

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Diego Samuel Starke Chrysosthemos

**COMPLEMENTARIDADE QUÂNTICA  
NOS PROCESSADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Santa Maria, RS  
2023

**Diego Samuel Starke Chrysosthemos**

**COMPLEMENTARIDADE QUÂNTICA  
NOS PROCESSADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**. Defesa realizada por videoconferência.

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS  
2023

Chrysosthemos, Diego Samuel Starke  
Complementaridade Quântica nos Processadores Quânticos  
da IBM / Diego Samuel Starke Chrysosthemos.- 2023.  
83 p.; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Física, RS, 2023

1. Fundamentos de Mecânica Quântica 2.  
Complementaridade Quântica 3. Interferômetro de Mach  
Zehnder 4. Apagador Quântico Emaranhado I. Maziero, Jonas  
II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

---

©2023

Todos os direitos autorais reservados a Diego Samuel Starke Chrysosthemos. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: [starkediego@gmail.com](mailto:starkediego@gmail.com)

**Diego Samuel Starke Chrysosthemos**

**COMPLEMENTARIDADE QUÂNTICA  
NOS PROCESSADORES QUÂNTICOS DA IBM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

**Aprovado em 31 de janeiro de 2023:**

---

**Jonas Maziero, Prof. Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Renato Moreira Angelo, Prof. Dr. (UFPR)**

---

**Paulo Henrique Souto Ribeiro, Prof. Dr. (UFSC)**

Santa Maria, RS  
2023

NUP: 23081.018009/2023-14

Prioridade: Normal

**Homologação de ata de banca de defesa de pós-graduação**

134.332 - Bancas examinadoras: indicação e atuação

**COMPONENTE**

Ordem	Descrição	Nome do arquivo
1	Ata de defesa de dissertação/tese (134.332)	Ata Defesa Mestrado - DIEGO SAMUEL STARKE CHRYSTHEMOS.pdf

**Assinaturas**

**13/02/2023 10:12:55**

JONAS MAZIERO (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR)  
02.09.05.00.0.0 - CURSO DE FÍSICA - CFIS

**13/02/2023 10:49:37**

Renato Moreira Angelo (Pessoa Física)  
Usuário Externo (182.\*\*\*.\*\*\*\_\*\*)

**13/02/2023 13:48:31**

PAULO HENRIQUE SOUTO RIBEIRO (Pessoa Física)  
Usuário Externo (730.\*\*\*.\*\*\*\_\*\*)

**14/02/2023 08:45:23**

ROGEMAR ANDRE RIFFEL (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR)  
02.10.07.00.0.0 - CURSO-PROGRAMA PG em FÍSICA - CPPGF

Código Verificador: 2370010

Código CRC: b6a429ae

Consulte em: <https://portal.ufsm.br/documentos/publico/autenticacao/assinaturas.html>



## AGRADECIMENTOS

*Gostaria de expressar o meu agradecimento e reconhecimento a algumas pessoas e instituições que contribuíram para a realização deste trabalho.*

*Ao meu orientador, Jonas Maziero, pela sua grande competência profissional e técnica. Sua atuação no curso de física da UFSM é inspiração para muitos alunos, assim como tem sido para mim. Agradeço imensamente por acreditar nas minhas capacidades e me ajudar a ser um melhor pesquisador a cada dia.*

*Aos colegas do grupo de pesquisa Quantum Information and Emergent Phenomena (Qiep) pelos momentos de aprendizagem. Este grupo tem se mostrado cada vez mais próspero, com pessoas muito engajadas, tornando-se um ambiente propício para adquirir conhecimento e compartilhar experiências. Gostaria de expressar minha sincera gratidão a Marcos L. W. Basso pela sua capacidade e por estar sempre presente e disposto a ajudar. Também desejo agradecer a Douglas F. Pinto por ser uma fonte constante de apoio e por toda colaboração nesta empreitada.*

*À Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), em especial ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFSM, pela oportunidade de cursar este programa de estrado. Agradeço também aos profissionais que lá trabalham por sua competência, atenção e prestatividade.*

*À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) que custeou o presente trabalho durante os três semestres em que estive no programa de mestrado.*

*Ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ) pelas suas valiosas contribuições ao grupo de pesquisa.*

*À International Business Machines (IBM) pela disponibilização dos computadores quânticos que foram utilizados nos experimentos realizados ao longo deste trabalho.*

*Agradeço a minha família e amigos por sua compreensão e apoio incondicional durante este processo. Em especial, quero agradecer minha companheira de vida, Rúbia Strassburger, pela generosidade, paciência, fonte de apoio e motivação para seguir essa jornada.*

*Agradecimentos sinceros.*

## RESUMO

### COMPLEMENTARIDADE QUÂNTICA NOS PROCESSADORES QUÂNTICOS DA IBM

AUTOR: Diego Samuel Starke Chrysosthemos  
ORIENTADOR: Jonas Maziero

O princípio de complementaridade de Bohr, após ganhar contribuições de diversos pesquisadores, passou de uma análise qualitativa para uma análise quantitativa por meio do que chamamos hoje de relações de complementaridade (RCs). Essa mudança possibilitou quantificar aspectos de superposição de caminho e distinguibilidade (previsibilidade e emaranhamento) em um único aparato experimental, por exemplo, no interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ), ganhando um apelo histórico na quantificação de superposição de caminho por meio da visibilidade interferométrica. Ademais, as RCs cujas funções de coerência quântica, previsibilidade e emaranhamento dependem do estado quântico também ganharam relevância nessa área de pesquisa. Nesta dissertação, baseado em outras pesquisas, realizamos dois trabalhos envolvendo o IMZ e análises por meio das RCs. No primeiro trabalho, construímos uma versão do IMZ e mostramos que a visibilidade interferométrica nem sempre é capaz de quantificar corretamente a superposição de caminho dentro do IMZ para sistemas de dois caminhos. Constatamos que RCs envolvendo coerência quântica acabam refletindo o comportamento esperado para o fóton nesse mesmo aparato experimental. No segundo trabalho, realizamos uma análise integral, por meio das RCCs, do AQE. Nesse aparato experimental, consideramos um VPPBS que pode produzir superposição de caminho das polarizações horizontais e verticais que entram no IMZ. Por conta da inclusão do VPPBS, parte do aparato experimental do apagador quântico padrão foi modificado, de modo que precisamos realizar medidas na base de Bell nos graus de liberdade das polarizações dos dois fótons emaranhados. Sendo assim, a análise do AQE, por meio das RCs, acaba sendo muito mais rica, produzindo situações onde há, inclusive, apagamentos parciais da informação disponível antes do processo de apagamento. Nos dois trabalhos, verificamos nossas constatações teóricas implementando experimentos nos computadores quânticos da IBM.

**Palavras-chave:** Coerência quântica. Visibilidade interferométrica. Interferômetro de Mach-Zehnder. Simulação quântica. Emaranhamento. Apagador quântico. Relações de complementaridade.

## ABSTRACT

### QUANTUM COMPLEMENTARITY IN THE IBM'S QUANTUM PROCESSORS

AUTHOR: Diego Samuel Starke Chrysosthemos  
ADVISOR: Jonas Maziero

Bohr's principle of complementarity, after gaining contributions from several researchers, moved from a qualitative analysis to a quantitative analysis through what we call today complementarity relations (CR). This change made it possible to quantify aspects of path superposition and distinguishability (predictability and entanglement) in a single experimental apparatus, for example, the Mach-Zehnder interferometer (MZI), gaining historical appeal in the quantification of path superposition through interferometric visibility. Furthermore, CR of quantum coherence, predictability and entanglement functions that are dependent on the quantum state, have also gained relevance in this area of research. In this dissertation, based on other research, we were directed to carry out two works involving the IMZ and analysis through CR. In the first work, we build a version of the MZI and show that interferometric visibility is not always able to correctly quantify the path superposition within the MZI for two-path systems. We found that CR involving quantum coherence end up reflecting the expected behavior for the photon in this same experimental apparatus. In the second work, we performed an integral analysis, through the complete CR, of the entangled quantum eraser (EQE). In this experimental apparatus, we consider a variable partially-polarizing beam splitter (VPPBS) that can produce path superposition of the horizontal and vertical polarizations entering the MZI. Due to the inclusion of the VPPBS, part of the experimental apparatus of the standard quantum eraser was modified, so that we need to perform Bell's basis measurements of the degree of freedom of the polarizations of the two entangled photons. Therefore, the analysis of the EQE, through the CR, ends up being much richer, producing situations where there are even partial erasures of the information available before the erasure process. In both papers, we verified our theoretical findings by implementing experiments on IBM's quantum computers.

**Keywords:** Quantum coherence. Interferometric Visibility. Mach-Zehnder interferometer. Quantum simulation. Entanglement. Quantum eraser. Complementarity relations.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Interferômetro de Mach-Zehnder. ....	17
Figura 2.2 – Apagador quântico. ....	20
Figura 2.3 – Ilustração da utilização do IBM Quantum Composer. ....	36
Figura 2.4 – Implementação do Interferômetro de Mach-Zehnder da Fig. 2.1 por meio de portas lógicas quânticas no IBMQ. ....	38
Figura 2.5 – Implementação do par de fótons emaranhados produzido pelo BBO por meio de portas lógicas quânticas. ....	40
Figura 2.6 – Implementação do DFP por meio de portas lógicas quânticas. ....	40
Figura 2.7 – Implementação da PMO por meio de portas lógicas quânticas. ....	41
Figura 2.8 – Implementação do apagador quântico da Fig. 2.2 por meio de portas lógicas quânticas. ....	41
Figura 2.9 – Implementação do VPPBS da Fig. 2 do Capítulo 4 por meio de portas lógicas quânticas. ....	43
Figura 2.10 – Implementação do apagador quântico emaranhado do Capítulo 4 para o estado $ \Psi_2\rangle$ por meio de portas lógicas quânticas. ....	44

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>AQ</i>	Apagador quântico
<i>AQE</i>	Apagador quântico emaranhado
<i>BBO</i>	Cristal não linear de borato de bário beta
<i>CQ</i>	Computador quântico
<i>CQs</i>	Computadores quânticos
<i>DF</i>	Divisor de feixes
<i>DFG</i>	Divisor de feixes geral
<i>DFGs</i>	Divisores de feixes gerais
<i>DFP</i>	Divisor de feixes polarizado
<i>DOP</i>	Dualidade onda-partícula
<i>IBMQ</i>	IBM Quantum
<i>IMZ</i>	Interferômetro de Mach-Zehnder
<i>MQ</i>	Mecânica Quântica
<i>PQO</i>	Placa de quarto de onda
<i>PMO</i>	Placa de meia de onda
<i>RCC</i>	Relação completa de complementaridade quântica
<i>RCCs</i>	Relações completas de complementaridade quântica
<i>RC</i>	Relação de complementaridade quântica
<i>RCs</i>	Relações de complementaridade quântica
<i>VPPBS</i>	Divisor de Feixes Polarizado Geral

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>12</b>
2.1	FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA.....	12
<b>2.1.1</b>	<b>Postulados da Mecânica Quântica</b> .....	<b>12</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Operador densidade</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Bases matriciais</b> .....	<b>15</b>
2.2	INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER, APAGADOR QUÂNTICO E SEUS COMPONENTES.....	16
<b>2.2.1</b>	<b>Apagador quântico</b> .....	<b>19</b>
2.3	SISTEMAS BIPARTIDOS E EMARANHAMENTO.....	23
2.4	RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE .....	26
<b>2.4.1</b>	<b>Relação de complementaridade envolvendo visibilidade</b> .....	<b>27</b>
<i>2.4.1.1</i>	<i>Relação completa de complementaridade</i> .....	<i>29</i>
<b>2.4.2</b>	<b>Previsibilidade</b> .....	<b>30</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Crêterios para uma boa medida de visibilidade <math>W</math></b> .....	<b>30</b>
<b>2.4.4</b>	<b>Coerência quântica</b> .....	<b>31</b>
<i>2.4.4.1</i>	<i>Quantificadores de coerência baseados em norma de matrizes</i> .....	<i>32</i>
<i>2.4.4.2</i>	<i>Quantificadores de coerência baseados em entropia</i> .....	<i>32</i>
<b>2.4.5</b>	<b>Relações de complementaridade envolvendo coerência quântica</b> .....	<b>33</b>
2.5	COMPUTADORES QUÂNTICOS E PORTAS LÓGICAS .....	34
<b>2.5.1</b>	<b>Interferômetro de Mach-Zehnder no IBMQ</b> .....	<b>35</b>
<b>2.5.2</b>	<b>Apagador quântico no IBMQ</b> .....	<b>38</b>
<i>2.5.2.1</i>	<i>Apagador quântico emaranhado</i> .....	<i>42</i>
<b>3</b>	<b>ARTIGO 1 - QUANTUM COHERENCE VERSUS INTERFEROMETRIC VISIBILITY IN A BIASED MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER</b> .....	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>ARTIGO 2 - QUANTUM SIMULATION OF THE GENERALIZED-ENTANGLED QUANTUM ERASER, AND THE RELATED COMPLETE COMPLEMENTARITY RELATIONS</b> .....	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>69</b>
5.1	CONCLUSÃO .....	69
5.2	PERSPECTIVAS PARA O PROGRAMA DE DOUTORADO .....	72
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>74</b>
	<b>APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DE PARTE DO TRABALHO DO CAPÍTULO 4</b> .....	<b>79</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A mecânica quântica (MQ) é considerada uma das melhores teorias produzidas pela humanidade e, desde sua gênese, o conceito de dualidade onda-partícula (DOP) esteve presente e inclusive foi imprescindível para uma das suas primeiras formulações. Max Planck considerou que a luz era composta de quanta de energia, posteriormente chamados de fótons e entendidos como sendo partículas, para poder explicar dados experimentais da radiação de corpo negro. Louis de Broglie postulou, em seu trabalho de doutorado, que partículas em geral, por terem momento, deveriam apresentar o comportamento ondulatório em virtude do seu comprimento de onda característico. Niels Bohr (BOHR, 1928) enunciou, de modo mais amplo, o princípio da complementaridade que, por sua vez, buscou, de forma paralela à teoria da MQ, nortear o entendimento da natureza ao afirmar que ela possui propriedades complementares e igualmente reais, porém exclusivas, sendo a DOP o exemplo mais conhecido. Experimentos mais recentes atestaram que a natureza pode evidenciar ambos os aspectos de onda e partícula em um único experimento, mas quanto mais conhecimento temos sobre uma das propriedades menos conhecimento teremos sobre a propriedade complementar. O primeiro experimento a evidenciar o comportamento dual pode ser conferido em (BADUREK; RAUCH; SUMMHAMMER, 1983). Precisamos, agora, de uma nova identificação para esse sistema quântico que hora se comporta como partícula, hora como onda ou uma manifestação de ambas as características. Diversos nomes foram aludidos, mas utilizaremos a definição de “quanton” cunhada por (LÉVY-LEBLOND, 1976). Os pesquisadores em (GREENBERGER; YASIN, 1988) conseguiram compactar esses dois aspectos do quanton, de forma muito simples e elegante, em uma única expressão que é conhecida como relação de complementaridade quântica (RC) para a DOP e é dada pela expressão

$$V^2 + P^2 \leq 1, \quad (1.1)$$

onde  $V$  é a visibilidade interferométrica e  $P$  é a previsibilidade e quantificam o comportamento ondulatório e o comportamento corpuscular respectivamente. Essa relação pode captar, agora não mais de forma exclusiva, manifestações parciais desses comportamentos em um único experimento. Não por menos, por conta do caráter histórico, essa RC passou a ser amplamente utilizada e difundida ao longo de diversos trabalhos realizados desde então.

Outras RCs surgiram para captar a mesma essência da RC anterior, entretanto, levando em consideração o estado quântico  $\rho_A$  do quanton, que podem ser escritas

na forma

$$C(\rho_A) + P(\rho_A) \leq u(d_A), \quad (1.2)$$

onde  $C$  é denominada de coerência quântica (quantifica o padrão ondulatório, mas de maneira mais geral quantifica a superposição do sistema),  $P$  é a previsibilidade que, da mesma forma apresentada na primeira relação, também quantifica o padrão corpuscular. Essa relação está limitada superiormente por uma função constante  $u$  que depende unicamente da dimensão  $d_A$  do sistema. Os autores em (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) sugeriram a coerência quântica como um bom quantificador para a visibilidade. Existem diversas funções de coerência que podemos utilizar para representar diferentes RCs e que seguem alguns critérios específicos que abordaremos no próximo Capítulo.

O operador densidade  $\rho$  faz parte do rol de postulados básicos da MQ e é a forma mais geral de se representar o estado de um sistema quântico. Possui restrições muito bem estabelecidas e que devem ser verificadas com muito critério para representar de forma adequada o sistema quântico de interesse. Com base nesses critérios, os autores em (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020) conseguiram demonstrar que relações do tipo da Eq. (1.2) podem ser obtidas diretamente por meio das restrições impostas pela teoria da MQ ao operador densidade. Em outras palavras, os autores demonstraram que o princípio de complementaridade de Bohr para DOP não é um princípio acessório à MQ (WALBORN et al., 2005), ou seja, é intrínseco à teoria da MQ e pode ser obtido diretamente dos seus postulados mais básicos.

As RCs (ou ainda relações incompletas de complementaridade) são inequações que captam a física da DOP, mas o que falta para completar essa relação é a função de correlação entre esse e outros subsistemas denominada de emaranhamento. As relações completas de complementaridade (RCCs) são representadas pela seguinte estrutura

$$C(\rho_A) + P(\rho_A) + Q(\rho_{A|B}) = v(d_A), \quad (1.3)$$

onde  $Q$  é a função de correlação entre o subsistema  $A$  e o sistema global  $AB$  adequada para completar a expressão e  $v$  também é uma função constante que depende unicamente da dimensão do sistema. Podemos, com essa relação, captar a manifestação de cada uma dessas três características em sistemas quânticos como no caso do interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ) e do apagador quântico (AQ).

O IMZ e o AQ são experimentos quânticos simples em sua concepção, mas são uma poderosa fonte de discussão e estudo de conceitos básicos da MQ como a DOP, superposição e emaranhamento, aplicações em espectroscopia e metrologia, entre outros. São sistemas originalmente desenvolvidos com dispositivos ópticos, entre eles: divisores de feixes, espelhos, fase, placas de quarto de onda e assim por

diante. O advento dos computadores quânticos (CQs) possibilitaram, como alternativa, a implementação desses aparatos experimentais de modo a captar a mesma física com a utilização de circuitos quânticos. Basta que saibamos converter os componentes ópticos de forma adequada em portas lógicas quânticas.

Os CQs foram idealizados como sendo os equipamentos que poderiam, de alguma forma, utilizando recursos quânticos como, por exemplo, coerência, emaranhamento e discórdia (não presentes em computadores clássicos), resolver problemas que os computadores clássicos não poderiam ou que levariam muito tempo para que a resolução dos problemas fosse de fato viável. Após muito avanço na teoria de computação quântica, em 1994, Peter Shor desenvolveu um algoritmo quântico (SHOR, 1994) capaz de fatorar números inteiros utilizando alguns qubits (sistema de 2 níveis) e, em 2011, a empresa D-Wave já reivindicou possuir o primeiro computador quântico (CQ) comercial (ZYGA; PHYS.ORG, 2022). Muito se desenvolveu desde então e atualmente podemos acessar computadores quânticos remotamente, inclusive de forma gratuita, e com amplo suporte de programação como o caso dos computadores quânticos da IBM (IBMQ, 2022) que foram utilizados para realizar os experimentos aqui presentes.

Apresentamos, nesta dissertação, dois trabalhos produzidos ao longo do programa de mestrado. No primeiro trabalho, denominado “Quantum coherence versus interferometric visibility in a biased Mach-Zehnder interferometer” (CHRYSOSTHEMOS; BASSO; MAZIERO, 2022a), analisamos o IMZ em um contexto mais geral que o usual. Nessa modificação do aparato experimental, incluímos dois divisores de feixes gerais (DFGs), na entrada e na saída (antes da detecção) do IMZ. A ideia desse trabalho surgiu tomando como base trabalhos que atestaram que as RCs envolvendo a visibilidade não conseguem captar adequadamente a física da DOP para sistemas com um número de níveis maior do que dois, em (MISHRA; VENUGOPALAN; QURESHI, 2019; QURESHI, 2019), e concluíram que as RCs envolvendo coerência quântica apresentam resultados consistentes com o que se espera para o comportamento do quanton dentro do IMZ. Utilizando o aparato experimental mencionado, buscamos demonstrar que, inclusive para sistemas de dois níveis, as RCs envolvendo a visibilidade não expressa de forma adequada a física envolvida e verificamos que as RCs envolvendo a coerência quântica são melhores para representar a DOP. No segundo trabalho, denominado “Quantum simulation of the generalized-entangled quantum eraser, and the related complete complementarity relations” (CHRYSOSTHEMOS; BASSO; MAZIERO, 2022b), analisamos, por meio das RCCs, a física do apagador quântico emaranhado (AQE). O AQ padrão pode ser construído levando-se em conta os graus de liberdade da polarização e de caminho de um par de fótons emaranhados. Um dos fótons (fóton  $B$ ) passa por um IMZ, de modo que possui informação de caminho (seja na forma de previsibilidade ou na forma de emaranhamento), e o outro fóton (fóton  $A$ )

é direcionado para uma região diferente e é utilizado posteriormente para realizar o apagamento da informação de caminho dentro do IMZ. O AQE surge ao modificarmos o primeiro divisor de feixes polarizado (DFP) por um divisor de feixes polarizado geral (VPPBS). Aquele transmite apenas um dos modos de polarização (horizontal ou vertical) e reflete o outro, ao passo que este cria superposição de caminho entre os modos de polarização de entrada do IMZ. No AQ, ao utilizarmos uma placa de meia onda em um dos caminhos dentro do IMZ, é possível desemaranhar a polarização do fóton do  $B$  e ao realizarmos medidas projetivas no fóton  $A$  aliadas com pós-seleção, conseguimos restaurar a coerência de caminho do fóton  $B$ . Já no AQE não é possível fazer uso da placa de meia de onda para desemaranhar a polarização do caminho para o fóton  $B$ . A solução escolhida é escrever as polarizações dos fótons  $A$  e  $B$  na base de Bell e, com isso, realizar medidas projetivas com pós-seleção nessa nova base. Esse aparato experimental nos permite investigar cenários onde há apagamento completo e apagamentos parciais da informação de caminho. Além disso, utilizamos os CQs da IBM para implementar esses aparatos experimentais, tanto do primeiro como do segundo trabalho, para verificarmos nossa análise e desenvolvimento teórico.

Nesse Capítulo introdutório, apresentamos de forma geral diversos assuntos que norteiam esta dissertação e pretendemos explorá-los mais detalhadamente na revisão bibliográfica. No Capítulo 2, apresentamos o formalismo matemático da MQ, contemplando seus postulados, o operador densidade e bases matriciais. Apresentamos, também, resultados e os componentes ópticos envolvidos no IMZ e no AQ nos modelos usuais encontrados nos livros texto de cursos de graduação em física. Por fim, abordamos as RCs tanto na forma dependente da visibilidade, bem como as relações derivadas de funções de coerência quântica além das RCCs que envolvem correlação quântica em um subsistema e os demais subsistemas de interesse. Em seguida, discutimos sobre os CQs e as portas lógicas quânticas, bem como a construção do IMZ e do AQ por meio de circuitos quânticos. Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos os trabalhos desenvolvidos no programa de mestrado e que compõem, em forma de artigo, esta dissertação. Em seguida, apresentamos, no Capítulo 5, as considerações finais, elucidando e apontando os principais resultados dos trabalhos apresentados e as perspectivas para trabalhos futuros. No apêndice A, apresentamos alguns resultados intermediários e mais detalhados de algumas situações que julgamos ser interessantes para obtenção dos resultados apresentados.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA

#### 2.1.1 Postulados da Mecânica Quântica

A sequência direta da investigação em física parte da observação de fenômenos da natureza e, em seguida, a formulação teórica que, de maneira geral, explique esses fenômenos. Para isso, são realizadas algumas suposições na forma de postulados, que devem ser amplamente testadas e suportadas pelos dados experimentais, para que possam dar seguimento às investigações e consolidar a teoria. Esses postulados, quando não podem ser originados de algo ainda mais elementar, são as bases da teoria. A MQ é a parte da física que busca explicar parte de fenômenos que não podiam ser explicados pelas teorias da física clássica (sistemas físicos em escalas muito pequenas como estruturas atômicas e moléculas) e, com a ajuda de diversos cientistas, consolidou alguns postulados que explanaremos a seguir.

O primeiro postulado (VEDRAL, 2006; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017) trata do estado do sistema quântico. Estados quânticos são representados por operadores densidade, atuantes em um espaço vetorial, denominado de espaço de Hilbert ( $\mathcal{H}$ ), que possui uma função produto interno ( $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ) definida anti-linear no primeiro argumento. Esse postulado nos informa o modo matemático como descreveremos o estado físico do sistema quântico e o espaço em que ele atua. Podemos ainda representar um estado puro por um vetor de estado  $|\psi\rangle$ , de modo que, para esse caso, o operador densidade é dado por  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ . O operador densidade permite generalizar a descrição de sistemas quânticos ampliando, inclusive, o terceiro postulado sobre medidas. Por conta disso, abordaremos especificamente sobre o operador densidade e suas propriedades na subseção 2.1.2.

O segundo é o postulado dos observáveis (VEDRAL, 2006; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). Observáveis são as quantidades físicas mensuráveis, nos sistemas quânticos, e são representados por operadores hermitianos ( $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger$ ) que atuam no espaço de estados  $\mathcal{H}$ . Observáveis podem ser, por exemplo, posição, momento, polarização do fóton ou componentes de spin. Esses operadores possuem autovalores reais ( $o_j$ ) e, por conta disso, podem representar quantidades físicas e seus autoestados podem ser escolhidos para formar uma base ortonormal para o espaço vetorial.

O terceiro é o postulado das medidas (VEDRAL, 2006; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). Um estado quântico pode ser medido se considerarmos um conjunto de



projeções ortonormais de um observável físico. Como esses estados são ortogonais, então, o estado irá colapsar para um dos autovalores desse observável, considerando que o sistema se encontra no estado  $|\psi\rangle$ , e a probabilidade é obtida pela regra de Born por meio de

$$\Pr(o_j|\psi) = |\langle o_j|\psi\rangle|^2, \quad (2.1)$$

onde estamos considerando ao longo desta dissertação variáveis discretas. Esse postulado nos informa a maneira de extrairmos informações da base matemática expressa no primeiro e segundo postulados.

O quarto é o postulado da dinâmica (VEDRAL, 2006; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017) que nos informa a evolução de um sistema quântico. As evoluções ocorrem por meio de transformação unitária tal que  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t_0)\rangle$ , onde  $|\psi(t_0)\rangle$  é o estado inicial cuja atuação de  $U(t)$  (matriz unitária, ou seja,  $U^{-1} = U^\dagger$ ) nos leva ao estado evoluído  $|\psi(t)\rangle$ . Transformações unitárias são uma generalização, para o espaço vetorial complexo, das transformações ortogonais de três dimensões do espaço vetorial euclidiano como, por exemplo, reflexões em torno de um ponto em um plano ou rotações tridimensionais, e conservam o produto interno. Podemos ver isso definindo  $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ ,  $|\eta'\rangle = U|\eta\rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle\eta|\psi\rangle &= \langle\eta|\mathbb{I}|\psi\rangle = \langle\eta|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\eta'|\psi'\rangle \\ \therefore \langle\eta|\psi\rangle &= \langle\eta'|\psi'\rangle, \end{aligned}$$

onde  $U^\dagger U = \mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  é o operador identidade que possui apenas elementos na diagonal principal e iguais a um.

Com isso, terminamos o rol de postulados da teoria da MQ. Essas são as bases que nos permitem extrair informações relevantes dos sistemas quânticos e nos certificam de que as operações realizadas são válidas dentro da teoria. Na próxima seção, apresentaremos o operador densidade, que ganha uma seção exclusiva por ser tema de suma importância para nosso trabalho.

### 2.1.2 Operador densidade

O operador densidade ( $\rho$ ) é a maneira mais geral com que conseguimos expressar o primeiro postulado. Considere a geração aleatória de estados  $|\psi_j\rangle$  com respectiva probabilidade  $p_j$  com  $j = 0, 1, \dots, n$ . Temos, então, pelo segundo postulado, que a probabilidade de obtermos o autovalor  $x_j$  do observável  $X$ , nesse ensemble de

estados  $(\{p_j |\psi_j\rangle\}_{j=0}^n)$ , pela regra de Born, é dada por

$$\begin{aligned}
\Pr(x_j | \{p_j |\psi_j\rangle\}) &= \sum_j p_j \Pr(x_j | \psi_j) = \sum_j p_j |\langle x_j | \psi_j \rangle|^2 \\
&= \sum_j p_j \langle x_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | x_j \rangle = \sum_j p_j \langle x_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | x_j \rangle \\
&= \left\langle x_j \left| \left( \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right) \right| x_j \right\rangle \\
&= \langle x_j | \rho | x_j \rangle,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \tag{2.3}$$

é a definição do operador densidade. Se for possível expressar  $\rho$  apenas com um único valor de  $j$  (VEDRAL, 2006; BERGOU; HILLERY, 2013) temos em mãos um sistema dito puro, do contrário o sistema é dito misto. A pureza (AULETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009) pode ser quantificada por meio de

$$\text{Tr}(\rho^2) \leq 1, \tag{2.4}$$

caso  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , o estado é denominado puro, e caso  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ , o estado é denominado misto.

