

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Kaique Silveira Viana Costa

**ANÁLISES DO DESEMPENHO DE AERONAVES CONSIDERANDO OS
MODELOS DE TERRA ESFÉRICA GIRANTE E TERRA PLANA**

Santa Maria, RS
2022

Kaique Silveira Viana Costa

**ANÁLISES DO DESEMPENHO DE AERONAVES CONSIDERANDO OS MODELOS DE
TERRA ESFÉRICA GIRANTE E TERRA PLANA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. André Luís da Silva

COORIENTADOR: Prof. Pedro Paglione (ITA)

Santa Maria, RS
2022

Kaique Silveira Viana Costa

**ANÁLISES DO DESEMPENHO DE AERONAVES CONSIDERANDO OS MODELOS DE
TERRA ESFÉRICA GIRANTE E TERRA PLANA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

Aprovado em 4 de fevereiro de 2022:

André Luís da Silva, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Marcelo Serrano Zanetti, Dr. (UFSM)

Guilherme Soares e Silva, MSc. (ITA)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Tatiana e Adriano, e aos meus avós, Iraildes e Edvaldo, por todo o apoio envolvido no processo para que eu pudesse manter meus estudos.

Agradeço ao meu co-orientador, Pedro Paglione, por toda a dedicação, auxílio, e ensinamentos. Este foi o empenho que tornou este sonho realidade.

Agradeço aos meus irmãos Tácio, Saimon e Rafael pela amizade e momentos de diversão, me distraindo da saudade de ficar longe da família.

Agradeço à minha noiva, Caine Silva, por ter paciência, amor e carinho comigo por toda minha trajetória. É uma felicidade incondicional te ter ao meu lado a cada vitória.

Agradeço à Universidade Federal de Santa Maria, por prover toda a estrutura necessária para minha formação, garantindo um ensino de qualidade.

Agradeço ao meu orientador, André Luis da Silva, pelos ensinamentos que me permitiram cumprir aquilo que planejei realizar neste trabalho.

Agradeço aos professores da UFSM que me proporcionaram o valioso conhecimento que carregarei por toda a vida.

Agradeço aos professores que de alguma forma contribuíram para minha caminhada até o presente momento, me oferecendo além do conhecimento a sabedoria e educação.

Agradeço à meu eterno professor Carlos Henrique Patente Andrade, por ter evidenciado para mim que Deus distribuiu dons aos homens.

Agradeço ao meu supervisor de estágio e futuro colega de trabalho, Guilherme Soares e Silva, pela amizade e parceria, e pela oportunidade de fazer parte do ITA.

Agradeço aos meus amigos, antigos e novos, por terem feito parte desta caminhada.

"O futuro pertence aqueles que acreditam na beleza de seus sonhos".

(Eleanor Roosevelt)

RESUMO

ANÁLISES DO DESEMPENHO DE AERONAVES CONSIDERANDO OS MODELOS DE TERRA ESFÉRICA GIRANTE E TERRA PLANA

AUTOR: Kaique Silveira Viana Costa
ORIENTADOR: André Luís da Silva
COORIENTADOR: Pedro Paglione (ITA)

O modelo de Terra plana é atribuído satisfatoriamente somente em aeronaves comuns. Com o desenvolvimento do setor aeronáutico e surgimento de veículos hipersônicos de alto desempenho, ou em voos de longa duração, torna-se necessário o estudo do modelo de Terra esférica e as equações do movimento relacionadas. Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica e fundamentação teórica dos modelos citados, bem como aplicações nessa linha de estudo a simulações em regimes de voo planado, voo reto e nivelado e voo em curva coordenada. Por fim, são estabelecidas as conclusões provenientes das simulações e determinados possíveis trabalhos a serem desenvolvidos nesta linha de estudo.

Palavras-chave: Aeronaves. Desempenho. Esférica. Hipersônicos. Plana. Terra.

ABSTRACT

AIRCRAFT PERFORMANCE ANALYSIS CONSIDERING THE SPHERICAL ROTATING EARTH AND FLAT EARTH MODELS

AUTHOR: Kaique Silveira Viana Costa

ADVISOR: André Luís da Silva

CO-ADVISOR: Pedro Paglione (ITA)

The Flat Earth model is satisfactorily assigned only on common aircraft. With the development of the aeronautical sector and the emergence of high performance hypersonic vehicles, or in long duration flights, it becomes necessary to study the spherical Earth model and the related equations of motion. This work presents a bibliographic review and theoretical foundation of the mentioned models, as well as applications in this line of study to simulations in gliding, straight and level flight and coordinated curve flight regimes. Finally, the conclusions from the simulations are established and certain possible works to be developed in this line of study are established.

Keywords: Aircraft. Earth. Flat. Hypersonics. Spherical. Performance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Qualidades de voo de uma aeronave convencional.	17
Figura 3.2 – Relações de controle e resposta.	18
Figura 3.3 – Aproximação de Terra plana.	18
Figura 3.4 – Referenciais ECI, ECEF e LVLH.	19
Figura 3.5 – Forças atuando na aeronave.	21
Figura 3.6 – Ângulos de Euler.	22
Figura 3.7 – Movimento angular relativo.	26
Figura 3.8 – Cinemática de rotação.	27
Figura 3.9 – SRV com respeito ao LVLH.	31
Figura 3.10 – SRP com respeito ao LVLH.	32
Figura 4.1 – Cronograma de atividades.	38
Figura 5.1 – Planeio em máximo alcance de um planador genérico.	41
Figura 5.2 – Planeio em máxima autonomia de um planador genérico.	41
Figura 5.3 – Planeio em máximo alcance de uma aeronave motorizada genérica.	42
Figura 5.4 – Planeio em máxima autonomia de uma aeronave motorizada genérica. .	42
Figura 5.5 – Aceleração de Coriolis em função da velocidade.	44
Figura 5.6 – Voo reto e nivelado com modelos de Terra esférica girante e não girante.	45
Figura 5.7 – Voo reto e nivelado com modelo de Terra plana.	46
Figura 5.8 – Voo reto e nivelado com modelos de Terra esférica girante e não girante em voo intercontinental.	47
Figura 5.9 – Voo curvilíneo com modelo de Terra esférica.	48
Figura 5.10 – Voo curvilíneo com modelo de Terra plana.	49
Figura 5.11 – Representação 3D do voo curvilíneo com modelo de Terra plana.	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Relação de referências e conteúdos de interesse apresentados.	15
Tabela 5.1 – Dados de um planador genérico.	40
Tabela 5.2 – Dados de uma aeronave motorizada genérica.	40
Tabela 5.3 – Resultados do voo de planeio.	43
Tabela 5.4 – Dados da aeronave hipersônica.	43
Tabela 5.5 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra esférica.	45
Tabela 5.6 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra plana.	45
Tabela 5.7 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra plana em voo intercontinental.	47
Tabela 5.8 – Resultado da simulação do voo curvilíneo com modelo de Terra esférica.	48
Tabela 5.9 – Resultado da simulação do voo curvilíneo com modelo de Terra plana. ...	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ECEF</i>	<i>Earth Centered Earth Fixed</i>
<i>ECI</i>	<i>Earth Centered Inertial</i>
<i>LVLH</i>	<i>Local Vertical Local Horizontal</i>
<i>NASA</i>	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
<i>NED</i>	<i>North East Down</i>
<i>SRA</i>	<i>Sistema de Referência Aerodinâmico</i>
<i>SRV</i>	<i>Sistema de Referência do Vento</i>
<i>SRI</i>	<i>Sistema de Referência Inercial</i>
<i>SRP</i>	<i>Sistema de Referência propulsivo</i>
<i>SFC</i>	<i>Specific Fuel Consumption</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Aceleração
g	Aceleração da gravidade
g₀	Aceleração da gravidade ao nível do mar
H	Altitude
α	Ângulo de ataque
δ	Ângulo de latitude celeste
ψ	Ângulo de guinada
α_T	Ângulo de incidência propulsiva
λ	Ângulo de longitude celeste
l	Ângulo de longitude planetária
S	Área de referência
γ	Ângulo de trajetória
A	Azimute de velocidade
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
c	Consumo específico de combustível
μ	Deflexão lateral da tração em relação a $x_v y_v$
ϵ	Deflexão lateral da tração sobre $x_v y_v$
ρ	Densidade do ar
r	Distância do corpo ao centro da Terra
F_a	Forças aerodinâmicas
D	Força de arrasto
L	Força de sustentação
f_y	Força lateral
P	Força peso
f_T	Força propulsiva
F_R	Força resultante

m	Massa
C	Matriz de transformação
p	Quantidade de movimento
R_c	Raio da curva em voo curvilíneo
r_0	Raio da Terra
T_{rot}	Tempo de rotação da Terra
T	Tração
V	Velocidade
ω	Velocidade angular
V_r	Velocidade relativa

Utiliza-se ϕ para ângulo de rolamento no modelo de Terra plana e para ângulo de trajetória, ou elevação, no modelo de Terra esférica. Entretanto, essa definição só é utilizada no desenvolvimento das equações, e nas simulações a notação é uniformizada para o modelo de Terra esférica.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	13
1.1.1	Objetivos específicos	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
3.1	MODELO DE TERRA PLANA	20
3.2	MODELO DE TERRA ESFÉRICA	25
3.2.1	Cinemática de translação nos referenciais planetários	25
3.2.1.1	<i>Derivada de um vetor com respeito a um referencial girante</i>	26
3.2.1.2	<i>Velocidade e aceleração relativas</i>	27
3.2.1.3	<i>Equações diferenciais de cinemática de translação</i>	28
3.2.2	Dinâmica de translação nos referenciais planetários	30
3.2.2.1	<i>Sistema de Referência do Vento</i>	31
3.2.2.2	<i>Sistema de Referência Propulsivo</i>	32
3.2.2.3	<i>Forças aerodinâmica, propulsiva e gravitacional</i>	32
3.2.2.4	<i>Equações diferenciais de dinâmica de translação</i>	34
3.2.3	Considerações	36
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	38
5	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	39
5.1	VOO PLANADO	39
5.2	VOO RETO E NIVELADO	42
5.3	VOO EM CURVA COORDENADA	47
5.4	OBSERVAÇÕES DAS SIMULAÇÕES	50
6	CONCLUSÕES	51
6.1	TRABALHOS FUTUROS	51
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

1 INTRODUÇÃO

O comportamento temporal de uma aeronave é obtido integrando as equações do movimento. Nesse sentido avalia-se a cinemática da aeronave, que relaciona as posições e velocidades, e a dinâmica, com as acelerações e forças resultantes sobre um veículo.

Durante a graduação, os estudos do desempenho de aeronaves são direcionados majoritariamente para as equações do movimento considerando modelo de aproximação da Terra plana. Na aplicação prática da engenharia este modelo também é amplamente utilizado, salvo em problemas específicos como a localização do veículo no globo. Por apresentar maior simplificação ao utilizar coordenadas retangulares em vez de coordenadas esféricas, bem como não ser necessário incluir efeitos das acelerações de Transporte e Coriolis advindos da rotação da Terra, são de mais fácil entendimento. Entretanto, em veículos de alta potência esse modelo não se mostra tão exato quanto para aeronaves comuns.

Uma outra aplicação muito importante deste estudo são os voos de longo alcance. Quando se considera uma viagem intercontinental é necessário avaliar o alcance e a autonomia de aeronaves com o modelo de Terra esférica pois este apresenta maior precisão. Neste caso os pequenos efeitos são integrados para um longo período de tempo.

Com o avanço da tecnologia aeronáutica, a realidade de aeronaves hipersônicas se torna cada vez mais próxima. Nesse contexto, o presente projeto de pesquisa trata do estudo, modelagem e possíveis aplicações do modelo mais completo de Terra esférica em aeronaves que atuam em regime de velocidades hipersônicas e elevado deslocamento.

1.1 OBJETIVOS

O problema a ser estudado é baseado nos pontos previamente levantados e pode ser resumido nas seguintes questões:

- Até quando é viável um ganho de complexidade pelos resultados a serem obtidos com um modelo de Terra esférica girante?
- O que pode ser desenvolvido com a utilização desse modelo para fins de resultados de maior precisão?

Dessa forma, os objetivos levantados tratam do estudo e comparação de resultados da simulação numérica do desempenho de uma aeronave com aplicação dos modelos de Terra esférica girante e Terra plana.

