

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CAMPUS DA UFSM EM CACHOEIRA DO SUL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

César Becker Tavares

**APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO NO PROJETO DE
FORNOS PARA TRATAMENTO TÉRMICO**

Cachoeira do Sul, RS
2020

César Becker Tavares

**APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO NO PROJETO DE FORNOS
PARA TRATAMENTO TÉRMICO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) – Campus Cachoeira do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de **Engenheiro Mecânico**.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Brittes da Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Cristiano Frandalozo Maidana

Cachoeira do Sul, RS
2020

César Becker Tavares

**APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO NO PROJETO DE FORNOS
PARA TRATAMENTO TÉRMICO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) – Campus Cachoeira do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de **Engenheiro Mecânico**.

Aprovado em 13 de julho de 2020:

Rogério Brittes da Silva, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Aline Brum Loreto, Dr. (UFSM)

Charles Rech, Dr. (UFSM)

Cachoeira do Sul, RS
2020

RESUMO

APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO NO PROJETO DE FORNOS PARA TRATAMENTO TÉRMICO

AUTOR: César Becker Tavares

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rogério Brittes da Silva

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Cristiano Frandalozo Maidana

O projeto de um forno para tratamento térmico pode ser realizado pelo método de tentativa e erro. Entretanto, esta prática pode conduzir a resultados pouco precisos e a ocorrência de empenamento e trincas nas superfícies dos materiais a serem tratados termicamente. Desta forma, neste trabalho, uma cavidade tridimensional preenchida com meio transparente é utilizada para simular o funcionamento de um forno para tratamento térmico de recozimento. O problema é inverso pois se devem encontrar posições de instalação dos aquecedores e seus respectivos fluxos de calor, sendo estas as condições de entrada. Então, ele é modelado através do Método das Radiosidades, havendo um sistema de equações lineares que é resolvido pelo método Gauss-Seidel. Para realizar a otimização, a solução proposta é a aplicação e implementação de um algoritmo baseado na linguagem de programação Fortran, um método de otimização conhecido como Método da Otimização Extrema Generalizada (GEO). Algumas configurações, considerando a quantidade de aquecedores, foram testadas e os resultados obtidos, analisados quanto às distribuições de fluxos na superfície de projeto. Após esta implementação, foram constatadas reduções nos desvios apresentados pelo método convencional. Também houve uma média de tempo computacional satisfatória, levando em conta os parâmetros a serem calculados (distribuição espacial dos aquecedores e seus respectivos fluxos de calor). Os resultados são visíveis tanto gráfica quanto numericamente, de modo que demonstra a eficácia do método de otimização.

Palavras-chave: Fornos. Recozimento. Cavidade. Otimização.

ABSTRACT

APPLICATION OF AN OPTIMIZATION METHOD IN THE DESIGN OF HEAT TREATMENT FURNACES

AUTHOR: César Becker Tavares

ADVISOR: Prof. Dr. Rogério Brittes

CO-ADVISOR: Prof. Dr. Cristiano Frandalozo Maidana

The design of a heat treatment furnace can be carried out by trial and error method. However, this practice can lead to inaccurate results, as well as warping and cracking on the surfaces of materials to be heat treated. Thus, in this work a three-dimensional cavity filled with transparent medium is used to simulate the operation of an annealing heat treatment furnace. The problem is reversed, as installation positions for the heaters and their respective heat flows must be found, these being the entry conditions. So, it is modeled using the Radiosity Method, with a system of linear equations that is solved by the Gauss-Seidel method. To perform the optimization, the proposed solution is the application and implementation of an algorithm based on the Fortran programming language, an optimization method known as the Generalized Extremal Optimization Method (GEO). Some configurations, considering the number of heaters, were tested and the results obtained, analyzed for the distribution of flows on the design surface. After the implementation of this algorithm, reductions were found in the deviations presented by the conventional method. There was also a satisfactory average computational time, considering the parameters to be calculated (spatial distribution of the heaters and their respective heat flows). The results are visible both graphically and numerically, so that it demonstrates the effectiveness of the optimization method.

Keywords: Furnaces. Annealing. Cavity. Optimization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Forno para tratamento térmico.....	11
Figura 2 - Fator de forma da radiação entre duas superfícies arbitrárias	15
Figura 3 - Cavidade fechada com N superfícies	16
Figura 4 - Representação de N variáveis de projeto em 6 bits por variável	19
Figura 5 - Cavidade fechada considerada no problema.....	22
Figura 6 - (a) Cavidade tridimensional; (b) Representação da simetria	23
Figura 7 - Representação dos elementos em 1/4 de cavidade.	23
Figura 8 - Distribuições espaciais prescritas, considerando 10 aquecedores.	25
Figura 9 - Distribuição do fluxo de calor na superfície de projeto.....	26
Figura 10 - Distribuição de fluxo de calor para 10 aquecedores (GEO)	28
Figura 11 - Configuração e distribuição para 12 aquecedores	30
Figura 12 - Configuração e distribuição para 14 aquecedores	30
Figura 13 - Configuração e distribuição para 16 aquecedores	31

LISTA DE TABELAS

Quadro 1 - Distribuição espacial dos aquecedores nas configurações analisadas.....	26
Quadro 2 - Resultados obtidos para 10 aquecedores.....	29
Quadro 3 - Resultados obtidos nas configurações para 12, 14 e 16 aquecedores	31

LISTA DE SÍMBOLOS

A_i	Área da superfície i , m ²
A_j	Área da superfície j , m ²
C	Configuração atual de bits
C_{melhor}	Configuração otimizada de bits
dA_i	Elemento de área da superfície i
dA_j	Elemento de área da superfície j
e	Poder emissivo, W/m ²
e_b	Poder emissivo de corpo negro, W/m ²
F_{ij}	Fator de forma da superfície i em relação à superfície j
F_{ji}	Fator de forma da superfície j em relação à superfície i
H	Altura da cavidade fechada, m
i_x	Elemento de área na direção x
i_y	Elemento de área na direção y
j_d	Elemento de área da superfície de projeto
j_h	Elemento de área da superfície dos aquecedores
k	Valor da classificação (ranqueamento) de um bit
L	Comprimento da cavidade fechada, m
L	Comprimento da sequência de bits
N	Número de espécies
N	Número de variáveis de projeto
N	Quantidade de superfícies internas na cavidade fechada
n_i	Normal em relação à superfície i
n_j	Normal em relação à superfície j
q_i	Irradiação, W/m ²
Q_i	Taxa de radiação total na superfície i
$q_{o,i}$	Radiosidade da superfície j , W/m ²
$q_{o,j}$	Radiosidade da superfície i , W/m ²
$q_{o,k}$	Radiosidade da superfície qualquer k , W/m ²
q_r	Fluxo de calor radiante adimensional
Q_r	Fluxo de calor radiante, W/m ²
R	Distância entre as superfícies i e j
t	Temperatura adimensional da superfície de projeto
T	Temperatura da superfície de projeto
t_{DS}	Temperatura adimensional na superfície de projeto
T_{DS}	Temperatura prescrita na superfície de projeto
T_i	Temperatura da superfície i
T_j	Temperatura da superfície j
V	Função objetivo atual
V_{melhor}	Função objetivo otimizada
W	Largura da cavidade fechada, m

SÍMBOLOS GREGOS

$d\omega_{j-i}$	Ângulo sólido do elemento dA_j através da vista pelo elemento dA_i , rad
Δx	Comprimento de um elemento de malha discretizada em relação ao eixo x
Δy	Comprimento de um elemento de malha discretizada em relação ao eixo y
Δz	Comprimento de um elemento de malha discretizada em relação ao eixo z
ε	Emissividade

θ_i	Ângulo polar entre a normal da superfície i e o comprimento R , rad
θ_j	Ângulo polar entre a normal da superfície j e o comprimento R , rad
σ	Constante de Boltzmann, W/m ² K ⁴
τ	Parâmetro ajustável na função de distribuição de probabilidades

SUBÍNDICES

lsq	Mínimos quadrados
melhor	Melhor valor

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	OBJETIVOS	13
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3.1	FUNDAMENTOS SOBRE TROCA RADIANTE ENTRE SUPERFÍCIES	14
3.1.1	Fator de forma	14
3.1.2	Método das radiosidades	16
3.2	MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO EXTREMA GENERALIZADA (GEO)	18
3.2.1	Apresentação do Método GEO	18
3.2.2	O algoritmo e algumas aplicações	19
4	PROBLEMA A SER SOLUCIONADO	22
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	25
5.1	RESULTADOS PRELIMINARES	25
5.2	RESULTADOS ESPERADOS	27
5.3	RESULTADOS OBTIDOS.....	28
6	CONCLUSÃO	33
	REFERÊNCIAS	34
	APÊNDICE A – ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 12 AQUECEDORES	36
	APÊNDICE B - ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 14 AQUECEDORES	37
	APÊNDICE C - ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 16 AQUECEDORES	38

1 INTRODUÇÃO

As indústrias do ramo metalmeccânico necessitam que seus produtos possuam características mecânicas padronizadas, de modo que atendam às especificações dos clientes. Algumas destas especificações são obtidas a partir da escolha e preparação da matéria-prima utilizada, o que inclui, no caso de materiais metálicos, a utilização de tratamentos térmicos. Esses processos são realizados em fornos especiais, como o ilustrado na Figura 1 a seguir.

