UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Lauren Maria Mezzomo Bonaldo

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EDP'S ELÍPTICAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

Santa Maria, RS
2016

Lauren Maria Mezzomo Bonaldo

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EDP'S ELÍPTICAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Mezzomo Bonaldo, Lauren Maria
Existência de Solução para uma classe de EDP\'s Elípticas com condições de fronteira não lineares / Lauren Maria Mezzomo Bonaldo.-2016.
88 p.; 30cm

Orientador: Juliano Damião Bittencourt de Godoi
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

1. Equações Elípticas não lineares 2. Condições de Fronteira não lineares 3. Autovalores de Steklov-Neumann 4. Métodos Variacionais I. Bittencourt de Godoi, Juliano Damião II. Título.

Lauren Maria Mezzomo Bonaldo

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EDP'S ELÍPTICAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 29 de fevereiro de 2016:

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr. (UFJF)

Márcio Luís Miotto, Dr.(UFSM)

Santa Maria, RS
2016.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida, momentos vividos e as realizações alcançadas até agora.

Aos meus pais, Emir e Maria, meu infinito agradecimento. Obrigada pelo amor incondicional, carinho, atenção, dedicação, incentivo e por todos esforços que fizeram para que eu alcançasse meus objetivos.

Ao meu noivo, Rafael, que desde o início da minha graduação até o término do mestrado esteve sempre a meu lado, me pondo para cima e fazendo acreditar que posso mais do que imagino. Obrigada pelo teu amor, companheirismo, compreensão, apoio, amizade e, principalmente, tua paciência.

Aos meus familiares, em especial, minha avó Eliza e meu tio Luciano, que vibraram comigo desde as primeiras conquistas. Obrigada pelo carinho e preocupação.

A todos meus amigos, que de uma forma ou de outra, torceram e contribuíram para que eu obtivesse sucesso no caminho que escolhi seguir. Obrigada por vocês serem minhas fortalezas, fontes de carinho, alegria e descontração.

Ao meu orientador Juliano Damião Bittencourt de Godoi, pelos inúmeros momentos de estudos, ensinamentos, conselhos e conversas. Obrigada pela amizade, dedicação, preocupação para que eu pudesse compreender e entender tudo o que estava sendo proposto e, principalmente, por ter confiado e acreditado em mim.

Ao professor Maurício Fronza da Silva, obrigada pelos ensinamentos, conselhos, incentivos e pela amizade.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFSM que contribuíram para a minha formação o meu muito obrigada.

Aos professores da Banca, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Márcio Luís Miotto e Maurício Fronza da Silva, muito obrigada pelas contribuições e pela revisão do trabalho.

A todos os colegas de mestrado, em especial, Débora Dalmolin, Fernanda Somavilla e Caroline Maria Asmann, que dividiram comigo as angústias e as realizações de um curso de mestrado. Obrigada pelos momentos de estudo, trocas de conhecimento, descontração, conversas e risadas que sempre se fizeram presentes em nossas rodas de chimarrão.

À FAPERGS/CAPES pelo apoio financeiro, muito obrigada.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EDP'S ELÍPTICAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

AUTOR: LAUREN MARIA MEZZOMO BONALDO
ORIENTADOR: JULIANO DAMIÃO BITTENCOURT DE GODOI
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 29 de fevereiro de 2016.

O objetivo deste trabalho é mostrar alguns resultados de existência de soluções fraca para a seguinte classe de Equações Diferenciais Parciais Elípticas de segunda ordem, com condições de fronteira não lineares

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x,u), & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u), \ \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tais resultados são obtidos quando associamos a não linearidade da fronteira g com os autovalores de Steklov, enquanto que a não linearidade de reação f é relacionada com os autovalores de Neumann. A técnica utilizada para provar esses resultados é variacional, principalmente os métodos minimax.

Palavras-chave: Equações Elípticas não lineares. Condições de Fronteira não lineares. Autovalores de Steklov-Neumann. Métodos Variacionais.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A ELLIPTIC OF PDE'S WITH BOUNDARY NONLINEAR CONDITIONS

AUTHOR: LAUREN MARIA MEZZOMO BONALDO
ORIENTATOR: JULIANO DAMIÃO BITTENCOURT DE GODOI
Place and Date of the defense: Santa Maria, 29 february of 2016.

The objective of this work is to show some results for the existence of weak solutions for the following class of Elliptic Partial Differential Equations of Second Order with nonlinear boundary conditions

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x,u), & \text{if } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u), & \text{if } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Such results are obtained when we associate the nonlinearity on boundary g with the eigenvalues of Steklov, while the non-linearity reaction f is related to the eigenvalues of Neumann. The tool used to prove these results is variational, mainly the minimax methods.

Keywords: Nonlinear elliptic equations. Nonlinear boundary conditions. Steklov-Neumann eigenvalue. Minimax methods.

LISTA DE SÍMBOLOS

- q.t.p. significa quase todo ponto;
- Ω é um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$;
- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω ;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$;
- $|A|_\sigma$ é a σ-medida de um subconjunto A de $\mathbb{R}^{n-1}$;
- $|u|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p$ e $|u| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u_i|$, $\forall\, u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, com $1 < p < +\infty$;
- $\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \text{u é k vezes continuamente diferenciável}\}$;
- $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \mathrm{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$;
- $C_c^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é infinitamente diferenciável e } \mathrm{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$;
- $\|u\|_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$;
- $\|u\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ e $\|u\|_{p,\partial} = \left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < +\infty\}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < +\infty\}$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists\, g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \displaystyle\int_\Omega u\varphi' dx = -\int_\Omega g\varphi dx, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$;
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ e $|\nabla u| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
- $\langle u, v\rangle_2 = \displaystyle\int_\Omega uv dx, \ \forall\, u, v \in L^2(\Omega)$ e $\langle u, v\rangle_{2,\partial} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} uv d\sigma, \ \forall\ u, v \in L^2(\partial\Omega)$;
- $\langle u, v\rangle_c = \displaystyle\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv] dx, \forall\ u, v \in H^1(\Omega)$;
- $\|u\|_c = \sqrt{\displaystyle\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2] dx}, \ \forall\ u \in H^1(\Omega)$;
- $\langle u, v\rangle_{H^1} = \displaystyle\int_\Omega [uv + \nabla u \cdot \nabla v] dx, \forall\ u, v \in H^1(\Omega)$;
- $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\displaystyle\int_\Omega [u^2 + |\nabla u|^2] dx}, \ \forall\ u \in H^1(\Omega)$;
- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é com relação a norma $\|\cdot\|_{H^1}$;

- $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega); \exists \ v \in H^1(\Omega) \text{com } v|_{\partial\Omega} = u\}$;
- $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \inf\{\|v\|_{H^1}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\partial\Omega} = u\}$;
- $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$;
- X^* representa o espaço dual de $(X, \|\cdot\|)$, munido da norma $\|\cdot\|^*$;
- $\|u\|_X^* = \sup\limits_{\|x\|=1} |u(x)|$, $u \in X^*$;
- $\sigma(X, X^*)$ representa a topologia fraca de X;
- $u_k \to u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \|u_k - u\| = 0 \Leftrightarrow u_k$ converge fortemente para u;
- $u_k \rightharpoonup u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} |f(u_k) - f(u)| = 0, \forall f \in X^* \Leftrightarrow u_k$ converge fracamente para u;
- $$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ se } j = k \\ 0 \text{ se } j \neq k. \end{cases}$$

Sumário

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o estudo da teoria de EDP tem tido um bom desenvolvimento devido suas aplicações em engenharias, ciências, economia e outras áreas.

Muitos autores classificam as EDP em três tipos: equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas. No presente trabalho, estudamos o terceiro tipo e buscamos resultados de existência de soluções fraca para a seguinte classe de problemas elípticos

$$(I)\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x,u), & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u), & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, é um domínio limitado, $\partial\Omega$ é de classe $C^{0,1}$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla$ é a derivada normal unitária exterior a $\partial\Omega$ e as funções c, f e g satisfazem certas hipóteses, estas dadas por Mavinga e Nkashama em [25].

Para chegarmos a esses resultados, estudamos dois problemas de autovalores, a saber: o autoproblema de Steklov e o autoproblema de Neumann. O primeiro, o autoproblema de Steklov, é dado por

$$(II)\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Para este problema, garantimos a existência de uma sequência de autovalores crescente e ilimitada,

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \leq \ldots \to +\infty.$$

Tais autovalores são denominados, autovalores de Steklov. Para o estudo deste problema, citamos as seguintes referências [5], [6], [10], [13] e [14]. Salientamos aqui que a dificuldade de obtenção de resultados se dá, principalmente, ao trabalharmos com o operador traço.

O segundo problema, o autoproblema de Neumann, é dado por

$$(III)\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda u, & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Também garantimos que (III) admite sequência de autovalores crescente e ilimitada,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots \to +\infty.$$

Estes autovalores, são ditos autovalores de Neumann. Como referência, citamos [8], [23], [26] e [33].

Após a garantia da existência da sequência de autovalores de Steklov e da sequência de autovalores de Neumann, exibimos resultados que garantem a existência de solução fraca para o problema (I), onde a não linearidade de fronteira g esta relacionada com a sequência de autovalores de Steklov, enquanto que a não linearidade de reação f é relacionada com a sequência de autovalores de Neumann.

O trabalho é organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares que foram utilizadas ao longo desta dissertação. Além disso, utilizamos as ideias de Auchmuty em [5], onde provamos a existência da sequência de autovalores de Steklov.

No Capítulo 2, baseados nas ideias de De Godoi et al [11] e McOwen [26], mostramos a existência da sequência de autovalores de Neumann.

No Capítulo 3, apresentamos o problema (I), com todas as hipóteses necessárias para as funções c, f e g. Além disso, enunciamos três Teoremas, os quais intitulamos de Resultados Principais, que garantem a existência ao menos uma solução fraca para (I).

No Capítulo 4, provaremos resultados que nos auxiliarão na demonstração dos três Teoremas que enunciamos no Capítulo 3.

Finalmente no capítulo 5, a partir dos conhecimentos adquiridos nos Capítulos anteriores demonstramos os três Teoremas Principais.

Capítulo 1

O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV

1.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Consideramos, Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ não vazio, com $n \geq 2$ satisfazendo a seguinte condição:

(A) Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ e a fronteira de Ω, $\partial\Omega$, é a união de um número finito de superfícies fechadas disjuntas de Lipschitz, tendo cada superfície área finita.

Quando (**A**) for válida mostra-se que existe um vetor normal exterior $\nu(x)$ definido para quase todo ponto $x \in \partial\Omega$. Os espaços reais de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e $L^p(\partial\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ são aqui definidos de maneira usual e têm as normas, denotadas, respectivamente, por $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,\partial}$.

Em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$ os produtos internos são dados definidos respectivamente por

$$\langle u, v\rangle_2 = \int_\Omega uv dx \quad \text{e} \quad \langle u, v\rangle_{2,\partial} = \int_{\partial\Omega} uv d\sigma.$$

Denotaremos por $H^1(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev sendo este um espaço de Hilbert, com o seguinte o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega [uv + \nabla u \cdot \nabla v] dx.$$

A norma proveniente deste produto interno é denotada por $\|\cdot\|_{H^1}$.

1.2 O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV

Desde 1902, problemas de Steklov são estudados, no entanto, ainda hoje possuem grandes possibilidades de investigação ainda não feitas. Equações diferenciais parciais elípticas, com condições de fronteira de Steklov podem descrever, por exemplo, a deformação linear elástica u, de uma chapa Ω, sob a ação de uma força transversal exterior f.

Existem diversas literaturas que tratam problemas similares a esse, dentre elas [5] e [6]. Estas descrevem um princípio variacional para encontrar um primeiro autovalor de Steklov e a partir disto uma sequência de autovalores de Steklov.

Então, baseados nestas literaturas, mostraremos alguns resultados relacionados à teoria de autovalores de Steklov que são necessários para o entendimento deste trabalho. Inicialmente consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u, & \text{se } x \in \partial\Omega; \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathbf{A})$ e c satisfaz a condição:
(C_1) $c \in L^p(\Omega)$, com $p \geq \dfrac{n}{2}$, quando $n \geq 3$ ($p \geq 1$ quando $n = 2$) e $c \geq 0$ com desigualdade estrita para um conjunto de medida positiva, isto é, $\displaystyle\int_\Omega c(x)dx > 0$.

Este problema é denominado autoproblema de Steklov.

Definição 1.1 Uma solução fraca para o autoproblema de Steklov é um par (u, μ), onde $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ satisfazem

$$\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv]dx - \mu \int_{\partial\Omega} uv d\sigma = 0, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Neste caso, dizemos que μ é autovalor de Steklov, com autofunção associada u.

Primeiramente, provaremos a existência de um primeiro autovalor de Steklov. Para isto, sejam $\mathcal{D}_c$ e $\mathcal{B} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidos por

$$\mathcal{D}_c(u) = \int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}(u) = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma, \;\; \forall\, u \in H^1(\Omega).$$

A ideia para a obtenção do primeiro autovalor de Steklov é utilizar técnicas variacionais para maximizar $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \{u \in H^1(\Omega); \mathcal{D}_c(u) \leq 1\}$, ou seja, mostraremos que existe $u_1 \neq 0$ tal que $\displaystyle\sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u) = \beta_1 = \mathcal{B}(u_1)$. Com isto, veremos que $\beta_1 = \mu_1^{-1}$ é o menor autovalor de Steklov positivo com autofunção associada u_1. Para mostrarmos estes fatos, precisaremos de alguns resultados preliminares.

1.3 RESULTADOS PRELIMINARES

No transcorrer desta seção, assumiremos que as condições $(\mathbf{A})$ e (C_1) são válidas. Com estas hipóteses, pode-se provar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_c : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por

$$\langle u,v\rangle_c = \int_\Omega [\nabla u\cdot\nabla v + c(x)uv]dx, \forall\ u,v\in H^1(\Omega),$$

define um produto interno em $H^1(\Omega)$ tendo norma proveniente denotada por $\|\cdot\|_c$.

Lema 1.1 Os funcionais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}_c$ são contínuos e convexos.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $\mathcal{B}$ é contínuo. Para isto, sejam $(u_k)\subset H^1(\Omega)$ e $u\in H^1(\Omega)$, tais que $u_k\to u$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_{H^1})$. Pelo Teorema A.1,

$$\|\Gamma(u_k)-\Gamma(u)\|_{2,\partial}\leq \tilde{k}\|u_k-u\|_{H^1}\to 0, \text{ onde } \ \tilde{k}\in\mathbb{R}.$$

E assim, $\Gamma(u_k)\to\Gamma(u)$ em $(L^2(\partial\Omega),\|\cdot\|_{2,\partial})$.

Consequentemente, pela desigualdade de Hölder em $L^2(\partial\Omega)$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u_k)-\mathcal{B}(u)| &\leq \int_{\partial\Omega}|(\Gamma(u_k))^2-(\Gamma(u))^2|d\sigma \\ &= \|(\Gamma(u_k))^2-(\Gamma(u))^2\|_{2,\partial}\cdot|\partial\Omega|_\sigma^{\frac{1}{2}}\to 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{B}(u_k)\to\mathcal{B}(u)$, isto é, $\mathcal{B}$ é contínuo.

Observamos que $\mathcal{D}_c = P+Q$, onde $P,Q : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ são dados, respectivamente, por $P(u)=\displaystyle\int_\Omega c(x)u^2dx$ e $Q(u)=\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2dx$. Para mostrarmos a continuidade do funcional $\mathcal{D}_c$, mostraremos que P e Q são contínuos.

A continuidade de Q pode ser encontrada em [27]. Deste modo provaremos apenas que P é contínuo. Para tal, sejam $(u_k)\subset H^1(\Omega)$ e $u\in H^1(\Omega)$, tais que $u_k\to u$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_{H^1})$. Caso $n\geq 3$. Do Teorema A.7, o mergulho $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo para $0\leq q\leq\frac{2n}{n-2}$. Assim,

$$u_k\to u \quad \text{em} \quad (L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega),\|\cdot\|_{\frac{2n}{n-2}}). \tag{1.3}$$

Ainda, pelo Teorema A.18, existe uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k), tal que

$$u_{k_j}(x)\to u(x) \ \text{ q.t.p. } \ x\in\Omega, \ \text{ em } \ (\mathbb{R},|\cdot|). \tag{1.4}$$

Como $u_k^2, u^2 \in L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$, ao utilizarmos (1.3), (1.4) e aplicarmos o Teorema A.19, teremos

$$\|u_{k_j}^2\|_{\frac{n}{n-2}} \to \|u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Desta maneira, pelo Teorema A.20, concluimos que

$$\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \to 0 \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|),$$

ou seja, se $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, então existe subsequência (u_{k_j}) de (u_k), tal que $\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \to 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
Afirmação 1. $u_k^2 \to u^2$ em $(L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega), \|\cdot\|_{\frac{n}{n-2}})$.
Suponhamos que tal afirmação seja falsa. Então, existe $\epsilon > 0$ e $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ tal que $\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \geq \epsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, $u_{k_j} \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Pelo que vimos anteriormente, existe $(u_{k_{j_l}}) \subset (u_{k_j})$ tal que $\|u_{k_{j_l}}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} < \epsilon$, mas isto contradiz nossa suposição. Portanto a Afirmação 1 é válida.