Definido o operador densidade, podemos apresentar suas propriedades (BERGOU; HILLERY, 2013):

- $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ . Segue do fato de que

$$\text{Tr}\{\rho\} = \text{Tr}\left\{ \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right\} = \sum_j p_j = 1; \tag{2.5}$$

- O operador densidade é hermitiano:  $\rho = \rho^\dagger$ ;
- O operador densidade é positivo semi-definido:  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ ,  $\forall |\psi\rangle$ , que pode ser observado por meio de

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| | \psi \rangle = \sum_j p_j |\langle \psi | \psi_j \rangle|^2 \geq 0. \tag{2.6}$$

Até aqui não precisamos utilizar nenhum tipo de base matricial de forma explícita, mas nas próximas subseções será crucial apresentarmos algumas noções básicas, tanto para um qubit como para dois qubits.

### 2.1.3 Bases matriciais

Utilizaremos, no decorrer desse trabalho, bases matriciais para representar estados para qubits. É conveniente utilizarmos a base computacional, principalmente, por questão de simplicidade, que são os autovetores do operador  $Z$ . O operador  $Z$  (matriz de Pauli usual) pode ser decomposta em termos de seus autovalores e autovetores por meio de

$$Z = \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  é a base computacional e  $1, -1$  são os autovalores. Matricialmente, a base computacional nessa mesma base pode ser representada como

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

OBS: Os computadores quânticos da IBM, como veremos na seção 2.5, só realizam operações utilizando qubits e sempre são preparados com o estado inicial, tal que,  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ . As medidas também são, por padrão, feitas na base computacional.

Temos também as bases oriundas dos autovetores das matrizes de Pauli  $X$ , denotadas por  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , e  $Y$ , denotadas por  $\{|\oplus\rangle, |\ominus\rangle\}$ . As matrizes  $X$  e  $Y$  são decompostas, em termos dessas bases, respectivamente, por

$$X = \sigma_x = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$Y = \sigma_y = |\oplus\rangle\langle \oplus| - |\ominus\rangle\langle \ominus| = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde as relações entre as bases dos autovetores de  $X$  e  $Y$  e a base computacional se dão por meio de

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.12)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.13)$$

$$|\oplus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad (2.14)$$

$$|\ominus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle). \quad (2.15)$$

Além da base computacional, base para um qubit, utilizaremos a base para representar a composição de dois qubits denominada de base de Bell. A base de Bell se relaciona com a base computacional da seguinte forma

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (2.16)$$

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \quad (2.17)$$

em que adotaremos a notação  $|j\rangle \otimes |k\rangle = |jk\rangle$ , onde a operação  $\otimes$  é denominada de produto tensorial. Note que a base de Bell forma uma base ortonormal para dois sistemas de um qubit e podem ser identificadas por meio de medidas quânticas apropriadas. No AQ veremos que a base de Bell pode representar o estado emaranhado de um par de fótons que, do ponto de vista das RCCs, estarão maximamente emaranhados.

Além disso, podemos escrever as relações inversas, ou seja, a base computacional em termos da base de Bell. Essas relações são dadas por

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_{+}\rangle + |\Phi_{-}\rangle) \quad (2.18)$$

$$|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{+}\rangle + |\Psi_{-}\rangle) \quad (2.19)$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{+}\rangle - |\Psi_{-}\rangle) \quad (2.20)$$

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_{+}\rangle - |\Phi_{-}\rangle). \quad (2.21)$$

## 2.2 INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER, APAGADOR QUÂNTICO E SEUS COMPONENTES

O conteúdo das seções para o IMZ e o AQ foram baseados nas notas de aula do Professor Jonas Maziero e podem ser acessadas em (MAZIERO, 2022). A construção de portas lógicas quânticas dos dispositivos ópticos e mais detalhes sobre a implementação dos aparatos experimentais nos CQs podem ser conferidos na seção 2.5.

O IMZ é um aparato experimental óptico e está representado na Fig. 2.1. O IMZ é utilizado para uma gama de aplicações como, por exemplo, em tomografia de coerência óptica (ZHANG et al., 2020), espectroscopia (NAYLOR et al., 2003), e gravitação (ZYCH et al., 2011). Basicamente, um fóton entra no IMZ por um divisor de feixes geral (DFG), que controla a probabilidade com que o fóton será refletido ( $R$ ) e

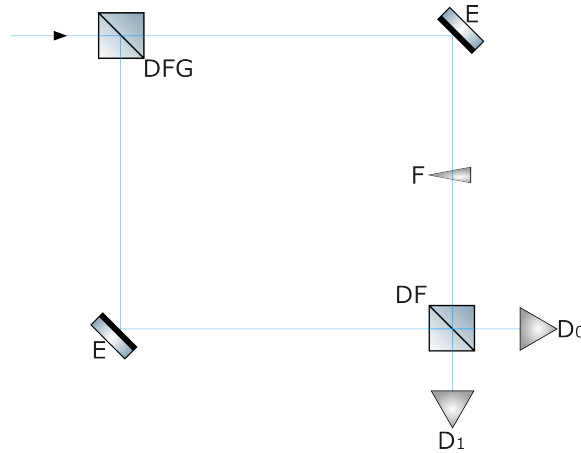


Figura 2.1 – Interferômetro de Mach-Zehnder.

transmitido ( $T$ ). As componentes transmitida e refletida vão para caminhos distintos e são completamente refletidas por espelhos, passam por um deslocador de fase ( $F$ ) em um dos caminhos, seguem por um divisor de feixes ( $DF$ ) com taxa de  $R$  e  $T$  de 50% e, por fim, atingem os detectores  $D_0$  e  $D_1$ .

O DFG permite ajustar a amplitude de probabilidade com que os fótons serão refletidos e transmitidos. Na Fig. 2.1 representamos apenas um feixe entrando no DFG pela horizontal (da esquerda para a direita), mas também é possível entrar pela vertical (de cima para baixo). Definimos que esses modos espaciais serão parametrizados da seguinte forma: se o movimento for na horizontal denotamos por  $|0\rangle$  e se o movimento for na vertical denotamos por  $|1\rangle$ . Além do mais, não estamos considerando perdas de informação no DFG e em todos os dispositivos do IMZ. Por conta disso, a transformação deverá ser unitária e a soma das probabilidades do fóton ser transmitido e refletido deve ser igual a um. Assim, podemos escrever  $T^2 + R^2 = 1$ , em que  $T, R \in \mathbb{R}$ . Considerando que o estado inicial ( $|\psi_0\rangle$ ) é o mesmo da figura, portanto, inicia no modo espacial  $|0\rangle$ , o resultado esperado para o fóton após passar pelo DFG é dado por  $T|0\rangle + iR|1\rangle$ . Por outro lado, se o estado inicial do fóton está no modo espacial  $|1\rangle$ , o estado resultante esperado é dado por  $iR|0\rangle + T|1\rangle$ . Precisamos, então, encontrar a matriz unitária que realiza a ação do DFG. Podemos equacionar da seguinte forma

$$|\psi_1\rangle = U_{DFG}(T, R)|\psi_0\rangle \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Considerando cada um dos casos individualmente, obteremos que  $u_{00} = u_{11} = T$  e  $u_{10} = u_{01} = iR$ . Como temos uma variação entre um fóton ser totalmente transmitido ou totalmente refletido, podemos relacionar  $T$  e  $R$  com as funções trigonométricas, tal

que  $T = \cos \theta$  e  $R = \sin \theta$  com  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Assim, a matriz unitária que representa o DFG é dada por

$$U_{DFG}(\theta) = \begin{bmatrix} T & iR \\ iR & T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Notem que o DF é um caso particular do DFG, onde utilizamos  $\theta = \pi/4$ , e resultará em uma probabilidade de transmissão e reflexão de 50% cuja matriz é representada por

$$U_{DF} = U_{DFG}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Outro caso particular do DFG é se comportar totalmente de forma reflexiva, o que produz o comportamento dos dois espelhos, bastando ajustar  $\theta = \pi/2$ , cuja matriz é representada por

$$U_E = U_{DFG}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Essa matriz representa a atuação dos dois espelhos simultaneamente em todo o estado. Vale notar a constante imaginária  $i$  presente em situações em que há reflexão. Essa constante imaginária é a diferença de fase entre o feixe refletido e transmitido pontuado em (DEGIORGIO, 1980; ZEILINGER, 1981) para divisores de feixes simétricos.

Falta mencionarmos o deslocador de fase. O deslocador de fase é o que nos permitirá calcular, por meio das probabilidades nos detectores, a visibilidade interferométrica. Ao modificarmos a fase em um dos caminhos dentro do IMZ, permitiremos que haja interferência construtiva e destrutiva entre a amplitude de probabilidade de o fóton passar pelo caminho de cima e de o fóton passar pelo caminho de baixo ao serem recombinados no DF. Assim que o fóton passa pelo deslocador de fase há obtenção do termo  $e^{i\phi}$  multiplicando o modo espacial onde o dispositivo é inserido, mas essa operação deve ser feita de forma unitária, e, conforme a Fig. 2.1, a matriz que representa essa ação é dada por

$$U_F(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Vamos agora considerar um fóton em um estado inicial no modo espacial horizontal  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ . Após o DFG o estado é dado por

$$|\psi_1\rangle = U_{DFG}(\theta) |\psi_0\rangle \quad (2.28)$$

$$= T |0\rangle + iR |1\rangle, \quad (2.29)$$

após os espelhos e a fase, temos

$$|\psi_2\rangle = U_F(\phi) U_E |\psi_1\rangle \quad (2.30)$$

$$= ie^{i\phi} T |1\rangle - R |0\rangle, \quad (2.31)$$

e após o DF, segue que

$$|\psi_3\rangle = U_{DF} |\psi_2\rangle \quad (2.32)$$

$$= ie^{i\phi} T i |\ominus\rangle - R |\oplus\rangle \quad (2.33)$$

$$= ie^{i\phi} T \frac{1}{\sqrt{2}} (i |0\rangle + |1\rangle) - R \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i |1\rangle) \quad (2.34)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} [(e^{i\phi} T + R) |0\rangle - i (e^{i\phi} T - R) |1\rangle]. \quad (2.35)$$

Pela regra de Born, as probabilidades, para cada um dos detectores, são dadas, respectivamente, por

$$\Pr(D_0) = \Pr(0|\psi_3) = |\langle 0|\psi_3\rangle|^2 \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-i\phi} T + R) (e^{i\phi} T + R) \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} (|T|^2 + |R|^2 + TR(e^{i\phi} + e^{-i\phi})) \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2TR \cos \phi), \quad (2.39)$$

e

$$\Pr(D_1) = \Pr(1|\psi_3) = |\langle 1|\psi_3\rangle|^2 \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-i\phi} T - R) (e^{i\phi} T - R) \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2} (|T|^2 + |R|^2 - TR(e^{i\phi} + e^{-i\phi})) \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 2TR \cos \phi). \quad (2.43)$$

Nas seções seguintes retomaremos esses resultados para analisar por meio das RCs envolvendo visibilidade interferométrica e coerência quântica.

### 2.2.1 Apagador quântico

O AQ foi proposto por Scully and Drühl em (SCULLY; DRÜHL, 1982) e muito foi desenvolvido e discutido sobre o assunto desde então, como pode ser encontrado em (SCULLY; DRÜHL, 1982; MALEKI; LIU; ZUBAIRY, 2021; MA et al., 2013; ANDERSEN

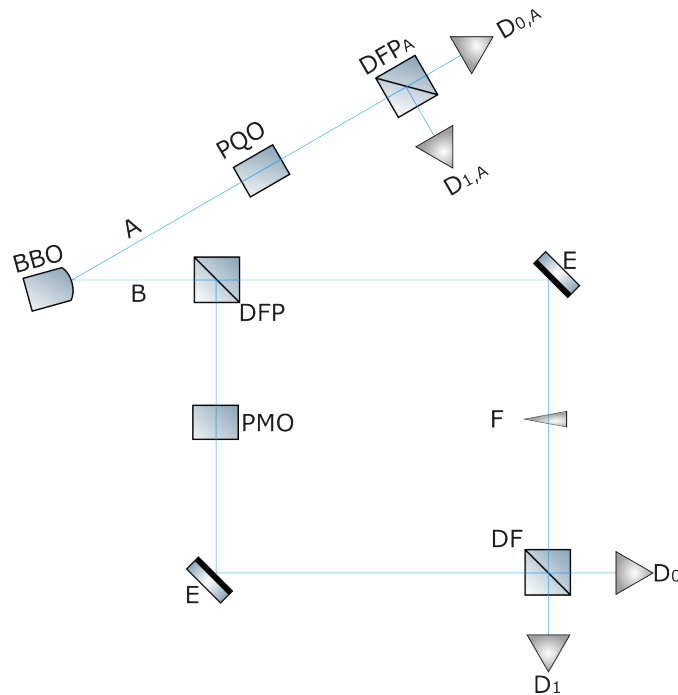


Figura 2.2 – Apagador quântico.

et al., 2004; WALBORN et al., 2002; KIM et al., 2000; HERZOG et al., 1995; KWIAT; STEINBERG; CHIAO, 1992). Há diversas análises e aparatos experimentais distintos para fazer o estudo do AQ e, em sua versão mais simplificada, podemos construí-lo por meio de um par de fótons emaranhados que vão para regiões distintas. O fóton  $B$  entrará em um IMZ, passando por um DFP, pela placa de meia onda (PMO) e seguirá o restante dos elementos apresentados na discussão do IMZ da seção 2.2. O fóton  $A$  será enviado para uma outra região onde serão realizados alguns procedimentos. Como os fótons estão emaranhados, toda a informação de caminho está disponível dentro do IMZ na forma de distinguibilidade (previsibilidade + emaranhamento). A ideia principal do AQ é apagar informação de caminho do fóton  $B$ , por meio de medidas projetivas no fóton  $A$  e pós-seleção. O esquema experimental pode ser conferido na Fig. 2.2.

Iniciaremos fazendo algumas definições. Vamos considerar a seguinte notação: o fóton  $A$  terá a polarização representada por  $A$  e seu modo espacial será denotado por  $A'$  e da mesma forma para o fóton  $B$ . Então, para cada fóton, teremos dois graus de liberdade, o da polarização e o modo espacial. Além do mais, o modo horizontal de polarização e o modo espacial horizontal serão parametrizados por meio de  $|0\rangle$  e a polarização vertical e o modo espacial vertical por  $|1\rangle$ .

Dos elementos ópticos presentes na Fig. 2.2, os que ainda não foram mencionados são o cristal não linear de borato de bário beta (BBO), a placa de quarto de onda (PQO), o DFP e a placa de meia onda (PMO). Um laser de argônio incide sobre o BBO e gera o par de fótons emaranhado (mais sobre em (WALBORN et al., 2002))



e gera como saída o seguinte estado

$$|\Psi_+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}). \quad (2.44)$$

Além disso, consideraremos os modos espaciais iniciais dos dois qubits como sendo horizontais, tal que o estado dos quatro graus de liberdade produz o seguinte estado inicial

$$|\Psi_0\rangle_{ABA'B'} = |\Psi_+\rangle_{AB} |0\rangle_{A'} |0\rangle_{B'}. \quad (2.45)$$

O DFP possui a propriedade de transmitir a polarização horizontal e refletir a polarização vertical, tal que a matriz unitária é representada por

$$U_{DFP} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} = C_Y^{BB'} C_Z^{BB'}, \quad (2.46)$$

onde  $C_j^{BB'}$ , com  $j = Y, Z$ , indica que a operação é controlada, o primeiro índice sobrescrito, no caso  $B$ , é o controle e o outro é o alvo, no caso  $B'$ . Caso a polarização seja horizontal ( $|0\rangle$ ), a polarização será totalmente transmitida, e se a polarização for vertical ( $|1\rangle$ ), a polarização será totalmente refletida com a adição da fase  $i$ . As portas lógicas quânticas que implementam o DFP são dadas por

$$C_Y^{BB'} = |0\rangle_B \langle 0| \otimes \mathbb{I}_{B'} + |1\rangle_B \langle 1| \otimes Y_{B'} \quad (2.47)$$

$$C_Z^{BB'} = |0\rangle_B \langle 0| \otimes \mathbb{I}_{B'} + |1\rangle_B \langle 1| \otimes Z_{B'}. \quad (2.48)$$

A construção matemática dos estados, para nosso caso de interesse, independe de quais operações façamos primeiro, se as operações para o fóton  $A$  ou para o fóton  $B$ . Por conta disso, iniciaremos com o fóton  $B$  e por fim construiremos as operações para o fóton  $A$ . Fazendo o fóton  $B$  passar pelo DFP, e entrando no IMZ, o estado é dado por

$$|\Psi_1\rangle_{ABA'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|0\rangle_A |11\rangle_{BB'} + |1\rangle_A |00\rangle_{BB'}) |0\rangle_{A'}. \quad (2.49)$$

Esse é um estado genuinamente emaranhado em três graus de liberdade. No Capítulo 4 utilizamos um divisor de feixes polarizado geral (VPPBS), de modo que podemos controlar os caminhos de ambas as polarizações por meio de coeficientes de  $T_j$  e  $R_j$ , onde  $j$  identifica cada uma das polarizações. Esse dispositivo permite criar superposição de caminho para as polarizações.

O papel da PMO aqui é desemaranhar o grau de liberdade de polarização do

fóton  $B$ . Em suma, a PMO inverte a polarização, ou seja, a atuação produzirá

$$U_{PMO} |0\rangle_B = |1\rangle_B, \quad (2.50)$$

$$U_{PMO} |1\rangle_B = |0\rangle_B, \quad (2.51)$$

mas o dispositivo está localizado apenas no modo espacial vertical dentro do IMZ como mostra a Fig. 2.2. Sendo assim, podemos representar a atuação da PMO como

$$U_{PMO} = X_B \otimes |1\rangle_{B'}\langle 1| + \mathbb{I}_B \otimes |0\rangle_{B'}\langle 0| = C_X^{B'B}. \quad (2.52)$$

Após a PMO, o estado obtém a seguinte forma

$$|\Psi_2\rangle_{ABA'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|01\rangle_{AB'} + |10\rangle_{AB'}) |0\rangle_B |0\rangle_{A'}. \quad (2.53)$$

Aqui é possível perceber que há informação de caminho de  $B$  disponível no IMZ, se fizermos medidas na polarização de  $A$ . Esse ponto é crucial para o que foi desenvolvido no trabalho apresentado no Capítulo 4. A PMO não fará mais sentido naquela construção, pois não terá a capacidade de desemaranhar a polarização do fóton  $B$ . Isso nos motivou a escrevermos as polarizações de ambos os fótons em termos da base de Bell, de modo que passamos a chamar o aparato de apagador quântico emaranhado. Essa nova construção permite uma análise muito mais rica do ponto de vista das RCCs, gerando inclusive situações em que há apagamento parcial da informação de caminho.

Após os espelhos e a fase, o estado resultante é

$$|\Psi_3\rangle_{ABA'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|00\rangle_{AB'} + ie^{i\phi}|11\rangle_{AB'}) |0\rangle_B |0\rangle_{A'}. \quad (2.54)$$

E, após o DF, o estado é dado por

$$|\Psi_4\rangle_{ABA'B'} = -\frac{1}{2} [|0\rangle_A (|0\rangle_{B'} + i|1\rangle_{B'}) + e^{i\phi}|1\rangle_A (|0\rangle_{B'} - i|1\rangle_{B'})] |0\rangle_B |0\rangle_{A'}. \quad (2.55)$$

Agora, falta atuarmos a PQO e o DFP $_A$ . A PQO faz com que o fóton incidente passe a se comportar com polarização circular. Matematicamente, o efeito é o de troca de base, da computacional para a base  $\{|\oplus\rangle, |\ominus\rangle\}$ . Sendo assim, a atuação é dada como se segue

$$U_{PQO}|0\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + i|1\rangle_A) = |\oplus\rangle_A, \quad (2.56)$$

$$U_{PQO}|1\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A - i|1\rangle_A) = |\ominus\rangle_A. \quad (2.57)$$

O estado após a PQO e do DFP<sub>A</sub> resulta em

$$|\Psi_5\rangle_{ABA'B'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle_A |0\rangle_{A'} |\psi_+\rangle_{B'} - |1\rangle_A |1\rangle_{A'} |\psi_-\rangle_{B'} \} |0\rangle_B, \quad (2.58)$$

onde definimos

$$|\psi_\pm\rangle_{B'} = \frac{1}{2} [(1 \pm e^{i\phi}) |0\rangle_{B'} + i(1 \mp e^{i\phi}) |1\rangle_{B'}]. \quad (2.59)$$

Ao realizarmos medidas nos detectores  $D_{0,A}$  e  $D_{1,A}$  com pós-seleção as probabilidades são dadas, respectivamente, por

$$\Pr(D_0) = \frac{1}{2} (1 \pm \cos \phi), \quad (2.60)$$

$$\Pr(D_1) = \frac{1}{2} (1 \mp \cos \phi). \quad (2.61)$$

Como mencionamos na introdução, o AQE do trabalho do Capítulo 4 surge ao modificarmos o DFP por um VPPBS e ao removermos a PMO (por não fazer mais sentido no contexto). E a medida projetiva com pós-seleção passa a ser na base de Bell das polarizações dos fótons  $A$  e  $B$ , com o objetivo de realizar o procedimento de apagamento.

Recentemente, os autores em (WANG et al., 2021) publicaram um trabalho no contexto da “escolha atrasada de Wheeler” e passaram a controlar a DOP por meio do emaranhamento. Nesse trabalho, foram utilizados três fótons emaranhados, assim como o nosso, mas um desses fótons é enviado para o IMZ e o segundo DF do IMZ é controlado pelo estado quântico de outro fóton que está em um estado indefinido. Apesar da aparente semelhança entre os trabalhos, o objetivo e o aparato experimental de ambos são diferentes.

Na seção 2.5 utilizaremos esses resultados para introduzir algumas noções básicas dos CQs e a construção dos elementos ópticos por meio de portas lógicas quânticas para representar o IMZ e o AQ como um circuito quântico.

### 2.3 SISTEMAS BIPARTIDOS E EMARANHAMENTO

O emaranhamento é uma propriedade de sistemas quânticos que, assim como a superposição, é contraintuitivo e não possui análogo na física clássica. Essa propriedade é uma função de correlação entre dois ou mais subsistemas e é de grande importância para as áreas de computação quântica e teoria de informação quântica. Para podermos explorar o emaranhamento, precisamos abordar sistemas de mais de uma parte.

**Teorema 1.** (*Decomposição de Schmidt (WILDE, 2017)*) *Suponha que temos um sis-*

tema bipartido cujo vetor de estado  $|\Psi\rangle_{AB}$  está imerso em um espaço vetorial finito, tal que  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , os subsistemas não necessariamente possuem a mesma dimensão e  $\| |\Psi\rangle_{AB} \| = 1$ . Então, é possível expressar o estado como

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j |j\rangle_A \otimes |j\rangle_B, \quad (2.62)$$

onde  $d \leq \dim \{ \dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B \}$  e  $\{|j\rangle_A\}$  e  $\{|j\rangle_B\}$  formam uma base ortonormal para os sistemas  $A$  e  $B$ , respectivamente, e os elementos do vetor  $[\lambda_j]_{j=0}^{d-1}$  são chamados de coeficientes de Schmidt.

*Demonstração.* Podemos escrever um vetor de estado bipartido como

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^{d_A-1} \sum_{k=0}^{d_B-1} a_{jk} |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B, \quad (2.63)$$

sendo  $a_{jk}$  as amplitudes e  $\{|j\rangle_A\}$  e  $\{|k\rangle_B\}$  formam uma base ortonormal para cada um dos subsistemas,  $d_A = \dim \mathcal{H}_A$  e  $d_B = \dim \mathcal{H}_B$ . Os coeficientes  $a_{jk}$  formam uma matriz  $G_{d_A \times d_B}$ , tal que os elementos de matriz e os coeficientes se relacionam por

$$[G]_{jk} = a_{jk}. \quad (2.64)$$

Como toda matriz pode ser decomposta em valores singulares, podemos escrever  $G = U\Lambda V$ , onde  $U_{d_A \times d_A}$  e  $V_{d_B \times d_B}$  são matrizes unitárias e  $\Lambda_{d_A \times d_B}$  é uma matriz estritamente positiva com  $d$  números reais  $\lambda_i$  na diagonal. Seja os elementos de  $U$ , sendo  $u_{ji}$ , e  $V$ , sendo  $v_{ik}$ . A equação que relaciona os coeficientes de ambas as expressões é dada por

$$a_{jk} = \sum_{i=0}^{d-1} u_{ji} \lambda_i v_{ik}, \quad (2.65)$$

e, substituindo no último vetor de estado, temos

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^{d_A-1} \sum_{k=0}^{d_B-1} \sum_{i=0}^{d-1} u_{ji} \lambda_i v_{ik} |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B, \quad (2.66)$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \sum_{j=0}^{d_A-1} u_{ji} |j\rangle_A \otimes \sum_{k=0}^{d_B-1} v_{ik} |k\rangle_B, \quad (2.67)$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B, \quad (2.68)$$

onde definimos a base ortonormal de  $A$  como sendo  $\sum_{j=0}^{d_A-1} u_{ji} |j\rangle_A$  e de  $B$  como sendo  $\sum_{k=0}^{d_B-1} v_{ik} |k\rangle_B$ .  $\square$

Vamos considerar apenas sistemas bipartidos que possuem subsistemas de dimensão  $d_A = d_B = d = 2$ . Assim, o vetor de estado puro pode ser representado por meio de

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{jk} a_{jk} |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = \sum_{jk} a_{jk} |jk\rangle_{AB}, \quad (2.69)$$

com  $\sum_{jk} |a_{jk}|^2 = 1$ , e seu respectivo operador densidade é dado por

$$\rho = \sum_{jklm} a_{jk} a_{lm}^* |jk\rangle \langle lm|. \quad (2.70)$$

Para um estado misto podemos escrever o operador densidade, tal que

$$\rho_{AB} = \sum_{jklm} \rho_{jklm} |jk\rangle \langle lm|, \quad (2.71)$$

de modo que não podemos, em geral e na mesma dimensão, representar esse operador densidade por um único vetor de estado, a menos que possamos escrever  $\rho_{jklm} = a_{jk} a_{lm}^*$ , de forma que recaímos no vetor de estado representado pela Eq. (2.69).

Gostaríamos, em muitos casos, de determinar um operador densidade local para poder prever questões probabilísticas desses sistemas, sem, necessariamente, recorrermos ao estudo de um sistema global e, muitas vezes, mais complicado. Para isso, utilizamos o recurso do traço parcial (MAZIERO, 2017; NIELSEN; CHUANG, 2000), de modo que

$$\rho_A := \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (2.72)$$

$$\rho_B := \text{Tr}_A(\rho_{AB}), \quad (2.73)$$

e o traço parcial é definido como

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) := |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|). \quad (2.74)$$

**Exemplo 1.** Considere o estado da Eq. (2.70). Ao aplicarmos o traço parcial, os estados reduzidos para cada um dos subsistemas são dados, respectivamente, por

$$\rho_A = \sum_{j,l=0}^{d_A-1} \rho_{il}^A |j\rangle_A \langle l| = \sum_{j,l=0}^{d_A-1} \sum_{k=0}^{d_B-1} \rho_{iklk} |j\rangle_A \langle l| \quad (2.75)$$

$$\rho_B = \sum_{k,m=0}^{d_B-1} \rho_{km}^B |k\rangle_B \langle m| = \sum_{k,m=0}^{d_B-1} \sum_{j=0}^{d_A-1} \rho_{jkjm} |k\rangle_B \langle m|. \quad (2.76)$$

Podemos expressar, por meio da Eq. (2.69), sistemas emaranhados, bem como

sistemas separáveis, onde o emaranhamento será zero. Na seção sobre o AQ (2.2.1), vimos que foi gerado pelo BBO um par de fótons emaranhados e o estado pode ser representado por um dos vetores da base de Bell das Eqs. (2.16) e (2.17). Nesse caso, o emaranhamento será máximo, ou seja, não podemos escrever esses estados de forma separável. Um estado separável é um caso particular da Eq. (2.69) e pode ser escrito como  $|\Psi\rangle_{AB} = |\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$  e, portanto, podemos escrever cada um dos sistemas independente um do outro em forma de produto.