Figura 1 - Forno para tratamento térmico



Fonte: (FORTELAB, 2019)

Dentre os processos de tratamento térmico destaca-se o de recozimento, que de acordo com a definição dada por Callister Jr. e Rethwisch (2012, p. 360), trata-se do aquecimento do material até uma temperatura elevada por um tempo prolongado seguido de um resfriamento lento deste material. Esta definição pode ser dividida como sendo um processo em estágios, onde o primeiro é o aquecimento até a temperatura pretendida, no próximo se dá a manutenção nesta temperatura e por fim, o resfriamento, em geral até a temperatura ambiente. O objetivo deste processo pode ser estabelecido em três modos diferentes, podendo ser para aliviar as tensões em material encruado, reduzir ou elevar a dureza do material ou atingir um tipo de microestrutura específico.

Os mesmos autores também destacam a importância de serem observados alguns parâmetros específicos do processo de recozimento. Estes parâmetros são o tempo de recozimento, a temperatura a ser atingida no processo e a taxa de variação da temperatura, a qual está ligada ao tamanho e a geometria da peça que será recozida. No caso da temperatura,

se esta for mais alta, o recozimento deverá ocorrer mais rapidamente pelo fato de que os processos de difusão estão envolvidos. Em se tratando do tempo, deve ser longo o suficiente para que as mudanças de microestrutura necessárias ocorram da forma desejada. Com relação à taxa de variação da temperatura, a influência do tamanho e geometria da peça pode aumentar o gradiente daquela nas suas partes internas e externas. Este efeito pode levar ao surgimento de tensões internas indesejáveis, o que leva ao empenamento ou mesmo ao trincamento de partes da peça (CALLISTER JR; RETHWISCH, 2012).

2 OBJETIVOS

Por conta da possível ocorrência de empenamentos ou trincas devido à não uniformidade dos fluxos de calor, simula-se uma cavidade tridimensional preenchida com meio transparente de forma que esta represente o funcionamento de um forno para tratamento térmico de recozimento. Com o intuito de alcançar uniformidade na temperatura e nos fluxos de calor das superfícies, valores devem ser especificados para o fluxo e a distribuição espacial dos aquecedores deste forno. O modo convencional para resolver este problema seria a aplicação da tentativa e erro, porém esta prática normalmente consome um tempo elevado de cálculos, sabendo que é um método sem garantias para a determinação da solução ótima do problema.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é propor uma solução através do uso do método da Otimização Extrema Generalizada (GEO, em inglês). Neste trabalho, considera-se uma cavidade com paredes cinzas e difusas e a radiação térmica como o único mecanismo de transmissão de calor, de tal forma que o método das radiosidades pode ser aplicado para obtenção do fluxo de calor e da temperatura nas superfícies. Serão escritas equações para as radiosidades que formarão um sistema de equações lineares, os quais então são resolvidos utilizando o método Gauss-Seidel, que vem da literatura. O método GEO, implementado em algoritmo na linguagem de programação Fortran, será aplicado para otimizar a distribuição espacial e fluxo térmico dos aquecedores de um forno elétrico de recozimento.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 FUNDAMENTOS SOBRE TROCA RADIANTE ENTRE SUPERFÍCIES

A troca de calor por radiação em mais de uma superfície depende da forma e geometria destas. Neste trabalho, será considerado que o meio é não participante, isto é, a sua contribuição na emissão, absorção ou espalhamento não influi nas transferências por radiação das superfícies envolvidas (INCROPERA et al., 2014, p. 550).

3.1.1 Fator de forma

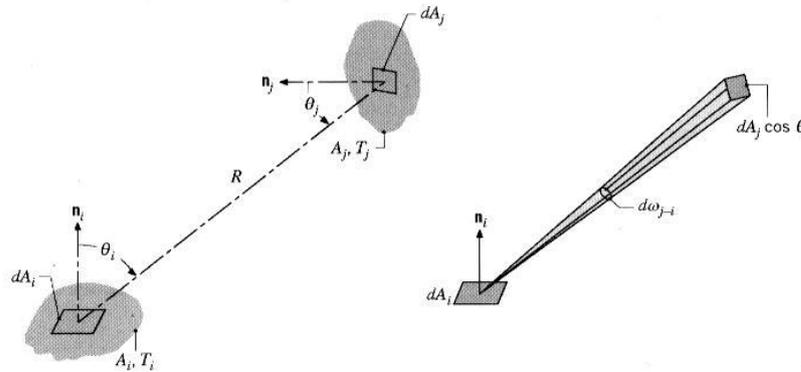
O fator F_{ij} é utilizado, segundo Incropera et al. (2014), para “[...] calcular a troca radiante entre duas superfícies quaisquer[...]” e é definido como a parte da radiação que sai de uma superfície i e atinge uma superfície j . Este parâmetro possui uma expressão geral de forma integral.

Essa expressão depende das superfícies arbitrariamente orientadas A_i e A_j nas quais são explicitados os elementos de área dA_i e dA_j . Estes elementos são ligados por um comprimento R e forma ângulos polares θ_i e θ_j em relação às normais das superfícies n_i e n_j . Os valores de R , θ_i e θ_j variam em relação às variações de posição dos elementos de área dA_i e dA_j . Então, a Equação 1 resultante é expressa como segue abaixo.

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (1)$$

Este resultado vem a partir da análise da ilustração deste problema. A Figura 2 mostra como estão dispostos os elementos de forma que a Equação 1 possa ser obtida.

Figura 2 - Fator de forma da radiação entre duas superfícies arbitrárias



Fonte: (INCROPERA et al, 2014, p. 550)

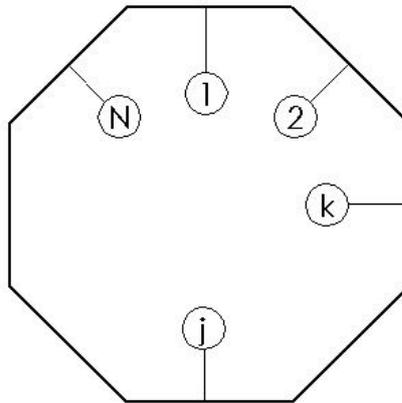
Observa-se que há a prescrição das temperaturas nos elementos i e j , valendo estas T_i e T_j , respectivamente. Da imagem, na parte da direita, o elemento $d\omega_{j-i}$ é o ângulo sólido em relação a dA_j através da vista por dA_i . Este ângulo possui um valor de $d\omega_{j-i} = (\cos(\theta_j) dA_j)/R^2$. Analogamente, o fator de forma F_{ji} possui o mesmo equacionamento com a diferença de haver o valor inverso de A_j em vez de A_i . A aplicação da equação deve observar que as superfícies são emissoras e refletoras difusas, assim como possuírem radiosidade uniforme.

Há ainda uma relação entre os fatores de forma que ocorre ao serem igualadas as integrais que surgem nas equações. Realizando tal igualdade, tem-se a Equação 2 a seguir.

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (2)$$

Esta é a relação de reciprocidade e através dela, pode-se determinar o fator de forma de uma superfície sabendo o resultado da outra. Quanto às cavidades fechadas, existe outra relação de fatores de forma conhecida como regra da soma. Inicialmente, uma cavidade de N superfícies é demonstrada na Figura 3 abaixo.

Figura 3 - Cavity fechada com N superfícies



Fonte: (BRITTES, 2011, p. 14)

Onde j e k representam superfícies de ordem qualquer. Retornando à regra da soma, sua representação encontra-se na Equação 3 abaixo.

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (3)$$

Onde N é a quantidade de superfícies que estruturam a cavidade fechada considerada. O cálculo da troca de radiação em N superfícies depende de um total de N^2 fatores de forma. Há maior evidência deste fato ao se organizar esses fatores de forma matricialmente (INCROPERA et al., 2014, p. 550-551).

3.1.2 Método das radiosidades

Em cavidades fechadas, a radiação pode sofrer diversas quantidades de reflexões nas superfícies internas, assim como deixar uma superfície opaca através da emissão e por reflexão. Desse modo, seja uma cavidade que possua N superfícies internas as quais se deseja encontrar a energia absorvida por cada uma, sendo conhecida a temperatura associada. Para que a análise das trocas radiantes nessas superfícies seja realizada, algumas simplificações serão aplicadas.