1.1.1 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são pontuados da seguinte forma:

- Realizar revisão bibliográfica sobre os sistemas de referência de Terra esférica e aproximação de Terra plana;
- Buscar um modelo de aeronave para implementação do estudo;
- Implementar os estudos realizados em simulações numéricas no MATLAB;
- Verificar os resultados e relatar as observações.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fundamentação teórica foi feita com base no estudo do tema em diversas bibliografias. Dessa forma, buscou-se livros e artigos que tratassem do desenvolvimento e aplicação das equações do movimento considerando os referenciais de Terra esférica e Terra plana.

Tabela 2.1 – Relação de referências e conteúdos de interesse apresentados.

	Terra plana	Terra esférica
[Xu, Mirmirani e Ioannou (2004)]		X
[McClamroch (2011)]	X	
[Cook (2012)]	X	X
[Vinh (1995)]		X
[Roskam e Lan (1997)]	X	
[Tewari (2007)]		X
[Camillo e Almeida (2013)]		X

Fonte: Autor

Xu, Mirmirani e Ioannou (2004) apresentam em seu artigo um controlador deslizante adaptativo multi-entrada/multi-saída projetado e analisado para a dinâmica longitudinal de um veículo aéreo hipersônico genérico. Para realizar as simulações, utilizou-se as condições de voo em cruzeiro a uma altitude de 110000 pés e Mach 15, onde são avaliadas as respostas do veículo a uma mudança gradual na altitude e na velocidade relativa do ar. Para realizar a implementação do estudo deste trabalho utilizou-se o modelo de aeronave deste artigo, bem como as condições de altitude e velocidade.

McClamroch (2011) trata dos princípios fundamentais de voo estável de aeronaves e desempenho de voo. Assim, este livro fornece um tratamento completo e unificado de cada uma das propriedades de voo da aeronave, também ilustrando a integração das abordagens teóricas e computacionais e a interpretação física dos resultados como parte de uma investigação completa da análise de voo estável e desempenho de voo de uma aeronave. Esta foi a principal bibliografia utilizada para tratamento do sistema de referência com aproximação de Terra plana.

Cook (2012) foca no estudo das qualidades de voo e manuseio em aeronaves convencionais. Dessa forma, também se preocupa muito com a estabilidade, controle e características dinâmicas que são fundamentais para a determinação dessas qualidades. Este livro deriva modelos matemáticos que descrevem aeronaves em termos de funções de transferência aerodinâmicas para então realizar simulações em MATLAB. Utilizou-se de forma auxiliar para formular possíveis trabalhos futuros que envolvam simulações com modelo de referência de Terra esférica e controle de aeronaves.

Vinh (1995) desenvolve as equações do movimento utilizando ambos os referenci-

ais. Primeiro, o autor interpreta o referencial de Terra esférica e girante, ressaltando as contribuições das acelerações de transporte e de Coriolis. Em seguida, com simplificações, o autor considera a Terra como estática, sem o movimento de rotação. Por fim, com aproximações, chega ao modelo de Terra plana. O estudo dirigido pelo autor, como ressaltado, tem aplicações importantes em aeronaves de alta potência, em voos de longo alcance e autonomia, e em voos orbitais. Esta foi a principal bibliografia utilizada para tratamento do sistema de referência de Terra esférica.

Roskam e Lan (1997) apresentam os fundamentos de aerodinâmica, propulsão e desempenho de aeronaves de asa fixa em voo atmosférico. Assim como McClamroch (2011), o autor apresenta um desenvolvimento das equações do movimento com referencial de Terra plana. Também são apresentados os efeitos de vento, altitude, peso e polar de velocidade. Este livro foi utilizado de forma auxiliar para estudo dos fundamentos de aerodinâmica e desenvolvimento das equações do movimento.

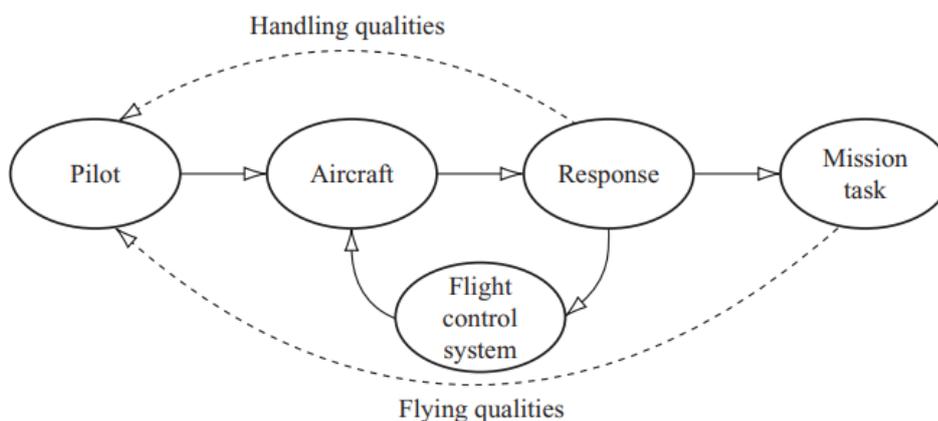
Tewari (2007) proporciona uma das principais bibliografias quando se quer estudar voo orbital. Este livro apresenta abordagem unificada para a dinâmica de voo de aeronaves e espaçonaves. Como o autor diz, veículos aeroespaciais modernos, como o ônibus espacial, outros veículos de lançamento e mísseis balísticos de longo alcance, não discriminam entre voo atmosférico e espacial. O estudo da dinâmica de voo como é apresentada nesta bibliografia é importante para o estudo de trajetórias de aeronaves hipersônicas e trajetórias suborbitais, daí sua contribuição para a revisão bibliográfica.

Camillo e Almeida (2013) apresentam em sua tese de mestrado a análise de estabilidade em malha aberta e uma estratégia de controle ativo para um veículo hipersônico aspirado. Para analisar o comportamento dinâmico da aeronave, considera-se um conjunto de equações de movimento de Seis Graus de Liberdade com o uso de um modelo de Terra esférica em rotação. Assim, por utilizar uma aeronave de alto desempenho em análises de dinâmica de voo esta tese foi incluída na revisão bibliográfica.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Cook (2012), as qualidades de voo e manuseio de uma aeronave são as propriedades que descrevem a facilidade e a eficácia com que responde aos comandos do piloto na execução de uma tarefa de voo ou elemento de tarefa de missão. Dessa forma, as qualidades de voo são formuladas com base na opinião do piloto, onde o mesmo atua com comandos sobre uma aeronave, que responde com um *feedback* sensorial, *Handling qualities* na Figura 3.1. A observação desses sinais possibilita o piloto descrever de forma qualitativa a operação da aeronave e ajustar os controles para que correspondam a missão, *Flying qualities* na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Qualidades de voo de uma aeronave convencional.



Fonte: (COOK, 2012)

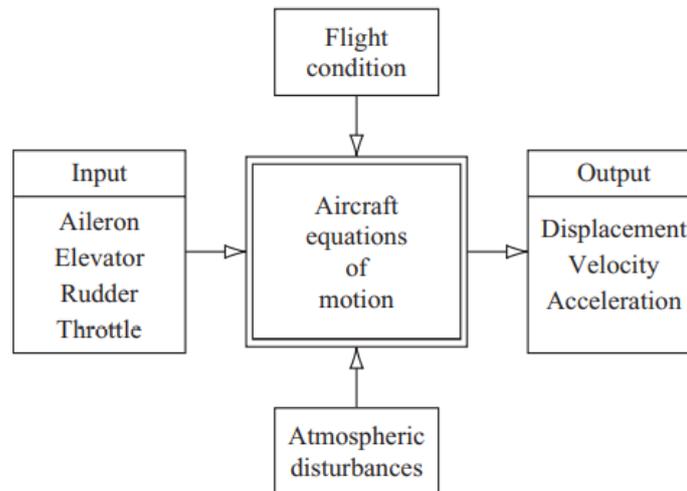
A mecânica de voo é a ciência que prediz o controle e movimento de uma aeronave. Valendo-se da Segunda Lei de Newton, o movimento depende das forças e momentos atuantes no corpo. Assim, para analisar a qualidade de voo de uma aeronave é necessário a modelagem matemática considerando os efeitos pontuados.

A modelagem matemática que descreve o comportamento de uma aeronave em uma tarefa é representada pelas equações do Movimento, que dependem da situação de referência em que a aeronave está sendo analisada. Essas equações fornecem uma representação das respostas aos controles atribuídos à aeronave, medidas em termos de posição, velocidade e aceleração, esquema representado pela Figura 3.2.

A resposta, ou saída, do controle da aeronave pode ser influenciada por perturbações externas, como condições de voo e distúrbios atmosféricos. O ajuste para adequar a aeronave à missão é feito sobre as superfícies de controle (em uma aeronave convencional: aileron, leme e profundor) e a posição da manete de potência.

As condições de referência para a modelagem matemática das equações do movimento dizem respeito ao referencial em que a aeronave se encontra. A simplificação

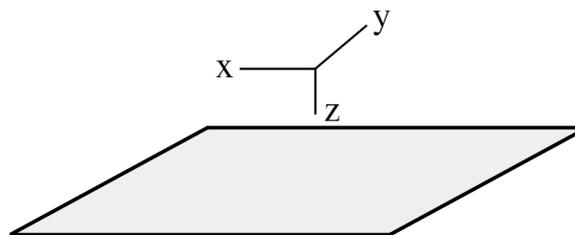
Figura 3.2 – Relações de controle e resposta.



Fonte: (COOK, 2012)

mais usual é o modelo de Terra plana. Também chamado de sistema de referência Local Vertical Local Horizontal (LVLH), a aproximação de Terra plana despreza a curvatura da Terra devido ao baixo descolamento. Assim considera-se a componente de voo horizontal simplesmente paralela ao solo indefinidamente plano. As direções desse sistema de referência tem como abreviação NED (North East Down), onde em sua tradução x aponta para o norte, y para o leste e z para baixo, Figura 3.3.

Figura 3.3 – Aproximação de Terra plana.



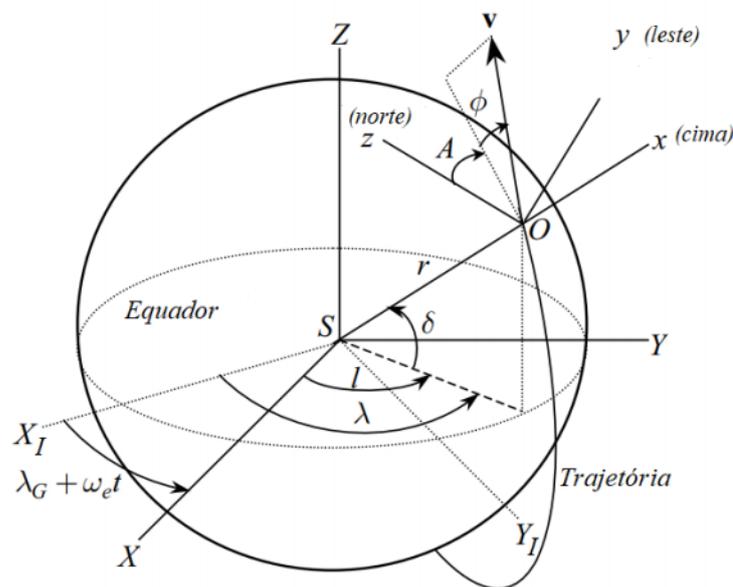
Fonte: Autor

O equacionamento de Terra esférica possui diversos modelos de referência. Uma órbita no referencial celeste utiliza um sistema de coordenadas esféricas pois a mesma possui problemas com simetria esférica. Pode-se anexar à Terra um referencial inercial, ou de "direções inerciais", chamado de referencial celeste, com origem no centro da Terra de acordo com a Figura 3.4. O eixo Z_I aponta para o polo norte, o eixo X_I é normal a Z_I , está contido no plano equatorial do planeta e aponta para a estrela do primeiro ponto de Áries, e o eixo Y_I completa o sistema cartesiano ortogonal dextrogiro. Esse sistema de referência é chamado de inercial centrado na Terra (Earth Centered Inertial, ou ECI).