Um dos exemplos de quantificador de emaranhamento é dado pelos autores em (BERGOU; HILLERY, 2013). Eles definem a entropia linear como um quantificador para estados bipartidos puros e é definida como

$$E(|\Psi_{AB}\rangle) = 1 - \text{Tr}(\rho_{AB}^2) = S_l(\rho_A) = S_l(\rho_B), \quad (2.77)$$

onde, para esse sistema, podemos calcular o emaranhamento do estado global por meio da entropia linear ( $S_l$ ) dos operadores densidade reduzidos. Vale mencionar que, se o estado for separável, tal que  $|\Psi\rangle_{AB} = |\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ , a entropia é zero, uma vez que a entropia de estados puros é zero. Na seção a seguir, utilizaremos essa definição de emaranhamento para construir a RCC de Hilbert-Schmidt. Aqui exemplificamos com esse caso de quantificador de emaranhamento e nas próximas subseções apresentaremos as relações de complementaridade e suas respectivas funções de emaranhamento que completem cada uma delas.

## 2.4 RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE

Pelas investigações em (WOOTTERS; ZUREK, 1979), sobre uma versão do experimento de dupla fenda, os pesquisadores conseguiram notar a presença de padrões de interferência, mesmo quando a informação de caminho era conhecida quase em sua totalidade. Por meio dessa constatação foi possível realizar a quantificação de características complementares (onda e partícula) apresentadas no princípio de complementaridade de Bohr. Posteriormente, os pesquisadores em (GREENBERGER; YASIN, 1988) conseguiram formular o que hoje denominamos de RCs. Em síntese, as RCs nos permitem captar, em um único aparato experimental, manifestações da DOP, onde quanto mais informação temos sobre um determinado aspecto, menos informação o experimento nos apresentará sobre o aspecto complementar como pode ser verificado experimentalmente em (ENGLERT; WALTHER; SCULLY, 1992; ZUBAIRY; SCULLY, 1997; AUCCAISE et al., 2012; CHEN et al., 2022). Após essa consolidação do estudo sobre RCs, surgiram trabalhos que tiveram por intuito investigar violações nelas como em (AFSHAR, 2005). Porém, se essas violações fossem verificadas, sig-

nificaria que temos um problema mais profundo com a teoria da MQ, uma vez que, como demonstrado em (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020), as RCs surgem naturalmente das restrições impostas pelos seus postulados.

Nas próximas subseções, vamos abordar as RCs envolvendo a visibilidade interferométrica e as relações oriundas de funções de coerência e complementando-as com suas respectivas funções de correlação que tornam essas relações em RCCs.

### 2.4.1 Relação de complementaridade envolvendo visibilidade

Na introdução, apresentamos que os pesquisadores (GREENBERGER; YASIN, 1988) formularam a primeira expressão denominada de RC e é escrita da seguinte forma

$$V^2 + P^2 \leq 1. \quad (2.78)$$

onde  $V$  é a visibilidade interferométrica e  $P$  é a previsibilidade que quantificam, respectivamente, os padrões de interferência (padrões ondulatórios) e a informação de caminho (padrões corpusculares) do fóton dentro no IMZ.

Vamos considerar o IMZ apresentado na Fig. 2.1 e queremos quantificar, pela RC, o comportamento do quanton dentro do IMZ. Quando o DFG possui  $T^2 = 1$ , transmissão total, dentro do IMZ saberíamos dizer exatamente por qual braço do interferômetro o fóton está passando, o que seria o mesmo que desconsiderarmos o DFG. Nesse caso particular, teríamos toda a informação de caminho disponível. À medida que vamos ajustando  $\theta$ , essa informação de caminho começa a se reduzir, pois agora há também uma certa amplitude de probabilidade de o fóton ser refletido. O extremo oposto, onde a informação de caminho é nula ( $P = 0$ ) e a visibilidade interferométrica é máxima ( $V = 1$ ), ocorre quando  $\theta = \pi/4$ , ou seja, o DFG passa a se comportar como um DF com 50% de taxa de  $T$  e  $R$ . Mas como obtemos isso por meio das funções de  $V$  e  $P$ ?

A visibilidade interferométrica é definida por meio da seguinte expressão

$$V_j = \frac{\text{Pr}_{\max}(D_j) - \text{Pr}_{\min}(D_j)}{\text{Pr}_{\max}(D_j) + \text{Pr}_{\min}(D_j)}, \quad (2.79)$$

onde  $j = 0, 1$  e identifica cada um dos detectores de onde podemos calcular as probabilidades. Basta, agora, escolhermos convenientemente os valores de  $\phi$ , nas Eqs. (2.39) e (2.43), para obtermos os valores máximos e mínimos dessas probabilidades.

Sendo assim, temos que a visibilidade resulta em

$$V_0 = V_1 = 2TR. \quad (2.80)$$

No caso do apagador quântico teremos algo semelhante após o apagamento considerando probabilidades das Eqs. (2.60) e (2.60), ou seja, a visibilidade será máxima. Como há seleção em uma determinada projeção apenas um dos detectores será levado em consideração e, sendo assim, a visibilidade produzida será máxima. Antes do apagamento não há seleção em uma determinada polarização do fóton  $A$ , sendo assim, as probabilidades se somam e, portanto, a visibilidade acaba sendo nula.

No Capítulo 3 vamos explorar no trabalho uma versão modificada do IMZ e por meio disso verificar que a visibilidade interferométrica (nas condições exploradas na literatura para a quantificação do caráter ondulatório dentro do IMZ com as medições feitas nos detectores após os elementos do IMZ) acaba falhando em quantificar o comportamento do tipo onda para o quanton dentro do IMZ. A não adequação da visibilidade interferométrica para quantificar o aspecto ondulatório de um sistema quântico foi também levantada através do uso de variáveis modulares (AHARONOV et al., 2017; TOLLAKSEN et al., 2010).

A previsibilidade, como o próprio nome sugere, está relacionada com a capacidade de se prever por qual caminho o fóton percorreu antes de ser detectado. Podemos fazer um exercício rápido: se a transmissão ou a reflexão forem máximas, teremos a máxima informação de caminho; se os dois forem iguais, tal que  $T^2 = R^2 = 1/2$ , então, teremos a máxima incerteza sobre o caminho e, conseqüentemente, a máxima superposição deles. Podemos equacionar a previsibilidade da seguinte forma

$$P = |T^2 - R^2|, \quad (2.81)$$

que, ao somarmos as duas expressões, nos transporta para a RC de (GREENBERGER; YASIN, 1988).

Utilizando o operador densidade do vetor de estado da Eq. (2.29), para o caso do IMZ, segue que

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} T^2 & -iTR \\ iTR & R^2 \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

e, se observarmos com cuidado, podemos perceber que a previsibilidade está relacionada com os elementos da diagonal principal que são denominados de populações. Já a visibilidade está relacionada com os elementos fora da diagonal principal que estão relacionados com a superposição.

Em (DÜRR, 2001) é apresentado uma forma mais direta de obtermos as mesmas expressões para  $P$  e  $V$ , utilizando os valores médios das matrizes de Pauli em



relação a um dos estados dentro do IMZ. Podemos obter  $P$  por meio de

$$P^2 = \langle Z \rangle_\psi^2 \quad (2.83)$$

onde  $\langle Z \rangle_\psi = \langle \psi | Z | \psi \rangle$  é o valor esperado. Para a obtenção de  $V$ , o autor aponta que podemos obter a relação para a visibilidade como se segue

$$V^2 = \langle X \rangle_\psi^2 + \langle Y \rangle_\psi^2. \quad (2.84)$$

Vale notar que essas expressões são dependentes da base e, por já termos definido a base como sendo os autovalores da componente  $z$  para representar os estados, essas relações acabam sendo uma consequência lógica. Em suma, considerando o estado da Eq. (2.29) e calculando os valores esperados, pelas expressões acima, obteremos os resultados apresentados anteriormente. Além do mais, utilizando o estado após os espelhos ou após a fase, os resultados também serão os mesmos.

#### 2.4.1.1 Relação completa de complementaridade

As RCs apresentadas até aqui são denominadas de modo mais adequado como relações incompletas de complementaridade, pois são dadas na forma de inequação. É possível encontrar situações em que a Eq. (2.78) inclusive é zero, ou seja, não há informação nem por meio de  $P$  e nem de  $V$ . Situações como essas envolvem sistemas maximamente emaranhados como no caso do estado produzido pelo BBO no AQ. Em (WOOTTERS, 1998), o autor identificou que a função de emaranhamento que completa a RC da Eq. (2.78) é a Concurrence. Para dois sistemas de dois níveis, onde o sistema global é puro, essa função é definida como

$$E_\Psi = \sqrt{1 - \text{Tr}(\rho_j^2)}, \quad (2.85)$$

de modo que podemos construir o que são denominadas de relações completas de complementaridade para a relação envolvendo a visibilidade. As RCCs nesse caso são dadas por

$$V_j^2 + P_j^2 + E_\Psi^2 = 1. \quad (2.86)$$

onde  $j$  identifica cada um dos detectores.

### 2.4.2 Previsibilidade

Antes de adentrarmos nas funções de coerência, vamos abordar os critérios estabelecidos pela literatura para que as funções de  $P$  sejam consideradas adequadas para quantificar a informação de caminho. As funções de  $P$  estão conectadas com os elementos da diagonal principal do operador densidade. Em (ENGLERT et al., 2008) temos condições para uma boa medida de previsibilidade.  $P$  leva em consideração apenas os elementos da diagonal principal do operador densidade ( $P(\rho_{\text{diag}}) := P(\rho_{11}, \rho_{22}, \dots, \rho_{jj})$ ) e é uma função contínua. Desta maneira, a generalização para um sistema com um número qualquer de níveis  $d = \dim \mathcal{H}$  obedece aos seguintes critérios:

- $P = 1$  se  $\rho_{jj} = 1$ , para algum  $j$ , o elemento do operador densidade é maximamente populado, ou seja, sabemos exatamente o “caminho” do quanton;
- $P = 0$  se  $\rho_{jj} = 1/d \forall j$  e, portanto, cada caminho é equiprovável, ou seja, temos a máxima incerteza do “caminho” do quanton;
- $P$  deve ser invariante frente a permutações dos elementos da diagonal principal de  $\rho$ ;
- $P$  deve ser uma função convexa, tal que

$$P(\rho_{\text{diag}}) \leq (1 - \lambda) P(\rho_{1,\text{diag}}) + \lambda P(\rho_{2,\text{diag}}), \quad (2.87)$$

sendo  $\rho = (1 - \lambda) \rho_1 + \lambda \rho_2$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;

- Considere que  $\rho_{jj} > \rho_{kk}$ . Um aumento incremental, tal que  $\rho_{kk} \rightarrow \rho_{kk} + \epsilon$  e  $\rho_{jj} \rightarrow \rho_{jj} - \epsilon$ , não pode aumentar o valor de  $P$ , com  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon \ll 1$ .

Há distintos caminhos para obter as funções de previsibilidade. Os autores em (ENGLERT et al., 2008) obtiveram a uma relação de  $P$ , denominada de previsibilidade de Hilbert-Schmidt. Já os autores em (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020) obtiveram duas funções de previsibilidade de Hilbert-Schmidt, uma relacionada com a entropia linear e outra com a entropia de von Neumann, distinção essa que os autores anteriores não realizaram. Apresentaremos essas e outras funções de  $P$  juntamente com as respectivas RCCs nas próximas subseções.

### 2.4.3 Critérios para uma boa medida de visibilidade $W$

Como vimos até aqui, a visibilidade está relacionada com os elementos fora da diagonal principal do operador densidade e com o aparato experimental, de modo que

desejamos quantificar a superposição entre os caminhos, por exemplo, no IMZ. Por outro lado, funções de coerência buscam quantificar, de forma geral, a superposição de qualquer operador densidade local. Já a coerência quântica pode ser elencada para quantificar a visibilidade<sup>1</sup> segundo alguns critérios consolidados na literatura. Os critérios para uma boa medida de  $W(\rho_{\text{offdiag}})$ , em que  $\rho_{\text{offdiag}} = \rho - \rho_{\text{diag}}$ , estabelecidos por (ENGLERT et al., 2008), baseado no trabalho de (DÜRR, 2001), são:

- Se o sistema não apresenta interferência,  $\rho_{jj} = 1$  para algum  $j$ , então,  $W$  possui seu valor mínimo;
- Se  $\rho$  representa um estado puro (isto é,  $\rho^2 = \rho$ ) e todos os caminhos são equiprováveis ( $\rho_{jj} = 1/d$ ), então,  $W$  possui seu valor máximo;
- $W$  é invariante sob permutações dos elementos de caminhos da matriz densidade;
- $W$  deve ser uma função convexa, tal que

$$W(\rho_{\text{offdiag}}) \leq (1 - \lambda) W(\rho_{1,\text{offdiag}}) + \lambda W(\rho_{2,\text{offdiag}}), \quad (2.88)$$

sendo  $\rho = (1 - \lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;

- $W$  não pode aumentar, se o módulo dos elementos  $\rho_{jk}$ , com  $j \neq k$ , diminuïrem por uma quantidade infinitesimal.

Vamos agora discutir e apresentar alguns dos quantificadores de coerência que respeitam os critérios de uma boa medida de visibilidade.

#### 2.4.4 Coerência quântica

A coerência quântica busca quantificar, um dos aspectos mais conhecidos da MQ: a superposição. Os autores em (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) introduziram uma estrutura rigorosa para quantificar a superposição por meio de distintas funções de coerência. Não pretendemos de maneira alguma ser exaustivos, mas buscamos apresentar de forma pragmática algumas das funções de coerência que se enquadram no critério de boa medida de visibilidade que apresentaremos a seguir.

---

<sup>1</sup>Apesar de mantermos o título “critérios para uma boa medida de visibilidade” dessa subseção da maneira como é amplamente utilizada na literatura, poderá ser visto no Capítulo 3 que a visibilidade interferométrica não é, em geral, um quantificador adequado do caráter ondulatório para o quanton dentro do IMZ e, portanto, deveria ser adotada alguma outra nomenclatura mais adequada para funções que conseguem captar esse comportamento. O título adotado poderia ser “critérios para uma boa medida do aspecto ondulatório”.

Antes de definirmos coerência, precisamos levar em conta os estados incoerentes que são matrizes diagonais. Escolhida a base de referência, os estados incoerentes são descritos por

$$\sigma = \sum_{j=0}^{d-1} \sigma_j |j\rangle \langle j|. \quad (2.89)$$

#### 2.4.4.1 Quantificadores de coerência baseados em norma de matrizes

Esses quantificadores de coerência correspondem a norma de matrizes entre  $\rho$  e os estados incoerentes  $\sigma$ , de modo que a distância entre essas matrizes é definida como  $D(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|$  (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014). As normas mais relevantes para o nosso trabalho são as que possuem a forma

$$\|M\|_{l_p} = \left( \sum_{jk} |M_{jk}|^p \right)^{1/p}. \quad (2.90)$$

Buscamos minimizar a distância entre o operador densidade e as matrizes incoerentes para obter o quantificador de coerência, dado por

$$C_{l_p}(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{I}} D(\rho, \sigma) = \min_{\sigma \in \mathcal{I}} \|\rho - \sigma\|_{l_p} = \left( \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^p \right)^{1/p}, \quad (2.91)$$

onde  $\mathcal{I}$  é o conjunto de todos os operadores densidade incoerentes. Para  $p = 1$ , temos o quantificador de coerência- $l_1$  e, para  $p = 2$ , temos a coerência- $l_2$ , ou coerência de Hilbert-Schmidt. A coerência de Hilbert-Schmidt, apesar de não ser considerada um bom quantificador de coerência por (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), cumpre todos os requisitos para uma boa medida de visibilidade.

#### 2.4.4.2 Quantificadores de coerência baseados em entropia

É possível obtermos quantificadores baseados em entropia relativa e, mais recentemente, em entropia de Wigner-Yanase.

A entropia relativa (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) é definida como

$$S_{re}(\rho||\sigma) := \text{Tr}(\rho \log_2 \rho) - \text{Tr}(\rho \log_2 \sigma). \quad (2.92)$$

O quantificador de coerência baseado em entropia relativa é dado por

$$C_{re}(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{I}} S_{re}(\rho || \sigma) = S_{vn}(\rho_{\text{diag}}) - S_{vn}(\rho). \quad (2.93)$$

onde  $S_{vn}$  representa a entropia de von Neumann.

A entropia de Wigner-Yanase (WIGNER; YANASE, 1963), também denominada de informação de Wigner-Yanase, é definida como

$$I_{wy}(\rho, |j\rangle \langle j|) := -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ ([\sqrt{\rho}, |j\rangle \langle j|])^2 \right\}, \quad (2.94)$$

assim, o quantificador de coerência baseado na entropia de Wigner-Yanase (YU, 2017) é dado por

$$C_{wy}(\rho) = -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr} \left\{ ([\sqrt{\rho}, |j\rangle \langle j|])^2 \right\} = \sum_{jk} |\langle j | \sqrt{\rho} | k \rangle|^2 - \sum_j |\langle j | \sqrt{\rho} | j \rangle|^2 \quad (2.95)$$

$$= \sum_{j \neq k} |\langle j | \sqrt{\rho} | k \rangle|^2 = - \sum_{j \neq k} |(\sqrt{\rho})_{jk}|^2 = 2 \sum_{j < k} |(\sqrt{\rho})_{jk}|^2. \quad (2.96)$$

#### 2.4.5 Relações de complementaridade envolvendo coerência quântica

Em (BASSO, 2021), o autor derivou diversas RCs como parte de sua dissertação de mestrado e suas pesquisas resultaram no trabalho em (BASSO; MAZIERO, 2020). Sendo assim, nos basearemos nesses trabalhos para elencar as principais RCs utilizadas nesta dissertação.

As RCs, na forma de inequações, só saturam para sistemas puros de uma parte e as funções que completam essas relações são funções de emaranhamento. Já para sistemas globais (de mais de uma parte) puros maximamente emaranhados não é possível obter informação das propriedades locais dos subsistemas (previsibilidade e coerência quântica). No caso do trabalho do Capítulo 3, utilizamos um único sistema puro de um qubit e, por conta disso, é conveniente apenas utilizarmos a RC. Porém, os CQs da IBM ainda possuem diversos tipos de ruídos sendo um deles a interação do qubit utilizado com outros qubits do chip ou até mesmo da interação com o ambiente. Por conta desses problemas é possível, mesmo utilizando um único qubit, obter informação de emaranhamento o que, no caso, não seria desejável. O próprio sistema da IBM disponibiliza soluções para reduzir esses efeitos (mitigação de erros) que, na maioria dos casos, acabam melhorando muito a obtenção dos resultados experimentais.

A RC com base na coerência de entropia relativa da Eq. (2.93) é representada

por

$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) \leq \log_2 d_A, \quad (2.97)$$

onde

$$P_{vn}(\rho_A) := \log_2 d_A - S_{vn}(\rho_{\text{diag}}) = \log_2 d_A + \sum_{j=0}^{d_A-1} \rho_{jj}^A \log_2 \rho_{jj}^A, \quad (2.98)$$

definida em (ENGLERT et al., 2008; BASSO; MAZIERO, 2020). No trabalho do Capítulo 3, utilizamos essa RC para fazer a análise entre as expressões obtidas para visibilidade. O quantificador de emaranhamento (VEDRAL et al., 1997; BASSO; MAZIERO, 2020) que completa essa relação é a entropia de von Neumann, tal que  $E(\rho_{AB}) = S_{vn}(\rho_A)$ , de modo que podemos escrever a RCC como

$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = \log_2(d_A). \quad (2.99)$$

A principal expressão, para o trabalho do Capítulo 4, é a RCC de Hilbert-Schmidt obtida em (BASSO; MAZIERO, 2020). Essa relação é muito conveniente por conta de oferecer um suporte matemático mais simples, possibilitando a obtenção de relações analíticas mais convenientes para a análise feita no trabalho e é dada por

$$C_{hs}(\rho_A) + P_{hs}(\rho_A) + C_{hs}^{nl}(\rho_{A|B}) = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (2.100)$$

onde

$$P_{hs}(\rho_A) = \sum_j (\rho_{jj}^A)^2 - \frac{1}{d_A}, \quad (2.101)$$

e, para os casos de sistemas globais puros podemos escrever a função de correlação como  $C_{hs}^{nl}(\rho_{A|B}) = S_l(\rho_A)$ .

Na próxima subseção abordaremos os CQs e as portas lógicas que permitem ser relacionadas com dispositivos ópticos. Além disso, seguimos passo a passo a construção de circuitos quânticos dos IMZ e do AQ, bem como os passos necessários para a construção dos circuitos quânticos utilizados nos trabalhos dos Capítulos 3 e 4.

## 2.5 COMPUTADORES QUÂNTICOS E PORTAS LÓGICAS

A forma mais simplificada de acessar os computadores quânticos da IBM (IBMQ, 2022) é por meio do IBM Quantum (IBMQ) Composer - <<https://quantum-computing.ibm.com/composer>>. No Composer é disponibilizado um ambiente com algumas funcionalidades básicas e é possível realizar experimentos em computadores quânticos reais com apenas alguns passos simples. A potencialidade completa dos sistemas da

IBMQ é acessada por meio de programação utilizando pacotes de desenvolvimento como, por exemplo, o Qiskit.

Os CQs atuais da IBMQ utilizam apenas qubits e a combinação de portas lógicas nos permite extrair informações relevantes com base na tarefa desejada. Não pretendemos esgotar a descrição de portas lógicas, mas apresentar as principais portas no âmbito desta dissertação e na utilização e entendimento de sistemas quânticos como o IMZ e o AQ. Além disso, o estado dos qubits no IBMQ sempre inicia sendo  $|0\rangle$  e as medições sempre são feitas na base computacional. O conteúdo das seguintes seções foi baseado nas notas de aula do Professor Jonas Maziero (MAZIERO, 2022) e foram imprescindíveis para a realização dos trabalhos dos Capítulos 3 e 4.

Nas próximas subseções, tanto para o IMZ quanto para o AQ, vamos construir os dispositivos ópticos por meio de portas lógicas quânticas.

### 2.5.1 Interferômetro de Mach-Zehnder no IBMQ

As matrizes de Pauli, como já apresentamos nas Eqs. (2.7), (2.10) e (2.11), são matrizes que realizam também a função de portas lógicas. Ao combinarmos essas portas podemos simular diversas operações, por exemplo, da matriz unitária que representa a atuação dos espelhos da Eq. (2.26). A atuação desses dispositivos no estado é reproduzida por meio da combinação das portas  $Y$  e  $Z$ , tal que

$$U_E = YZ = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Na Fig. 2.3 temos a ilustração da utilização do IBMQ Composer. No painel lateral esquerdo podemos ver algumas das portas lógicas e na direita temos a utilização de três qubits:  $q[0]$ ,  $q[1]$  e  $q[2]$ . Em  $q[0]$  atuamos a Pauli- $Z$ , em  $q[1]$  atuamos a Pauli- $X$  (representada pelo símbolo da figura e conhecida como porta de negação ou NOT) e em  $q[2]$  atuamos a Pauli- $Y$ . A atuação, em cada qubit, é dada de forma sequencial. Matematicamente, escreveríamos a atuação dos espelhos em um estado  $|\psi\rangle$  como sendo  $YZ|\psi\rangle$ , mas nas portas lógicas devemos inserir primeiro a porta  $Z$  e depois a porta  $Y$  numa atuação sequencial. As atuações das portas  $Z$ ,  $X$  e  $Y$  na base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , são dadas, respectivamente, por

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle, \quad (2.103)$$

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle, \quad (2.104)$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle. \quad (2.105)$$

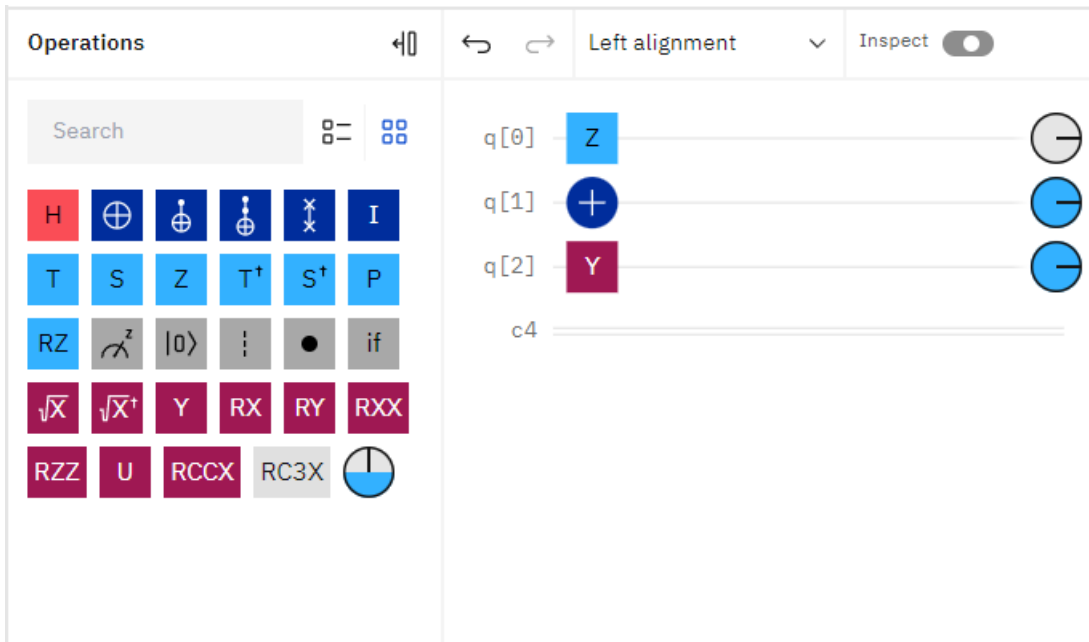


Figura 2.3 – Ilustração da utilização do IBM Quantum Composer.

**Exemplo 2.** Considere que o estado inicial dos três qubits da Fig. 2.3 é dado por

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle_0 \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |000\rangle_{012}, \quad (2.106)$$

onde os índices indicam os qubits, no caso, 0, 1 e 2 indicam os qubits  $q[0]$ ,  $q[1]$  e  $q[2]$  respectivamente. Assim,  $Z_0$  indica que a atuação será no qubit  $q[0]$ ,  $X_1$  atuará no qubit  $q[1]$  e  $Y_2$  atuará no qubit  $q[2]$ . Portanto, a atuação das três portas no estado inicial é dada por

$$|\psi_1\rangle = Z_0 X_1 Y_2 |000\rangle_{012} = Z_0 |0\rangle_0 X_1 |0\rangle_1 Y_2 |0\rangle_2 \quad (2.107)$$

$$= |0\rangle_0 |1\rangle_1 i |1\rangle_2 = i |011\rangle_{012}. \quad (2.108)$$

No IBMQ Composer a ordem dos resultados aparece trocada sendo elencada do qubit de maior ordem numérica ( $q[2]$ ) para o de menor ordem numérica ( $q[0]$ ). Nesse caso, será verificado que algumas informações de probabilidades e do estado na esfera de Bloch serão apresentados como “|110>”. É apenas uma definição que eles utilizaram na formulação dos sistemas, mas que deve ser levada em consideração no momento de extrair a informação corretamente.

Outra porta importante é a Hadamard ( $H$ ). A porta  $H$  é representada matricialmente por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$



e a atuação na base computacional produz

$$H |0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.110)$$

$$H |1\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.111)$$

ou seja, a porta  $H$  atuando na base computacional produz um estado com máxima superposição. Em muitos livros texto e até em aulas disponíveis de forma online é generalizada a utilização da porta  $H$  para representar o DF. O resultado com esse tipo de porta ou com o que utilizamos, em geral, não altera as probabilidades em si, apenas as amplitudes de probabilidade por meio da fase adicionada nas reflexões.

Além disso, temos as portas  $S$  e  $S^\dagger$  cujas matrizes que as representam são, respectivamente, dadas por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

$$S^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

de modo que a atuação dessas portas na base computacional produz

$$S |0\rangle = |0\rangle, \quad S |1\rangle = i |1\rangle, \quad (2.114)$$

$$S^\dagger |0\rangle = |0\rangle, \quad S^\dagger |1\rangle = -i |1\rangle. \quad (2.115)$$

Com a porta  $H$  e a porta  $S$  podemos construir a matriz unitária que realiza o comportamento de um DF apresentado na Eq. (2.25), de modo que

$$U_{DF} = SHS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

A porta que realiza a adição de fase representada pela matriz da Eq. (2.27) é a porta  $P$  que pode ser encontrada no painel de portas lógicas na esquerda da Fig. 2.3.

Para concluirmos os elementos que constituem o IMZ, falta mencionarmos a rotação em torno do eixo  $X$  e representada pela matriz

$$RX(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.117)$$

Para podermos utilizar a porta  $RX$  para representar o DFG, precisamos utilizar  $\theta =$

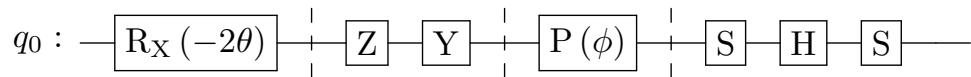


Figura 2.4 – Implementação do Interferômetro de Mach-Zehnder da Fig. 2.1 por meio de portas lógicas quânticas no IBMQ.

