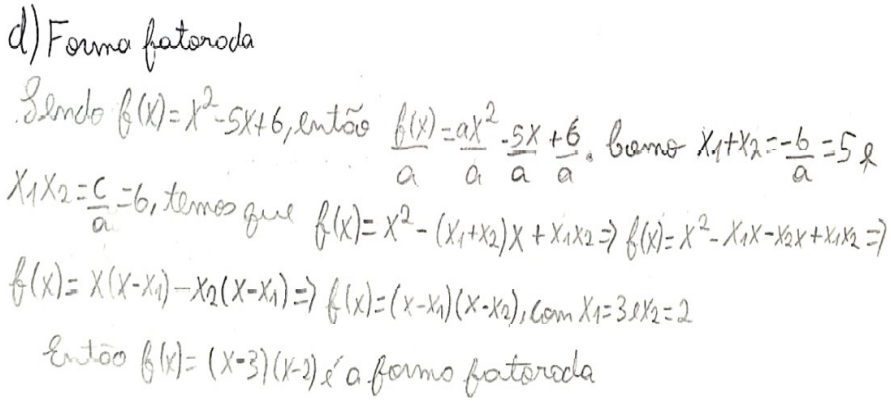


Fonte: Registro do aluno A9.

A segunda estratégia adotada pelos alunos foi a busca pela soma e pelo produto de dois elementos que resultem nas razões $\frac{-b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, respectivamente. Essa estratégia foi

utilizada por 3 participantes e uma exemplificação está apresentada na Figura 33 (situações de ação e formulação).

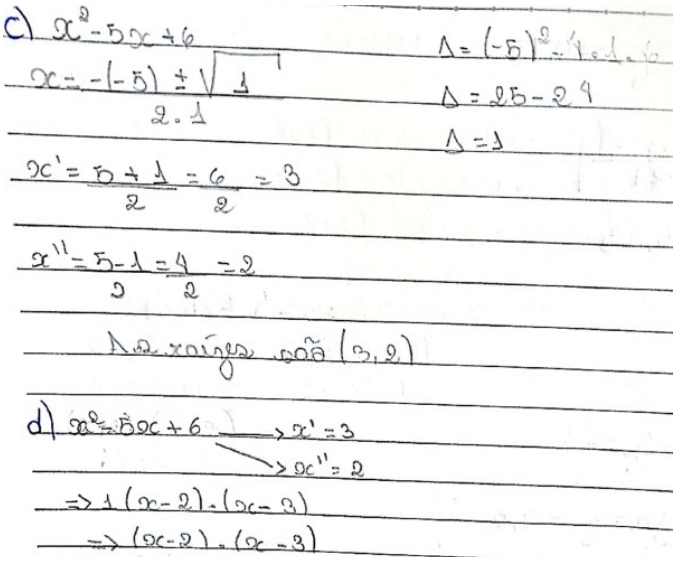
Figura 33 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A11



Fonte: Registro do aluno A11.

Os demais alunos optaram por utilizar como estratégia a fórmula resolutiva para obter as raízes das funções propostas e posteriormente escrever a forma fatorada. Esse fato indica que muitos alunos ainda associam a obtenção de raízes de uma função polinomial do segundo grau à fórmula resolutiva, não observando as demais informações que estão ao seu dispor (situação de formulação). Uma representação dessa resolução está apresentada na Figura 34.

Figura 34 – Resolução da Atividade 8 pelo aluno A5



Fonte: Registro do aluno A5.

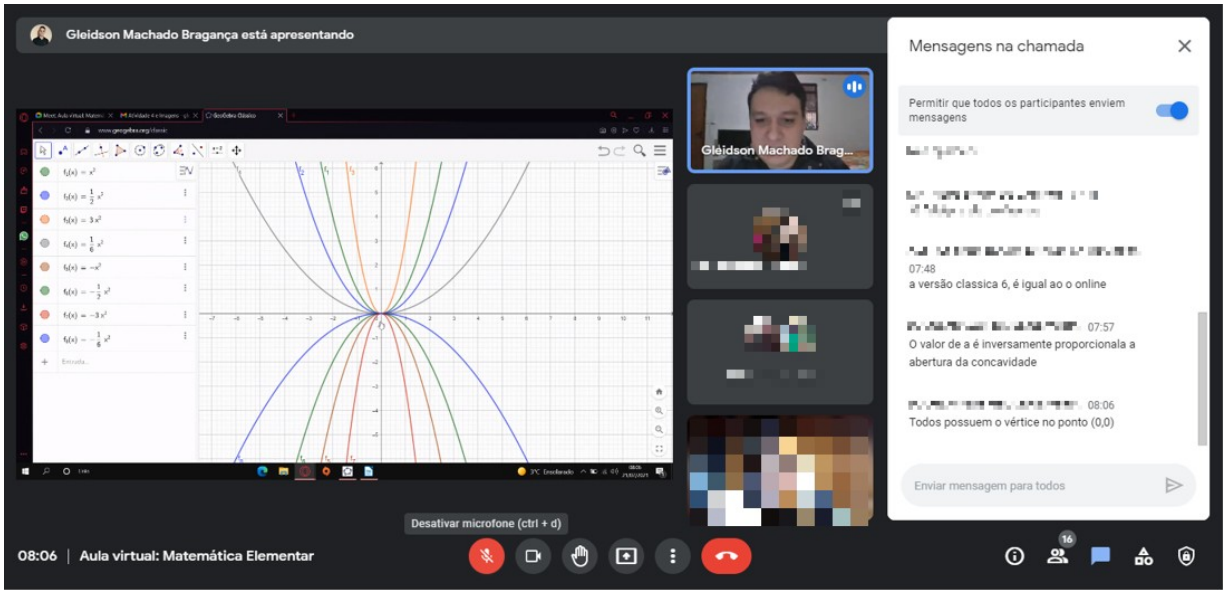
Diante da Atividade 8, os alunos puderam se colocar em uma situação de Validação, no momento em que foi necessário argumentar e elaborar uma resposta para cada uma das questões propostas. Assim, no momento em que os alunos disponibilizaram suas hipóteses, relações e conjecturas desta atividade na plataforma Moodle, buscaram expor seu raciocínio e pensamentos com relação ao que investigou (situação de validação).

