

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
ENSINO DE FÍSICA

Bruna Luana Züge

**UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS VISUAIS NA APREENSÃO DE
CONCEITOS DA GEOMETRIA FRACTAL**

Santa Maria, RS
2022

Bruna Luana Züge

**UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS VISUAIS NA APREENSÃO DE CONCEITOS DA
GEOMETRIA FRACTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS
2022

Züge, Bruna Luana

UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS VISUAIS NA APREENSÃO DE
CONCEITOS DA GEOMETRIA FRACTAL / Bruna Luana Züge.-
2022.

102 p.; 30 cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS,
2022

1. Fractais 2. GeoGebra 3. Tecnologias digitais 4.
Formação de professores I. Mathias, Carmen Vieira II.
Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, BRUNA LUANA ZÜGE, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Bruna Luana Züge

**UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS VISUAIS NA APREENSÃO DE CONCEITOS DA
GEOMETRIA FRACTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovada em 04 de outubro de 2022

**Carmen Vieira Mathias, (doutora), UFSM
(Presidente/Orientadora)**

Ricardo Fajardo, (doutor), UFSM

Vandoir Stormowski, (doutor), UFSM

Vania Bolzan Denardi, (doutora), UFSM

Santa Maria, RS
2022

Este trabalho é dedicado à minha família e aos amigos que estiveram ao meu lado. Sem o apoio de vocês eu não teria chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, que me deu força para concluir esta etapa de minha vida.

Agradeço a minha família por todo apoio e amor depositado em mim. Dela tenho os melhores exemplos de amor, respeito e carinho e é por todos eles que busco ser uma pessoa melhor a cada dia.

Agradeço a Universidade Federal de Santa Maria, uma universidade pública, gratuita e de muita qualidade, por ter oferecido esta oportunidade incrível, sendo mais um marco importante na minha carreira profissional e pessoal.

Agradeço aos professores da UFSM que, com muito profissionalismo, paciência e dedicação, compartilharam seus conhecimentos. Um agradecimento especial a Professora Carmen Vieira Mathias, a qual carinhosamente chamo de mãe acadêmica, pois além de professora se tornou uma amiga e companheira para todos os momentos da vida.

Agradeço a todos os amigos que direta ou indiretamente participaram da minha formação, em especial a Sabrina e Renan que, além de colegas, foram meu braço direito, incentivando e auxiliando sempre que possível. A eles o meu eterno agradecimento.

Agradeço aos meus alunos que me fazem acreditar todos os dias, em sala de aula, que a educação é o melhor caminho.

RESUMO

UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS VISUAIS NA APREENSÃO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA FRACTAL

AUTORA: Bruna Luana Züge
ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

Alguns princípios da Geometria Euclidiana são desenvolvidos na escola básica, como por exemplo, conceitos de figuras planas, áreas e volumes. Considerando algumas estruturas que estão presentes na natureza, como por exemplo as nuvens, as montanhas e os relâmpagos, a geometria que se aprende na escola não consegue descrevê-las com precisão. A Geometria Fractal é um ramo da matemática que descreve e modela algumas formas encontradas na natureza, trazendo uma descrição mais apropriada, mas não perfeita, como as exemplificadas. Nesse contexto, a pesquisa aqui desenvolvida possui como objetivo analisar quais procedimentos visuais são utilizados na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos e a Geometria Fractal por professores do Ensino Básico. Para alcançar tal objetivo, realizou-se uma pesquisa do tipo estudo de caso, por meio de uma abordagem qualitativa, em que foi analisado como professores de Matemática da Educação Básica relacionam figuras do tipo fractal e conteúdos matemáticos. Além disso, com o auxílio do software GeoGebra, buscou-se, junto aos professores, o entendimento de conceitos dessa geometria, a partir de uma oficina na qual foram explorados conteúdos matemáticos descritos em documentos como a Base Nacional Comum Curricular, possibilitando um estudo da Geometria Fractal. Nessa investigação pode-se concluir que, durante a realização das atividades propostas na oficina, os participantes utilizaram diferentes processos visuais como a translação e a rotação de figuras. Além disso, o uso do software GeoGebra foi positiva, mesmo os participantes não tendo o total domínio das ferramentas do mesmo.

Palavras chave: Fractais. GeoGebra. Tecnologias digitais. Formação de professores.

ABSTRACT

AN ANALYSIS OF VISUAL PROCESSES IN THE APPRECIATION OF FRACTAL GEOMETRY CONCEPTS

AUTHOR: Bruna Luana Züge
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

Some principles of Euclidean Geometry are developed in basic school, such as concepts of plane figures, areas and volumes. Considering some structures that are present in nature, such as clouds, mountains and lightning, the geometry learned at school cannot accurately describe them. Fractal Geometry is a branch of mathematics that describes and models some forms found in nature, bringing a more appropriate description, but not perfect, such as those exemplified. In this context, the research developed here aims to analyze which visual procedures are used in solving activities involving mathematical content and Fractal Geometry by Basic Education teachers. To achieve this objective, a case study research was carried out, using a qualitative approach, in which it was analyzed how Mathematics teachers in Basic Education relate fractal-type figures and mathematical content. In addition, with the help of the GeoGebra software, the understanding of concepts of this geometry was sought with the teachers, based on a workshop in which mathematical contents described in documents such as the National Common Curricular Base were explored, enabling a study of the Fractal Geometry. In this investigation, it can be concluded that, during the activities proposed in the workshop, the participants used different visual processes such as translation and rotation of figures. In addition, the use of the GeoGebra software was positive, even though the participants did not fully master its tools.

Keywords: Fractals. GeoGebra. Digital Technologies. Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 –	Brócolis Romanesco.....	28
FIGURA 2 –	Conjunto de Cantor.....	30
FIGURA 3 –	Triângulo de Sierpinski.....	30
FIGURA 4 –	Triângulo de Sierpinski construído a partir do Jogo do Caos.....	31
FIGURA 5 –	Floco de Neve (versão da Curva de Koch).....	32
FIGURA 6 –	Atividade Crescimento de Cubos.....	44
FIGURA 7 –	Página de acesso ao Moodle.....	48
FIGURA 8 –	Acesso ao ambiente Oficina.....	49
FIGURA 9 –	Exemplo ilustrado pelo participante P11.....	61
FIGURA 10 –	Construções dos participantes P7(A) e P6 (B).....	62
FIGURA 11 –	Floco de Neve construído pelo participante P11.....	63
FIGURA 12 –	Comentário de P2 na sugestão de atividade de P3.....	66
FIGURA 13 –	Construção apresentada por P14.....	66
FIGURA 14 –	Construção da atividade de P8.....	67
FIGURA 15 –	Pirâmide de Sierpinski.....	70
FIGURA 16 –	Atividade proposta por P1.....	71
FIGURA 17 –	Contribuição realizada na atividade de P1.....	72
FIGURA 18 –	Atividade proposta por P11.....	72
FIGURA 19 –	Resposta de P11 a sua atividade.....	73
FIGURA 20 –	Construção atividade P1.....	74
FIGURA 21 –	Comentário realizado por P13 em sua atividade.....	75
FIGURA 22 –	Comentário de um participante na atividade de P13.....	75
FIGURA 23 –	Interação do participante P11 no fórum de discussões.....	76

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 –	Dados de identificação das pesquisas.....	20
QUADRO 2 –	Quantidade de Trabalhos por IES.....	21
QUADRO 3 –	Níveis de pesquisas selecionadas.....	21
QUADRO 4 –	Identificação das áreas de conhecimento dos programas de Pós-Graduação.....	22
QUADRO 5 –	Abordagem da Problemática.....	23
QUADRO 6 –	Objetivos das pesquisas estudadas.....	23
QUADRO 7 –	Coleta de Dados.....	24
QUADRO 8 –	Classificações dos fractais.....	33
QUADRO 9 –	Cronograma Oficina Experiências Matemáticas.....	47
QUADRO 10 –	Cronograma de realização da Oficina.....	49
QUADRO 11 –	Distribuição dos participantes de acordo com a Região do País.....	51
QUADRO 12 –	Tarefas módulo Geometria Fractal.....	52
QUADRO 13 –	Categorização.....	55
QUADRO 14 –	Características observadas na realização da Tarefa 1.....	57
QUADRO 15 –	Experiências dos participantes da Oficina Geometria Fractal	61
QUADRO 16 –	Atividades sugeridas pelos participantes no Fórum de construções...	69
QUADRO 17 –	Principais dificuldades encontradas no Módulo Geometria Fractal...	77

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.....	34
--	----

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 –	Grau de instrução.....	56
GRÁFICO 2 –	Conhecimento em relação ao GeoGebra.....	58
GRÁFICO 3 -	Questionamentos sobre a utilização do software em sala de aula.....	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IES	Instituição de Ensino Superior
FURB	Universidade Regional de Blumenau
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES E TESES SOBRE O ENSINO DE FRACTAIS.....	18
3	ASPECTOS TEÓRICOS.....	27
3.1	GEOMETRIA FRACTAL.....	27
3.2	TECNOLOGIAS DIGITAIS NO CONTEXTO DA SALA DE AULA.....	35
3.3	FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE GEOMETRIA.....	39
3.4	SOBRE VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIAS.....	40
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	46
4.1	ESPAÇO DA PESQUISA.....	47
4.2	SUJEITOS DA PESQUISA.....	50
4.3	INSTRUMENTOS.....	51
4.4	PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DE DADOS.....	53
5	ANÁLISES.....	56
5.1	SOBRE OS PARTICIPANTES.....	56
5.2	FORMALISMO MATEMÁTICO.....	60
5.2.1	Características.....	60
5.2.2	Conceito.....	64
5.2.3	Possibilidade didáticas.....	68
5.3	ASPECTOS FORMATIVOS.....	73
5.3.1	Trabalho colaborativo.....	73
5.3.2	Contribuições.....	77
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	79
	REFERÊNCIAS.....	80
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO CONHECENDO OS PARTICIPANTES.....	85
	APÊNDICE B – MATERIAL TEÓRICO DISPONIBILIZADO AOS PARTICIPANTES.....	90
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL.....	92
	APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	94
	APÊNDICE E – TAREFAS.....	96

1 INTRODUÇÃO

A geometria fractal é um meio termo geométrico viável entre a ordem geométrica excessiva de Euclides e o caos geométrico da matemática geral. Baseia-se em uma forma de simetria que antes era subutilizada, ou seja, a invariância sob contrações ou dilatações. A geometria fractal é convenientemente vista como uma linguagem que provou seu valor por seus usos. Seus usos na arte e na matemática pura, sendo sem aplicação prática, podem ser considerados poéticos. Seus usos em diversas áreas do estudo de materiais e de outras áreas da engenharia são exemplos de prosa prática. Seus usos na teoria física, especialmente em conjunto com as equações básicas da física matemática, combinam poesia e prosa elevada. Vários dos problemas que a geometria fractal aborda envolvem mistérios antigos, alguns já conhecidos do homem primitivo, outros mencionados na Bíblia e outros familiares a todo paisagista. (MANDELBROT, 1989, p. 3, tradução nossa).

O excerto acima foi retirado de um texto publicado por Mandelbrot, considerado por Janos (2008) e Barbosa (2005) como um dos pioneiros da Geometria Fractal. Segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot (1924-2010) nasceu em Varsóvia (Polônia). Em 1948 foi estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos e posteriormente trabalhou no centro de pesquisas da *International Business Machines* (IBM).

Mandelbrot (1989) define um fractal como sendo uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. A autossimilaridade traduz-se em obter réplicas menores de uma mesma figura. Mas, antes dele, outros matemáticos já haviam descoberto figuras do tipo fractal. Janos (2008) destaca alguns fractais anteriores, dentre eles o Conjunto de Cantor e a Curva de Koch.

As figuras do tipo fractais possuem várias aplicações, a exemplo disso, citamos Gonschorowski (2007) que traz informações a respeito de imagens que simbolizam o crescimento e a complexidade da natureza. Como destaca Janos (2008, p. 285), esta teoria “é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

Na matemática, segundo Cornelissen e Machado (2019), o francês Gaston Maurice Julia, que nasceu no final do século XIX, estudou conjuntos formados por pontos no plano complexo, cuja órbita por uma função complexa é limitada. Ele descobriu que tais conjuntos podem ser representados por figuras simples como um círculo ou um intervalo na reta real, como podem ser um fractal, dependendo das propriedades da função complexa envolvida. Algo interessante de ser pontuado é que dependendo das funções complexas utilizadas e das iterações realizadas, as geometrias

se tornam complexas e similares às dos neurônios e do sistema circulatório humano. (MINERVINO, 2017).

Tratando-se dos motivos de levar a Geometria Fractal à sala de aula, Barbosa (2005) destaca que, além do senso estético, como vislumbrar as simetrias contidas em arquiteturas e na arte, existem outros fatores a serem considerados. Um dos principais motivos destacados são as deficiências da Geometria Euclidiana para explorar as formas da natureza, a difusão e o acesso às tecnologias, visto que a sociedade se encontra fortemente ligada às mudanças tecnológicas e os conteúdos matemáticos que envolvem o estudo dos fractais.

Ainda no que se refere às aplicações da Geometria Fractal, na própria matemática, temos, por exemplo, as Transformações Geométricas. Stormowski (2008) apresenta uma sequência didática para o Ensino Médio, onde utiliza Transformações Geométricas no processo de construção de figuras fractais. Essas podem ser realizadas com o auxílio de softwares de matemática dinâmica, por meio da análise de figuras fractais, onde é possível visualizar homotetias, translações, rotações, entre outros conceitos.

Pensando no processo de ensinar e aprender o tópico Transformações Geométricas na Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) apresenta conceitos relacionados a esse conteúdo. Para o Ensino Fundamental Anos Iniciais, A BNCC aponta que o ensino de simetria deve ser introduzido por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas, em quadriculados ou no plano cartesiano. Por seu turno, para os Anos Finais, no que se refere ao estudo de transformações na unidade temática Geometria pode ser observado o seguinte trecho:

É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2018, p. 271).

Para o Ensino Médio, o mesmo documento apresenta competências como meio para tratar dos conteúdos. Na Habilidade Específica cinco, referente à Competência um, o texto sugere que o estudo envolvendo as Transformações Geométricas pode ser trabalhado do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio. Na construção de figuras fractais, o processo mais prático de construção em sala de aula é utilizando

transformações geométricas em figuras planas. A exemplificar, o triângulo de Sierpinski, onde a partir de um triângulo inicial são aplicadas rotações e homotetias gerando assim novos triângulos. Em conformidade a isso, a BNCC (Ibid, 2018) aponta que:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 533).

O documento ainda sugere o uso de softwares, para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, para auxiliar na compreensão do conteúdo, tanto de forma visual, quanto na manipulação.

A utilização de softwares é considerada um recurso que facilita a visualização, sendo este um componente efetivo na compreensão dos conceitos geométricos. Dentre os variados softwares de geometria dinâmica, para este trabalho optamos pelo software GeoGebra¹, considerado um software de matemática dinâmica. Este é um dos softwares mais completos para o ensino de Matemática, pois reúne geometria, álgebra, aritmética e cálculo, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015).

Como exemplo do uso de software na geração de figuras fractais, citamos Friske e Mathias (2016), que realizaram a construção de fractais do tipo Dürer utilizando o GeoGebra e pesquisaram sobre as relações dos fractais e Sistemas Dinâmicos.

Nesse contexto, a ideia de trabalhar com o tema fractais, para fins de pesquisa, surgiu no ano de 2017, por meio do projeto de iniciação científica “Dificuldades, obstáculos e possibilidades no ensino e na aprendizagem de Matemática”. Durante o desenvolvimento desse, objetivamos conciliar o uso de tecnologias digitais (TD) com o estudo de elementos da Geometria Fractal. Por este assunto ser pouco visto durante o Ensino Básico e a Graduação, buscamos complementar uma investigação sobre essa geometria e a construção de algumas figuras fractais conhecidas; como, por exemplo, o Triângulo de Sierpinski. (ZÜGE, 2018).

Esse tema deu origem ao Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “A construção de elementos da Geometria Fractal por meio do software GeoGebra”. Nesse foi realizado a construção da representação dos fractais Triângulo de Sierpinski, fractal

¹ <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>

do Terço Médio, Curva C (ou curva de Lévy) e Árvore Pitagórica (fractal do tipo árvore). Todas as construções foram realizadas no referido software.

No TCC não foram elaboradas atividades para a aplicação em sala de aula, apenas foi realizada a análise das construções para constatação de conteúdos matemáticos para possível exploração. Conforme Züge (2019):

Por meio das construções realizadas com o software GeoGebra é possível observar os padrões e identificar a lei de construção presente em cada representação, além de proporcionar imagens que estão muito próximas de um fractal real. Cada representação permite explorar conteúdos matemáticos, sejam eles sequências, formas geométricas que estamos habituados a estudar, ou até mesmo explorar atividades envolvendo conceitos de área e perímetro. (ZÜGE, 2019, p. 44).

A partir dessas construções foi observado o potencial para elaboração de atividades para serem explorados no Ensino Básico.

A proposta inicial deste projeto foi trabalhar diretamente com alunos da Educação Básica por meio de atividades envolvendo figuras fractais. Porém, no final de 2019, todo o mundo foi surpreendido com o aparecimento de um vírus, o da Covid-19, também conhecido como Coronavírus. Desta maneira, 2020 foi um ano de muitas mudanças devido à pandemia instaurada.

Como medida de proteção, estabeleceu-se o uso obrigatório de máscara, a higienização constante das mãos e dos materiais individuais, o distanciamento social e a quarentena. As duas últimas medidas foram as que mais trouxeram impactos na vida de todos os brasileiros.

Escolas, comércios, igrejas, pontos turísticos, entre outros lugares, tiveram suas atividades presenciais suspensas como medida de prevenção contra o vírus. A solução viável para a educação foi, em geral, a utilização de meios tecnológicos para seguir com suas aulas. Assim, a Educação Básica e o Ensino Superior optaram por aulas remotas.

Dessa forma, a proposta deste projeto precisou ser reformulada, já que inicialmente foi pensada para o ensino presencial, o que hoje, mesmo retornando à presencialidade, ainda se torna inviável. Refletindo sobre o processo de adaptação dos professores em relação às aulas remotas, concluímos que seria interessante levar tal proposta diretamente aos professores, por meio de uma oficina realizada de forma remota.

Pensando em criar alternativas que possibilitem a abordagem da Geometria Fractais, surgiu a proposta desta pesquisa que conduz à questão norteadora: Quais

procedimentos visuais são utilizados por professores na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos inerentes ao Ensino Básico e a Geometria Fractal?

Os procedimentos visuais que serão analisados são os considerados em Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018). De acordo com estes autores, a maior parte das investigações em Educação Matemática envolvendo visualização e Geometria refere-se à visualização no espaço tridimensional.

Com base nessa problematização, o objetivo geral desta pesquisa é analisar quais procedimentos visuais são utilizados na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos e a Geometria Fractal por professores do Ensino Básico.

Para atender tal objetivo, analisamos dissertações, teses e artigos científicos, que tratem do tema Geometria Fractal, com o intuito de conhecer habilidades desenvolvidas por outros pesquisadores. Também elaboramos e adaptamos atividades que tiveram como foco explorar os conteúdos de isometrias, partindo da construção e visualização de representações de fractais. Por fim, realizamos uma oficina de formação de professores, que teve por objetivo responder à questão elencada nessa pesquisa. Para tanto, analisamos os dados obtidos, verificando o processo de visualização envolvido no estudo de atividades propostas que utilizem conceitos da Geometria Fractal.

A seguir é apresentada uma breve descrição do que será abordado em cada capítulo desta pesquisa. A Introdução encontra-se neste presente capítulo. No capítulo dois é realizado um mapeamento das pesquisas sobre o tema Geometria Fractal e ensino, por meio de uma busca no Portal de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O capítulo três apresenta os referenciais teóricos que abordam conceitos da Geometria Fractal, Tecnologias Digitais com ênfase na teoria de visualização, sendo ambos os tópicos focados ao ensino dessa Geometria em sala de aula e formação de professores, visto que esta pesquisa possui como foco a análise do entendimento de professores acerca do tema.

No capítulo quatro encontra-se a metodologia utilizada nesta pesquisa, bem como os procedimentos adotados para coleta de dados. No capítulo cinco é descrito o desenvolvimento da oficina, seus materiais, atividades e resultados obtidos a partir da análise dos dados no desenvolvimento das atividades. Por fim, o capítulo seis apresenta as conclusões finais desta dissertação.

2 MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES E TESES SOBRE O ENSINO DE FRACTAIS

Alguns princípios da Geometria Euclidiana são desenvolvidos na Escola Básica, como, por exemplo, conceitos de figuras planas, áreas e volumes. Ao considerarmos algumas estruturas que estão presentes na natureza, como as nuvens, a neve, as montanhas e os relâmpagos, a Geometria que aprendemos na escola não consegue descrevê-las com perfeição. Como já comentado anteriormente, a Geometria Fractal é um ramo da Matemática que descreve e modela algumas formas encontradas na natureza, não as descrevendo com perfeição, mas sim trazendo uma maior aproximação do real.