$-2\theta'$ , de modo que

$$U_{DFG}(\theta) = RX(-2\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

que é a matriz apresentada na Eq. (2.24) para o DFG.

Com a teoria desenvolvida na seção 2.2 e as portas lógicas que representam os dispositivos ópticos, conseguimos reproduzir o aparato experimental óptico do IMZ (ilustrado na Fig. 2.4) por meio de um circuito lógico quântico utilizando apenas um qubit. Cada elemento óptico está separado por linhas tracejadas na vertical. O primeiro elemento é o DFG, seguido pela atuação dos espelhos, fase e o DF. A diferença do aparato experimental da Fig. 2.4 que utilizamos no trabalho do Capítulo 3 é a troca do DF por um outro DFG. O próximo passo seria escolher adequadamente os valores de  $\theta$  e  $\phi$  e adicionarmos a medição para, então, rodar no chip quântico real ou realizar testes por meio dos simuladores. Os simuladores permitem rodar simulações de computadores quânticos em computadores clássicos. Em geral, os resultados são sempre semelhantes, mas não substituem os chips reais para a realização de experimentos confiáveis do ponto de vista científico. A grande vantagem dos simuladores é poder testar situações sem precisar esperar os resultados dos chips reais e também auxiliam na identificação de possíveis erros antes de rodar em chips reais. Por conta da grande popularidade que os computadores quânticos ganharam na mídia nos últimos tempos, a grande quantidade de cursos ensinando a utilização e a facilidade no acesso dos computadores quânticos da IBM (em muitos casos de forma gratuita) as filas e a demora para realização de experimentos podem levar até dias quando há maior volume de experimentos sendo rodados.

### 2.5.2 Apagador quântico no IBMQ

Como alguns dispositivos são semelhantes no IMZ e no AQ, falta mencionarmos a construção do par emaranhado por meio do BBO, a PQO, o DFP e a PMO. Exceto a PQO, todos os outros elementos ópticos listados, do ponto de vista de como construímos o AQ, utilizam o conceito do que chamamos de portas controladas. As

portas controladas levam em consideração mais de um qubit, pois precisamos alterar o estado de determinado qubit em relação ao estado de outro qubit. As portas controladas possuem o qubit de controle e o qubit alvo. O qubit alvo é que terá seu estado modificado com base em determinado estado do qubit de controle como uma espécie de situação condicional. Vamos denotar as portas controladas por meio de  $C_U^{AB}$ , onde  $C$  significa que a porta é controlada, os índices sobrescritos são, respectivamente, o qubit de controle (no caso  $A$ ) e o qubit alvo (no caso  $B$ ) e o subscrito  $U$  é a matriz unitária que gera a ação controlada. Por exemplo, a porta controlada mais básica é a CNOT, também denominada de NOT-controlada. Vamos denotar a porta CNOT por  $C_X^{AB}$  que é representada por

$$C_X^{AB} = |0\rangle_A \langle 0| \otimes \mathbb{I}_B + |1\rangle_A \langle 1| \otimes X_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.119)$$

e a atuação da porta CNOT na base computacional resulta em

$$C_X^{AB} |00\rangle_{AB} = |00\rangle_{AB}, \quad (2.120)$$

$$C_X^{AB} |01\rangle_{AB} = |01\rangle_{AB}, \quad (2.121)$$

$$C_X^{AB} |10\rangle_{AB} = |11\rangle_{AB}, \quad (2.122)$$

$$C_X^{AB} |11\rangle_{AB} = |10\rangle_{AB}, \quad (2.123)$$

ou seja, o qubit alvo sempre troca seu estado quando o qubit de controle possui seu estado igual a um. Em contextos mais gerais, é possível que o estado de controle seja o  $|0\rangle$ , mas vamos considerar aqui apenas o caso usual.

Com a utilização da porta CNOT, da porta  $H$  e da porta  $X$  é possível construir o estado emaranhado dos fótons  $A$  e  $B$  do AQ apresentado na Eq. (2.44). Considerando o estado inicial do IBMQ sendo  $|\psi_0\rangle_{AB} = |00\rangle_{AB}$ , temos

$$X_B C_X^{AB} H_A |00\rangle_{AB} = X_B C_X^{AB} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \right) |0\rangle_B \quad (2.124)$$

$$= X_B \frac{1}{\sqrt{2}} (C_X^{AB} |00\rangle_{AB} + C_X^{AB} |10\rangle_{AB}) \quad (2.125)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A X_B |0\rangle_B + |1\rangle_A X_B |1\rangle_B) \quad (2.126)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}) = |\Psi_+\rangle_{AB}. \quad (2.127)$$

O respectivo circuito quântico está representado na Fig. 2.5. O símbolo da CNOT no IBMQ é o elemento entre as portas  $H$  e  $X$ , onde o qubit  $A$  é o controle e qubit  $B$  é o

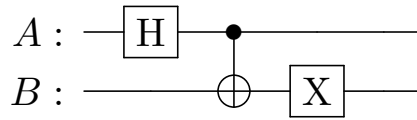


Figura 2.5 – Implementação do par de fótons emaranhados produzido pelo BBO por meio de portas lógicas quânticas.

alvo. Ademais, estamos adotando a notação dos qubits que utilizamos na seção 2.2.1. No caso  $A$  e  $B$  representam, respectivamente, as polarizações dos fótons  $A$  e  $B$ .

A PQO, do ponto de vista matemático, realiza a troca de base da polarização do fóton  $A$  e pode ser implementada com a utilização das portas  $S$  e  $H$ , de modo que  $U_{PQO} = SH$ , e é dada por meio da matriz unitária

$$U_{PQO} = SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

e a atuação na base computacional é a apresentada nas Eq. (2.56) e (2.57).

O DFP pode ser construído por meio das portas controladas  $Y$  e  $Z$  em conjunto, tal que  $U_{DFP} = C_Y^{BB'} C_Z^{BB'}$ , e é dado pela matriz

$$U_{DFP} = C_Y^{BB'} C_Z^{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.129)$$

O leitor cuidadoso poderá perceber que a matriz apresenta a estrutura do que poderíamos chamar de espelho controlado. Na Fig. 2.6 está representada a atuação do DFP, onde  $B'$  é o caminho do fóton  $B$ . Notem que, apesar de  $C_Z^{BB'}$  ser denotado por meio de uma porta controlada, independe de qual qubit é o controle e qual é o alvo.

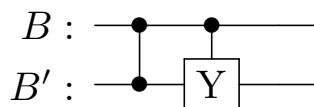


Figura 2.6 – Implementação do DFP por meio de portas lógicas quânticas.

A PMO tem a propriedade de inverter a polarização que chega no dispositivo. Esse é o comportamento de uma porta de Pauli- $X$ . Mas precisamos ter cuidado, pois a placa está inserida em apenas um dos caminhos dentro do IMZ, como pode ser observado na Fig. 2.2. Por isso, precisamos construir esse dispositivo por meio de

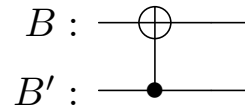


Figura 2.7 – Implementação da PMO por meio de portas lógicas quânticas.

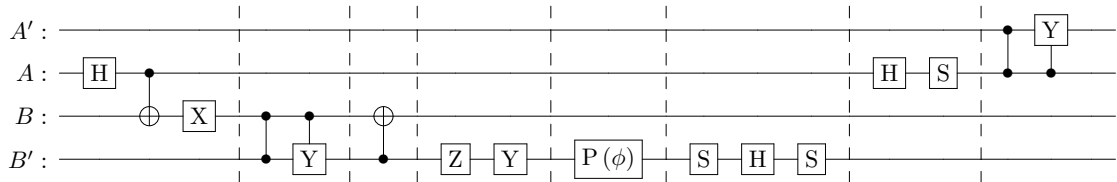


Figura 2.8 – Implementação do apagador quântico da Fig. 2.2 por meio de portas lógicas quânticas.

uma porta controlada. O controle nessa situação é o grau de liberdade de caminho do fóton  $B$  ( $B'$ ). Se o fóton estiver no caminho vertical, queremos modificar a polarização, se o fóton estiver na posição horizontal, nada acontecerá. Para conseguir esse efeito, basta que o  $B'$  seja o controle, tal que

$$U_{PMO} = X_B \otimes |1\rangle_{B'}\langle 1| + \mathbb{I}_B \otimes |0\rangle_{B'}\langle 0| = C_X^{B'B}. \quad (2.130)$$

A implementação da PMO pode ser conferida na Fig. 2.7.

Com esses elementos, podemos implementar a estrutura do apagador quântico da Fig. 2.2 e o circuito quântico que o compõe está apresentado na Fig. 2.8. O qubit  $A'$  representa o caminho do fóton  $A$ , o qubit  $A$  representa a polarização do fóton  $A$ , o qubit  $B$  representa a polarização do fóton  $B$  e o qubit  $B'$  representa o caminho do fóton  $B$  que passa pelo IMZ. Cada elemento óptico distinto está separado por meio das linhas tracejadas na vertical e a ordem dos elementos é como se segue: preparação do estado do par de fótons emaranhados pelo BBO ( $|\Psi_+\rangle_{AB}$ ), DFP, PMO, espelhos, fase, DF, PQO e DFP<sub>A</sub>.

Apesar de apresentarmos o AQ de forma completa na Fig. 2.8, para extrairmos as informações por meio das RCCs dependentes do estado quântico, devemos escolher um estado que seja interno ao IMZ. Outro detalhe é a posição no circuito dos dispositivos da PQO e DFP<sub>A</sub>. A PQO e o DFP<sub>A</sub> podem ser inseridos no circuito em qualquer posição após o BBO, pois independem do que acontece com o qubit  $B'$ , pois não estamos interessados aqui em situações como “Wheeler’s delayed-choice”. Caso a análise seja feita por meio das RCCs que envolvem a visibilidade, a extração dos dados deve ser feita com o aparato completo, pois a visibilidade é dependente das probabilidades nos detectores. Apesar de mostrarmos que a visibilidade não é, em

geral, um bom quantificador do aspecto ondulatório, o caso particular onde o divisor de feixes antes dos detectores é 50:50 torna a expressão válida.

### 2.5.2.1 Apagador quântico emaranhado

Para a construção do AQE, substituímos o DFP pelo VPPBS. O VPPBS possui a capacidade de produzir superposição de caminhos das polarizações vertical e horizontal e é construído da mesma forma que um IMZ, mas o diferencial é que possui duas fases controladas sendo uma para cada polarização em braços distintos do interferômetro. Como é possível verificar na Fig. 2 do Capítulo 4, o caminho de cima adiciona uma fase apenas na polarização vertical e o caminho de baixo adiciona uma fase apenas na polarização horizontal. Precisamos entender como realizar essas operações.

A porta que implementa a fase da polarização vertical possui a mesma estrutura de uma porta controlada, mas a unitária que devemos utilizar é a porta  $P$ , representada por

$$C_P^{B'B}(\varphi_V) = PS_V = |0\rangle_{B'} \langle 0| \otimes \mathbb{I}_B + |1\rangle_{B'} \langle 1| \otimes P_B(\varphi_V), \quad (2.131)$$

ou seja, quando o modo espacial for horizontal (representa o braço de baixo do interferômetro) nada acontecerá e quando o modo espacial for vertical (representa o braço de cima do interferômetro) e a polarização for vertical adicionaremos o termo  $e^{i\varphi_V}$ . Com essa porta já somos capazes de incluir a fase da componente vertical da polarização.

Para a fase da polarização horizontal precisamos utilizar um certo truque entre as portas. Primeiro: atuaremos a fase  $e^{i\varphi_H}$  quando a polarização de  $B$  for  $|0\rangle$ . Segundo: a atuação da fase controlada deve ser ativada apenas quando o caminho for horizontal (como apresentado na Fig. 2 do Capítulo 4) e, portanto, quando  $B'$  possuir o estado  $|0\rangle$ . A porta  $P$  pode ser escrita como

$$P(\varphi_H) = |0\rangle \langle 0| + e^{i\varphi_H} |1\rangle \langle 1|, \quad (2.132)$$

que, nesse caso, a fase atua quando a polarização é vertical e não é o que queremos. Para atuar essa porta quando a polarização for horizontal, devemos utilizar a Pauli- $X$  antes e após a porta  $P$ , de modo que

$$XP(\varphi_H)X = X|0\rangle \langle 0|X + e^{i\varphi_H} X|1\rangle \langle 1|X \quad (2.133)$$

$$= e^{i\varphi_H} |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|. \quad (2.134)$$

Falta agora modificarmos o caminho que ocorrerá a atuação da porta controlada. Para

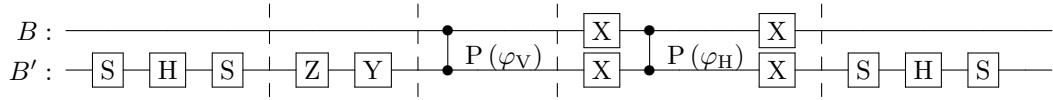


Figura 2.9 – Implementação do VPPBS da Fig. 2 do Capítulo 4 por meio de portas lógicas quânticas.

isso, utilizaremos a mesma técnica, porém também no grau de liberdade de caminho da fase controlada. Sendo assim, ficamos com

$$C_P^{B'B}(\varphi_H) = PS_H \quad (2.135)$$

$$= (X_{B'} \otimes X_B) [|0\rangle_{B'} \langle 0| \otimes \mathbb{I}_B + |1\rangle_{B'} \langle 1| \otimes P_B(\varphi_V)] (X_{B'} \otimes X_B) \quad (2.136)$$

$$= |0\rangle_{B'} \langle 0| \otimes X_B P_B(\varphi_V) X_B + |1\rangle_{B'} \langle 1| \otimes \mathbb{I}_B \quad (2.137)$$

ou seja, essa porta adicionará a fase horizontal quando o modo espacial for horizontal e não fará nada quando o modo espacial for vertical.

A construção de VPPBS por meio de portas lógicas quânticas pode ser visualizada na Fig. 2.9. O primeiro elemento é o DF, seguido pelos espelhos, pela fase controlada da componente de polarização vertical, pela fase controlada da componente horizontal e pelo DF.

Outra diferença do AQ para o AQE é que as medições e pós-seleções serão nos graus de polarização tanto do fóton  $A$  como do fóton  $B$ . Como comentamos ao longo do texto, os CQs da IBM realizam apenas medidas na base computacional. Assim, para realizarmos medidas projetivas na base de Bell das polarizações dos qubits  $A$  e  $B$ , precisamos realizar a mudança da base de Bell para a base computacional. Para obtermos a base computacional por meio da base Bell, precisamos atuar a porta CNOT e a porta  $H$  em conjunto, de modo que

$$H_A C_X^{AB} |\Phi_+\rangle_{AB} = |00\rangle_{AB}, \quad (2.138)$$

$$H_A C_X^{AB} |\Psi_+\rangle_{AB} = |01\rangle_{AB}, \quad (2.139)$$

$$H_A C_X^{AB} |\Phi_-\rangle_{AB} = |10\rangle_{AB}, \quad (2.140)$$

$$H_A C_X^{AB} |\Psi_-\rangle_{AB} = |11\rangle_{AB}. \quad (2.141)$$

Sendo assim, realizamos uma nova codificação, ou seja, ao medirmos  $|00\rangle$  o estado que foi medido na realidade é  $|\Phi_+\rangle$ , se medirmos  $|01\rangle$  o estado é  $|\Psi_+\rangle$  e assim por diante. Outro detalhe é que no momento da implementação não consideramos o modo espacial do qubit  $A$ , pois esse grau de liberdade, do ponto de vista do circuito quântico para o AQE, não recebe nenhum tipo de transformação unitária e, portanto, é um estado totalmente separável e constante em todo o circuito.

Para construir o AQE nos CQs, precisamos em algum momento incluir a mu-

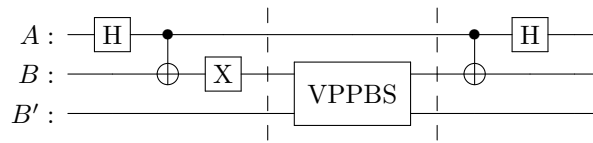


Figura 2.10 – Implementação do apagador quântico emaranhado do Capítulo 4 para o estado  $|\Psi_2\rangle$  por meio de portas lógicas quânticas.

dança da base de Bell para a base computacional após o BBO, trocar o DFP pelo VPPBS e remover a PMO. Assim como na discussão feita ao final da subseção anterior, devemos escolher um estado após o VPPBS e antes do DF, pois as RCCs para a coerência possuem funções dependentes do estado e queremos quantificar a RCC para algum estado dos quantons dentro do IMZ. Na Fig. 2.10 apresentamos o circuito quântico para o estado  $|\Psi_2\rangle$  que foi o circuito que utilizamos para realizar o apagamento e a análise das RCCs no Capítulo 4. O primeiro elemento da figura é o estado emaranhado produzido pelo BBO, em seguida o VPPBS apresentado na Fig. 2.9 e por último os elementos necessários para a troca da base de Bell para a base computacional. Sendo assim, a partir desse momento precisamos ajustar os valores dos ângulos  $\varphi_j$ , com  $j = H, V$ , do VPPBS e realizarmos medidas nos qubits  $A$  e  $B$  com pós-seleção.

No Capítulo 3, apresentamos um trabalho onde foi verificado que a RC que envolve a visibilidade interferométrica não produz resultados satisfatórios para a análise da DOP quando considerado um contexto mais geral para o IMZ. Por outro lado, as RCs que envolvem o estado quântico e são baseadas em coerência quântica refletem de forma muito mais adequada o comportamento esperado para o quanton dentro do IMZ. No Capítulo 4, apresentamos um aparato experimental do apagador quântico mais geral, onde alteramos o DFP por um VPPBS. O VPPBS é um divisor de feixes polarizado mais geral que permite criar superposição de caminhos das polarizações horizontal e vertical. Esse aparato experimental, que denominamos de AQE, abre um leque de situações para a análise por meio das RCCs.



### 3 ARTIGO 1 - QUANTUM COHERENCE VERSUS INTERFEROMETRIC VISIBILITY IN A BIASED MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER

Quantum Information Processing (2023) 22:68  
<https://doi.org/10.1007/s11128-022-03800-6>



## Quantum coherence versus interferometric visibility in a biased Mach–Zehnder interferometer

Diego S. S. Chrysothemos<sup>1</sup> · Marcos L. W. Basso<sup>2</sup> · Jonas Maziero<sup>1</sup>

Received: 22 October 2022 / Accepted: 18 December 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2022

### Abstract

The double-slit interferometer and the Mach–Zehnder interferometer (MZI) with balanced beam splitters are prototypical setups for investigating the quantum wave-particle duality. These setups induced a quantitative association of interferometric visibility (IVI) with the wave aspect of a single quantum system (WAQ). Recently, it was realized that quantum coherence (QC) can be better suited than IVI for quantifying the WAQ in complementarity relations. In this article, we investigate a MZI with biased beam splitters both in the input and in the output, and we show that in some cases the IVI is not adequate to quantify the WAQ since it does not reflect the behavior of the quantum coherence, even for a bi-dimensional closed quantum system. Using IBM quantum computers, we experimentally verify our theoretical findings by doing a full quantum simulation of the optical MZI with biased beam splitters.

**Keywords** Quantum coherence · Interferometric visibility · Mach–Zehnder interferometer

### 1 Introduction

The wave-particle duality stands as the main example of the Bohr's complementarity principle, which states that quantons have properties that are equally real but mutually

---

✉ Jonas Maziero  
jonas.maziero@ufsm.br

Diego S. S. Chrysothemos  
starkediego@gmail.com

Marcos L. W. Basso  
marcoslwbaso@hotmail.com

<sup>1</sup> Departamento de Física, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Avenida Roraima 1000, Santa Maria, Rio Grande do Sul 97105-900, Brazil

<sup>2</sup> Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Avenida dos Estados 5001 Santo André, São Paulo 09210-580, Brazil

exclusive [1]. For instance, in a two-way interferometer, such as the Mach–Zehnder interferometer or the double-slit interferometer, the wave property is coded in the visibility of the interference pattern, while the particle nature is captured by the which-way information of the path along the interferometer, such that the complete manifestation of the one destroys the appearance of the other. The possibility for partial-simultaneous manifestation of the wave and particle aspects of a quanton was first quantitatively formulated and discussed by Wootters and Zurek [2], and later it was expressed in terms of a simple complementarity relation between predictability ( $P$ ) and visibility ( $V$ ) [4]:

$$V^2 + P^2 \leq 1. \quad (1)$$

Such relation implies that these characteristics of a quanton are not necessarily mutually exclusive, i.e., it is possible to have a partial manifestation of the wave and particle nature of a quanton in the same experimental setup such that the more information one has about one aspect of the system, the less information the experiment can provide about the other, as was verified experimentally in Ref. [3].

Until now, many paths were taken to describe quantitatively the wave-particle aspect of a quanton [5–12]. For instance, the extension of such complementarity relations for  $d$ -dimensional quantons was only possible with the realization that the quantum coherence [13] can be considered as the natural generalization for the visibility of a qubit [7, 8, 14, 15]. Also, in Ref. [11], it was shown that the mathematical properties of the density matrix of a quanton  $A$  lead to several complementarity relations of the type

$$C(\rho_A) + P(\rho_A) \leq c(d_A), \quad (2)$$

where  $c(d_A)$  is a constant that depends only on the system  $A$  dimension  $d_A$ ,  $C(\rho_A)$  is a quantum coherence measure and  $P(\rho_A)$  is a corresponding predictability measure, with both satisfying the criteria established in Refs. [17, 18] for bone-fide measures of visibility and predictability. Besides, the complementarity relations of the type derived in Refs. [4, 11] saturate if, and only if, the quantum state of the quanton  $A$  is pure.

For mixed states, the complementarity relation never saturates and the left-hand side of Eq. (2) can even reach zero for a maximally mixed state. As noticed by Jakob and Bergou [19], due to the purification theorem, a maximally mixed state of the quanton  $A$  can be seen as being due to its maximal entanglement with another quantum system  $B$ . Triality relations, also known as complete complementarity relations (CCRs), involving predictability, visibility and entanglement, were first suggested by Jakob and Bergou, provided that a bipartite quantum system  $AB$  is in a pure state. Taking the purity of a bipartite quantum system as the main hypothesis, two of us derived CCRs of the type [20]:

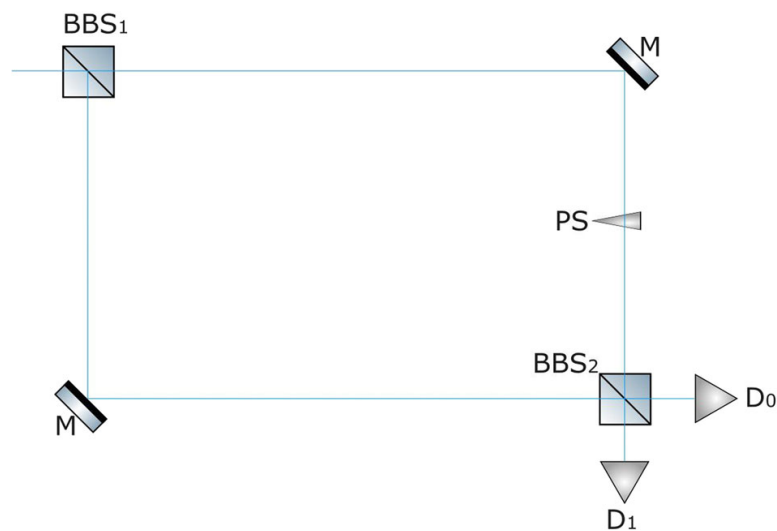
$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = \log_2 d_A. \quad (3)$$

Here,  $C_{re}(\rho_A) := S_{vn}(\rho_{A\text{diag}}) - S_{vn}(\rho_A)$  is the relative entropy of quantum coherence, with  $\rho_{A\text{diag}}$  being the diagonal part of  $\rho_A$ ,  $P_{vn}(\rho_A) = \log_2 d_A - S_{vn}(\rho_{A\text{diag}})$  is

the corresponding bone-fide predictability measure and  $S_{vn}(\rho_A) = -\text{Tr}\rho_A \log_2 \rho_A$  is the von Neumann entropy, which is an entanglement monotone. It is noteworthy that the predictability and entanglement measures can be seen as a measure of path distinguishability in an interferometer, as recently discussed in Refs. [21, 22]. Besides, Eq. (3) has astonishing aspects that were shown recently: it is intrinsically connected to the notion of contextual realism defined by Bilobran and Angelo [23], as discussed in Ref. [24]; it is invariant by global unitary operations, which implies that it is preserved under unitary evolution and it is Lorentz invariant [25]; it remains valid in curved spacetimes as a quanton travels along its world lines, as shown in Ref. [26].

In this work, our goal is twofold. We simulate a biased Mach–Zehnder interferometer (*MZI*) in a circuit-based quantum computer, where both the beam splitters are not balanced, and discuss such experiment in the light of complementarity relations, what leads to some novelties. For instance, in the biased *MZI*, we discuss situations where the interferometric visibility does not reflect the behavior of quantum coherence inside the interferometer. It is noteworthy that, in Refs. [14, 15], the authors also discussed situations where the interferometric visibility is not a good measure for the wave aspect for cases where the dimension of the quanton  $A$  is bigger than two and argued that the quantum coherence is a better measure of the waviness of the quantum system with dimension  $d_A > 2$ . More specifically, in Ref. [14] the authors made a theoretical analysis of the experimental observations reported in Ref. [16] in a four-path quantum interference experiment via multiple-beam Ramsey interferometry. In this experiment, a selective scattering of photons from just one interfering path causes decoherence and, at the first glance, it seems that there is an increase in the contrast of the interference pattern, i.e., of the interferometric visibility. However, the authors highlighted the fact that the visibility fails to capture the wave nature of the quanton in this multi-path experiment and argued that quantum coherence remains a good quantifier of wave nature in such situations. Therefore, the authors concluded that the enhancement of the visibility in the presence of environmental decoherence stresses the limitations of the traditional measure of interferometric visibility as a quantifier for the wave character of the quanton.

In contrast, in this article, we present some cases where the visibility is not a good measure as the quantum coherence for quantifying the wave property even for  $d_A = 2$ . And this is a consequence of the experimental setup we use, not relying in the behavior of the interferometric visibility in the presence of decoherence, i.e., the interaction of the quanton with an environment. Therefore, in our case, the fact that the visibility fails to catch completely the wave behavior is due to its own traditional standard definition in the context of interferometry. To the best of our knowledge, this is the first article showing that the usual definition of visibility fails to quantifying completely the wave aspect of a quanton for  $d_A = 2$ . In the cases explored here, the visibility can be taken, at most, as an indicative of partial wave behavior of the quanton inside the interferometer. As well, we discuss the fact that the complementarity relations based on the quantum coherence as a measure of the waviness are better since the quantifiers of the wave-particle aspect of a quantum system depend only on the state of the system inside the interferometer. On the other hand, the definition of interferometric visibility is made with regard to the detection probabilities, thus making reference to the state of system after the second beam splitter, which in this case is also a biased beam



**Fig. 1** Schematic representation of the biased Mach–Zehnder interferometer.  $BBS_j$  represents the biased beam splitters,  $M$  stands for the mirrors,  $PS$  is the phase-shifter, and  $D_j$  are the photon detectors

splitter. Therefore, the interferometric visibility uses the state of the quanton outside the interferometer to measure the wave aspect of the quanton inside the interferometer, and this, as we show here, leads to some unexpected results in the case of a biased *MZIs*.

The remainder of this article is organized as follows: In Sect. 2, we use a biased Mach–Zehnder interferometer (BMZI) to argue that interferometric visibility is not, in general, a good quantifier for the wave character of a quanton. In Sect. 3, we test our findings experimentally by using IBM quantum computers to do a full quantum simulation of the optical biased MZI. Finally, in Sect. 4, we give our concluding remarks.

## 2 Coherence vs visibility in a biased Mach-Zehnder interferometer

In contrast to many articles and textbooks on Quantum Mechanics, that consider two balanced beam splitters (*BS*) or one balanced *BS* [27–30], in this article we regard an experimental setup for the Mach–Zehnder interferometer with two biased beam splitters (*BBSs*) characterized by arbitrary transmission ( $T_j$ ) and reflection ( $R_j$ ) coefficients, with both coefficients being real numbers between 0 and 1 such that  $T_j^2$  is the probability of quantons being transmitted in the  $j$ -beam splitter, while  $R_j^2$  is the probability of quantons being reflected in the beam splitter  $j = 1, 2$ , as depicted in Fig. 1. Therefore, we must have  $T_j^2 + R_j^2 = 1$ . It is noteworthy that the authors in Refs. [31, 32] already considered such general setup for didactic purposes.