Considera-se que cada superfície seja isotérmica e que possua radiosidade $q_{o,k}$ e irradiação q_i uniformes. A irradiação, ou fluxo incidente, é a porção de energia radiante que deixa as superfícies da cavidade e chegam na k -ésima superfície desta (HOWELL et al, 2015, p. 219). São também opacas, ou seja, refletem totalmente a radiação, e possuem emissividades, absorvidades e refletividades independentes da direção, sendo então ditas difusas. Outra

consideração é que esses parâmetros também independem do comprimento de onda, isto é, são superfícies cinzas. Por fim, considera-se o meio interno à cavidade como sendo não participante.

Para que seja conhecida a radiosidade numa dada superfície $q_{o,i}$, a troca por radiação entre as superfícies da cavidade fechada deve ser considerada. Em havendo as radiosidades em todas as superfícies, é possível determinar a irradiação numa superfície i , o que leva à obtenção da taxa total de radiação Q_i a qual atinge esta superfície, sendo ela inclusa. Então, o equacionamento para o cálculo da taxa radiante total é mostrado pela Equação 4.

$$Q_i = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} (q_{o,i} - q_{o,j}) = \sum_{j=1}^N q_{ij} \quad (4)$$

Onde A_i é o valor da área na superfície i , N é a quantidade total de superfícies e F_{ij} é o fator de forma da superfície i em relação à superfície j . No caso dos valores $q_{o,i}$ e $q_{o,j}$, estes representam as radiosidades das superfícies mencionadas anteriormente. Segundo Brittes (2011), há conservação da energia, logo as superfícies absorvem toda a energia emitida de cada uma delas. Por esse fato ocorrer, os fatores de forma das superfícies internas da cavidade possuem soma igual a 1, obedecendo à regra da soma. Com a irradiação total e aplicando a reciprocidade dos fatores de forma, pode-se obter as equações relativas às radiosidades. Elas são apresentadas abaixo sendo as Equações 5.1 e 5.2.

$$q_{o,j} = \varepsilon_j e_{b,j} + (1 - \varepsilon_j) \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (5.1)$$

$$q_{o,j} = q_{r,j} + \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (5.2)$$

Para uma resolução mais direta em problemas de radiação em cavidades fechadas, podem-se utilizar equações lineares onde são conhecidas as radiosidades $q_{o,j}$ de todas as N superfícies da cavidade. Há que se conhecer também os valores de temperatura T_i destas superfícies. Considerando estas condições de contorno, a Equação 5.1 é utilizada quando se tem uma temperatura prescrita e a 5.2 para fluxo de calor radiante prescrito. É formado então um sistema de equações onde a única incógnita é a radiosidade de cada superfície. Para que a resolução se

torne mais prática, é conveniente adimensionalizar essas equações. O resultado disto são as Equações 5.3 e 5.4 abaixo.

$$q_{o,j} = \varepsilon_j t_j^4 + (1 - \varepsilon_j) \sum_{k=1}^N F_{j-k} Q_{o,k} \quad (5.3)$$

$$q_{o,j} = Q_{r,j} + \sum_{k=1}^N F_{j-k} Q_{o,k} \quad (5.4)$$

A superfície fica dividida no intervalo de elementos $j = 1, \dots, N$ e os valores prescritos de temperatura e fluxo radiante são, respectivamente, $t = T/T_{DS}$ e $Q = q/\sigma T_{DS}^4$, onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ε_j é a emissividade de uma superfície j da cavidade. Sendo T_{DS} a temperatura na superfície de projeto, o valor da temperatura adimensional na superfície de projeto é unitário.

Através do valor desta temperatura prescrita na superfície de projeto, podem-se aplicar as Equações 5.3 e 5.4 e então, forma-se um sistema de equações onde a única incógnita é a radiosidade. Desse modo, utilizam-se métodos iterativos os quais facilitam na obtenção das taxas de radiação nas superfícies da cavidade do problema (INCROPERA et al., 2014, p. 558-560).

3.2 MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO EXTREMA GENERALIZADA (GEO)

O problema proposto neste trabalho pode ser classificado como um problema inverso. Precisa-se determinar a distribuição espacial e o fluxo de calor nos aquecedores de modo que haja garantia de uma uniformidade no fluxo de calor e temperatura, considerando a superfície atingida, como é explicado por Brittes (2011). Logo, são estabelecidas condições de saída para que sejam obtidas as condições de entrada.

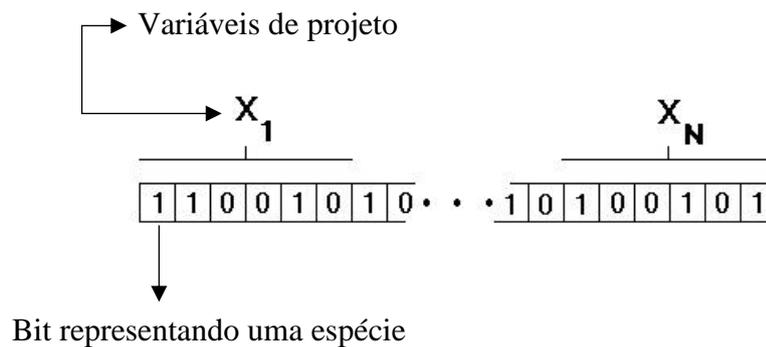
No entanto, matematicamente, problemas inversos em transferência de calor são geralmente considerados mal postos. Tais problemas podem ser muito sensíveis aos dados de entrada, requerendo técnicas especiais para satisfazer as condições de estabilidade na solução (COLAÇO et al. , 2006).

3.2.1 Apresentação do Método GEO

Para resolver esses problemas, um método aplicável é o da Otimização Extrema Generalizada (GEO), que é estocástico. Segundo Galski (2007), um método estocástico não

utiliza derivadas e pode lidar com variáveis dos tipos discreta, contínua e da combinação entre esses tipos. De acordo com Sousa et al. (2003), o GEO é destinado à resolução de problemas de otimização complexos. Baseia-se no método EO (Otimização Extrema) de evolução natural das espécies proposto por Bak e Sneppen (1993). A Figura 4 demonstra como é aplicado este algoritmo.

Figura 4 - Representação de N variáveis de projeto em 6 bits por variável



Fonte: (Adaptado de SOUSA, 2003)

Um número N de espécies é codificado em uma única sequência binária. Os bits são distribuídos conforme os valores de adaptabilidade. Estes valores estão sempre associados a um número aleatório gerado entre 0 e 1. A probabilidade de mutação de cada espécie depende do ranqueamento dos bits, sendo que os mais adaptados têm maior probabilidade de sofrer mutação.

3.2.2 O algoritmo e algumas aplicações

A implementação do algoritmo GEO é realizada seguindo os passos a seguir, como proposto por Sousa et al. (2003). É inicializada uma sequência binária aleatória de comprimento L que irá codificar N variáveis de projeto em bits de comprimento l_j com $1 \leq j \leq N$. Então, para uma configuração inicial C de bits, é calculado o valor da função objetivo V e a partir disto, define-se uma nova configuração $C_{melhor} = C$ e $V_{melhor} = V$.

A função objetivo utilizada neste trabalho é descrita na Equação 6. A partir dos valores do fluxo de calor nos elementos dos aquecedores é efetuado o cálculo direto, que também é iterativo. Avalia-se a função objetivo, que neste trabalho leva em conta a diferença entre o fluxo de calor prescrito nos elementos jd da superfície de projeto, $Q_{r,DS}$, e o fluxo de calor calculado a partir do problema inverso, $Q_{r,jd}$. É uma função de mínimos quadrados para o caso discreto.

$$F_{lsq} = \sqrt{\sum_{jd=1}^{JD} (Q_{r,DS} - Q_{r,jd})^2} \quad (6)$$

Também, em cada iteração, a variável a ser escolhida para a mutação é determinada por uma função de distribuição de probabilidades mostrada na Equação 7 a seguir, onde há um parâmetro τ , que é positivo e ajustável. Este parâmetro possibilita que o algoritmo escolha uma variável qualquer para mutação, mas havendo privilégio àqueles cujos valores k , que representa o nível em que o bit foi posicionado, são mais baixos.

$$P(k) = k^{-\tau} \quad 1 \leq k \leq N \quad (7)$$

O processo descrito anteriormente repete-se até que seja atingido um determinado critério de parada. A melhor configuração de bits será aquela que fornecer o melhor valor para a função objetivo. A seguir é mostrado o passo-a-passo do algoritmo GEO.

- 1) Para cada bit i desta sequência, numa dada iteração:
 - a. Inverte-se o bit, sendo de 0 para 1 ou de 1 para 0, e calcula-se o valor da função objetivo numa configuração C_i ;
 - b. Define-se a adaptabilidade deste bit como sendo $\Delta V_i = (V_i - V_{\text{melhor}})$, que indica o ganho ou perda relativos relacionados à mutação de um bit em comparação com a melhor função objetivo encontrada até o momento.;
 - c. Retorna-se ao valor original do bit modificado.
- 2) Ranqueiam-se os bits de acordo com os seus valores de adaptabilidade, com $k = 1$ para o menos adaptado, até $k = L$ para o mais adaptado. No caso de existirem dois ou mais bits com a mesma adaptabilidade, ranqueie-os de forma aleatória com uma distribuição uniforme.
- 3) Escolhe-se um candidato à mutação (inversão de 0 para 1 ou 1 para 0) conforme probabilidade uniforme. A partir disto, gera-se um número aleatório de distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Caso o valor da função probabilidade seja maior ou igual ao número aleatório, o bit será invertido. Caso contrário, é escolhido um novo bit candidato e repete-se este processo até que a mutação seja confirmada.