Finalmente, observemos que por $c \in L^p(\Omega)$, para $p \geq \frac{n}{2}$, nos remete a $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$. A partir dessas informações, podemos mostrar a continuidade de P.

Com o auxílio da Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \Big|P(u_k) - P(u)\Big| &\leq \int_\Omega |c(x)||(u_k^2 - u^2)|dx \\ &\leq \|c(x)\|_{\frac{n}{2}} \|u_k^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, $P(u_k) \to P(u)$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Caso $n = 2$. Pelo Teorema A.7, o mergulho $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo para $1 \leq q < +\infty$. Assim, $u_k \to u$ em $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$ para qualquer $q \in [0, +\infty)$.
Com argumentos similares ao do caso $n \geq 3$, $u_k^2 \to u^2$ em $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$.
Agora, como $c \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, temos

$$\begin{aligned} \Big|P(u_k) - P(u)\Big| &\leq \int_\Omega |c(x)(u_k^2 - u^2)|dx \\ &= \|c\|_p \|u_k^2 - u^2\|_q \to 0. \end{aligned}$$

Isto é, $P(u_k) \to P(u)$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Logo P é contínuo e consequentemente $\mathcal{D}_c$ é contínuo.
Mostramos agora a convexidade dos funcionais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}_c$. Visto que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(s) = s^2$, para $s \in \mathbb{R}$ é convexa, temos,

$$\int_{\partial\Omega} ((1-t)u + tv)^2 d\sigma \leq (1-t) \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + t \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma, \;\; \forall \;\, t \in [0,1], u, v \in H^1(\Omega),$$

ou seja, $\mathcal{B}$ é convexo.

Analogamente, mostramos que $\mathcal{D}_c$ é convexo.

■

O próximo resultado é provado com o auxílio do Lema anterior, será útil para mostrarmos a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$.

Teorema 1.1 Existe $\alpha > 0$, tal que $\mathcal{D}_c(u) \geq \alpha \displaystyle\int_\Omega u^2 dx$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{S} = \{u \in H^1(\Omega); \|u\|_2 = 1\}$ e $\alpha = \inf\limits_{u \in \mathbf{S}} \mathcal{D}_c(u)$.
Afirmação 1 Existe $\tilde{u} \in \mathbf{S}$ tal que $\mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \alpha$.
Com efeito, da definição de ínfimo conseguimos uma sequência $(u_k) \subset \mathbf{S}$, tal que $D_c(u_k) \to \alpha$ e $\mathcal{D}_c(u_k) < \alpha + 1$. Como $u_k \in \mathbf{S}$, $\|u_k\|^2_{H^1} = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx + 1$.
Mas,

$$
\begin{aligned}
\|u_k\|_c^2 &= \int_\Omega [|\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2]dx \\
&= \|u_k\|^2_{H^1} - 1 + \int_\Omega c(x)u_k^2 dx \\
&\geq \|u_k\|^2_{H^1} - 1.
\end{aligned}
$$

Logo, $\|u_k\|^2_{H^1} \leq \alpha + 2$, ou seja, a sequência (u_k) é limitada em $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ é espaço reflexivo, existem subsequência (u_{k_j}) de (u_k) e $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$, tais que $u_{k_j} \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema A.7, $u_{k_j} \to \tilde{u}$ em $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$. Por isto, por $u_{k_j} \in \mathbf{S}$ e pela norma $\|\cdot\|_2$ ser contínua, $\tilde{u} \in \mathbf{S}$.

Por outro lado, devido a $u_{k_j} \to \tilde{u}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ e pelo Lema 1.1 , $\|\cdot\|_c^2$ é contínua e convexa. Consequentemente, $\|u_{k_j}\|_c$ é fracamente sequencialmente contínua em $H^1(\Omega)$. Portanto, segundo ao Teorema A.10, toda sequência (u_{k_j}) tal que $u_{k_j} \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\Omega)$ satisfaz a seguinte desigualdade, $\liminf\limits_{j \to +\infty} \|u_{k_j}\|_c \geq \|\tilde{u}\|_c$.

Agora, como $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathcal{D}_c(u_k) = \liminf\limits_{k \to +\infty} \|u_k\|_c^2 = \alpha$ segue que $\|\tilde{u}\|_c^2 \leq \alpha$. Ainda, como $\tilde{u} \in \mathbf{S}$ e $\alpha = \inf\limits_{u \in \mathbf{S}} \mathcal{D}_c(u)$ então $\|\tilde{u}\|_c^2 \geq \alpha$. Portanto, $\|\tilde{u}\|_c^2 = \alpha$, isto é, $\mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \alpha$.
Afirmação 2: $\alpha > 0$.
De fato, pela Afirmação 1, $\alpha = \mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \|\tilde{u}\|_c^2 \geq 0$. Caso $\alpha = 0$, temos

$$
\int_\Omega [|\nabla \tilde{u}|^2 + c(x)\tilde{u}^2]dx = 0 \Longrightarrow \int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega c(x)\tilde{u}^2 dx = 0.
$$

Assim, por (C_1), $\tilde{u} = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$. Logo, $\|\tilde{u}\|_2 = 0$. Mas, $\|\tilde{u}\|_2 = 1$, o que é um absurdo. Daí segue a validade da Afirmação 2.

Finalmente, como consequência das Afirmações 1 e 2 mostraremos a desigualdade do Teorema em questão.
Se $u = 0$, a igualdade vale. Caso $u \neq 0$, tomemos $v = \dfrac{u}{\|u\|_2}$. Por consequinte,

$$\alpha \leq \mathcal{D}_c(v) = \|v\|_c^2 = \frac{\|u\|_c^2}{\|u\|_2^2} \Longrightarrow \|u\|_c^2 \geq \alpha \|u\|_2^2,$$

o que finaliza a demonstração. ■

Corolário 1.1 As normas $\| \cdot \|_c$ e $\| \cdot \|_{H^1}$ são equivalentes.

Demonstração. Inicialmente, observamos que sendo $\mathcal{D}_c$ contínuo e homogêneo de segunda ordem, existe $\gamma > 0$, tal que

$$\|u\|_c \leq \gamma \|u\|_{H^1}, \quad \forall\ u \in H^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Com efeito, se $u = 0$, (1.5) é válida. Caso $u \neq 0$, temos pela continuidade de $\mathcal{D}_c$ em $0 \in H^1(\Omega)$ que existe $\delta > 0$ tal que se $w \in H^1(\Omega)$, $\|w\|_{H^1}^2 < \delta$ implica que $\|w\|_c^2 < 1$.
Assim, tomando $v = \dfrac{\delta}{2} \cdot \dfrac{u}{\|u\|_{H^1}} \in H^1(\Omega)$, $\|v\|_{H^1} < \delta$. Logo, $\|v\|_c^2 < 1$. Consequentemente,

$$\frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{\|u\|_c^2}{\|u\|_{H^1}^2} < 1 \Rightarrow \|u\|_c^2 < \frac{\delta^2}{4} \|u\|_{H^1}^2,$$

ou seja, $\|u\|_c \leq \gamma \|u\|_{H^1}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$, onde $\gamma = \dfrac{\delta}{2} > 0$.
Por outro lado, $\|u\|_{H^1}^2 \leq \|u\|_c^2 + \|u\|_2^2$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Por isto e pelo Teorema 1.1, segue que $\|u\|_{H^1}^2 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \|u\|_c^2$.

Pondo $\eta = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1}$ vemos que

$$\|u\|_{H^1} \leq \eta \|u\|_c. \tag{1.6}$$

Por (1.5) e (1.6), concluimos que as normas $\| \cdot \|_c$ e $\| \cdot \|_{H^1}$ são equivalentes em $H^1(\Omega)$. ■

Teorema 1.2 Os funcionais $\mathcal{D}_c$ e $\mathcal{B}$ são elementos de $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, $\mathcal{D}_c'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c$ e $\mathcal{B}'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_2$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fracamente contínuo em $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, que $\mathcal{D}_c \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, $\mathcal{D}_c'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c$, para $v \in H^1(\Omega)$. Para tal, notamos que

$F_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $F_u(v) = 2\langle u, v\rangle_c$, para $v \in H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ fixado é um funcional linear limitado. Com isto, mostraremos, agora, que $\mathcal{D}_c$ é diferenciável em $H^1(\Omega)$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, F_u.

Pela Corolário 1.1, existe $K_0 > 0$, tal que $\|w\|_c \leq K_0\|w\|_{H^1}$, para todo $w \in H^1(\Omega)$. Deste modo, para $u \in H^1(\Omega)$ fixado, $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta = \frac{\epsilon}{K_0^2}$, tal que se $0 \leq \|v\|_{H^1} < \frac{\epsilon}{K_0^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\mathcal{D}_c(u+v) - \mathcal{D}_c(u) - F_u(v)| &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\langle v, v\rangle_c| \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot \|v\|_c^2 \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot K_0^2\|v\|_{H^1}^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{D}_c$ é diferenciável a Fréchet e $\mathcal{D}_c^{'}(u) = F_u$

Verifiquemos que $\mathcal{D}_c^{'} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ é contínuo. Para isto, sejam $(u_k) \subset H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, tais que $u_k \to u$ em $H^1(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_c^{'}(u_k) - \mathcal{D}_c^{'}(u)\|_{H_1}^* &= \sup\{2|\langle u_k - u, v\rangle_c|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2\|u_k - u\|_c\|v\|_c; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2K_0^2\|u_k - u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &= 2K_0^2\|u_k - u\|_{H^1} \to 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{D}_c^{'}(u_k) \to \mathcal{D}_c^{'}(u)$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_{H^1}^*)$, o que completa a demonstração de que o operador $\mathcal{D}'_c$ é contínuo.

Agora, provaremos que o funcional $\mathcal{B} \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Para tal, observamos que o funcional $G_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $G_u(v) = 2\langle u, v\rangle_{2,\partial}$, para u fixado, $v \in H^1(\Omega)$ é linear e limitado. Pois, a linearidade decorre da linearidade do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,\partial}$ e a limitação segue do Teorema A.1.

A partir disto, demonstraremos que $\mathcal{B}$ é diferenciável a Fréchet em $H^1(\Omega)$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, G_u.

De fato, do Teorema A.1, existe $K_1 > 0$ tal que $\|v\|_{2,\partial} \leq \|v\|_{H^1}$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{K_1^2} > 0$, tal que se $0 \leq \|v\|_{H^1} < \frac{\epsilon}{K_1^2}$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\mathcal{B}(u+v)-\mathcal{B}(u)-G_u(v)| &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\langle v,v\rangle_{2,\partial}| \\
&\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}}\cdot\|v\|_{2,\partial}^2 \\
&\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}}\cdot K_1^2\|v\|_{H^1}^2<\epsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathcal{B}$ é diferenciável a Fréchet, com $\mathcal{B}'(u)=G_u$

Agora $\mathcal{B}':H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)^*$ é contínuo, pois se $(u_k)\subset H^1(\Omega)$ e $u\in H^1(\Omega)$ são tais que $u_k\to u$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_{H^1})$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{B}'(u_k)-\mathcal{B}'(u)\|_{H^1}^* &= sup\{2|\langle u_k-u,v\rangle_{2,\partial}|;v\in H^1(\Omega)\ \text{ e }\ \|v\|_{H^1}=1\} \\
&\leq sup\{2\|u_k-u\|_{2,\partial}\|v\|_{2,\partial};v\in H^1(\Omega)\ \text{ e }\ \|v\|_{H^1}=1\} \\
&\leq sup\{2K_1^2\|u_k-u\|_{H^1}\|v\|_{H^1};v\in H^1(\Omega)\ \text{ e }\ \|v\|_{H^1}=1\} \\
&= 2K_1^2\|u_k-u\|_{H^1}\to 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{B}'(u_k)\to\mathcal{B}'(u)$ em $(H^1(\Omega)^*,\|\cdot\|_{H^1}^*)$, o que completa a demonstração de que o operador $\mathcal{B}'$ é contínuo.

Finalmente, mostremos que o funcional $\mathcal{B}$ é fracamente contínuo. Com efeito, sejam $(u_k)\subset H^1(\Omega)$ e $u\in H^1(\Omega)$, tais que $u_k\rightharpoonup u$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_{H^1})$. Em consequência do Teorema A.1, $u_k\to u$ em $(L^2(\partial\Omega),\|\cdot\|_{2,\partial})$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}(u_k)-\mathcal{B}(u)| &\leq |\langle u_k-u,u_k\rangle_{2,\partial}|+|\langle u,u-u_k\rangle_{2,\partial}| \\
&\leq \|u_k-u\|_{2,\partial}\|u_k\|_{2,\partial}+\|u\|_{2,\partial}\|u-u_k\|_{2,\partial}\to 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que $\mathcal{B}(u_k)\to\mathcal{B}(u)$ em $(\mathbb{R},|\cdot|)$. ∎

Afim de garantirmos a existência do primeiro autovalor de Steklov, precisaremos de alguns resultados referentes ao conjunto $\mathbb{K}=\{u\in H^1(\Omega);\mathcal{D}_c(u)\leq 1\}$.

Proposição 1.1 O conjunto $\mathbb{K}\subset H^1(\Omega)$ é um convexo, limitado e fechado.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $\mathbb{K}$ é convexo. Como $\|\cdot\|_c$ define uma norma em $H^1(\Omega)$,

$$
\|(1-t)u+tv\|_c\leq(1-t)\|u\|_c+t\|v\|_c\leq 1,\ \ \forall\, u,v\in\mathbb{K},\ \ t\in[0,1],
$$

ou seja, $(1-t)u+tv \in \mathbb{K}$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{K}$ e $t \in [0,1]$.

A limitação de $\mathbb{K}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, segue do Corolário 1.1. Ainda pelo Lema 1.1 $\mathcal{D}_c$ é um funcional contínuo. Portanto, $\mathbb{K} = \mathcal{D}_c^{-1}((-\infty, 1])$ é fechado em $H^1(\Omega)$.

■

Observação 1.1 Sendo $H^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert e $\mathbb{K} \subset H^1(\Omega)$ limitado, convexo e fechado segue, pelo Teorema A.8, que $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$.

Para construirmos a sequência de autovalores de Steklov, consideremos

$$\mathbb{K}_J = \{u \in \mathbb{K}; \langle \Gamma u, \Gamma u_j \rangle_{2,\partial} = \langle u, u_j \rangle_{2,\partial} = 0, \ \text{para} \ 1 \leq j < J\},$$

onde $u_1, u_2, ..., u_J \in H^1(\Omega)$, $J \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ e $\Pi_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $\Pi_u(v) = \langle u, v \rangle_{2,\partial}$ com $u \in H^1(\Omega)$ fixado e $v \in H^1(\Omega)$.

Proposição 1.2 O funcional $\Pi_u \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $v \in H^1(\Omega)$, Π_u, isto é, $\Pi_u'(v) = \Pi_u$, para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Como $\Pi_u = \frac{1}{2}G_u$, Π_u é linear e limitado. Por outro lado, como todo operador linear e limitado é infinitamente diferenciável e sua derivada de Fréchet coincide com ele próprio, segue que $\Pi_u'(v) = \Pi_u$, para todo $v \in H^1(\Omega)$.

■

Proposição 1.3 O conjunto $\mathbb{K}_J \subset H^1(\Omega)$ é um conjunto convexo, limitado e fechado.

Demonstração. Inicialmente mostramos que $\mathbb{K}_J$ é convexo. Para isto, sejam $u, v \in \mathbb{K}_J$ e $t \in [0,1]$. Como $\mathbb{K}$ é convexo $(1-t)u+tv \in \mathbb{K}$ e, para $1 \leq j \leq J$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma((1-t)u+tv), \Gamma u_j \rangle_{2,\partial} &= \langle (1-t)u+tv, u_j \rangle_{2,\partial} \\ &= (1-t)\langle u, u_j \rangle_{2,\partial} + t\langle v, u_j \rangle_{2,\partial} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $(1-t)u+tv \in \mathbb{K}_J$. Pela definição de $\mathbb{K}_J$, temos $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é limitado, segue a limitação de $\mathbb{K}_J$. Finalmente, notando que $\mathbb{K}_J = \mathbb{K} \cap \bigcap_{j=1}^{J} \Pi_j^{-1}(\{0\})$, onde $\Pi_j = \Pi_{u_j}$, Π_{u_j} é contínua para $1 \leq j \leq J$ e $\mathbb{K}$ é fechado, tem-se que $\mathbb{K}_J$ também será fechado em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Portanto concluimos a proposição.