5.9 A FASE DA INSTITUCIONALIZAÇÃO

Após todas as atividades serem desenvolvidas, organizamos um momento, ocorrido de forma síncrona por meio de uma reunião na plataforma Google Meet, para realizarmos a fase da institucionalização em cada uma das atividades, isto é, momento em que o professor estrutura os saberes e conhecimentos construídos ao longo das atividades, tornando-se à disposição na resolução de problemas semelhantes.

Para as atividades 1, 2, 3, 4 e 5, foram realizadas as construções das funções propostas no GeoGebra e discutidos os questionamentos junto aos alunos, para que fosse possível sintetizar e organizar as hipóteses formuladas pelos mesmos e convencionar as características observadas da função quadrática. A Figura 35 apresenta como o autor realizou as construções e discutiu os questionamentos propostos nas atividades supracitadas.

Figura 35 – Momento de institucionalização na Atividade 1



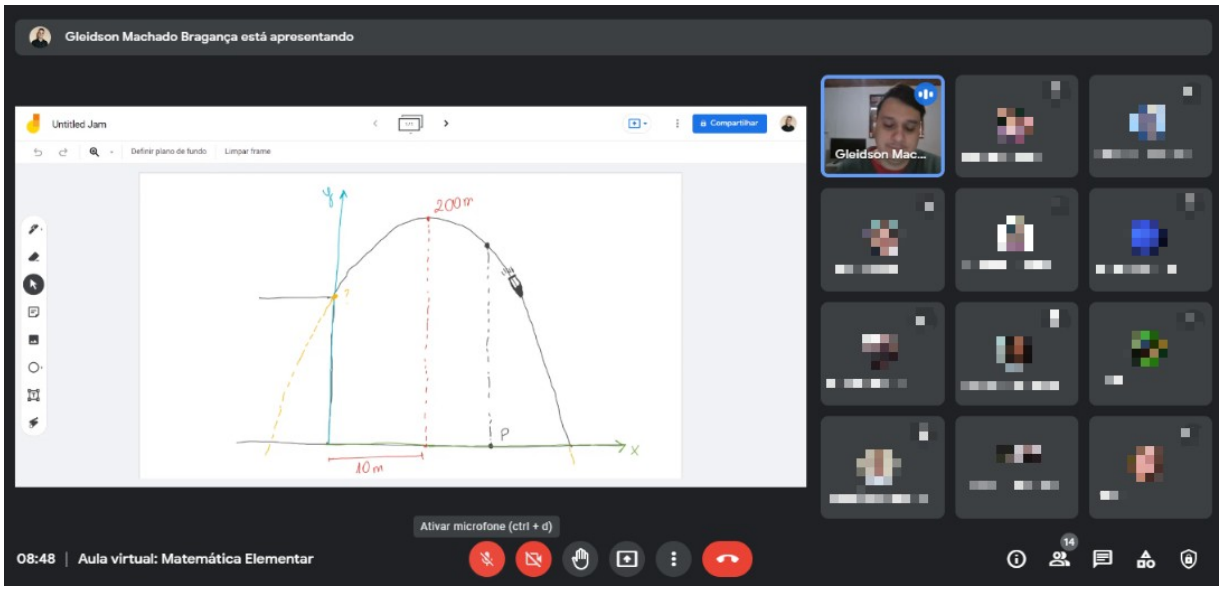
Fonte: Da pesquisa.

Podemos verificar, na Figura 35, que há comentários dos alunos a respeito das versões disponíveis do GeoGebra, quanto à influência do coeficiente a na abertura da concavidade, em que um dos alunos argumenta que “o valor de a é inversamente proporcional a abertura da concavidade”. Também, vemos outro comentário salientando que todos os gráficos “possuem o vértice no ponto $(0,0)$ ” como característica em comum.

Essas argumentações realizadas pelos alunos foi possível visto que já contemplaram as situações de ação, formulação e validação. Neste momento, o pesquisador, exercendo o papel de professor, proporcionou a situação de institucionalização, no qual pôde discutir as formulações realizadas pelos alunos e organizá-las de forma a caracterizar a influência do coeficiente a na função $f(x)=ax^2$. O mesmo ocorreu para as demais atividades semelhantes, sendo elas: Atividade 2, Atividade 3, Atividade 4 e Atividade 5.

Com relação às atividades 6, 7 e 8, foi utilizado o quadro branco virtual denominado Google Jamboard, para que fosse possível realizar o desenvolvimento das atividades junto aos alunos. A Figura 36 apresenta a discussão entre professor (pesquisador) e alunos para a resolução da Atividade 6.