- 4) Confirmando a mutação, define-se $C = C_i$ e $V = V_i$, onde i é o índice do bit a ser invertido no passo 4.
- 5) Se $V < V_{melhor}$, definem-se $V_{melhor} = V$ e $C_{melhor} = C$.
- 6) Repetem-se os passos 2 ao 6 até que seja atingido o critério de parada estabelecido.
- 7) Retornam-se os valores C_{melhor} e V_{melhor} .

Há que se perceber que no passo 4, qualquer bit pode ser escolhido para sofrer a mutação, mas a probabilidade desta ocorrência irá depender da posição deste bit no ranqueamento realizado. Ainda, o algoritmo pode escapar de pontos ótimos locais através da sua permissão em realizar movimentos os quais não melhoram o valor da função objetivo (SOUZA, 2003).

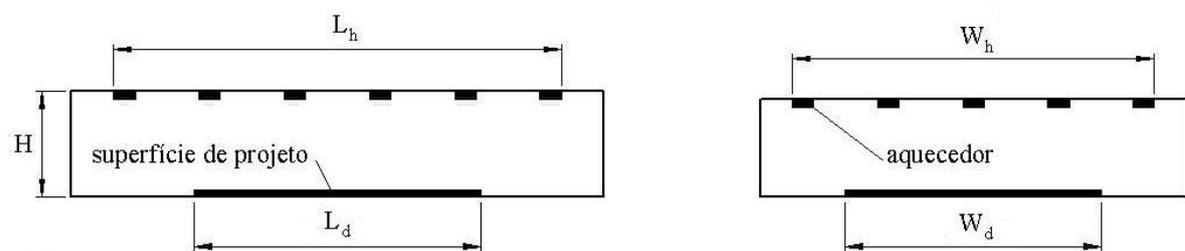
No trabalho de Dutra et al. (2010), o método GEO e outros dois métodos foram aplicados em sistemas de potência elétricos, com o objetivo de solucionar o problema de despacho econômico em geradores, de modo a reduzir o custo total das unidades geradoras, o qual é composto pela soma dos custos de cada unidade geradora. Esses métodos são o ES (*Evolution Strategies*) uma forma de algoritmo onde a resolução é de forma direta, e o TS (*Tabu Search*), que consiste em uma estratégia para resolver problemas de otimização cujas aplicações variam de teoria dos grafos para problemas de programação inteira mista. Tais métodos são os mais tradicionais em comparação ao GEO, com maiores explicações realizadas por Glover (1989) e Schwegel (1995). Para um arranjo com 5 geradores, houve um custo por hora aproximado de 141,67 \$/h e em relação aos desvios, o padrão foi nulo e o tempo médio para a implementação foi de 0,031 segundos, dentro da faixa de tempo dos outros métodos.

Lemos et al. (2016), utilizaram o algoritmo GEO para determinar o formato e a posição de aquecedores de filamento em fornos de tratamento térmico, num intervalo de quantidade de 20 a 50 elementos de aquecimento. Simplificou-se o problema através da coincidência das posições desses elementos com as partes da malha quadrada. Com a aplicação da otimização proposta pelo método, os autores perceberam que uma maior quantidade de elementos levava a uma maior uniformidade no fluxo de calor radiativo na superfície de projeto, com desvios médio e máximo valendo, respectivamente, 0,4% e 2,4%, sendo considerados valores totalmente satisfatórios.

4 PROBLEMA A SER SOLUCIONADO

Neste trabalho, uma cavidade fechada foi utilizada para simular um forno de recozimento. As dimensões da cavidade são denotadas por L , W e H , que representam o comprimento, largura e altura, respectivamente. O fluxo de calor e a temperatura na superfície de projeto (situada na parte inferior da cavidade) são considerados prescritos. Os aquecedores são posicionados na parte superior da cavidade e as superfícies laterais são consideradas isoladas. A Figura 5 ilustra o formato básico da cavidade fechada.

Figura 5 - Cavidade fechada considerada no problema

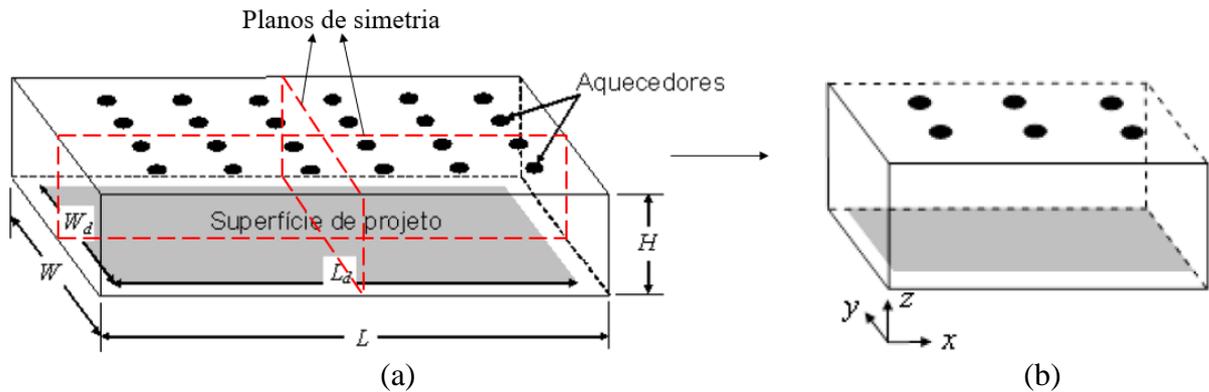


Fonte: (BRITTES, 2011)

Simplificando o problema, assume-se que essa cavidade possui paredes cinzas e difusas. A cavidade é dividida em elementos suficientemente pequenos (e de mesmo tamanho $\Delta x = \Delta y = \Delta z$), que garantem condições de contorno térmicas uniformes em cada superfície. Estes elementos são decorrentes da discretização computacional desta cavidade, onde são desconhecidas apenas as condições térmicas dos elementos que representam os aquecedores (BRITTES, 2011).

Ainda, em função das temperaturas elevadas e da falta de circulação forçada de ar, assume-se que só há troca de calor por radiação térmica e que esta é direta entre as superfícies (o meio é transparente, portanto, não participante). Devido à simetria do problema, somente um quarto da cavidade será considerado neste trabalho. A cavidade fechada e sua são mostradas na Figura 6 abaixo.

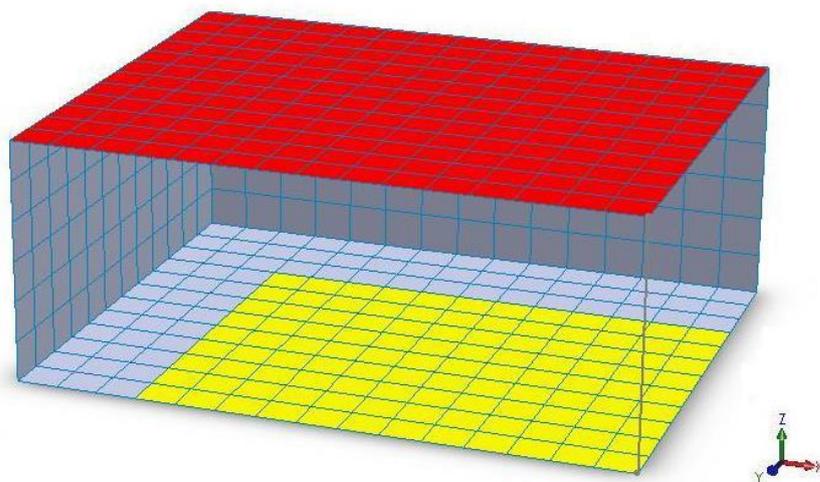
Figura 6 - (a) Cavidade tridimensional; (b) Representação da simetria



Fonte: (Adaptado de BRITTES, 2011)

Na parte (a), os valores W_d e L_d são a largura e comprimento, respectivamente, desta superfície de projeto. Como a superfície de projeto não cobre toda a extensão da base da cavidade (o número de elementos na superfície de projeto é igual a 108), pois as regiões próximas aos cantos são afetadas principalmente por reflexões das paredes laterais e não pela radiação térmica proveniente dos elementos dos aquecedores na superfície superior. Então, considerando a discretização da cavidade e sua simetria, a Figura 7 representa todos esses elementos.

Figura 7 - Representação dos elementos em 1/4 de cavidade.