■

Observação 1.2 Em consequência da Proposição 1.3, temos que o conjunto $\mathbb{K}_J$ é fracamente compacto em $H^1(\Omega)$.

Para construirmos a sequência de autovalores de Steklov precisamos de alguns resultados referente ao espaço

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega) : \exists \ v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = u\}.$$

Sabe-se do Teorema A.2, que o operador inclusão $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ é linear, injetor e contínuo.

Teorema 1.3 Se $u_1, u_2, ..., u_J \in H^1(\Omega)$, então existe $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$, tal que $i(v) = v \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]^{\perp}$.

Demonstração. Suponhamos que o Teorema não valha. Como o subespaço $[\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J] \subset L^2(\partial\Omega)$ possui dimensão finita,

$$L^2(\partial\Omega) = [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J] \oplus [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]^{\perp}. \tag{1.7}$$

Agora, se $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, então $v \in L^2(\partial\Omega)$ e existe $u \in H^1(\Omega)$ tais que $u|_{\partial\Omega} = v$. Por (1.7), existem $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., J$, e $\tilde{u} \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]^{\perp}$ tais que

$$\Gamma(u) = v = \delta_1 \Gamma(u_1) + \delta_2 \Gamma(u_2) + ... + \delta_J \Gamma(u_J) + \tilde{u}.$$

Em virtude da linearidade do operador Γ, $v = \Gamma(\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + ... + \delta_J u_J) + \tilde{u}$. Além disso, pela caracterização de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, concluimos que $\tilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Pelo Teorema A.2, $i(\tilde{u}) = \tilde{u}$. Agora, como $\tilde{u}$ é um elemento de $[\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]^{\perp}$, devido à nossa suposição, $\tilde{u} = 0$. Assim, $v \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]$. Visto que v é arbitrário em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]$. Mas isto é um absurdo, pois a dimensão de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é infinita (Teorema A.3). Logo vale o teorema em questão.

■

1.4 CONSTRUÇÃO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV

O próximo Teorema garante a existência do primeiro autovalor de Steklov, bem como, algumas de suas propriedades.

Teorema 1.4 (a) Existe $u_1 \in \mathbb{K}$ tal que $\|u_1\|_c = 1$ e $\mathcal{B}(u_1) = \beta_1 > 0$;

(b) Se $\mu_1 = \beta_1^{-1}$, o par (u_1, μ_1) satisfaz (1.2), ou seja, μ_1 é autovalor de Steklov, tendo como autofunção associada u_1;

(c) μ_1 é o menor autovalor positivo de Steklov.

Demonstração. (a) Pela Observação 1.1, o conjunto $\mathbb{K}$ é fracamente compacto no espaço normado $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Além disso, pelo Teorema 1.2, o funcional $\mathcal{B}$ é fracamente contínuo. Logo, existe $u_1 \in \mathbb{K}$, tal que $\beta_1 = \mathcal{B}(u_1) = \sup\limits_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$.

Afirmação 1. $\|u_1\|_c = 1$.

De fato, como $u_1 \in \mathbb{K}$, $\|u_1\|_c^2 = \mathcal{D}_c(u_1) \leq 1$. Suponhamos que $\mathcal{D}_c(u_1) < 1$. Com isto, existe $r = \frac{1+\|u_1\|_c}{2\|u_1\|_c} > 1$, tal que $ru_1 \in \mathbb{K}$. Assim, $\mathcal{B}(ru_1) = r^2\mathcal{B}(u_1) > \mathcal{B}(u_1) = \beta_1$, O que é um absurdo. Portanto, $\|u_1\|_c = 1$.

Diante da afirmação anterior, podemos ver u_1 como um extremo de $\mathcal{B}$ restrito ao conjunto $\mathcal{D}_c^{-1}(\mathcal{D}_c(u_1))$.

Agora, visto que $\mathcal{D}_c$ e $\mathcal{B}$ são elementos de $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, de acordo com o Teorema A.22, uma das condições abaixo deve valer

(1) $\mathcal{D}_c'(u_1) \cdot v = 0, \;\forall\; v \in H^1(\Omega)$;

(2) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{B}'(u_1) \cdot v = \lambda \mathcal{D}_c'(u_1) \cdot v, \forall\; v \in H^1(\Omega)$.

A condição (1) não ocorre, pois $\mathcal{D}_c'(u_1) \cdot u_1 = 2\langle u_1, u_1\rangle_c = 2\|u_1\|_c^2 = 2$. Logo, deve ocorrer (2), ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma = \lambda \int_\Omega [\nabla u_1 \cdot \nabla v + c(x)u_1 v]dx, \;\forall\; v \in H^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Afirmação 2. $\lambda = \beta_1 > 0$.

Com efeito, se considerarmos $v = u_1$ em (1.8) e o fato de $\|u_1\|_c = 1$, temos

$$\int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma = \lambda \int_\Omega [|\nabla u_1|^2 + c(x)u_1^2]dx = \lambda\|u_1\|_c^2 = \lambda,$$

ou seja,

$$\lambda = \int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma = \|u_1\|_{2,\partial}^2 = \mathcal{B}(u_1) = \beta_1.$$

Logo, $\lambda = \beta_1 \geq 0$. Caso $\lambda = 0$, segue que $\sup\limits_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u) = 0$. Como $\mathcal{B}$ é contínua e não negativa $\mathcal{B}(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{K}$. Por outro lado, todo funcional constante sobre Ω é um elemento de $H^1(\Omega)$, uma vez que Ω é limitado. Em particular, o funcional $\varphi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi_1(x) = 1$ para $x \in \Omega$, é elemento de $H^1(\Omega)$. Por conseguinte,

$$\mathcal{B}(\varphi_1) = \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma = |\partial\Omega|_\sigma > 0.$$

Agora, notando que $\phi = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_c} \in \phi \in \mathbb{K}$,

$$\mathcal{B}(\phi) = \frac{1}{\|\varphi_1\|_c^2} \int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma = \frac{\|\varphi_1\|_{2,\partial}^2}{\|\varphi_1\|_c^2} = \frac{\mathcal{B}(\varphi_1)}{\|\varphi_1\|_c^2} > 0,$$

isto é, $\mathcal{B}(\phi) > 0$ o que contradiz o fato que $\mathcal{B}(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{K}$. Deste modo, $\lambda = \beta_1 > 0$, o que conclui a Afirmação 2 e o item (a).

(b) Por (1.8) e pela Afirmação 1, o par $(u_1, \lambda^{-1}) \in (H^1(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca para o autoproblema (1.1), ou seja, $\mu_1 = \beta_1^{-1} = \lambda^{-1}$ é autovalor de Steklov, com autofunção associada u_1.

(c) Suponhamos que μ_1 não seja o menor autovalor positivo de Steklov. Assim, existem $\hat{u} \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$, com $0 < \hat{\mu} < \mu_1$, tais que $\langle \hat{u}, v\rangle_c = \hat{\mu}\langle \hat{u}, v\rangle_{2,\partial}$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Ao tomarmos $v = \frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}$,

$$\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}\right) = \frac{1}{\|\hat{u}\|_c^2} \int_{\partial\Omega} \hat{u}^2 d\sigma.$$

Logo,

$$\hat{\mu}\mathcal{B}\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}\right) = \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{u}\|_c^2} \cdot \|\hat{u}\|_{2,\partial}^2 = \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{u}\|_c^2} \cdot \frac{1}{\hat{\mu}} \cdot \|\hat{u}\|_c^2 = 1.$$

Consequentemente, $\mathcal{B}\left(\frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|_c}\right) = \frac{1}{\hat{u}} > \frac{1}{u_1} = \beta_1$, o que é um absurdo, pois $\beta_1 = \sup\limits_{u\in\mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$ e $\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|}_c \in \mathbb{K}$.

■

O próximo resultado é de grande importância para a obtenção de soluções de uma classe mais geral de EDP's que posteriormente serão trabalhados.

Corolário 1.2 Para todo $u \in H^1(\Omega)$, vale a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx \geq \mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma,$$

onde $\mu_1 > 0$ é o primeiro autovalor de Steklov.

Demonstração. Se $u = 0$, vale a igualdade. Se $u \neq 0$, consideremos $v = \frac{u}{\|u\|_c}$. Deste modo, $\|v\|_c = 1$, isto é, $v \in \mathbb{K}$. Assim, temos $\mathcal{B}(v) \leq \beta_1 = \sup\limits_{u\in\mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$. Como $\mathcal{B}(v) = \|v\|_{2,\partial}^2$, segue que $\mathcal{B}(v) = \frac{\|u\|_{2,\partial}^2}{\|u\|_c^2}$. Logo, $\|u\|_{2,\partial}^2 \leq \beta_1 \|u\|_c^2$ e isto significa que $\displaystyle\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx \geq \mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$.

■

1.5 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA AUTOVALORES DE STEKLOV

Com o auxílio dos resultados vistos anteriormente vamos agora à construção da sequência de autovalores de Steklov, a saber (μ_j), que satisfaz algumas propriedades que nos serão úteis no transcorrer deste trabalho.

No Teorema 1.4, vimos que existe um primeiro autovalor de Steklov, o qual denotamos por μ_1, tendo como autofunção associada u_1. Com isto, teremos o primeiro passo do processo de indução satisfeito, sendo este utilizado para a construção da sequência (μ_j).

Teorema 1.5 Existe uma sequência de pares $((u_J, \mu_J))$ em $[H^1(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$, os quais são soluções fraca para o autoproblema (1.1). Além disso, se considerarmos, para cada $J \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$,

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{K}_J = \{u \in \mathbb{K}; \langle u, u_j \rangle_{2,\partial} = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq J\}.$$

Então

$$\beta_J = \sup_{u \in \mathbb{K}_{J-1}} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_J) > 0 \text{ e } \mu_J = \beta_J^{-1}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar este teorema por indução em J. A validade do mesmo, para $J = 1$, é garantida pelo Teorema 1.4. Suponhamos que o Teorema em questão seja válido para j, com o $j \leq J$, e mostremos a validade do mesmo para $J + 1$.

Afirmação 1. Existe $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ tal que $\beta_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_{J+1})$.

De fato, pela Observação 1.2, $\mathbb{K}_J$ é fracamente compacto em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Além disso, pelo Teorema 1.2, $\mathcal{B}$ é fracamente contínuo. Logo, existe $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$, tal que $\mathcal{B}(u_{J+1}) = \beta_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u)$.

Afirmação 2. $\|u_{J+1}\|_c = 1$.

Com efeito, $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ e $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$, $\|u_{J+1}\|_c \leq 1$. Suponhamos $\|u_{J+1}\|_c < 1$. Para $r = \frac{1+\|u_{J+1}\|_c}{2\|u_{J+1}\|_c} > 1$, $ru_{J+1} \in \mathbb{K}_J$. E $\mathcal{B}(ru_{J+1}) = r^2\mathcal{B}(u_{J+1}) > \mathcal{B}(u_{J+1}) = \beta_{J+1}$. Mas isto é um absurdo. Logo $\|u_{J+1}\|_c = 1$.

Afirmação 3. $\beta_{J+1} > 0$.

Pela hipótese de indução, existem $u_1, u_2, ..., u_J \in H^1(\Omega)$, tais que

$$\beta_l = \sup_{u \in \mathbb{K}_{l-1}} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_l) > 0, \text{ para } 1 \leq l \leq J.$$

Pelo Teorema 1.3, visto que $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\backslash\{0\}$, $w|_{\partial\Omega} = v$ para algum $w \in H^1(\Omega)$. Em razão de $v \neq 0$ em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\mathcal{B}(w) = \int_{\partial\Omega} w^2 d\sigma > 0$. Com efeito, se $\mathcal{B}(w) = 0$, então $\int_{\partial\Omega} w^2 d\sigma = 0$, e assim $w = 0$ para q.t.p. em $\partial\Omega$. Mas $w|_{\partial\Omega} = v$, logo $v = 0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Como $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, i é injetora e $i(v) = 0 = i(0)$ concluimos que $v = 0$ em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, o que não ocorre. Por conseguinte $\mathcal{B}(w) > 0$.

Além disso, $w \neq 0$ em $H^1(\Omega)$, pois caso $w = 0$ em $H^1(\Omega)$, então $w|_{\partial\Omega} = v = 0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Assim, $v = 0$ em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ o que não ocorre. Deste modo, $\|w\|_c \neq 0 (w \neq 0$ em $H^1(\Omega))$.

Vamos assim considerar $\tilde{w} = \frac{w}{\|w\|_c} \in H^1(\Omega)$. Observamos que

$$\mathcal{B}(\tilde{w}) = \mathcal{B}\left(\frac{w}{\|w\|_c}\right) = \frac{1}{\|w\|_c^2}\mathcal{B}(w).$$

Ainda, $\tilde{v} = \frac{v}{\|w\|_c} = \tilde{w}_{|\partial\Omega} = \frac{1}{\|w\|_c} w_{|\partial\Omega} \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, ..., \Gamma u_J]^{\perp}$, e assim

$$\langle \tilde{w}, u_k \rangle_{2,\partial} = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq J. \tag{1.9}$$

Agora, notemos que $\|\tilde{w}\|_c = 1$. Disto e de (1.9), segue que $\tilde{w} \in \mathbb{K}_J$. Daí,

$$\mathcal{B}_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u) \geq \mathcal{B}(\tilde{w}) > 0,$$

e tem sentido definirmos

$$\mu_{J+1} = \beta_{J+1}^{-1}.$$

Afirmação 4. O par (u_{J+1}, μ_{J+1}) é solução fraca para o autoproblema (1.1).

Pelas Afirmações 2 e 3, podemos ver u_{J+1} como um elemento máximo de $\mathcal{B}$ restrito a

$$\mathcal{D}_c^{-1}(\mathcal{D}_c(u_{J+1})) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{J} \Pi_k^{-1}(\Pi_k(u_{J+1}))\right],$$

onde $\Pi_k = \Pi_{u_k}$, para $k = 1, 2, ...J$. Já vimos, pelo Teorema 1.2 e pela Proposição 1.2, que os funcionais $\mathcal{D}_c$, $\mathcal{B}$ e Π_k são elementos de $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Deste modo, podemos aplicar o Teorema A.22, ou seja, uma das seguintes condições deve valer:

(1) $detA(v_1, \ldots, v_{J+1}) = 0$, para quaisquer $v_1, v_2 \ldots, v_{J+1} \in H^1(\Omega)$, onde

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_{J+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot v_1 & \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot v_2 & \ldots & \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \\ \Pi_1'(u_{J+1}) \cdot v_1 & \Pi_{\prime}^1(u_{J+1}) \cdot v_2 & \ldots & \Pi_1'(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \Pi_J'(u_{J+1}) \cdot v_1 & \Pi_J'(u_{J+1}) \cdot v_2 & \ldots & \Pi_J'(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \end{pmatrix};$$

(2) Existem $\alpha, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, J$, tais que

$$\mathcal{B}'(u_{J+1}) \cdot v = \alpha \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot v + \sum_{k=1}^{J} \alpha_k \Pi_k'(u_{J+1}) \cdot v, \ \ \forall \ v \in H^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Mas, pela hipótese de indução, sabemos que, para $u, v \in H^1(\Omega)$ e $k = 1, 2, \ldots J$, valem

$$\mathcal{D}_c'(u) \cdot v = 2\langle u, v\rangle_c \ \text{ e } \ \Pi_k'(u) \cdot v = \langle v, u_k\rangle_{2,\partial}.$$

Por isto, por $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ e pela hipótese de indução, para $k, l = 1, 2, \ldots, J$ com $k \neq l$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot u_{J+1} &= 2\langle u_{J+1}, u_{J+1}\rangle_c = 2\|u_{J+1}\|_c^2 = 2, \\ \mathcal{D}_c'(u_{J+1}) \cdot u_k &= 2\langle u_{J+1}, u_k\rangle_c = 2\mu_k \langle u_{J+1}, u_k\rangle_{2,\partial} = 0, \\ \Pi_k'(u_{J+1}) \cdot u_{J+1} &= \langle u_{J+1}, u_k\rangle_{2,\partial} = 0, \\ \Pi_k'(u_{J+1}) \cdot u_k &= \langle u_k, u_k\rangle_{2,\partial} = \|u_k\|_{2,\partial}^2 = \beta_k \|u_k\|_c^2 = \beta_k. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$A(u_{J+1}, u_1, ...u_J) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & \ldots & 2 \cdot 0 \\ 0 & \beta_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_J \end{pmatrix}.$$

Logo, $detA(u_{J+1}, u_1, ..., u_J) = 2\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_J > 0$. Portanto, (2) deve ocorrer. Para concluirmos a prova da Afirmação 4, mostremos, antes que $\alpha_k = 0$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, J\}$. Ora, ao considerarmos $v = u_k$ para $k \in \{1, 2, \ldots, J\}$ em (1.10), obtemos

$$\mathcal{B}'(u_{J+1}) \cdot u_k = 2\langle u_{J+1}, u_k\rangle_{2,\partial} = 2\alpha \langle u_{J+1}, u_k\rangle_c + 2 \cdot \sum_{s=1}^{J} \alpha_k \langle u_k, u_s\rangle_{2,\partial}. \tag{1.11}$$

Como $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$, segue, da hipótese de indução que

$$0 = \alpha\mu_k \langle u_{J+1}, u_k \rangle_{2,\partial} + 2\alpha_k \langle u_k, u_k \rangle_{2,\partial} \Longrightarrow 0 = 2\alpha_k \mu_s^{-1}.$$

Como $\mu_k \neq 0$, $\alpha_k = 0$, para todo $k \in \{1, 2, ..., J\}$. Agora, se $v = u_{J+1}$ em (1.11), obtemos

$$\beta_{J+1} = \langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_{2,\partial} = \alpha \langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_c = \alpha \| u_{J+1} \|_c^2 = \alpha.$$

Portanto, $\beta_{J+1}^{-1} \langle u_{J+1}, v \rangle_{2,\partial} = \langle u_{J+1}, v \rangle_c$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Ainda, visto que $\| u_{J+1} \|_c = 1$ o par $(u_{J+1}, \beta_{J+1}^{-1}) = (u_{J+1}, \mu_{J+1})$ é uma solução fraca para o autoproblema. ■

Teorema 1.6 A sequência (u_j, μ_j) satisfaz

(a) $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_j \leq \cdots$;

(b) $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1} \delta_{jk}, \forall\, j, k \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{j \to +\infty} \mu_j = +\infty$;

(d) A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Steklov μ_j é finita.