As figuras do tipo fractais possuem aplicações em várias áreas, como na Matemática, Economia e Saúde. Tais aplicações possibilitam a inserção desse tema em currículos tanto do Ensino Básico quanto do Ensino Superior, contando com pesquisadores explorando o tema Geometria Fractal em seus trabalhos de pesquisa.

Levando em consideração o exposto e considerando pesquisas sobre Geometria Fractal e práticas adotadas em sala de aula, neste capítulo é apresentado um mapeamento sobre este tema ponderando resultados encontrados no Portal² de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)³. Para isso, buscando investigar como outros educadores têm realizado suas pesquisas em Educação Matemática, realizamos em meados de janeiro de 2021 uma consulta no portal cujo objetivo tem proximidade ao tema Geometria Fractal.

A investigação foi realizada por meio de uma abordagem qualitativa, buscando compreender suas propostas com uma certa profundidade. Tal pesquisa possui características do tipo mapeamento, classificada conforme sua natureza como bibliográfica, pois, conforme Gil (2002), o material para análise são trabalhos já elaborados por outros autores.

Em um primeiro momento, utilizando das ferramentas do referido portal, no campo “Buscar” foi digitado “GEOMETRIA FRACTAL” AND “EDUCAÇÃO MATEMÁTICA”, exatamente como descrito. Nessa primeira busca foram encontrados 49 trabalhos entre dissertações e teses. Para esta investigação não foi delimitado um

² <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

³ A CAPES é uma fundação vinculada ao Ministério da Educação do Brasil que atua na expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu em todos os estados brasileiros.

período para busca, pois a quantidade de trabalhos sugerida ao realizar a pesquisa foi um número consideravelmente pequeno.

Dos 49 trabalhos foram descartados 11, pois estes pertencem a Grande Área de Conhecimento: Ciências da Saúde e Linguística, Letras e Artes, os quais não possuem ligação com a área desta pesquisa. Assim, restou um total de 38 trabalhos para serem analisados.

Após a leitura dos resumos, constatamos que dos 38 trabalhos restantes, 25 deles não apresentavam ideias de como trabalhar com a Geometria Fractal ou como a Geometria Fractal poderia ser inserida em sala de aula, tanto no Ensino Básico quanto no Superior. Com isso, restaram 13 trabalhos da busca inicial. Desta seleção, dois trabalhos não estavam autorizados para divulgação e um não foi encontrado em buscas feitas na internet. Na próxima seção serão apresentadas as análises elaboradas bem como os trabalhos selecionados.

2.1 ANÁLISE DE DADOS

Para melhor organização das investigações selecionadas foi realizado o preenchimento de um fichamento das dez pesquisas, onde este formulário foi adaptado de Fiorentini *et al.* (2016). A primeira apresentação das investigações é exposta no Quadro 1, no qual estão disponíveis o título do trabalho, a instituição de Ensino Superior (IES), o ano de defesa e o autor.

Quadro 1 – Dados de identificação das pesquisas

Pesquisa	Título	IES	Ano	Autor
P1	Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhança de Figuras Planas	UFSCar	2010	Antônio do Nascimento Gomes
P2	Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e softwares de geometria dinâmica	UNESP	2005	Flávio Roberto Gouvea
P3	Fractais gerados por sistemas de funções iteradas	UFMS	2015	Edilson de Moura
P4	Geometria fractal no ensino fundamental: inserindo matemática contemporânea nos conteúdos do currículo escolar	FURB	2012	Eliana Einsfeld Krindges
P5	Explorando conteúdos matemáticos da educação Básica com a geometria fractal (séries finais do ensino fundamental e ensino médio)	UFF	2016	William James Erthal
P6	Uma Introdução a Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio: A Geometria dos Fractais	UFRB	2017	Janio Paim de Jesus
P7	Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática	UNESP	2011	Nilson Jorge Baldovinotti
P8	Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica.	UTFPR	2012	Maristel do Nascimento
P9	Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos	UNESP	2012	Rejane Waiandt Schuwartz Faria
P10	O conceito fractal e sua presença pedagógica na educação básica	UFMS	2011	Edilson de Moura

Fonte: Sistematizado pela autora.

Para a identificação dos trabalhos, nomeamos as dez investigações como P1, P2, P3 e assim sucessivamente, facilitando dessa maneira a escrita e a organização da pesquisa. Em uma primeira análise, os dez trabalhos selecionados neste mapeamento datam desde o ano de 2005 até 2017 e estes estão vinculados a programas de sete IES,

sendo a UNESP, com três pesquisas, o maior número, seguida da UFMS com duas pesquisas nessa área, como observado no Quadro 2.

Quadro 2 – Quantidade de Trabalhos por IES

IES	UFSCar	UNESP	UFMS	FURB	UFF	UFRB	UTFPR
QUANTIDADE	1	3	2	1	1	1	1
PESQUISA	P1	P2, P7, P9	P3, P10	P4	P5	P6	P8

Fonte: Sistematizado pela autora.

Outro apontamento com relação ao Quadro 2 trata da sequência de anos de defesa destes trabalhos. É observado que o aumento de pesquisas sobre Geometria Fractal e Educação tem aumentado de 2010 em diante, sendo que das dez investigações duas datam de 2011.

Os próximos detalhamentos referem-se ao nível de pesquisa, área de conhecimento, objetivos, produção de dados, entre outros aspectos. Analisando os níveis e as áreas de conhecimento das pesquisas selecionadas, temos o Quadro 3 no qual é constatado que a maior parte dos trabalhos é em nível de Mestrado Acadêmico e na seleção destas nenhum dos trabalhos é em nível de Doutorado.

Quadro 3 – Níveis de pesquisas selecionadas

Nível da Pesquisa	Quantidade	Pesquisa
Mestrado Profissional (PROFMAT)	3	P3, P5, P6
Mestrado Acadêmico	7	P1, P2, P4, P7, P8, P9, P10
Doutorado	0	-
Total	10	

Fonte: Sistematizado pela autora.

Por sua vez, na identificação das áreas de conhecimento dos Programas de Pós-Graduação (Quadro 4), os trabalhos estão divididos em cinco áreas.

Quadro 4 – Identificação das áreas de conhecimento dos Programas de Pós-Graduação

Área do Conhecimento	Quantidade	Trabalhos
Educação Matemática	4	P2, P7, P9, P10
Ensino de Ciências Exatas	1	P1
Matemática	3	P3, P5, P6
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	1	P4
Ensino de Ciência e Tecnologia	1	P8

Fonte: Sistematizado pela autora.

Sobre a abordagem metodológica das investigações, quatro delas não deixam explícito sua abordagem, a saber P3, P4, P5 e P6. Porém, a partir da leitura dos trabalhos é possível concluir que estas tratam de serem pesquisas Qualitativas. Das demais, uma deixa claro se tratar de uma abordagem Quali-Quantitativo, sendo a investigação P1, onde as respostas dos questionários foram utilizadas para análise Quantitativa. Por sua vez, os trabalhos P2, P7, P8, P9 e P10 utilizam uma abordagem Qualitativa. Conforme Bicudo:

[...] o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito, de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências. (BICUDO, 2006, p. 106).

Essa afirmação pode ser observada nos trabalhos analisados. Eles buscam compreender o que as atividades propostas contribuem para o ensino e aprendizado, a partir do comportamento, respostas e/ou manifestações dos sujeitos da pesquisa.

Todos os trabalhos voltam seus estudos para a Geometria Fractal, sobre como que está, ou não está, sendo apresentada nos currículos; ou, ainda, de que maneira é possível utilizar-se de conceitos dessa Geometria na Educação. Nesse sentido, as pesquisas apresentam problemáticas que deram origem às questões investigativas que norteiam seus trabalhos. No Quadro 5 são apresentadas as classificações referentes à apresentação da abordagem das problematizações.

Quadro 5 – Abordagem da Problemática

ABORDAGEM PROBLEMÁTICA	PESQUISAS
LITERATURA	P2, P3, P4, P5, P6, P10
MEMORIAL	P1, P7, P8, P9

Fonte: Sistematizado pela autora.

Os trabalhos P1, P7, P8 e P9 apresentam a abordagem da problemática por memorial pessoal ou acadêmica do pesquisador, onde muitos relatam suas experiências como docentes e as principais dificuldades encontradas no ensino de Geometria, além da falta de propostas para trabalhar com Geometrias Não Euclidianas. Outros pesquisadores descrevem observações realizadas durante sua trajetória acadêmica, tanto durante a Graduação quanto no Mestrado.

Sobre a abordagem problemática pela literatura, as pesquisas P2, P3, P4, P6 e P10 trazem referenciais teóricos que enfatizam a importância do trabalho com geometrias não euclidianas, citando a Geometria Fractal como um exemplo a ser explorado em sala de aula, além de reflexões sobre o ensino de Geometria no geral.

Com exceção de P3, todas as investigações apresentam a questão norteadora da pesquisa explícita. De maneira geral, ambas buscam trabalhar com a Geometria Fractal de maneira simples e dinâmica. Isso reflete nos objetivos apresentados em cada pesquisa (Quadro 6).

Quadro 6 – Objetivos das pesquisas estudadas

Objetivos	Pesquisa
Desenvolvimento e/ou aplicação de um material didático para explorar a Geometria Fractal	P1, P3, P4, P5, P6, P8,
Apresentar uma estratégia de ensino utilizando softwares de Geometria Dinâmica	P2, P7, P9
Organização do conhecimento sobre o tema Geometria Fractal em livros didáticos	P10

Fonte: Sistematizado pela autora.

Em P10 o autor procurou, por meio de pesquisas em livros didáticos, o conceito fractal na Educação Básica e a forma de apresentação deste ente geométrico. No caso

de P10, os fractais foram o objeto de estudo. Já nas demais investigações, todas apresentam como objetivo o desenvolvimento e apresentação de atividades, sequências didáticas e/ou recursos (no caso das pesquisas desenvolvidas com softwares de Matemática Dinâmica) que permitam explorar o conceito de Geometria Fractal, seus padrões, entre outras questões.

Desenvolver atividades que envolvam padrões ou regularidades, como as encontradas em figuras fractais, auxiliam no processo de visualizar alguma identificação de propriedades, ou seja, uma generalização algébrica, indo de encontro com um dos objetivos gerais da Matemática para o Ensino Fundamental definidos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997).

Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1997, p. 37)

Enfim, sobre a coleta e análise dos dados apresentados nas pesquisas apresentamos o Quadro 7 que elenca os instrumentos utilizados para a coleta dos dados.

Quadro 7 – Coleta de Dados

Instrumentos	Pesquisas
Entrevista	P9
Questionário	P1, P6, P7, P9
Diário de campo	P1, P2, P7, P8
Observação	P1, P4, P8
Relato ou narrativa	P6
Videogravação	P7
Audiogravação	P2, P7, P8
Uso de protocolo ou ficha para coleta de dados	P2, P8
Fotografias	P7, P8
Folhas de atividades	P4, P7
Documentos	P1
Referencias teóricos	P3, P10

Fonte: Sistematizado pela autora.

As análises das coletas de dados que envolveram alunos ou professores ocorreram depois das inserções em sala de aula. Conforme o Quadro 7, os instrumentos mais utilizados foram questionários e diário de campo, seguidos de observação e audiogravação.

Os autores não deixaram explícito o porquê da escolha por esses instrumentos, mas acreditamos ser pelo fato de se tratar de pesquisa qualitativa em que, segundo Tozoni-Reis, a “[...] produção de conhecimentos sobre os fenômenos humanos e sociais interessa muito mais compreender e interpretar seus conteúdos que descrevê-los.” (TOZONI-REIS, 2009, p. 10). Por fim, P5 não especificou os instrumentos de coletas de dados.

Como visto, a realização deste mapeamento sobre Geometria Fractal e sua abordagem na Educação Básica deve-se a aproximação com o tema de pesquisa da autora. Em um primeiro momento é observado a dificuldade de abordar conteúdos sobre Geometria na Educação Básica e parte disso se deve à maneira como o conteúdo é apresentado, estático, sem muitas aplicações, dificultando a visualização de padrões. Em conformidade a isto, Kaleff aponta:

Como professores, sabemos das dificuldades que se apresentam no ensino e à aprendizagem da matemática escolar, principalmente em relação à geometria. Isso se deve a vários fatores, pois embora exista uma intensa relação entre as formas geométricas e o nosso meio ambiente, há bem pouco tempo, nas aulas de geometria, quase não se dava atenção ao estudo das formas. Quando estas eram estudadas, mesmo nas séries do Ensino Fundamental, a ênfase era colocada nas relações métricas e no cálculo de medidas de comprimento de lados ou de medidas de áreas e volumes, geralmente baseados em fórmulas sem significado para o aluno. (KALEFF, 2015, p. 78)

Sobre essa afirmação da autora, podemos repensar o ensino de Geometria em sala de aula, utilizando representações gráficas e construção de figuras geométricas buscando com que o aluno investigue de diferentes maneiras, permitindo desenvolver a habilidade da visualização e interligar a Matemática a outras áreas do saber.

No geral, todas as pesquisas apresentam referenciais teóricos que abordam a conceitualização de figuras fractais e suas principais características. Trabalhar com essas figuras motivam um encanto por suas construções e particularidades e desenvolver atividades, como as elaboradas nas pesquisas analisadas, facilitam a percepção de padrões e regularidades presentes nas figuras fractais. Além disso, este mapeamento possibilita o conhecimento de estratégias utilizadas para inserir a Geometria Fractal em sala de aula.

Desse modo, o mapeamento possibilitou o conhecimento de outras pesquisas já elaboradas sobre o tema, permitindo identificar o que é viável levar para sala de aula. Para exemplificar, temos a utilização de atividades em que os alunos realizam a construção da representação de figuras fractais, utilizando meios tecnológicos ou não.

3 ASPECTOS TEÓRICOS

Nesse capítulo abordaremos os referenciais teóricos utilizados para a realização desta investigação e inicialmente abordaremos sobre o tema Geometria Fractal, sua definição e suas características. Na sequência serão apresentados tópicos que ressaltam a importância e contribuição do uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática e a relação da visualização com o entendimento de conteúdos matemáticos, além da formação de professores como sendo um elemento importante no crescimento pessoal e profissional.

3.1 GEOMETRIA FRACTAL

Na natureza existem simultaneamente a ordem e o caos (JANOS, 2008). À ciência do caos associa-se duas áreas interligadas à Matemática: Sistemas Dinâmicos e a Geometria Fractal. Dessas áreas a que interessa para este trabalho é a Geometria Fractal. De maneira específica, o estudo dessas figuras surgiu com o intuito de melhor compreender a construção/estudo de entidades geométricas que são denominadas fractais.

A palavra caos remete-se a ideia de imprevisibilidade e essa, conforme Janos (2008), está presente em inúmeras situações do nosso cotidiano, como previsão do tempo, mercado financeiro e exemplificando uma situação natural, a formação de uma nuvem, onde fatores como calor, ventos, entre outros, interferem no desenvolvimento.

De acordo com Serra e Karas (1997), os fractais são considerados figuras e com relação a esse conceito os autores apresentam que:

O conceito de figura é muito amplo e abrange, entre outras coisas, as figuras geométricas com que o leitor está familiarizado, como círculo, o retângulo, a esfera, o cone. Dizemos, também, que a imagem de um ente ou de um objeto é uma figura, e assim nos referimos ao desenho de uma flor como figura uma ilustração. (SERRA; KARAS, 1997, p. 5).

Os autores enfatizam a importância entre a diferença de figura e imagem. A primeira conforme Serra e Karas (1997) é utilizada quando nos referimos a um ente geométrico, como por exemplo uma circunferência, que terá propriedades e características que a Geometria lhe confere. Já quando se considera o desenho de uma circunferência feita com régua e compasso temos a imagem dela.

Desse modo, com relação aos fractais, Serra e Karas (1997, p. 6) ressaltam que “[...] é muito mais difícil construir-se a imagem de um fractal bastante próxima do fractal, pois os fractais são geralmente figuras de grande complexidade, com detalhes que se multiplicam em suas partes ínfimas.” Para a construção de imagens fractais podemos contar com o auxílio de softwares, trazendo uma maior precisão, ou uma apresentação aproximada de uma figura fractal pode ser realizada também com régua e compasso.

Uma das características associadas aos fractais é sobre a autossemelhança. Se analisarmos, por exemplo, o brócolis do tipo romanesco, tirando um pedaço dele, veremos que uma parte se assemelha a uma parte maior ou ao todo (Figura 1).

Figura 1- Brócolis Romanesco



Fonte: Dia a Dia Educação⁴ (2019).

Observamos que isso se repete em outras plantas como samambaias e couve-flor, por exemplo. Também pode ocorrer em outros elementos da natureza, como as montanhas.

Outra característica encontrada em alguns fractais é com relação a sua simplicidade da lei de formação, como visto nas palavras de Serra e Karas.

⁴ <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=89&evento=1>

O alto grau de detalhamento e a sua complexidade da estrutura de um fractal não impedem, em geral que eles sejam formados por processos relativamente simples e diretos. Isso possibilita a construção de fractais com base em algoritmos simples. O processo de construção é frequentemente iterativo (isto é, repetitivo) ou recorrente. (SERRA; KARAS, 1997, p. 11).

Porém, por mais que se tenha uma lei de formação simples, não é possível descrever os fractais como lugares geométricos⁵ que possuem pontos ou equações simples. Em conformidade a isso, Assis *et al.* (2008) complementa que ao executar determinado procedimento na construção da figura fractal, no decorrer da mesma existe um outro procedimento que é o próprio procedimento anterior que já foi executado.

Antes de Mandelbrot, outros matemáticos já haviam descoberto figuras do tipo fractal. Janos (2008) destaca alguns fractais em sua obra, dentre eles o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski. Além desses, outros exemplos de fractais clássicos são Curva de Peano e de Hilbert.

Com relação a construção da representação das figuras fractais citadas, Nunes (2006) comenta que “os conjuntos de Cantor e de Sierpinski são gerados através de um processo de remoção de alguma parte da figura inicial, enquanto os conjuntos de Koch, Peano e de Hilbert são gerados através de um processo de alteração da figura inicial”. (NUNES, 2006, p. 15).

O Conjunto de Cantor é considerado um dos primeiros fractais e foi desenvolvido por Georg Cantor (1845-1918). De acordo com Barbosa (2005), Cantor nasceu na Rússia, adotou nacionalidade alemã, lecionou na Universidade de Halle e destinou seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da Matemática. Em 1883, publicou o trabalho conhecido como Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor.

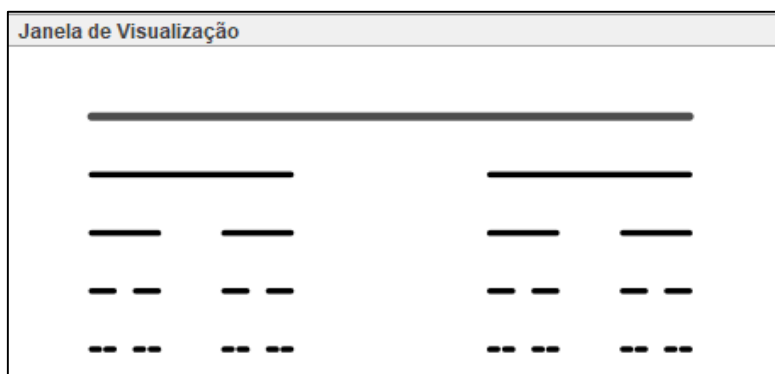
Segundo Nunes (2006), o conjunto de Cantor,

[...] é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário $[0,1]$. A sua construção numérica permite-nos obter a ideia de um subconjunto fechado de números reais. A construção geométrica permite-nos ter uma melhor percepção deste conceito e leva-nos à estruturação de um fractal. (NUNES, 2006, p. 16).

⁵ Lugar geométrico é “um conjunto de pontos que apresentam uma determinada propriedade: se um certo ponto possui a propriedade X, então ele pertence ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem X”. (ARAÚJO, 2010, p. 26).

Para ilustrar esse conjunto, consideramos um segmento de reta de tamanho 1. Após dividir o segmento em três partes iguais de tamanho $\frac{1}{3}$ e eliminar a parte central, ou seja, retirar uma parte de tamanho $\frac{1}{3}$, repetimos essa construção em cada segmento que restou. Isso acontece sucessivamente e indefinidamente, conforme ilustra a Figura 2.

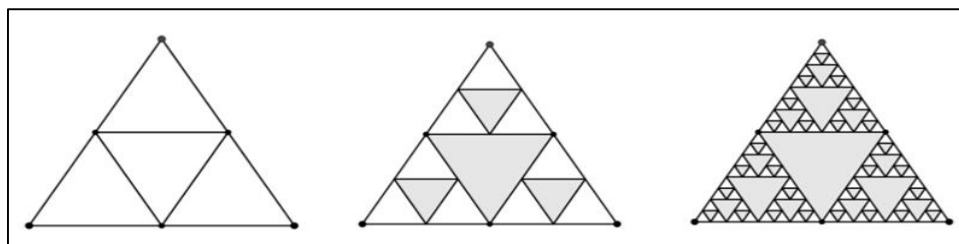
Figura 2 - Conjunto de Cantor



Fonte: Produzido pela autora usando o software GeoGebra.

O fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski, estudado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), apresenta diferentes maneiras de efetuar a construção da sua representação. Em Züge (2019), com o auxílio do software GeoGebra, é descrito os passos para sua construção, onde partindo de um triângulo equilátero, marcamos seus pontos médios de cada lado do triângulo e, a partir dos pontos médios, construímos novos triângulos, ligando os mesmos. Feito isso, o processo repetirá sucessivamente com os triângulos construídos. Esse processo de repetir é o que chamamos de iterações da figura fractal (Figura 3).

Figura 3 – Triângulo de Sierpinski

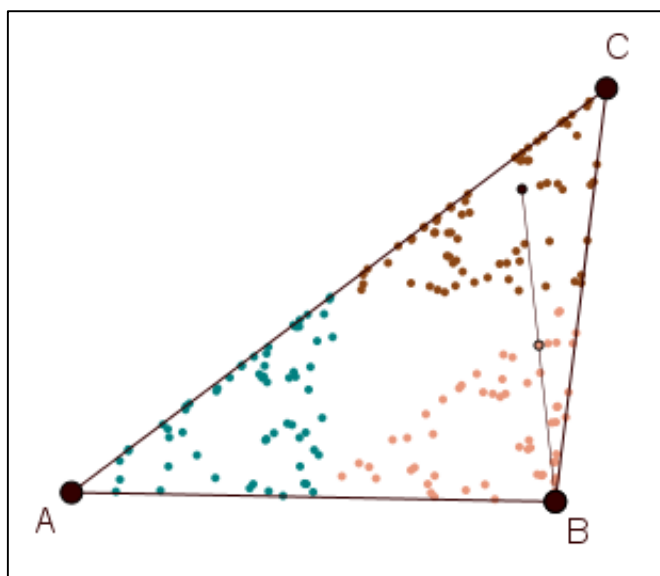


Fonte: Produzido pela autora usando o software GeoGebra.

Nesta construção observamos que a cada iteração na construção obtemos uma nova figura tal qual a anterior, porém em escala menor. Outra maneira para a construção da figura fractal Triângulo de Sierpinski é através do Jogo do Caos. Criado por Michael Barnsley⁶, o Jogo do Caos, segundo Nunes (2006), é descrito como um processo aleatório. Essa técnica é utilizada para criar modelos de formas naturais tais como plantas, nuvens, galáxias, etc.

No exemplo do Triângulo de Sierpinski, desenhamos um triângulo e identificamos os seus vértices. Feito isso, é escolhido um ponto aleatório na área interna do triângulo (p) e, feito o sorteio de um dos vértices, é traçado um segmento de reta entre o ponto e o vértice escolhido. Após esses passos definimos a metade da distância do segmento e marcamos ali um novo ponto. Esse processo pode ser repetido infinitas vezes e os pontos marcados formam a figura do referido fractal (Figura 4).

Figura 4 – Triângulo de Sierpinski construído a partir do Jogo do Caos



Fonte: Adaptado de Simon (2021, n.p.).

A Curva de Koch, também citada em Janos (2008) e Barbosa (2005), foi introduzida por Helge Von Koch (1870-1924), matemático polonês. Conforme Barbosa (2005), a curva de Koch é uma curva gerada fazendo cópias de cópias de si mesmo. Este

⁶ Michael Fielding Barnsley, é um matemático, pesquisador e empresário britânico; nasceu em 1946 e é conhecido por seu estudo em fractais.

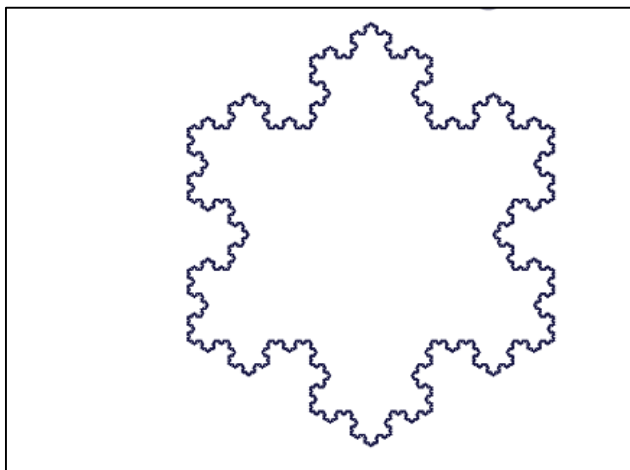
foi o primeiro fractal utilizado por Mandelbrot na tentativa de responder uma de suas famosas indagações: “quanto mede a costa da Grã-Bretanha?”.

Um das versões da Curva de Koch é o Floco de Neve. Este, segundo, Batista (2017),

[...] é o resultado de infinitas adições de triângulos equiláteros aos lados de um triângulo equilátero inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro da figura cresce em relação ao do triângulo inicial e, fatalmente, se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito. (BATISTA, 2017, p. 22).

A representação deste fractal pode ser reproduzida por softwares de Matemática Dinâmica, como ilustra a Figura 5.

Figura 5 – Floco de Neve (versão da Curva de Koch)



Fonte: construído pela autora usando o software GeoGebra.

Conforme Janos (2008), uma diferença entre fractais matemáticos e os fractais naturais, aqueles que encontramos na natureza, é que nos matemáticos as partes que o compõem são cópias exatas do todo, já nos naturais as partes são apenas reminiscências do todo. Por exemplo, se analisarmos a folha de uma samambaia, que é um fractal encontrado na natureza, observamos que uma pequena parte da folha se parece com o todo.

Dentro da Geometria Fractal, os fractais são classificados de acordo com suas características. Nesse sentido, o Quadro 8 foi construído a partir das categorizações e definições apresentadas em Serra e Karas (1997) e Assis *et al.* (2008).

Quadro 8 – Classificações dos fractais

Classificação	Definição	Exemplo
Fractais Lineares	São fractais compostos por elementos lineares (linhas, triângulos, etc)	Conjunto de Cantor
Fractais Complexos	Fractais gerados a partir de um algoritmo.	Conjunto de Mandelbrot
Fractais de Função Interativas (auto-similares)	São fractais onde por meio de um sistema iterativo de funções é realizada a representação de uma figura que se repete.	Triângulo de Sierpinski
Fractais auto-fins	Fractais formados por mini cópias anisotrópicas. Nesse caso ao se passar de uma escala para outra, o tamanho destas cópias não varia uniformemente.	Células tumorais

Fonte: Sistematizado pela autora.





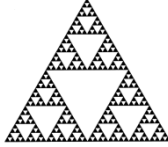
Outra característica importante com relação às figuras fractais é sua dimensão. Conforme Nunes (2006), a dimensão euclidiana possui origem na Geometria Euclidiana Plana, descrita nas obras de Euclides e que foram tema de estudo de outros matemáticos. Podemos pensar na dimensão euclidiana como sendo uma dimensão em que os objetos são relacionados ao espaço no qual estão inseridos.

Já na dimensão fractal, ao contrário da dimensão considerada na Geometria Euclidiana, não temos necessariamente um valor inteiro. De acordo com Barbosa (2005, p. 66), a dimensão fractal é dada por uma fração. Mesma descrição apresentada por Assis *et al.* (2008):

No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Como exemplos, pode-se citar a dimensão fractal da bacia fluvial do rio Amazonas que é 1.85, dos relâmpagos no espaço tridimensional, 1.51, dos angiogramas dos rins, 1.61, dentre outros. (ASSIS *et al.*, 2008, p. 2).

Como exemplo do cálculo da dimensão fractal de fractais autosimilares ou fractais gerados por funções iteradas, analisamos o fractal Triângulo de Sierpinski. Observamos que, na sua construção, a cada iteração criamos três novos triângulos similares ao anterior. Conforme Barbosa (2005), na primeira iteração o triângulo inicial é dividido em quatro triângulos, retirando sempre o triângulo central. Para cada novo triângulo é feito o mesmo procedimento. Então, em cada iteração, a relação de triângulos construídos é a apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – Iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.

Iteração	Relação	Quantidade de triângulos	Imagem
1	3^1	3	
2	3^2	9	
3	3^2	27	
4	3^4	81	
5	3^5	243	

Fonte: Sistematizado pela autora utilizando o software GeoGebra.

Nessa linha de raciocínio, na iteração n , teremos 3^n triângulos. Para determinar a dimensão da figura resultante, temos que cada um de seus triângulos pode ser ampliado para o tamanho anterior, pois como consideramos a divisão do triângulo inicial a partir de seus pontos médios, se duplicarmos o triângulo construído, este se

igualará ao anterior. Sendo assim podemos considerar o fator de aumento como sendo $m = 2$. E o número de peças é a quantidade de triângulos construídos em cada iteração, neste caso $N = 2$. Desse modo, a dimensão D do Triângulo de Sierpinski será,

$$D = \frac{\log \log (N)}{\log \log (m)}$$

$$D = \frac{\log \log (3)}{\log \log (2)}$$

$$D \cong 1,585$$

Para este trabalho serão considerados os fractais matemáticos classificados como fractais lineares ou geométricos. A escolha deve-se a maneira de como as iterações da figura são realizadas. E, para sua construção, seguimos um protocolo (passo a passo) onde a cada etapa realizamos uma transformação, seja essa uma translação, homotetia ou rotação da figura inicial.

3.2 TECNOLOGIAS DIGITAIS NO CONTEXTO DA SALA DE AULA

A sociedade atual tem a tecnologia digital como algo popular, pois está presente desde o sistema financeiro com aplicativos bancários de fácil acesso que possibilitam maior agilidade e comodidade até o entretenimento como filmes, séries e cultura.

Além dos exemplos citados, contamos ainda com os avanços da tecnologia em indústrias, mercados e diferentes empresas, citando ainda relógios inteligentes, casas inteligentes e smartphones tão eficientes quanto computadores. As tecnologias que buscam conectar objetos do cotidiano à rede de computadores também estão presentes no setor educacional, por meio de softwares, mesas digitalizadoras, entre outros.

Porém, para Veraszto *et al.* (2008, p. 78), a “tecnologia é um conjunto de saberes inerentes ao desenvolvimento e concepção dos instrumentos (artefatos, sistemas, processos e ambientes) criados pelo homem através da história para satisfazer suas necessidades e requerimentos pessoais e coletivos”. É uma aplicação prática do conhecimento científico em diversas áreas de pesquisa. Ou seja, podemos considerar como tecnologia os avanços obtidos nos tempos primordiais, como a descoberta do fogo, criação da roda, entre outros. Sendo assim, lápis, quadros, livros e até mesmo a

borracha são considerados tecnologias que surgiram na necessidade de resolver problemas relacionados ao ensino dentro da sala de aula.

Recentemente, a utilização de tecnologias digitais em sala de aula, como, por exemplo, dispositivos móveis, era considerada algo desfavorável ao processo de aprendizagens dos alunos. Hoje, na BNCC, tem-se uma nova visão em relação a esta informação, como é visto na Competência cinco.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

Observamos que a tecnologia possui um papel importante e a BNCC incentiva o seu uso de maneira crítica e responsável. Contudo, na escola já se dispõe de muitos sistemas digitais. Boa parte dos materiais de que se tem para planejamento e execução das aulas contam com o auxílio de tecnologias digitais. No entanto, considerar tal tecnologia para sala de aula requer um preparo por parte dos professores, para que sejam aproveitados com potencial didático.

Com relação a Educação Matemática, o uso das tecnologias digitais teve seu início na década de 1990, começando pelo computador que, de acordo com Amancio e Sanzovo (2020),

[...] aparece como ferramenta marcante para o ensino e aprendizagem, intensificando o uso de softwares matemáticos educacionais, jogos, planilhas e imagens; na sequência, pela internet, que traz a realidade virtual, a realidade aumentada, os blogs, os simuladores, os vídeos educacionais; e continua com o smartphone, que veio para facilitar o uso da calculadora, do gravador de áudio e vídeo e da internet. (AMANCIO; SANZOVO, 2020, p. 2).

Levando em conta o uso dessas tecnologias para o ensino, Gravina e Santarosa (1998) apresentam relações importantes entre o uso de tecnologias, a construção de conhecimentos matemáticos e a importância que este avanço trouxe, em especial, ao estudo de figuras fractais.

[...] a representação gráfica de computações massivas tornou possível o avanço da teoria de fractais. Figuras surpreendentes foram fontes de conjecturas que desencadearam a pesquisa na direção de demonstrações formais. Estes exemplos são paradigmáticos quanto ao suporte oferecido pelos ambientes informatizados na concretização mental de ideias

matemáticas. Este suporte favorece a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática formalizada. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 78).

Para tanto, em Gravina (2012), diferentes tipos de software são sugeridos para trabalhar conteúdos matemáticos, como as funções e Geometria Espacial. Sendo software definido como uma sequência de instruções escritas para serem interpretadas por um computador com o objetivo de executar tarefas específicas.

Com relação aos softwares educacionais, de acordo com Vieira (2015), estes podem ser classificados conforme seus objetivos pedagógicos: tutoriais, exercícios e práticas, programação, aplicativos, multimídia e internet, modelagem e jogos.

Nesse sentido, Ibili (2019) afirma que os softwares de Matemática Dinâmica (SMD) oferecem um ambiente didático eficaz devido à capacidade de interagir com materiais digitais e permitir que objetos geométricos possam ser vistos dinamicamente.

Segundo Wahab *et al.* (2017), os alunos que possuem oportunidade de realizar atividades em ambientes tecnológicos, desenvolvem competências relativas ao pensamento geométrico espacial, pois eles oferecem oportunidades de manipulação e visualização, além de trazer relações entre diferentes dimensões.

Seguindo nessa perspectiva, trabalhos como o de Barbosa e Silva (2019) apresentam argumentos de como o uso de tecnologia pode auxiliar na aprendizagem matemática, discutindo aspectos referentes às habilidades do pensamento computacional em uma determinada atividade realizada em um SMD.

Além disso, com o uso de SMD, é possível que o usuário explore e, com isso, elabore suas próprias conclusões, verificando a veracidade delas. Dogan e Içel (2011) mostram que as atividades em sala de aula baseadas em computador podem ser efetivamente usadas nos ambientes de ensino e aprendizagem. E que permitem a visualização de figuras e formas com suas propriedades, devido à maneira com que foram construídas.

Com relação a Geometria Fractal, trabalhos como o de Padilha (2012) sugere que o estudo deste tema seja realizado com a utilização de SMD, justamente pelo grande potencial de visualização que ele oferece e pela aproximação do que é uma figura fractal. Em especial, o SMD utilizado foi o GeoGebra. Neste, a autora buscou por meio da realização das atividades em uma turma de 7º ano suscitar conhecimentos geométricos e algébricos tendo, segundo ela, alcançado resultados positivos, como

motivação dos alunos em realizar as atividades e interesse em conhecer mais sobre as ferramentas oferecidas pelo software.

Outro exemplo de trabalho que se baseou em tecnologias para compreender figuras fractais foi o de Friske e Mathias (2015), que utilizaram certas classes de transformações lineares para descrever e gerar figuras fractais do tipo Dürer. Para tanto, o intuito da pesquisa foi, “ao descrever o processo de construção utilizado e as ferramentas matemáticas utilizadas, incentivar a criação de fractais de uma maneira nova e inusitada, visto que este modo de construí-los não é convencionalmente utilizado.” (FRISKE; MATHIAS, 2015, p. 2).

De acordo com informações do Instituto GeoGebra São Paulo, o SMD GeoGebra foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter, possuindo uma multiplataforma que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Dessa maneira, o Geogebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Conforme Nóbriga e Araujo:

Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros softwares de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar as funções, tanto via botões na Barra de Ferramenta, quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, pode-se alterar as propriedades dos objetos construídos via Janela de Álgebra e também através de algumas ferramentas do Botão Direito do Mouse. (NÓBRIGA; ARAUJO, 2010, p. 1).

Além de gratuito, o software pode ser usado em todos os níveis de ensino. Devido à plataforma de visualização atraente com uma área de trabalho de fácil manuseio, o software permite a realização de construções geométricas utilizando régua e compasso digitais, mantendo os passos de uma construção convencional, além de permitir desenvolver atividades tanto no plano quanto em 3D.

Com relação à construção de imagens fractais, uma vantagem do software GeoGebra é que se pode observar durante a construção uma maior percepção dos conceitos matemáticos envolvidos em cada etapa.

No contexto da presente pesquisa, utilizaremos das potencialidades das tecnologias digitais para trabalhar com professores de Matemática. Nesse sentido se faz necessário trazer elementos sobre a formação continuada de professores. E é sobre esse tema que trata a próxima seção.

3.3 FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE GEOMETRIA

A palavra formação é frequentemente utilizada em diferentes áreas e a oferta por cursos sobre temas específicos mostra uma maneira de aperfeiçoar determinada questão, buscando resolver problemas, trazendo melhorias, soluções estratégicas para o crescimento do profissional em seu local de trabalho. Na educação não é diferente. Muito se fala em formação continuada de professores e formação de gestores para que problemas de ensino e aprendizagem ou questões relacionadas ao contexto escolar sejam aperfeiçoadas.

Nesse sentido, Garcia (1995) apresenta que:

[...] a formação pode ser entendida como uma função social de transmissão de saberes; de saber-fazer ou do saber-ser que se exerce em benefício do sistema socioeconômico, ou da cultura dominante. A formação pode ser entendida também como um processo de desenvolvimento e de estruturação da pessoa que se realiza com o duplo efeito de uma maturação interna e de possibilidades de aprendizagem, de experiências dos sujeitos. (GARCIA, 1995, p. 19).

A busca por formação passou a ser parte do processo de introdução na sociedade. O sujeito procura o conhecimento almejando um destaque e, conseqüentemente, o crescimento pessoal.

Porém, a formação de professores elenca outros aspectos relacionados à formação. Garcia (1995) entende que a formação de professores vem de encontro com o desenvolvimento de cada um como profissional, para criar seu próprio modo de ensino, com o objetivo de proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa.

Além da formação inicial, a que busca desenvolver e propor conteúdos e estratégias metodológicas para o ensino, contamos como a formação continuada de professores. Analisando o atual cenário pandêmico, a busca por novos conhecimentos e estratégias metodológicas tornou-se quase que obrigatória para que o processo de ensinar e aprender não ficasse à margem.

Neste contexto, podemos considerar os cursos formativos que são realizados para estes docentes.

A formação deve ajudá-los a estabelecer vínculos afetivos entre si, a coordenar suas emoções, a se motivar e a reconhecer as emoções de seus colegas de trabalho, já que isso os ajudará a conhecer suas próprias emoções, permitindo que se situem na perspectiva do outro, sentindo o que o outro sente. Enfim, ajudá-los a desenvolver uma escuta ativa mediante a empatia e

o reconhecimento dos sentimentos do outro. A formação dos professores deve favorecer, sobretudo, o desenvolvimento da autoestima docente, individual e coletiva. (IMBERNÓN, 2010, p. 110).

A ideia é que o ambiente formativo propicie o desenvolvimento da autoestima docente, individual e coletiva. Esse fortalecimento poderá gerar consequências no processo de ensino de uma maneira geral e até mesmo na própria identidade profissional deste professor.

Em conformidade a isso, a importância de repensar os conteúdos a partir das principais lacunas e dificuldades apresentadas pelos alunos quando retornamos para sala de aula também é exemplo da necessidade de formação continuada para profissionais da educação.

Em especial na Matemática, o relato de alunos que veem a disciplina como algo difícil e, por vezes, sem sentido é quase que natural. Conforme Boaler (2018):

Os estudantes raramente pensam que estão nas aulas de matemática para apreciar a beleza da disciplina, para fazer perguntas profundas, para explorar o rico conjunto de conexões que compõe a matéria, ou mesmo para aprender sobre a aplicabilidade dela. Eles acham que estão nas aulas de matemática para executar tarefas. (BOALER, 2018, p. 21).

Essa visão da Matemática, de acordo com a autora, deve-se da maneira como a disciplina é apresentada em sala de aula, uma disciplina em que os alunos são chamados a resolver exercícios e fazer provas. Mas não é esta visão que desejamos passar ao entrar em sala de aula. Buscamos mostrar os diferentes padrões que compõe essa disciplina, suas formas e aplicações em diferentes contextos.

A próxima seção traz um panorama sobre o papel da visualização e das tecnologias como um conjunto importante para o estudo de figuras geométricas.

3.4 SOBRE VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIAS

A visualização é um elemento presente em atividades do nosso cotidiano e é devido a isso que Gutierrez (1996) apresenta em seu trabalho que diferentes grupos de pesquisadores, com objetivos e contextos diferentes, buscam investigar o tema visualização e não apenas em atividades relacionadas à Geometria ou contexto escolar. Segundo o pesquisador,

Não há um consenso geral sobre a terminologia a ser usada neste campo: pode acontecer que um autor use, por exemplo, o termo “visualização” e outro autor use “pensamento espacial”, mas descobrimos que eles estão compartilhando o mesmo significado para termos diferentes. Por outro lado, um único termo, como “imagem visual”, pode ter significados diferentes se o tomarmos de autores diferentes. Essa aparente confusão é apenas um reflexo da diversidade de áreas onde a visualização é considerada relevante e da variedade de especialistas que se interessam por ela. (GUTIERREZ, 1996, p. 4)

Observa-se que Gutierrez (1996) preocupou-se em levantar questões relacionadas à análise do comportamento de alunos ao resolver tarefas em Geometria Tridimensional, usando um software de Geometria Dinâmica. Apesar deste ter mais de vinte anos, atualmente muitas pesquisas tem focado em diferentes aspectos da visualização espacial, como, por exemplo, as de Blanco, Mantecón e Sequeiros (2019), Settimy e Bairral (2020), Mathias e Simas (2021) e Vargas Oliveira e Stormowski (2021).