Besides, from optics, we have that each reflection causes a phase shift of  $\frac{\pi}{2}$ , which is equivalent to a phase shift of  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  in the wave function. We will use the following notation for the states of the spatial mode of the quanton:  $|0\rangle := |h\rangle$  represents the horizontal spatial mode, whereas  $|1\rangle := |v\rangle$  stands for the vertical spatial mode. The quanton  $A$  is initially prepared in the state  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ . After the first *BBS*, the state

of the quanton is given by  $|\psi_1\rangle = T_1|0\rangle + iR_1|1\rangle$ . After the mirrors and phase shifter, we have

$$|\psi_2\rangle = ie^{i\phi}T_1|1\rangle - R_1|0\rangle. \quad (4)$$

With the action of the second *BBS*, the state of system is given by:

$$|\psi_3\rangle = -(e^{i\phi}T_1R_2 + R_1T_2)|0\rangle + i(e^{i\phi}T_1T_2 - R_1R_2)|1\rangle. \quad (5)$$

From Eq. (5), we use Born's rule to obtain the probabilities for the detectors  $D_0$  and  $D_1$  to click:

$$\Pr(D_0) = T_1^2R_2^2 + R_1^2T_2^2 + 2T_1R_1T_2R_2\cos\phi, \quad (6)$$

$$\Pr(D_1) = T_1^2T_2^2 + R_1^2R_2^2 - 2T_1R_1T_2R_2\cos\phi. \quad (7)$$

By using the usual definition of interferometric visibility as the contrast of the interference pattern found in textbooks [28] or in the works of Greenberger and Yasin [4] and Englert [5], a closer examination of Eqs. (6) and (7) shows that we can have different expressions for the interferometric visibility depending on which detector we use to define such a measure:

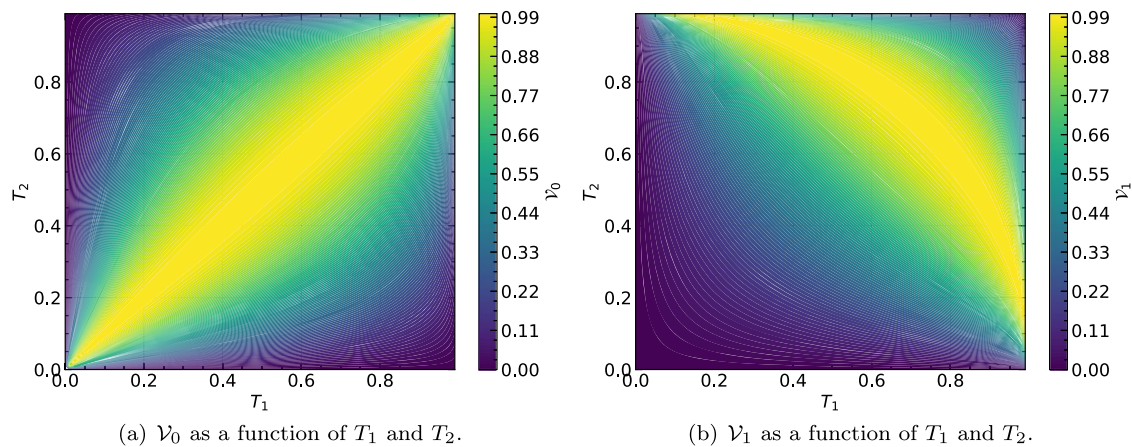
$$\mathcal{V}_0 := \frac{\Pr(D_0)_{\max} - \Pr(D_0)_{\min}}{\Pr(D_0)_{\max} + \Pr(D_0)_{\min}} = \frac{2T_1R_1T_2R_2}{T_1^2R_2^2 + R_1^2T_2^2}, \quad (8)$$

$$\mathcal{V}_1 := \frac{\Pr(D_1)_{\max} - \Pr(D_1)_{\min}}{\Pr(D_1)_{\max} + \Pr(D_1)_{\min}} = \frac{2T_1R_1T_2R_2}{T_1^2T_2^2 + R_1^2R_2^2}. \quad (9)$$

It is straightforward to see that if the second *BBS* is balanced, i.e.,  $T_2 = R_2 = 1/\sqrt{2}$  and  $T_1 = T$ ,  $R_1 = R$ , as was the case considered in Ref. [33], both measures of interferometric visibility coincide and we have the usual expression  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V} = 2TR$ , which is equal to  $C_{l_1}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|)$ , the  $l_1$ -norm quantum coherence [13].

On the other hand, if  $T_1 = R_1 = 1/\sqrt{2}$ , while  $T_2 = T$  and  $R_2 = R$  are free to vary, we have  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V} = 2TR$ , but the visibility does not reflect the behavior of quantum coherence inside the interferometer, as we will see below. Moreover, in the most general case, where both beam-splitters are not balanced, we encounter two different expressions for the visibility depending on which detector we use. This is illustrated graphically in Fig. 2, where we plotted  $\mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}_1$  as a function of  $T_1$  and  $T_2$ . It is worth mentioning that  $\mathcal{V}_0$  is not defined for the points  $T_1 = T_2 = 0$  and  $R_1 = R_2 = 0$ , whereas  $\mathcal{V}_1$  is not defined for the points  $T_1 = R_2 = 0$  and  $R_1 = T_2 = 0$  [31]. However, this is not a problem, since, for instance, if  $T_1 = T_2 = 0$  the quanton always hit the detector  $D_1$ , and there's no interference pattern. Actually, we see that  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1$  if and only if  $T_1 = R_1$  or  $T_2 = R_2$ . Besides that, the expressions for  $\mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}_1$  depend on  $T_2$  and  $R_2$ , i.e., on the transmission and reflection coefficients of the second *BBS*, instead of just on  $T_1$  and  $R_1$  as is expected for a quantity that should quantify the wave behavior of the quanton  $A$  inside the interferometer, i.e., the state superposition with respect to the two arms of the interferometer.





**Fig. 2** The interferometric visibilities  $\mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}_1$  as a function of the transmission coefficients  $T_1$  and  $T_2$  of the biased beam splitters

It is worth mentioning that here we are concerned with the definition of visibility in the quantum case, i.e., when we have only one quanton at the time inside the interferometer and a limited number of quantons in total. Besides, we are not dealing with the application of IVI in quantum metrology. In this article, we are concerned only with its use for quantifying the wave character of a *single* quantum system.

Now, without loss of generality, let us consider the expression for  $\mathcal{V}_0$ . A similar analysis can be done for  $\mathcal{V}_1$ . In Ref. [4], the path predictability measure was introduced through a guessing game such that the smartest strategy would be to guess that all the particles will be in the same beam, namely the more intense one. The next step is then to compare the success of this guess with that obtained in the case where we have no success at all, i.e., if both paths are equally likely. If we do this here, we will end up with the same expression proposed by Greenberger and Yasin [4], i.e.,  $P = |T_1^2 - R_1^2|$ . Although  $P$  is a bone-fide measure of predictability,  $P$  and  $\mathcal{V}_0$  do not form a complementarity relation for a pure state, as should occur, i.e.,  $P^2 + \mathcal{V}_0^2 \neq 1$ . In this scenario, of the MZI with two *BBS*, a predictability measure that accompanies  $\mathcal{V}_0$  is the following one

$$\mathcal{P}_0 = \frac{|R_1^2 T_2^2 - R_2^2 T_1^2|}{R_1^2 T_2^2 + R_2^2 T_1^2}. \quad (10)$$

For this function, we have

$$\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{V}_0^2 = 1. \quad (11)$$

Here, we have an equality instead of an inequality once the state of system is pure. Besides, if the second *BBS* is balanced, it is easy to see that  $\mathcal{P}_0 = P$  and the complementarity relation given by Eq. (11) reduces to Eq. (1), obtained in Ref. [4] for the pure state case. Again, we see that  $\mathcal{P}_0$  is also a function of  $T_2$  and  $R_2$ , what is not reasonable since  $\mathcal{P}_0$  should reflect just the particle aspect of the quanton *A* inside the interferometer.

In order to reinforce that these measures for predictability and visibility do not reflect what is expected in the *quantum realm*, let us consider the following case: **(a)** Let us suppose that  $T_1 = T_2 = T$  and  $R_1 = R_2 = R$ . In this case, we have that  $\mathcal{V}_0 = 1$  and  $\mathcal{P}_0 = 0$ , independent of the values of  $T$  and  $R$ , which can be considered as a pathological case. For instance, if  $T \gg R$  or  $R \gg T$ , we should expect that  $\mathcal{P}_0 \gg \mathcal{V}_0$  and not the other way around. And, certainly, we should not expect  $\mathcal{V}_0$  to reach its maximum possible value while  $\mathcal{P}_0 \approx 0$  when there is almost no path superposition (quantum coherence) inside the interferometer. The explanation for  $\mathcal{V}_0$  to be independent of the values of  $T$  and  $R$  comes from the fact that<sup>1</sup>  $\Pr(D_0)_{\min} = 0$ , which implies that  $\mathcal{V}_0 = \Pr(D_0)_{\max} / \Pr(D_0)_{\max} = 1$ . Of course, in the classical case, the interference pattern and the visibility is sharp since we are dealing with the intensity of light instead of probabilities. However, in the quantum realm, if we have a limited number of photons and one photon at the time is inside the interferometer, as nowadays the technology already permits, and if  $T \gg R$ , then  $\Pr(D_0)_{\max} \ll 1$ , we know beforehand that the predictability of the path is high and the quantum coherence of *single* quanton is small inside the interferometer. Therefore, here the interferometric visibility can be taken, at most, as a indicative of partial wave behavior of *single* quanton inside the interferometer. Besides, one could argue that  $\mathcal{V}_1$  should be used instead of  $\mathcal{V}_0$  in this situation, but this is an arbitrary choice. Similarly, for  $T_1 = R_2$  and  $R_1 = T_2$ , then  $\mathcal{V}_1 = 1$  and the same analysis follows for  $\mathcal{V}_1$ . Therefore, here we show a situation where the definition of the visibility is not a good measure for the wave aspect of the quanton inside the interferometer. In this situation,  $\mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}_1$  will correctly reflect the wave behavior of the quanton only if both *BBS* are balanced, i.e.,  $T_1 = R_1 = T_2 = R_2$ .

A more interesting case, that will be addressed below in a more general setting, where  $\mathcal{V}_0$  is not a bone-fine measure of the waviness of the quanton, is when  $T_1 = R_1$  such that  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 2T_2R_2$ , i.e., even though both interferometric visibilities coincide,  $\mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}_1$  depend on  $T_2$  and  $R_2$ , while we have full superposition of the quanton inside the interferometer. A similar behavior appears in experimental settings usually used in quantum delayed choice experiments (QDCE) where a balanced second *BS* is prepared in a superposition of being in and out of the interferometer, as in Ref. [34, 35]. However, in Ref. [36] the authors discussed the fact that the visibility at the output has no connection whatsoever with the wave element of reality, as defined in accordance with the criterion of realism of a given observable (in this case, a ‘wave’-observable), as defined in Ref. [23]. Besides, they proposed a setup that removes this objection and establishes a monotonic link between the visibility and wave elements of reality inside the interferometer. To do this, the authors considered the second *BS* balanced and the first *BS* in a superposition of being in and out of the interferometer. We just mentioned this work here because we want to point out the fact that, in the case where the quanton is initially prepared in the state  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ , the IVI  $\mathcal{V}_0$  will be a bone-fide measure of the wave aspect of system only when the second *BBS*

<sup>1</sup> In the cases where  $\Pr(D_j)_{\min} = 0$ , we have  $\mathcal{V}_j = (\Pr(D_j)_{\max} - \Pr(D_j)_{\min}) / (\Pr(D_j)_{\max} + \Pr(D_j)_{\min}) = 1$ , for  $j = 0$  or  $1$ , even for  $\Pr(D_j)_{\max} \ll 1$ . So, if we have a limited number of quantons to experiment with, we see that  $\mathcal{V}'_j = \mathcal{V}_j \Pr(D_j)_{\max}$  would be a better quantifier for the visibility of the interference fringes contrast. It is worthwhile though noticing that this change would not solve the problems IVI has regarding the quantification of the wave character of a quanton.

is balanced. In this case, both interferometric visibilities coincide and  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 2T_1R_1 = C_{l_1}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|)$ .

It is noteworthy that, in Refs. [14, 15], the authors also discussed situations where the visibility is not a good measure for the wave aspect for cases where the dimension of the quanton is bigger than two. They argued that the quantum coherence is a better measure of the wave aspect of the quanton system with dimension  $d_A > 2$ . In contrast, in this article we report a situation where the visibility is not a good measure for the wave aspect of a quantum system even for dimension  $d_A = 2$ , where the usual definition of visibility should work. This is a consequence of the experimental setup we used, which makes the definition of the visibility inappropriate for a *single* quanton inside the interferometer since  $\Pr(D_0)_{min} = 0$  or depends on  $T_2$  and  $R_2$ .

On the other hand, if we consider the CCR expressed by Eq. (3) applied to this scenario, since the quanton is prepared in a pure state, then  $S_{vn}(\rho_A) = 0$  and Eq. (3) reduces to

$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) = 1. \quad (12)$$

Once such relation is invariant under unitary transformations, it is preserved under unitary evolution and it is applicable in every step of the biased *MZI*. For instance, inside the interferometer, after the mirrors and the phase shifter,  $C_{re}(\rho_A)$ ,  $P_{vn}(\rho_A)$  will be functions only of  $T_1$  and  $R_1$ , as expected since  $\rho_A$  will be the density operator regarding the state of the system inside the interferometer, i.e., regarding the state given by Eq. (4). In contrast, the definition of the visibility is regarding the detection probabilities and thus making reference to the state of system after the second *BBS*, i.e., regarding the state given by Eq. (5). Therefore, the visibility uses the state of the quanton outside the interferometer to measure the wave aspect of the quanton inside the interferometer. This, as we showed above, leads to some problems in the case of the biased *MZI*. In contrast, the complementarity relation given by Eq. (12) uses the state of the quanton inside the interferometer to quantify the wave and particle aspects of the system:

$$C_{re}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = -R_1^2 \log_2 R_1^2 - T_1^2 \log_2 T_1^2, \quad (13)$$

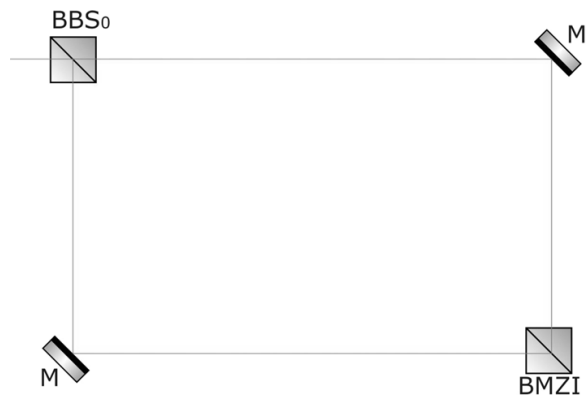
$$P_{vn}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 1 + R_1^2 \log_2 R_1^2 + T_1^2 \log_2 T_1^2, \quad (14)$$

with both measures being a function only of  $T_1$  and  $R_1$ , as expected.

Now, let us consider the following case: **(b)** A quanton is prepared in a general pure state  $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , with  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , that goes through the biased *MZI*. In order to prepare such state, we just have to consider another biased-*MZI* before *BBS*<sub>1</sub>, as depicted in Fig. 3. In this case, following the same steps as before, the probability of detection in  $D_0$  is given by:



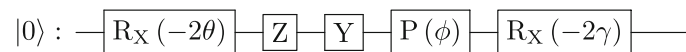
**Fig. 3** Schematic representation of the double biased Mach–Zehnder interferometer. *BMZI* is the biased Mach–Zehnder interferometer illustrated in Fig. 1



$$\begin{aligned}
 \Pr(D_0) = & |\alpha|^2 \left( T_1^2 R_2^2 + R_1^2 T_2^2 \right) + |\beta|^2 \left( T_1^2 T_2^2 + R_1^2 R_2^2 \right) \\
 & + 2 \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 \right) T_1 R_1 T_2 R_2 \cos \phi - 2 \left( \operatorname{Re} \alpha \operatorname{Re} \beta + \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Im} \beta \right) R_2 T_2 \sin \phi \\
 & + 2 \left( \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} \alpha \operatorname{Im} \beta \right) \left[ R_1 T_1 \left( R_2^2 - T_2^2 \right) + \left( R_1^2 - T_1^2 \right) R_2 T_2 \cos \phi \right],
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

A similar expression follows for  $\Pr(D_1)$ , but we choose not to show it here because it does not add anything new to the present analysis. One can see that the visibility will be a function of  $R_1, T_1, R_2, T_2$ , in general. Besides, with  $\alpha = 1, \beta = 0$  one can easily see that the case explored before is recovered. Now, it is interesting to notice that when we choose  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ , the probability for  $D_0$  reduces to  $\Pr(D_0) = \frac{1}{2} - R_2 T_2 \sin \phi$ , which implies that the visibility is given by  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 2T_2 R_2$ , i.e., the visibilities coincide, and however, they are only a function of  $R_2$  and  $T_2$ . For instance, if the first *BBS* is balanced, i.e.,  $T_1 = R_1 = 1/\sqrt{2}$ , the state of system right after the *BBS*<sub>1</sub> is  $|\psi_1\rangle = \frac{1+i}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ . So, after the mirrors and phase-shifter the state is given by  $|\psi_2\rangle = \frac{i-1}{2}(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle)$ , which implies that we have maximal superposition (or maximal quantum coherence) and therefore the wave-behavior inside the interferometer. However,  $\mathcal{V}_j$  depends on  $T_2$  and  $R_2$  and will quantify the waviness of the system only if  $T_2 = R_2 = 1/\sqrt{2}$  once in this case  $\mathcal{V}_j = C_{l_1}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 1$ . In contrast, if *BBS*<sub>2</sub> is not balanced, the interferometric visibility will not quantify correctly the wave aspect of the quanton inside the interferometer. It is worth observing that, in this case, the fact the  $\mathcal{V}_j$  is not a bone-fide measure comes directly from the fact that  $\mathcal{V}_j$  depends on  $T_2$  and  $R_2$  and not from  $\Pr(D_0)_{\min} = 0$ . Here we have the opposite behavior between quantum coherence and interferometric visibility in comparison with case (a). In the case (a) the quantum coherence varies while the visibility  $\mathcal{V}_0$  is constant, whereas in (b), when the first *BBS* is balanced, the quantum coherence is constant and the visibility varies. On the other hand, if we use the complementarity relation given by Eq. (12), we have that  $P_{vn}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 0$  and  $C_{re}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 1$  independent of  $R_2$  and  $T_2$ , as expected.

**Fig. 4** The quantum circuit implemented in IBMQ for simulating the Mach–Zehnder interferometer with biased beam splitters (*BBS*'s). The first  $R_X(-2\theta)$  gate (left to the right) is the  $BBS_1$ . For the mirrors, it is necessary to apply the  $Z$  gate and then the  $Y$  gate.  $P(\phi)$  is the phase-shifter and, finally, the second  $R_X(-2\gamma)$  represents the  $BBS_2$



**Table 1** Calibration parameters for the Armonk chip version 2.4.33

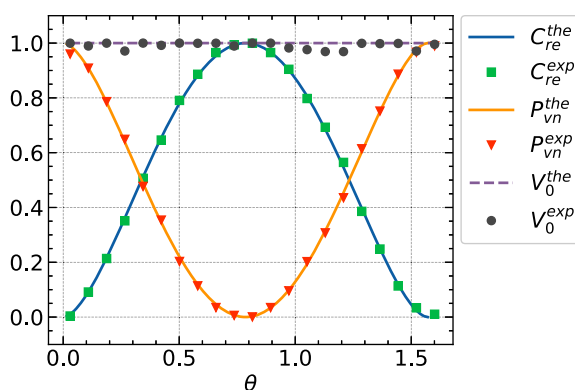
Armonk parameters	Q0
Frequency (GHz)	4.797
T1 ( $\mu$ s)	272.47
T2 ( $\mu$ s)	276.02
Gate error ( $10^{-1}$ )	1.56
Readout error ( $10^{-2}$ )	4.06

### 3 Full quantum simulation of the biased Mach–Zehnder interferometer using IBM's quantum computers

In this section, we simulate the biased *MZI* using IBM's quantum computers [37], in order to provide a proof-of-principle experimental verification of our theoretical results. To do this, we simulate the optical elements of the biased *MZI* through unitary gates as follows. The *BBS* is implemented by  $U_{BBS}(\theta) = R_X(-2\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , where  $R_X(\theta)$  is a rotation by an angle  $\theta$  about the  $X$  axis. So, we use  $T := \cos \theta$  and  $R := \sin \theta$ , with  $\theta \in [0, \pi/2]$ . As a particular case, we can get the balanced *BS* by setting  $\theta = \pi/4$ . The mirrors' combined action is implemented using  $YZ = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ , where  $Y$  e  $Z$  are the usual Pauli matrices. Therefore, one can see that mirrors give a phase shift of  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  in the state vector and the vertical and horizontal path states are switched. The phase shift is implemented through the phase gate  $P(\phi) = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 1|$ . Finally, we need to apply the  $U_{BS}(\gamma) = R_X(-2\gamma)$ .

To exemplify our results, we implement the circuit for the biased *MZI* shown in Fig. 4 and use the Armonk quantum chip of IBM's Quantum Experience, whose calibration parameters are shown in Table 1. Between the phase shifter and the  $BBS_2$ , we performed a quantum state tomography to obtain information of the density matrix  $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ , from which we calculate the quantum coherence and predictability using Eqs. (13) and (14), respectively. A second state tomography is performed after the application of  $BBS_2$ , so that we can calculate the visibilities of Eqs. (8) and (9) through the maximum and minimum probabilities by the variation of the phase  $\phi$ . For

**Fig. 5** Theoretical (lines) and experimental (points) results for quantum coherence and predictability of  $|\psi_2\rangle$  and visibility of  $|\psi_3\rangle$  for the case with the input state being  $|0\rangle$ ,  $T_1 = T_2 = T = \cos \theta$  and  $R_1 = R_2 = R = \sin \theta$  with  $\theta \in [0, \pi/2]$



the input state  $|0\rangle$  and for  $T_1 = T_2 = T = \cos \theta$  and  $R_1 = R_2 = R = \sin \theta$  with  $\theta \in [0, \pi/2]$ , the results are shown in Fig. 5. It is important to mention that we used the Qiskit tools for measurement error mitigation [38], which improved substantially the experimental results. As one can see, for  $T \gg R$  and  $R \ll T$ , the quantum coherence of the state  $\rho = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$  inside the interferometer has small values and the predictability is high, while  $\mathcal{V}_0 = 1$  independent of the values of  $T$  and  $R$ .

## 4 Conclusions

For a fairly long time, interferometric visibility (IVI) has been considered as a synonymous of the wave character of a quantum system (WCQ). Recently, indications were given, using decoherence, that quantum coherence is more suited than IVI for quantifying the WCQ of a *single* quanton. In this article, we used a biased Mach–Zehnder interferometer (BMZI) to settle this issue, even for a two-dimensional quantum system. We identified sets of parameters of the BMZI for which IVI indicates quite the opposite of what one knows to be the behavior of a *single* quanton inside the interferometer. This is in a way expected, since IVI is computed using the quanton’s state outside of the interferometer and we want to quantify the WCQ inside the interferometer.

**Acknowledgements** This work was supported by the Universidade Federal do ABC (UFABC), process 23006.000123/2018-23, by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), process 88887.649600/2021-00, by the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), process 309862/2021-3, and by the Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ), process 465469/2014-0.

**Data availability** The Qiskit code used for implementing the simulations and experiments used to obtain the data utilized in this article is available upon request to the authors.

## References

1. Bohr, N.: The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature* **121**, 580 (1928)
2. Wootters, W.K., Zurek, W.H.: Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr’s principle. *Phys. Rev. D* **19**, 473 (1979)
3. Aucsaie, R., Serra, R.M., Filgueiras, J.G., Sarthour, R.S., Oliveira, I.S., Céleri, L.S.: Experimental analysis of the quantum complementarity principle. *Phys. Rev. A* **85**, 032121 (2012)

4. Greenberger, D.M., Yasin, A.: Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Phys. Lett. A* **128**, 391 (1988)
5. Englert, B.-G.: Fringe visibility and which-way information: An inequality. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154 (1996)
6. Angelo, R.M., Ribeiro, A.D.: Wave-particle duality: an information-based approach. *Found. Phys.* **45**, 1407 (2015)
7. Bera, M.N., Qureshi, T., Siddiqui, M.A., Pati, A.K.: Duality of quantum coherence and path distinguishability. *Phys. Rev. A* **92**, 012118 (2015)
8. Bagan, E., Bergou, J.A., Cottrell, S.S., Hillery, M.: Relations between coherence and path information. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 160406 (2016)
9. Coles, P.J.: Entropic framework for wave-particle duality in multipath interferometers. *Phys. Rev. A* **93**, 062111 (2016)
10. Bagan, E., Calsamiglia, J., Bergou, J.A., Hillery, M.: Duality games and operational duality relations. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 050402 (2018)
11. Basso, M.L.W., Chrysothemios, D.S.S., Maziero, J.: Quantitative wave-particle duality relations from the density matrix properties. *Quant. Inf. Process.* **19**, 254 (2020)
12. Basso, M.L.W., Maziero, J.: An uncertainty view on complementarity and a complementarity view on uncertainty. *Quantum Inf. Process.* **20**, 201 (2021)
13. Baumgratz, T., Cramer, M., Plenio, M.B.: Quantifying coherence. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014)
14. Mishra, S., Venugopalan, A., Qureshi, T.: Decoherence and visibility enhancement in multi-path interference. *Phys. Rev. A* **100**, 042122 (2019)
15. Qureshi, T.: Coherence, interference and visibility. *Quanta* **8**, 24 (2019)
16. Mei, M., Weitz, M.: Controlled decoherence in multiple beam Ramsey interference. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 559 (2001)
17. Dürr, S.: Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers. *Phys. Rev. A* **64**, 042113 (2001)
18. Englert, B.-G., Kaszlikowski, D., Kwek, L.C., Chee, W.H.: Wave-particle duality in multi-path interferometers: general concepts and three-path interferometers. *Int. J. Quantum Inf.* **6**, 129 (2008)
19. Jakob, M., Bergou, J.A.: Quantitative complementarity relations in bipartite systems: entanglement as a physical reality. *Opt. Comm.* **283**, 827 (2010)
20. Basso, M.L.W., Maziero, J.: Complete complementarity relations for multipartite pure states. *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 465301 (2020)
21. Qureshi, T.: Predictability, distinguishability and entanglement. *Opt. Lett.* **46**, 492 (2021)
22. Basso, M.L.W., Maziero, J.: Entanglement monotones connect distinguishability and predictability. *Phys. Lett. A* **425**, 127875 (2021)
23. Bilobran, L.O., Angelo, R.M.: A measure of physical reality. *Europhys. Lett.* **112**, 40005 (2015)
24. Basso, M.L.W., Maziero, J.: Complete complementarity relations: connections with EPR realism and decoherence and extension to mixed quantum states. *Europhys. Lett.* **135**, 60002 (2021)
25. Basso, M.L.W., Maziero, J.: Complete complementarity relations and their Lorentz invariance. *Proc. R. Soc. A* **477**, 20210058 (2021)
26. Basso, M.L.W., Maziero, J.: Complete complementarity relations in curved spacetimes. *Phys. Rev. A* **103**, 032210 (2021)
27. Ellis, J.D.: *Field guide to displacement measuring interferometry*. Spie Press, USA (2014)
28. Auletta, G., Fortunato, M., Parisi, G.: *Quantum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
29. Li, L., Liu, N.-L., Yu, S.: Duality relations in a two-path interferometer with an asymmetric beam splitter. *Phys. Rev. A* **85**, 054101 (2012)
30. Liu, Y., Lu, J., Zhou, L.: Complementarity via error-free measurement in a two-path interferometer. *Laser Phys. Lett.* **14**, 055204 (2017)
31. Cavalcanti, C.J.H., Ostermann, F., Netto, J.S., Lima, N.W.: Software-aided discussion about classical picture of Mach-Zehnder interferometer. *Eur. J. Phys.* **38**, 065703 (2017)
32. Cavalcanti, C.J.H., Ostermann, F., Netto, J.S., Lima, N.W.: Teaching wave-particle complementarity using the virtual Mach-Zehnder interferometer. *Rev. Bras. Ens. Fis.* **42**, e20190283 (2020)
33. Chen, D.-X.: Experimental investigation of wave-particle duality relations in asymmetric beam interference. *Quantum Inf.* **8**, 101 (2022)
34. Ioniçoiu, R., Terno, D.R.: Proposal for a quantum delayed-choice experiment. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 230406 (2011)

35. Ma, X.-S., Kofler, J., Zeilinger, A.: Delayed-choice gedanken experiments and their realizations. *Rev. Mod. Phys.* **88**, 015005 (2016)
36. Dieguez, P.R., Guimarães, J.R., Peterson, J.P.S., Angelo, R.M., Serra, R.M.: Experimental assessment of physical realism in a quantum controlled device. *Commun. Phys.* **5**, 82 (2022)
37. IBM Quantum, <https://quantum-computing.ibm.com/>
38. Sajid Anis, MD: et al., Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing (2021)

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Springer Nature or its licensor (e.g. a society or other partner) holds exclusive rights to this article under a publishing agreement with the author(s) or other rightsholder(s); author self-archiving of the accepted manuscript version of this article is solely governed by the terms of such publishing agreement and applicable law.