Demonstração. (a) Pelo Teorema 1.5, para $l \in \mathbb{N}$, $\mu_j = \beta_j^{-1}$ e $\beta_l = \sup\limits_{u \in K_{l-1}} \beta(u)$. Logo, em razão de $K_{j-1} \subset K_{j-2}$, $\beta_j \leq \beta_{j-1}$, para $j \geq 2$. Assim, $\mu_{j-1} = \beta_{j-1}^{-1} \leq \beta_j^{-1} = \mu_j$. Disto e do fato de que $\mu_1 > 0$, segue que $0 < \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_j \leq \cdots$.
(b) Pelo Teorema 1.5, $u_j \in K_{j-1} \subset K_j$. Deste modo, $\| u_j \|_c = 1$ e $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = 0$, para $k < j$. Caso $j < k$, obtemos $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = 0$. Finalmente, se $j = k$, então pelo fato de u_j ser autofunção associada ao autovalor de Steklov μ_j, $\langle u_j, u_j \rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1} \langle u_j, u_j \rangle_c = \mu_j^{-1} \| u_j \|_c^2 = \mu_j^{-1}$, o que implica na validade de (b).
(c) Suponhamos que o item (c) não seja válido, ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_j \leq L$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Se, para cada $j \in \mathbb{N}$, $v_j = \dfrac{u_j}{\| u_j \|_{2,\partial}} \in H^1(\Omega)$, então

$$\| v_j \|_c^2 = \frac{1}{\| u_j \|_{2,\partial}^2} = \beta_j^{-1} = \mu_j \leq L, \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Logo (v_j) é uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_c)$. Como as normas $\| \cdot \|_c$ e $\| \cdot \|_{H^1}$ são equivalentes em $H^1(\Omega)$, a sequência (v_j) também é limitada em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$. Ainda, visto que $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$ é um espaço reflexivo, existem subsequência (v_{j_k}) de (v_j) e $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$, tais que $v_{j_k} \rightharpoonup \tilde{v}$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$. Daí, pelo Teorema A.1, $v_{j_k} \to \tilde{v}$ em $(L^2(\partial\Omega), \| \cdot \|_{2,\partial})$.

Deste modo, a sequência (v_{j_k}) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\partial\Omega)$. Entretanto, ao considerarmos j_k e j_l grandes, com $j_k \neq j_l$ temos

$$\begin{aligned}
\|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 &= \left\| \frac{u_{j_k}}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}} - \frac{u_{j_l}}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 \\
&= \frac{1}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2}\langle u_{j_k}, u_{j_k}\rangle_{2,\partial} + \frac{1}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2}\langle u_{j_l}, u_{j_l}\rangle_{2,\partial} - \frac{2}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}\cdot\|u_{j_l}\|_{2,\partial}}\cdot\langle u_{j_k}, u_{j_l}\rangle_{2,\partial} \\
&= \frac{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2} = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 = 2$. Mas isto é um absurdo, pois a sequência (v_{j_k}) é de Cauchy em $L^2(\partial\Omega)$. Portanto, devemos ter $\lim\limits_{j\to+\infty} \mu_j = +\infty$;

(d) Suponhamos que a dimensão do autoespaço associado a algum autovalor μ_k seja infinita. Deste modo, podemos considerar uma sequência (y_j) de autofunções c-ortonormais em $H^1(\Omega)$ associadas ao autovalor de Steklov μ_k. Logo, para $r, s \in \mathbb{N}$, com $r \neq s$, temos $\langle y_r, y_s\rangle_{2,\partial} = \mu_k\langle y_r, y_s\rangle_c = 0$ e $\mu_k\|y_r\|_{2,\partial}^2 = \|y_r\|_c^2 = 1$. Se definirmos, para $j \in \mathbb{N}$, $v_j = \dfrac{y_j}{\|y_j\|_{2,\partial}}$, então $\|v_j\|_c^2 = \mu_k < +\infty$. Por conseguinte, (v_j) é uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Como as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ são equivalentes em $H^1(\Omega)$, a sequência (v_j) é limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Com os mesmos argumentos do item (c) e pela reflexibilidade de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, a sequência (v_j) possui subsequência (v_{j_k}) tais que $v_{j_k} \rightharpoonup \tilde{v}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, onde $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$. Pelo Teorema A.1, $v_{j_k} \rightharpoonup \tilde{v}$ em $(L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{2,\partial})$. Assim, (v_{j_k}) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\partial\Omega)$. No entanto, para j_k e j_l grandes, com $j_k \neq j_l$, obtemos

$$\|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 = \left\| \frac{y_{j_k}}{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}} - \frac{y_{j_l}}{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 = \frac{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}^2}{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}^2}{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}^2} = 1 + 1 = 2.$$

Mas isto é um absurdo, pois a sequência (v_{j_k}) é de Cauchy em $L^2(\partial\Omega)$. Consequentemente, a dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Steklov deve ser finita.

■

1.6 DECOMPOSIÇÃO $H^1(\Omega)$.

Nesta seção, vamos descrever uma decomposição c-ortogonal para $H^1(\Omega)$.

Definição 1.2 Um funcional $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de

$$Lu = c(x)u - \triangle u = 0 \text{ em } \Omega, \tag{1.12}$$

quando $\langle u, \varphi \rangle_c = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla \varphi + c(x) u \varphi] dx = 0$, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, isto é, $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.12) se, e somente se, u é c-ortogonal a $C_c^1(\Omega)$.

Lema 1.2 Um funcional u em $H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.12) se, e somente se, $u \in W$, onde $W = H_0^1(\Omega)^\perp = \{u \in H^1(\Omega); \langle u, v \rangle_c = 0, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega)\}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de (1.12) e $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $C_c^1(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{H^1}$, existe uma sequência $(\varphi_k) \subset C_c^1(\Omega)$, tal que $\varphi_k \to v$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$.
Deste modo, em virtude das normas $\|\cdot\|_{H^1}$ e $\|\cdot\|_c$ serem equivalentes, $\varphi_k \to v$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Ainda, como o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ é contínuo, $\langle u, \varphi_k \rangle_c \to \langle u, v \rangle_c$ em $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Mas, como u é solução fraca de (1.12), $\langle u, \varphi_k \rangle_c = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\langle u, v \rangle_c = 0$ o que implica em $u \in W$, já que $v \in H_0^1(\Omega)$ é arbitrário.
($\Leftarrow$) Seja $u \in W$. Então $u \in H^1(\Omega)$ e $\langle u, v \rangle_c = 0$, para todo v em $H_0^1(\Omega)$. Como $C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ segue, em particular, que $\langle u, \varphi \rangle_c = 0$, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. E isto mostra que u é solução fraca de (1.12).

$\blacksquare$

Proposição 1.4 Seja $u \in H^1(\Omega)$. Então $\mathcal{B}(u) = 0$ se, e somente se, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{B}(u) = 0$. Então $\|u\|_{2,\partial} = 0$ e assim $u = 0$ q.t.p. em $L^2(\partial\Omega)$, ou seja, $\Gamma u = 0$. Logo pelo, Teorema A.11, para $s = 1, p = 2, l = 0$ concluimos que $u \in H_0^1(\Omega)$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Seguindo o mesmo raciocínio do Lema 1.2 conseguimos uma sequência $(\varphi_k) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_c)$. Pela continuidade de $\mathcal{B}$ e por $\mathcal{B}(\varphi_k) = 0$, pois $C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, segue que $\mathcal{B}(u) = 0$.

$\blacksquare$

Proposição 1.5 O espaço $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_c)$ admite a seguinte decomposição

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c W. \tag{1.13}$$

Demonstração. Como $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, para verificarmos a decomposição (1.5), mostraremos que $H_0^1(\Omega)$ é fechado em $H^1(\Omega)$ com a norma $\| \cdot \|_c$ e utilizaremos o Teorema A.12 para concluirmos a validade de (1.13).

Consideremos $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, tais que $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_c)$. Como as normas $\| \cdot \|_c$ e $\| \cdot \|_{H^1}$ são equivalentes, $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$. Por outro lado, $H_0^1(\Omega)$

é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, com a norma $\|\cdot\|_{H^1}$. Logo, $u \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, $H_0^1(\Omega)$ é fechado em $H^1(\Omega)$, com a norma $\|\cdot\|_c$ e vale o resultado.

$\blacksquare$

Seja $Aut(\mu_k)$ o autoespaço associado ao autovalor de Steklov μ_k. Pelo Teorema 1.6, item (d), $dimAut(\mu_k) < +\infty$. Consideremos $M_k = \{v_1^k, v_2^k, ..., v_{m_k}^k\}$ uma base c-ortonormal de $Aut(\mu_k)$.

Proposição 1.6 O conjunto $S = \{v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{m_2}^2, \ldots, v_1^k, \ldots, v_{m_k}^k, \ldots\}$ é c-ortonormal em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Demonstração. Se $u \in M_l$ e $v \in M_k$, com $l \neq k$, então, por $M_k = \{v_1^k, v_2^k, ..., v_{m_k}^k\}$ ser um subconjunto c-ortogonal de autofunções associados ao autovalor de Steklov μ_k e pelo Teorema 1.6-(c), $\langle u, v\rangle_c = \mu_k \langle u, v\rangle_{2,\partial} = 0$. Consequentemente,

$$S = \{v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{m_2}^2, \ldots, v_1^k, \ldots, v_{m_k}^k, \ldots\}$$

é um conjunto c-ortogonal em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Ainda, como $\|v_s^t\|_c = 1$, para quaisquer $1 \leq s \leq m_t$ e $t \in \mathbb{N}$, S é c-ortonormal em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

$\blacksquare$

Proposição 1.7 Se para cada $k \in \mathbb{N}$, denotarmos

$$w_k = \begin{cases} v_k^1 & \text{se} \quad 1 \leq k \leq m_1, \\ v_{k-m_j}^{j+1} & \text{se} \quad m_j < k \leq m_j + m_{j+1}, \end{cases}$$

então $\tilde{O} = (w_k)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\tilde{O}$ é uma sequência c-ortonormal;

(b) $w_k \in H_0^1(\Omega)^\perp$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$;

(c) Se $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp$ satisfaz $\tilde{u} \perp w_k$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\tilde{u} = 0$.

Demonstração. (a) Temos que $w_k \in S$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e S é um subconjunto c-ortonormal. Então, $\tilde{O}$ é uma sequência c-ortonormal.
(b) Pelo Lema 1.2, basta mostrar que w_k é solução fraca de (1.12), ou seja, $\langle w_k, \varphi\rangle_c = 0$, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Digamos que w_k seja solução associada ao autovalor de Steklov μ_l. Assim, $\langle w_k, \varphi\rangle_c = \mu_l \langle w_k, \varphi\rangle_{2,\partial}$, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Mas, $\langle w_k, \varphi\rangle_{2,\partial} = 0$, pois $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Por conseguinte, $\langle w_k, \varphi\rangle_c = 0$, o que significa que $w_k \in H_0^1(\Omega)^\perp$.

(c) Caso o item (c) não ocorra, existe $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)^{\perp}\backslash\{0\}$, tal que $\tilde{u} \perp w_k$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Ao considerarmos $\tilde{v} = \dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}$, $\|\tilde{v}\|_c = 1$ e $\langle \tilde{v}, w_k\rangle_c = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\tilde{v} \in K_J$, para todo $J \in \mathbb{N}$. Agora, pela definição de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(\tilde{v}) \geq 0$. Se $\mathcal{B}(\tilde{v}) = 0$, então, pela Proposição 1.5, $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$. Como $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)^{\perp}$, $\tilde{v} = 0$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Mas isto é um absurdo, uma vez que $\|\tilde{v}\|_c = 1$. Portanto, $\mathcal{B}(\tilde{v}) > 0$.

Finalmente pelo Teorema 1.6-(c), $\mu_J \to +\infty$ quando $J \to +\infty$. Por isto e por $\mu_J = \beta_J^{-1}$, segue que $\beta_J \to 0$, quando $J \to +\infty$. Deste modo, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}(\tilde{v}) > \beta_{J+1}$, mas isto é um absurdo, uma vez que $\beta_{J+1} = \sup\limits_{u \in K_J} \mathcal{B}(u)$ e $\tilde{v} \in K_J$. Portanto, vale o item (c).

$\blacksquare$

Observação 1.3 Pela Proposição 1.7, podemos concluir que $\tilde{O}$ é uma sequência c-ortonormal total em $H_0^1(\Omega)^{\perp}$.

Com efeito, pelos itens (a) e (b) da Proposição 1.7, temos que $\tilde{O}$ é uma sequência c-ortonormal em $H_0^1(\Omega)^{\perp}$.

Ainda, $H_0^1(\Omega)^{\perp}$ é um subespaço de Hilbert de $H^1(\Omega)$. Mas, $w_k \subset H_0^1(\Omega)^{\perp}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por isto e pelo item (c) da Proposição 1.7, não existe $u \in H_0^1(\Omega)^{\perp}\backslash\{0\}$ que seja ortogonal a todo o elemento de $\tilde{O}$. Daí, pelo Teorema A.13, segue que $\tilde{O}$ é total em $H_0^1(\Omega)^{\perp}$.

Observação 1.4 De acordo com a observação anterior a sequência $\tilde{O}$ define uma base de Hilbert para o espaço $H_0^1(\Omega)^{\perp}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Com isto, cada $u \in H_0^1(\Omega)^{\perp}$ é escrito de maneira única (a menos de ordem) como $u = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle u, w_k\rangle_c w_k$ e $\|u\|_c^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k\rangle_c|^2$.

Agora, pela continuidade e linearidade do operador traço $\Gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ e pelo fato de w_k ser autofunção associada ao autovalor σ_j, onde $\sigma_j = \mu_k$ se $\theta(k-1) < j \leq \theta(k)$, com $\theta(k) = \sum\limits_{l=1}^{k} m_l$, temos $\Gamma(u) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle u, w_k\rangle_c \Gamma(w_k)$ e

$$\|\Gamma(u)\|_{2,\partial}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k\rangle_c|^2 \sigma_k^{-1} \langle w_k, w_k\rangle_c = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^{-1} |\langle u, w_k\rangle_c|^2.$$

Proposição 1.8 Se, cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{V}_j = \left[\bigcup_{k=1}^{\theta(j)} M_k\right], \quad \tilde{Y}_j = \overline{\left[\bigcup_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} M_k\right]} \quad \text{e} \quad \tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega),$$

então $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$.