Nos trabalhos citados há preocupação em abordar as habilidades de visualização no espaço, diferente do que ocorre em Blanco, Godino e Montecon (2018), que apontam elementos da visualização no espaço bidimensional. Em particular, os autores trazem uma perspectiva da visualização no âmbito da abordagem ontosemiótica. Neste enfoque é considerado que todas as etapas envolvidas em uma atividade de Matemática têm foco nas práticas realizadas pelas pessoas envolvidas na atividade em questão.

Com relação aos procedimentos visuais, Blanco, Godino e Mantecón (2018) apontam estes como sendo:

[...] projetar, cortar, girar, simetrizar, transladar e deslizar corpos no espaço; construir sólidos a partir de suas projeções planares e vice-versa; transformar representações visuais decompondo/recompondo figuras; e representar relacionamentos graficamente. Algumas propriedades que interferem na resolução de tarefas visuais são as propriedades de conservação da forma e tamanho por movimentos rígidos; propriedades das diferentes projeções; e propriedades dos próprios conceitos visuais. Por fim, a elaboração de um argumento justificador das propriedades e procedimentos requer a simples apresentação do objeto material, tratando-se de propriedades de natureza empírica. Em outro caso, é necessário elaborar argumentos dedutivos baseados em regras previamente aceitas. (BLANCO; GODINO; MONTECON, 2018, p. 254).

Os autores ainda indicam que, nesta abordagem, acontece uma distinção entre práticas visuais e práticas analíticas. Segundo eles:

A visualização em matemática não se limita a ver, mas também envolve interpretação, ação e relacionamento. As práticas matemáticas e,

consequentemente, as configurações associadas de objetos e processos, muitas vezes terão um caráter misto, analítico-visual e, do ponto de vista da progressão da aprendizagem, as conversões entre componentes visuais e analíticos terão um papel importante. (BLANCO; GODINO; MONTECON, 2018, p. 257).

Considerando teorias sobre visualização, Santos (2014) investiga o modo como a visualização colabora para a compreensão e possível construção dos conceitos matemáticos. De acordo com a autora,

Imaginar, tocar, manipular são fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, dando estrutura para o entendimento de determinados conceitos. E quando o manipular não está ao alcance, a visualização pode conduzir a uma tentativa de dar concretude ao pensamento, construindo uma imagem mental, um significado ao significante. (SANTOS, 2014, p. 21).

Com o uso de figuras como um recurso didático, podemos refletir sobre o que este modo de tratar o conteúdo em questão está apresentando. É possível explorar, por meio da visualização de figuras, os comportamentos e os conceitos matemáticos envolvidos.

Ainda segundo a autora, “[...] uma das razões para se investir na implementação da visualização nas salas de aula está associada às habilidades mentais e visuais que os alunos vão desenvolver e adquirir.” (SANTOS, 2014, p. 21).

Pensando na definição de visualização, Leivas (2009) traz que a visualização vai além da representação de objetos, ela deve ser vista como uma forma de expressar uma linguagem auxiliando no processo de concepção do conhecimento matemático. De acordo com o autor, temos a visualização como “[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos [...]” (LEIVAS, 2009, p. 22).

Considerando o uso de softwares, temos a vantagem da visualização e da manipulação como ferramentas para auxiliar na compreensão dos conteúdos pretendidos.

Pensando especialmente na área de Educação Matemática, onde o foco principal é aprofundar estudos sobre o ensino da Matemática em sala de aula, é observada a grande dificuldade dos professores em desenvolver materiais que levem os estudantes a compreender conceitos envolvidos.

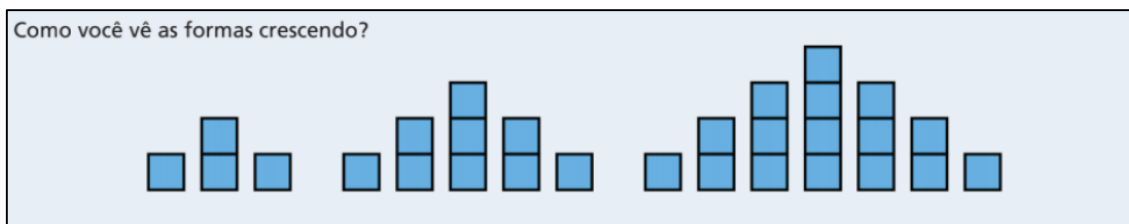
Nesse sentido, Boaler (2018, p. 72) aponta que “a compreensão visual é incrivelmente poderosa para o estudante, acrescentando todo um novo nível de compreensão”. Esse acréscimo refere-se ao modo como a autora aborda diferentes conteúdos em sala de aula. Frequentemente é sugerido aos alunos que procurem desenhar, codificar um problema para que comecem a resolvê-lo, justamente como uma estratégia de estimular a visualização do problema para facilitar sua resolução.

Para exemplificar, a autora apresenta a figura de um floco de neve (um tipo de figura fractal). Conforme Boaler (2018, p. 21), “se considerarmos flocos de neve, veremos algo mais que é interessante. Cada floco de neve é único, mas todos possuem o mesmo padrão.” Esse tipo de observação trazida por ela é um exemplo de uma das conclusões obtidas a partir da visualização de uma figura como o floco de neve, além de que é possível ainda fazer conexões entre a Matemática e outras áreas, não a deixando como uma área isolada das demais.

Com relação à Geometria, Forsythe (2010) entende que os desenhos realizados por alunos funcionam como mediadores entre objetos concretos e teóricos. A autora ainda utiliza como exemplo a figura de uma pipa, onde o aluno tem ideia de um objeto concreto, mas que também consegue fazer a descrição e representação visual do objeto. Nesse sentido, a autora concluiu que a utilização de ambientes de Geometria Dinâmica são úteis para desenvolver o pensamento correto entre os aspectos figurais (visual) e o conceito dos termos geométricos.

Em conformidade a Forsythe (2010), Boaler (2018) enfatiza que o raciocínio visual é uma maneira de compreender um padrão. Para exemplificar, a autora cita uma atividade realizada por uma professora envolvendo o crescimento de cubos, quando foi solicitado aos alunos que ampliassem o padrão de crescimento de cubos encaixáveis. Na Figura 5, por mais que esta atividade seja abstrata, existiu um encorajamento por parte dos professores para que os alunos a resolvessem, a partir do desenvolvimento que cada um teve ao ver como o problema estava relacionado.

Figura 6- Atividade de Crescimento de Cubos



Fonte: Boaler (2018, p. 54).

No presente projeto, o principal foco é a visualização geométrica, onde

[...] tal qual o próprio nome ressalta, traz uma incumbência geométrica para o visual. Trata-se de ver o que está ante os olhos, ou também ver com os olhos da mente, utilizando-se de conceitos e construções próprios da geometria, a fim de fazer relações matemáticas tanto geométricas quanto algébricas. (SANTOS, 2014, p. 27).

Para utilizar a habilidade de visualização geométrica em sala de aula, é importante o professor apresentar meios que estimulem o aluno a buscar visualizar mentalmente. Nesse sentido, Kaleff (2015) traz que quando o aluno não chega a tal habilidade, uma representação concreta do objeto pode auxiliá-lo a chegar em outras representações mentais. Conforme a autora:

Esta primeira imagem real dá partida a um processo de raciocínio visual/tátil no qual, dependendo das características do objeto, o aluno recorre à habilidade da visualização para executar diversas operações mentais, as quais geram outras imagens mentais ou representações do objeto. Essas podem ser expressas por meio de um desenho ou de outro modelo físico do objeto. (KALEFF, 2015, p. 85).

Pensando em todas as contribuições fornecidas pelo uso de tecnologias e considerando que com o uso de softwares é possível chegar a uma imagem mais próxima de uma figura fractal, para este trabalho pretendemos utilizar o software de matemática dinâmica GeoGebra a fim de auxiliar no processo de estudo.

Como já citado em Züge (2019), foram feitas algumas figuras fractais com o auxílio do software GeoGebra. Nestas foram utilizadas principalmente as ferramentas “Sequência” e “Homotetia”. Durante a construção foi observado a possibilidade de fazer relações entre o que visualiza e o que se está estudando.

Além do mais, buscando esse processo de visualização com o auxílio de tecnologias, documentos oficiais como a BNCC sugerem o uso de tecnologias para

melhor compreensão de conteúdos, como é afirmado na seguinte passagem “[...] destaca-se ainda a importância do recurso das tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior” (BRASIL, 2018, p. 528).

Na Competência Específica 5, o propósito é fazer com que o aluno investigue e construa conjecturas a partir de experimentações e observações. Em busca de tal objetivo, a BNCC sugere um conjunto de habilidades.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. (BRASIL, 2018, p. 540).

Nesse sentido, é observado que a visualização auxiliará de maneira a conseguir alcançar tal competência, pois o aluno possuindo de meios para investigar, chegará em relações com outra área de conhecimento além da Matemática. No próximo capítulo é apresentado os procedimentos metodológicos adotados para que esta pesquisa alcançasse seu objetivo.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são relatados os procedimentos metodológicos adotados durante a elaboração, execução e análise de dados deste trabalho. De acordo com Prodanov e Freitas (2013):

A pesquisa científica é a realização de um estudo planejado, sendo o método de abordagem do problema o que caracteriza o aspecto científico da investigação. Sua finalidade é descobrir respostas para questões mediante à aplicação do método científico. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 43).

O presente trabalho surgiu da vivência da autora, já que Geometria Fractal foi tema de estudo em projetos de iniciação científica e também do trabalho de conclusão de curso em Licenciatura em Matemática. A partir de experiências anteriores, foi buscado por meio do Mestrado em Educação Matemática desenvolver uma investigação a fim de encontrar respostas para a seguinte questão: Quais procedimentos visuais são utilizados por professores na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos inerentes ao Ensino Básico e à Geometria Fractal?

Tal investigação possui caráter qualitativo. Tozoni-Reis (2009, p. 10) “defende a ideia de que, na produção de conhecimentos sobre os fenômenos humanos e sociais, interessa muito mais compreender e interpretar seus conteúdos que descrevê-los”. Nesse sentido, buscamos analisar quais procedimentos visuais são utilizados na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos e a Geometria Fractal por professores do Ensino Básico.

Com relação aos procedimentos técnicos utilizados classifica-se a pesquisa como um estudo de caso, pois ele “é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado [...]” (GIL, 2008, p. 57). Assim, os participantes dessa pesquisa foram professores, licenciados em Matemática, que buscam informações sobre o tema Geometria aliado às tecnologias digitais.

Em nossa proposta, realizamos uma oficina em que foram disponibilizadas atividades que versaram sobre o tema, cuja aplicação ocorreu remotamente. Tal oficina foi realizada por meio do Ambiente de Aprendizado Modular Orientado ao Objeto (Moodle) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Para a análise de dados, utilizamos como metodologia a Análise de Conteúdo apresentada por Laurence Bardin (2016). Tal técnica, muito utilizada em pesquisas qualitativas, é dividida em três etapas: Pré-análise, Exploração do material e Tratamento e interpretação dos resultados obtidos. Nas subseções seguintes são apresentadas mais informações sobre a organização da Oficina Geometria Fractal, os participantes envolvidos, os instrumentos utilizados e os procedimentos adotados para execução desta pesquisa.

4.1 ESPAÇO DE PESQUISA

Diante da situação de pandemia que o mundo todo enfrentava e respeitando as orientações da Organização Mundial de Saúde (OMS) e decretos Federais com relação às medidas de restrições para conter o avanço do Coronavírus, o principal espaço de coleta de dados da presente pesquisa foi planejado e ocorreu de forma remota.

A oficina denominada Geometria Fractal foi um dos módulos, parte de uma oficina intitulada Experiências Matemáticas. Na referida oficina foram realizados outros dois módulos que contaram com o propósito de utilizar o software de matemática dinâmica GeoGebra para explorar outros tópicos relacionados ao conteúdo de Geometria Plana.

Dentro da Oficina Experiências Matemáticas, os módulos foram organizados da seguinte forma: o primeiro módulo foi sobre Geometria Fractal, em sequência o módulo sobre Invariantes Geométricos e por fim o módulo denominado GeoGebraBook, conforme mostra o cronograma do Quadro 9.

Quadro 9 – Cronograma Oficina Experiências Matemáticas

Divulgação e inscrição	08/11/2021 a 12/11/2021
Homologação das inscrições e divulgação do Ambiente Moodle com os participantes	15/11/2021
Módulo 1: Geometria Fractal	16/11/2021 a 25/11/2021
Módulo 2: Invariantes Geométricos	26/11/2021 a 05/12/2021
Módulo 3: GeoGebraBook	06/12/2021 a 15/12/2021

Fonte: Dados da pesquisa.

Para o melhor andamento da oficina, optamos por utilizar como meio de comunicação entre os ministrantes e os participantes, o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) Moodle disponível na instituição. Justificamos a escolha desse AVA pois é de simples utilização. Nele é possível cadastrar participantes externos à instituição e ainda conta com a função de sala de aula on-line, onde é possível disponibilizar materiais, atividades e abrir fóruns de discussão.

A oficina foi totalmente assíncrona e buscamos como modelo para estruturação desta o curso do GeoGebra⁷, que ocorre anualmente conforme consta em Dantas (2016). Esse tipo de organização permite um número significativo de inscritos e que esses possam interagir da maneira que julgarem pertinente.

Na UFSM é possível configurar uma oficina como a que foi ofertada, via o Moodle Presencial, que na página inicial conta com um espaço para o participante inserir os dados para acesso, como usuário e senha (Figura 7).

Figura 7 – Página de acesso ao Moodle

Selecionar ambiente:

UAB/EAD PRESENCIAL CAPACITAÇÃO

Usuário:

Senha:

ACESSAR

Lembrar identificação de usuário [Esqueceu o seu usuário ou senha?](#)

[Dúvidas Frequentes](#)

* O uso de Cookies deve ser permitido no seu navegador

Ativar o Windows. Acesse Configurações para ativar o Windows.

Contato: suportemoodle@nte.ufsm.br | [Telefone de contato](#)

21:23

Fonte: UFSM⁸.

Ao entrar no ambiente, no canto esquerdo o participante terá acesso a Oficina de Experiências Matemáticas (Figura 8). Ao clicar sobre a Oficina, o usuário é direcionado para a interface que contém todas as informações referentes à Oficina e ao Módulo Geometria Fractal.

⁷ www.ogeogebra.com.br

⁸ <https://ead06.proj.ufsm.br/login/index.php>

Figura 8 – Acesso ao ambiente da Oficina



Fonte: UFSM.

Conforme mencionado, a Oficina Experiências Matemáticas contou com três módulos. Inicialmente, foi apresentado um vídeo⁹ com os ministrantes, contendo informações sobre a realização dos módulos e certificação. Com relação ao módulo referente à Geometria Fractal, esta aconteceu de modo remoto, assim como os demais e contou com três tarefas, totalizando 20 horas, dividida em 10 dias.

O módulo contou com um cronograma de realização, disposto no Quadro 10.

Quadro 10 – Cronograma de realização da Oficina

Questionário- Conhecendo os participantes	16/11/2021 a 25/11/2021
Tarefa 1 e Tarefa 2	16/11/2021 a 22/11 /2021
Tarefa 3 - Fórum: Construções de Figuras Fractais	19/11/2021 a 25/11/2021
Encerramento Oficina: Questionário Final	24/12/2021

Fonte: Sistematizado pela autora.

A oficina foi divulgada por meio de redes sociais, como *Instagram* e *Facebook*, além de grupos do *WhatsApp*. Também foram convidados os professores da rede municipal de ensino do município de Santa Maria, por intermédio do Núcleo de Tecnologia Educacional Municipal de Santa Maria (NTEM). Para realizar a inscrição,

⁹ <https://www.youtube.com/watch?v=Nzwe9mzE0xw>

os interessados preencheram um formulário on-line, informando dados como nome, e-mail, atuação e familiaridade com o software GeoGebra - elaborado no Google Formulários, que foi disponibilizado no momento da divulgação da oficina.

Inicialmente foram disponibilizadas 20 vagas para a Oficina Geometria Fractal e a prioridade na seleção foi para professores da rede pública de ensino. Caso as vagas ofertadas não fossem preenchidas, a oferta se estenderia a professores da rede privada de ensino e aos acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Um pré-requisito exigido dos participantes consistia em conhecimentos prévios sobre a utilização de ferramentas do software GeoGebra, devido o curto período para a realização da oficina. Com isso, o foco principal foi a utilização do recurso tecnológico no estudo de figuras fractais, isometrias e transformações geométricas.

Ao final do prazo de inscrições, contamos com 163 inscritos. Dentre as inscrições foram desconsiderados os participantes que não aceitaram ter seus dados disponibilizados para a análise de dados desta pesquisa. Devido à oficina ser totalmente remota e com prazo para realização das atividades de acordo com o horário disponível do participante, a Oficina de Experiências Matemáticas contou com 123 inscrições homologadas. Os participantes puderam escolher quais oficinas realizar, sendo que ao final da oficina Geometria Fractal contamos com 51 participantes.

4.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Como mencionado anteriormente, o objetivo do primeiro módulo da oficina foi abordar o tema Geometria Fractal juntamente com o conteúdo de isometrias e transformações geométricas, buscando responder o questionamento inicial que gerou a realização desta investigação. Todos os participantes que realizaram a inscrição na Oficina Experiências Matemáticas tiveram acesso a um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice D) para ter suas atividades analisadas nesta pesquisa.

Dos 51 participantes que optaram por realizar a Oficina Geometria Fractal, apenas 16 participantes realizaram 75% ou mais das atividades propostas, sendo estes os considerados para análise dos dados. Buscando manter o anonimato dos mesmos, nomeamos os participantes pela letra P seguida de um número (P1, P2, ..., P16). Como a oficina foi realizada remotamente, contamos com inscrições de diferentes regiões do país, como mostra o quadro 11.

Quadro 11 – Distribuição dos participantes de acordo com a Região do País

Região	Participante
Norte	-
Nordeste	P2, P3, P10, P14
Centro- Oeste	
Sudeste	P1, P8, P9, P15
Sul	P4, P5, P6, P7, P11, P12, P13, P16

Fonte: Sistematizado pela autora.

A realização da oficina remota e com flexibilidade nos horários de realização tornou possível a procura de profissionais de diferentes regiões. Mesmo com essa flexibilização, a conclusão da oficina em 75% ou mais foi extremamente baixa, pois menos da metade dos inscritos a concluíram.

4.3 INSTRUMENTOS

Com relação a coleta de dados da pesquisa, em um primeiro momento foi disponibilizado aos participantes um questionário inicial intitulado “Conhecendo os participantes” (Apêndice A), onde todos foram convidados a responder. Nesse questionário, buscamos conhecer um pouco sobre os conhecimentos, formação e atuação dos participantes.

Além disso, outro instrumento utilizado foi as três tarefas disponibilizadas no módulo Geometria Fractal. Nas tarefas, analisamos a participação no fórum de discussão, os registros de argumentos dos participantes, as construções realizadas com o auxílio do software GeoGebra, imagens e arquivos disponibilizados pelos participantes nas respostas aos questionamentos. No Quadro 12 são apresentadas as tarefas propostas, seus questionamentos e objetivos.

Quadro 12 – Tarefas módulo Geometria Fractal

Tarefa	Questionamento	Objetivo
1) Movimente os controles deslizantes do <i>applet</i> ¹⁰ e responda os questionamentos	<ul style="list-style-type: none"> a) Existe algum padrão nessa figura? b) Identificou alguma simetria? c) Considerando que ao final de cada linha (galho da árvore) existe um ponto, quantos pontos finais existem após cada etapa? 	Manipular representações de figuras fractais, identificando a característica de auto similaridade da figura.
2) Analisando o <i>applet</i> ¹¹ responda os questionamentos a seguir	<ul style="list-style-type: none"> a) Quantos eixos de simetria possui a figura na iteração número 2 da construção do Floco de Neve de Koch? b) E na iteração 4 e 5? c) A partir da visualização e identificação de suas características construa um fractal Floco de Nevo com o auxílio do software GeoGebra. 	Identificação dos padrões da figura e suas simetrias.
3) Fórum: construção de Figuras Fractais	<p>Parte 1: Considere que você vai lecionar transformações geométricas do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Mas, você gostaria de utilizar os fractais e deve levar um ou mais arquivos previamente construídos no GeoGebra. Os estudantes terão acesso a esse (s) arquivo (s) em computadores (ou celulares) e vão utiliza-lo(s) durante a sua aula.</p> <p>Parte 2: Escolha construções realizadas por no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.</p>	Fomentar discussões sobre a construção de representações de figuras fractais.

Fonte: Preparado pela pesquisadora.