Fonte: (BRITTES, 2011)

Para este trabalho são especificadas as condições necessárias na superfície de projeto, representando condições típicas de processos de tratamento térmico de recozimento. A primeira

delas é a temperatura na mencionada superfície, a qual é dada por $T_{DS} = 673$ K, ou na forma adimensional, $t_{DS} = 1$. A outra grandeza é o fluxo de calor prescrito na superfície de projeto, que vale $q_{DS} = -3,22 \cdot 10^3$ W/m² e de forma adimensional, torna-se $Q_{DS} = -0,277$. Para o presente trabalho, considera-se positivo apenas o calor adicionado ao sistema. Tais valores são os mesmos utilizados por Mossi et al. (2008).

A emissividade nos elementos da superfície de projeto e daqueles que representam aquecedores é $\varepsilon = 0,9$ (como os demais elementos estão isolados, suas emissividades não influenciarão nos cálculos). A razão de aspecto da base da cavidade é $W/L = 0,8$; a altura adimensional é $H/L = 0,2$. Devido à simetria, apenas um quarto da cavidade é resolvido. O número de elementos nas direções x , y e z é 15, 12, e 6, respectivamente, as dimensões da superfície de projeto são $W_d/L = 0,6$ (largura adimensional) e $L_d/L = 0,8$ (comprimento adimensional).

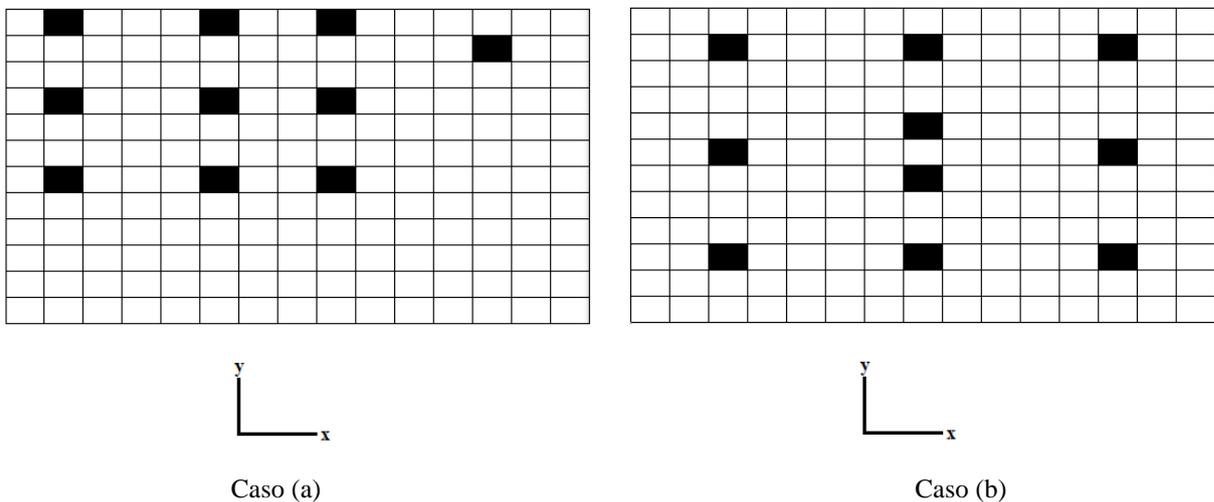
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, foram prescritas a distribuição espacial e a potência de um conjunto de aquecedores e a solução envolveu apenas o método da matriz das radiosidades (problema direto). O objetivo foi analisar, através de tentativa e erro, o efeito da distribuição espacial dos aquecedores no fluxo de calor obtido na superfície de projeto. Então, estes resultados serão comparados com os obtidos pela rotina GEO, sem prescrever a distribuição espacial dos aquecedores (problema inverso).

5.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Como mostrado na Seção 4 deste trabalho, as superfícies horizontais, que representam as paredes superior e inferior do forno, possuem 15 e 12 elementos nas direções x e y , respectivamente. Para simplificar a solução direta, é escolhida uma quantidade de 10 aquecedores por quarto de cavidade os quais possuem fluxos de calor prescritos de mesmo valor. As Figuras 8a e 8b mostram configurações escolhidas.

Figura 8 - Distribuições espaciais prescritas, considerando $JH = 10$ aquecedores.

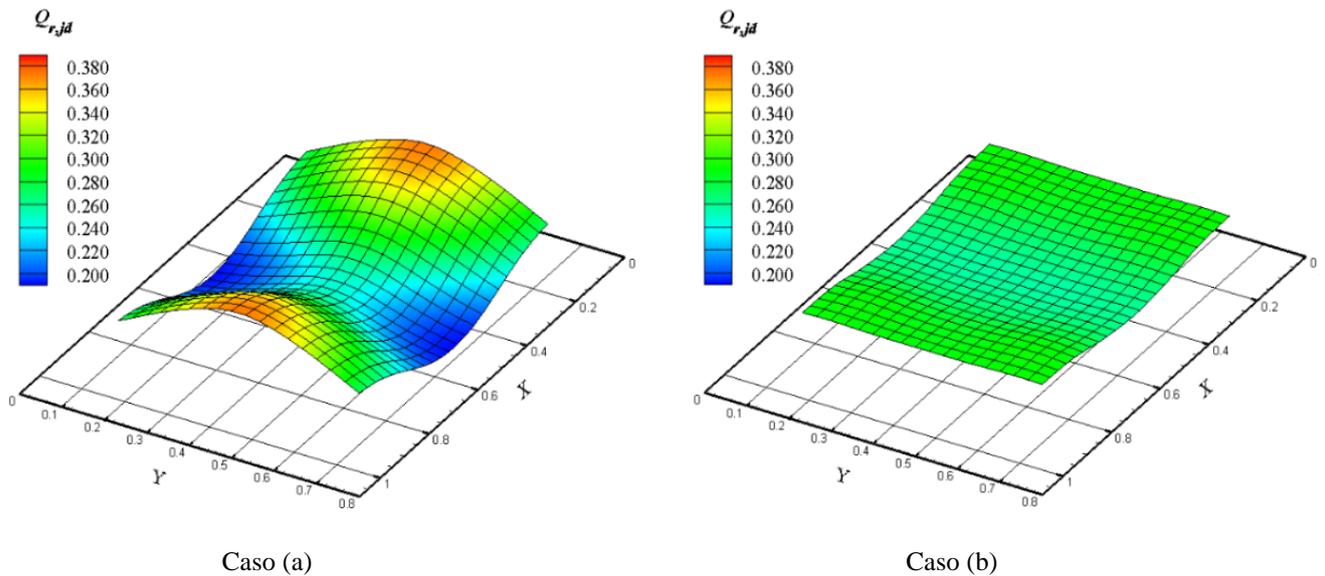


Fonte: (próprio autor)

A representação simplificada mostra os locais escolhidos para os aquecedores (elementos em preto). Os eixos x e y são os horizontal e vertical, respectivamente. Tais escolhas são tentativas de encontrar as melhores distribuições, inicialmente concentrando os aquecedores na parte central e esquerda superior e na outra, realizando espaçamentos mais igualitários entre

eles. A seguir, são mostrados nas Figuras 9a e 9b os resultados das distribuições de fluxo de calor na superfície de projeto para os casos supracitados.

Figura 9 - Distribuição do fluxo de calor na superfície de projeto.



Fonte: (próprio autor)

Visualmente, percebe-se que na configuração com os aquecedores mais concentrados o fluxo de calor na superfície de projeto apresenta pouca uniformidade. Para o caso dos aquecedores mais bem espaçados, essa distribuição tornou-se mais uniforme, porém os desvios ainda são elevados. Tais constatações podem ser observadas no Quadro 1, abaixo, o qual mostra os valores de fluxo na superfície de projeto relacionados às coordenadas (x , y) dos aquecedores, assim como os desvios médio e máximo dos resultados. Os valores de Q_r correspondem aos fluxos de radiativos prescritos (para atender ao balanço de energia, a quantidade de calor necessária na superfície de projeto é $0,277 \times 10^8 = 29,92$), os quais foram considerados iguais para facilitar a análise dos resultados.

Quadro 1 – Resultados obtidos para as configurações (a) e (b)

(continua)

Caso (a)			Caso (b)		
i_x	i_y	$Q_{r,jh}$	i_x	i_y	$Q_{r,jh}$
2	6	2,992	3	3	2,992
2	9	2,992	3	7	2,992
2	12	2,992	3	11	2,992

Quadro 1 – Resultados obtidos para as configurações (a) e (b)

(conclusão)					
6	6	2,992	8	3	2,992
6	9	2,992	8	6	2,992
6	12	2,992	8	8	2,992
9	6	2,992	8	11	2,992
9	9	2,992	13	3	2,992
9	12	2,992	13	7	2,992
13	11	2,992	13	11	2,992
Desvio máximo		49,7%	Desvio máximo		8,1%
Desvio médio		16,4%	Desvio médio		4,2%

Fonte: (próprio autor)

Numericamente, ficam comprovadas as explicações sobre os resultados mostrados graficamente. No Caso (a), os desvios são altos, sendo 16,4% para o médio e 49,7% do máximo. Isso explica a distribuição estar longe da uniformidade. Para o Caso (b), estes desvios são mais reduzidos, atingindo 8,1% para o máximo e 4,2% para o médio. Desse modo, é explanado o motivo da maior uniformização dos resultados dos fluxos de calor na superfície de projeto.