Demonstração. Seja $u \in H^1(\Omega)$, como $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c H_0^1(\Omega)^\perp$, existem únicos $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp$, tais que $u = u_0 + \overline{u}$. Mas, $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp = \overline{[\tilde{O}]}$. Logo, existe uma sequência $(c_j) \subset \mathbb{R}$, tal que

$$\overline{u} = c_1 w_1 + ... + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} + \lim_{n \to +\infty} S_n,$$

onde

$$S_n = \sum_{k=\theta(j)+1}^{n} c_k w_k \ \text{ e } \ c_k = \langle \overline{u}, w_k \rangle_c.$$

Assim, $u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + ... + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} + \lim_{n \to +\infty} S_n + u_0$. Com isto, $v = c_1 w_1 + ... + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} \in \tilde{V}_j$, $y = \lim_{n \to +\infty} S_n \in \tilde{Y}_j$, $x = y + u_0 \in \tilde{X}_j$ e $v \in \tilde{V}_j$, ou seja, $u = v + x \in \tilde{V}_j + \tilde{X}_j$. Finalmente, dado $x \in \tilde{V}_j \bigcap \tilde{X}_j$, $x \in \tilde{V}_j$ e $x \in \tilde{X}_j$. Mas $x \in \tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega)$ significa que $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in \tilde{Y}_j$ e $x_2 \in H_0^1(\Omega)$ são únicos. Por outro lado, $x \in \tilde{V}_j$, significa que $x = \sum_{k=1}^{\theta(j)} c_k w_k$. Agora pela Observação 1.4, $x_2 \in H_0^1(\Omega)^\perp$, e como $x_2 \in H_0^1(\Omega)$, segue que $x_2 = 0$. Com isto, $x = \sum_{k=1}^{\theta_j} c_k w_k = \sum_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k w_k$. Mas $\tilde{O}$ é uma base de Hilbert de $H_0^1(\Omega)^\perp$. Logo $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $x = 0$. E assim, $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$. ■

Observação 1.5 Pela definição de $\tilde{V}_j$, $dim \tilde{V}_j = m_1 + ... + m_j$. Assim, se $u \in \tilde{V}_j$ então $u = \sum_{k=1}^{\theta(j)} \langle u, w_k \rangle_c w_k$. Com o auxílio da Observação 1.4 e o item (a) do Teorema 1.6, obtemos $\|u\|_{2,\partial}^2 \geq \mu_j^{-1} \|u\|_c^2$, para todo $u \in \tilde{V}_j$. Com efeito,

$$\|u\|_{2,\partial}^2 = \|\Gamma(u)\|_{2,\partial}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^{-1} |\langle u, w_k \rangle_c|^2 \geq \mu_j^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k \rangle_c|^2 = \mu_j^{-1} \|u\|_c^2.$$

Observação 1.6 Se $\overline{u} \in \tilde{Y}_j \subset W$, então $\overline{u} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum\limits_{k=\theta(j)+1}^{n} c_k w_k\right]$. Com isto,

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}\|_{2,\partial}^2 &= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \langle w_k, w_l\rangle_{2,\partial} \\
&= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \sigma_k^{-1} \langle w_k, w_l\rangle_{c} \\
&= \sum_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k^2 \sigma_k^{-1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=\theta(j)+1}^{n} \sigma_k^{-1} c_k^2\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}\|_{c}^2 &= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \langle w_k, w_l\rangle_{c} \\
&= \sum_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=\theta(j)+1}^{n} c_k^2\right].
\end{aligned}$$

Por isto e pelo Teorema 1.6,

$$\|\overline{u}\|_{2,\partial}^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=\theta(j)+1}^{n} \sigma_k^{-1} c_k^2\right] \leq \mu_{j+1}^{-1} \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=\theta(j)+1}^{n} c_k^2\right] = \mu_{j+1}^{-1}\|\overline{u}\|_c^2.$$

Capítulo 2

O AUTOPROBLEMA DE NEUMANN

Problemas de operadores eliptícos de segunda ordem foram estudados por vários autores. Neste capítulo baseados nas referências [8] e [26] mostraremos alguns resultados relacionados a teoria de autovalores de Neumann.

O problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda u, & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ satisfaz **(A)** e $c(x)$ satifaz (C_1), é denominado autoproblema de Neumann. Vejamos a seguir algumas definições essenciais.

Definição 2.1 Uma solução fraca para o autoproblema de Neumann é um par (u, λ) em $H^1(\Omega)\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv]dx = \lambda \int_\Omega uvdx = 0, \quad \forall \quad v \in H^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Neste caso, u é dita uma autofunção de Neumann associada ao autovalor de Neumann, λ, para o autoproblema (2.1).

Nosso intuito neste capítulo é determinar uma sequência de autovalores de Neumann para (2.1). Para tal utilizaremos ideias similares as de McOwen [26] e De Godoi et al [11].

Para chegarmos a esses resultados, vamos primeiramente fornecer alguns fatos preliminares.

2.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Proposição 2.1 Para cada $u \in H^1(\Omega)$ fixado, o funcional $G_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $G_u(v) = \langle u, v\rangle_2$, para $v \in H^1(\Omega)$, é um elemento de $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $v \in H^1(\Omega)$, $G_u^{'}(v) \cdot w = \langle w, u\rangle_2$, para todo $w \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Inicialmente, observamos que o mergulho $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínuo. Consequentemente, existe constante $b_0 > 0$, tal que

$$\|w\|_2 \leq b_0\|w\|_{H^1}, \;\; \forall \;\, w \;\; \in H^1(\Omega).$$

Disto, segue que $|G_u(v)| = |\langle u, v\rangle_2| \leq \|u\|_2\|v\|_2 \leq b_0^2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$, ou seja, G_u é um funcional limitado. Podemos verificar que G_u também é linear. Deste modo, $G_u \in C^\infty(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $G_u^{'}(v) \cdot w = G_u(w) = \langle w, u\rangle_2$. Em particular, $G_u \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $G_u^{'}(v)w = \langle w, u\rangle_2$.

■

Proposição 2.2 O funcional $G : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $G(u) = \|u\|_2^2 - 1$, é um elemento de $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, $G^{'}(u) \cdot v = 2\langle u, v\rangle_2$, para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos reescrever o funcional G como $G = \tilde{P} + \tilde{Q}$, sendo $\tilde{P}(u) = \|u\|_2^2$ e $\tilde{Q}(u) = -1$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Como $\tilde{Q}$ é constante, $\tilde{Q} \in C^\infty(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $\tilde{Q}^{'}(u) = 0$, para qualquer $u \in H^1(\Omega)$. Desta forma, para concluirmos a demonstração da Proposição, devemos mostrar que $\tilde{P} \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e deve ter a derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ dada por $\tilde{P}^{'}(u) \cdot v = 2\langle u, v\rangle_2$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Pela Proposição 2.2 temos que $N_u = 2G_u$ para $u \in H^1(\Omega)$ fixado, é um funcional linear e limitado.

Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{b_0}$ tal que se $0 < \|v\|_{H^1} < \dfrac{\epsilon}{b_0}$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\tilde{P}(u+v) - \tilde{P}(u) - N_u(v)| &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\|u+v\|_2^2 - \|u\|_2^2 - 2\langle u, v\rangle_2| \\ &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}}|\langle v, v\rangle_2| \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}}b_0|\langle v, v\rangle_{H^1}| \leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot b_0\|v\|_{H^1}^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{P}$ é diferenciável.

Finalmente, se (u_k) é sequência em $H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, forem tais que $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, então

$$\begin{aligned}\|\tilde{P}'(u_k) - \tilde{P}'(u)\|_{H^1}^* &= \sup\{|[\tilde{P}'(u_k) - P'(u)] \cdot v|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &= \sup\{|N_{u_k}(v) - N_u(v)|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &= \sup\{|2\langle u_k - u, v\rangle_2|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq 2\sup\{\|u_k - u\|_2\|v\|_2; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq 2b_0^2\|u_k - u\|_{H^1} \to 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|),\end{aligned}$$

uma vez que $\|u_k - u\|_{H^1} \to 0$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$.

Portanto, $\tilde{P}'$ é um operador contínuo o que finda a prova da Proposição em questão.

■

2.2 CONSTRUÇÃO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE NEUMANN

Objetivamos, nesta seção, construir o primeiro autovalor de Neumann. Para isto, consideramos, $\mathbb{L} = \{u \in H^1(\Omega); \|u\|_2^2 = 1\}$. No que segue, provaremos que existe $u_1 \in \mathbb{L}$, tal que $\lambda_1 = \mathcal{D}_c(u_1) = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \mathcal{D}_c(u)$ é o primeiro autovalor positivo de Neumann, com autofunção associada u_1.

Teorema 2.1 Existe um par (u_1, λ_1) em $[H^1(\Omega)\backslash\{0\}] \times \mathbb{R}$, o qual é solução fraca do auto-problema (2.1).

Demonstração. Seja $\gamma_1 = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \mathcal{D}$. Pela definição de ínfimo, existe uma sequência (u_k) em $\mathbb{L}$, tal que $\mathcal{D}_c(u_k) \to \gamma_1$ em $(\mathbb{R}; |\cdot|)$ e $\mathcal{D}_c(u_k) \leq \gamma_1 + 1$. Como $\|u_k\|_c^2 = \mathcal{D}_c(u_k)$, $\|u_k\|_c^2 < \gamma_1 + 1$, ou seja, a sequência (u_k) é limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Pela equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$, a sequência (u_k) é também limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Agora, visto que $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ é um espaço reflexivo, do Teorema A.9, garantimos a existência de uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k) e de $\overline{u} \in H^1(\Omega)$, tais que $u_{k_j} \rightharpoonup \overline{u}$ em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema A.7, $u_{k_j} \to \overline{u}$ em $L^2(\Omega)$. Deste modo, pela continuidade da norma $\|\cdot\|_2$, $\|u_{k_j}\|_2 \to \|\overline{u}\|_2$. Daí, por $u_{k_j} \in \mathbb{L}$, $\|\overline{u}\|_2 = 1$ e portanto $\overline{u} \in \mathbb{L}$.

Afirmamos, que $D_c(\overline{u}) = \gamma_1$. Para verificarmos isto, basta mostrarmos que $\mathcal{D}_c(\overline{u}) \leq \gamma_1$, já que por $\overline{u} \in \mathbb{L}$ resulta em $\mathcal{D}_c(\overline{u}) \geq \gamma_1$.

Na demonstração do Teorema 1.1, vimos que toda sequência (u_{k_j}), onde $u_{k_j} \rightharpoonup \overline{u}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ satisfaz $\liminf \|u_{k_j}\|_c \geq \|\overline{u}\|_c$. Com isto segue que

$$\mathcal{D}_c(\overline{u})^{1/2} = \|\overline{u}\|_c \leq \liminf \|u_{k_j}\|_c = \lim \|u_{k_j}\|_c = \gamma_1^{1/2},$$

Logo, $\mathcal{D}_c(\overline{u}) = \gamma_1$. Diante disso, podemos ver $\overline{u}$ como um extremo de $\mathcal{D}_c$ restrito ao conjunto $G^{-1}(G(\overline{u}))$. Desta forma, devido a G e $\mathcal{D}_c \in C^1(H^1(\Omega);\mathbb{R})$, podemos aplicar o Teorema A.22, isto é uma das duas condições abaixo deve ocorrer:

(1) $G^{'}(\overline{u}) \cdot v = 0$, para todo $v \in H^1(\Omega)$;

(2) Existe $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{D}_c^{'}(\overline{u}) \cdot v = \gamma G^{'}(\overline{u}) \cdot v$, para todo $v \in H^1(\Omega)$.

A condição (1) não ocorre, pois $G^{'}(\overline{u}) \cdot \overline{u} = 2\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle_c = 2\|\overline{u}\|_c^2 = 2 \neq 0$. Deste modo, a condição (2) vale, ou seja,

$$\int_\Omega [\nabla \overline{u} \cdot \nabla v + c(x)\overline{u}v]dx = \gamma \int_\Omega \overline{u}v dx. \tag{2.3}$$

Tomando $\overline{u} = v$ em (2.3), obtemos $\mathcal{D}_c^{'}(\overline{u}) \cdot \overline{u} = \gamma G^{'}(\overline{u}) \cdot \overline{u}$.
Logo, $\gamma_1 = \|\overline{u}\|_c^2 = \mathcal{D}_c^{'}(\overline{u}) = \gamma \langle \overline{u}, \overline{u} \rangle_2 = \gamma \|\overline{u}\|_2^2 = \gamma$. Por isto, pela validade de (2.3) e por $\|\overline{u}\|_2 = 1$, segue que o par $(\overline{u}, \gamma)$ é uma solução fraca para o autoproblema (2.1). Consequentemente, ao denotarmos $\lambda_1 = \gamma$ e $u_1 = \overline{u}$, λ_1 é autovalor de Neumann para o autoproblema (2.1), tendo como autofunção associada u_1.

■

Teorema 2.2 O autovalor de Neumann λ_1 satisfaz:

(N1) $\lambda_1 > 0$;

(N2) λ_1 é o menor autovalor positivo de Neumann para o autoproblema (2.1);

(N3) $\|u\|_c^2 \geq \lambda_1 \|u\|_2^2$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. (N1) Pelo Teorema anterior, temos que $\lambda_1 = \mathcal{D}_c(u_1) \geq 0$. Caso $\lambda_1 = 0$, $\|u_1\|_c^2 = 0$. Consequentemente, $u_1 = 0$ q.t.p. em $H^1(\Omega)$. No entanto, $u_1 \in \mathbb{L}$, ou seja, $\|u_1\|_2 = 1$, o que é um absurdo. Logo $\lambda_1 > 0$.
(N2) Suponhamos que (N2) não ocorra. Assim, existem $\tilde{u} \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, com $0 < \tilde{\lambda} < \lambda_1$, tais que $\langle \tilde{u}, v \rangle_c = \tilde{\lambda}\langle \tilde{u}, v \rangle_2$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Ao tomarmos $\tilde{v} = \dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2^2}$, teremos $D_c(\tilde{v}) = \dfrac{\|\tilde{u}\|_c^2}{\|\tilde{u}\|_2^2} = \tilde{\lambda}$. Por outro lado, $G\left(\dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2^2}\right) = 0$. Consequentemente, $\tilde{v} \in \mathbb{L}$. Por termos $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \mathcal{D}_c(u)$, $\lambda_1 \leq \mathcal{D}_c\left(\dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2^2}\right) = \tilde{\lambda}$, o que contradiz nossa suposição inicial. Portanto vale (N2).
(N3) Se $u \equiv 0$ vale a igualdade. Caso $u \neq 0$, consideramos $v = \dfrac{u}{\|u\|_2} \in \mathbb{L}$. Assim, $\mathcal{D}_c(v) \geq \lambda_1 = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \mathcal{D}_c(u)$. Como $\mathcal{D}_c(v) = \dfrac{\|\tilde{u}\|_c^2}{\|\tilde{u}\|_2^2}$, segue que $\|u\|_c^2 \geq \lambda_1 \|u\|_2^2$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

■

2.3 SEQUÊNCIA DE AUTOVALORES DE NEUMANN

De maneira muito semelhante à construção da sequência de autovalores de Steklov, construiremos a sequência de autovalores de Neumann. Os resultados da seção anterior garantem a existência de um primeiro autovalor de Neumann λ_1, associado a autofunção u_1. Por um processo de indução finita, obteremos tal sequência.

Proposição 2.3 Se os pares $(u, \lambda), (w, \beta)$ em $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ forem soluções fraca para o autoproblema (2.1), com $\lambda \neq \beta$, então $\langle u, w \rangle_2 = 0$.

Demonstração. Como (u, λ) e (w, β) são soluções fraca para o autoproblema (2.1), então

$$\langle u, w \rangle_c = \lambda \langle u, w \rangle_2 \quad \text{e} \quad \langle w, u \rangle_c = \beta \langle w, u \rangle_2.$$

Logo, $(\beta - \lambda)\langle w, u \rangle_2 = 0$. Visto que $\beta \neq \lambda$, $\langle w, u \rangle_2 = 0$.