Assim, considerando a Figura 3.4, tem-se um corpo em órbita à Terra em uma posição no ponto O em um dado instante, onde a origem S desse referencial encontra-se

no centro da Terra. A primeira coordenada é a distância radial r entre S e O . O ângulo δ , entre r e o plano $X_I Y_I$, é chamado de ângulo de latitude celeste ou declinação e possui sentido positivo acima desse plano. A última coordenada esférica é o ângulo λ , chamado de ângulo de longitude celeste, entre a projeção de SO no plano $X_I Y_I$ e o eixo X_I com sentido positivo de acordo com a rotação do eixo Z_I pelo sistema dextrogiro. O ângulo λ é também chamado de ascensão reta quando o astro é a Terra e o eixo X_I aponta para o equinócio vernal (orientado ao longo da interseção dos planos “equador celeste” e eclíptica ao meio dia da primavera no hemisfério norte, ou outono no hemisfério sul).

Figura 3.4 – Referenciais ECI, ECEF e LVLH.



Fonte: Modificado de (TEWARI, 2007)

Ao considerar um referencial com origem no ponto O , é possível definir um horizonte local. Esse sistema funciona com eixo x alinhado com o eixo radial SO , eixo z normal a x apontando para o norte e o eixo y complementa o modelo apontando para o leste. Este referencial, chamado de Local Vertical Local Horizontal (LVLH), é utilizado para descrever as coordenadas da velocidade inercial ou relativa.

Entretanto, o referencial celeste é bastante abstrato pois os eixos X_I e Y_I são referenciados a estrelas e o referencial local horizontal se move com o corpo em sua órbita. Assim, é necessário um modelo que tenha como referência o planeta girante. Nesse trabalho é usado o sistema de referência centrado e fixo na Terra (Earth Centered, Earth Fixed, ou ECEF) com a mesma origem do referencial celeste, o centro da Terra.

No sistema de referência centrado e fixo na Terra, o eixo Z é coincidente com o eixo Z_I do sistema de referência celeste e aponta na direção do polo norte da Terra. Os eixos X e Y estão contidos no plano equatorial, sendo que o primeiro possui direção ao

meridiano de Greenwich e o segundo completa o sistema cartesiano ortogonal dextrogiro. Este sistema é utilizado para medir a posição do corpo em movimento e serve de referência para medir a velocidade relativa. Em torno do eixo Z tem-se a velocidade de rotação deste referencial que é a velocidade de rotação do planeta ω_e .

Para analisar o desempenho de uma aeronave nesse caso são utilizadas as equações do movimento nos referenciais de Terra plana e esférica. Em todas as deduções considera-se uma aeronave pontual sem variação da massa de combustível. As deduções aqui apresentadas tiveram como bibliografias de referência os livros de McClamroch (2011) e Vinh (1995).

3.1 MODELO DE TERRA PLANA

Como apresentado na Figura 3.3, o referencial terrestre provém do sistema de referência LVLH com aproximação de Terra plana. O referencial LVLH é o referencial inercial da Segunda Lei de Newton, desprezando a rotação e a curvatura da Terra. Neste, o eixo inercial z_0 aponta para baixo e os eixos do plano paralelo ao horizonte x_0 e y_0 apontam para o norte e leste, respectivamente.

É adotado, também, um referencial aerodinâmico baseado no movimento da aeronave onde a origem é o próprio centro de massa. O eixo x_a aponta em direção ao vetor velocidade da aeronave, o eixo z_a está contido no plano de simetria longitudinal e o eixo y_a completa o sistema de coordenadas, ortogonal a ambos.

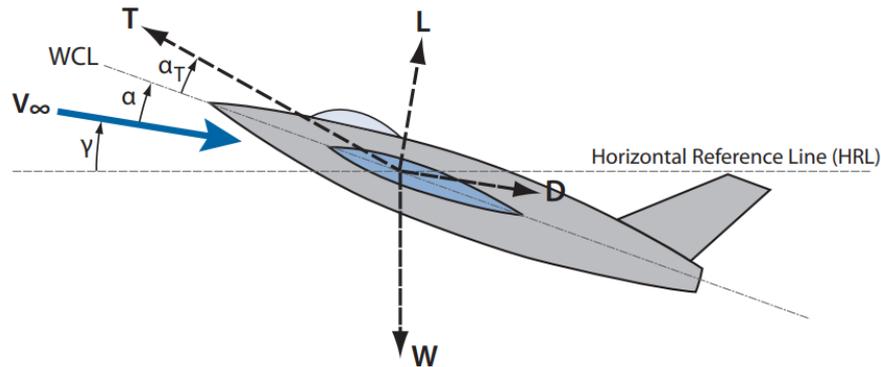
Segundo a Primeira Lei de Newton, um importante princípio da mecânica, um objeto em repouso permanecerá em repouso ou com velocidade constante a menos que seja influenciado por uma força. Dessa forma, as equações do movimento são deduzidas a partir do equilíbrio das forças atuantes na aeronave. Existem dois tipos de forças que podem atuar em um corpo: forças mecânicas aplicadas externamente e forças corporais, causadas pela atração da gravidade e por campos eletromagnéticos e eletrostáticos.

As forças externas incluem o empuxo gerado pelo sistema propulsivo e as forças de resistência aerodinâmica, o arrasto. Outra força externa, que acontece apenas com aeronave em uma superfície fixa, é a componente normal. Nesse caso, a única força corporal que interessa é resultante da ação da gravidade, a força peso. As forças atuantes na aeronave consideradas para a dedução das equações do movimento podem ser observadas na Figura 3.5.

A força resultante gerada pela decomposição das forças diz respeito a variação da quantidade de movimento da aeronave. A Segunda Lei de Newton, pode assim ser derivada conforme mostrado na Equação 3.1.

$$\mathbf{F}_R = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{m}\mathbf{V} + m\dot{\mathbf{V}} \quad (3.1)$$

Figura 3.5 – Forças atuando na aeronave.



Fonte: Adaptada de (NICOLAI; CARICHNER, 2010)

Conforme mencionado anteriormente não é considerada a variação de massa, logo a componente $\dot{m}\mathbf{V}$ é nula. A força resultante deve ser igual ao somatório de todas as forças envolvidas na análise aplicadas em um sistema de eixos de referência para orientar suas componentes vetoriais, Equação 3.2. Nesse caso estão envolvidas as forças aerodinâmicas, propulsiva e o peso da aeronave, todas com a mesma referência.

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_a + \mathbf{T} + \mathbf{P} \quad (3.2)$$

As forças aerodinâmicas de sustentação, com sentido positivo na direção negativa do eixo z , e de arrasto, com sentido positivo na direção negativa do eixo x encontram-se no sistema de referência aerodinâmico.

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{L} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}_a \quad (3.3)$$

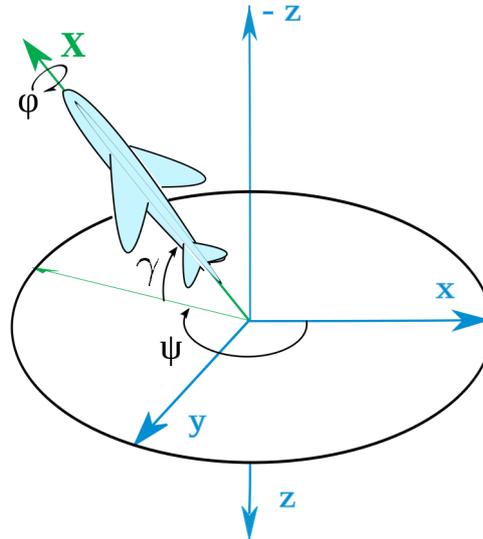
A força propulsiva, como pode ser observada na Figura 3.5, depende da orientação da asa em relação ao escoamento e do posicionamento dos motores em relação a asa: ângulo de ataque, α , e ângulo de incidência propulsivo, α_T . Essa componente também pode ser escrita no SRA.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T \cos(\alpha + \alpha_T) \\ 0 \\ -T \sin(\alpha + \alpha_T) \end{bmatrix}_a \quad (3.4)$$

Por fim, resta declarar a força Peso. Essa componente encontra-se inicialmente no sistema de referência inercial. Para desenvolver as equações do movimento, todas as forças devem estar no mesmo sistema de coordenadas e, para isso, é necessário uma forma de converter a força peso para o sistema de referência aerodinâmico. Segundo Euler,

uma orientação qualquer pode ser obtida a partir de três rotações elementares sucessivas, giros unidimensionais feitos em relação ao eixo.

Figura 3.6 – Ângulos de Euler.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ângulos_de_Euler>

As rotações elementares são feitas em torno dos ângulos de Euler, representados na Figura 3.6. Ocorrem, por ordem, em torno do eixo z pelo ângulo de guinada ψ , obtendo a matriz $C_3(\psi)$; em torno do eixo y pelo ângulo de trajetória γ , obtendo a matriz $C_2(\gamma)$; e em torno do eixo x , pelo ângulo de rolamento ϕ , obtendo a matriz $C_1(\phi)$. Juntas, essas rotações elementares são chamadas de 'sequência 321', e a matriz de transformação dos eixos no sistema inercial para o sistema aerodinâmico é representada pela Equação 3.5.

$$\mathbf{C}_a^0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{C_1(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix}}_{C_2(\gamma)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_3(\psi)} \quad (3.5)$$

Assim, com a matriz de rotação dos ângulos de Euler, é possível converter a força Peso do referencial inercial para o referencial aerodinâmico. A força Peso atua somente no eixo z inercial.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_a &= \mathbf{C}_a^0 \mathbf{P}_0 = \mathbf{C}_a^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_0 \\
&= \begin{bmatrix} -mg \sin(\gamma) \\ mg \sin(\phi) \cos(\gamma) \\ mg \cos(\phi) \cos(\gamma) \end{bmatrix}_a
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Somando a Equação 3.6 com as Equações 3.3 e 3.4 encontra-se a força resultante, lado esquerdo da igualdade na Equação 3.1.

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} T \cos(\alpha + \alpha_T) - D - mg \sin(\gamma) \\ mg \sin(\phi) \cos(\gamma) \\ -T \sin(\alpha + \alpha_T) - L + mg \cos(\phi) \cos(\gamma) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

No lado direito, a derivada da velocidade deve ocorrer no sistema aerodinâmico, de forma que é feito com a soma da derivada desse vetor vista no referencial móvel e o produto vetorial da velocidade angular com o próprio vetor visto no referencial móvel, Equação 3.8. A derivada de um vetor com respeito a um referencial girante, como é apresentada na Equação 3.8, será explicada na seção 3.2.1.1 para evitar o conflito com os referenciais utilizados na dedução.

$$\frac{d\mathbf{V}_a}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_a \tag{3.8}$$

Como a velocidade já se encontra no referencial aerodinâmico, sua derivada parcial é a própria derivada de sua componente, que atua somente no eixo x .

$$\frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

A velocidade angular, derivada dos ângulos de Euler, deve ser escrita no referencial aerodinâmico. Assim, utiliza-se as matrizes de transformação, descritas na Equação 3.10.

$$\boldsymbol{\omega}_a = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\phi) \mathbf{C}_2(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Aplicando as Equações 3.9 e 3.10 em 3.8 é possível desenvolver o lado direito da

Equação 3.1.

$$m\dot{\mathbf{V}} = m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ -V\dot{\gamma} \sin(\phi) + V\dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\gamma) \\ -V\dot{\gamma} \cos(\phi) - V\dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\gamma) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_R \quad (3.11)$$

Por fim, igualando as Equações 3.7 e 3.11 obtém-se as equações do movimento com respeito a dinâmica de translação. Essas são equações diferenciais do primeiro grau com evidência à velocidade, ao ângulo de trajetória e ao ângulo de guinada.

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T \cos(\alpha + \alpha_T) - D - mg \sin(\gamma)}{m} \\ \dot{\gamma} = \frac{(T \sin(\alpha + \alpha_T) + L) \cos(\phi) - mg \cos(\gamma)}{mV} \\ \dot{\psi} = \frac{(F \sin(\alpha + \alpha_T) + L) \sin(\phi) \sec(\gamma)}{mV} \end{cases} \quad (3.12)$$

O vetor de referência da posição tem origem na superfície da Terra. Este é representado por coordenadas cartesianas em 3.13 e relaciona o deslocamento em x_0 e y_0 no plano horizontal e z_0 como deslocamento vertical. Como o eixo vertical é positivo apontando para baixo, pode-se relacionar essa componente com a altura do avião, de forma que $z_0 = -H$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -H \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para desenvolver as equações diferenciais que representam a cinemática de translação são igualados o vetor da velocidade no referencial inercial com a derivada da posição. A velocidade no referencial inercial é obtida com a matriz de rotação da Equação 3.5 transposta, de modo que $\mathbf{C}_a^0 = \mathbf{C}_a^{0T}$.

$$\mathbf{C}_a^{0T} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos(\gamma) \cos(\psi) \\ V \cos(\gamma) \sin(\psi) \\ -V \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Igualando a Equação 3.14 com a derivada do vetor da posição 3.13, são obtidas as relações da cinemática de translação, Equação 3.15.