Os fluxos no Caso (b) são mais interessantes, porém não alcançam a uniformidade necessária. Os valores dos desvios não são ainda aceitáveis e dessa forma, podem causar problemas nos gradientes de temperatura na superfície de projeto. Também, pode-se tentar outras configurações de muitas maneiras a partir deste mesmo caso, com resultados ainda pouco precisos, o que demonstra a necessidade de tempo indefinido para alcançar uma solução adequada.

5.2 RESULTADOS ESPERADOS

Após a aplicação do método GEO para a resolução deste problema inverso de transferência de calor, espera-se que a distribuição espacial dos aquecedores seja a melhor possível, havendo uniformização dos fluxos de calor que atingem a superfície de projeto. Também, espera-se que tais resultados sejam obtidos num intervalo de tempo bastante reduzido em relação aos métodos convencionais.

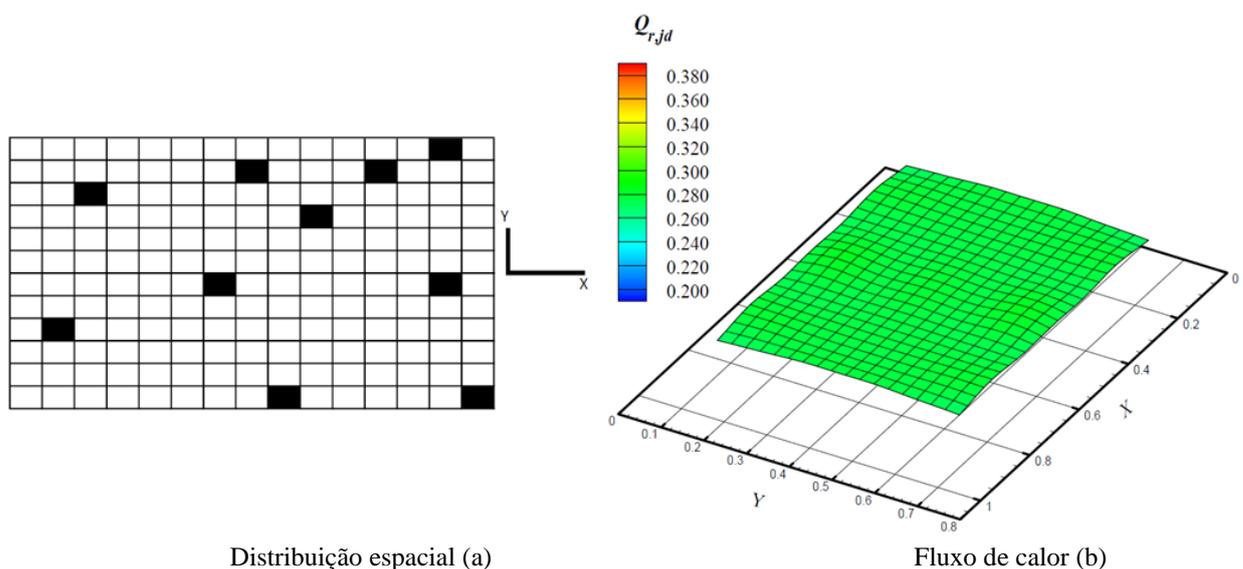
5.3 RESULTADOS OBTIDOS

Como mostrado anteriormente, uma distribuição de 10 aquecedores sendo realizada manualmente, ou seja, de forma direta, produziu resultados pouco precisos. Então, para melhorar os resultados, o método GEO foi aplicado. Considerou-se um valor τ de 1,75 para a minimização da função objetivo.

Foram realizadas 20 análises com uma quantidade indeterminada de avaliações da função objetivo. Havia a necessidade de analisar a estabilidade da minimização das funções objetivo, com gráficos cujos eixos são as médias das funções objetivo calculadas nas análises e a quantidade de iterações. O tempo estipulado para que fosse parado o GEO foi de 1 semana, o que atingiu uma quantidade de, aproximadamente, 1.10^7 iterações. Sabendo que havia estabilidade suficiente a partir das 1.10^6 iterações, foi escolhido esse valor como critério de parada. Isto reduziu significativamente o tempo utilizado pelo GEO, chegando a pouco menos de 24 horas (93262 segundos para o menor valor de função objetivo dos 20 analisados, para 12 aquecedores) de processamento. Os gráficos são apresentados nos Apêndices.

Posteriormente, o problema foi resolvido de forma direta utilizando a distribuição espacial e os fluxos de calor obtidos pelo GEO. Isto permite realizar uma análise gráfica dos resultados, cuja importância se revela na demonstração da eficácia do método. A Figura 10 demonstra como é a configuração encontrada pelo algoritmo e como está a distribuição de fluxo de calor na superfície de projeto. São considerados 10 aquecedores para que os resultados sejam comparados com os anteriores, realizados manualmente.

Figura 10 - Distribuição de fluxo de calor para $JH = 10$ aquecedores (GEO)



Fonte: (próprio autor)

Foram necessários 51.706 segundos para alcançar essa solução, ou pouco mais de 14 horas. Como pode ser visto neste resultado, a configuração com 10 aquecedores sendo calculada pelo GEO mostrou uma distribuição mais uniforme. Percebe-se que a distribuição do fluxo de calor na superfície do projeto sofre menos desvios e, portanto, atinge uma melhor aproximação do ideal, a qual se refere a uma planificação perfeita desses fluxos. O Quadro 2 abaixo relaciona os valores adimensionais obtidos de fluxo de calor em cada posição mostrada na figura anterior. Verifica-se que o balanço de energia foi atendido, pois $\sum_{jh=1}^{JH} Q_{r,jh} = 29,92126$.

Quadro 2 - Resultados obtidos para $JH = 10$ aquecedores.

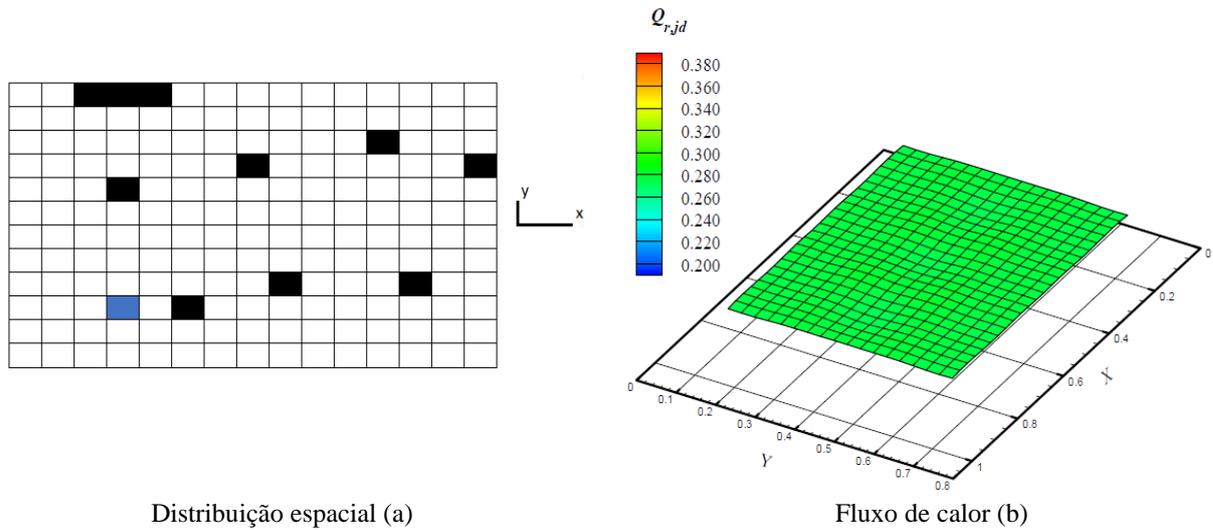
i_x	i_y	$Q_{r,jh}$
12	11	1,259843
3	10	4,566929
14	6	5,039370
14	12	2,047244
2	4	2,204724
7	6	4,409449
8	11	2,440945
10	9	2,598425
9	1	4,803150
15	1	0,551181
Desvio Máximo		3,10%
Desvio Médio		0,62%

Fonte: (próprio autor)

Como se pode perceber, a utilização do GEO reduziu bastante os desvios e produziu uma distribuição mais uniforme de fluxos de calor. Para melhorar os resultados, perseguindo uma aproximação maior do caso ideal, considerou-se aumentar a quantidade de aquecedores no topo da cavidade. Da mesma forma que para o caso de 10 aquecedores, aplicou-se o GEO para encontrar a distribuição espacial e fluxos de cada aquecedor e então, resolver de forma direta de modo a comparar os resultados de forma gráfica.