■

Teorema 2.3 Existe uma sequência de pares $((u_k, \lambda_k))$ em $(H^1(\Omega) \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}$, os quais são soluções fraca para o autoproblema (2.1) e satisfazem

(1) $\lambda_k = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}_{k-1}} \mathcal{D}_c(u)$, sendo, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L} \quad \text{e} \quad \mathbb{L}_k = \{u \in \mathbb{L}; \langle u, u_i \rangle_2 = 0, i = 1, 2, \ldots, k\};$$

(2) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$;

(3) $\langle u_k, u_l \rangle_2 = \delta_{kl}$, para $k, l \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado será por indução sobre k. A validade do Teorema para o caso $k = 1$ é dada pelo Teorema 2.1. Suponhamos que o Teorema seja válido para s com $1 \leq s \leq k$ e verifiquemos a validade do mesmo para $k + 1$.

Afirmação 1. Existe $\widehat{u} \in \mathbb{L}_k$ tal que $\gamma_{k+1} = \mathcal{D}_c(\widehat{u}) = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}_k} \mathcal{D}_c(u)$.

Com efeito, pela definição de ínfimo, existe sequência (u_s) em $\mathbb{L}_k$ tal que

$$\mathcal{D}_c(u_s) \to \gamma_{k+1} \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_c(u_s) \leq \gamma_{k+1} + 1. \tag{2.4}$$

Como $\|u_s\|_c^2 = \mathcal{D}_c(u_s) \leq \gamma_{k+1} + 1$, a (u_s) é sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Devido às normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes, a sequência (u_s) é limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$.

Por $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ ser um espaço reflexivo, existem subsequência (u_{s_j}) de (u_s) e $\widehat{u} \in H^1(\Omega)$, tais que $u_{s_j} \rightharpoonup \widehat{u}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Pelo Teorema A.7, assim $u_{s_j} \to \widehat{u}$ em $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$. Agora, pela continuidade da norma $\|\cdot\|_2$, $\|u_{s_j}\|_2 \to \|\widehat{u}\|_2$ e, por $u_{s_j} \in \mathbb{L}_k$, $\|u_{s_j}\|_2 = 1$. Consequentemente, $\|\widehat{u}\|_2 = 1$, isto é, $\widehat{u} \in \mathbb{L}$.

Ainda, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional contínuo munindo $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, com a norma $\|\cdot\|_2 + \|\cdot\|_2$. Diante disto, temos que $\langle u_{s_j}, u_i\rangle_2 \to \langle \widehat{u}, u_i\rangle_2$, para $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Agora, visto que $u_{s_j} \in \mathbb{L}_k$, $\langle u_{s_j}, u_i\rangle_2 = 0$ para $j \in \mathbb{N}$. Logo, $\langle \widehat{u}, u_i\rangle_2 = 0$, para $i = 1, 2, ..., k$, ou seja, $\widehat{u} \in \mathbb{L}_k$.

Finalmente, mostremos que $\mathcal{D}_c(\widehat{u}) = \gamma_{k+1}$. Como $\widehat{u} \in \mathbb{L}_k$, $\gamma_{k+1} \le \mathcal{D}_c(\widehat{u})$. Por outro lado, como toda sequência (u_{s_j}) tal que $u_{s_j} \rightharpoonup \widehat{u}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, satisfaz, $\liminf \|u_{s_j}\|_c \ge \|\widehat{u}\|_c$, por (2.4), conclui-se $\gamma_{k+1} \ge \|\widehat{u}\|_c^2 = \mathcal{D}_c(\widehat{u})$. Isto mostra que $\mathcal{D}_c(\widehat{u}) = \gamma_{k+1}$.

Afirmação 2. Se $u_{k+1} = \widehat{u}$, então (u_{k+1}, γ_{k+1}) é solução fraca para o autoproblema (2.1). De fato, pela hipótese de indução os pares $(u_s, \lambda_s) \in (H^1(\Omega)\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ são soluções fraca para o autoproblema (2.1) e satisfazem as condições (1), (2) e (3). Assim, tem sentido definirmos para $s \in \mathbb{N}$ com $1 \le s \le k$ os funcionais $G_s : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $G_s(u) = \langle u, u_s\rangle_2$, para $u \in H^1(\Omega)$. Pela Proposição 2.1, demonstramos que o funcional $G_s = G_{u_s} \in C^1(H^1(\Omega), , \mathbb{R})$, com $u_s \in H^1(\Omega)$ fixado e sua derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ é dada por $G_s^{'}(u)(v) = \langle v, u_s\rangle_2$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. De acordo com a Afirmação 1, γ_{k+1} é um valor extremo de $\mathcal{D}_c$ restrito ao conjunto

$$G^{-1}(G(u_{k+1})) \cap \left[\bigcap_{s=1}^{k} G_s^{-1}(G_s(u_{k+1}))\right].$$

Como $\mathcal{D}_c$ e $G_i \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, segue pelo Teorema A.22, que uma das seguintes condições deve valer

(1) $detA(v_1, \ldots, v_{k+1}) = 0$, para quaisquer $v_1, \ldots, v_{k+1} \in H^1(\Omega)$, onde

$$A(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} G^{'}(u_{k+1}) \cdot v_1 & G^{'}(u_{k+1}) \cdot v_2 & \ldots & G^{'}(u_{k+1}) \cdot v_{k+1} \\ G'_1(u_{k+1}) \cdot v_1 & G_1^{'}(u_{k+1}) \cdot v_2 & \ldots & G_1^{'}(u_{k+1}) \cdot v_{k+1} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ G_k^{'}(u_{k+1}) \cdot v_1 & G_k^{1}(u_{k+1}) \cdot v_2 & \ldots & G_k^{'}(u_{k+1}) \cdot v_{k+1} \end{pmatrix}.$$

(2) Existem $\lambda, \vartheta_s \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, tais que

$$\mathcal{D}_c^{'}(u_{k+1}) \cdot v = \lambda G^{'}(u_{k+1}) \cdot v + \sum_{s=1}^{k} \vartheta_s G_s^{'}(u_{k+1}) \cdot v, \ \ \forall \ v \in H^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Como $\mathcal{D}_c'(u)\cdot v = 2\langle u, v\rangle$ para quaisquer $u, v \in H^1(\Omega)$ e $\|u_s\|_2 = 1$, para $s = 1, 2, ..., k$. Temos,

a) $G'(u_{k+1}) \cdot u_{k+1} = 2\langle u_{k+1}, u_{k+1}\rangle_2 = 2\|u_{k+1}\|_2^2 = 2 \cdot 1,$

b) $G'(u_{k+1}) \cdot u_s = 2\langle u_{k+1}, u_s\rangle_2 = 0,$

c) $G_s'(u_{k+1}) \cdot u_{k+1} = \langle u_{k+1}, u_s\rangle_2 = 0,$

d) $G_s'(u_{k+1}) \cdot u_s = \langle u_s, u_s\rangle_2 = \|u_s\|_2^2 = 1.$

Logo $detA(u_{k+1}, u_1, u_2, ..., u_k) = 2 \neq 0$. Portanto, (2) deve ocorrer. Agora, ao tomarmos, para cada $l = 1, 2, ..., k$, $v = u_l$ em (2.5) obtemos

$$\mathcal{D}_c'(u_{k+1}) \cdot u_l = \lambda G'(u_{s+1}) \cdot u_l + \sum_{s=1}^{k} \vartheta_s G_s'(u_{k+1}) \cdot u_l.$$

Ainda, $\langle u_s, u_j\rangle_2 = \delta_{sj}$ para $s, j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$. Logo, $\mathcal{D}_c'(u_{k+1}) \cdot u_l = \vartheta_l$. Além disso, para $1 \leq l \leq k$, $\mathcal{D}_c'(u_{k+1})\cdot u_l = \mathcal{D}_c'(u_l)\cdot u_{k+1}$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{D}_c'(u_l)\cdot u_{k+1} = \lambda_l G'(u_l)\cdot u_{k+1}$. Donde segue que

$$\vartheta_l = \lambda_l G'(u_l) \cdot u_{k+1} = 2\lambda_l \langle u_l, u_{k+1}\rangle_2 = 0.$$

Logo $\vartheta_l = 0$, para $1 \leq l \leq k$. Com isto, $D_c'(u_{k+1})\cdot v = \lambda G'(u_{k+1})\cdot v$, para todo v em $H^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega [\nabla u_{k+1} \cdot \nabla v + c(x)u_{k+1}v]dx = \lambda \int_\Omega u_{k+1}v dx, \ \ \forall \ v \in H^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Portanto, o par (u_{k+1}, λ) é solução fraca para o autoproblema (2.1).

Afirmamos que $\lambda = \gamma_{k+1}$. Com isto ao substituirmos $v = u_{k+1}$ em (2.6), obtemos $\|u_{k+1}\|_c^2 = \lambda\|u_{k+1}\|_2^2$. Como $\|u_{k+1}\|_2 = 1$ segue que $\lambda = \|u_{k+1}\|_c^2 = \mathcal{D}_c(u_{k+1}) = \gamma_{k+1}$. Deste modo, se $\lambda_{k+1} = \gamma_{k+1}$, então λ_{k+1} é autovalor de Neumann para o autoproblema (2.1) tendo como autofunção, u_{k+1}.

Afirmação 3. $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, como $\lambda_{k+1} = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}_k} \mathcal{D}_c(u)$ e $\mathbb{L}_k \subset \mathbb{L}_{k-1}$ teremos

$$\lambda_{k+1} = \inf_{u \in \mathbb{L}_k} \mathcal{D}_c(u) \geq \inf_{u \in \mathbb{L}_{k-1}} \mathcal{D}_c(u) = \lambda_k.$$

Utilizando a hipótese de indução e a Afirmação 3, concluimos que

$$0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \ldots$$

Finalmente, para $l = k$, temos $\langle u_l, u_l \rangle_2 = \|u_l\|_2^2 = 1$. Caso $k < l$, $\langle u_l, u_k \rangle_2 = 0$, uma vez que $u_l \in \mathbb{L}_l$. Analogamente, para o caso em que $k > l$. Logo, $\langle u_k, u_l \rangle_2 = \delta_{kl}$, para $k, l \in \mathbb{N}$. Assim segue a validade do Teorema em questão.

■

No Teorema 2.3 construimos uma sequência de autovalores de Neumann para o autoproblema (2.1), cujas autofunções são duas a duas ortogonais em $L^2(\Omega)$. No que segue vemos algumas propriedades relativas a estes objetos.

Teorema 2.4 A sequência (u_k, λ_k) satisfaz:

(1) $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$;

(2) A dimensão do autoespaço associada a cada autovalor λ_k é finita.

Demonstração. Suponhamos que o item (1) não seja válido, ou seja, existe $J \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_k \leq J$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{D}_c(u_k) = \|u_k\|_c^2 = \lambda_k$, segue que (u_k) é uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Visto que as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ são equivalentes, (u_k) é uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Como $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ é espaço reflexivo, existem subsequência (u_{k_j}) de (u_k) e $\widehat{u} \in H^1(\Omega)$, tais que $u_{k_j} \rightharpoonup \widehat{u}$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Por outro lado, pelo Teorema A.7 $u_{j_k} \to \widehat{u}$ em $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$. Deste modo, (u_{k_j}) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$.

Agora, ao considerarmos k_j e k_l grandes e distintos, temos

$$\|u_{k_j} - u_{k_l}\|_2^2 = \|u_{k_j}\|_2^2 - 2\langle u_{k_j}, u_{k_l} \rangle + \|u_{k_l}\|_2^2 = 1 + 1 = 2,$$

o que contraria o fato de (u_{k_j}) ser uma sequência de Cauchy. Portanto vale o item (1).

Suponhamos agora que o item (2) também não seja válido, ou seja, a dimensão do autoespaço associado ao autovalor λ_k seja infinita. Neste caso, vamos considerar uma sequência (w_l) de autofunções c-ortogonais em $H^1(\Omega)$ associadas ao autovalor λ_k. Consequentemente, para $r, s \in \mathbb{N}$, com $r \neq s$, $\langle w_r, w_s \rangle_2 = \lambda_k^{-1} \langle w_r, w_s \rangle_c = 0$ e $1 = \|w_l\|_c^2 = \lambda_k \|w_l\|_2^2$. Desta maneira, ao definirmos, para cada $l \in \mathbb{N}$, $v_l = \dfrac{w_l}{\|w_l\|_2}$, a sequência (v_l) é limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, pois $\|v_l\|_c^2 = \dfrac{\|w_l\|_c^2}{\|w_l\|_2^2} = \dfrac{1}{\|w_l\|_2^2} = \lambda_k < +\infty$.

Com argumentos similares à prova do item (1), garantimos a existência de uma subsequência (v_{k_j}) de (v_l), que é sequência de Cauchy em $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$.

Finalmente, para l_j e l_s grandes e distintos, temos

$$\|v_{l_j} - v_{l_s}\|_2^2 = \left\| \frac{w_{l_j}}{\|w_{l_j}\|_2} - \frac{w_{l_s}}{\|w_{l_s}\|_2} \right\|_2^2 = \frac{\|w_{l_j}\|_2^2}{\|w_{l_j}\|_2^2} + \frac{\|w_{l_s}\|_2^2}{\|w_{l_s}\|_2^2} = 1 + 1 = 2,$$

o que contraria o fato de (v_{l_j}) ser uma sequência de Cauchy. Portanto vale o item (2). ■

2.4 UMA OUTRA DECOMPOSIÇÃO DE $H^1(\Omega)$

Nesta seção, de maneira muito similar ao que fizemos na Seção 1.6, vamos decompor $H^1(\Omega)$ como soma direta de dois subespaços, os quais estão relacionados às autofunções do problema (2.1).

Pela validade do item (2) do Teorema 2.4 se denotarmos, $Aut(\lambda_k)$ o autoespaço associado ao autovalor λ_k, $\zeta_k = \dim Aut(\lambda_k) < +\infty$.

Seja $B_k = \{u_1^k, u_2^k, ..., u_{\zeta_k}^k\} \subset H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$ de $Aut(\lambda_k)$. Pelo Teorema 2.3, $\langle u, v\rangle_2 = 0$, para qualquer $u \in B_k$ e $v \in B_l$ com $l \neq k$.

Assim, $N = \{u_1^1, ..., u_{\zeta_1}^1, u_1^2, ..., u_{\zeta_2}^2, ..., u_1^k, ..., u_{\zeta_k}^k, ...\}$ define um conjunto ortonormal em $L^2(\Omega)$.

Agora para $j \in \mathbb{N}$ fixado, o subespaço E_j gerado por $F_j = \{u_1^1, ..., u_{\zeta_1}^1, ..., u_1^j, ...u_{\zeta_j}^j\}$ possui dimensão finita e igual a $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_j$. Consequentemente, E_j é um subespaço fechado em $L^2(\Omega)$. Logo $L^2(\Omega) = E_j \oplus E_j^\perp$ onde $E_j^\perp = \{u \in L^2(\Omega); \langle u, v\rangle_2 = 0, \ \forall \ v \in E_j\}$. Ainda pelo Teorema A.14, $H^1(\Omega) = E_j \oplus (E_j^\perp \cap H^1(\Omega))$.

Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, denotarmos

$$v_k = \begin{cases} u_k^{j+1}, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq \zeta_{j+1}, \\ u_{k-\zeta_{j+l}}^{j+l+1}, & \text{se} \quad \zeta_{j+l} < k \leq \zeta_{j+l} + \zeta_{j+l+1}, l \geq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

então $O = (v_k)$ é uma sequência ortonormal em $E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$, pois $v_k \in N$ e N é um conjunto ortonormal em $L^2(\Omega)$.

Proposição 2.4 *O é uma sequência ortonormal total em $E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$.*

Demonstração. Anteriormente, vimos que O é uma sequência ortonormal em $E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$. Resta mostrarmos que O é total em $E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$. Para tanto, é necessário verificar que se $\tilde{u} \in E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$ satisfaz $\tilde{u} \perp O$ em $L^2(\Omega)$, então $\tilde{u} = 0$. Suponhamos que isto não ocorra, ou seja, existe $\tilde{u} \in (E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)) \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{u} \perp O$ em $L^2(\Omega)$. Se considerarmos $\tilde{v} = \dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2}$, então $\|\tilde{v}\|_2 = 1$ e $\langle \tilde{v}, u\rangle_2 = 0$ para todo $u \in O$. Disto e da caracterização variacional de λ_k, temos que $\lambda_k \leq \|\tilde{v}\|_c^2$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas isto é um absurdo, uma vez que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$. Logo, O é total em $E_j^\perp \bigcap H^1(\Omega)$ e segue a validade da Proposição. ■

Observação 2.1 A sequência O define uma base de Hilbert para $E_j^{\perp}\bigcap H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$. Com isto, dado $u\in E_j^{\perp}\bigcap H^1(\Omega)$, $u=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\langle u,v_k\rangle_2 v_k$ e $\|u\|_2^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle u,v_k\rangle_2|^2$.