Figura 36 – Momento de institucionalização na Atividade 6

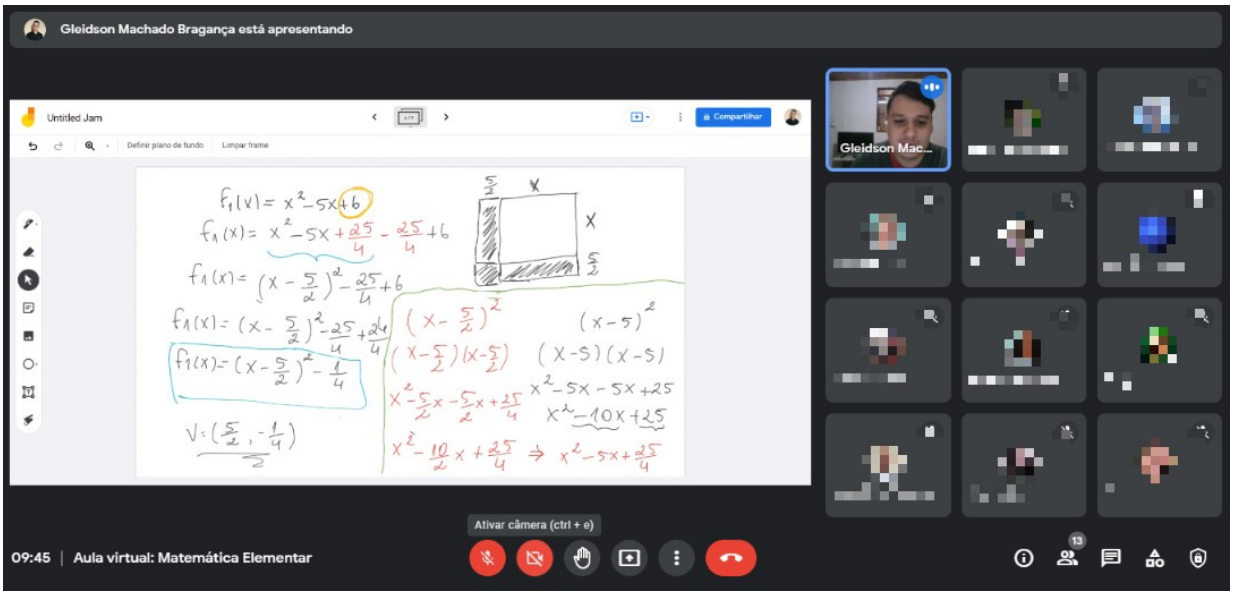


Fonte: Da pesquisa.

Ainda, a Figura 36 apresenta uma conversa inicial de interpretação em torno da questão proposta, no qual o desenvolvimento da atividade deu-se por meio da participação dos alunos e suas formulações para a solução, visto que todos já haviam se envolvido nas situações de ação, formulação e validação. Assim, o professor (pesquisador) buscou organizar as conjecturas dos alunos e sintetizar uma resolução para a questão da atividade.

Nas Atividades 7 e 8, ocorreu o mesmo que na Atividade anterior, utilizando-se o Jamboard para a resolução das questões propostas, presentes nas atividades. A Figura 37 apresenta a resolução de uma questão presente na Atividade 8.

Figura 37 – Momento de institucionalização na Atividade 8



Fonte: Da pesquisa.

Ainda, na Figura 37, podemos perceber o método de completar quadrados para obter a forma canônica da função $f_1(x)=x^2-5x+6$, em que algumas ponderações foram realizadas na obtenção do quadrado perfeito e, também, a relação dos elementos m e k com o vértice da parábola oriunda dessa função.

5.10 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Diante da realização dessas atividades e dos dados oriundos das resoluções propostas pelos alunos, percebemos que as investigações e conjecturas realizadas nas situações de ação, formulação e validação proporcionaram, aos alunos, estabelecer relações entre os métodos, conceitos e saberes envolvidos nas questões propostas. Esses momentos são muito valiosos para a construção de conhecimentos pelos alunos, pois segundo Brousseau (2008), o aluno só poderá aprender produzindo, provocando aos conhecimentos vigorar e evoluir de acordo com as situações em que se depara.

Ainda, percebemos que há um déficit quanto à transição e manipulação das formas de representação algébrica da função quadrática, pois, ao utilizarmos um método algébrico atrelado a uma visão geométrica, como o de completar quadrados, é possível reescrever a função quadrática em sua forma desenvolvida, $f(x)=ax^2+bx+c$, para a forma canônica $f(x)=a(x-m)^2+k$, em que já se torna possível obter informações acerca do vértice dessa parábola. Além disso, através da forma canônica, é possível isolar a incógnita x na equação $a(x-m)^2+k=0$ e obter as raízes da função.

Além do mais, em situações que podem ser modeladas por funções quadráticas ou se comportam de tal forma, quando conhecidas as raízes, a forma fatorada torna-se uma facilitadora na obtenção da lei dessa função. Ou, em alguns casos, um trabalho algébrico pode ser utilizado para facilmente reescrever uma função quadrática em sua forma desenvolvida para sua forma fatorada, explicitando suas raízes. O que foi pouco empregado pelos alunos ao formularem resoluções para as questões propostas nas atividades.

Com relação às situações de institucionalização, foi proporcionado aos alunos um momento de reflexão e retomada dos pensamentos, hipóteses, estratégias, métodos, conjecturas e formulações diante das questões a fim de respondê-las e/ou resolvê-las, visto que não há uma homogeneidade quanto aos pensamentos dos alunos, isto é, houve uma variedade de argumentações e estratégias para resolução das questões. Dessa forma, a organização sistemática e linguagem matemática empregada pelo professor na resolução das atividades possibilitou a constituição de estratégias e conhecimentos para se abordar questões semelhantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo a atingir o objetivo dessa pesquisa, isto é, analisar a aprendizagem da Função Quadrática observando a forma canônica e fatorada tendo como pressupostos teóricos a Teoria das Situações Didáticas, propomos uma sequência didática contendo oito atividades, as quais abordam a forma canônica e a forma fatorada da função quadrática e que contemplam as fases das situações didáticas e adidáticas previstas na Teoria das Situações Didáticas. Além disso, essas atividades permeiam a resolução de tarefas com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra e em lápis e papel.