## 4 ARTIGO 2 - QUANTUM SIMULATION OF THE GENERALIZED-ENTANGLED QUANTUM ERASER, AND THE RELATED COMPLETE COMPLEMENTARITY RELATIONS

IOP Publishing

Phys. Scr. 98 (2023) 035107

<https://doi.org/10.1088/1402-4896/acbach>

### Physica Scripta



#### PAPER

## Quantum simulation of the generalized-entangled quantum eraser and the related complete complementarity relations

RECEIVED  
23 December 2022

REVISED  
26 January 2023

ACCEPTED FOR PUBLICATION  
9 February 2023

PUBLISHED  
21 February 2023

Diego S S Chrysothemos<sup>1,\*</sup>, Marcos L W Basso<sup>2</sup> and Jonas Maziero<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Center for Natural and Exact Sciences, Federal University of Santa Maria, Roraima Avenue 1000, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 97105-900, Brazil

<sup>2</sup> Center for Natural and Human Sciences, Federal University of ABC, States Avenue 5001, Santo André, São Paulo, 09210-580, Brazil

\* Author to whom any correspondence should be addressed.

E-mail: [starkediego@gmail.com](mailto:starkediego@gmail.com), [marcoslwbasso@hotmail.com](mailto:marcoslwbasso@hotmail.com) and [jonas.maziero@ufsm.br](mailto:jonas.maziero@ufsm.br)

**Keywords:** quantum simulation, Mach–Zehnder interferometer, entanglement, quantum eraser, complementarity relations

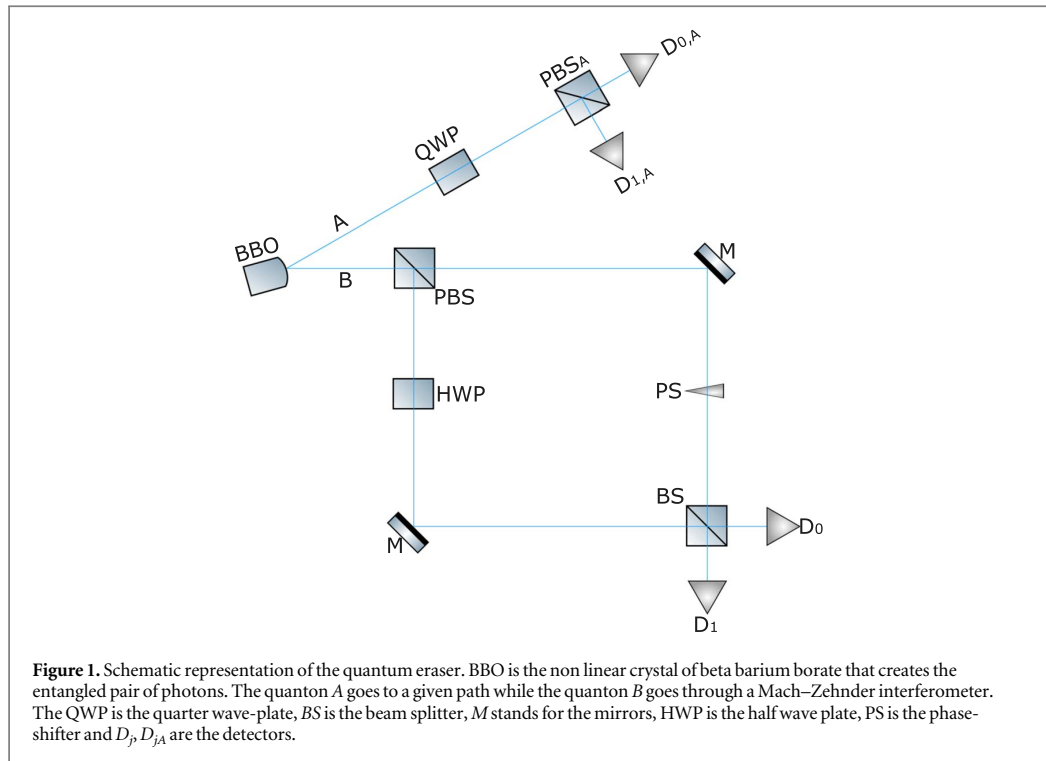
#### Abstract

We utilize IBM's quantum computers to perform a full quantum simulation of the optical quantum eraser (QE) utilizing a Mach–Zehnder interferometer with a variable partially-polarizing beam splitter (VPPBS) at the input. The use of the VPPBS motivates us to introduce the entangled quantum eraser, for which the path information is erased using a Bell-basis measurement. We also investigate the behavior of the wave aspect, i.e., the quantum coherence, as well as the particle character, represented by the predictability and entanglement, as delineated in complete complementarity relations (CCRs). As we show in this article, the utilization of the VPPBS uncover interesting aspects of the QE and CCRs. For instance, we can recover the full wave-behavior by the erasure procedure even when we have only partial knowledge about the path through entanglement.

#### 1. Introduction

The quantum eraser (QE), proposed by Scully and Drühl [1], has been carried out by many authors [2–7] over the last few decades, using several experimental setups, in its normal mode as well as in its delayed choice mode. The main idea of this protocol is that it is possible to manipulate the interplay between the wave-particle duality phenomena using the entanglement between the path of the quantum system (or quanton) in a interferometer and some other degree of freedom. In the context of wave-particle duality phenomena, Bohr's complementarity principle [8] states that the complete manifestation of the wave property destroys the appearance of the particle property of the quanton, where the wave property is revealed in the visibility of the interference pattern (the swings in the probability graph for the Mach–Zehnder interferometer), while the particle nature is manifested by the which-way information that one can obtain by making a measurement (strong or weak) in one of the arms of the interferometer or by entangling the quanton with another auxiliary quanton and by measuring the auxiliary system.

Optical quantum eraser experiments [9] in general involves four qubits. Two photons with two degrees of freedom each (polarization and spatial mode). In this work, the polarization is denoted by  $A$  and  $B$  and the spatial mode by  $A'$  and  $B'$ . Regarding notation,  $|0\rangle$  represents the horizontal spatial mode as well as the horizontal polarization whereas  $|1\rangle$  represents the vertical path as well as the vertical polarization mode. In the QE, which is depicted in figure 1, the entangled pair of photons is created by a non-linear optical crystal, such as beta barium borate (BBO), giving as output the following polarization state:  $|\Psi^+\rangle_{AB} = 2^{-1/2}(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB})$ . Then, the photon  $B$  goes into a Mach–Zehnder interferometer (MZI) and the photon  $A$  goes to another region, where it can pass through a quarter-wave plate (QWP) and a polarizing beam splitter (PBS<sub>A</sub>). The initial state of the system is given by  $|\Psi_1\rangle = |\Psi^+\rangle_{AB}|00\rangle_{A'B'}$ . The quanton  $B$  passes through a PBS. The PBS let pass the photons with horizontal polarization and reflects photons with vertical polarization. With this, the state of the system right after the PBS is given by  $\sqrt{2}|\Psi_2\rangle = (i|01\rangle_{AB}|1\rangle_{B'} + |10\rangle_{AB}|0\rangle_{B'})|0\rangle_{A'}$ , where the reflection causes a phase shift of  $\frac{\pi}{2}$  and thus a phase shift of  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  in the wave function [10, 11]. At this point, it is worth mentioning that the state  $|\Psi_2\rangle$  is genuinely entangled in three degrees of freedom. Later on, this will motivates us to implement



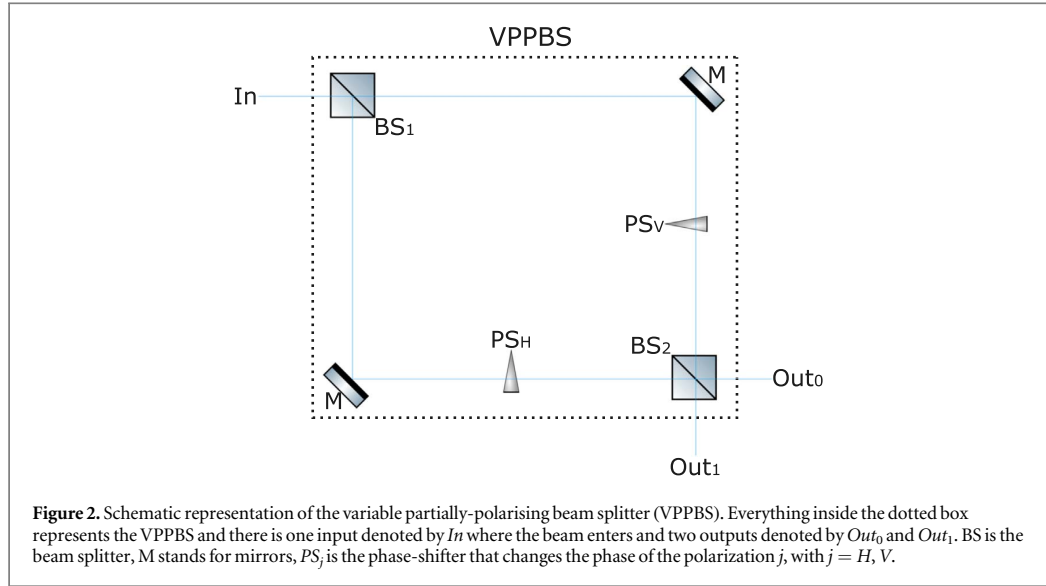
what we will call the entangled quantum eraser (EQE). The half-wave plate (HWP) rotates the polarization in the spatial mode wherein it is placed, such that the state after its action is  $\sqrt{2}|\Psi_3\rangle = (i|01\rangle_{AB'} + |10\rangle_{AB'})|0\rangle_B|0\rangle_{A'}$ . So, the HWP disentangles the polarization of the quanton *B* from the other degrees of freedom. At this point, one can see that if we measure the horizontal-vertical polarization of *A*, the path information about *B* inside the MZI is obtained. Now, if we apply the QWP and the  $PBS_A$  on quanton *A*, the state of system can be written as  $2\sqrt{2}|\Psi_4\rangle = -(|0\rangle_A|0\rangle_{A'}|\psi_+\rangle_{B'} - |1\rangle_A|1\rangle_{A'}|\psi_-\rangle_{B'})|0\rangle_B$ , where we defined  $|\psi_{\pm}\rangle_{B'} = (1 \pm e^{i\phi})|0\rangle_{B'} + i(1 \mp e^{i\phi})|1\rangle_{B'}$ . Finally, by making a projective measure in the basis  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$  and post-selecting the results, the information about the path of the quanton *B* is erased and the path coherence of photon *B* is restored.

Several articles (see e.g. [5, 12–21]) were dedicated to study complementarity relations since the fundamental contributions of de Broglie [22] and Bohr [8]. Recently, it has been shown that duality inequalities and triality equalities can be derived from the basic properties of the quantum density matrix [23–25]. This framework has led to fundamental connections of complete complementarity relations (CCRs) with uncertainty relations [25], entanglement theory [26], and Lorentz invariance [27]. In [28], a CCR was applied to quantitatively understand a QE, analog to that of [1], but also considering partial entanglement of the quanton with the path marker and with an auxiliary system simulating the environment's action.

In this article, we propose a variant to the quantum eraser protocol based on the MZI. We consider a variable partially-polarising beam splitter (VPPBS) that was recently implemented in [29]. With the VPPBS, one can modulate the transmission and reflection of both horizontal and vertical polarization for the quanton *B*, as schematically represented in figure 2. Because of this, as we will see, it is not possible in general to disentangle the polarization of *B* with the polarization of *A*, as we described above. We propose then an entangled quantum eraser, where instead of measuring just the polarization of *A*, one makes a Bell-basis measurement in the polarizations of *A* and *B*. Besides, we make a full quantum simulation of the entangled quantum eraser with VPPBS and we investigate complete complementarity relations in this context. It is worthwhile mentioning that, quite recently, the authors in [30] put forward an experimental setup with three-photon entangled state in which one of the photons is sent into a MZI and the output beam splitter of the MZI is controlled by the quantum state of the second photon, which is entangled with a third photon. Therefore, the reduced quantum state of the second photon is undefined, which implements an undefined setting for the MZI. Even though both works use a tripartite entangled state, the setups are very different.

The remainder of this article is organized in the following manner. In section 2, we describe the VPPBS and use it in the quantum eraser experiment, introducing thus the entangled quantum eraser (EQE). Next, in section 3, we investigate complete complementarity relations in the context of the EQE. In section 4, we use





IBM's quantum computers to simulate the EQE and to verify experimentally our theoretical results. Finally, in section 5, we give our final remarks.

## 2. Quantum eraser with a variable partially polarized beam splitter

In this section, we discuss the entangled quantum eraser (EQE) by considering a variable partially-polarizing beam splitter (VPPBS) at the input of the Mach–Zehnder interferometer (MZI). The VPPBS used here is motivated by the experiments carried out recently in [29]. Let  $T_j$  and  $R_j$  be the transmission and reflection coefficients, respectively, regarding the  $j$ -polarization, where  $j = H, V$  with  $H$  and  $V$  standing for the horizontal polarization and vertical polarization, respectively. Besides,  $T_j$  and  $R_j$  are complex numbers such that  $|T_j|^2$  is the probability of a quantum with polarization  $j$  being transmitted, while  $|R_j|^2$  is the probability of a quantum with polarization  $j$  being reflected. Therefore  $|T_j|^2 + |R_j|^2 = 1$ . The experimental apparatus of the VPPBS is depicted in the figure 2. The coefficients  $T_j$  and  $R_j$  can be expressed as

$$T_j(\varphi_j) = e^{i\varphi_j/2} \cos \frac{\varphi_j}{2}, \quad (1)$$

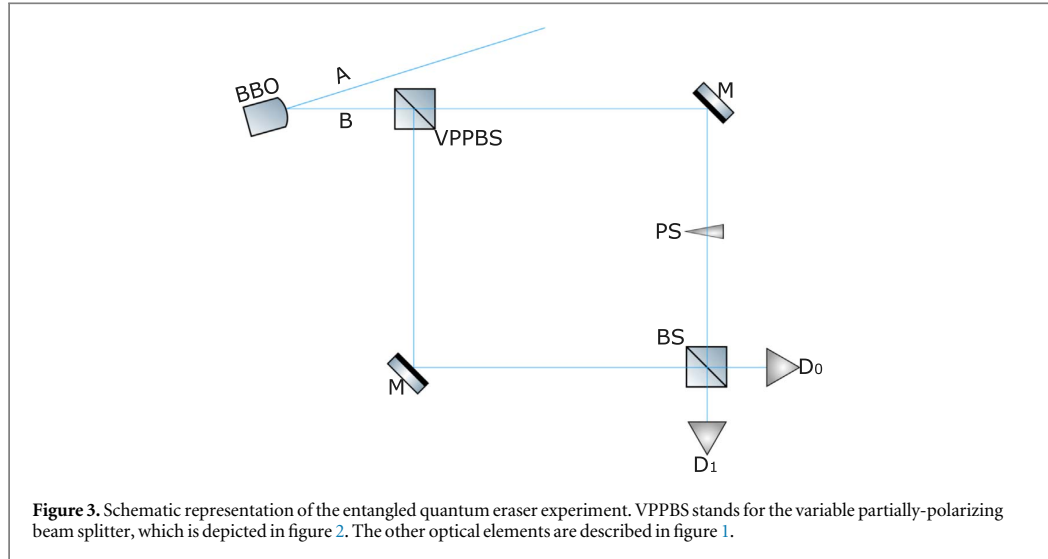
$$R_j(\varphi_j) = ie^{i\varphi_j/2} \sin \frac{\varphi_j}{2}, \quad (2)$$

with  $\varphi_j \in [0, 2\pi]$ . It is worthwhile mentioning that the expressions of  $T_j$  and  $R_j$  are chosen such that  $|T_j|^2$  of our manuscript matches the equation (7) of [29], where the authors first implemented the variably polarizing beam splitter. However, since we are doing the quantum simulation of VPPBS in the IBMQE, we are free to choose how to implement  $T_j$  and  $R_j$  in terms of quantum gates given that the relation  $|T_j|^2 + |R_j|^2 = 1$  is satisfied and  $|T_j|^2$  of our manuscript matches the equation (7) of [29]. Besides, we must observe that equations (1) and (2) do not affect our main theoretical findings.

The unitary transformation performed by VPPBS,  $U_V^{B,B'}(\varphi_H, \varphi_V)$ , on the computational basis for two subsystems, where  $B$  is the polarization of the photon  $B$  and  $B'$  is the path of the photon  $B$ , is given by

$$\begin{aligned} U_V^{BB'}(\varphi_V, \varphi_H) |00\rangle_{BB'} &= -|0\rangle_B (T_H |0\rangle_{B'} + iR_H |1\rangle_{B'}), \\ U_V^{BB'}(\varphi_V, \varphi_H) |01\rangle_{BB'} &= -|0\rangle_B (-iR_H |0\rangle_{B'} + T_H |1\rangle_{B'}), \\ U_V^{BB'}(\varphi_V, \varphi_H) |10\rangle_{BB'} &= -|1\rangle_B (T_V |0\rangle_{B'} - iR_V |1\rangle_{B'}), \\ U_V^{BB'}(\varphi_V, \varphi_H) |11\rangle_{BB'} &= -|1\rangle_B (iR_V |0\rangle_{B'} + T_V |1\rangle_{B'}). \end{aligned}$$

Now, considering the same initial state regarded in section 1,  $|\Psi_1\rangle = |\Psi^+\rangle_{AB} |00\rangle_{A'B'}$ , the state right after the VPPBS in figure 3 is given by



$$\begin{aligned}
 |\Psi_2\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_{AB} (T_V |0\rangle_{B'} - iR_V |1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'} \\
 & -\frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_{AB} (T_H |0\rangle_{B'} + iR_H |1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}.
 \end{aligned} \quad (3)$$

In the setup for the QE, as seen in section 1, the application of the HWP was able to disentangle the polarization state  $B$  from the other degrees of freedom. However, with the VPPBS, given the state in equation (3), this is no longer possible in general since the HWP has the effect of flipping both polarization states, i.e.,  $\text{HWP}|0\rangle = |1\rangle$  and  $\text{HWP}|1\rangle = |0\rangle$ . More specifically, after applying the unitary transformation corresponding to the action of the HWP in the state  $|\Psi_2\rangle$ , the polarizations  $A$  and  $B$  are generally still entangled. This fact motivates us to consider the entangled quantum eraser (EQE), as described in this section.

For the EQE, let us rewrite equation (3) as

$$\begin{aligned}
 2|\Psi_2\rangle = & -|\Psi_+\rangle_{AB} (T_H + T_V) |0\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} \\
 & -i|\Psi_+\rangle_{AB} (R_H - R_V) |1\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} \\
 & + |\Psi_-\rangle_{AB} (T_H - T_V) |0\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} \\
 & + i|\Psi_-\rangle_{AB} (R_H + R_V) |1\rangle_{B'} |0\rangle_{A'},
 \end{aligned} \quad (4)$$

where we used the Bell's states  $|\Psi_\pm\rangle = 2^{-1/2}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ . For instance, one can see that in the limit where the VPPBS is equivalent to the PBS, i.e., for  $T_H = 1$ ,  $T_V = 0$ , we have

$$2|\Psi_2\rangle = [-|\Psi_+\rangle_{AB}(|0\rangle_{B'} - i|1\rangle_{B'}) + |\Psi_-\rangle_{AB}(|0\rangle_{B'} + i|1\rangle_{B'})] |0\rangle_{A'}. \quad (5)$$

After the mirrors and phase-shifter in figure 3, the state is turned to

$$\begin{aligned}
 2|\Psi_3\rangle = & -ie^{i\phi} |\Psi_+\rangle_{AB} (T_H + T_V) |1\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} + |\Psi_+\rangle_{AB} (R_H - R_V) |0\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} \\
 & + ie^{i\phi} |\Psi_-\rangle_{AB} (T_H - T_V) |1\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} - |\Psi_-\rangle_{AB} (R_H + R_V) |0\rangle_{B'} |0\rangle_{A'}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Finally, with the action of the last BS, the state of the system is given by

$$\begin{aligned}
 2|\Psi_4\rangle = & e^{i\phi} |\Psi_+\rangle_{AB} (T_H + T_V) |\ominus\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} + |\Psi_+\rangle_{AB} (R_H - R_V) |\oplus\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} \\
 & - e^{i\phi} |\Psi_-\rangle_{AB} (T_H - T_V) |\ominus\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} - |\Psi_-\rangle_{AB} (R_H + R_V) |\oplus\rangle_{B'} |0\rangle_{A'}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

As expected, in the limit where the VPPBS is equivalent to the PBS with  $T_H = 1$ ,  $T_V = 0$ , one can see that the state above reduces to  $\sqrt{2}|\Psi_4\rangle = (|01\rangle_{AB} |\oplus\rangle_{B'} + e^{i\phi} |10\rangle_{AB} |\ominus\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}$ , where we defined  $|\oplus\rangle := 2^{-1/2}(|0\rangle + i|1\rangle)$  and  $|\ominus\rangle := 2^{-1/2}(|0\rangle - i|1\rangle)$ . Then, by doing a BBM on  $A$  and  $B$  with post-selection, one can recover the wave-behavior of the spatial mode  $B'$  in this limit. As for the general case, from the state above, one can calculate the detection probabilities after making a BBM on  $A$  and  $B$  with post-selection. This calculation will not be displayed here since it's not important for our analysis of the EQE through complete complementarity relations, that will be done in the next section.

### 3. A complementarity view on the entangled quantum eraser

Complete complementarity relations (CCRs) arise in the context of the quantification of Bohr's complementarity principle and allow us to fully characterize a quanton by taking into account not only the predictability and quantum coherence, usually referred as the local aspects of the quanton, but also its quantum correlations with other systems. As discussed in [21, 31], both the predictability and entanglement are linked with the particle behavior of the quanton, such that, when taken together, they can express the path distinguishability in an interferometer, whereas the quantum coherence captures the wave behavior of the quanton. Thus, in the light of CCRs, since we have a tripartite pure entangled quantum system, the path degree of freedom of the quanton  $B'$  in the entangled quantum eraser satisfies the restriction [24]:

$$P_{hs}(\rho_{B'}) + C_{hs}(\rho_{B'}) + S_m(\rho_{B'}) = \frac{d_{B'} - 1}{d_{B'}}, \quad (8)$$

where  $\rho_{B'}$  is the reduced density matrix of the subsystem  $B'$  and  $d_{B'} = 2$  is the dimension of  $B'$ ,  $P_{hs}(\rho_{B'}) = \sum_j (\rho_{j,j}^{B'})^2 - 1/d_{B'}$  and  $C_{hs}(\rho_{B'}) = 2\sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}^{B'}|^2$  are the predictability and the Hilbert-Schmidt quantum coherence, respectively, while  $S_m(\rho_{B'}) := 1 - \text{Tr}(\rho_{B'}^2)$  is an entanglement monotone, as shown in [26], that in this case measures the entanglement between  $B'$  with the rest of the system as a whole. Besides, as shown in [27], equation (8) is invariant under global unitary operations which implies that such relation remains valid under unitary evolution and, therefore, can be applied in each step of the interferometer.

Inside of the MZI, for the global state given by equation (3), we can obtain the quantities involved in the CCR given by equation (8), and we use them to analyse the EQE from the perspective of CCRs. Without measurement and post-selection, the predictability is given by

$$P_{hs}(\rho_2^{B'}) = \frac{1}{4}(|T_H|^2 + |T_V|^2)^2 + \frac{1}{4}(|R_H|^2 + |R_V|^2)^2 - \frac{1}{2}. \quad (9)$$

For the quantum coherence, it follows that

$$C_{hs}(\rho_2^{B'}) = \frac{1}{2} |T_H R_H^* - T_V R_V^*|^2. \quad (10)$$

while the entanglement monotone is given by

$$S_m(\rho_2^{B'}) = 1 - \frac{1}{4}(|R_H|^2 + |R_V|^2)^2 - \frac{1}{4}(|T_H|^2 + |T_V|^2)^2 - \frac{1}{2} |T_H R_H^* - T_V R_V^*|^2. \quad (11)$$

These general relations are shown graphically in figures 4(A)–(C).

Starting from the state in equation (3), by making a Bell's basis measurement (BBM) with post-selection, the path state  $B'$  is reduced to

$$N_{\Psi_{\pm}} |\psi_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}\rangle = (T_H \pm T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H \mp R_V) |1\rangle_{B'},$$

where the normalization is given by  $|N_{\Psi_{\pm}}|^2 = |T_H \pm T_V|^2 + |R_H \mp R_V|^2$ . As we are making a projective measurement in a maximally entangled basis of the systems  $A, B$ , after the measurements there is no more entanglement between  $B'$  and the other degrees of freedom. So, the complete complementarity relation is reduced to

$$P_{hs}(\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) + C_{hs}(\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Considering that the density matrix of the corresponding reduced state is given by

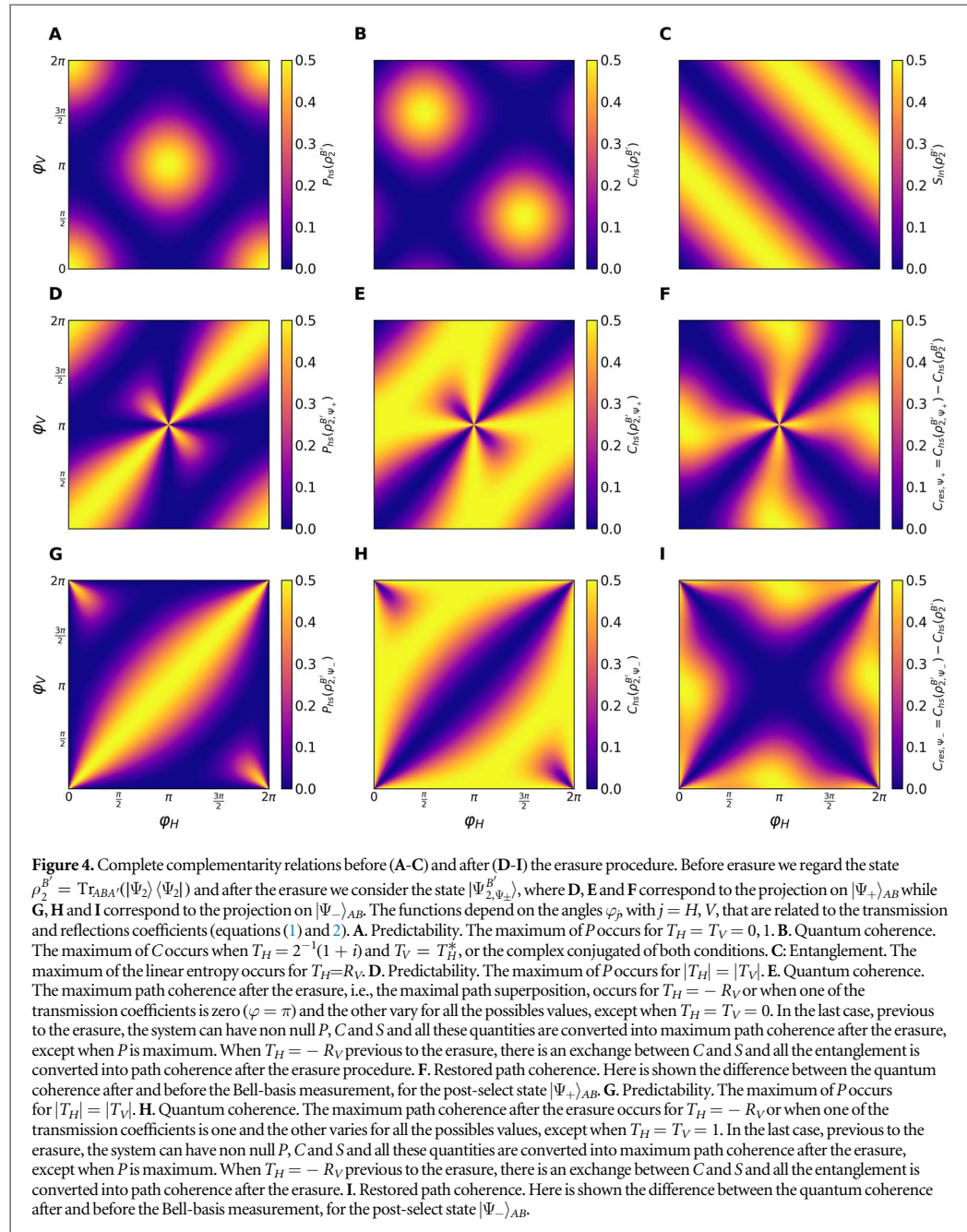
$$\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'} = \frac{1}{|N_{\Psi_{\pm}}|^2} \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

where  $\rho_{00} = |T_H \pm T_V|^2$ ,  $\rho_{11} = |R_H \mp R_V|^2$  and  $\rho_{01} = -i(T_H \pm T_V)(R_H^* \mp R_V^*)$ , the predictability can be written as

$$P_{hs}(\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) = \frac{1}{|N_{\Psi_{\pm}}|^4} |T_H \pm T_V|^4 + \frac{1}{|N_{\Psi_{\pm}}|^4} |R_H \mp R_V|^4 - \frac{1}{2}. \quad (14)$$

For the quantum coherence, it follows that

$$C_{hs}(\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) = \frac{2 |T_H \pm T_V|^2 |R_H \mp R_V|^2}{|N_{\Psi_{\pm}}|^4}. \quad (15)$$



These general relations are shown graphically in figures 4(D)–(I), where it is also shown the difference between the quantum coherence after and before the erasure procedure (BBM plus post-selection).