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = V \cos(\gamma) \cos(\psi) \\ \dot{y}_0 = V \cos(\gamma) \sin(\psi) \\ \dot{H} = V \sin(\gamma) \end{cases} \quad (3.15)$$

As Equações 3.12 e 3.15 compõem as seis equações do movimento para modelo de Terra Plana. Essas são as variáveis controladas, ao passo que geralmente são variáveis de controle o ângulo de ataque ou coeficiente de sustentação, a posição da manete de

potência ou tração do conjunto propulsivo e o ângulo de rolamento da aeronave.

3.2 MODELO DE TERRA ESFÉRICA

No modelo de Terra esférica, a principal hipótese é que o referencial inercial da Segunda Lei de Newton é o ECI, representado pela Figura 3.4, e considera-se a velocidade de rotação da Terra, assim como o raio de curvatura do planeta e o modelo gravitacional com gravidade variando com o quadrado da distância e apontando para o centro do planeta. Como este modelo considera o movimento de rotação da Terra, permite analisar operações em longo alcance. Caso seja necessário uma simplificação, considerações de atmosfera estacionária podem ser aplicadas, situação que será detalhada em seguida.

O modelo considera a posição de uma aeronave representada por um vetor $\mathbf{r}(t)$ em referência ao raio de origem na Terra esférica, velocidade $\mathbf{v}(t)$ como variação da posição e a massa pode também ser variante, $m(t)$. O somatório das forças pode ser representado como na aproximação de Terra plana, Equação 3.2. Entretanto, nesse caso há um modelo para a aceleração da gravidade que compõe o peso, sendo essa variável de acordo com a altitude da aeronave.

Como as aeronaves de alto desempenho podem ser analisadas com esse modelo, e podem voar a elevadas altitudes, vale ressaltar que em voo orbital no vácuo as forças aerodinâmicas podem ser desconsideradas. Este não é o caso das simulações deste trabalho, visto que trata-se de um voo em elevada altitude, porém ainda dentro da atmosfera. Como se trata de uma modelagem tridimensional, conclui-se que a dinâmica do sistema será analisada com um conjunto de três variáveis da posição e três da velocidade.

Pode-se levar em conta a variação da massa da aeronave, devido à queima de combustível. Nesse caso, há uma sétima equação diferencial, devido a variação de massa da aeronave ao longo do tempo.

3.2.1 Cinemática de translação nos referenciais planetários

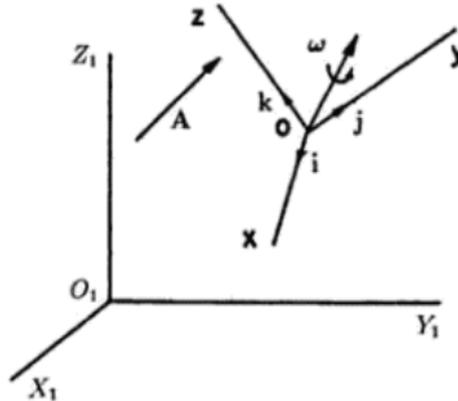
A relação cinemática de translação, como uma definição geral, relaciona a derivada da posição com o vetor velocidade, assim como na Equação 3.16. O enunciado geral da Segunda Lei de Newton é o mesmo da Equação 3.1, e a variação da posição da aeronave é a sua velocidade, mas o desenvolvimento das equações será diferente, visto que a derivada da velocidade deve ser calculada com respeito ao referencial ECI.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.16)$$

3.2.1.1 Derivada de um vetor com respeito a um referencial girante

Como as equações são desenvolvidas em relação a um referencial fixo e girante é necessário transformar a derivada do vetor de posição em um sistema também girante. Esse procedimento, representado pela Figura 3.7, é semelhante ao descrito no modelo de Terra plana.

Figura 3.7 – Movimento angular relativo.



Fonte: (VINH, 1995)

Considera-se o sistema fixo $OX_1Y_1Z_1$ e outro sistema $Oxyz$, rotacionando com respeito ao sistema fixo com velocidade angular ω . Na Figura 3.7 i , j e k são vetores unitários ao longo dos eixos do sistema rotativo. Assim, é determinado um vetor genérico $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ com as componentes A_x , A_y e A_z ao longo dos eixos rotativos.

Como $Oxyz$ está girando, seus vetores unitários associados i , j e k são funções do tempo. Portanto, a derivada no tempo de \mathbf{A} , tomada em relação ao sistema fixo, é dada pela Equação 3.17.

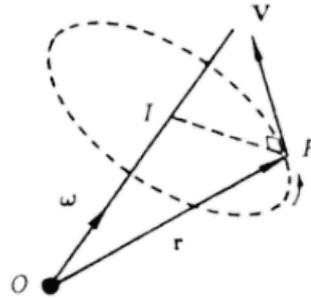
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \right) + \left(A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right) \quad (3.17)$$

O ponto P representado na Figura 3.8 com posição no vetor \mathbf{r} fixo em um sistema que está girando com velocidade angular ω terá velocidade linear representada pela Equação 3.18.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r} \quad (3.18)$$

Se \mathbf{r} é tomado como o vetor i , j e k respectivamente, tem-se as fórmulas de Pois-

Figura 3.8 – Cinemática de rotação.



Fonte: (VINH, 1995)

son representadas pela Equação 3.19.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \frac{dj}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \\ \frac{dk}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \end{cases} \quad (3.19)$$

Usando as relações de Poisson no vetor genérico, vê-se que o segundo termo do lado direito da Equação 3.17 é dado pela Equação 3.20.

$$A_x \frac{di}{dt} + A_y \frac{dj}{dt} + A_z \frac{dk}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3.20)$$

Na Equação 3.17 o primeiro termo do lado direito pode ser interpretado como a derivada temporal do vetor \mathbf{A} se os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} forem vetores unitários constantes. Portanto, é a derivada temporal de \mathbf{A} em relação ao sistema rotativo $Oxyz$, dado pela Equação 3.21.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \quad (3.21)$$

Assim, a Equação 3.17 pode ser reescrita como na Equação 3.22. Esta é a fórmula para transformar a derivada do tempo de um sistema para outro sistema rotativo.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3.22)$$

3.2.1.2 Velocidade e aceleração relativas

Na Figura 3.7, a referência inercial $OX_1Y_1Z_1$ possui O no centro gravitacional da Terra esférica, com OX_1Y_1 no plano equatorial. Assume-se que a Terra possui velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ com direção ao longo do eixo Z_1 . Nesse caso, $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do

referencial Centrado e Fixo à Terra (ECEF) com respeito ao referencial com origem no centro da Terra (ECI). Se a atmosfera está em repouso em relação à Terra, então gira com a mesma velocidade angular.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.23)$$

Na Equação 3.23, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é a velocidade vista por um observador no referencial inercial. A velocidade vista por um observador no referencial girante, $\mathbf{v}_r = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}$, é chamada de velocidade relativa. Esta expressão é chamada de "equação da velocidade relativa".

A Equação 3.24 determina a derivada da velocidade com respeito ao referencial inercial, que é a necessária na Segunda Lei de Newton. Esta expressão é chamada de "equação da aceleração relativa". Nesta expressão, $\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial\mathbf{v}_r}{\partial t}$ é a derivada da velocidade relativa vista por um observador no referencial girante, ou seja, a aceleração relativa.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.24)$$

A Equação 3.24 é reescrita de acordo com a Equação 3.25.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}_r}{\partial t} + \underbrace{(-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{(-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))}_{\text{Transporte}} \quad (3.25)$$

Na Equação 3.25, $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade com a qual a Terra está girando. No lado esquerdo tem-se a aceleração inercial e do lado direito a relativa, vista no referencial girante. Verifica-se que a aceleração inercial é o resultado da soma da relativa com mais duas: aceleração de Coriolis e aceleração de Transporte. A aceleração de transporte depende da direção do vetor \mathbf{r} e velocidade de rotação da Terra. Esta aceleração é nula quando \mathbf{r} é colinear com $\boldsymbol{\omega}$, como por exemplo quando o veículo encontra-se nos polos da Terra. O valor máximo da aceleração de transporte é dado quando o veículo está no plano equatorial da Terra. A aceleração de Coriolis depende da magnitude e direção da velocidade do veículo com respeito à Terra, possui valor nulo quando o voo possui direção paralela ao eixo polar e valor máximo quando o voo possui direção ortogonal ao eixo polar.

3.2.1.3 Equações diferenciais de cinemática de translação

Para escrever a cinemática de translação, utiliza-se os referenciais de coordenadas esféricas descritos na Figura 3.4. As deduções são realizadas utilizando diversos vetores em diferentes referenciais, mas o sistema LVLH é preferencial, de forma que para evitar carregar a notação quando um vetor for escrito neste sistema, nesta seção seu sub-índice será omitido.

O vetor posição do veículo centrado no ponto O em relação ao ponto S no centro

do planeta é escrito no referencial LVLH de acordo com a Equação 3.26.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Esta posição deve ser transformada do referencial LVLH para o ECEF, por meio de uma matriz de transformação. A partir da Figura 3.4 observa-se que é preciso realizar duas rotações sucessivas: a primeira rotação pelo ângulo l em torno do eixo Z no sentido dextrogiro, com matriz elementar $C_3(l)$; e a segunda pelo ângulo δ em torno do eixo y no sentido negativo dextrogiro, com matriz elementar $C_2(-\delta)$. Assim a matriz de transformação do referencial LVLH para o ECEF pode ser descrita pela Equação 3.27.

$$\mathbf{C}_{ecef}^{lvlh} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(-\delta) & 0 & -\sin(-\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\delta) & 0 & \cos(-\delta) \end{bmatrix}}_{C_2(-\delta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(l) & \sin(l) & 0 \\ -\sin(l) & \cos(l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_3(l)} \quad (3.27)$$

A posição pode ser escrita no referencial ECEF multiplicando a matriz de transformação em 3.27 pelo vetor de posição no referencial LVLH, em 3.26.

$$\mathbf{r}_{ecef} = \mathbf{C}_{ecef}^{lvlh} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \delta \cos l \\ r \cos \delta \sin l \\ r \sin \delta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Derivando o vetor da posição, obtém-se a velocidade escrita no referencial ECEF. Esta pode ser desmembrada em função da derivada vista no referencial LVLH usando a regra da derivada em referenciais girantes, Equação 3.29.