Desenvolver esse estudo tendo como pressuposto teórico a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, proporcionou uma organização e elaboração da sequência didática presente nesse estudo, de forma que fosse possível estruturar o estudo da função quadrática previamente, durante e após o desenvolvimento das atividades propostas na mesma. Ainda, a composição do processo de ensino e aprendizagem em quatro fases, sendo elas: ação, formulação, validação e institucionalização; contribui para uma mudança de postura por parte dos alunos, em que os mesmos deixam de ser sujeitos passivos e passam a agir como sujeitos ativos no seu processo de aprendizagem, visto que agem de forma semelhante à de um pesquisador.

O público-alvo delimitado para a pesquisa foi uma turma de acadêmicos ingressantes do curso de Matemática de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, matriculados, no primeiro semestre de 2021 na disciplina de Matemática Elementar. Acreditamos que o desenvolvimento das atividades propostas nesta pesquisa possibilitou aos estudantes a experiência com metodologias diferenciadas contribuindo para a formação de futuros professores de matemática e bacharéis, também, a compreensão dos conceitos básicos relacionados as funções e a aplicação desses conceitos na solução de problemas práticos, constitui uma base de conhecimentos para auxiliar os estudantes na compreensão das demais disciplinas que compõe o currículo do curso, bem como, no desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a prática docente.

Diante da análise dos dados e no momento de institucionalização, foi possível perceber que ao percorrer as situações de ação, formulação e validação, os alunos agiram de forma ativa na construção de seus conhecimentos no momento em que testaram conjecturas, formularam hipóteses, provaram, construíram modelos, conceitos e teorias. Dessa forma, no momento de institucionalização, em que o professor organiza metodicamente em linguagem

matemática os saberes envolvidos nas atividades, os alunos já compreendiam e/ou conseguiram relacionar as hipóteses formuladas, durante o desenvolvimento das atividades, com os conceitos apresentados pelo professor.

Uma observação importante à ser feita é com relação ao contexto social no qual as atividades foram desenvolvidas, em que devido à pandemia de COVID-19, as aulas ocorriam de forma remota no momento da realização da sequência didática. O fato da Teoria das Situações Didáticas salientar a importância de que os alunos se deparem com situações didáticas, juntamente, com situações adidáticas, e que o professor realize a mediação entre as fases das situações promovendo a devolução, isso ocorreu de forma limitada de acordo com o contexto em que o sistema de ensino se encontrava.

Dessa forma, a preparação e adaptação do *milieu* pelo professor poderia ter sido mais satisfatória e com uma maior sobressalência das dificuldades dos alunos se ocorressem de forma presencial, propiciando maiores interações, sendo elas: entre aluno-professor, professor-saber, aluno-saber, aluno-aluno, professor-*milieu* e aluno-*milieu*. Posto isso, muitas dessas relações ficaram fragilizadas visto que o desenvolvimento das atividades seguiram de acordo com as orientações para as aulas no contexto de pandemia, isto é, encontros por meio de webconferência e atividades sendo realizadas em momentos assíncronos.

Portanto, salientamos a importância da utilização de metodologias e referenciais teóricos que não tratem o aluno como um indivíduo passivo quanto à sua formação, aprendizagens, conhecimentos e saberes, e sim que o coloquem em uma posição de sujeito ativo, fazendo parte de cada etapa do seu constructo cognitivo, além de potencializar suas habilidades de investigação, criticidade e reflexão.

Também, deixamos como sugestões: a aplicação dessa sequência didática em um contexto pós-pandêmico, em que as relações, anteriormente citadas, possam ocorrer, potencializando a organização do *milieu* e as situações de ação, formulação, validação e institucionalização; a modificação e variação das atividades presentes na sequência didática, em vistas à deixá-las mais compreensíveis, ou ainda, mais desafiantes para os alunos; e a utilização da Teoria das Situações Didáticas em futuras pesquisas, pois, foi possível, diante desse trabalho, perceber que essa teoria destaca momentos enriquecedores na construção de conhecimentos e saberes em torno de um objeto de estudo, visto que, analisa as variáveis envolvidas nas relações dentro da sala de aula.

Por fim, esperamos que nossa pesquisa tenha contribuído com discussões acerca da Educação Matemática, no que tange o ensino e aprendizagem da Função Quadrática não somente no Ensino Superior, mas também, na Educação Básica, visto que esse trabalho proporcionou diversos aprendizados, reflexões e troca de experiências entre os pesquisadores, assim como, para os sujeitos participantes da pesquisa e futuros professores e bacharéis.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC. 2017a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Ensino Médio**. Brasília: MEC. 2017b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 16 jun. 2020.

BORBA, M. C. Educação matemática a distância online: balanço e perspectivas. **Cuadernos de Investigatión y Formación em Educación Matemática**, Costa Rica, n. 11, p. 349-358, 2013.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática**: 1º ano. 1.ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:** escolhendo entre cinco abordagens. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

DANTE, L. R.. **Matemática**: contexto & aplicações. Volume 1. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores Associados, 2006.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. Volume 1. 9.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LIMA, F. D. S. de. **Situações Didáticas Olímpicas para o ensino de funções**: o contributo da Engenharia Didática de Segunda Geração. 2019. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

LUTZ, M. R.; BONA, A. S. de. Explorando os coeficientes da função quadrática por meio do *software Winplot*: Uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino Médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 209-226, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n2p209>. Acesso em: 11 abr. 2021.

MAIA, D. **Função Quadrática**: Um estudo didático de uma abordagem computacional. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11133/1/dissertacao_diana_maia.pdf>. Acesso em: 12 maio 2020.