From figure 4, we see that, when  $P$  and  $S$  are non null and  $C = 0$  before the BBM, all the entanglement is converted into predictability by the erasure procedure. On the other hand, when  $P$  and  $C$  are nonzero and  $S = 0$  before the BBM, the erasure procedure does not change these quantities. The more interesting case happens when  $C$  and  $S$  are the only non null quantities. In this case, characterized by  $T_H = -R_V$  and  $R_H = -T_V$ , there is an initial trade off relation between  $C$  and  $S$  and all the entanglement is converted into path coherence by the erasure procedure.

The maximum path coherence, for the projection on  $|\Psi_{+}\rangle$ , also occurs after the erasure when one of the transmission coefficients is zero ( $\varphi_j = \pi$ , for some  $j = H, V$ ) and the other coefficient runs in the interval  $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ . The point  $\varphi_H = \varphi_V = \pi$  should be analysed more carefully. This point corresponds to both transmission coefficients being zero and  $|R_j| = 1$  for  $j = H, V$ . Therefore, after the VPPBS in figure 3, the state of

the system is given by  $|\Psi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB})|1\rangle_{B'}|0\rangle_{A'}$ , representing a state in which the path degree of freedom  $B'$  is well defined, with predictability being maximum. Besides, one can see that  $B'$  is not entangled with the others degree's of freedom, which implies that the BBM on  $A$  and  $B$  will not affect the state of  $B'$ . Hence, one can see that predictability is maximum, while  $C = 0$ , before and after the BBM, what is expected since the VPPBS reflects the quanton for both polarizations and with probability equal to unity. The same analysis can be done for the points  $\{(\varphi_H, \varphi_V)\} = \{(0, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi)\}$ . Another observation to make here is that, when the state of  $B'$  after the VPPBS and before the BBM corresponds to a pure separable state, the BBM on  $A$  and  $B$  will not affect the state of  $B'$ . This will always happen if the predictability or the quantum coherence of  $B'$  after the VPPBS is maximum. For the projection on  $|\Psi_-\rangle$ , a similar analysis can be done.

Let us proceed with a more careful analysis of some specific cases that appear in this setup. First, the limiting case corresponding to  $T_H = 1$  and  $T_V = 0$ , such that the state  $|\Psi_2\rangle$  with this set of parameters is given by equation (5). Thus  $P_{hs}(\rho_2^{B'}) = C_{hs}(\rho_2^{B'}) = 0$  and  $S_{in}(\rho_2^{B'}) = 1/2$ . In other words, we have only path information through entanglement. After a projective measurement on the Bell's basis of  $AB$  and post-selection, we obtain one of the following path states

$$|\psi_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{B'} \pm i |1\rangle_{B'}). \quad (16)$$

Therefore, we recover the wave behavior since  $P_{vh}(\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) = 0$  and  $C_{hs} = (\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}) = 1/2$ . This is the usual quantum eraser.

As we mentioned above, it is possible to find out a set of parameters for which only two of the following resources  $P$ ,  $C$  and  $S$  are nonzero. We highlight three situations wherein interesting behaviors are observed after the erasure process. For instance, before the BBM and post-selection, one can see that, when  $T_H = T_V^*$  and  $R_H = R_V^*$ , only  $P$  and  $C$  are nonzero. In this case, the corresponding state takes the form

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_{AB} (T_V |0\rangle_{B'} - iR_V |1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_{AB} (T_V^* |0\rangle_{B'} + iR_V^* |1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}, \end{aligned} \quad (17)$$

and the corresponding path reduced state reads

$$\rho_2^{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 |T_V|^2 & \rho_{01} \\ \rho_{10} & 2 |R_V|^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

where  $\rho_{01} = \rho_{10} = i(T_V R_V^* - T_V^* R_V)$ . So, if  $|T_V| = 0$  or  $1$  we have maximum predictability. On the other hand, if  $|T_V| = |R_V| = 1/\sqrt{2}$  we obtain maximum quantum coherence. After the BBM and post-selection, the path state is collapsed to  $|\psi_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}\rangle = \frac{1}{N_{\Psi_{\pm}}} [(T_V^* \pm T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_V^* \mp R_V) |1\rangle_{B'}]$ . From this reduced state, one can easily see that nothing happens, i.e., the same behavior remains before and after the procedure. For instance, if  $|T_V| = 0$  or  $1$ ,  $P$  keeps its maximum value and if  $|T_V| = |R_V| = 1/\sqrt{2}$  then  $C$  have the same value after and before the erasure procedure.

The second situation is when only  $P$  and  $S$  are non null. This condition is satisfied with  $T_H = T_V = T$ . In this case, the state  $|\Psi_2\rangle$  is reduced to

$$|\Psi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} T (|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}) |0\rangle_{B'} |0\rangle_{A'} + \frac{i}{\sqrt{2}} R (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) |1\rangle_{B'} |0\rangle_{A'}, \quad (19)$$

where the corresponding reduced path density matrix reads

$$\rho_2^{B'} = \begin{bmatrix} |T|^2 & 0 \\ 0 & |R|^2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

One can see that if  $|T| = 0$  or  $1$ , there is maximum path information. For  $|T_V| = |R_V| = 1/\sqrt{2}$  there is maximum entanglement. After the erasure procedure, the state is given by

$$|\psi_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}\rangle = \frac{(T \pm T) |0\rangle_{B'} + i(R \mp R) |1\rangle_{B'}}{\sqrt{|T \pm T|^2 + |R \mp R|^2}}, \quad (21)$$

and, from equation (14), one can see that all the entanglement is converted into predictability. This can be interpreted as follows. Once the predictability is related to the *a priori* path-information of the experimentalist [13, 14], the information that is still encoded in the entanglement between  $B'$  and the rest of the system is then learned by the experimentalist.

The last situation considered here is when only  $S$  and  $C$  are nonzero before the BBM. This occurs for  $T_H = -R_V$  and  $R_H = -T_V$  such that the state before the BBM is given by

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_{AB} (-T_V |0\rangle_{B'} + iR_V |1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'} + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_{AB} (iT_V |1\rangle_{B'} + R_V |0\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}, \quad (22)$$

with the corresponding path reduced density matrix given by

$$\rho_2^{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

where  $\rho_{01} = \rho_{10} = i(T_V R_V^* - R_V T_V^*)$ . Thus, one can see that the maximum entanglement occurs when  $|T_V| = 0$  or  $1$  and the maximal coherence is obtained for  $|T| = |R| = 1/\sqrt{2}$ . After the BBM and post-selection the path state takes the form

$$|\psi_{2,\Psi_{\pm}}^{B'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_V \mp R_V) |0\rangle_{B'} - \frac{i}{\sqrt{2}} (T_V \pm R_V) |1\rangle_{B'}, \quad (24)$$

such that it is straightforward to see that the corresponding reduced density matrix is given by

$$\rho_{2,\Psi_{\pm}}^{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

where  $\rho_{01} = i(T_V \mp R_V)(T_V^* \pm R_V^*)$ . For all values of  $T_V$  and  $R_V$ , except when coherence is already maximal, it is possible to convert all entanglement into coherence by the erasure procedure. Therefore, we can recover the full wave-behavior by the erasure procedure even when we have only partial knowledge about the path through entanglement. This can be seen analytically by making  $T_H = -R_V$  and  $R_H = -T_V$  in equation (15) and using the definition of the coefficients expressed by the equations (1) and (2). This is one of the cases that will be experimentally verified in the next section.

#### 4. Quantum simulation of the entangled quantum eraser on IBMQ

In this section, we provide a proof-of-principle experimental verification of our theoretical results using the IBM's quantum computer (IBMQ) [32]. As seen throughout the article, the EQE is very rich from the perspective of complete complementarity relations. In view of this, we choose some interesting situations for experimental verification. To do this, we implement, as depicted in the figure 5, the optical elements of the EQE through unitary gates as follows. The qubit  $q_0$  is the subsystem  $A$ , the qubit  $q_1$  is the subsystem  $B$  and the qubit  $q_2$  is the subsystem  $B'$ . The S.Prepare. box stands for state preparation, and prepares the following Bell state  $|\Psi_+\rangle$ . For S.

Prep., we need to apply the Hadamard gate, where  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , to the  $q_0$  qubit. After that, the controlled  $X$  gate (CNOT) ( $X$  is the Pauli matrix, the NOT gate), where the control is the qubit  $q_0$  and the target is the qubit  $q_1$ . Finally, the  $X$  gate is applied on the qubit  $q_1$ . The VPPBS, depicted on figure 2, can be constructed as follows. The BS is implemented by  $U_{BS}^{B'} = SHS$ , where  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ . The mirrors' combined action is implemented using

$Y^{B'}Z^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ , where  $Y$  and  $Z$  are the usual Pauli matrices. The controlled phase shift for the vertical

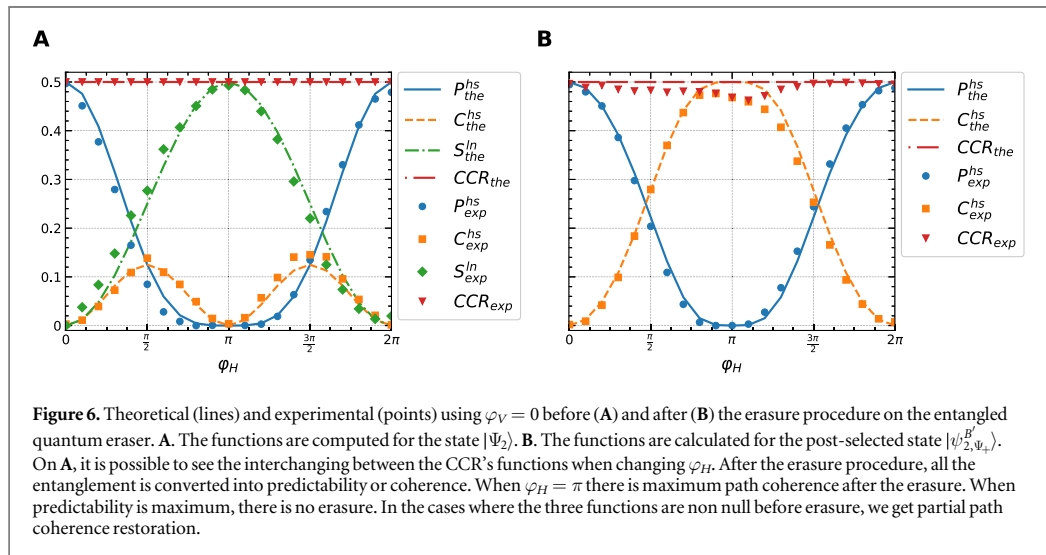
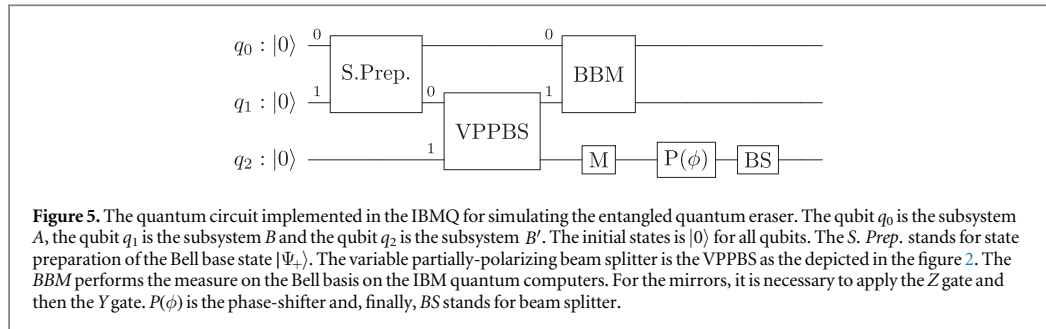
polarization is implemented through  $PS_V = CP_{B,B'}(\varphi_V) = |0\rangle_B \langle 0| \otimes \mathbb{I}_{B'} + |1\rangle_B \langle 1| \otimes P_{B'}(\varphi_V)$ , where the first subscript is the control ( $q_2$ ) and the second is the target ( $q_1$ ). For the horizontal polarization we have the same gate structure, but we need to apply the gate  $X$  in the systems  $BB'$  as follows:

$PS_H = (X_B \otimes X_{B'}) CP_{B,B'}(\varphi_H) (X_B \otimes X_{B'})$ , with the same structure for the control and the target of the  $PS_V$ , where  $PS = P(\phi) = |0\rangle \langle 0| + e^{i\phi} |1\rangle \langle 1|$  is the phase gate. The action of the unitary matrix for the VPPBS is given by

$$U_V^{BB'}(\varphi_H, \varphi_V) = - \begin{bmatrix} T_H & -iR_H & 0 & 0 \\ iR_H & T_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_V & iR_V \\ 0 & 0 & -iR_V & T_V \end{bmatrix}, \quad (26)$$

where  $T_j$  and  $R_j$  are given by the equations (1)–(2). Finally, the BBM gate performs the measurement on the Bell's basis. In order to implement the BBM gate, we need to apply the CNOT with the control as  $q_0$  and the target as  $q_1$  and then apply  $H$  on the qubit  $q_0$ . The BBM action allows us to perform the Bell basis measurement on IBM quantum computers.

There are many possible experiments that could be done depending on different sets of parameters used in the VPPBS. We performed experiments in only two situations and the results are presented in figures 6 and 7. We believe that these experiments summarize some of main aspects of the EQE introduced in this article. For these experimental results, we used IBM's Quantum Experience Lima quantum chip.



Although we present the complete experimental apparatus of the EQE (figure 5), for the production of experimental results we performed two steps for each one of them. In the first step, we performed the state tomography only for the qubit  $q_2$  before the mirror. In this way we obtain the path density operator for the photon B and with this we can calculate the functions of equation (8) before the erasure. In the second step, we insert the BBM and perform the state tomography on the qubits  $q_0$  and  $q_1$  after the BBM and on the qubit  $q_2$  before M. Thus, we obtain the density operator, but now for the whole system, and we project it in the desired state, in this case for Bell base state  $|\Psi_+\rangle$ . We normalize the obtained path matrix and so we can calculate the functions of equation (12) after the erasure procedure. Furthermore, we used the Qiskit tools for measurement error mitigation [33], which improved substantially the experimental results.

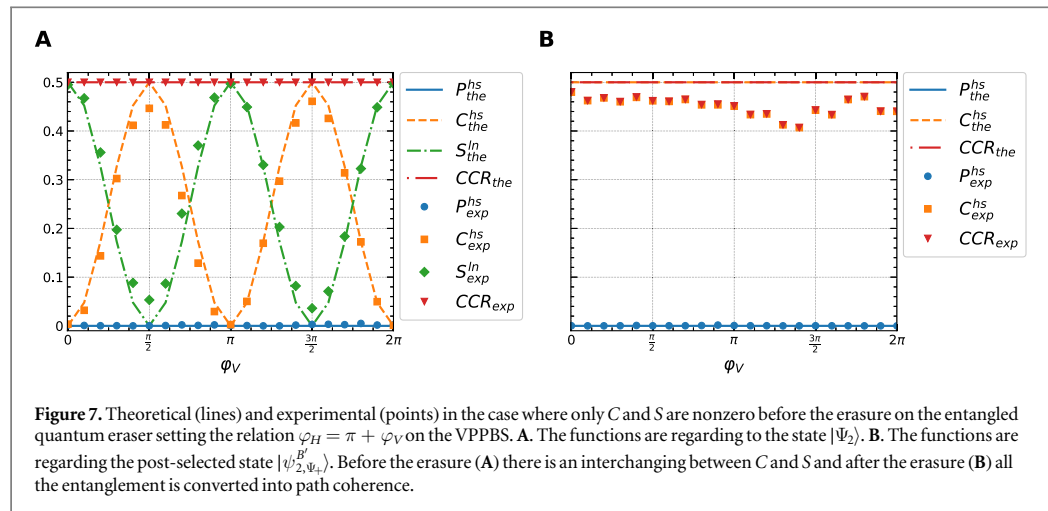
For the first experiment considered, in figure 6, we fix the  $\varphi_V = 0$  and vary  $\varphi_H$ , regarding to the state  $|\Psi_2\rangle$ . Before the erasure (6.A) there is an interchange between all the CCR's functions for different values of  $\varphi_H$ . After the erasure procedure (figure 6(B)) all the entanglement is converted into predictability or coherence with respect to the post-selected state  $|\psi_{2,\Psi_+}^{B'}\rangle$ . When  $\varphi_H = \pi$ , there is maximum path coherence after the erasure. When the predictability is maximum there is no erasure, while in the cases where the three functions are non null initially, we obtain partial erasure.

In the next case, figure 7, we choose the case discussed at the end of section 3. Here there is a relationship between the two angles given by  $\varphi_H = \pi + \varphi_V$ . As can be seen, the predictability is always null and we only have the interplay between C and S before the erasure procedure. After the erasure all entanglement is converted to path coherence.

## 5. Conclusions

In this article, we have investigated the quantum eraser for a Mach-Zehnder interferometer (MZI) with a variable partially-polarizing beam splitter (VPPBS) at the input. We showed that because of the VPPBS, one





cannot, in general, untangle the polarization of the quanton going through the MZI from its path and the polarization of the other photon. This motivated us to introduce the entangled quantum eraser (EQE), for which the path information erasure is performed via a Bell's basis measurement followed by post-selection. We studied this system from the complete complementarity relations perspective, elucidating the machinery of the quantum eraser as a function of the parameters of the VPPBS. We showed that although the EQE typically increases the path coherence, it is not in general maximal at the end of the protocol. As we found, this is so because the initial entanglement can also be transformed into predictability of the post-measurement state. For some specific parameters of the VPPBS, we have discussed in details situations where only two of the three CCR functions are non null. When only  $P$  and  $C$  are nonzero before the erasure, nothing happens after the erasure procedure. When only  $P$  and  $S$  are non-null before the erasure, after the erasure we are left only with path information through  $P$ . Finally, when we have only  $C$  and  $E$  different from zero initially (this last case was verified experimentally as depicted in figure 7), all the entanglement is converted into path coherence after the erasure. Finally, we used IBM's quantum computers as a quantum simulator of the optical EQE. We applied it for some interesting cases that illustrate our new setup. Our simulation results agreed quite well with the theoretical predictions. Even with the high noise rates of nowadays quantum computers, our experimental results matched fairly well with the theory. We leave as an open problem the experimental implementation of EQE in the optical setup, once in this scenario one would have to perform a Bell-basis measurement in the polarization degree of freedom of both photons without interfering with the path state of one of them nor affecting the system global state.

### Acknowledgments

This work was supported by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), Grant No. 88 887.649 600/2021-00, by the São Paulo Research Foundation (FAPESP), Grant No. 2022/09496-8.3, by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq), Grant No. 309 862/2021-3, and by the National Institute for the Science and Technology of Quantum Information (INCT-IQ), Grant No. 465 469/2014-0.

### Data availability statement

The data that support the findings of this study are available upon reasonable request from the authors.

### ORCID iDs

Diego S S Chrysothemis <https://orcid.org/0000-0002-6074-4488>  
 Marcos L W Basso <https://orcid.org/0000-0001-5456-7772>  
 Jonas Maziero <https://orcid.org/0000-0002-2872-986X>



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, apresentamos dois trabalhos produzidos ao longo do programa de mestrado. Os trabalhos foram desenvolvidos sob a perspectiva das RCs e a adequação delas em contextos experimentais mais amplos do IMZ e do AQ. No Capítulo 3, consideramos um IMZ com dois DFGs e verificamos se as RCs envolvendo visibilidade interferométrica e coerência quântica conseguem expressar de forma adequada o comportamento esperado do quanton dentro do IMZ. No Capítulo 4, modificamos o AQ padrão e construímos o AQE considerando o VPPBS, dispositivo que cria superposição de caminho entre as polarizações de entrada no IMZ de um dos fótons do par emaranhado. Essa configuração amplia as opções de análise pelas RCCs, produzindo situações em que há, inclusive, apagamento parcial da informação de caminho contida antes do processo de apagamento. Para cada um desses trabalhos, realizamos experimentos nos computadores quânticos da IBM para verificarmos as nossas previsões teóricas.

No Capítulo 3, consideramos o IMZ com dois DFGs. Esse dispositivo permite controlar a probabilidade que os fótons possuem em ser transmitido e refletido na entrada e na saída do IMZ. Construímos os estados com base na ação gerada pelas matrizes unitárias desde o estado inicial e, após o segundo DFG, obtivemos as probabilidades de detecção em cada detector pela regra de Born. Utilizando a definição usual de visibilidade interferométrica (presente em livros texto, como em (AULETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009), e nos trabalhos de (GREENBERGER; YASIN, 1988; ENGLERT, 1996)) obtivemos duas expressões de visibilidade, uma para o detector  $D_0$  e outra para o detector  $D_1$ . Em primeira análise, vimos que as visibilidades das Eqs. (8) e (9) são distintas e dependem explicitamente dos coeficientes de transmissão e reflexão de ambos os divisores de feixes. Considerando o segundo DFG como sendo balanceado (50:50 nas taxas de transmissão e reflexão) as visibilidades são iguais e resultam na expressão da Eq. (2.80) da seção 2.2 como era de se esperar. Na Fig. 2 é possível perceber que as expressões, em geral, não se comportam de forma semelhante. Escolhemos a visibilidade da Eq. (8) e começamos a analisar algumas situações. Consideramos, primeiramente, que os dois DFGs modulam  $T$  e  $R$  de forma combinada, tal que  $T_1 = T_2 = T$  e  $R_1 = R_2 = R$ . Substituindo essa condição na Eq. (8), percebemos que a visibilidade é sempre constante e igual a um, ou seja, há, pela expressão, informação de visibilidade máxima e independente dos valores de  $T$  e  $R$ . Porém, esse resultado é inconsistente quando consideramos  $T \gg R$ . Nesse

caso, a informação de caminho é presente quase na totalidade, tal que esperaríamos  $\mathcal{P} \gg \mathcal{V}$  e não o contrário, muito menos zero como refletido pela expressão de  $\mathcal{V}_0$ . O melhor resultado seria com a utilização da expressão de  $\mathcal{V}_1$ , mas essa seria uma escolha aleatória e sem embasamento teórico. Vale salientar que  $\mathcal{V}_1$  apresenta problemas semelhantes quando consideramos que os dois DFGs modulam  $T$  e  $R$  de forma combinada, tal que  $T_1 = R_2$  e  $R_1 = T_2$ . Outra situação ocorre quando o primeiro DFG é balanceado e o DFG<sub>2</sub> é livre para variar, sendo assim,  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 2T_2R_2$ , ou seja, ambas expressões são iguais. Mas, se o DFG<sub>1</sub> é balanceado, sabemos que a visibilidade deveria ser sempre máxima e independente de qual detector é considerado, porém, pelas expressões, esses resultados podem variar entre zero e um. Também consideramos um estado inicial tal que  $|\psi_0\rangle = |+\rangle$  e deixamos os dois divisores de feixes variarem livremente. Por meio da Eq. (15), as expressões para as visibilidades nos informam que  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 2T_2R_2$ , porém é possível verificar que há sempre superposição de caminho e independe dos valores de  $T_1$  e  $R_1$ , diferentemente do que obtivemos pelas expressões. É evidente que  $\mathcal{V}_0$  e  $\mathcal{V}_1$ , no caso em que  $T_2^2 = R_2^2 = 1/2$ , retomam a análise usual feita na seção 2.4.1 do IMZ apresentado na seção 2.2, mas apenas como um caso particular. Para finalizar o trabalho, consideramos o caso em que  $T_1 = T_2 = T$  e  $R_1 = R_2 = R$  e realizamos o experimento nos computadores quânticos da IBM. Na Fig. 5, apresentamos os dados para diferentes valores de  $\theta$ . No gráfico, podemos notar que a visibilidade, tanto teórica quanto experimental, apresentam um valor próximo a um (saturando a RC). Por outro lado, vemos a alternância entre  $C$  e  $P$  como era de se esperar para o comportamento do quanton dentro do IMZ nessas condições. Em linhas gerais, nesse trabalho buscamos mostrar que a RC envolvendo visibilidade interferométrica falha em quantificar a DOP dos fótons dentro de um IMZ em contextos mais gerais mesmo para sistemas de duas dimensões, por outro lado, as RCs envolvendo coerência quântica fornecem uma análise adequada para o comportamento dual da natureza esperado nesse mesmo contexto.

No Capítulo 4, ampliamos o que apresentamos na seção 2.2 sobre o AQ. Na Fig. 2.2 do Capítulo do 2, apresentamos o aparato padrão do AQ. Nesse novo cenário, trocamos o DFP pelo VPPBS e removemos a PMO. O VPPBS produz superposição de caminho das polarizações para o fóton  $B$ . Por conta da superposição, a PMO acaba por perder sua funcionalidade original de desemaranhar a polarização do fóton  $B$  e tornar esse grau de liberdade separável. Para contornar essa situação, reescrevemos a polarização dos dois fótons em termos da base de Bell e renomeamos esse aparato de AQE. Agora não fazemos mais a medida no grau de liberdade da polarização de  $A$ , precisamos realizar medidas e pós-seleção na polarização de ambos os fótons. Diferente do AQ, o AQE acaba sendo muito mais rico na análise por meio das RCCs. Para essa análise, consideramos a RCC de Hilbert-Schmidt, por possuir um suporte matemático mais simples para obtenção das funções analíticas. Na Fig. 4,

construímos os gráficos das RCCs pré (Fig. 4 de **A-C**) e pós-apagamento para os dois estados de Bell possíveis,  $|\Psi_+\rangle$  (Fig. 4 de **D-F**) e  $|\Psi_-\rangle$  (Fig. 4 de **G-I**). Nas Fig. 4 **F** e **I**, apresentamos o gráfico de coerência efetivamente produzido pós processo de apagamento. Cabe destacar que sempre que há previsibilidade máxima antes do apagamento, haverá, necessariamente, previsibilidade máxima pós-apagamento, pois o estado é totalmente separável quando se consideram esses casos particulares. Em situações após o apagamento, como não há emaranhamento nessa condição (uma vez que só temos o quanton de caminho do fóton  $B$  - por conta das projeções), o emaranhamento é totalmente convertido em previsibilidade ou coerência de caminho. Por meio desses gráficos é possível ainda identificar regiões onde temos apenas duas das três funções da RCC pré-apagamento. Quando temos apenas  $P$  e  $C$ , situação obtida quando  $T_H = T_V^*$  e  $R_H = R_V^*$ , todo o comportamento evidenciado antes do apagamento é reproduzido após o apagamento, ou seja, nenhum tipo de conversão de um recurso quântico em outro é observado. Outra situação é quando temos apenas  $P$  e  $S$ , quando  $T_H = T_V = T$ , e, nesse caso, há conversão de todo emaranhamento em previsibilidade após o apagamento. E a última situação é com  $C$  e  $S$ , obtida por meio de  $T_H = -R_V$  e  $R_H = -T_V$ . Nesse caso, todo o emaranhamento é convertido em coerência de caminho. Esse é o caso em que há, efetivamente, toda a conversão de informação de caminho em superposição de caminho após o apagamento. Para a projeção em  $|\Psi_+\rangle$ , há superposição máxima quando fixamos um dos ângulos do VPPBS em  $\pi$  e o outro é livre para variar e o ponto singular ocorre quando os dois ângulos estão com o valor de  $\pi$ . Para a projeção em  $|\Psi_-\rangle$ , a situação de superposição máxima com ponto singular é quando um dos ângulos é fixo em zero e outro é livre para variar e os pontos singulares ocorrem em  $[0, 0]$ ,  $[0, 2\pi]$ ,  $[2\pi, ]$ ,  $[2\pi, 2\pi]$ . Nas duas situações há máxima superposição de caminho após o apagamento, enquanto, antes do apagamento é possível obter informação parcial das três funções da RCC. A singularidade ocorre justamente onde há máxima previsibilidade antes do apagamento e, como já mencionado, nessas situações o vetor de estado é totalmente separável no grau de liberdade de caminho. Por fim, selecionamos dois casos que consideramos serem os mais adequados para refletir a dinâmica dos recursos quânticos por meio de experimentos nos computadores quânticos da IBM. Na Fig. 6, fixamos  $\varphi_V = 0$ , variamos  $\varphi_H$  e consideramos apenas a projeção em  $|\Psi_+\rangle$ . Aqui, antes do apagamento, há valores não nulos para todas as funções e, após o apagamento, todo o emaranhamento é convertido em previsibilidade e coerência de caminho. Somente em  $\varphi_H = \pi$  ocorre todo o apagamento da informação de caminho e conversão em coerência de caminho. Na Fig. 7, consideramos o caso em que temos só  $C$  e  $S$ , com previsibilidade nula para todos os valores. Essa situação é obtida quando  $T_H = -R_V$  e  $R_H = -T_V$  ( $\varphi_H = \pi + \varphi_V$ ). Antes do apagamento, temos a alternância entre  $C$  e  $S$  para diferentes valores de  $\varphi_V$ . Nessa situação, após o apagamento, há máxima conversão de

emaranhamento em  $C$ , ou seja, há apagamento total da informação de caminho para essa relação entre os ângulos  $\varphi_H$  e  $\varphi_V$ . Em síntese, o AQE nos fornece um amplo suporte de análise por meio das RCCs uma vez que podemos ajustar os parâmetros de entrada no VPPBS por meio dos parâmetros  $\varphi_j$ . Com base nas funções das RCCs antes e após o apagamento, construímos os gráficos em cada situação e analisamos analiticamente casos distintos. Além de toda a análise analítica e discussão, apontamos os parâmetros para os casos em que temos apenas  $P$  e  $S$  ( $C = 0$ ),  $P$  e  $C$  ( $S = 0$ ) e  $C$  e  $S$  ( $P = 0$ ). Por fim, selecionamos dois casos que acreditamos que contempla de forma mais geral todo o trabalho desenvolvido para implementar nos CQs. O primeiro deles foi fixando o ângulo  $\varphi_V = 0$  e o outro caso escolhido é onde temos apenas as funções  $C$  e  $S$  envolvidas na RCC.