Agora, para $k\in\mathbb{N}$ e $u\in H^1(\Omega)$, $\langle u,v\rangle_c=\lambda_k\langle u,v\rangle_2$, para todo $v\in B_k$. Deste modo, podemos reescrever $E_j^{\perp}\bigcap H^1(\Omega)$ como

$$E_j^{\perp}\cap H^1(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega);\langle u,v\rangle_c=0,\ \forall\ v\in E_j\}=(E_j)_c^{\perp},$$

que é um subespaço fechado de $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$.

Ao denotarmos $w_k=\dfrac{v_k}{\|v_k\|_c}$, onde v_k é dado por (2.7), a sequência (w_k) é c-ortonormal em $(E_j)_c^{\perp}$.

Proposição 2.5 A sequência $O_c=(w_k)$ é total em $(E_j)_c^{\perp}$.

Demonstração. Para mostrarmos que O_c é total em $(E_j)_c^{\perp}$, provaremos que se $\tilde{u}\in(E_j)_c^{\perp}$ for tal que $\tilde{u}\perp O_c$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$, então $\tilde{u}=0$, uma vez que $(E_j)_c^{\perp}$ é um subespaço de Hilbert em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$ e vale o Teorema A.13. Suponhamos, por absurdo, que exista $\tilde{u}\in(E_j)_c^{\perp}\backslash\{0\}$, tal que $\tilde{u}\perp O_c$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$. Desta forma, para $k\in\mathbb{N}$, temos $\langle\tilde{u},w_k\rangle_c=0$, assim, $\langle\|\tilde{u}\|_2^{-1}\tilde{u},v_k\rangle_c=0$. Logo, $\langle\|\tilde{u}\|_2^{-1}\tilde{u},v_k\rangle_2=0$. Agora, ao considerarmos $\tilde{v}=\dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2}$, $\|\tilde{v}\|_2=1$ e $\langle\tilde{v},u\rangle_2=0$ para todo $u\in O_c$.

Daí, segue que $\lambda_k\leq\|\tilde{v}\|_c^2$, para todo $k\in\mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois $\lambda_k\to+\infty$, $k\to+\infty$. Portanto, $\tilde{u}=0$ e segue o resultado. ■

Observação 2.2 Em consequência da Proposição 2.5, a sequência O_c define uma base de Hilbert para $(E_j)_c^{\perp}\subset H^1(\Omega)$. Deste modo dado $u\in(E_j)_c^{\perp}$, temos $u=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\langle u,w_k\rangle_c w_k$ e $\|u\|_c^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle u,w_k\rangle_c|^2$.

Se considerarmos

$$\varrho_k=\begin{cases}\lambda_{j+1}, \text{se } 1\leq k\leq\zeta_{j+1},\\ \lambda_{j+l+1},\ \text{se } \zeta_{j+l}<k\leq\zeta_{j+l}+\zeta_{j+l+1}, l\geq 1\end{cases}$$

obtemos então, para $u\in(E_j)_c^{\perp}$,

$$\|u\|_2^2=\sum_{k=1}^{+\infty}\varrho_k^{-2}|\langle u,v_k\rangle_c|^2 \quad\text{e}\quad \|u\|_c^2=\sum_{k=1}^{+\infty}\varrho_k^{-1}|\langle u,v_k\rangle_c|^2.$$

Como $0 < \lambda_{j+1} \leq \lambda_k$, para $k \geq j+1$, $\lambda_k^{-1} \leq \lambda_{j+1}^{-1}$. Donde resulta $\varrho_k^{-1} \leq \lambda_{j+1}^{-1}$ para todo $k \geq j+1$.

Por conseguinte,

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \varrho_k^{-2} |\langle u, v_k \rangle_c|^2 \leq \lambda_{j+1}^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \varrho_k^{-1} |\langle u, v_k \rangle_c|^2 = \lambda_{j+1}^{-1} \|u\|_c^2.$$

Observação 2.3 Seja $u \in E_j$. Visto que $\bigcup_{k=1}^{j} B_k$ é base para E_j, se denotarmos para $1 \leq k \leq \zeta$ e $1 < l \leq j-1$ quando $j \geq 2$

$$z_k = \begin{cases} v_k^1, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq \zeta_1, \\ v_{k-\zeta_l}^{l+1}, & \text{se} \quad \zeta_l < k \leq \zeta_l + \zeta_{l+1}, \end{cases}$$

então existem únicos escalares $c_k \in \mathbb{R}$, para $1 \leq k \leq \zeta$, tais que $u = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k z_k$. Além disso, como $\{z_k, 1 \leq k \leq \zeta\} \subset N$, temos que $\langle z_k, z_l \rangle_2 = 0$ e $\|z_k\|_2 = 1$ para $1 \leq k, l \leq \zeta$ e $k \neq l$. Consequentemente,

$$\|u\|_2^2 = \sum_{l,k=1}^{\zeta} c_k c_l \langle z_k, z_l \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2$$

e

$$\|u\|_c^2 = \sum_{l,k=1}^{\zeta} c_k c_l \langle z_k, z_l \rangle_c = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 \|z_k\|_c^2.$$

Se denotarmos, para $1 \leq k \leq \zeta$ e $1 \leq l \leq j-1$

$$\rho_k = \begin{cases} \lambda_1, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq \zeta_1, \\ \lambda_{l+1}, & \text{se} \quad \zeta_l < k \leq \zeta_l + \zeta_{l+1}, \end{cases}$$

então

$$\|u\|_c^2 = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 \|z_k\|_c^2 = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 \rho_k \|z_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 \rho_k.$$

Agora, como $\lambda_k \leq \lambda_j$ para $1 \leq k \leq j$, temos $\rho_k \leq \lambda_j$, para $1 \leq k \leq \zeta$. Deste modo

$$\|u\|_c^2 = \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 \rho_k \leq \lambda_j \sum_{k=1}^{\zeta} c_k^2 = \lambda_j \|u\|_2^2. \tag{2.8}$$

Capítulo 3

RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo, enunciaremos os principais resultados deste trabalho. Tais resultados estão no artigo de Mavinga e Nkashama [25] e garantem a existência de solução fraca para a seguinte classe de equações diferenciais parciais de segunda ordem, com condições de fronteira não lineares,

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x,u), & \text{se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u), & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ é de classe $C^{0,1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla$ é a derivada normal unitária exterior a $\partial\Omega$.

Assumiremos que c satisfaz (C_1) e que valem

(C_2) $f, g \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(C_3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$, tais que $|g(x,u)| \leq a_1 + a_2|u|^s$, com $0 \leq s < \dfrac{n}{n-2}$;

(C_3') Existem constantes $b_1, b_2 > 0$, tais que $|f(x,u)| \leq b_1 + b_2|u|^t$, com $0 \leq t < \dfrac{n+2}{n-2}$.

Observação 3.1 Como $\partial\Omega$ é de Classe $C^{0,1}$, vale a condição **(A)**, da na seção 1.1, do Capítulo 1. Deste modo, visto que a condição (C_1) vale, todos resultados do Capítulo 1 e do Capítulo 2 continuam válidos.

Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (3.1), se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)uv dx = \int_\Omega f(x,u) \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} g(x,u) \cdot v d\sigma, \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Os resultados de existência de solução fraca para (3.1), que estudamos, relacionam a não-linaeridade de reação, f, com o espectro de Neumann e a não-linearidade de fronteira, g, com o espectro de Steklov.

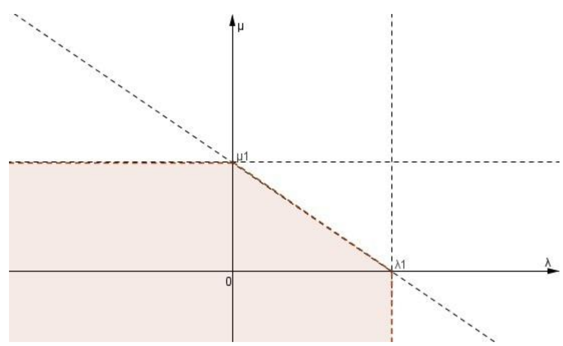
No que segue, enunciaremos os principais Teoremas deste trabalho que serão demonstrados com o transcorrer do mesmo.

Teorema 3.1 Suponhamos que as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e (C_3') sejam válidas. Além disso, sejam $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$, satisfazendo:
(C_4**)** Existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tais que

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq \mu < \mu_1 \text{ e } \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \lambda < \lambda_1, \tag{3.2}$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$. Então existe ao menos uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ para o problema (3.1).

A região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, representa, geometricamente, a variação dos parâmetros λ, μ, conforme $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$, $\mu < \mu_1$ e $\lambda < \lambda_1$.



Teorema 3.2 Suponhamos que as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e (C_3') sejam satisfeitas, e ainda, que a seguinte condição valha:
(C_5**)** Existem constantes $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que

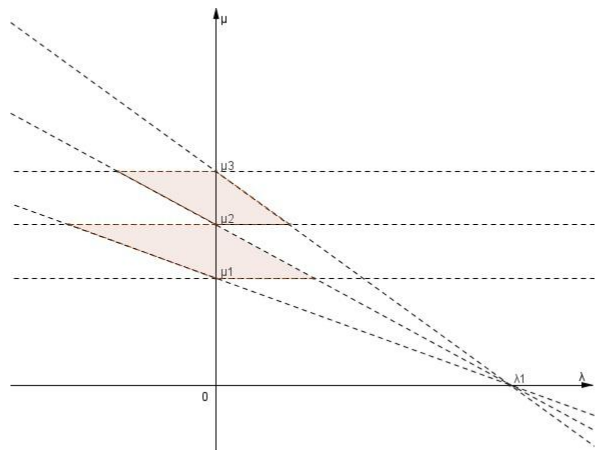
$$\mu_j < a \leq \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u} \leq \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u} \leq b < \mu_{j+1} \tag{3.3}$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq \beta, \tag{3.4}$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu_j < \lambda_1 a + \mu_j\alpha$ e $\lambda_1 b + \mu_{j+1}\beta < \mu_{j+1}\lambda_1$. Então existe ao menos uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ para o problema (3.1).

A região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, representa, geometricamente, a variação dos parâmetros λ, μ, conforme as condições $\lambda_1\mu_j < \lambda_1 a + \mu_j\alpha$ e $\lambda_1 b + \mu_{j+1}\beta < \mu_{j+1}\lambda_1$.



Teorema 3.3 Suponhamos que as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e (C_3') sejam satisfeitas, e ainda, que a seguinte condição valha:
(C_6) Existem constantes $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que

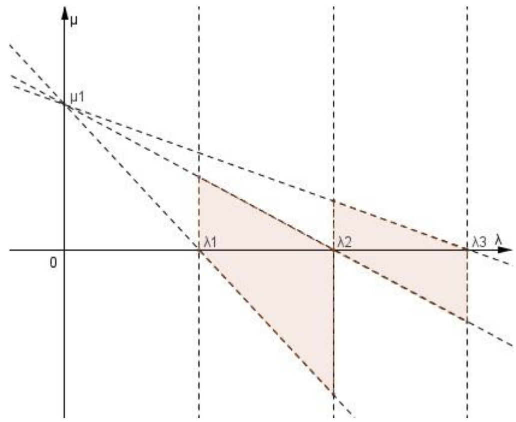
$$a \leq \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u} \leq \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u} \leq b \tag{3.5}$$

e

$$\lambda_j < \alpha \leq \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq \beta < \lambda_{j+1}, \tag{3.6}$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_j\mu_1 < \lambda_j a + \mu_1\alpha$ e $\lambda_{j+1} b + \mu_1\beta < \mu_1\lambda_{j+1}$. Então existe ao menos uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ para o problema (3.1).

A região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, representa, geometricamente, a variação dos parâmetros λ, μ, conforme as condições $\lambda_j\mu_1 < \lambda_j a + \mu_1\alpha$ e $\lambda_{j+1} b + \mu_1\beta < \mu_1\lambda_{j+1}$.



Para demonstrarmos estes três teoremas, precisaremos de alguns resultados auxiliares sobre a Teoria de Ponto Crítico que veremos no próximo Capítulo.

Capítulo 4

DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

4.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1

Devido à condição (C_4), temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$, tal que

$$\frac{2G(x,u)}{u^2} \leq \mu + \epsilon \ \text{ e } \quad \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \lambda + \epsilon, \tag{4.1}$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $u \in \mathbb{R}$, com $|u| > r$.

Como Ω é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ é compacto em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, $A(\epsilon) = \overline{\Omega} \times \{u \in \mathbb{R}; |u| \leq r = r(\epsilon)\}$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Por isto e por F, $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, garantimos que F e G assumem máximo e mínimo em $A(\epsilon)$, ou seja, existem constantes $M_1(\epsilon) > 0$ e $M_2(\epsilon) > 0$, tais que $G(x,u) \leq M_1(\epsilon)$ e $F(x,u) \leq M_2(\epsilon)$, para todo $(x,u) \in A(\epsilon)$. Tomando $M_\epsilon = \max\{M_1(\epsilon), M_2(\epsilon)\}$, temos

$$G(x,u) \leq M_\epsilon \quad \text{e} \quad F(x,u) \leq M_\epsilon, \ \forall\, (x,u) \in A(\epsilon). \tag{4.2}$$

Disto e das desigualdades (4.1) e (4.2), obtemos

$$G(x,u) \leq \frac{(\mu+\epsilon)u^2}{2} + M_\epsilon \quad \text{e } F(x,u) \leq \frac{(\lambda+\epsilon)u^2}{2} + M_\epsilon, \tag{4.3}$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $u \in \mathbb{R}$. Para mostrarmos que o problema (3.1) tem ao menos uma solução fraca, é suficiente, de acordo com o Teorema A.24, provarmos que o funcional I é limitado inferiormente e o mesmo satisfaz a condição (PS), já que pela Proposição A.4, $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 1. O funcional I é coercivo, isto é $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_c \to +\infty$.
Inicialmente, notemos que $\|u\|_{H^1} \to +\infty$, pois $\|u\|_c \to +\infty$ e as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ são equivalentes. Agora, ao utilizarmos a continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, devemos ter $\|u\|_{2,\partial} \to +\infty$ ou $\|u\|_{2,\partial} \leq K$, onde $K > 0$. Em ambos casos, vamos mostrar que $I(u) \to +\infty$.

Primeiramente, suponhamos $\|u\|_{2,\partial} \leq K$ onde $K > 0$. Dado que o funcional I é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma, \ \forall \ u \in H^1(\Omega),$$

com o auxílio das desigualdades obtidas em (4.3)

$$\begin{aligned} I(u) \ &\geq \ \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \int_\Omega \left[\frac{(\lambda+\epsilon)u^2}{2} + M_\epsilon\right]dx - \int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\mu+\epsilon)u^2}{2} + M_\epsilon\right]d\sigma \\ &\geq \ \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{(\lambda+\epsilon)}{2}\int_\Omega u^2dx - M_\epsilon|\Omega| - \frac{(\mu+\epsilon)}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma - M_\epsilon|\partial\Omega|_\sigma \\ &= \ \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\lambda+\epsilon)\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}(\mu+\epsilon)\|u\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Caso $\lambda \leq 0$, tomamos $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$ e $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$. Tal ϵ existe, pois $\lambda < \lambda_1$. Ainda, pelo Teorema 2.2, temos

$$I(u) \ \geq \ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^2 - \frac{(\mu+\epsilon)}{2}\|u\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \to +\infty,$$

quando, $\|u\|_c \to +\infty$. Logo, $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_c \to +\infty$.
Caso $\lambda > 0$, temos que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$, pois $\lambda < \lambda_1$. Deste modo, tomando $\epsilon > 0$, tal que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$ segue pelo Teorema 2.2, que

$$I(u) \ \geq \ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\mu+\epsilon)\|u\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \to +\infty,$$

quando $\|u\|_c \to +\infty$. Consequentemente, $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_c \to +\infty$.

Agora, suponhamos que $\|u\|_{2,\partial} \to +\infty$. No que segue analisamos quatro casos possíveis.

Caso 1. $\lambda < 0$ e $\mu < 0$.
Neste caso, da expressão (4.4), para $\epsilon > 0$ tal que $\lambda + \epsilon < 0$ e $\mu + \epsilon < 0$,

$$I(u) \ \geq \ \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma), \ \forall \ u \in H^1(\Omega).$$

Com isto, quando $\|u\|_c^2 \to +\infty$ segue que $I(u) \to +\infty$.

Caso 2. $\lambda < 0$ e $\mu \geq 0$.