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{ecef} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{lvlh} + \boldsymbol{\omega}_{ecef}^{lvlh} \times \mathbf{r} \quad (3.29)$$

Na Equação 3.29, $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{lvlh}$ é a derivada do vetor posição calculada no referencial LVLH e $\boldsymbol{\omega}_{ecef}^{lvlh}$ a velocidade de rotação do referencial LVLH com respeito ao ECEF, Equação 3.30. A rotação elementar \dot{l} acontece em torno do eixo Z do referencial ECEF, para converter utiliza-se apenas a matriz elementar $C_2(-\delta)$ pois \dot{l} está escrita no eixo de rotação Z , não necessitando da matriz de rotação $C_3(l)$. O mesmo acontece com a rotação elementar $-\dot{\delta}$, em que não é necessário realizar transformação de coordenadas.

$$\boldsymbol{\omega}_{ecef}^{lvlh} = C_2(-\delta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\delta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l} \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ \dot{l} \cos \delta \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A velocidade no referencial ECEF em 3.29 pode ser reescrita na Equação 3.31 aplicando a velocidade angular em 3.30.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{l}r \cos \delta \\ \dot{\delta}r \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

O vetor velocidade pode ser escrito diretamente no referencial LVLH de acordo com a Figura 3.4. Para escrever esse vetor, v é a magnitude da velocidade; o ângulo de trajetória, ou elevação, é dado por ϕ e é positivo quando a velocidade está acima do horizonte; e o ângulo A é chamado de Azimute de velocidade, formado pela projeção da velocidade sobre o plano horizontal local e direção norte, com sentido positivo apontando para o leste.

$$\mathbf{v}_{lwh} = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Igualando ambos os vetores de velocidade no sistema de referência LVLH, Equações 3.31 e 3.32, pode-se estabelecer a relação entre as derivadas das coordenadas esféricas distância radial r , longitude planetária l e latitude δ , que determinam a posição no referencial ECEF, e as componentes de velocidade relativa escritas no referencial LVLH: magnitude v , azimute A e elevação ϕ . Este conjunto de equações em 3.33 descreve a trajetória “global” em função de observações locais de velocidade relativa.

$$\begin{cases} \dot{r} = v \sin \phi \\ \dot{l} = \frac{v \cos \phi \sin A}{r \cos \delta} \\ \dot{\delta} = \frac{v \cos \phi \cos A}{r} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.2.2 Dinâmica de translação nos referenciais planetários

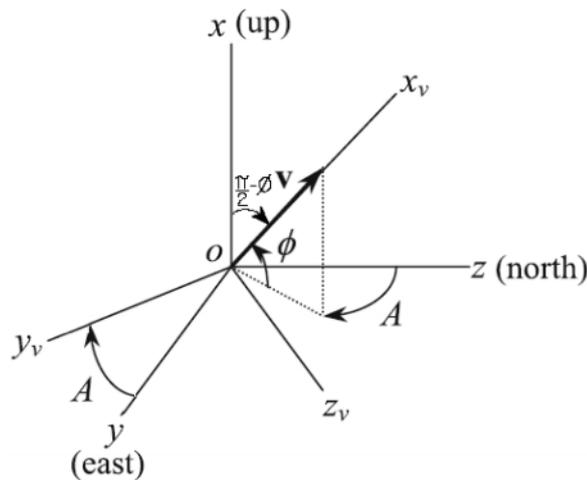
Cada força envolvida na modelagem da dinâmica de translação é escrita em um sistema de referência característico. Para incluir os vetores destas forças nas equações, é necessário que todas estejam escritas no mesmo conjunto eixos, de modo que transformações de coordenadas são necessárias. Além dos referenciais ECI, LVLH e ECEF descritos na Figura 3.4, é necessário definir os sistemas de referência do vento e propulsivo.

3.2.2.1 Sistema de Referência do Vento

O Sistema de Referência do Vento (SRV) é definido com respeito à velocidade aerodinâmica, medida em relação ao ar atmosférico. Como neste trabalho considera-se a atmosfera como estacionária, a velocidade relativa, medida com respeito ao planeta girante, será igual ao vetor velocidade aerodinâmica.

Observando a Figura 3.9, que representa o SRV, têm-se que o veículo tem massa centrada na origem o e o eixo x_v aponta na direção do vetor velocidade relativa v . Nas aplicações, o eixo z_v é definido de forma que esteja contido em um plano de simetria da aeronave, mas aqui este eixo é definido de maneira genérica. Este eixo é definido de forma que o plano $x_v z_v$ seja normal ao plano horizontal (plano yz do referencial LVLH). Por fim, y_v completa o sistema cartesiano dextrogiro.

Figura 3.9 – SRV com respeito ao LVLH.



Fonte: Modificado de (TEWARI, 2007)

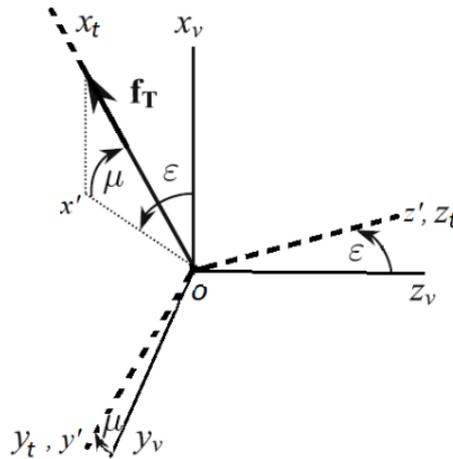
A transformação de coordenadas é realizada por meio de duas rotações elementares da seguinte forma: a primeira rotação é feita por um ângulo A em torno do sistema LVLH no sentido negativo dextrogiro com matriz $C_1(-A)$, gerando os eixos intermediários $y'z'$, com y' coincidente com y_v , e; a segunda rotação é feita por um ângulo $\frac{\pi}{2} - \phi$ em torno do eixo y' intermediário no sentido negativo dextrogiro com matriz $C_2(-(\frac{\pi}{2} - \phi))$, que gira o eixo $x' \equiv x$ até o mesmo coincidir com o vetor velocidade relativa. A matriz de rotação é representada pela Equação 3.34.

$$C_{sr}^{lvlh} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix}}_{C_2(-(\frac{\pi}{2} - \phi))} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{bmatrix}}_{C_2(-A)} \quad (3.34)$$

3.2.2.2 Sistema de Referência Propulsivo

O Sistema de Referência Propulsivo (SRP) possui origem no centro de massa do corpo e serve para apontar a força propulsiva com respeito ao referencial do vento. A Figura 3.10 representa os eixos no SRP, onde x_t aponta na direção da força propulsiva, z_t está contido no plano $x_v z_v$ do SRV e o eixo y_t completa o sistema cartesiano ortogonal dextrogiro.

Figura 3.10 – SRP com respeito ao LVLH.



Fonte: Modificado de (TEWARI, 2007)

A transformação de coordenadas do SRV para o SRP é realizada por meio de duas rotações elementares: a primeira rotação é feita por um ângulo ϵ em torno do eixo y_v no sentido positivo dextrogiro com matriz $C_2(\epsilon)$, gerando os eixos intermediários $x'z'$, e; a segunda rotação é feita por um ângulo μ em torno do eixo z' no sentido positivo dextrogiro com matriz $C_3(\mu)$ até que o eixo x' seja coincidente com a força propulsiva f_T . A matriz de rotação é representada pela Equação 3.35.

$$C_{srp}^{srv} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_3(\mu)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \epsilon & 0 & -\sin \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{bmatrix}}_{C_2(\epsilon)} \quad (3.35)$$

3.2.2.3 Forças aerodinâmica, propulsiva e gravitacional

O vetor de forças aerodinâmicas é escrito no SRV de acordo com a Equação 3.36. Este envolve a força de arrasto D no sentido da velocidade relativa, a força de sustentação L perpendicular a força de arrasto e está contida em qualquer plano vertical local, e a força

lateral, também perpendicular ao vetor velocidade relativa, mas sempre paralela ao plano horizontal local.

$$\mathbf{f}_{a_{srv}} = \begin{bmatrix} -D \\ f_y \\ -L \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A força propulsiva atua ao longo do eixo x_t no SRP de acordo com a Equação 3.37.

$$\mathbf{f}_{T_{srp}} = \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Como todas as forças devem ser decompostas no SRV na escrita das equações do movimento, deve-se multiplicar o vetor da força propulsiva em 3.37 pela matriz de transformação da Equação 3.35 transposta. Assim, a Equação 3.38 representa a força propulsiva escrita no SRV.

$$\mathbf{f}_{T_{srv}} = \mathbf{C}_{srp}^{srp} \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{C}_{srp}^{srp})^T \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_T \cos \epsilon \cos \mu \\ f_T \sin \mu \\ -f_T \cos \mu \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Observa-se pela Figura 3.10 e pela Equação 3.38 que o ângulo μ está associado com a deflexão lateral da tração em relação ao plano $x_v z_v$, gerando uma componente lateral de tração na direção do eixo y_v . O ângulo ϵ está associado com uma deflexão da tração sobre o plano $x_v z_v$.

A força gravitacional é detalhada de acordo com a gravidade g de um planeta esférico, que atua na direção do centro de massa do planeta na direção radial com sinal negativo. Esta é representada no referencial LVLH de acordo com a Equação 3.39, onde m é a massa do veículo.

$$\mathbf{f}_{g_{lvh}} = m \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Para converter a força gravitacional ao SRV usa-se a matriz de transformação descrita na Equação 3.34. Assim, a Equação 3.40 representa a força gravitacional no SRV.

$$\mathbf{f}_{g_{srv}} = \mathbf{C}_{srv}^{lvh} \mathbf{f}_{g_{lvh}} = \begin{bmatrix} -mg \sin \phi \\ 0 \\ mg \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.2.2.4 Equações diferenciais de dinâmica de translação

A Segunda Lei de Newton utilizada para descrever a dinâmica de translação é descrita na Equação 3.41, onde $\sum \mathbf{F}$ corresponde ao somatório de todas as forças externas que agem sobre o corpo.

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (3.41)$$

A velocidade \mathbf{v}_i é a velocidade inercial do centro de massa instantâneo. Para diferenciar a velocidade inercial utiliza-se o referencial ECI, representado na Figura 3.4, onde \mathbf{v} é a velocidade relativa com respeito ao referencial ECEF. Assim, somando a velocidade relativa com a velocidade devido à rotação do referencial ECEF com respeito ao ECI obtêm-se a velocidade inercial, Equação 3.42.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_{eci}^{ecef} \times \mathbf{r} \quad (3.42)$$

Os vetores \mathbf{r} e \mathbf{v} , respectivamente representados pelas Equações 3.26 e 3.32, não possuem sub-índices pois estão escritos no sistema de referência LVLH, aos quais assim como na definição das equações de cinemática de translação, são omitidos.

Para converter a velocidade angular do sistema de referência ECEF para o LVLH utiliza-se a transposta da matriz de transformação descrita na Equação 3.27. A Equação 3.43 representa a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{eci}^{ecef}$, onde ω_e é a magnitude da velocidade de rotação do planeta.

$$\boldsymbol{\omega}_{eci}^{ecef} = \mathbf{C}_{lvlh}^{ecef} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} = (\mathbf{C}_{ecef}^{lvlh})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta \\ 0 \\ \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Substituindo os vetores definidos e realizando os cálculos necessários, pode-se reescrever a Equação 3.42 da velocidade inercial escrita no referencial LVLH de acordo com a Equação 3.44.

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

A diferenciação do vetor da velocidade inercial no referencial LVLH é feita de acordo com a Equação 3.45 com respeito a um referencial girante. Nesta, $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right|_{lvlh}$ é calculada segundo um observador no referencial LVLH e $\boldsymbol{\omega}_{eci}^{lvlh}$ é a velocidade angular do referencial LVLH com respeito ao referencial ECI.

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right|_{eci} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right|_{lvlh} + \boldsymbol{\omega}_{eci}^{lvlh} \times \mathbf{v}_i \quad (3.45)$$

A velocidade angular ω_{eci}^{lvlh} é dada pela soma das velocidades angulares das Equações 3.30 e 3.43.

$$\omega_{eci}^{lvlh} = \omega_{ecf}^{lvlh} + \omega_{eci}^{ecf} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta + \dot{l} \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ \dot{l} \cos \delta + \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A derivada da velocidade inercial, parte esquerda da Equação 3.45, é a aceleração inercial, composta por componentes nos eixos relacionados $\mathbf{a}_i = [a_x, a_y, a_z]^T$. Realizando os cálculos necessários encontra-se equações que combinam as derivadas das coordenadas esféricas da velocidade (\dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$) com derivadas das coordenadas de posição (\dot{r} e $\dot{\delta}$). Estas últimas podem ser substituídas pelas relações de cinemática de translação, Equação 3.33.