Na tarefa 3, deixamos os participantes livres para realizarem as construções e também escolherem qual atividade interagir. Além disso, nessa tarefa foi disponibilizado um material teórico (Apêndice B) baseado no Livro Aberto de

¹⁰ <https://www.geogebra.org/m/wYMnRpRs>

¹¹ <https://www.geogebra.org/m/u2umypaw>

Matemática (LAM)¹², com os principais conceitos da Geometria Euclidiana, que podem ser explorados em atividades envolvendo figuras do tipo fractal. Essas atividades envolveram a identificação de simetrias, rotações, translações, além de conceitos sobre figuras planas, buscando, ao final, identificar os padrões utilizados em cada uma.

Por fim, outro instrumento analisado foi o questionário final que teve como propósito avaliar a oficina (Apêndice C). Cada participante, ao final da realização do último módulo, recebeu por e-mail o link para responder o questionário.

4.4 PROCEDIMENTOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

Para realizar a análise qualitativa dos dados, utilizou-se a Análise de Conteúdo que, conforme o entendimento de Sampaio e Lycarião (2021),

[...] é uma técnica de pesquisa científica baseada em procedimentos sistemáticos, intersubjetivamente validados e públicos para criar inferências válidas sobre determinados conteúdos verbais, visuais ou escritos, buscando descrever, quantificar ou interpretar certo fenômeno em termos de seus significados, intenções, consequências ou contextos. (SAMPAIO; LYCARIÃO, 2021, p. 6).

Tal técnica é organizada em três etapas. Primeiro realiza-se a pré-análise, após a exploração do material e por fim o tratamento dos resultados e interpretação.

A primeira etapa (pré-análise), conforme Bardin (2016), é a fase de organização do material a ser analisado.

Corresponde a um período de intuições, mas tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise. Recorrendo ou não ao computador, trata-se de estabelecer um programa que, podendo ser flexível (quer dizer, que permita a introdução de novos procedimentos no decurso da análise), deve, no entanto, ser preciso. (BARDIN, 2016, p. 125).

Nesta etapa programamos como seria feita a escolha dos materiais, separação e organização dos dados de acordo com as tarefas e leitura flutuantes dos dados.

A segunda fase (exploração do material) é considerada por Bardin (2016) a mais longa e cansativa. Aqui, a partir da pré-análise, é realizada a codificação dos dados, seja por categorizações definidas pelos autores da análise ou pela enumeração dos dados.

¹² O projeto “Livro aberto de Matemática” é um esforço de professores para produzir coleções de livros didáticos de Matemática para a Educação Básica de forma colaborativa e com licença aberta (Creative Commons). Link de acesso: <https://umlivroaberto.org/>.

A terceira etapa (tratamento dos resultados e interpretação) também é citada pela autora:

Os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (“falantes”) e válidos. Operações estatísticas simples (porcentagens), ou mais complexas (análise fatorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise. (BARDIN, 2016, p. 131).

Assim, realizamos nesta etapa a interpretação de cada resposta e buscamos por meio das categorizações pré-estabelecidas realizar as ligações entre os dados obtidos, verificando se o objetivo da atividade foi atingido e sua relação com a categoria. Na sequência, apresentaremos com detalhes os procedimentos realizados em cada uma das etapas no decorrer da pesquisa.

Na etapa de pré-análise, realizamos a separação do material obtido durante a realização da oficina. Como nem todos os participantes inscritos concluíram o módulo, optamos por separar somente as atividades realizadas pelos participantes que concluíram 75% a 100% das atividades. Dessa forma, realizamos a leitura das atividades realizadas pelos participantes, sendo selecionados para análise os dados oriundos dos questionários inicial e final e das três tarefas propostas.

A segunda fase chamada de exploração do material foi realizada a partir da separação das respostas das tarefas um e dois e das frases extraídas do fórum (tarefa 3); e a análise das construções realizadas. Nesta etapa, realizamos as unidades de codificação, que segundo Bardin (2016):

A codificação corresponde a uma transformação – efetuada seguindo regras precisas - dos dados brutos do texto, transformando esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto, que podem servir de índices. (BARDIN, 2016, p. 133).

No que se refere ao recorte, optamos pela escolha do tema como unidade de registro. Como definição de tema, Bardin (2016) apresenta que é uma afirmação acerca de um assunto. Na enumeração, outra regra a ser seguida para posterior categorização, realizamos a listagem das respostas dos participantes e identificamos os temas similares presentes em cada resposta.

Por fim, a realização da categorização e a agregação, segundo Bardin (2016), “[...] é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por

diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero [...]”. Nesta etapa, após a realização da leitura das respostas e separação dos dados para análise, chegamos às seguintes categorias: formalismo matemático e aspectos formativos. Cada categoria foi separada em subcategorias e para a definição desta utilizamos o tema da pesquisa e sua pergunta norteadora. O quadro 13 apresenta a descrição de cada categoria e suas subcategorias.

Quadro 13 – Categorização

Categoria	Subcategoria	Descrição
Formalismo Matemático	Características	Utilização das construções de figuras fractais e da visualização para identificar as características das figuras fractais e os padrões que põem a sua formação.
	Conceitos matemáticos	Identificação de conceitos matemáticos a partir da análise e construção de figuras fractais.
Aspectos Formativos	Possibilidades Didáticas	A utilização de construções de figuras fractais e do conteúdo Transformações Geométricas em aula de Matemática.
	Trabalho Colaborativo	Reflexões e trocas de ideias do grupo.
	Contribuição	Reflexões e sugestões possibilitadas pelas atividades realizadas.

Fonte: Esquematizado pela autora.

A partir dessa categorização e do tratamento dos dados realizados na seção a seguir, responderemos a questão investigativa desta pesquisa.

5 ANÁLISES

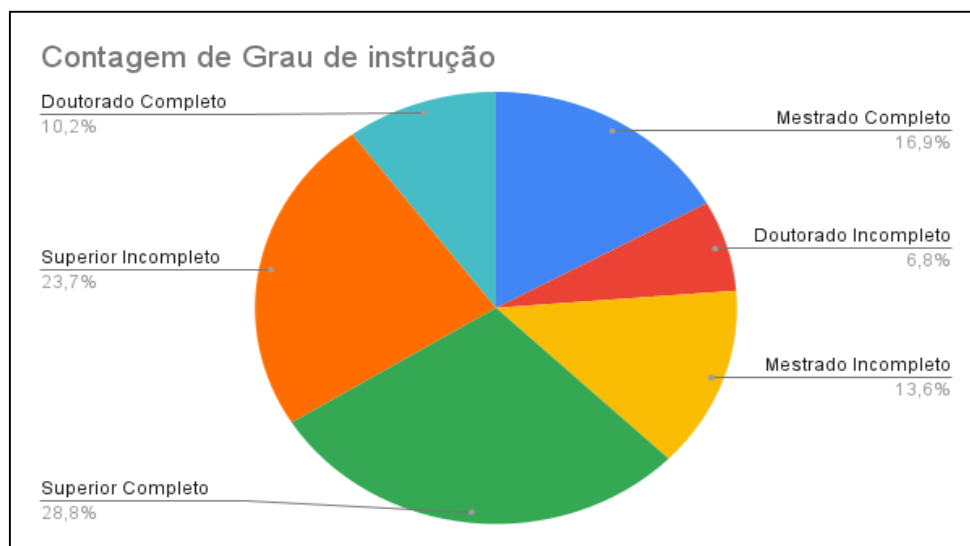
Neste capítulo, apresentamos a análise realizada a partir dos dados coletados durante e após a Oficina Experiências Matemáticas, utilizando os procedimentos de análise apresentados por Bardin (2016).

5.1 SOBRE OS PARTICIPANTES

Antes de realizarmos a análise qualitativa, optamos por apresentar os dados obtidos em resposta ao primeiro questionário, que teve por objetivo conhecer os participantes da Oficina.

Dos participantes inscritos na Oficina Experiências Matemáticas, 59 responderam o referido questionário. Destes 23,7% ainda não concluíram Ensino Superior (Gráfico 1), ocupando desta maneira cargos como estágios ou participantes de projetos em escolas.

Gráfico 1 – Grau de instrução.



Fonte: Gráfico desenvolvido com a ferramenta Gráfico no Excel.

Com relação aos 16 participantes da Oficina Geometria Fractal, observamos que a maioria concluiu a graduação e são profissionais que cursaram ou estão cursando a Pós-Graduação.

O Quadro 14 apresenta a experiência dos participantes em relação à atuação como professor (a) em diferentes âmbitos de ensino.

Quadro 14 – Experiências dos participantes da Oficina Geometria Fractal.

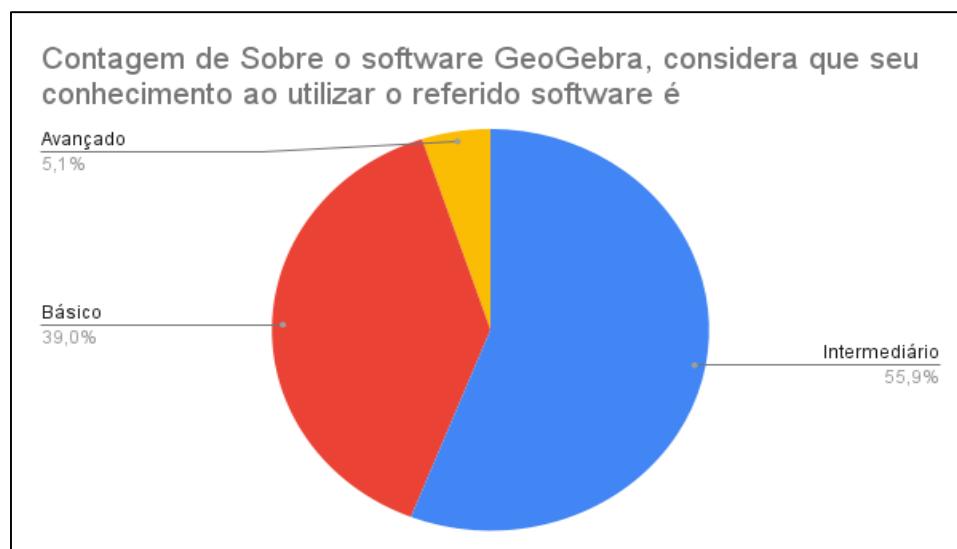
Rede de Ensino	Participantes
Municipal	P1, P4, P5, P8, P15
Estadual	P5, P6, P11, P15
Federal	P8, P12, P13
Privada	P3, P8, P12, P13, P15
Não atua como professor	P2, P5, P6, P7, P10

Fonte: Dados da pesquisa.

Levando em consideração a faixa etária dos participantes, esta varia de 20 a 58 anos. Além disso, percebemos que contam com experiências em diferentes redes de ensino, desde o Ensino Fundamental com escolas municipais e estaduais além de privadas, até a Ensino Superior.

Um dos pré-requisitos para participação em ambos os módulos era possuir algum conhecimento em relação aos comandos e ferramentas do software GeoGebra. Essa imposição foi necessária, pois a realização da oficina ocorreu em um curto espaço de tempo, sendo inviável ensinar sobre o funcionamento do software. Nesse sentido, o Gráfico 2 ilustra a porcentagem dos participantes que responderam o questionário e seus níveis de conhecimento acerca do software.

Gráfico 2 – Conhecimento em relação ao GeoGebra.



Fonte: Gráfico desenvolvido com a ferramenta Gráfico no Excel.

Em especial, analisando as construções dos 16 participantes que realizaram as atividades da Oficina Geometria Fractal, percebemos que não houve grande dificuldade na utilização do software. Os participantes mostraram dominar os comandos básicos, apresentando, inclusive, construções dinâmicas. Questionados sobre onde conheceram o software, 62,5% dos participantes responderam que foi durante a graduação e nenhum dos participantes conheceu durante o Ensino Básico.

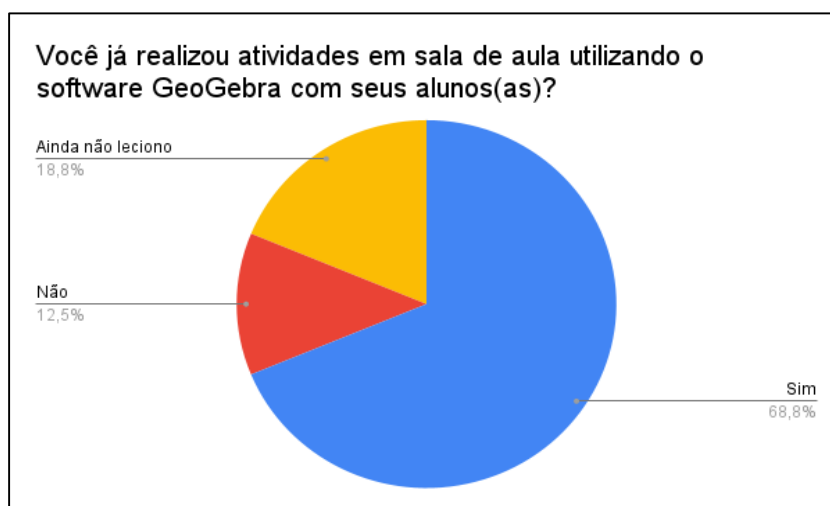
Consideramos como conhecimentos básicos no software GeoGebra a construção de pontos, polígonos, retas, segmentos, transformações geométricas e vetores. Já como conhecimentos intermediários, levamos em conta a utilização de comandos como sequências e listas, além de construções dinâmicas e avançado a utilização de programação para executar os comandos do software.

A busca por aperfeiçoamento de novas ferramentas para o ensino deve acontecer ao longo da prática docente, a formação continuada, que faz parte do desenvolvimento profissional. De acordo com Imbernón (2010), buscar novas questões de prática e compreendê-las durante o processo desencadeia novos saberes na construção docente.

Considerando a idade dos participantes e o fato do software ter sido criado em 2001 como tese de Makus Hohenwarter, podemos considerar que durante o Ensino Básico eles não tiveram o incentivo ao uso de tecnologias em sala de aula ou até mesmo uma limitação ao acesso a computadores.

Questionados sobre os motivos de procurarem a oficina, todos participantes responderam que a procura de novas possibilidades de atividades para sala de aula é o principal interesse, a busca por algo novo, pois a diversificação das aulas é algo positivo. Conforme Boaler (2018), a Matemática é vista como uma disciplina de acertar as perguntas, dificilmente os alunos veem a disciplina para explorar as conexões que a mesma apresenta ou sua aplicabilidade. Com relação a utilização do software GeoGebra em sala de aula, 68,8% dos participantes que concluíram a Oficina Geometria Fractal já realizou atividades utilizando o software (Gráfico 3).

Gráfico 3 – Questionamento sobre a utilização do software em sala de aula.



Fonte: Gráfico desenvolvido com a ferramenta Gráfico no Excel.

Quanto aos conteúdos trabalhados ao utilizar o software em sala de aula, os participantes citaram terem abordado tópicos de Geometria Plana e Espacial e funções. Como o software oferece a representação algébrica, bidimensional e tridimensional, os conteúdos citados são explorados de diferentes maneiras, podendo realizar ligações entre a representação algébrica e geométrica ao mesmo tempo.

Ao serem questionados sobre o conhecimento acerca de figuras fractais e se em sua prática docente já utilizou algum conceito relacionado a este tema, apenas P10 e P16 não conheciam figuras do tipo fractais. Os demais participantes já ouviram falar em algum momento. Além do mais, P6, P8, P12, P13 e P15 utilizam conceitos dessa Geometria em sala de aula, em diferentes contextos como, por exemplo, os conteúdos explorados por P6 e P8, respectivamente:

Explorei superficialmente o tema com meus alunos quando dei aula de artes, construindo cartões fractais para o natal em turmas do EJA. Foi explorado mais conceitos básicos de Geometria Plana. (P6)
Já utilizei em contextos envolvendo medidas de área de seqüências de figuras, ex: Triângulo de Sierpinski. (P8)

Os dados coletados no questionário inicial respondido pelos participantes possibilitaram, em especial, o levantamento do perfil dos 16 participantes que concluíram o módulo de Geometria Fractal. A partir deste, identificamos informações sobre sua formação, sua experiência na docência e motivos que os levaram a participar da Oficina. Na seção a seguir são apresentadas as análises de acordo com Bardin (2016) e as categorias elencadas na seção 4.4.

5.2 FORMALISMO MATEMÁTICO

Nessa seção são apresentadas as subcategorias referentes à categoria denominada Formalismo Matemático, que foi definida a partir das tarefas propostas no módulo de Geometria Fractal. Ambas atividades tinham como embasamento conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados durante a Educação Básica.

5.2.1 Características

A definição de figuras fractais é apresentada por Barbosa (2005) referindo-se como figuras que apresentam certos padrões. Esses padrões são referentes à maneira como a figura fractal é geralmente construída, que é uma das características que tais entes geométricos apresentam. Na Tarefa 1, inicialmente foi apresentada uma breve explicação sobre o processo de formação da árvore fractal. Após a explicação, os participantes tiveram acesso ao *applet* com a construção e em seguida alguns questionamentos.

Assim, conseguimos identificar nas respostas dos participantes duas características principais relativo às figuras fractais, conforme o Quadro 15.

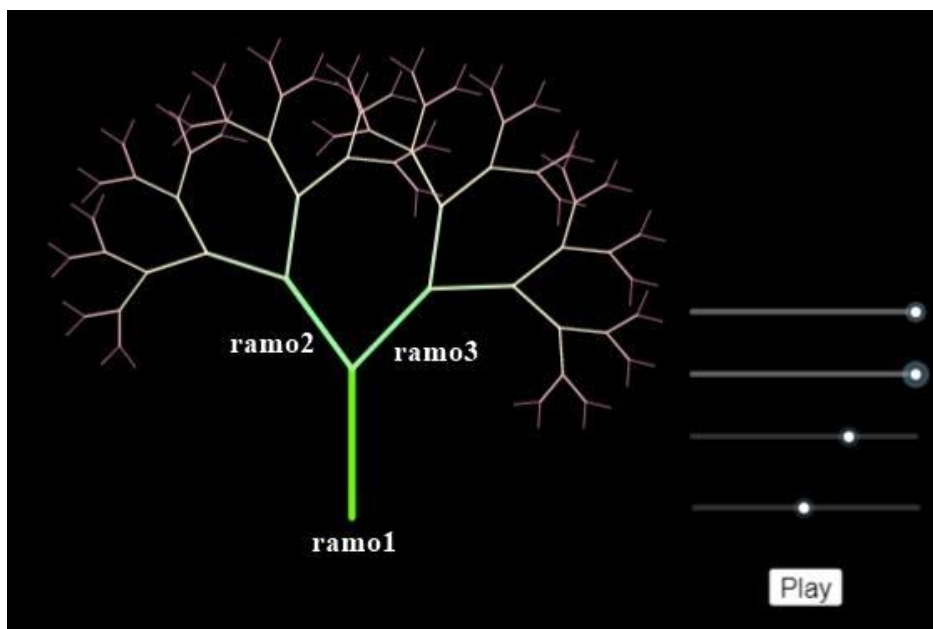
Quadro 15 – Características observadas na realização da Tarefa 1.

Característica	Participante
Auto similaridade	P2, P6, P7, P9, P13, P15
Simetria	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P11, P12, P14

Fonte: Dados da pesquisa.

Com exceção de P10 que não identificou nenhum padrão e P16 que não especificou qual o padrão que foi observado, os demais participantes relataram que o padrão é visualizado ao movimentar os controles deslizantes no *applet*. Os padrões identificados são com relação a semelhança entre uma etapa e outra da construção. A ideia era que os participantes percebessem que a cada novo galho da árvore, dois novos galhos eram construídos. A resposta de P11 foi a esperada e para exemplificar o participante utilizou uma imagem (Figura 9) e a descreveu: “Por exemplo, na figura vemos que do ramo 1 ramificaram o ramo 2 e ramo 3”(P11).

Figura 9 – Exemplo ilustrado pelo participante P11.



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P2 também exemplificou o padrão que visualizou ao movimentar os controles deslizantes do *applet*. Ele se referiu ao padrão que encontrou como “mantendo a mesma lógica inicial” (P2), conforme o trecho a seguir:

Sim, cada segmento que forma esta figura dinâmica é prolongado por dois segmentos a um pouco menores que o anterior, cada segmento (galho) origina outros dois, mantendo a lógica inicial, ou seja, os descendentes são individualmente menores e também geram outros dois segmentos cada, no mesmo estilo. (P2)

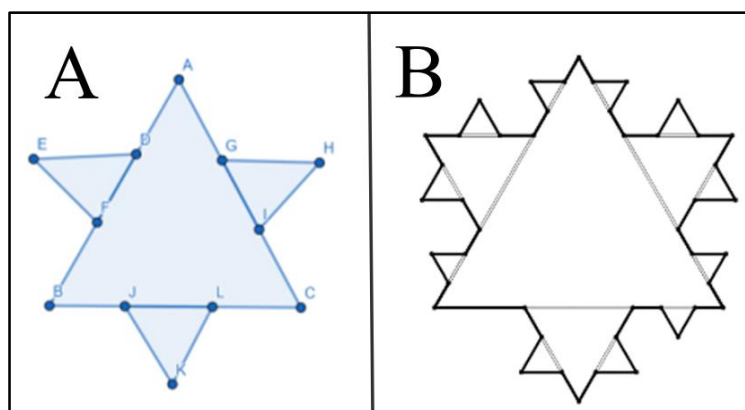
Por sua vez, P9 utilizou o termo padrão para se referir à construção: “os ramos (galhos da árvore) vão se formando de forma semelhante ao original, ou seja, são gerados por um padrão repetido” (P9).