Em ambos os trabalhos, os resultados experimentais possuem certo desvio do valor absoluto esperado para as funções da RCC por conta dos ruídos presentes e a interação com o ambiente nos sistemas dos CQs, mas, apesar disso, obtivemos resultados satisfatórios com a utilização da mitigação de erros disponível no pacote de programação dos computadores quânticos da IBM (Qiskit). Especificamente no segundo trabalho, a RCC antes do apagamento satura como deveria ocorrer para um caso global puro. No caso após o apagamento, como nenhum sistema é de fato isolado perfeitamente do resto do universo, há quantificação disponível de emaranhamento entre o sistema local e o ambiente, ocasionando assim uma diminuição da RCC após o apagamento e uma atenuação das funções de  $P$  e  $C$ .

## 5.2 PERSPECTIVAS PARA O PROGRAMA DE DOUTORADO

Para o programa de doutorado, buscaremos dar continuidade no estudo de aspectos fundamentais de MQ por meio das RCCs. Há um gama de opções, de certa forma encaminhadas, mas que exigem um aprofundamento, principalmente, em relação a sistemas multipartidos.

Uma possível linha de pesquisa seria a extensão do trabalho “Quantitative wave-particle duality relations from the density matrix properties” (Ref. (BASSO; CHRY-SOSTHEMOS; MAZIERO, 2020)) para sistemas de muitos corpos. A ideia aqui seria encontrar formas de estendermos o que já fizemos para o caso de sistemas unipartidos, mas para sistemas multipartidos. Pretendemos nos basear em (DITTEL et al., 2021), onde os autores desenvolveram análises sob a perspectiva das RCs de sistemas multipartidos considerando bósons e férmions. Sendo assim, tomar como base esse trabalho pode ser a peça-chave para mostrar que as RCs de sistemas multipartidos também podem ser obtidas diretamente dos postulados básicos da MQ.

Outra possibilidade seria estender o protocolo de swap de emaranhamento para qubits dos trabalhos (MAZIERO; BASSO; CÉLERI, 2023; BASSO; MAZIERO, 2022), bem como para outros protocolos de comunicação da literatura. O emaranhamento é uma operação elementar para implementação de comunicação quântica e o swap de emaranhamento é um protocolo para realizar tal operação. O protocolo de swap de emaranhamento original possui Charlie compartilhando dois pares de qubits emaranhados. Um deles é compartilhado com Alice e o outro compartilhado com Bob. Charlie, então, realiza uma medida na base de Bell e faz com que agora Alice e Bob passem a compartilhar um par de qubits maximamente emaranhados. Nesses trabalhos, os autores consideraram sistemas parcialmente emaranhados e analisaram o comportamento da previsibilidade e da coerência pré e pós a realização do protocolo.

Há a possibilidade de investigar trabalhos que busquem mostrar violações das RCs como o experimento de Afshar (AFSHAR, 2005). Acreditamos que, uma vez que a MQ é uma das teorias mais precisas que a humanidade já produziu, essas violações não ocorram por conta dos resultados que obtivemos na Ref. (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020). Nesse trabalho mostramos que as RCs são uma consequência direta dos postulados mais básicos da MQ. Caso essas violações se comprovem, podemos esperar consequências mais drásticas do que apenas violações nas RCs, mas demonstraria que temos um problema mais fundamental com os postulados básicos da MQ.

A investigação e desenvolvimento de uma teoria de recursos para previsibilidade com a utilização de bases linearmente independentes, em analogia ao que já existe para coerência em (THEURER et al., 2017), também pode ser uma linha de pesquisa a desenvolver. Nesse caso, tentaremos encontrar as funções que completariam as RCCs, em analogia ao emaranhamento das bases ortonormais.

Outrossim, buscaremos investigar e aplicar RCs no contexto de referenciais quânticos. Apesar de ser um tema que necessita ser aprimorado, elencamos aqui por conta de ser uma linha de pesquisa muito promissora em virtude de publicações recentes nas Refs. (ANGELO et al., 2011; GIACOMINI, 2021; GIACOMINI; CASTRO-RUIZ; BRUKNER, 2019) e que ganharam grande visibilidade no meio científico.

De todos os assuntos citados, talvez, o que exigiria mais dedicação para gerar algum projeto viável seria o último, porém, todas as linhas de pesquisa mencionadas já foram, em maior ou menor grau, discutidas e desenvolvidas em algum momento nas disciplinas do programa de mestrado e nas discussões com os colaboradores do grupo de pesquisa. Sendo assim, acreditamos ser possível iniciar o desenvolvimento de parte dessas propostas já no início do programa de doutorado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFSHAR, S. S. Violation of the principle of complementarity, and its implications. In: . [s.n.], 2005. p. 229. ArXiv:quant-ph/0701027. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0701027>>.

AHARONOV, Y. et al. Finally making sense of the double-slit experiment. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 114, n. 25, p. 64806485, Jun 2017. ISSN 0027-8424, 1091-6490.

ANDERSEN, U. L. et al. Experimental demonstration of continuous variable quantum erasing. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 10, p. 100403, Sep 2004. ISSN 0031-9007, 1079-7114. ArXiv:quant-ph/0409005.

ANGELO, R. M. et al. Physics within a quantum reference frame. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 44, n. 14, p. 145304, Apr 2011. ISSN 1751-8113, 1751-8121. ArXiv:1007.2292 [quant-ph].

AUCCAISE, R. et al. Experimental analysis of the quantum complementarity principle. **Physical Review A**, v. 85, n. 3, p. 032121, Mar 2012. ISSN 1050-2947, 1094-1622. ArXiv:1201.5951 [quant-ph].

AULETTA, G.; FORTUNATO, M.; PARISI, G. **Quantum Mechanics: into a modern perspective**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

BADUREK, G.; RAUCH, H.; SUMMHAMMER, J. Time-dependent superposition of spinors. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 51, n. 12, p. 10151018, Sep 1983.

BASSO, M. L. W. Complementariedade, emaranhamento, incerteza e invariância de lorentz. 2021. Disponível em: <[https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/22159/DIS\\_PPGFISICA\\_2021\\_BASSO\\_MARCOS.pdf](https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/22159/DIS_PPGFISICA_2021_BASSO_MARCOS.pdf)>.

BASSO, M. L. W.; CHRYSOSTHEMOS, D. S. S.; MAZIERO, J. Quantitative wave-particle duality relations from the density matrix properties. **Quant. Inf. Process.**, v. 19, p. 254, 2020.

BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Complete complementarity relations for multipartite pure states. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 53, p. 465301, 2020.

\_\_\_\_\_. Operational connection between predictability and entanglement in entanglement swapping from partially entangled pure states. **Physics Letters A**, v. 451, p. 128414, Nov 2022. ISSN 03759601. ArXiv:2203.01281 [quant-ph].

BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, p. 140401, 2014.

BERGOU, J. A.; HILLERY, M. **Introduction to the Theory of Quantum Information Processing**. New York: Springer, 2013.

BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. **Nature**, v. 121, p. 580, 1928.

CHEN, D.-X. et al. Experimental investigation of wave-particle duality relations in asymmetric beam interference. **npj Quantum Information**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 11, p. 17, Sep 2022. ISSN 2056-6387.

CHRYSOSTHEMOS, D. S. S.; BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Quantum coherence versus interferometric visibility in a generalized mach-zehnder interferometer. arXiv, n. arXiv:2203.17062, May 2022. ArXiv:2203.17062 [physics, physics:quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2203.17062>>.

\_\_\_\_\_. Quantum simulation of the generalized-entangled quantum eraser, and the related complete complementarity relations. arXiv, n. arXiv:2212.09915, Dec 2022. ArXiv:2212.09915 [quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2212.09915>>.

DEGIORGIO, V. Phase shift between the transmitted and the reflected optical fields of a semireflecting lossless mirror is  $\pi/2$ . **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 48, n. 1, p. 8181, Jan 1980. ISSN 0002-9505.

DITTEL, C. et al. Wave-particle duality of many-body quantum states. **Physical Review X**, v. 11, n. 3, p. 031041, Aug 2021. ISSN 2160-3308. ArXiv:1901.02810 [quant-ph].

DÜRR, S. Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 64, n. 4, p. 042113, Sep 2001.

ENGLERT, B.-G. Fringe visibility and which-way information: An inequality. **Phys. Rev. Lett.**, v. 77, p. 2154, 1996.

ENGLERT, B.-G. et al. Wave-particle duality in multi-path interferometers: General concepts and three-path interferometers. **Int. J. Quant. Inf.**, v. 6, p. 129, 2008.

ENGLERT, B.-G.; WALTHER, H.; SCULLY, M. O. Quantum optical ramsey fringes and complementarity. **Applied Physics B**, v. 54, n. 5, p. 366368, May 1992. ISSN 1432-0649.

GIACOMINI, F. Spacetime quantum reference frames and superpositions of proper times. **Quantum**, v. 5, p. 508, Jul 2021. ISSN 2521-327X. ArXiv:2101.11628 [gr-qc, physics:quant-ph].

GIACOMINI, F.; CASTRO-RUIZ, E.; BRUKNER, . Quantum mechanics and the covariance of physical laws in quantum reference frames. **Nature Communications**, v. 10, n. 1, p. 494, Jan 2019. ISSN 2041-1723. ArXiv:1712.07207 [gr-qc, physics:quant-ph].

GREENBERGER, D. M.; YASIN, A. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. **Phys. Rev. A**, v. 128, p. 391, 1988.

HERZOG, T. J. et al. Complementarity and the quantum eraser. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 75, n. 17, p. 30343037, Oct 1995.

IBMQ. **IBM Q Experience Website. IBM Quantum**. 2022. Disponível em: <<https://quantum-computing.ibm.com/docs/>>.

KIM, Y.-H. et al. A delayed choice quantum eraser. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 1, p. 15, Jan 2000. ISSN 0031-9007, 1079-7114. ArXiv:quant-ph/9903047.

KWIAT, P. G.; STEINBERG, A. M.; CHIAO, R. Y. Observation of a “quantum eraser: A revival of coherence in a two-photon interference experiment. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 45, n. 11, p. 77297739, Jun 1992.

LÉVY-LEBLOND, J.-M. Towards a proper quantum theory: (hints for a recasting). **Dialectica**, Wiley, v. 30, n. 2/3, p. 161196, 1976. ISSN 0012-2017.

MA, X.-s. et al. Quantum erasure with causally disconnected choice. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 110, n. 4, p. 12211226, Jan 2013. ISSN 0027-8424, 1091-6490. ArXiv:1206.6578 [physics, physics:quant-ph].

MALEKI, Y.; LIU, J.; ZUBAIRY, M. S. Quantum eraser from duality–entanglement perspective. **Physical Review A**, v. 104, n. 4, p. 042207, Oct 2021. ISSN 2469-9926, 2469-9934. ArXiv:2110.12346 [quant-ph].

MAZIERO, J. Computing partial traces and reduced density matrices. **Int. J. Mod. Phys. C**, v. 28, p. 1750005, 2017.

\_\_\_\_\_. Jupyter Notebook, **jonasmaziero/qiskit**. 2022. Disponível em: <<https://github.com/jonasmaziero/qiskit>>.

MAZIERO, J.; BASSO, M. L. W.; CÉLERI, L. C. Local predictability and coherence versus distributed entanglement in entanglement swapping from partially entangled pure states. **Physics Letters A**, v. 457, p. 128576, Jan 2023. ISSN 03759601. ArXiv:2211.07539 [quant-ph].

MISHRA, S.; VENUGOPALAN, A.; QURESHI, T. Decoherence and visibility enhancement in multi-path interference. **Physical Review A**, v. 100, n. 4, p. 042122, Oct 2019. ISSN 2469-9926, 2469-9934. ArXiv:1907.04996 [quant-ph].

NAYLOR, D. et al. Mach-zehnder fourier transform spectrometer for astronomical spectroscopy at submillimeter wavelengths. v. 4855, Feb 2003.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

QURESHI, T. Coherence, interference and visibility. **Quanta**, v. 8, n. 1, p. 2435, Jun 2019. ISSN 1314-7374. ArXiv:1905.00917 [quant-ph].

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern quantum mechanics**. 2nd ed. ed. Cambridge: Cambridge university press, 2017. ISBN 978-1-108-42241-3.

SCULLY, M. O.; DRÜHL, K. Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and delayed choice in quantum mechanics. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 25, n. 4, p. 22082213, Apr 1982.

SHOR, P. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: **Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 124134.



THEURER, T. et al. A resource theory of superposition. **Physical Review Letters**, v. 119, n. 23, p. 230401, Dec 2017. ISSN 0031-9007, 1079-7114. ArXiv:1703.10943 [quant-ph].

TOLLAKSEN, J. et al. Quantum interference experiments, modular variables and weak measurements. **New Journal of Physics**, v. 12, n. 1, p. 013023, Jan 2010. ISSN 1367-2630. ArXiv:0910.4227 [quant-ph].

VEDRAL, V. **Introduction to quantum information science**. Oxford: Oxford University Press, 2006. (Oxford graduate texts). ISBN 978-0-19-921570-6.

VEDRAL, V. et al. Quantifying entanglement. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, p. 2275, 1997.

WALBORN, S. et al. Quantum erasure: Quantum interference revisited. Apr 2005.

WALBORN, S. P. et al. Double-slit quantum eraser. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 65, n. 3, p. 033818, Feb 2002.

WANG, K. et al. Controlling wave-particle duality with quantum entanglement. arXiv, n. arXiv:2112.11659, Dec 2021. ArXiv:2112.11659 [physics, physics:quant-ph]. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2112.11659>>.

WIGNER, E. P.; YANASE, M. M. Information contents of distributions. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, v. 49, p. 910, 1963.

WILDE, M. **Quantum information theory**. Second edition. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1-107-17616-4.

WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 2245, 1998.

WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr's principle. **Phys. Rev. D**, v. 19, p. 473, 1979.

YU, C. s. Quantum coherence via skew information and its polygamy. **Phys. Rev. A**, v. 95, p. 042337, 2017.

ZEILINGER, A. General properties of lossless beam splitters in interferometry. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 49, n. 9, p. 882883, Sep 1981. ISSN 0002-9505.

ZHANG, Q. et al. Full-range fourier-domain optical coherence tomography based on machzehnder interferometer. v. 124, p. 105794, Jan 2020. ISSN 0143-8166.

ZUBAIRY, M. S.; SCULLY, M. O. Quantum optical tests of complementarity. In: \_\_\_\_\_. **Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. p. 561581. ISBN 978-0-521-43595-6.

ZYCH, M. et al. Quantum interferometric visibility as a witness of general relativistic proper time. **Nature communications**, v. 2, p. 505, Oct 2011.

ZYGA, L.; PHYS.ORG. **D-Wave sells first commercial quantum computer**. 2022.  
Disponível em: <<https://phys.org/news/2011-06-d-wave-commercial-quantum.html>>.

## APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DE PARTE DO TRABALHO DO CAPÍTULO 4

### A.1 – DIVISOR DE FEIXES POLARIZADO GERAL (VPPBS)

O VPPBS da Fig. 2 do Capítulo 4 leva em consideração a polarização do quanton. Nesse caso precisamos de fases controladas para representar a atuação desses dispositivos. A fase do caminho vertical altera apenas a polarização vertical (adiciona a fase  $e^{i\varphi_V}$  no estado) e a fase do caminho horizontal altera apenas a polarização horizontal (adiciona a fase  $e^{i\varphi_H}$  no estado). Essas fases controladas podem ser construídas, respectivamente, por meio de

$$C_{P_V}^{B'B}(\varphi_V) = |0\rangle_{B'} \langle 0| \otimes \mathbb{I}_B + |1\rangle_{B'} \langle 1| \otimes P_B(\varphi_V) \quad (\text{A.1})$$

$$C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H) = (X_{B'} \otimes X_B) C_P^{B'B}(\varphi_H) (X_{B'} \otimes X_B) \quad (\text{A.2})$$

$$= |0\rangle_{B'} \langle 0| \otimes X_B P_B(\varphi_H) X_B + |1\rangle_{B'} \langle 1| \otimes \mathbb{I}_B. \quad (\text{A.3})$$

Para  $C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H)$  devemos aplicar a porta  $X$  em ambos os graus de liberdade, pois queremos alternar a polarização de vertical para horizontal e precisamos trocar o caminho que está inserido o dispositivo dentro do IMZ. Sendo assim, a atuação dos dois dispositivos em conjunto na base computacional produzirá

$$C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H) C_{P_V}^{B'B}(\varphi_V) |00\rangle_{B'B} = e^{i\varphi_H} |00\rangle_{B'B}, \quad (\text{A.4})$$

$$C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H) C_{P_V}^{B'B}(\varphi_V) |01\rangle_{B'B} = |01\rangle_{B'B}, \quad (\text{A.5})$$

$$C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H) C_{P_V}^{B'B}(\varphi_V) |10\rangle_{B'B} = |10\rangle_{B'B}, \quad (\text{A.6})$$

$$C_{P_H}^{B'B}(\varphi_H) C_{P_V}^{B'B}(\varphi_V) |11\rangle_{B'B} = e^{i\varphi_V} |11\rangle_{B'B}. \quad (\text{A.7})$$

Considere um estado geral de entrada no VPPBS, tanto de polarização como de modo espacial, dado por

$$|\psi_0\rangle = (c_H |0\rangle_B + c_V |1\rangle_B) (d_H |0\rangle_{B'} + d_V |1\rangle_{B'}), \quad (\text{A.8})$$

após o primeiro divisor de feixes, o estado é dado por

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_H (d_H + id_V) |0\rangle_B + c_V (d_H + id_V) |1\rangle_B] |0\rangle_{B'} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_H (id_H - d_V) |0\rangle_B + c_V (id_H - d_V) |1\rangle_B] |1\rangle_{B'}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

após o espelho e as fases controladas, temos

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} [e^{i\varphi_H} c_H (id_H - d_V) |0\rangle_B + c_V (id_H - d_V) |1\rangle_B] |0\rangle_{B'} \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} [c_H (d_H + id_V) |0\rangle_B + e^{i\varphi_V} c_V (d_H + id_V) |1\rangle_B] |1\rangle_{B'}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e após o segundo divisor de feixes, segue que

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= -\frac{1}{2} [c_H (1 + e^{i\varphi_H}) (d_H + id_V) |0\rangle_B + c_V (1 + e^{i\varphi_V}) (d_H + id_V) |1\rangle_B] |0\rangle_{B'} \\ &- \frac{1}{2} [c_H (e^{i\varphi_H} - 1) (id_H - d_V) |0\rangle_B - c_V (e^{i\varphi_V} - 1) (id_H - d_V) |1\rangle_B] |1\rangle_{B'} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} &= -[c_H T_H (d_H + id_V) |0\rangle_B + c_V T_V (d_H + id_V) |1\rangle_B] |0\rangle_{B'} \\ &+ [c_H R_H (-id_H + d_V) |0\rangle_B + c_V R_V (id_H - d_V) |1\rangle_B] |1\rangle_{B'}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde podemos escrever

$$e^{i\varphi} + 1 = 2e^{i\varphi/2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (\text{A.13})$$

e

$$e^{i\varphi} - 1 = 2ie^{i\varphi/2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (\text{A.14})$$

e definimos os coeficientes de transmissão e reflexão como

$$T_\epsilon = e^{i\varphi_\epsilon/2} \cos \frac{\varphi_\epsilon}{2}, \quad (\text{A.15})$$

$$R_\epsilon = ie^{i\varphi_\epsilon/2} \sin \frac{\varphi_\epsilon}{2}, \quad (\text{A.16})$$

com  $\epsilon = V, H$  e  $\varphi_\epsilon \in [0, 2\pi]$ .

No Capítulo 4, o  $U_V^{BB'}$  ( $\varphi_V, \varphi_H$ ) atua em dois casos,  $|10\rangle_{BB'}$  e  $|00\rangle_{BB'}$ . Considerando no estado final  $d_H = 1$  e  $d_V = 0$ , temos

$$|\psi_4\rangle = -[c_H T_H |0\rangle_B + c_V T_V |1\rangle_B] |0\rangle_{B'} + [-ic_H R_H |0\rangle_B + ic_V R_V |1\rangle_B] |1\rangle_{B'}. \quad (\text{A.17})$$

Para  $|10\rangle_{BB'}$  precisamos escolher  $c_H = 0$  e  $c_V = 1$ , assim, após  $U_V^{BB'}$  ( $\varphi_V, \varphi_H$ ), o estado é dado por

$$|\psi_4\rangle = -|1\rangle_B (T_V |0\rangle_{B'} + iR_V |1\rangle_{B'}). \quad (\text{A.18})$$

Para o caso  $|00\rangle_{BB'}$  precisamos escolher  $c_V = 0$ , que após  $U_V^{BB'}$  ( $\varphi_V, \varphi_H$ ), o estado resulta em

$$|\psi_4\rangle = -|0\rangle_B (T_H |0\rangle_{B'} - iR_H |1\rangle_{B'}). \quad (\text{A.19})$$

Ou seja, a polarização de entrada é distribuída em ambos os modos espaciais, criando superposição de caminho para as polarizações.

## A.2 – APAGADOR QUÂNTICO EMARANHADO

O estado inicial é dado por

$$|\Psi_1\rangle_{ABA'B'} = |\Psi^+\rangle_{AB} |00\rangle_{A'B'} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |10\rangle_{BB'} + |1\rangle_A |00\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}. \quad (\text{A.21})$$

Após o VPPBS o estado é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{ABA'B'} &= -\frac{1}{2} |01\rangle_{AB} [(T_H + T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H - R_V) |1\rangle_{B'}] |0\rangle_{A'} \\ &+ \frac{1}{2} |10\rangle_{AB} [(T_H - T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H + R_V) |1\rangle_{B'}] |0\rangle_{A'}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ou em termos da base de Bell

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{ABA'B'} &= -\frac{1}{2} |\Psi_+\rangle_{AB} |0\rangle_{A'} [(T_H + T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H - R_V) |1\rangle_{B'}] \\ &+ \frac{1}{2} |\Psi_-\rangle_{AB} |0\rangle_{A'} [(T_H - T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H + R_V) |1\rangle_{B'}] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$= -\frac{1}{2} |\Psi_+, 0\rangle_{ABA'} |\psi_2\rangle + \frac{1}{2} |\Psi_-, 0\rangle_{ABA'} |\phi_2\rangle, \quad (\text{A.24})$$

onde definimos

$$|\psi_2\rangle = (T_H + T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H - R_V) |1\rangle_{B'} \quad (\text{A.25})$$

$$|\phi_2\rangle = (T_H - T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H + R_V) |1\rangle_{B'}. \quad (\text{A.26})$$

O operador densidade desse estado é representado por

$$\rho_2 = |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{1}{4} |\Psi_+, 0\rangle_{ABA'} \langle \Psi_+, 0| \otimes |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \frac{1}{4} |\Psi_-, 0\rangle_{ABA'} \langle \Psi_-, 0| \otimes |\phi_2\rangle \langle \phi_2| \quad (\text{A.28})$$

$$- \frac{1}{2} |\Psi_+, 0\rangle_{ABA'} \langle \Psi_-, 0| \otimes |\psi_2\rangle \langle \phi_2| + t.c. \quad (\text{A.29})$$

Tomando o traço parcial sob os subsistemas  $AA'B$ , tal que  $\rho_2^{B'} = \text{Tr}_{ABA'}(\rho_2)$ , temos

$$\rho_2^{B'} = \frac{1}{4} (|\psi_2\rangle \langle \psi_2| + |\phi_2\rangle \langle \phi_2|) \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |T_H|^2 + |T_V|^2 & i(T_V R_V^* - T_H R_H^*) \\ i(T_H^* R_H - T_V^* R_V) & |R_H|^2 + |R_V|^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

### A.2.1 – Medida projetiva

O estado de  $|\Psi_2\rangle_{ABA'B'}$  foi apresentado como

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{ABA'B'} &= -\frac{1}{2} |\Psi_+\rangle_{AB} |0\rangle_{A'} [(T_H + T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H - R_V) |1\rangle_{B'}] \\ &\quad + \frac{1}{2} |\Psi_-\rangle_{AB} |0\rangle_{A'} [(T_H - T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H + R_V) |1\rangle_{B'}], \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$= -\frac{1}{2} |\Psi_{+,0}\rangle_{ABA'} |\psi_2\rangle + \frac{1}{2} |\Psi_{-,0}\rangle_{ABA'} |\phi_2\rangle. \quad (\text{A.33})$$

Projetando na base de Bell, o estado é dado por

$$|\psi_{2,\Psi_\pm}^{B'}\rangle = \frac{1}{N_{\Psi_\pm}} [(T_H \pm T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H \mp R_V) |1\rangle_{B'}], \quad (\text{A.34})$$

e o respectivo operador densidade é

$$\rho_{2,\Psi_\pm}^{B'} = \frac{1}{|N_{\Psi_\pm}|^2} \begin{bmatrix} |T_H \pm T_V|^2 & -i(T_H \pm T_V)(R_H^* \mp R_V^*) \\ i(T_H^* \pm T_V^*)(R_H \mp R_V) & |R_H \mp R_V|^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

A normalização é obtida por meio de

$$\langle \psi_{2,\Psi_\pm}^{B'} | \psi_{2,\Psi_\pm}^{B'} \rangle = 1 \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} |N_{\Psi_\pm}|^2 &= [(T_H^* \pm T_V^*) \langle 0|_{B'} - i(R_H^* \mp R_V^*) \langle 1|_{B'}] \times \\ &\quad \times [(T_H \pm T_V) |0\rangle_{B'} + i(R_H \mp R_V) |1\rangle_{B'}] \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$= |T_H \pm T_V|^2 + |R_H \mp R_V|^2, \quad (\text{A.38})$$

e, portanto,

$$|N_{\Psi_\pm}|^2 = |T_H \pm T_V|^2 + |R_H \mp R_V|^2. \quad (\text{A.39})$$

#### A.2.1.1 – Caso do AQ: $T_H = 1$ e $T_V = 0$

Para o caso onde  $T_H = 1$  e  $T_V = 0$  recuperamos o caso similar ao do AQ padrão. Com esses parâmetros, o estado se reduz a

$$|\Psi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (i|0\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_{B'} + |1\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'} \quad (\text{A.40})$$

$$= -\frac{1}{2} |\Psi^+\rangle_{AB} (|0\rangle_{B'} + i|1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'} + \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle_{AB} (|0\rangle_{B'} - i|1\rangle_{B'}) |0\rangle_{A'}, \quad (\text{A.41})$$

e podemos perceber que há informação de caminho por meio de  $AB$ , e o estado após a projeção

$$\left| \psi_{2, \Psi_{\pm}}^{B'} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{B'} \pm i |1\rangle_{B'}), \quad (\text{A.42})$$

onde a normalização é dada por  $|N_{\Psi_{\pm}}|^2 = 2$ . Aqui podemos verificar que, se houver medidas projetivas com pós-seleção, há o apagamento da informação de caminho como era de se esperar para o caso similar ao do AQ padrão abordado na seção 2.2.