MATOS FILHO, M. A. S. de. **Análise de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus instrumentalizada por uma ferramenta computacional**: possibilidades e dificuldades. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2010.

MENDES, F. et al. O processo de ensino e aprendizagem da função quadrática com o auxílio do *software* Winplot no ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 210-228, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p210>. Acesso em: 11 abr. 2021.

OLIVEIRA, M. M. de. **Ensino de funções por meio da videoanálise**: um contributo da Engenharia Didática. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

ROLLOF, M. C. S. O estudo da parábola na forma canônica e como lugar geométrico. *In*: SILVA, E. C. da. **Ensino aprendizagem de matemática**. Ponta Grossa: Atena Editora, 2019. Disponível em: <https://www.atenaeditora.com.br/wp-content/uploads/2019/08/E-book-Ensino-Aprendizagem-de-Matematica.pdf>. Acesso em: 10 out. 2019.

SANTOS, A. G. dos. **O GeoGebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias**. 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

SANTOS, C. P. dos. **Função seno**: um estudo com o uso do *software* Winplot com alunos do Ensino Médio. 2013. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SANTOS, S. A. dos. **Ambiente informatizado**: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio. 2009. 162 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANTOS, V. D. G. dos. **Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e GeoGebra**: funções afins e funções quadráticas. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

SILVA, A. C. N. M. da. **O GeoGebra como ferramenta didática para um ensino integrado de cinemática, funções afins e quadráticas**. 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Pós-Graduação do Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.

SILVA, E. R. da. **Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio**. 2012. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVA, S. C.; MADRUGA, Z. E. F.; SILVA, F. S. Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 16, n. 21, p. 101-118, jan./abr. 2019. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/REMat-SP/article/view/214>. Acesso em: 11 abr. 2021.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 1**. 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUSA, E. V. de. **Objetos de aprendizagem no ensino de matemática e física**: uma proposta interdisciplinar. 2010. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SULEIMAN, A. R. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Educação: teoria e prática, Rio Claro, vol. 25, n. 48, p. 200-206, Jan/Abr 2015. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/8935>. Acesso em: 28 jun. 2020.

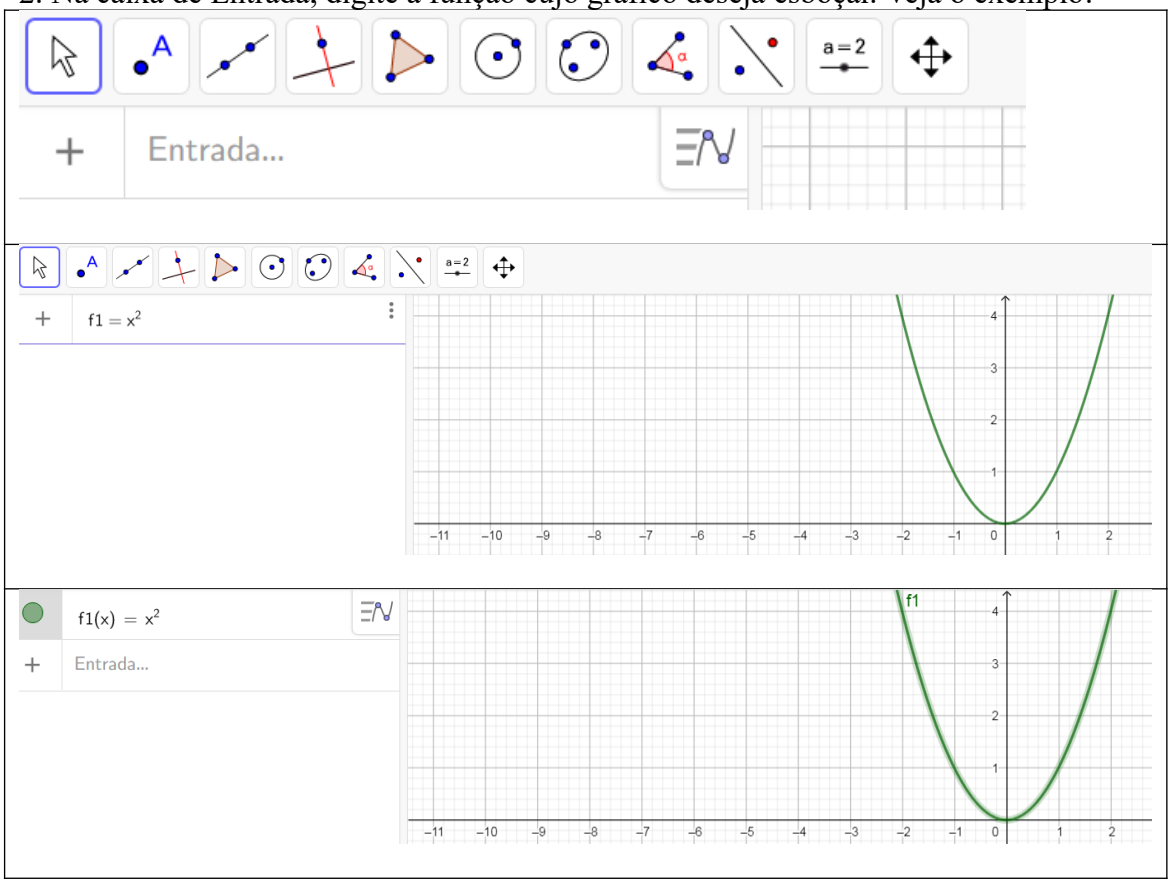
THIEL, A. A.; BARBOSA, T. H. N.; MORETTI, M. T. Função quadrática: Linguagem matemática e a representação de um pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 278-294, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p278>. Acesso em: 11 abr. 2021.