Tratamos aqui o padrão como sendo uma das características das figuras fractais. Com relação a esse termo, Barbosa (2000) aponta que:

[...] propriedades, regras e algoritmos podem ser consideradas como padrões; aliás, a Matemática, talvez exagerando um pouco, pode ser pensada como um conjunto de padrões: numéricos, geométricos, algébricos, etc. (BARBOSA, 2000, p. 9).

O padrão de construção também foi identificado na Tarefa 2-c em que os participantes deveriam construir um floco de neve a partir dos padrões que identificaram ao movimentar os controles deslizantes do *applet*. Essa construção foi realizada por P3, P5, P6, P8, P9, P10, P11, P13 e P14. As construções realizadas pelos participantes seguiram praticamente a mesma sequência na construção. Para exemplificar, a Figura 10 (A e B) ilustra as construções realizadas por P7 e P6, respectivamente.

Figura 10 – Construções dos participantes P7 (A) e P6 (B).



Fonte: Dados da pesquisa.

Os participantes P11 e P15 detalharam um roteiro de como realizaram a construção do fractal no software GeoGebra. Para exemplificar segue o roteiro realizado por P11:

Passo a passo:

- Interação 1: Tracei o segmento AB; Com a ferramenta polígono regular tracei o triângulo equilátero ABC.

- Interação 2: Construí o triângulo DFG da mesma maneira que o triângulo ABC; Para dividir o segmento DF em três partes igual tracei uma semirreta DH;

Após, com a ferramenta compasso, tracei a circunferência de centro D e raio DI;

Com o mesmo raio tracei as circunferências de centro I e raio IJ, centro J e raio JK, assim dividi a semirreta DH em três partes;

Tracei o segmento KF e, em seguida, com a ferramenta retas paralelas, as retas n e r paralelas a esse segmento passando por J e I respectivamente;

Marquei os pontos de intercessão dessas retas com o segmento DF dividindo-o em três partes congruentes;

Repeti o processo para os segmentos FG e GD;

Com a ferramenta polígono regular criei o triângulo LMD1 a partir do segmento LM;

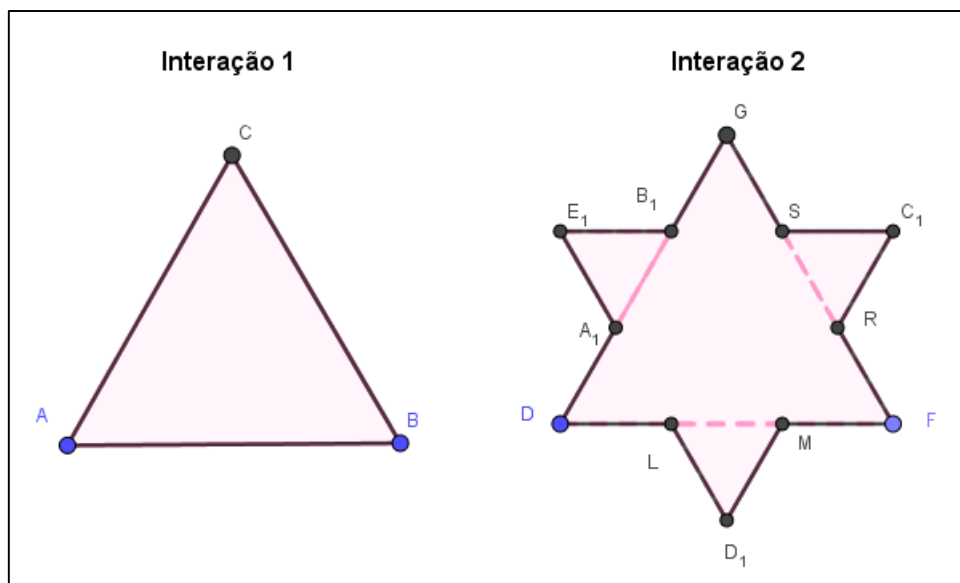
Repeti o processo para os triângulos SRC1 e $B_1E_1A_1$;

Tracei os segmentos a partir dos vértices obtendo o fractal floco de neve.

- Próximas interações podem ser construídas da mesma forma. (P11)

O participante também compartilhou a representação no software (Figura 11):

Figura 11 – Floco de Neve construído pelo participante P11.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tanto nas figuras apresentadas quanto no roteiro compartilhado pelos participantes, podemos perceber procedimentos visuais utilizados durante as construções. Como citado no capítulo dos aspectos teóricos, consideramos como procedimentos visuais os elementos citados por Blanco, Godino e Montecón (2018): girar, simetrizar, cortar e transladar corpos no espaço. Nesse caso, consideramos o espaço bidimensional nas construções. Observamos aqui que ainda vamos considerar como procedimento visual a composição e recomposição da representação visual das figuras fractais.

No fractal Curva de Koch (Floco de Neve), outro padrão encontrado é a simetria da figura, que independente da iteração do fractal ele contará com seis eixos de simetria. Para facilitar a visualização, alguns participantes marcaram os eixos de simetria sobre a construção. Outros, além da marcação, explicaram como os eixos estão identificados. Como exemplificam os trechos de P1 e P11:

Para facilitar a identificação da simetria eu fiz uso da ferramenta simetria em relação a um eixo e arrastei o ponto para verificar se estava sobre o possível desenho simétrico. (P1)

Possui 6 eixos de simetria, eles são traçados unindo os vértices opostos. (P11)

Nesta atividade, apenas o participante P16 não soube responder quantos eixos de simetria a figura possui. Ele justificou que não havia entendido o que seria uma simetria. Nesse sentido, Boaler (2018, p. 72) aponta que “a compreensão visual é incrivelmente poderosa para o estudante, acrescentando todo um novo nível de compreensão”. Esse acréscimo refere-se ao modo como a autora aborda diferentes conteúdos em sala de aula. Frequentemente é sugerido aos alunos que procurem desenhar, codificar um problema para que comecem a resolvê-lo, justamente como uma estratégia de estimular a visualização do que pede o problema, para promover a resolução, facilitando assim a criação mental do que seria o conceito.

Nas tarefas 1 e 2 observamos que a maioria dos participantes conseguiu visualizar as características que compõem a figura fractal que estava sendo analisada. A partir das justificativas apresentadas por eles, podemos perceber que a visualização é uma ferramenta importante na aprendizagem. Em conformidade a Leivas (2009), a visualização, mesmo quando não entendido o conceito formal, auxilia no processo de criação de uma imagem mental, auxiliando a compreender o que é o conceito do termo.

5.2.2 Conceito

Na subcategoria conceito buscamos identificar, a partir das atividades realizadas pelos participantes, quais foram seus entendimentos sobre o conceito de figuras fractais e de que maneira eles apresentaram isso durante as discussões no fórum e nas respostas do questionário final.

Durante a realização do módulo de Geometria Fractal não foi apresentado um conceito formal do que seria uma figura fractal e sim foram delineadas construções de figuras buscando explorar nestas as características que determinam uma figura fractal. Tudo isso, em conformidade com Serra e Karras (1997), que elencam as características como sendo o padrão de formação nos fractais geométricos, autossemelhanças e simetrias.

Analisando o fórum de discussões, observamos duas construções onde foram apresentadas figuras fractais conforme suas características. A proposta de P3 foi trabalhar o conteúdo de transformações geométricas, como é visto na introdução da sua atividade:

A fim de abordar o conteúdo de forma mais dinâmica e mais intuitiva para os alunos, trouxe uma construção no Geogebra sobre Transformação Geométrica – Translação, podendo assim fazer uma atividade investigativa com o controle deslizante. A importância de trabalhar com o Geogebra para essa atividade é que os alunos podem visualizar e diferenciar os tipos de transformações geométricas. (P3)

Temos a sugestão de trabalhar com a translação de figuras e ainda a sinalização de que o participante compreende que o software pode auxiliar os alunos a visualizarem o que ocorre em cada transformação. Como resposta a atividade de P3, questionamos se esse participante consegue observar as características da figura fractal em sua construção. Em resposta, notamos que a o mesmo tentou construir triângulos que continuam por ramificações, mas não conseguiu. Por isso, deixou somente como sugestão trabalhar com a translação das figuras apresentadas. É visto que P3 conseguiu identificar que no padrão de construção de algumas figuras fractais são utilizadas transformações geométricas, porém uma figura fractal possui mais características do que apenas translações.

Ainda em resposta a P3, outro participante questionou sobre o conceito de figura fractal (Figura 12).

Figura 12 – Comentário de P2 na sugestão de atividade de P3.

Estive com dúvidas na construção deste fractal para ser utilizado em sala de aula, durante as minhas buscas encontrei dois trabalhos acadêmicos que podem lhe servir de inspiração, acredito que serão muito úteis para os seus estudos sobre fractais, segue o link para sua apreciação.

https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651?locale=pt_BR
<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1247/1084>

Penso que será interessante analisar para ampliar seus conhecimentos sobre fractais. Tenho uma dúvida, a sua construção pode ser considerada um fractal? me perdoe se perguntei indevidamente, porém, penso que esta transformação não se refere aos fractais, pelo menos conceitualmente.

Seria possível refazê-la? Reconheço que estou limitado para apresentar alguma sugestão mais específica.

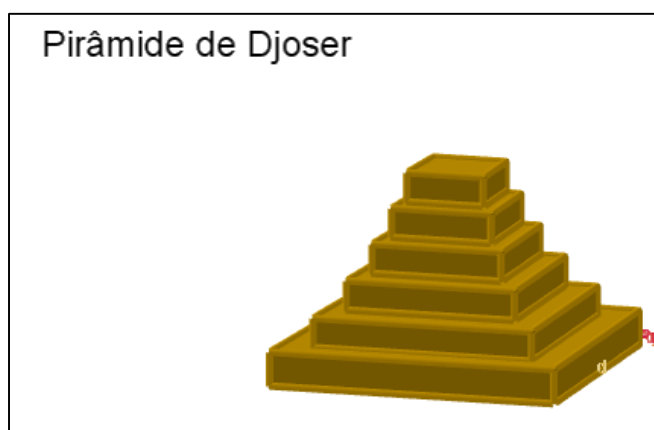
Agradeço pela oportunidade de compartilhar a minha humilde opinião pessoal, na expectativa de ter o seu feedback.

Fonte: Dados da pesquisa.

Além de questionar se o conceito de fractal estava correto, foi sugerido materiais para auxiliar no estudo e compreensão dessas figuras. O trabalho colaborativo tende a trazer o diálogo e o compartilhamento de ideias de maneira crítica, gerando um ambiente de crescimento profissional.

Já P14 questiona se a figura que utilizou como parte de uma atividade para explorar a História da Matemática, seria um fractal (Figura 13). Isso mostra que o participante não teve o entendimento de forma clara do que é uma figura fractal.

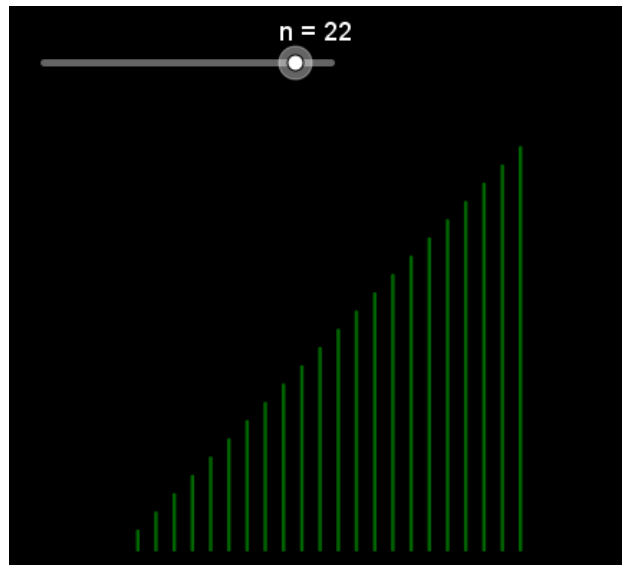
Figura 13 – Construção apresentada por P14.



Fonte: Construção realizada por P14 utilizando o software GeoGebra.

Ainda com relação ao conceito de figura fractal, P8 trouxe uma definição que nesta pesquisa não foi abordada. Como sugestão de atividade, ele trouxe uma construção de segmentos e sugeriu que fosse determinado o padrão de construção da figura ao movimentar os controles deslizantes (Figura 14).

Figura 14- Construção da atividade de P8.



Fonte: Dados da pesquisa.

Questionado sobre as características de um fractal, o participante trouxe a seguinte justificativa: “fiz a atividade com base na definição dada por Stewart (1996): ‘Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores’”. (P8)

Até então, conforme o participante, esta era a definição que tinha conhecimento sobre figuras fractais, mas que com os comentários nas demais publicações pode conhecer uma definição mais precisa, expandindo seu conhecimento sobre o tema.

No questionário final foi apresentado como sugestão por P14, que em uma próxima oportunidade fosse fornecida a definição de figuras fractais. Porém, como isso não foi apresentado durante o módulo, os próprios participantes trouxeram nas discussões, auxiliando os colegas no entendimento do conteúdo. Reforçamos a importância dessa discussão e o quanto ela agrega em nosso módulo. A busca de conhecimento vai além de uma única opinião. Diante de tantos meios de pesquisa de fácil acesso, podemos contar com uma gama alta de possibilidades de estudos.

Na próxima seção, são apresentados os conteúdos matemáticos que podem ser explorados a partir do estudo de figuras fractais, de acordo com o entendimento de cada participante desta pesquisa.

5.2.3 Possibilidades didáticas

Um dos objetivos da Oficina Experiências Matemáticas foi a possibilidade de conhecer um pouco mais sobre conteúdos relacionados à Geometria e sua abordagem utilizando o software GeoGebra. Na primeira parte da tarefa disponibilizada no Fórum denominada construção de Figuras Fractais foi sugerida aos participantes que propusessem uma atividade cujo objetivo seria trabalhar o conteúdo de Transformações Geométricas no Ensino Médio. A abordagem do conteúdo deveria ser dada a partir da exploração de figuras fractais, previamente construídos no software GeoGebra.

Ao analisar as atividades postadas pelos participantes, conseguimos perceber algumas possibilidades didáticas usando o referido software. Observamos que alguns participantes não entenderam o objetivo da atividade, que era construir um fractal e a partir dele indicar conceitos matemáticos a serem trabalhados. Alguns não apresentaram nenhum conceito e outros não apresentaram um fractal.

O Quadro 16 apresenta a compilação das abordagens apresentadas pelos participantes.

Quadro 16 – Atividades sugeridas pelos participantes no Fórum de construções.

Conteúdo a ser trabalhado	Figura Fractal	Participante
Transformações Geométricas	Floco de Neve	P1
	-	P6
	Fractal hexagonal de Durer	P13
	-	P3
	Fractal simples	P8
Polígonos regulares	Fractal do tipo Durer	P2
Sequências	Floco de neve	P11
	Fractal triminó	P15
	Pirâmide de Sierpinski	P12
	Mandala	P5
Potenciação	Fractal do tipo árvore	P4
	-	P14
Áreas e ou volumes	Pirâmide de Sierpinski	P12
	Mandala	P5
	Fractal tipo árvore	P9
	Pentágono	P10
	Fractal tipo árvore	P7

Fonte: Dados da pesquisa.

Como sugestão de conteúdo a ser trabalhado foi sugerido aos participantes um material complementar baseado no Livro Aberto de Matemática. Mesmo tendo-os induzidos a apresentarem atividades envolvendo esse conteúdo, muitos participantes optaram por trazer outros conteúdos, como foi o caso da História da Matemática, da interdisciplinaridade e das atividades lúdicas.

A variedade de conteúdos apresentados além de transformações geométricas, não estava dentro do que previmos, porém mostram que as figuras fractais são uma opção de estratégia didática que pode unir ambas as Geometrias Plana e Espacial além de outros conteúdos, como por exemplo sequências.

Observamos também a utilização do software GeoGebra como um aliado na execução das atividades. O software por ser de fácil acesso pode ser um aliado para atividades em aulas de Matemática, como é visto nas palavras de Mathias, Silva e Leivas (2019):

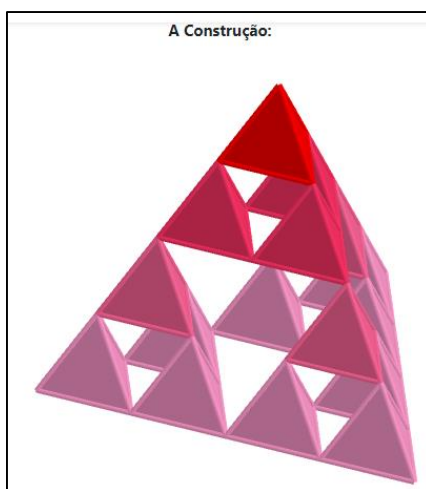
Tal ambiente possui um aspecto peculiar, que é o de proporcionar ao usuário a manipulação e a animação das construções realizadas, de forma que não percam suas propriedades inerentes. Além disso, é possível obter a sua posterior visualização, a fim de perceber possíveis generalizações. (MATHIAS; SILVA; LEIVAS, 2019, p. 63).

Ou seja, o professor muitas vezes não percebe o ganho pedagógico que pode ter ao usar o software. Como exemplos podemos considerar a atividade proposta por P12, que ao invés de construir uma figura fractal utilizou uma construção disponível no site do software GeoGebra (Figura 15), para trabalhar com diversos conceitos, como descrito a seguir:

Utilização em sala de aula: Penso nessa construção de forma para trabalhar a relação de sequências (Sequências e Progressões, explorando perímetro, área e também volume das pirâmides (tetraedros), mas também pensando na possibilidade da construção real com palitos e papel do fractal em 3D, explorando uma atividade mão na massa, uma exploração virtual com o GeoGebra e ainda a relação de conceitos envolvendo diferente conteúdos (Progressões e Geometria Plana e Espacial).

Sugestão: Ainda deixo como sugestão de construção de forma recursiva, pois nessa que realizei utilizei ela apenas de forma mecânica e estática. Fica como sugestão ainda de utilização então, explorar mais esse conceito e as ferramentas que o GeoGebra possui. (P12)

Figura 15 – Pirâmide de Sierpinski.



Fonte: Construção realizada por P12 utilizando o software GeoGebra.

Como exemplo de atividades que foram sugeridas pelos participantes, a sequência ilustrada na Figura 16 foi elaborada por P1. Nela, o participante utilizou a construção inicial do fractal Floco de Neve.

Figura 16 – Atividade proposta por P1.

Desenvolvi a atividade pensando em estimular a interação do aluno com o aplicativo. Abaixo seguem as orientações da atividade:

Escolha um triângulo qualquer e marquei utilizando a ferramenta polígono.

- a) Identifique, com uso da ferramenta polígono, os triângulos transladados em relação ao escolhido.
- b) Identifique os triângulos em simetria de rotação com a ferramenta polígono.
- c) Construa os eixos de simetria utilizando a ferramenta reta.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o participante, por meio desta atividade, buscou trabalhar com as translações, rotações ocorridas com os triângulos que compõe a figura fractal e as simetrias encontradas. Conforme Blanco, Godino e Montecón (2018), os procedimentos visuais de transladar, rotacionar e criar uma imagem mental da figura que está sendo analisada, possibilitam o entendimento do que acontece com o triângulo em cada etapa de sua construção. Para isso, foi sugerido utilizar as próprias ferramentas que o software possui. Em conformidade a Santos (2014, p. 81), “sabemos que as ferramentas ‘tradicionais’, como régua e compasso, auxiliam na visualização de muitas figuras geométricas, mas o ambiente computacional permite visualizar não somente a imagem estática, mas também as relações que a engloba”. Sabendo como utilizar as ferramentas que o software proporciona, o professor tem um aliado, auxiliando na compreensão das características.

A proposta inicial dada por P1 foi trabalhar com transformações geométricas. Porém, durante as discussões no fórum, surgiram outras possibilidades de conteúdo para serem explorados, como podemos observar em um comentário deixado na publicação de P1 (Figura 17).

Figura 17- Contribuição realizada na atividade de P1.

4) Também acho interessante incluir o trabalho com o limite da soma aqui. Pela própria natureza da construção, existe aqui um apelo quase irresistível a isso, a partir por exemplo da pergunta "qual seria a soma de todas as A_i ?"

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos a riqueza de possibilidades que podem ser exploradas com diferentes conteúdos do Ensino Básico, como a atividade sugerida por P11 (Figura 18), onde foi proposto utilizar o Fractal Curva de Koch para trabalhar com sequências, diferente de P1 que utilizou o mesmo fractal e explorou transformações geométricas.

Figura 18 – Atividade proposta por P11.

Realizei a construção de 3 interações da Curva de Koch com a possibilidade de continuar a construção para mais interações se o aluno ou professor acharem necessários.

Para atividade eu apresentaria esse arquivo .ggb para os alunos e pediria para que eles exibissem e escondessem as interações para conhecer melhor essa curva.

Após esse momento de compreensão do fractal podemos trabalhar sequências a partir do comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva, realizando a construção de uma tabela para melhor visualização por parte dos alunos. Após podemos perguntar qual o comprimento de cada segmento e da curva em qualquer interação que não está sendo visualizada no momento.