As equações resultantes são expressas no referencial LVLH. As derivadas das coordenadas de velocidade estão acopladas: em a_x , constam \dot{v} e $\dot{\phi}$; em a_y e a_z constam \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$. Isso faz com que tais equações não determinem de maneira explícita a dinâmica de translação. Assim, utiliza-se a transformação da aceleração inercial para o SRV com o objetivo de explicitar \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$ por meio da matriz de transformação da Equação 3.34, obtendo a aceleração inercial no SRV na Equação 3.47.

$$\mathbf{a}_{i_{srv}} = \begin{bmatrix} a_{x_v} \\ a_{y_v} \\ a_{z_v} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{srv}^{lvlh} \mathbf{a}_i \quad (3.47)$$

A Segunda Lei de Newton é aplicada no SRV. Utiliza-se a aceleração inercial no SRV representada pela Equação 3.47 no lado direito da Equação 3.41. No lado esquerdo aplica-se o somatório das forças desenvolvidas ao longo desta seção: força aerodinâmica, Equação 3.36; força propulsiva, Equação 3.38 e; força gravitacional, Equação 3.40. Estas aplicações são feitas de acordo com a Equação 3.48.

$$\begin{bmatrix} -D \\ f_y \\ -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_T \cos \epsilon \cos \mu \\ f_T \sin \mu \\ -f_T \cos \mu \sin \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \sin \phi \\ 0 \\ mg \cos \phi \end{bmatrix} = m \mathbf{a}_{i_{srv}} = m \begin{bmatrix} a_{x_v} \\ a_{y_v} \\ a_{z_v} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

As equações de dinâmica de translação são definidas explicitando da Equação 3.48

as componentes \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{1}{m}(-D + f_T \cos \epsilon \cos \mu - mg \sin \phi) + \\ \quad -r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi) \\ \dot{A} = \frac{1}{mv \cos \phi} (f_y + f_T \sin \mu) - \frac{1}{v \cos \phi} 2v\omega_e (\cos A \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi) + \\ \quad \frac{1}{v \cos \phi} \left(r\omega_e^2 \sin A \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \sin A \tan \delta \cos^2 \phi \right) \\ \dot{\phi} = \frac{1}{mv} (L + f_T \cos \mu \sin \epsilon - mg \cos \phi) + \\ \quad \frac{1}{v} \left(2v\omega_e \sin A \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi) \right) \end{array} \right. \quad (3.49)$$

3.2.3 Considerações

Caso o voo em que a aeronave se encontra seja tracionado, há conseqüentemente uma variação na massa da aeronave pela queima do combustível. Esta é representada por 3.50, que descreve a sétima equação diferencial que pode ser incluída nas equações do movimento. A variável c é o consumo de combustível específico (em inglês SFC, Specific Fuel Consumption), intrínseca ao grupo propulsivo.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{c}{g}T \quad (3.50)$$

As forças aerodinâmicas de arrasto e de sustentação são utilizadas em ambos os sistemas de referência, Terra plana e esférica, e são representadas pelas Equações 3.51 e 3.52, respectivamente, onde C_D é o coeficiente de arrasto e C_L é o coeficiente de sustentação.

$$D = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2 \quad (3.51)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S C_L V^2 \quad (3.52)$$

A densidade atmosférica é uma função da altitude, sendo $\rho(r)$ em modelo de Terra esférica e $\rho(H)$ em modelo de Terra plana. A variável que define a altitude no modelo de Terra esférica é dada pela equação $r = r_0 + H$, onde r_0 é o raio médio da Terra e H é a altitude da aeronave com relação a este raio médio. É possível também utilizar $\rho(H)$ no sistema de Terra esférica, basta realizar a conversão apresentada de r para H .

Como o modelo de Terra esférica pode ser aplicado para elevada altitude, considera-se a gravidade como variável em relação a altitude, Equação 3.53, onde g_0 é a aceleração

da gravidade ao nível do mar. No modelo de Terra plana a aceleração da gravidade é constante, tendo valor igual a g_0 .

$$g(r) = \frac{g_0 r_0^2}{r^2} \quad (3.53)$$

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a aplicação dos conhecimentos adquiridos nas bibliografias citadas na seção 2, foram realizadas simulações numéricas com ambos os modelos com a finalidade de estudar os referenciais e comparar os resultados.

Em consonância com a revisão bibliográfica, foram realizadas reuniões quinzenais junto ao co-orientador para desenvolver programas que avaliassem a aeronave em diversas condições de voo com as equações descritas nas seções 3.1 e 3.2, comparando ambos os modelos a partir dos resultados.

As situações analisadas foram:

- Voo planado;
- Voo reto e nivelado;
- Voo em curva coordenada.

O calendário elaborado para o desenvolvimento do projeto do Trabalho de Conclusão de Curso encontra-se na figura 4.1. Esse calendário é separado por meses, onde cada mês é separado por quatro semanas, e diz respeito às atividades que foram desenvolvidas ao longo dos dois semestres referentes ao desenvolvimento do TCC I entre Outubro de 2020 e Fevereiro de 2021 e do TCC II entre Outubro de 2021 e Janeiro de 2022.

Figura 4.1 – Cronograma de atividades.

Atividade	out/20				nov/20				dez/20				jan/21				fev/21			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Projeto de pesquisa																				
Revisão bibliográfica																				
Implementação dos modelos																				
Escrita do TCC I																				
Entrega do TCC I																				
Escolha do tema para TCC II																				
Atividade	out/21				nov/21				dez/21				jan/22				fev/22			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Revisão do TCC I																				
Revisão bibliográfica																				
Revisão das simulações																				
Realizar complementos																				
Escrita do TCC II																				
Entrega do TCC II																				
Defesa																				

Fonte: Autor

5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Como descrito na figura 4.1, juntamente aos estudos desenvolvidos dos conteúdos abordados, foram desenvolvidas aplicações das equações do movimento para ambos os modelos. Os códigos foram desenvolvidos em *software* MATLAB e tiveram a finalidade de habituar com os procedimentos de simulação numérica para aplicações futuras em trabalhos de continuação do TCC. Os resultados obtidos permitiram validar a teoria fundamentada de cada um dos regimes de voo em que a aeronave se encontra.

Nas simulações, utilizou-se a função para integrar as equações diferenciais do movimento "ode15s", pois a função "ode45" apresentou bastante ruído em alguns resultados.

A velocidade de rotação da Terra, utilizada no modelo de Terra esférica pode ser calculada pela Equação 5.1, onde T_{rot} é o tempo para o planeta dar uma revolução, 86400 segundos. Assim, tem-se que a velocidade de rotação é igual a $7.2722 * 10^{-5} \text{ rad/s}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{rot}} \quad (5.1)$$

5.1 VOO PLANADO

O voo em regime de planeio ocorre de forma não-tracionada no plano vertical. Dessa forma, a única variável a ser controlada é o ângulo de ataque da aeronave, que influencia o coeficiente de sustentação. Como o movimento da aeronave é bidimensional, não há ângulo de inclinação lateral ou ângulo de azimute, e o plano vertical gira junto com a Terra, alterando A . Por fim, como se trata de regime permanente não há variação do ângulo de trajetória e a velocidade é também mantida constante.

Como nesse voo se trata apenas de validação de ferramenta das equações de modelo de Terra esférica, não foi utilizada a aeronave de Xu, Mirmirani e Ioannou (2004), bem como a condição inicial de altitude.

Na aplicação do voo planado utilizou-se somente as equações do modelo de Terra Esférica. São utilizadas duas aeronaves genéricas: planador, com dados na Tabela 5.1 e avião motorizado, com dados na Tabela 5.2.

Também é escolhida a forma de planeio que a aeronave deve atuar: máximo alcance ou máxima autonomia. Em máximo alcance, a aeronave deve possuir a maior razão de planeio possível, de modo que a razão entre as distâncias horizontal e vertical percorridas deve ser máxima. O coeficiente de sustentação para o planeio é descrito na Equação 5.2 e, considerando uma polar de arrasto simétrica, onde $C_D = C_{D_0} + KC_L^2$, o coeficiente

Tabela 5.1 – Dados de um planador genérico.

Variável	Valor	Unidade
C_{D_0}	0.017	-
K	0.021	-
m	840	<i>lbm</i>
b	102	<i>ft</i>
AR	20.4	-
S	47.4	m^2

Tabela 5.2 – Dados de uma aeronave motorizada genérica.

Variável	Valor	Unidade
C_{D_0}	0.025	-
K	0.057	-
m	30000	<i>lbm</i>
S	550	ft^2

de arrasto é dado pela Equação 5.3.

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}} \quad (5.2)$$

$$C_D = 2C_{D_0} \quad (5.3)$$

A situação de máxima autonomia trata do maior tempo possível em que a aeronave se mantém em voo. O coeficiente de sustentação associado a essa condição é representado pela Equação 5.4. Considerando a polar de arrasto simétrica, o coeficiente de arrasto é dado pela Equação 5.5.

$$C_L = \sqrt{3 \frac{C_{D_0}}{K}} \quad (5.4)$$

$$C_D = 4C_{D_0} \quad (5.5)$$

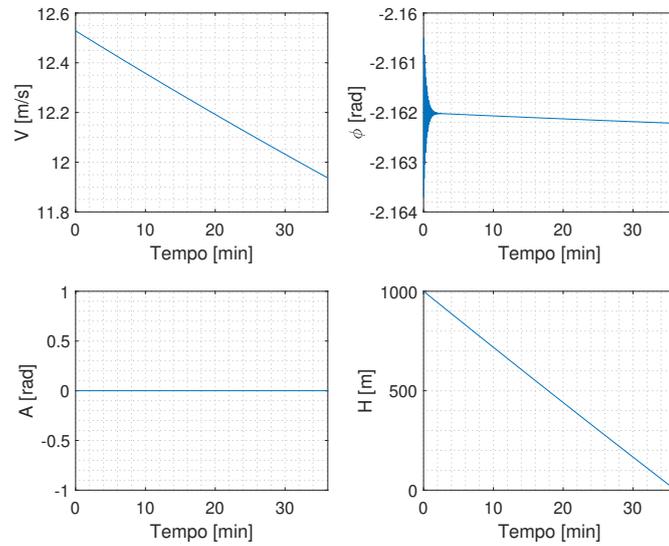
Em todas as simulações, foi definida uma altitude inicial de 1 km e tempo de simulação de 60 minutos. O planador genérico nas situações de máximo alcance e máxima autonomia é representado pelas Figuras 5.1 e 5.2, respectivamente. Nestes gráficos são apresentados os dados de velocidade, ângulo de trajetória, azimute e altitude.

A aeronave motorizada genérica nas situações de máximo alcance e máxima autonomia é representada pelas Figuras 5.3 e 5.4, respectivamente.

Obeve-se assim os resultados da Tabela 5.3.

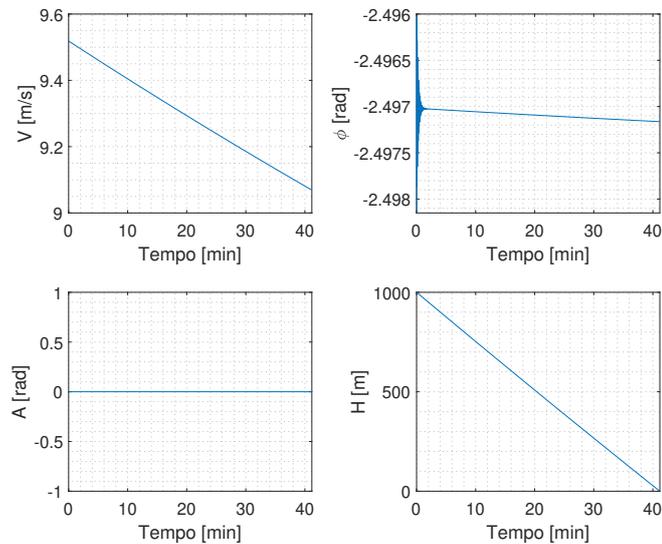
Observa-se em todas as análises uma pequena variação na velocidade e no ângulo de trajetória. Isso se deve a erros numéricos do *software*. O ângulo de guinada permanece nulo em todos os casos e a variação de r , Figuras 5.1 e 5.4, se deve a perda de altitude até

Figura 5.1 – Planeio em máximo alcance de um planador genérico.



Fonte: Autor

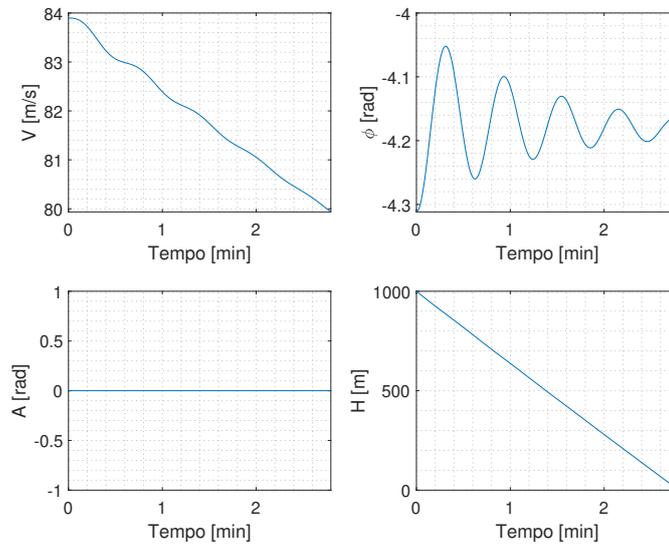
Figura 5.2 – Planeio em máxima autonomia de um planador genérico.