ANEXO A – TUTORIAL DO GEOGEBRA

Um tutorial sobre como elaborar gráficos no GeoGebra

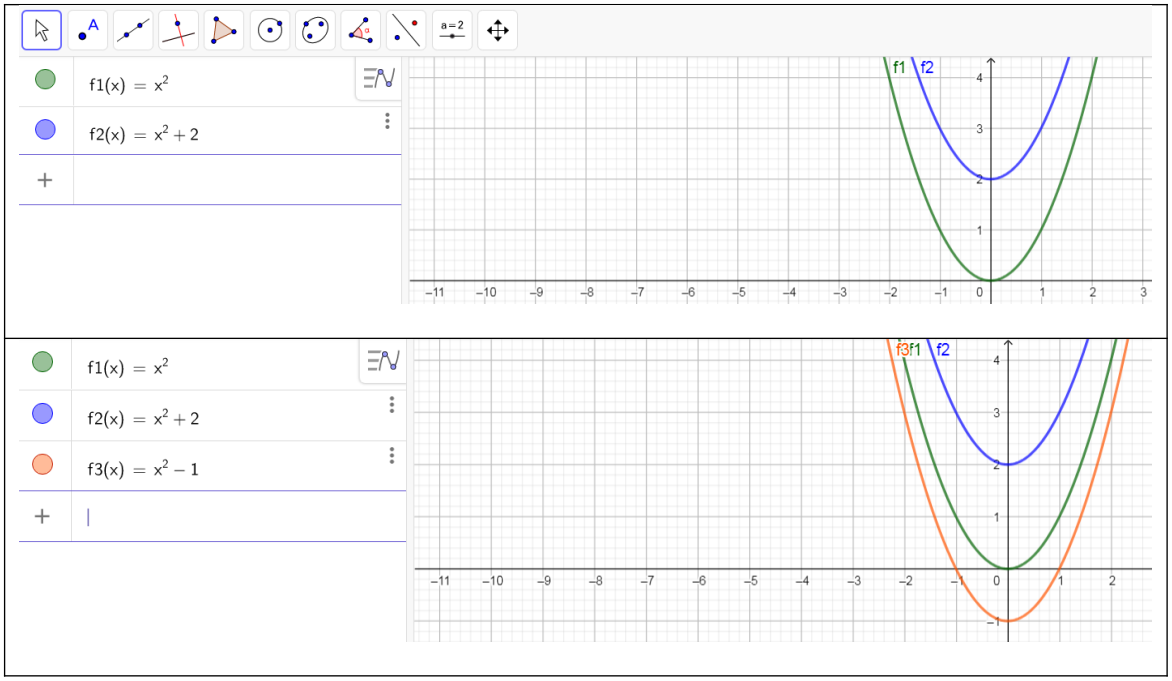
1. Acesse o GeoGebra.

2. Na caixa de Entrada, digite a função cujo gráfico deseja esboçar. Veja o exemplo!



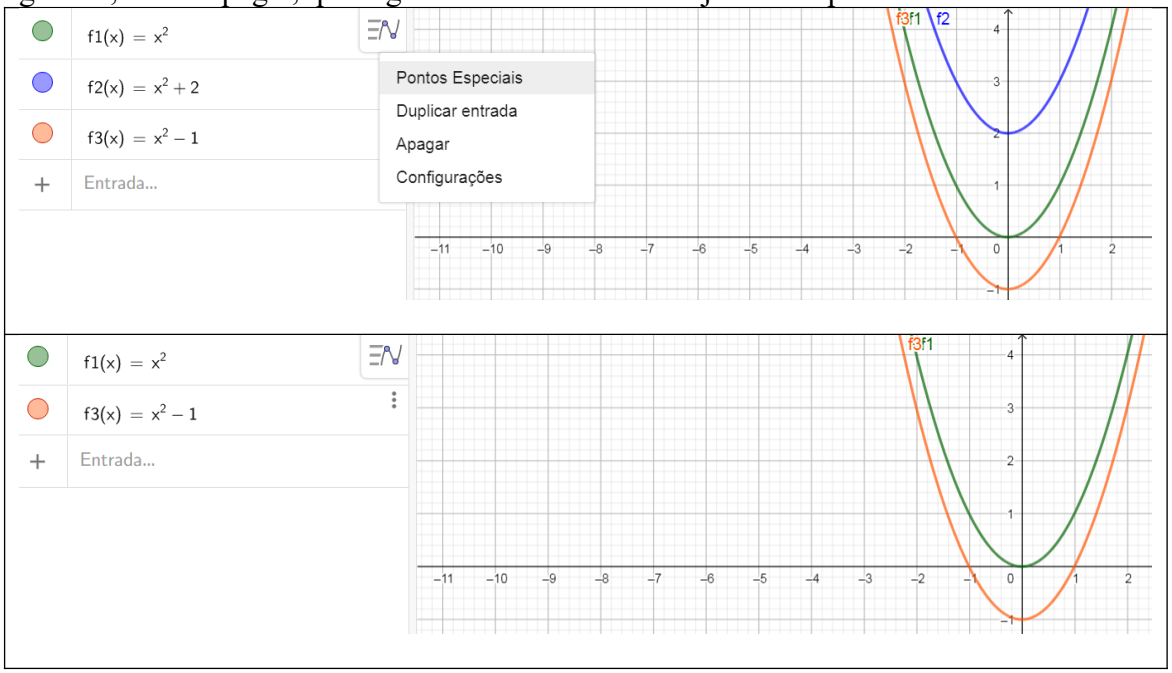
Observe que a função foi nomeada como $f1=x^2$. Esta é uma opção. Você pode digitar somente a lei da função, x^2, que o software nomeia automaticamente por f, g, h,... Ao clicar Enter aparece o círculo com a cor em que o gráfico foi plotado, a expressão da função $f1(x)=x^2$ e uma nova caixa de entrada.