Também é possível trabalhar a própria construção do fractal, visto que para construir a curva utilizei a construção de um triângulo equilátero e também separei um segmento em três partes utilizando circunferências congruentes, segmento e segmentos paralelos.

Por não saber utilizar os comandos de lista, sequência e a criação de botões pode ser que eu tenha realizado a construção da maneira mais difícil, porém acredito que da maneira que está construída pode ser bem aproveitada.

Fonte: Dados da pesquisa.

Posterior à publicação, o participante foi questionado sobre como faria a introdução do conteúdo de Geometria Fractal para poder abordar esse tipo de figura. Como resposta, P11 trouxe a sugestão de utilizar os materiais das tarefas anteriores deste módulo. Ainda, como podemos notar no comentário (Figura 19), foi mencionada a visualização para o entendimento dessas figuras.

Figura 19 - Resposta de P11 a sua atividade.

Esse conteúdo poderia ser trabalhado tanto com alunos do 7º ano ao trabalhar sequências como também poderia ser trabalhada com alunos do segundo ano do médio para revisar sequências. Nunca trabalhei geometria fractal com meus alunos mas acredito que para a introdução você pode utilizar exercícios como os propostos nas tarefas anteriores já que eles exigem mais da visualização, depois de os alunos compreenderem o fractal você poderia utilizar exercícios como esse para que eles explorem a visualização e a parte da dedução das fórmulas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme Leivas (2009) e Santos (2014), a visualização é algo muito importante para a compreensão de diferentes conteúdos matemáticos, pois visualizar com a mente vai além do material concreto e buscar conhecimentos sobre ferramentas para auxiliar nos procedimentos de visualização é um processo importante na prática docente.

Defendemos que a busca por formação (cursos, oficinas, etc.) é fundamental para os professores, sendo um caminho para o incentivo da utilização de ferramentas de ensino, como o software GeoGebra. Conforme Amancio e Sanzovo (2020), é necessário que o professor esteja preparado para utilizar as tecnologias em sala de aula, buscando sempre pesquisar sobre essa realidade, aprimorando seus conhecimentos.

5.3 ASPECTOS FORMATIVOS

5.3.1 Trabalho Colaborativo

A segunda parte da tarefa proposta no fórum: Construção de Figuras Fractais, teve por objetivo o compartilhamento de ideias entre os participantes, por meio de comentários nas publicações. De acordo com Fiorentini (2004), no trabalho colaborativo:

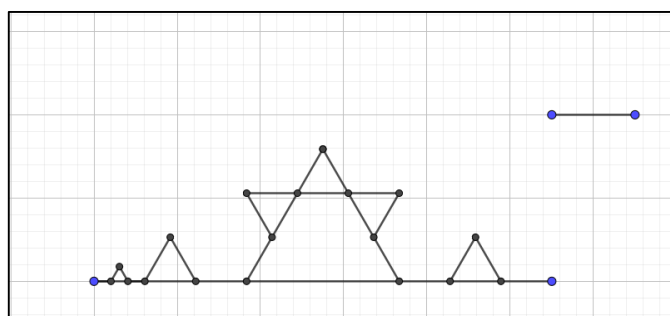
[...] todos trabalham conjuntamente (colaboram) e se apoiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não-hierárquicas, havendo liderança compartilhada e corresponsabilidade pela condução das ações. (FIORENTINI, 2004, p. 50).

Observamos que nem todos os 16 participantes realizaram a tarefa proposta. Porém, a interação nas publicações foi significativa para que conseguíssemos realizar as análises. Dentre as sugestões, os participantes questionaram sobre como realizar a

atividade, sugeriram alterações e compartilharam materiais complementares. A seguir, apresentamos alguns exemplos de como essas interações ocorreram.

O participante P1 sugeriu uma atividade onde estaria trabalhando translação e simetria a partir da construção inicial do fractal Floco de Neve. Para realizar essa atividade são necessárias a visualização e a manipulação da construção sugerida pelo participante (Figura 20).

Figura 20 – Construção atividade P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Posterior à postagem foi realizada uma primeira interação sugerindo que fosse acrescentado na construção um controle deslizante para facilitar na manipulação para analisar o que acontece com cada triângulo. O participante P7 elogiou a postagem e comentou que seria possível realizar essa atividade com o celular em vez de levar os alunos para sala de informática, uma vez que o software GeoGebra conta com aplicativo para dispositivos móveis. Com relação a sugestão feita inicialmente sobre o controle deslizante, o participante relatou não ter domínio de ferramentas do software. Um dos pré-requisitos para participar da oficina era o conhecimento sobre o software GeoGebra e suas ferramentas.

A formação continuada de professores, mais do que atualizá-los, deve ser capaz de criar espaços de formação, de pesquisa, de inovação, de imaginação, etc., e os professores devem saber criar tais espaços para passarem do ensinar ao aprender. (IMBERNÓN, 2010, p. 11).

Entendemos que a busca por formação continuada de professores é algo natural. Estamos em constante mudança e estar disposto a aprender para poder ensinar é um processo que exige dedicação.

Os participantes puderam escolher qual figura fractal trabalhar e isso possibilitou uma diversidade de figuras. Como o tema Geometria Fractal é pouco conhecido, alguns participantes puderam conhecer outros fractais a partir da postagem dos colegas. A exemplificar, o participante P13 trouxe a sugestão de trabalhar com o fractal Hexágono de Durer. A partir disso, começaram discussões no fórum e o participante P11 mostrou-se interessando na sugestão do colega, pois não conhecia essa figura fractal.

Seguindo as contribuições, P13 trouxe além da explicação solicitada, materiais complementares para auxiliar os demais colegas que queiram trabalhar com essa atividade em sala de aula (Figura 21).

Figura 21 – Comentário realizado por P13 em sua atividade.

Claro que posso explicar. Melhor vou disponibilizar um link de uma oficina que desenvolvi com meu alunos envolvendo esses conceitos geométricos.
 Link: <http://www.ufn.edu.br/site/arquivo/baixar-arquivo-anexo/82CBFFB58278B2D6B5C6F8759999CB63>

Caso não consiga entre na página: <http://www.ufn.edu.br/site/ensino/mestrado/programa-de-posgraduacao-em-ensino-de-ciencias-e-matematica/producoes/> e vá em recursos pedagógicos e selecione "Caderno didático 4 de 4 - Fractal Hexagonal de Dürer".

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos o interesse em colaborar com o entendimento do participante, trazendo mais opções para aprofundar seus estudos acerca do tema. Além disso, nesse espaço os participantes possuíam autonomia para trazer críticas ou sugestões para que a proposta seja entendida por todos. Como podemos ver no comentário apresentado por outro participante a esta mesma atividade (Figura 22):

Figura 22 – Comentário de um participante na atividade de P13.

Rapaz, parabéns pela atividade, o PDF que você disponibilizou [redacted] explica muito bem o passo a passo da construção e o trabalho com áreas que você faz depois. Gostaria de colocar algumas observações/sugestões:

- 1) Não nomeie seus arquivos com acentuação, pode ser que muitos não consigam abrir. Eu, aqui, já salvei sem acento gráfico e com o underline no lugar dos espaços;
- 2) Acho que deve ser interessante pensar numa nova ferramenta para os procedimentos repetitivos. Construir 6 hexágonos dentro de 1 é um procedimento que temos que fazer a cada iteração, então acho mais prático definir uma nova ferramenta que faça esse procedimento e aplicá-la a cada vez;
- 3) Eu também não faria a conta da área para cada iteração. Aqui acho mais vantajoso a exploração do reconhecimento de padrões (neste caso, cada A_{i+1} é $2/3$ de A_i), e daí para a expressão exponencial.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Além de sugestões quanto à nomeação dos arquivos, foram discutidas formas de explorar o conteúdo proposto. Na publicação de P11, alguns participantes não conseguiram compreender o que foi postado. Para auxiliar, P11 interagiu e explicou, detalhando em sua construção elementos dos processos visuais (Figura 23).

Figura 23 – Interação do participante P11 no fórum de discussões.

Postei outro arquivo com a construção, talvez esteja melhor de visualizar.
 Quanto a ferramenta: ela serviu para facilitar o processo da construção da curva já que para cada nova interação os segmentos devem ser separados em três partes iguais, então ao invés de realizar isso manualmente utilizei essa ferramenta. Para usa-la você deve deixar marcado a caixa "Continuar interações" e logo após a caixa "Pontos" que parece abaixo do texto explicativo. Então se você quiser construir a próxima interação entre os dois primeiros pontos da esquerda que são os pontos A e Z, por exemplo, você deve clicar na ferramenta "Interações" que está na barra de ferramentas, logo após nos pontos A, Z, C, D e E. Isso deve seguir para a cada dois pontos e você fará a quarta interação.
 Consegui realizar isso em outro computador com o arquivo que deixei nos comentários aqui, talvez o da publicação esteja salvo de maneira errada.

Fonte: Dados da pesquisa.

A construção aqui citada se refere à Curva de Koch ou Floco de Neve, além da explicação detalhada que o participante trouxe para auxiliar na explicação. Ela contou ainda com o aporte visual, pois com a construção realizada no software foi possível identificar quais comandos estavam sendo sugeridos.

A partir das produções realizadas e aqui exemplificadas, percebemos a importância do trabalho colaborativo entre professores. Conforme Ferreira (2006):

Um ponto relevante na constituição de grupos de trabalho colaborativo é, a nosso ver, a percepção da participação no grupo como fonte de aprendizagem. Ou seja, o grupo torna-se o contexto no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas, bem como aprender a partir dos saberes e práticas de outros professores, permitindo-lhe aprender por meio do desafio das próprias convicções. (FERREIRA, 2006, p. 125).

Notamos aqui o interesse dos participantes em tentar entender o que o colega estava sugerindo com suas atividades e como as construções disponibilizadas pelos mesmos foram importantes para auxiliar na explicação.

5.3.2 Contribuições

Ao término de todos os módulos da Oficina Experiências Matemáticas, os participantes que concluíram 75% ou mais das atividades receberam por e-mail um questionário para avaliação da Oficina.

Com as informações deste questionário podemos avaliar de que forma os módulos da Oficina Experiências Matemáticas trouxeram entendimento dos conceitos explorados e de que forma isso impactou no pensamento dos participantes, para repensar suas práticas em sala de aula.

Questionados sobre suas expectativas em relação às oficinas, a maioria dos participantes respondeu que superou as expectativas. O Quadro 17 apresenta algumas dificuldades relatadas pelos participantes.

Quadro 17 – Principais dificuldades encontradas no Módulo Geometria Fractal.

Participante	Principal dificuldade encontrada
Não identificado	Módulos 1 e 2 , por falta de tempo
Não identificado	Construção de um fractal no Geogebra, módulo I, foi mais um desafio do que dificuldade, porém foi muito bom aprender.
P8	Tive dificuldade no módulo de fractais porque a ordem das atividades me confundiu. Tive a impressão que a ordem das atividades mudou ao longo do curso.
Não identificado	Sim, tenho pouca prática com o GeoGebra, tive um pouco de dificuldade para realizar as atividades.
P15	Fractais módulo 1
P7	Em relação ao tempo, a primeira oficina como eu tive tempo achei tranquila.
P11	Achei mais complicado realizar as dos fractais. Achei que iria ser explicado o que é um fractal e como aplicá-lo em sala de aula, como eu nunca estudei muito sobre o assunto senti um pouco de dificuldades para realizar as tarefas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Um requisito básico para a realização da oficina era ter conhecimento das ferramentas do software GeoGebra, pois o curto tempo para a realização de cada módulo impossibilitou um aprofundamento das funcionalidades do mesmo. Observamos pelo relato dos participantes que a falta de domínio do software foi uma dificuldade apresentada para a realização das atividades propostas.

Outra sugestão que consideramos muito importante foi apresentada por P11: “o participante sentiu a necessidade da explicação do conceito de fractal. Como o objetivo deste módulo foi abordar maneiras de identificar conteúdos matemáticos em figuras fractais e visualização de suas características a partir da manipulação de figuras fractais, faltou, na oficina, uma explicação específica do que se trata esse tipo de figura.”

O tempo disponibilizado para realizar as atividades foi algo negativo durante a oficina, pois muitos participantes deixaram como sugestão um maior prazo para realizar as tarefas.

O módulo de Geometria Fractal trouxe uma ideia de como essa Geometria pode ser explorada em sala de aula. Com a colaboração dos participantes e os comentários críticos e construtivos, podemos avaliar que, mesmo com a ausência de definições sobre o tema, os participantes foram além das tarefas propostas e trouxeram sugestões de atividades para serem trabalhadas em sala de aula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como objetivo geral propomos investigar quais procedimentos visuais são utilizados na resolução de atividades envolvendo conteúdos matemáticos e a Geometria Fractal por professores do Ensino Básico.

Buscando atender tal objetivo analisamos dissertações, teses e artigos científicos, que tratem do tema Geometria Fractal, com o intuito de conhecer habilidades desenvolvidas por outros pesquisadores. Nessa análise, percebemos que a busca por trazer esse tema para sala de aula é algo que já vem sendo explorado por outros pesquisadores.

Em meio à pandemia, sentimos a necessidade de adaptação desta pesquisa, processo este que educadores de diferentes níveis também precisaram se adaptar. Nesse meio, a formação continuada de professores se tornou necessária e a utilização de encontros remotos foi a solução para a aplicação e conclusão desta pesquisa.

Os dados obtidos na oficina foram categorizados conforme sugerido por Bardin (2016) e ajudaram a responder a questão de pesquisa. Durante a análise dos dados obtidos, identificamos os processos visuais utilizados pelos professores em cada tarefa e a contribuição dos mesmos no fórum de discussão. Sendo a interação dos participantes no fórum um momento de colaboração com a própria formação, visto que os demais também puderam contribuir com comentários e a formação de seus colegas.

As construções realizadas pelos participantes, bem como a sugestão de atividades, permitiram que eles utilizassem os procedimentos visuais, tais como transladar, simetrizar, rotacionar e criação de imagens mentais para explicação de conteúdos que podem ser trabalhados a partir de figuras fractais. Desse modo, destacamos a importância da busca por novos conhecimentos por meio de formações continuadas e também a importância da colaboração em grupo.

Por mais que a intenção inicial era induzir a exploração do conteúdo de transformações geométricas, os participantes apresentaram sugestões de outros conteúdos da Geometria Euclidiana para ser explorada dentro da Geometria Fractal. Observamos também a necessidade de um conhecimento mais aprofundado nas ferramentas disponíveis no software GeoGebra, já que este pode ser utilizado como facilitador da identificação de elementos visuais.

A realização desta pesquisa contou com desafios que para serem superados foram necessários muito empenho e dedicação para que ao final chegássemos a esta

conclusão. Dentre os principais desafios encontrados na pesquisa o primeiro deles foi a adaptação ao sistema remoto. As orientações que antes seriam presencialmente dentro da Universidade passaram a ser por vídeo chamadas ou mensagens trocadas por WhatsApp. Nessas trocas de mensagem nem sempre conseguimos nos expressar com clareza, deixando assim lacunas que seriam importantes no andamento da pesquisa.

Outro desafio foi com relação a Oficina, que na proposta inicial seria realizada presencialmente e precisou ser adaptada para que acontecesse remotamente. Durante a sua realização muitos professores acabaram realizando uma ou duas atividades e acabaram desistindo de concluí-la. O que é comum em muitas oficinas, por experiência própria quando vamos em busca de formação criamos expectativas em relação ao que vai ser proposto, nem sempre é como imaginamos. Durante a avaliação tivemos o relato de que o que foi oferecido não era o que os participantes esperavam. A Oficina teve o propósito de junto com os professores construir atividades e fomentar discussões sobre possibilidades para sala de aula, não trouxemos um material pronto para levar para sala de aula. Afinal uma pesquisa é construída a partir de discussões de diferentes pontos de vista.

Um dos pontos positivos da Oficina ser remota foi a diversidade de participantes que puderam participar de diferentes locais sem ter a necessidade de se deslocar de suas casas.

A partir dos estudos, leituras, construções de figuras fractais utilizando o software GeoGebra realizados para o entendimento do tema Geometria Fractal e da Oficina com os professores e futuros professores de matemática podemos identificar a riqueza de atividades que podem ser elaboradas utilizando o referido tema. Como experiência própria da autora, em diversos momentos em sala de aula utilizamos de processos visuais para fazer com que o aluno chegue próximo do entendimento do conteúdo. Rotacionar e transladar figuras são constantemente utilizados em sala de aula sem mesmo estar se referindo ao processo. Ao final desta pesquisa deixamos como proposta futura o desafio de adaptar e realizar as atividades aqui desenvolvidas em sala de aula diretamente com alunos da rede Básica de Ensino.

REFERÊNCIAS

- AMANCIO, D. de T.; SANZOVO, D. T. Ensino de Matemática por meio das tecnologias digitais. **Revista Educação Pública**, [S. l.], v. 20, n. 47, 2020.
- AMBROZI, L.; GLOWACKI, J.; SAUER, L. T. Z. Explorando Conceitos de Geometria não Euclidiana. **Revista Scientia cum Industria**, [S. l.], v. 3, n. 3, p. 130-133, 2015.
- ARAÚJO, P. B. **Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra**. Orientador: Gerson Pastre de Oliveira. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2010.
- ASSIS, T. A. *et al.* Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira Ensino Física**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 2304.1-2304.10, 2008.
- BARBOSA, R. M. Aprendendo com padrões mágicos. **Publicações da SBEM**, São Paulo/Araraquara, n. 1, 2000.
- _____. **Descobrimo a geometria fractal para sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.
- BARBOSA, L. M.; SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Revista Pesquisa e debate em Educação**, [S. l.], v. 9, n. 1, 2019.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições, 2016.
- BATISTA, B. R. da S. **Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciandos em matemática**. Orientador: José Carlos Pinto Leivas. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, RS, 2017.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2006.
- BLANCO, T. F.; GODINO, J. D.; MANTECÓN, J. Análisis epistémico y cognitivo de una tarea de visualización en el espacio bidimensional. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, [S. l.], v. 7, n. 3, p. 251-279, 2018.
- BLANCO, T. F.; MANTECÓN, J. M. D.; SEQUEIROS, P. G. Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, [S. l.], v. 33, p. 768-789, 2019.
- BOALER, J. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 16 set. 2022.

BRASIL, MEC. Secretária da Educação Básica. **PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF, 1997. Disponível em <
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 16 set. 2022.

CORNELISSEN, M.; MACHADO, E. Conjuntos de Julia Quadráticos. **Revista de Matemática**, [S. l.], v. 6, n. 1, 2019.

DANTAS, S. C. **Design, implementação e estudo de uma rede sócio profissional online de professores de Matemática**. 2016.

DOGAN, M.; IÇEL, R. The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles. **Journal of Human Sciences**, [S. l.], v. 8, n. 1, p. 1441-1458, 2011.

FERREIRA, A. C. Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. **Quadrante**, [S. l.], v. 15, n. 1-2, p. 121–144, 2006.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente. **Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica**, p. 47-76, 2004.

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. de (org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: período 2001 – 2012**. Campinas: FE/UNICAMP, 2016. p. 17-41.

FORSYTHE, S. A study of the effectiveness of a Dynamic Geometry Program to support the learning of geometrical concepts of 2D shapes. **Journal of The British Society for Research into Learning Mathematics**, [S. l.], v. 30, n. 2, p. 12-17, 2010.

FRISKE, A. L.; MATHIAS, C. V. Fractais do tipo Dürer e Geogebra: uma aplicação para as Transformações Lineares. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, [S. l.], v. 1, n. 2, 2016.

GARCIA, C. M. **Formação de professores: Para uma mudança educativa**. Porto: Porto Editora, 1995.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008.

GONSCHOROWSKI, J. S. **Processamento de sinais e reconhecimento de padrões de resposta de sensores de gases através da Geometria Fractal**. Orientador: Walter Jaimes Salcedo. 114 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

GRAVINA, M. A. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, [S. l.], v. 2, n. 1, maio, 1998.

GUTIERREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework**. 1996. Disponível em: <<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2022.

IBILI, E. The use of dynamic geometry software from a pedagogical perspective: current status and future prospects. **Journal of Computer and Education Research**, [S. l.], v. 7, n. 14, p. 337-355, 2019.

IMBERNÓN, F. **Formação continuada de professores**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2010.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

KALEFF, A. M. M. R. Formas, Padrões, Visualização e Ilusão de Ótica no Ensino da Geometria. **VIDYA**, [S. l.], v. 35, n. 2, p. 18, 2015.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza da possibilidade da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. Orientadora: Maria Tereza Carneiro Soares. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2009.

MANDELROT, B. B. Fractal geometry: what is it, and what does it do? **Proceedings of the Royal Society A – Mathematical and Physical Sciences**, v. 423, n. 1864, p. 3-16, 1989.

MATHEUS, A.; CUEVA C. Transformações Geométricas no Plano. In: SIMAS, F.; TEIXEIRA, A. (org.). **Um Livro Aberto de Matemática**. 2021. Disponível em: <encurtador.com.br/IIM89>. Acesso em: 17 set. 2016.