Foram escolhidas quantidades de 12, 14 e 16 aquecedores de modo que seja investigado o comportamento dos desvios médios e máximos para as configurações encontradas através do GEO. A Figura 11 mostra a distribuição de fluxo de calor para a configuração de 12 aquecedores.

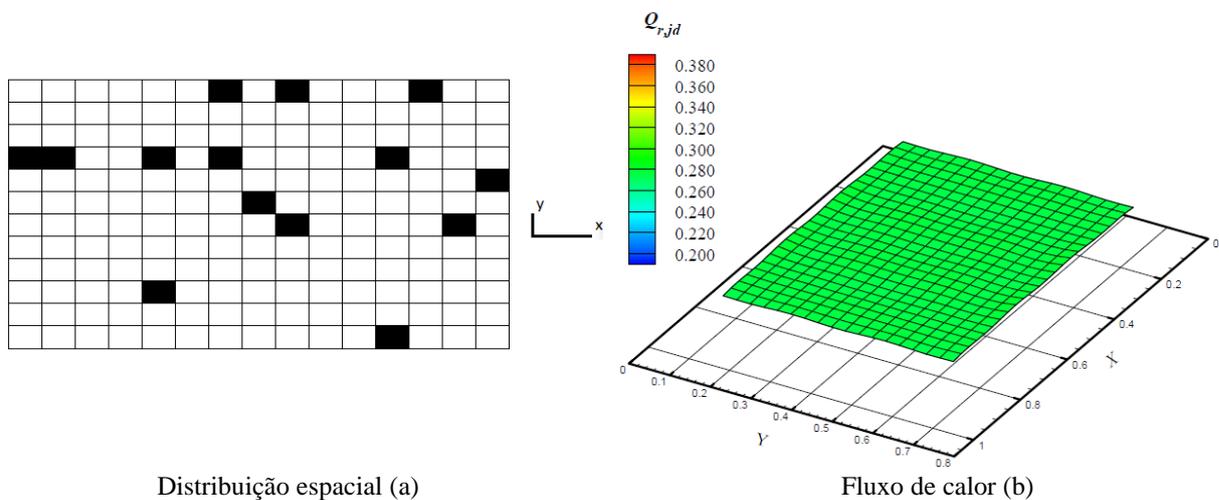
Figura 11 - Configuração e distribuição para 12 aquecedores



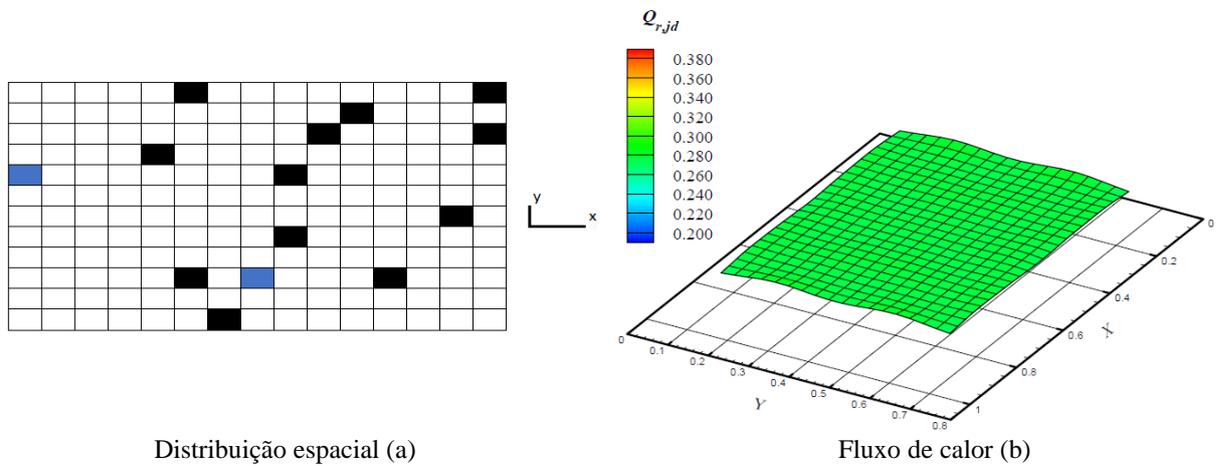
Fonte: (próprio autor)

Há na imagem uma melhora na distribuição de fluxos de calor quando se consideram 12 aquecedores, a qual será exemplificada numericamente em um quadro posteriormente. O elemento em azul na imagem da configuração representa uma sobreposição entre 2 aquecedores encontrada pelo GEO. O acréscimo de aquecedores na cavidade superior parece ser uma alternativa interessante, porém quando foi aplicado o algoritmo para 14 e 16 aquecedores, não houve evidências demonstrando tal ideia. A seguir, são mostradas em sequência as Figuras 12 e 13 para que sejam comparadas.

Figura 12 - Configuração e distribuição para $JH = 14$ aquecedores



Fonte: (próprio autor)

Figura 13 - Configuração e distribuição para $JH = 16$ aquecedores

Distribuição espacial (a)

Fluxo de calor (b)

Fonte: (próprio autor)

Observam-se mais sobreposições de aquecedores, em duas posições diferentes. O que pode ser retirado como informação é que os desvios foram um pouco maiores em relação à configuração contendo 12 aquecedores. O Quadro 3 é apresentado para esclarecer em números os fluxos demandados pelos aquecedores e os desvios na superfície de projeto.

Quadro 3 - Resultados obtidos nas configurações para $JH = 12, 14$ e 16 aquecedores

(continua)

CASOS								
$JH = 12$			$JH = 14$			$JH = 16$		
i_x	i_y	$Q_{r,jh}$	i_x	i_y	$Q_{r,jh}$	i_x	i_y	$Q_{r,jh}$
3	12	1,259843	9	12	0,236220	8	3	3,070866
8	9	3,779528	13	12	1,889764	9	5	0,944882
6	2	2,125984	5	9	1,574803	5	9	1,259843
4	12	0,472441	8	7	1,889764	7	1	1,338583
4	3	5,433071	5	3	4,409449	14	6	2,992126
15	9	1,574803	12	9	4,173228	6	3	1,968504
12	10	5,669291	15	8	1,259843	1	8	1,889764
5	12	0,708661	7	12	1,968504	8	3	1,259843
13	4	5,196850	12	1	6,299213	6	12	1,338583
9	4	2,677165	14	6	0,629921	10	10	1,889764
4	3	2,440945	2	9	1,259843	15	12	0,551181
4	8	4,015748	1	9	2,440945	1	8	6,299213

Quadro 4 - Resultados obtidos nas configurações para $JH = 12, 14$ e 16 aquecedores

(conclusão)								
			7	9	1,023622	9	8	2,677165
			9	6	0,866142	11	11	2,204724
						15	10	1,732283
						12	3	3,464567
DESVIOS								
Máximo	1,57%	Máximo	2,13%	Máximo	2,98%			
Médio	0,45%	Médio	0,38%	Médio	0,45%			

Fonte: (próprio autor)

Em cada caso, os tempos necessários para se encontrar as soluções de menor valor de função objetivo para 14 e 16 aquecedores foram de 66.974 e 68.134 segundos, respectivamente. O caso de 12 aquecedores já foi mencionado anteriormente. Ou seja, são tempos de processamento um pouco abaixo de 24 horas.

Também pode-se perceber uma redução significativa nos desvios relacionados aos fluxos distribuídos na superfície de projeto. Para os casos de 12 e 16 aquecedores, notam-se valores similares para os desvios médios, mas no último caso, o desvio máximo é o maior entre todos. Com relação ao caso de 14 aquecedores, o desvio médio é o menor, porém comparando este caso também ao de 12 aquecedores, o desvio máximo é maior.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou um problema de transferência de calor no interior de uma cavidade fechada, com o objetivo de simular um forno de tratamento térmico de recozimento, onde o fluxo de calor na sua superfície inferior deve ser uniforme. Para a solução deste problema foi utilizado o método da Otimização Extrema Generalizada (GEO), aplicando-se o Método das Radiosidades para resolver o problema direto.

Para fins de comparação, o problema foi resolvido de forma direta a partir do método da tentativa e erro. A utilização do GEO mostrou-se promissora, considerando os desvios relacionados ao fluxo de calor que chegam na superfície de projeto, tendo como parâmetro uma distribuição uniforme desses fluxos. São necessárias até pouco menos de 24 horas para que uma solução seja encontrada para o problema proposto e com os recursos computacionais utilizados, e, além disso, os desvios são baixos, da ordem de até 3% para máximos e 0,5% para médios. Como explicado no trabalho, o método de tentativa e erro pode ser utilizado, porém se torna mais trabalhoso, com necessidade de escolher manualmente as posições dos aquecedores, além de demandarem um tempo indeterminado para que seja encontrada uma solução satisfatória. Em comparação, ao ser utilizado esse método, os desvios se situaram acima de 4% para médios e 8% para máximos e, dessa forma, não são interessantes. Dessa forma, o problema de transferência de calor proposto pode ser resolvido através da aplicação do GEO.