3. Para gerar um novo gráfico, uma nova expressão deve ser digitada na nova caixa de entrada. Veja o exemplo!



Observe que na medida em que vamos inserindo novas funções, cada gráfico é gerado em uma cor.

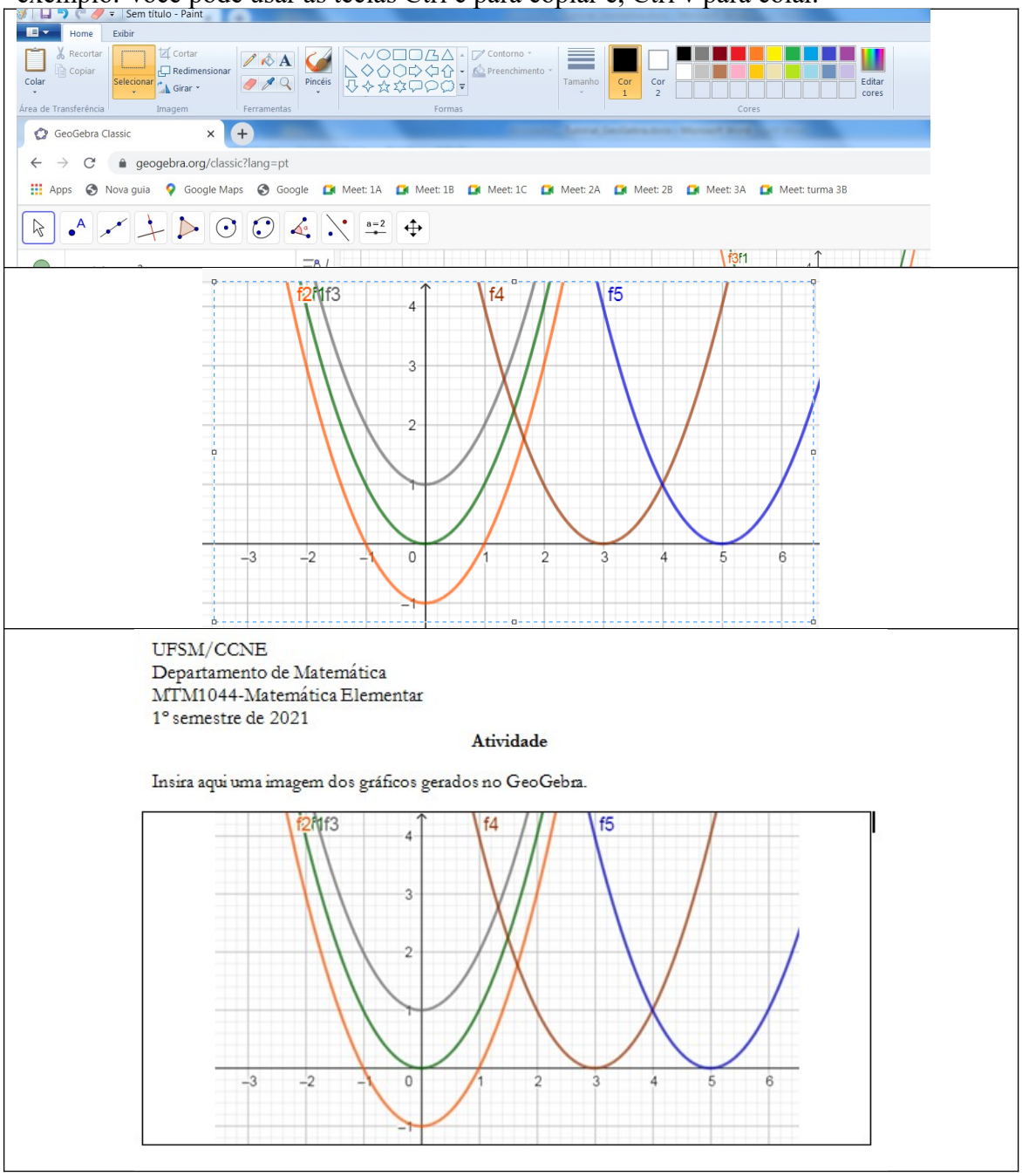
4. Para excluir um gráfico, pode clicar, a direita no mouse, nos três pontinhos ao lado do gráfico, ir em Apagar, que o gráfico será excluído. Veja o exemplo!



Observe que neste exemplo, apagamos a função f2.

5. Caso queira copiar a imagem gerada com a construção dos gráficos para um arquivo, você pode fazer um Print Screen da tela e inserir em um arquivo. Caso queira selecionar apenas uma parte da tela, selecione a tecla Prt Sc, abra o Paint, selecione colar, vá em Selecionar,