Fonte: Autor

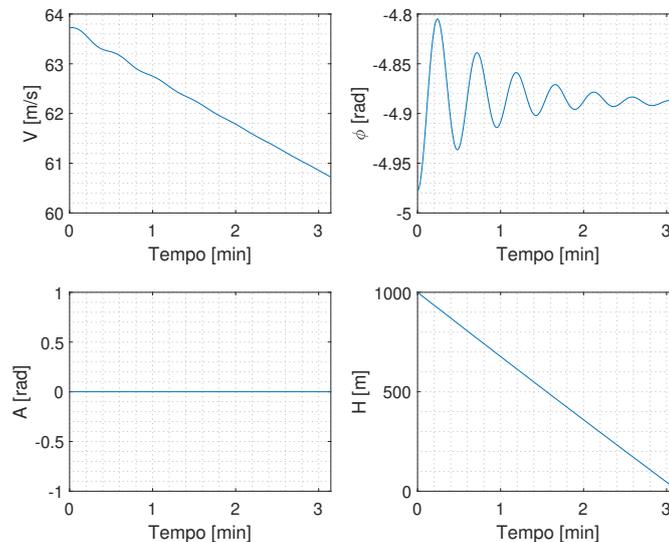
o solo. Neste exemplo, as equações do movimento com modelo de Terra esférica e girante propiciam exatamente os mesmos resultados simulados com o modelo de aproximação de Terra plana previstos, como previsto ao determinar as condições iniciais.

Figura 5.3 – Planeio em máximo alcance de uma aeronave motorizada genérica.



Fonte: Autor

Figura 5.4 – Planeio em máxima autonomia de uma aeronave motorizada genérica.



Fonte: Autor

5.2 VOO RETO E NIVELADO

Segundo McClamroch (2011), o voo reto e nivelado, as vezes referido como voo de cruzeiro, ocorre quando o vetor de velocidade da aeronave é um vetor horizontal constante, de modo que a aeronave se move em uma linha reta em um plano horizontal.

No voo reto e nivelado, tanto o ângulo de trajetória quanto sua variação são nulas. Por não ser acelerado, tem força propulsiva mantida constante, sendo um voo horizontal permanente, ou seja, sem variação da velocidade.

Tabela 5.3 – Resultados do voo de planeio.

Resultados	Planador		Aeronave motorizada	
	Máx. alcance	Máx. autonomia	Máx. alcance	Máx. autonomia
C_L	0.8997	1.56	0.66	1.15
C_D	0.0340	0.068	0.05	0.1
Tempo de voo [min]	36.12	41.17	2.77	3.15
Velocidade [m/s]	12.53	9.52	83.90	63.72
Distância [km]	26.5	22.96	13.60	11.74

Fonte: Autor

A medida que a aeronave queima combustível, há certa variação na massa. Entretanto, nos problemas aqui tratados é mantida a massa constante.

Para esse regime de voo, considera-se deslocamento apenas no plano vertical, tendo assim ângulo de azimute constante (adotado neste exemplo zero por conveniência), bem como sua variação, o que resulta em deslocamento no eixo y igual a zero. Como a trajetória está alinhada com o plano horizontal, o ângulo de trajetória e sua variação também são nulas. No referencial de Terra esférica, r é constante e a trajetória é um arco de círculo. Para tempo pequeno, aproxima-se essa trajetória para uma reta.

Foi utilizado como modelo de aeronave para a simulação um veículo hipersônico desenvolvido pela NASA, dados na Tabela 5.4, utilizado por Xu, Mirmirani e Ioannou (2004) no projeto de um controle de modo deslizante adaptável. Ao contrário da simulação do regime de voo planado, onde a variável a ser controlada é o coeficiente de sustentação, neste é controlado o ângulo de ataque da aeronave.

Tabela 5.4 – Dados da aeronave hipersônica.

Variável	Valor	Unidade
S	3603	ft^2
m	9375	slug

Fonte: Xu, Mirmirani e Ioannou (2004)

Os valores do coeficiente de arrasto e coeficiente de sustentação são funções do ângulo de ataque da aeronave e são representadas pelas equações 5.6 e 5.7, respectivamente.

$$C_D = 0.6450\alpha^2 + 0.0043378\alpha + \underbrace{0.0037720}_{C_{D_0}} \quad (5.6)$$

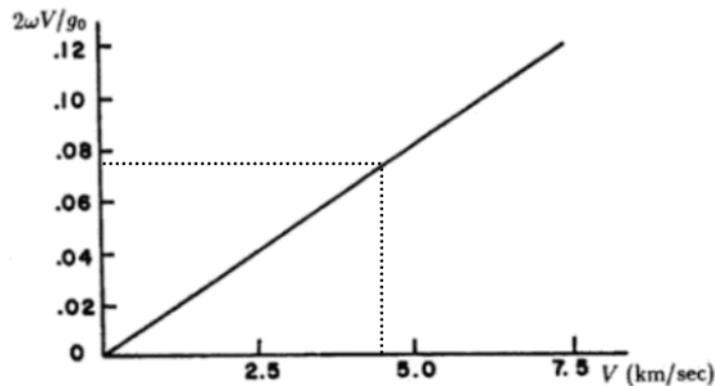
$$C_L = \underbrace{0.6203}_{C_{L\alpha}}\alpha \quad (5.7)$$

São utilizados três modelos para simulação: Terra esférica e girante, Terra esférica não-girante e Terra plana. O programa recebe como entrada a altitude e o Mach em que

a aeronave está operando. A tração calculada é a requerida para vencer o arrasto a essa dada velocidade. Assim como no artigo de Xu, Mirmirani e Ioannou (2004), considera-se Mach igual a 15 e altitude de 110000 pés. O tempo de simulação é de 10 minutos.

Os resultados obtidos para os modelos de Terra girante e não-girante foram idênticos. Isso se deve pois, como a velocidade de rotação da Terra ω calculada pela Equação 5.1 é bastante pequena, o termo que diz respeito a Aceleração de Transporte, $\omega^2 r$ pode ser negligenciado. O termo referente a aceleração de Coriolis, $2\omega V$, tem relevância apenas em velocidades muito altas, como é o caso desta simulação. Sua influência é evidenciada em um tempo muito longo de simulação. A Figura 5.5 retrata a aceleração de Coriolis em função da velocidade e, como observado, tendo Mach 15 e velocidade na faixa de 4 km/s, esse termo encontra-se na ordem de $10^{-2}g_0$. Assim, as equações com modelo de Terra girante se tornam próximas às equações com modelo de Terra não-girante em voos curtos pois o erro não é integrado por um longo período de tempo.

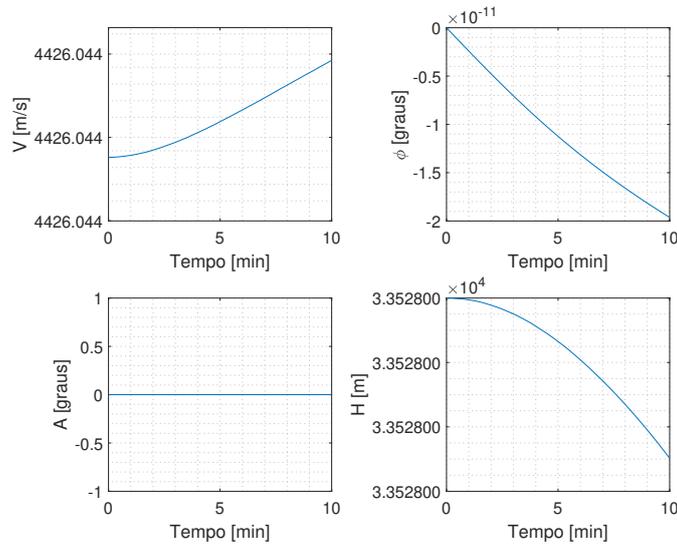
Figura 5.5 – Aceleração de Coriolis em função da velocidade.



Fonte: Modificado de Vinh (1995)

Como os efeitos da aceleração de transporte são imperceptíveis, foi realizada apenas a situação com o modelo de Terra esférica girante, que representa também a Terra estacionária. Os gráficos que ilustram os regimes de voo de Terra esférica girante e não girante são representados pela Figura 5.6. A Tabela 5.5 retrata os resultados obtidos em ambos os modelos.

Figura 5.6 – Voo reto e nivelado com modelos de Terra esférica girante e não girante.



Fonte: Autor

Tabela 5.5 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra esférica.

Variável	Valor	Unidade
C_D	$3.8103 * 10^{-3}$	-
C_L	$3.1308 * 10^{-3}$	-
Tração	1099.81	kN
Velocidade	4426.04	m/s

Fonte: Autor

A simulação em voo reto e nivelado para modelo de Terra plana é representada pela Figura 5.7. A Tabela 5.6 retrata os resultados obtidos com esse modelo, onde estes são os valores resultantes do cálculo de equilíbrio, que são mantidos constantes durante a simulação.

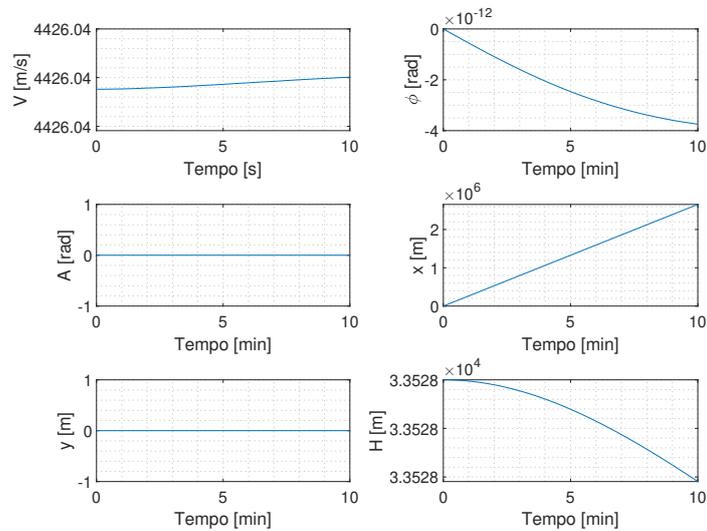
Tabela 5.6 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra plana.

Variável	Valor	Unidade
C_D	$3.8401 * 10^{-3}$	-
C_L	$4.6199 * 10^{-3}$	-
Tração	1108.42	kN
Velocidade	4426.04	m/s

Fonte: Autor

No modelo de Terra esférica girante e não girante é observada uma variação aparente nos gráficos de ϕ , V e H , representados pela Figura 5.6. Isso se deve a erro nu-

Figura 5.7 – Voo reto e nivelado com modelo de Terra plana.



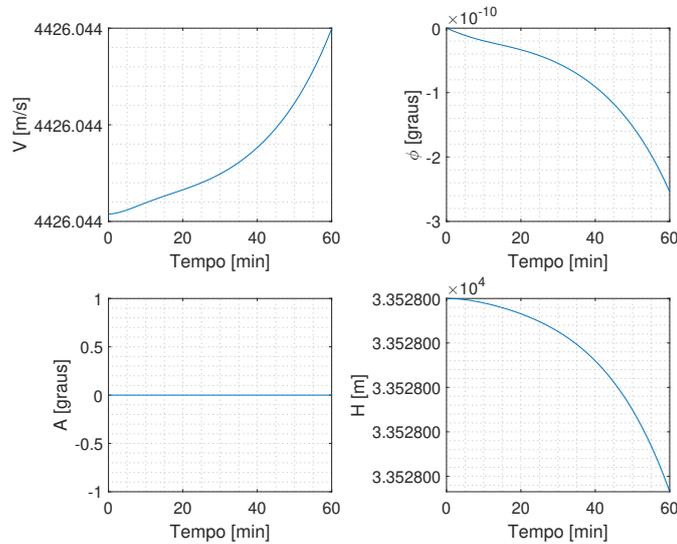
Fonte: Autor

mérico ocorrido pelo *software* durante a integração. O mesmo pode ser observado nos gráficos do modelo de Terra plana, Figura 5.7.

Nos cálculos com o modelo de Terra plana, o C_L é maior, pois a gravidade também é maior por não variar com a altitude. Como o C_L é diferente, conseqüentemente o C_D também muda, tendo valores maiores. Maiores valores de C_D geram também uma maior tração, necessária para contrapor a força de arrasto.