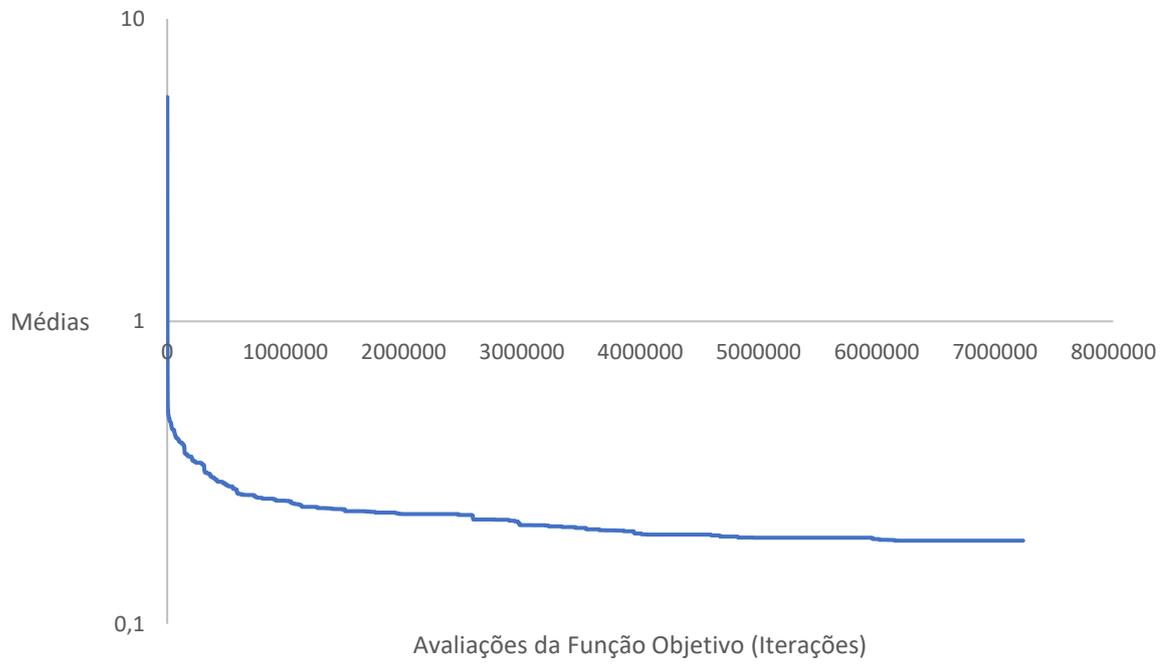
No caso deste trabalho, a solução obtida mostra a distribuição espacial dos aquecedores, assim como o fluxo de calor requerido para cada um. Ainda existe a possibilidade de fixar tais fluxos para que seja calculada apenas a distribuição. Também, pode-se considerar os efeitos do ar no interior da cavidade para resultados mais reais, considerando sua convecção. O objetivo será reduzir o esforço computacional e, por conseguinte, o tempo de aplicação do algoritmo. Há também o interesse em tornar o problema cada vez mais próximo da realidade. Tais possibilidade pode ser explorada em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

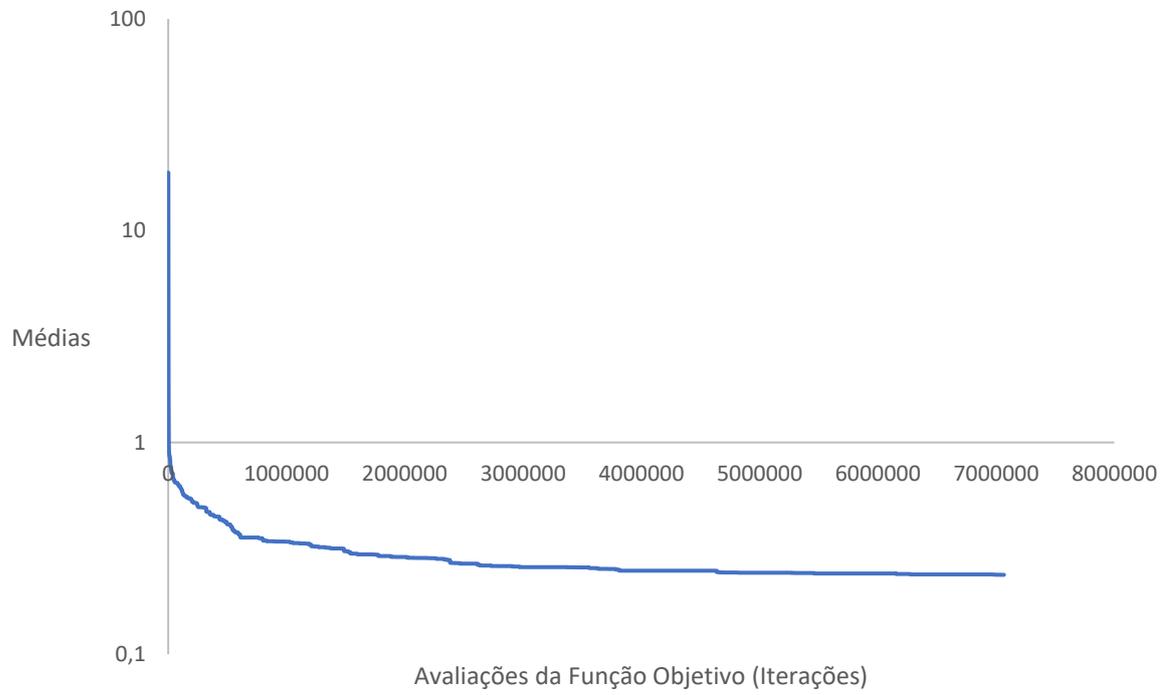
- BAK, P.; SNEPPEN, K. Punctuated Equilibrium and Criticality is a Simple Model of Evolution, **Physical Review Letters**, v. 71, p. 4083-4086, 1993.
- BRITTES, R. **Proposição de um Método Híbrido em Projetos Inversos de Cavidade Radiante**. 2011. 78 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)–Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- CALLISTER JR., W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 817 p.
- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. B.; DULIKRAVICH, G. S. Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering**, v. 28, p. 1-24, 2006.
- DUTRA, Wellington D. et al. Otimização Extrema Generalizada Aplicada ao Problema de Despacho Ótimo de Potência. In: NONO SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 2010, São João del-Rei/MG. **Anais...** São João del-Rei/MG: Universidade Federal de São João del-Rei, 2010.
- GALSKI, R. L. **Desenvolvimento de Versões Aprimoradas, Híbridas, Paralela e Multiobjetivo do Método da Otimização Extrema Generalizada e sua Aplicação no Projeto de Sistemas Espaciais**. 2007. 279 f. Tese (Doutorado Computação Aplicada) –Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, 2007.
- GLOVER, F. Tabu Search – Part I, **ORSA Journal of Computing**, v. 1, n. 3, p. 190-206, 1989
- HOWELL, J. R.; MENGÜÇ, M. P.; SIEGEL, R. **Thermal Radiation Heat Transfer**. 6. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015. 1016 p.
- INCROPERA, F. P. et al. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.
- LEMO, L. D.; BRITTES, R.; FRANÇA, F. H. R. **Application of inverse analysis to determine the geometric configuration of filament heaters for uniform heating**. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 105, 2016, p 1–12. MLTT-800.JPG. Altura: 276 pixels. Largura: 678 pixels. 24 bits. 30,5 KB. Formato JPG. In:
- FORTELAB. **Forno Mufla para Tratamento Térmico: Modelo MLTT – 800**. São Carlos, SP: 2019. Disponível em: < <https://www.fortelab.com.br/index.php/produtos/fornos-para-testes-de-minerio-de-ferro-iso/36-produtos/tratamento-termico-de-metais/f>>. Acesso em: 9 out. 2019.
- MOSSI, A.C. et al. Inverse design involving combined radiative and turbulent convective heat transfer, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, p. 3217-3226, 2008.
- SCHWEFFEL, H. P. **Evolution and Optimum Seeking**. New York: John Wiley & Sons. 1995. 444 p.

SOUSA, F.L. et al. New Stochastic Algorithm for Design Optimization, **AIAA Journal**, v. 41, p. 1808-1818, 2003.

APÊNDICE A – ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 12 AQUECEDORES



APÊNDICE B - ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 14 AQUECEDORES



APÊNDICE C - ESTABILIDADE NAS MÉDIAS DA FUNÇÃO OBJETIVO PARA 16 AQUECEDORES