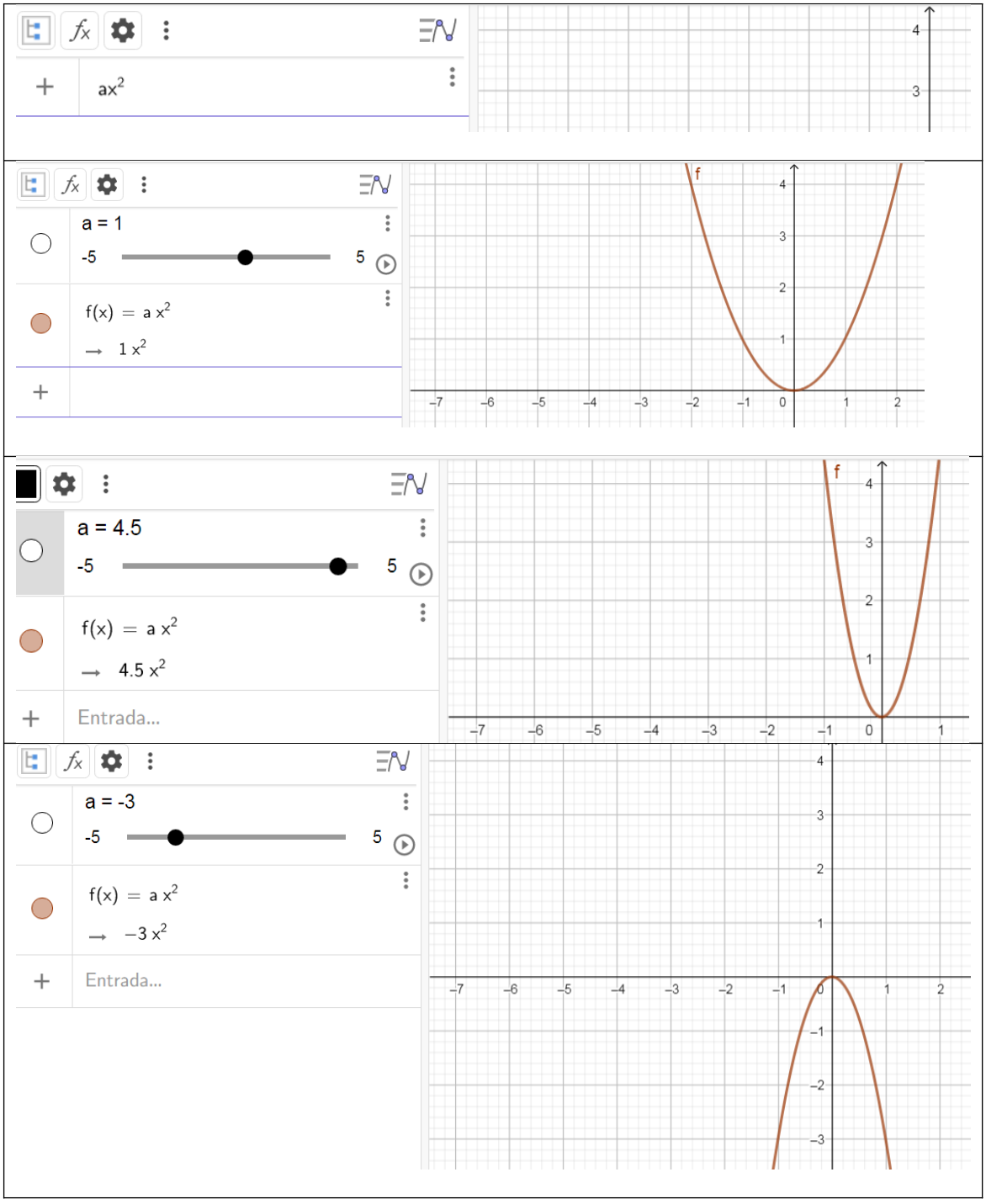
selecione a parte do print da tela de seu interesse, copie e após cole em um arquivo Word, por exemplo. Você pode usar as teclas Ctrl c para copiar e, Ctrl v para colar.



Observe que após gerar os gráficos no GeoGebra e executar o Print Screen, selecionamos a parte do gráfico para inserir em um arquivo Word.

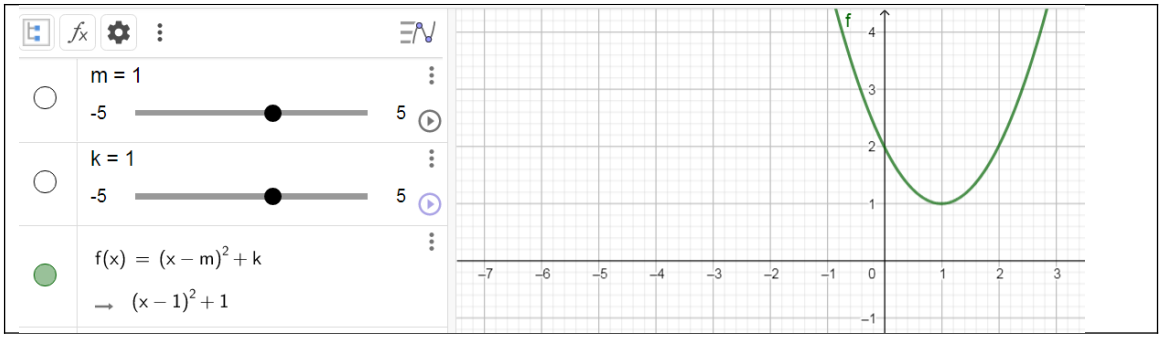
Isto também pode ser feito com o uso de celulares. De acordo com a marca, há comandos que devem ser dados para copiar a tela e selecionar.

6. Para utilizar os controles deslizantes, inserimos a função com os parâmetros que irão variar. Veja o exemplo!



Após inserir a lei da função $f(x)=ax^2$, e clicar Enter, automaticamente o software cria um controle deslizante para o parâmetro a, de -5 a 5. Ao movimentar o cursor, no controle deslizante, vamos obtendo os gráficos para diferentes valores de a.

Você pode utilizar mais de um parâmetro. Veja o exemplo com a função $f(x) = (x-m)^2+k$.


m = 1
-5
5
k = 1
-5
5
f(x) = (x − m)² + k
→ (x − 1)² + 1
f
4
3
2
1
−1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3