Com o objetivo de evidenciar o efeito do termo referente a aceleração de Coriolis, que possui relevância apenas em um longo tempo de voo, foi realizada mais uma simulação. Considera-se a mesma altitude e velocidade dos exemplos anteriores, mas com um tempo de simulação de 1 hora, pouco menos que um voo intercontinental do Brasil para a Asia, percorrendo metade da curvatura terrestre. O gráfico representado pela Figura 5.8 ilustra a simulação. A Tabela 5.7 retrata os resultados obtidos com esse modelo.

Figura 5.8 – Voo reto e nivelado com modelos de Terra esférica girante e não girante em voo intercontinental.



Fonte: Autor

Tabela 5.7 – Resultado da simulação do voo reto e nivelado com modelo de Terra plana em voo intercontinental.

Variável	Valor	Unidade
C_D	$3.8103 * 10^{-3}$	-
C_L	$3.1308 * 10^{-3}$	-
Tração	1099.81	kN
Velocidade	4426.04	m/s

Fonte: Autor

5.3 VOO EM CURVA COORDENADA

As condições impostas ao voo em curva são as mesmas descritas para voo reto e nivelado. Considera-se a aeronave com ângulo de trajetória nulo, bem como sua variação. Além disso a velocidade também é mantida constante pois se trata de um voo permanente.

Na simulação para voo em curva coordenada são dados os valores da altitude e Mach da aeronave. Assim como para voo reto e nivelado, são atribuídos os valores utilizados por Xu, Mirmirani e Ioannou (2004): altitude de 110000 pés e Mach igual a 15. É atribuído também o raio da curva, R_c , que a aeronave deve realizar com uma velocidade de rotação associada, Equação 5.8.

$$\dot{A} = \frac{V}{R_c} \quad (5.8)$$

O tempo de simulação é encontrado de modo que o avião faça um giro completo em torno do centro do círculo dado pelo raio da curva, Equação 5.9. O raio da curva definido para essa simulação foi de 400 km.

$$T = \frac{2\pi}{\dot{A}} \quad (5.9)$$

Assim como no voo reto e nivelado as equações para Terra esférica girante podem ser aproximadas como não girante sem alteração significativa, de modo que os resultados obtidos são praticamente idênticos. Os gráficos que representam o regime do voo curvilíneo com o modelo de Terra esférica são ilustrados na Figura 5.9. A Tabela 5.8 retrata os resultados obtidos com esse modelo.

Figura 5.9 – Voo curvilíneo com modelo de Terra esférica.

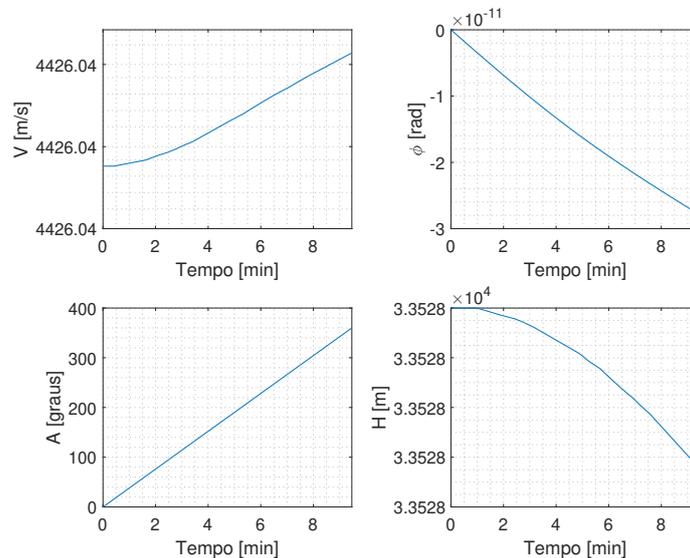


Tabela 5.8 – Resultado da simulação do voo curvilíneo com modelo de Terra esférica.

Variável	Valor	Unidade
C_D	$4.8404 * 10^{-3}$	-
C_L	$2.3246 * 10^{-2}$	-
Tração	1398.09	kN
Velocidade	4426.04	m/s

Fonte: Autor

A simulação em voo curvilíneo para modelo de Terra plana é representada pela Figura 5.10 e a representação 3D do voo pela Figura 5.11. A Tabela 5.9 retrata os resultados obtidos com esse modelo.

Pode-se observar em ambos os modelos, Figuras 5.9 e 5.10, que o valor final de A é igual a 360° , ou seja, a aeronave realiza um giro completo com o raio de curva indicado.

Figura 5.10 – Voo curvilíneo com modelo de Terra plana.

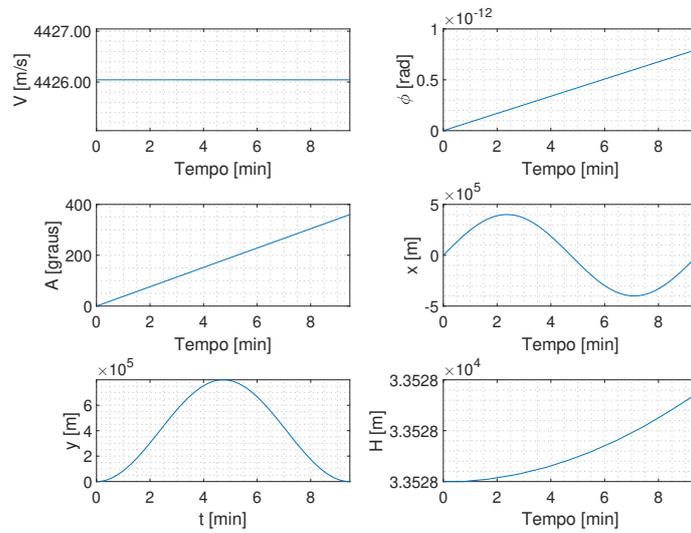
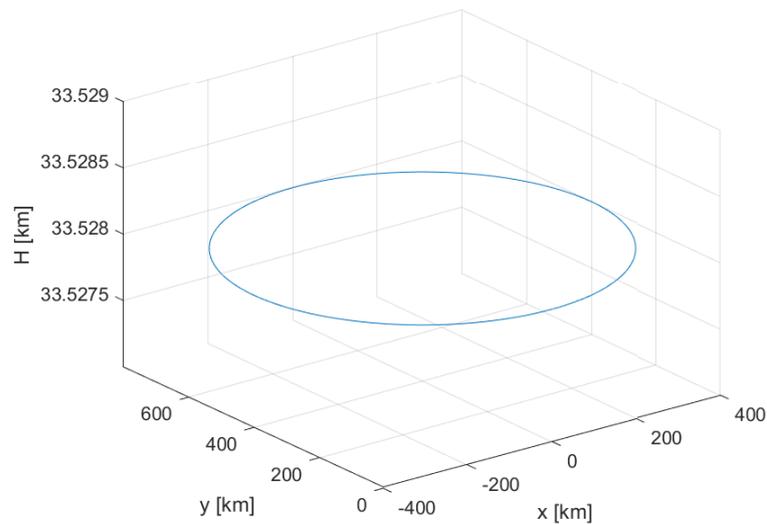


Figura 5.11 – Representação 3D do voo curvilíneo com modelo de Terra plana.



Fonte: Autor

Tabela 5.9 – Resultado da simulação do voo curvilíneo com modelo de Terra plana.

Variável	Valor	Unidade
C_D	$1.8080 * 10^{-2}$	-
C_L	$9.0324 * 10^{-2}$	-
Tração	5274.27	kN
Velocidade	4426.04	m/s

Fonte: Autor

Além disso, observa-se uma variação aparente r , em Terra esférica, H em Terra plana e V e ϕ em ambos, causados por erro numérico do *software*.

Da mesma forma que no voo reto e nivelado, observa-se uma pequena diferença no valor de C_L (que impacta nos valores de C_D e tração). Esse fato é devido à considerar a gravidade constante no modelo de Terra plana.

5.4 OBSERVAÇÕES DAS SIMULAÇÕES

As principais diferenças observadas entre os modelos de Terra esférica e aproximação de Terra plana são:

- Diferença no valor do C_L , devido ao modelo distinto de gravidade;
- Forma de cálculo das trajetórias.

Devido a diferença no cálculo das trajetórias, no modelo de Terra plana são calculadas as coordenadas x e y relativas a um deslocamento sobre o plano horizontal, que se considera constante na medida que a aeronave se desloca. Já no modelo de Terra esférica, o horizonte local muda na medida que a aeronave se desloca, e as coordenadas de translação horizontal são medidas em termos de latitude e longitude planetárias.

Em ambos os casos, modelo de Terra esférica e plana, as condições de equilíbrio calculadas, quando propagadas, são responsáveis por manter a altitude constante durante as simulações.

6 CONCLUSÕES

Os dados obtidos em simulações permitem que uma dinâmica de voo real seja avaliada previamente. Com os modelos matemáticos condizentes com o problema é possível prever e observar fenômenos e situações com relativa acurácia e precisão. A construção de modelos computacionais que imitam processos ou operações do mundo real permitem a observação de efeitos específicos, como é o caso deste trabalho de comparação dos sistemas de referência de Terra esférica e aproximação de Terra plana.

A revisão bibliográfica realizada ao longo do trabalho permitiu um aprofundamento da mecânica de voo e um direcionamento para aplicação em problemas elaborados. Com as simulações realizadas foi possível familiarizar com a programação das equações do movimento e entendimento da física relacionada a cada modelo de voo em que a aeronave se encontra.

Esperava-se que em voo reto e nivelado fosse observado das simulações que, quando considera-se uma situação onde a aeronave encontra-se a elevada altitude e velocidade durante um longo período de voo, o modelo de Terra esférica influenciasse significativamente nos resultados. Isso se deve ao termo da aceleração de Coriolis. Na situação de voo com a altitude e a velocidade indicadas, o termo $2\omega V$ da aceleração de Coriolis possui valores significativos, mostrando sua influência. Como a velocidade de rotação da Terra ω é pequena, o termo referente a Aceleração de Transporte $\omega^2 r$ não influencia nos resultados das simulações com a Terra esférica girante. Por este motivo na última simulação em voo reto e nivelado é usada apenas a condição mais completa de Terra girante. Entretanto, com as simulações em um voo de longo período não foram observadas diferenças, mostrando a necessidade de um estudo mais aprofundado e simulações mais completas.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Um próximo passo na sequência dos estudos é realizar simulações com perturbações nas condições iniciais e nos controles, bem como a inclusão do modelo de rotação, para verificar o impacto dos diferentes modelos de referencial sobre a velocidade de rotação e das superfícies de controle.

É necessário também plotar as trajetórias 3D representadas sobre a superfície do planeta, mostrando que o voo calculado pelo modelo de Terra plana “escaparia pela tangente”, enquanto a translação no modelo de Terra esférica é mais precisa, por levar em conta as coordenadas esféricas de latitude e longitude, representando mais fielmente uma trajetória real no planeta redondo.

Durante o voo, principalmente de longa duração, há bastante variação da massa

total da aeronave resultante do consumo de combustível. Em função desse fator pode-se acrescentar uma sétima equação diferencial que relaciona a variação da massa ao longo do tempo.

Para melhor observação dos modelos pode ser desenvolvida também uma simulação que avalie a aeronave sob altitude, coeficiente de sustentação e velocidade variáveis.

O estudo de desempenho de aeronaves relaciona o veículo como um corpo rígido. Ao incluir todas as equações do movimento (cinemática de translação, cinemática de rotação, dinâmica de translação e dinâmica de rotação), pode-se utilizar este estudo para tratamento de controle automático e sistemas de aumento da qualidade de voo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMILLO, G. P.; ALMEIDA, F. A. de. Longitudinal stability analysis of a hypersonic airbreathing vehicle. 2013.

COOK, M. V. **Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2012.

MCCLAMROCH, N. H. **Steady aircraft flight and performance**. [S.l.]: Princeton University Press, 2011.

NICOLAI, L. M.; CARICHNER, G. E. **Fundamentals of aircraft and airship design, Volume 1—Aircraft Design**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.

ROSKAM, J.; LAN, C.-T. E. **Airplane aerodynamics and performance**. [S.l.]: DARcorporation, 1997.

TEWARI, A. **Atmospheric and space flight dynamics**. [S.l.]: Springer, 2007.

VINH, N. X. **Flight mechanics of high-performance aircraft**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 4.

XU, H.; MIRMIRANI, M. D.; IOANNOU, P. A. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 27, n. 5, p. 829–838, 2004.