MATHIAS, C. V.; SIMAS, F. L. B. Tarefas de Visualização em Exercícios de Geometria Espacial. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 2, n. 22, 2021.

MINERVINO, D. R. **Novas configurações de antenas, filtros e FSS com fractais de fuga no tempo para aplicações em microondas e ondas milimétricas**. Orientador: Adaildo Gomes D'Assunção. 110f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e de Computação) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2017.

NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L. de. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. São Paulo: Editora Exato, 2010.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Orientador: José Ferreira Alves. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade de Porto, Portugal, 2006.

PADILHA, T. A. F. **Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software GeoGebra**. Orientadora: Maria Madalena Dullius. 140 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, RS, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SAMPAIO, R. C.; LYCARIÃO, D. **Análise de conteúdo categorial: manual de aplicação**. Brasília: Enap, 2021.

SANTOS, A. H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização**. Orientador: José Carlos Cifuentes. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2014.

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos**. Curitiba: Champagnat, 1997.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, [S. l.], v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SIMON, F. **Jogo do Caos**. Apps UNIVESP. 2021. Disponível em: <<https://apps.univesp.br/jogo-do-caos/>>. Acesso em: 13 maio 2021.

STORMOWSKI, V. **Estudando matrizes a partir de transformações geométricas**. Orientador: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

TOZONI-REIS, M. F. de C. **Metodologia da Pesquisa**. 2 ed. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009.

VARGAS OLIVEIRA, D.; STORMOWSKI, V. Visualização espacial no ensino fundamental: Rotações no GeoGebra. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 19, n. 1, p. 574–583, 2021.

VERASZTO, E. V. *et al.* Tecnologia: buscando uma definição para o conceito. **Prima.com**, [S. l.], n. 7, 2008.

VIEIRA, F. M. S. Classificação de softwares educacionais. **Mídias na Educação**, [S. l.], v. 12, n. 1, p. 1-3, 2015.

WAHAB, R. A. *et al.* Evaluation by experts and designated users on the learning strategy using sketchup make for elevating visual spatial skills and geometry thinking. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, [S. l.], v. 31, n. 58, p. 819-840, 2017.

ZÜGE, B. L. **A construção de elementos da geometria fractal por meio do software geogebra**. Orientador: Carmen Vieira Mathias. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática Licenciatura) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2019.

ZÜGE, B. L.; MATHIAS, C. V. **Construção via o software GeoGebra do fractal triângulo de Sierpinski**: uma aplicação para as transformações geométricas. *In*: I EPTEM – I ENCONTRO PARANAENSE DE TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2018, Apucarana. **Anais [...]**. Apucarana: UNESPAR, 2018.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO CONHECENDO OS PARTICIPANTES

Questionário - Conhecendo os participantes

Prezado(a) Professor(a),

Convidamos o(a) Sr(a) para responder o questionário que segue.

O objetivo desse questionário é mapear nosso público alvo e perceber algumas das noções prévias acerca de conceitos geométricos vinculadas com o software matemático GeoGebra que são utilizadas ou não por professores da Educação Básica.

Informamos que seu nome e e-mail são solicitados apenas para o controle interno, e, conforme indicado no TCLE, tais dados não serão divulgados nem atrelados às suas respostas.

Agradecemos imensamente sua colaboração.

***Obrigatório**

Dados Pessoais

1. Nome completo *

2. E-mail *

3. Idade *

4. Cargo/Função na Escola *

() Professor(a)

() Diretor(a)

() Estagiário(a)

() Não tenho cargo em escola

Outro:

5. Curso(s) de Graduação *

6. Gênero *

() Feminino

() Masculino

Outro:

7. Grau de instrução *

- Superior Incompleto
- Superior Completo
- Mestrado Incompleto
- Mestrado Completo
- Doutorado Incompleto
- Doutorado Completo

Outro:

8. Qual sua experiência como professor(a) de Matemática na rede Pública Estadual? *

- Não tenho
- 0 a 3 anos
- 3 a 6 anos
- 6 a 9 anos
- 9 a 12 anos
- Mais de 12 anos

9. Qual sua experiência como professor(a) de Matemática na rede Pública Municipal? *

- Não tenho
- 0 a 3 anos
- 3 a 6 anos
- 6 a 9 anos
- 9 a 12 anos
- Mais de 12 anos

10. Qual sua experiência como professor(a) de Matemática na rede Federal? *

- Não tenho
- 0 a 3 anos
- 3 a 6 anos
- 6 a 9 anos
- 9 a 12 anos
- Mais de 12 anos

11. Qual sua experiência como professor(a) de Matemática na rede Privada? *

- Não tenho
- 0 a 3 anos
- 3 a 6 anos

- 6 a 9 anos
- 9 a 12 anos
- Mais de 12 anos

12. Em qual(ais) cidade(s) atua como professor(a)?

Sobre os conteúdos da oficina e o software GeoGebra

13. Como você conheceu o software de matemática dinâmica GeoGebra? *

- Como aluno(a), no ensino básico.
- Como aluno(a), na graduação.
- Pesquisando ao buscar material para minhas aulas.
- Fazendo cursos ou oficinas.
- Faz tanto tempo que não lembro.

Outro:

14. Sobre o software GeoGebra, considera que seu conhecimento ao utilizar o referido software é: *

- Básico
- Intermediário
- Avançado

15. Por quais motivos optou por participar desta oficina? *

- Curiosidade sobre o tema.
- Novas alternativas de atividades para sala de aula.
- Interesse pela utilização do software GeoGebra.
- Para auxiliar os colegas na pesquisas e conseqüentemente agregar conhecimento.

Outro:

15. Você já realizou atividades em sala de aula utilizando o software GeoGebra com seus alunos(as)? *

- Sim
- Não
- Ainda não leciono

16. Se afirmativo, quais conceitos foram explorados?

17. As construções utilizadas em sala, foram de sua autoria?

- Sim
 Não
 Em parte

18. Descreva brevemente a(s) experiência(s) e como foi dado o aproveitamento do software.

19. Caso não tenha desenvolvido atividades com seus alunos(as) utilizando o software GeoGebra, qual(ais) a(s) principal(ais) motivação(ões) envolvida(s)?

- Falta de tempo.
 Não tenho segurança.
 Faltam equipamentos na escola.
 Ainda não leciono.

Outro:

20. Com suas palavras explique o que é um Invariante Geométrico. *

Sobre cursos de Formação Continuada

21. Nos últimos 5 anos, você participou de algum Curso/Oficina de Formação Continuada, especificamente na área de Matemática? *

- Sim
 Não

22. Este Curso/Oficina trouxe contribuições para sua prática? *

- Sim
 Não

23. Se sim, em quais aspectos?

- Crescimento profissional
 Crescimento pessoal
 Forneceram elementos que posso utilizar em sala
 Foram desafiadores

Outros:

24. Se não, por quais motivos?

25. Você acredita que necessita aprofundar seus estudos sobre conteúdos que envolvam a Geometria? Por que? *

Com relação aos Cursos/Oficinas citados acima, alguma delas era especificamente voltado para a área de Geometria? *

() Sim

() Não

APÊNDICE B – MATERIAL TEÓRICO DISPONIBILIZADO AOS PARTICIPANTES

7.2.1.1 Transformações Geométricas

Consideramos transformações geométricas no plano, isometrias, translações, rotações e reflexões, e homotetias. As isometrias relacionam-se intimamente à noção de simetria que, além de noção matemática, é uma ideia fortemente presente na cultura e na natureza. As homotetias possuem a ideia intuitiva de ampliação e redução, relacionando-se, assim, com a noção de semelhança, sendo essa facilmente identificada a partir da visualização da figura em estudo.

Mas por que estudar tais conceitos? Conforme Matheus e Cueva (2021), estamos mergulhados em um mundo de imagens principalmente em função das multiplicidades de telas que manuseamos e somos expostos. Dessa maneira, conhecer e compreender o conceito de transformação geométrica, que busca trazer suporte às noções de simetria, de congruência, de ampliação e de redução de imagens, caracteriza uma categoria de alfabetização geométrico-visual. Ou seja, estudar transformações geométricas contribui para que o aluno compreenda as linguagens geométrico-visuais presentes nas artes, nas ciências, nas tecnologias e na natureza. Desta forma, é importante relembrar conceitos como translação, rotação, simetria e homotetia e o faremos, conforme Matheus e Cueva (2021).

- Translação: relaciona-se à ideia de um movimento determinado por um sentido, uma direção e um comprimento.
- Rotação: relaciona-se ao movimento circular e é determinada por um centro, um ângulo e um sentido (anti-horário ou horário).
- Simetria: é uma característica das figuras que permanecem inalteradas por uma isometria no plano. Podendo ser classificada em simetria de reflexão, simetria de rotação ou simetria de translação.
- Homotetia: A palavra homotetia deriva do grego como sendo a composição de homo (similar) e tetia (posição). Matematicamente é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo.

Com relação à utilização desses conceitos, a BNCC apresenta conceitos relacionados ao conteúdo de transformações geométricas, pensando no processo de ensinar e aprender o tópico transformações geométricas na Educação Básica. Já para o Ensino Fundamental, anos iniciais, Brasil (2018) aponta que, por exemplo, o ensino de simetria deve ser introduzido por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas, em quadriculados ou no plano cartesiano. Já para os anos finais, temos no que se refere à unidade temática Geometria, o estudo de transformações, como pode ser observado no seguinte trecho.

É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2018, p. 271).

Para o Ensino Médio, o mesmo documento apresenta competências como meio para tratar dos conteúdos. Na Habilidade Específica 5, referente à Competência 1, ele sugere que o estudo envolvendo as transformações geométricas pode ser trabalhado do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras. (BRASIL, 2018, p. 533).

Dessa maneira, figuras do tipo fractais são exemplos de aplicações para esse tópico. Levando em conta que um fractal é definido como uma figura que pode ser fragmentada em inúmeros pedaços, sendo que cada um desses pedaços é uma reprodução de toda a imagem (ou de uma imagem inteira).

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL

Agradecemos sua participação nas Oficinas de Experiências Matemáticas. Com o objetivo de avaliar a oficina e saber sua opinião e sugestões para oficinas futuras, pedimos que você responda este questionário final!

*Obrigatório

1. Nome completo

2. Suas expectativas em relação à oficina foram atendidas? *

- () Superou as expectativas
() Ficou dentro do esperado
() Acreditei que seria mais interessante
() Não atingiu as expectativas

3. Encontrou alguma dificuldade em realizar as atividades?*

4. Sentiu a necessidade da abordagem de algum conceito matemático para compreensão das atividades? Quais?

5. A oficina terá influência na forma em que dará aula futuramente? *

- () Sim
() Não
() Talvez

6. Seu conhecimento em Geometria foi ampliado? *

- () Sim
() Não
() Talvez

7. Após os estudos realizados na oficina explique o que você entendeu por Invariante Geométrico.

8. Indicaria e/ou utilizaria o material disponibilizado em suas aulas? Por que?

9. Observações, sugestões, comentários ou críticas:

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), nas pesquisas Oficinas de Experiências Matemáticas, que tem como objetivo compartilhar experiências com o software GeoGebra para professores do Ensino Básico e professores em formação. Além disso, utilizaremos alguns dados produzidos para analisar aspectos pertinentes à visualização de entes geométricos e sua conexão com as tecnologias.

Buscamos com esta pesquisa trazer uma oportunidade do refletir junto com os professores envolvidos sobre sua prática na sala de aula, contemplando tópicos da Geometria Euclidiana e não Euclidiana.

A sua participação na referida oficina será dada em termos de realização das atividades propostas, as quais serão realizadas nos meses de Novembro e Dezembro de 2021, atentando aos prazos estabelecidos.

Por meio deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), você está sendo informado de que pode esperar alguns benefícios, tais como identificação das características envolvidas em figuras fractais, além da construção de representação das mesmas; Reconhecer Invariantes geométricos através de construções geométricas; Construir livros GeoGebra vinculados a conceitos de Geometria Plana.

Entretanto, também é possível que aconteça algum desconforto durante a sua participação, tal como a análise das suas respostas em cada atividade. Para minimizar tal situação, nós, pesquisadores, tomaremos as seguintes medidas: garantimos a você que sua privacidade será respeitada, ou seja, que seu nome ou qualquer outra informação que possa, de alguma maneira, lhe identificar, sejam mantidos em sigilo. Nós também nos responsabilizamos pela guarda e confidencialidade dos dados, assim como de sua não exposição.

Nós lhe asseguramos assistência durante toda a pesquisa, inclusive, se necessário, após sua conclusão, mediante contato via e-mail, garantimos seu livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, tudo o que você queira saber antes, durante e depois de sua participação. Também informamos que sua participação é livre e voluntária, portanto, você pode se recusar a participar do estudo ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar e sem nenhum tipo de prejuízo.

Os pesquisadores envolvidos neste projeto de pesquisa são: Bruna Luana Züge, Renan Severo Ferreira e Sabrina Paris de Lima, acadêmicos do Programa de Pós

Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria, RS, sob a orientação da professora Carmen Vieira Mathias. Com os quais você poderá manter contato pelos e-mails: bruna.zuge@acad.ufsm.br, renan.severo@acad.ufsm.br, sabrina.paris@acad.ufsm.br e carmen@ufsm.br.

Informo que li e entendi todas as informações presentes neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e tive a oportunidade de discutir as informações deste termo. Todas as minhas perguntas foram respondidas e estou satisfeito com as respostas. Enfim, tendo sido orientado sobre o teor do conteúdo deste termo e compreendido a natureza e o objetivo destas pesquisas, manifesto meu livre consentimento em participar.

Li o TCLE e declaro que participarei das oficinas e ACEITO que utilizem minhas respostas para análise.

Li o TCLE e declaro que participarei das oficinas e NÃO ACEITO que utilizem minhas respostas para análise.

APÊNDICE E – TAREFAS

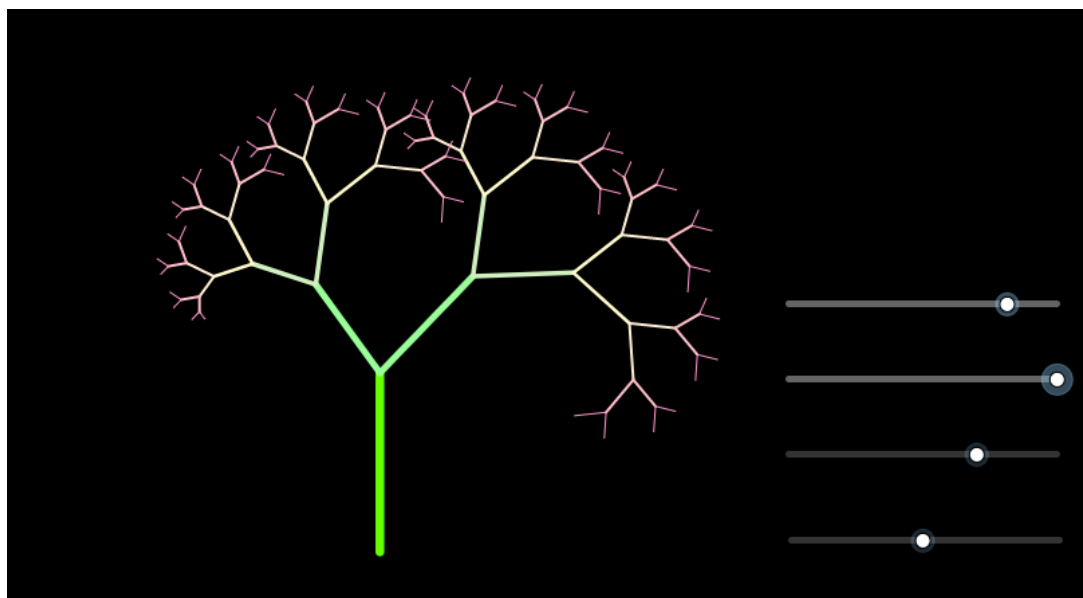
Tarefa 01: Árvore Fractal

Conhecendo a Árvore Fractal: Levando em conta que a Geometria Fractal é responsável por analisar e descrever formas encontradas na natureza, algumas árvores são exemplos de fractal. A sua formação é caracterizada pela repetição de um processo geométrico.

Na Tarefa 1, perceba que cada galho da árvore ilustrada no applet possui uma ramificação que se parece com uma parte maior da árvore, ou seja, existe aqui a característica de autossimilaridade. O processo de formação desse fractal consiste em sucessivas ramificações, a partir do galho anterior. Dessa maneira, a cada etapa, temos a repetição da etapa anterior em uma versão menor. Existem variações dessa construção, algumas utilizam figuras geométricas como quadrados e outras segmentos de retas.

Movimente os controles deslizantes do applet¹³ (Figura 9) e responda os questionamentos.

Figura 9 – Árvore Fractal.



Fonte: Sistematizado pelo autor

¹³ <https://www.geogebra.org/m/wYMnRpRs>

- a) Existe algum padrão nessa figura?
- b) Identificou alguma simetria?
- c) Considerando que ao final de cada linha (galho da árvore) existe um ponto, quantos pontos finais existem após cada etapa?

Tarefa 02 – Fractal Floco de Neve

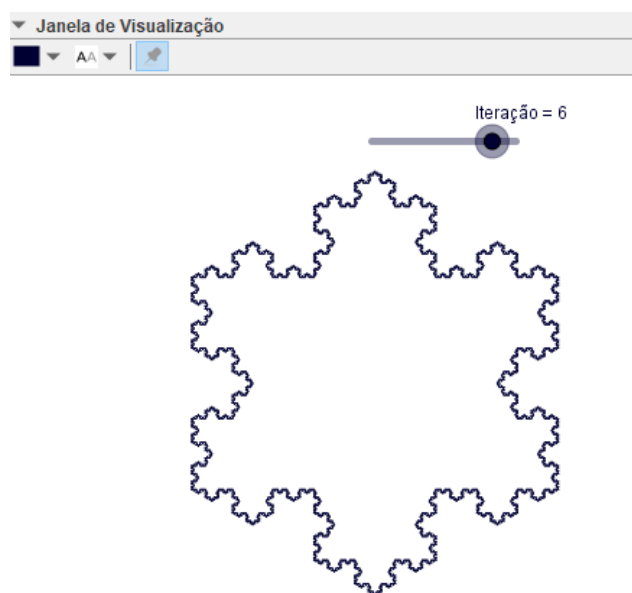
Sobre transformações Geométricas: Caso tenha necessidade, disponibilizamos um material complementar (Apêndice B) que aborda alguns conceitos de transformações geométricas.

Conhecendo o fractal FLOCO DE NEVE: Um fenômeno meteorológico, que cai do céu como mágica, consiste na queda de cristais de gelo, é denominado o floco de neve. Na matemática encontramos um fractal conhecido como Floco de Neve de Koch, sendo este uma das versões da Curva de Koch. A Curva de Koch é uma curva geométrica e foi introduzida por Helge Von Koch (1870-1924), matemático polonês. Sua construção, a partir de um segmento de reta, consiste em um triângulo equilátero, onde dividimos cada um de seus lados em três segmentos de reta iguais. Retiramos o segmento do meio e em seu lugar substituímos por outro triângulo equilátero, sem considerar sua base. Na segunda tarefa, vamos olhar um pouco mais para esse fractal.

Analisando o *applet*¹⁴, responda os questionamentos a seguir.

Figura 23 – Floco de Neve de Koch.

¹⁴ Disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/fnkdf8n>



Fonte: Dados da pesquisa.

- a) Quantos eixos de simetria possui a figura na iteração número 2 da construção do Floco de Neve de Koch?
- b) E na iteração 4 e 6?
- c) A partir da visualização e identificação de suas características construa um fractal Floco de Neve com o auxílio do software GeoGebra.

Resultados esperados

O principal objetivo nessa atividade é identificar as simetrias contidas na figura fractal conhecida como Floco de Neve. Neste, a simetria encontrada é a simetria rotacional hexagonal, ou seja, a partir de um ponto central, existe um padrão que se repete até completar o círculo. Se rodarmos um floco de neve 60, 120, 180, 240, 300 ou 360 graus em torno do seu eixo central, ele manterá sempre a aparência. Para concluir está atividade, um tutorial da construção da representação dessa figura fractal será disponibilizado na oficina como material complementar.

Fórum: construções de Figuras Fractais:

Parte

1

Considere que você vai lecionar transformações geométricas do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Mas, você gostaria de utilizar os fractais e deve levar um ou mais

arquivos previamente construídos no GeoGebra. Os estudantes terão acesso a esse(s) arquivo(s) em computadores (ou celulares) e vão utilizá-lo(s) durante a sua aula.

Assim, essa tarefa consiste na construção de um fractal (de sua preferência, com exceção do Triângulo de Sierpinski)

Parte

2

Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.

Resultados esperados

Neste fórum buscamos a interação entre os participantes, com a análise da construção de diferentes fractais, e esperamos a análise de quais conteúdos matemáticos possam ser explorados a partir da manipulação ou até mesmo construção de figuras fractais. Nesta tarefa, os participantes estarão livres para explorar as características das figuras fractais e quais conteúdos estão ligados a estas. Esperamos que a visualização do tópico sobre transformações geométricas seja comentada pelos participantes a partir da visualização da construção modelo e também dos seus conhecimentos adquiridos durante a oficina.