Como por hipótese, $\mu < \mu_1$, $1 - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Assim, existe $\epsilon > 0$ de tal forma que $1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} > 0$, $\lambda + \epsilon < 0$ e $\mu + \epsilon > 0$. Consequentemente, pela expressão (4.4) e pelo Corolário 1.2,

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\mu+\epsilon)\|u\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2\mu_1}(\mu+\epsilon)\|u\|_c^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|u\|_c^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \to +\infty,
\end{aligned}
$$

quando $\|u\|_c \to +\infty$. Portanto $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_c \to +\infty$.

Caso 3. $\lambda \geq 0$ e $\mu < 0$.

Como, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$, temos $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Deste modo, existe $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$ e $\mu + \epsilon < 0$. Por conseguinte, devido a expressão (4.4) e ao Teorema 2.2

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\lambda+\epsilon)\|u\|_2^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \to +\infty,
\end{aligned}
$$

quando $\|u\|_c \to +\infty$. Logo $I(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$.

Caso 4. $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$.

Como por hipótese $\lambda < \lambda_1$, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Ainda, por $\lambda\mu_1 + \mu\lambda_1 < \lambda_1\mu_1$, temos $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Assim, se considerarmos $\epsilon > 0$, tal que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$ e $\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_1}\right)\right] > 0$, segue pela desigualdade (4.4) e Teorema 2.2, que

$$
I(u) \geq \frac{\mu_1}{2}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1}\right)\right]\|u\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).
$$

Portanto, $I(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_c \to +\infty$.

Pela validade dos Casos 1, 2, 3 e 4, concluimos que I é um funcional coercivo.

Afirmação 2. O funcional I é limitado inferiormente.

De fato, pela Afirmação 1, I é coercivo. Assim, dado $K = 1 > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que $I(u) \geq 1$, para qualquer $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\|_c \geq R_1$.

Agora, se $u \in H^1(\Omega)$ e $\|u\|_c \leq R_1$, devido às normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes, existe $R_2 > 0$, tal que $\|u\|_{H^1} \leq R_2$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Ainda, em consequência do

Teorema A.1 existe $R_3 > 0$, tal que $\|u\|_{2,\partial} \leq R_3$. Além disso, $\|u\|_2 \leq R_2$, já que $\|u\|_2 \leq \|u\|_{H^1} < R_2$. Por isto, por (4.4), por $\lambda < \lambda_1$ e por $\mu < \mu_1$, segue que, para $\epsilon > 0$ fixado,

$$I(u) \ \geq \ -\frac{1}{2}(\lambda_1+\epsilon)R_2^2 - \frac{1}{2}(\mu_1+\epsilon)R_3^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) = K(\epsilon), \ \forall \ u \in H^1(\Omega).$$

Afirmação 3. O funcional I satisfaz a condição (PS).
Para provarmos a condição (PS), seja (u_k) uma sequência em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, tal que $(I(u_k))$ seja limitada em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $I'(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$.

Caso a sequência (u_k) não seja limitada, existe uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k) tal que $\|u_{k_j}\|_c \to +\infty$, quando $j \to +\infty$. Como I é um funcional coercivo, $I(u_{k_j}) \to +\infty$, quando $j \to +\infty$. Mas, isto gera uma contradição, uma vez que $(I(u_k))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Logo, (u_k) é uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Pela Proposição A.6, tal sequência admite subsequência convergente. Portanto, o funcional I satisfaz a condição (PS).

De acordo com as afirmações anteriores $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ é um funcional que satisfaz a condição (PS) que é limitado inferiormente.

Com isto, ao aplicarmos o Teorema A.24 para I, garantimos a existência de um ponto crítico $u \in H^1(\Omega)$, isto é, $I'(u) = 0$. E assim,

$$I'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega c(x)uvdx - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma = 0, \ \forall \ v \in H^1(\Omega),$$

o que equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x,u)vd\sigma + \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma, \ \forall \ v \in H^1(\Omega).$$

Portanto, u é uma solução fraca para o problema (3.1) o que finaliza a demonstração do Teorema 3.1.

■

4.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2

A ideia desta demonstração é verificarmos a validade das hipóteses do Teorema A.23, pois o mesmo nos garante que o funcional I possui um ponto crítico, o qual será solução fraca para o problema (3.1).

Sejam $\tilde{V}_j = \left[\bigcup_{k=1}^{\theta(j)} M_k\right]$, $\tilde{Y}_j = \overline{\left[\bigcup_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} M_k\right]}$ e $\tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega)$. Pela Proposição 1.8, $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$.

Para aplicarmos o Teorema A.23, devemos garantir a existência de uma constante $r > 0$, tal que

$$\sup_{u \in \partial D} I(u) < \inf_{u \in \tilde{X}_j} I(u), \tag{4.5}$$

onde $D = \{u \in \tilde{V}_j; \|u\|_c \leq r\}$. Para tal, provaremos, inicialmente, que o funcional I é coercivo em $\tilde{X}_j$ e $-I$ é coercivo em $\tilde{V}_j$ o que implicará na validade de (4.5) para $r > 0$ suficientemente grande.

Pela condição (C_5), existem constantes $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, tais que,uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$,

$$a \leq \liminf_{|u| \to +\infty} \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \to +\infty} \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq b \tag{4.6}$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|u| \to +\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \to +\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \beta. \tag{4.7}$$

Deste modo, dado $\epsilon > 0$, existe $r_1 = r_1(\epsilon) > 0$, tal que uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$, com $|u| > r_1$,

$$\frac{(a-\epsilon)u^2}{2} \leq G(x,u) \leq \frac{(b+\epsilon)u^2}{2}$$

e

$$\frac{(\alpha-\epsilon)u^2}{2} \leq F(x,u) \leq \frac{(\beta+\epsilon)u^2}{2}.$$

Pela continuidade de F e G e pela compacidade de $\overline{\Omega}$, existe $c > 0$, tal que $|F(x,u)| \leq c$ e $|G(x,u)| \leq c$, uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$, com $|u(x)| \leq r_1$. Consequentemente,

$$\frac{(a-\epsilon)u^2}{2} - c \leq G(x,u) \leq \frac{(b+\epsilon)u^2}{2} + c \tag{4.8}$$

e

$$\frac{(\alpha-\epsilon)u^2}{2} - c \leq F(x,u) \leq \frac{(\beta+\epsilon)u^2}{2} + c, \ \ \forall \ \ \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $\alpha \leq 0$. Assim, para todo $u \in \tilde{V}_j$,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{(\alpha-\epsilon)}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{(a-\epsilon)}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + \tilde{c} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{(\alpha-\epsilon)}{2}\|u\|_2^2 - \frac{(a-\epsilon)}{2}\|u\|_{2,\partial}^2 + \tilde{c} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{(\alpha-\epsilon)}{2\lambda_1}\|u\|_c^2 - \frac{(a-\epsilon)}{2}\|u\|_{2,\partial}^2 + \tilde{c} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^2 - \frac{(a-\epsilon)}{2}\|u\|_{2,\partial}^2 + \tilde{c}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante positiva.

Pela Observação 1.5, $\|u\|_{2,\partial}^2 \geq \mu_j^{-1}\|u\|_c^2$, para qualquer $u \in \tilde{V}_j$. Por isto, para $\epsilon > 0$, tal que $a - \epsilon > 0$,

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{a}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\mu_j}\right)\|u\|_c^2 + \tilde{c}.$$

Mas por hipótese, $1 - \frac{a}{\mu_j} - \frac{\alpha}{\lambda_1} < 0$, $\mu_j \geq \mu_1 > 0$, e $\lambda_1 > 0$. Logo, existe $\epsilon > 0$, tal que $a - \epsilon > 0$ e $1 - \frac{a}{\mu_j} - \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j} < 0$. Por conseguinte quando $\|u\|_c \to +\infty$, $I(u) \to -\infty$, ou seja, $-I$ é coercivo em $\tilde{V}_j$.

No que segue, mostramos que I é coercivo em $\tilde{X}_j$. Para isto, seja $u \in \tilde{X}_j$. Como $\tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega)$, existem únicos $\overline{u} \in \tilde{Y}_j$ e $u^o \in H_0^1(\Omega)$, tais que $u = \overline{u} + u^o$. Com o auxílio das desigualdades (4.6) e (4.7) e do fato de u^o e $\overline{u}$ serem c-ortogonais, prova-se a existência de uma constante $\overline{c} > 0$, tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2}\|\overline{u}\|_c^2 - \frac{1}{2}(\beta+\epsilon)\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}(b+\epsilon)\|u\|_{2,\partial}^2 - \overline{c}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $\beta \geq 0$. Pelas desigualdades (4.8) e (4.9),

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{(\beta+\epsilon)}{2}\|u\|_2^2 - \frac{(b+\epsilon)}{2}\|u\|_{2,\partial}^2 - \overline{c}, \tag{4.10}$$

onde $\overline{c} = c(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma)$. Assim, pelo Teorema 2.2, pelo fato de u^o e $\overline{u}$ serem c-ortogonais e $\|u\|_{2,\partial} = \|\overline{u}\|_{2,\partial}$,

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\left[\|u^o\|_c^2 + \|\overline{u}\|_c^2 - (\beta+\epsilon)\|u^o\|_2^2 - (\beta+\epsilon)\|\overline{u}\|_2^2 - (b+\epsilon)\|u^o\|_{2,\partial}^2 - (b+\epsilon)\|\overline{u}\|_{2,\partial}^2\right] - \overline{c} \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\|u^o\|_c^2 + \|\overline{u}\|_c^2 - \frac{(\beta+\epsilon)}{\lambda_1}\|u^o\|_c^2 - \frac{(\beta+\epsilon)}{\lambda_1}\|\overline{u}\|_c^2 - (b+\epsilon)\|\overline{u}\|_{2,\partial}^2\right] - \overline{c} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u^o\|_c^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|\overline{u}\|_c^2 - (b+\epsilon)\|\overline{u}\|_{2,\partial}^2\right] - \overline{c}.
\end{aligned}
$$

Por isto, pela Observação 1.6 e por $b > 0$,

$$
I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\|\overline{u}\|_c^2 - \overline{c}. \tag{4.11}
$$

Agora, por hipótese, $\lambda_1 b + \beta\mu_{j+1} < \mu_{j+1}\lambda_1$. Logo, $1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} > 0$. Ainda, visto que $\lambda_1 > 0$ e $\beta < \lambda_1$, $\beta\mu_{j+1} < \lambda_1\mu_{j+1}$, uma vez que $\mu_{j+1} > 0$. Disto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$
1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0. \tag{4.12}
$$

Por conseguinte, devido a $\lambda_1 b + \beta\mu_{j+1} < \mu_{j+1}\lambda_1$, podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que valha (4.12) e $1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} > 0$. Por u^o e $\overline{u}$ serem c-ortogonais, podemos reescrever a desigualdade (4.11), como

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\min\left\{\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right), \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\right\}(\|u^0\|_c^2 + \|\overline{u}\|_c^2) - \overline{c} \\
&= \min\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right), \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\right\}\|u\|_c^2 - \overline{c}. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Portanto, quando $\|u\|_c^2 \to +\infty$, para $u \in \tilde{X}_j$, $I(u) \to +\infty$, ou seja, I é coercivo em $\tilde{X}_j$.

Notamos ainda que I é limitado inferiormente em $\tilde{X}_j$, pois para todo $u \in \tilde{X}_j$, temos, de (4.13)

$$
I(u) \;\geq\; -\overline{c}. \tag{4.14}
$$

Disto e de $-I$ ser coercivo em $\tilde{V}_j$, existe constante $r > 0$, tal que

$$
\sup_{u \in \partial D} I(u) < \inf_{u \in \tilde{X}_j} I(u).
$$

Com efeito, por (4.14), $I(u) \geq -\overline{c}$, para todo $u \in \tilde{X}_j$. Logo $\inf\limits_{u \in \tilde{X}_j} I(u) \geq -\overline{c}$. Por outro lado, pelo fato de $-I$ ser coercivo em $\tilde{V}_j$, temos que dado $r_2 < -\overline{c}$, existe $r > 0$ tal que, $\|u\|_c \geq r$, para todo $u \in \tilde{V}_j$. Consequentemente $I(u) < r_2 < -\overline{c}$ e $\sup\limits_{u \in \partial D} I(u) < -\overline{c} < \inf\limits_{u \in \tilde{X}_j} I(u)$.

Resta agora mostrarmos que o funcional I satisfaz a condição (PS). Novamente, pela condição (C_5), temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $r > 0$, tal que se $|u| \geq r$, então

$$a - \epsilon \leq \frac{g(x,u)}{u} \leq b + \epsilon, \;\; \forall \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{4.15}$$

Para verificarmos a validade da condição (PS), precisaremos definir alguns funcionais, bem como, obter algumas propriedades para os mesmos. Iniciamos definindo $\gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(x,u) = \begin{cases} \frac{g(x,u)}{u}, \;\; \text{se } |u| \geq r \\ \left[\frac{g(x,r)+g(x,-r)}{2r^2}\right] \cdot u + \frac{g(x,r)-g(x,-r)}{2r}, \;\; \text{se } |u| < r. \end{cases}$$

Devido a g ser uma função contínua, temos que γ é uma função contínua para $|u| > r$ ou $|u| < r$. Além disso, γ é contínua para $|u| = r$, pois

$$\lim_{|u| \to r^+} \gamma(x,u) = \lim_{|u| \to r^+} \frac{g(x,u)}{u} = \frac{g(x,r)}{r}$$

e

$$\lim_{|u| \to r^-} \gamma(x,u) = \lim_{|u| \to r^-} \left(\left[\frac{g(x,r) + g(x,-r)}{2r^2} \right] \cdot u + \frac{g(x,r) - g(x,-r)}{2r} \right) = \frac{g(x,r)}{r},$$

ou seja, $\lim\limits_{|u| \to r^-} \gamma(x,u) = \lim\limits_{|u| \to r^+} \gamma(x,u) = \dfrac{g(x,r)}{r}$.

Além disso, por (4.15),

$$a - \epsilon \leq \gamma(x,u) \leq b + \epsilon, \; \forall \; (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Com efeito, para $|u| \geq r$, não há nada a ser feito. Caso $|u| < r$, temos $-r < u < r$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \gamma(x,u) &= \left[\frac{g(x,r) + g(x,-r)}{2r^2} \right] u + \frac{g(x,r) - g(x,-r)}{2r} \\ &< \left[\frac{g(x,r) + g(x,-r)}{2r^2} \right] r + \frac{g(x,r) - g(x,-r)}{2r} = \frac{g(x,r)}{r} \leq b + \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\gamma(x,u) \;\; > \;\; \left[\frac{g(x,r)] + g(x,-r)}{2r^2} \right] (-r) + \frac{g(x,r) - g(x,-r)}{2r} = \frac{g(x,-r)}{-r} \geq a - \epsilon.$$

Assim, $a-\epsilon \leq \gamma(x,u) \leq b+\epsilon$, para quaisquer $u \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$.

Seja agora $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $h(x,u) = g(x,u) - \gamma(x,u)u$. Notemos que $g(x,u) = h(x,u) + \gamma(x,u)u$.

Afirmação 1. Existe $k_1 > 0$, tal que

$$|h(x,u)| \leq k_1, \forall \ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Com efeito, se $|u| \geq r$, então $h(x,u) = g(x,u) - \frac{g(x,u)}{u}u = 0$. Por outro lado, se $| \ u \ | \leq r$, então $h \ |_{\overline{\Omega}\times\{u\in\mathbb{R};|u|\leq r\}}$ é um funcional contínuo definido num conjunto compacto. Consequentemente, existem constantes $\overline{k_1}, \overline{k_2} \in \mathbb{R}$, tais que $\overline{k_1} \leq h(x,u) \leq \overline{k_2}$, para todo $(x,u) \in \overline{\Omega} \times \{u \in \mathbb{R}; |u| \leq r\}$, o que prova a validade da Afirmação 1.

Consideremos também $\Upsilon : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Upsilon(x,u) = \begin{cases} \frac{f(x,u)}{u}, & \text{se } |u| \geq r, \\ \left[\frac{f(x,r)+f(x,-r))}{2r^2}\right]u + \frac{f(x,r)-f(x,-r)}{2r}, & \text{se } |u| < r. \end{cases}$$

Utilizando argumentos similares aos feitos para o funcional γ temos que o funcional Υ é contínuo. Ainda, se $l : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é dado por $l(x,u) = f(x,u) - \Upsilon(x,u)u$, então, através de um raciocínio semelhante ao feito para o funcional γ, conclui-se que

$$\alpha - \epsilon \leq \Upsilon(x,u) \leq \beta + \epsilon$$

e que existe $k_2 > 0$, tal que

$$|l(x,u)| \leq k_2, \forall \ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Tomando $K = \max\{k_1, k_2\}$, temos

$$|h(x,u)| \leq K \qquad \text{e} \qquad |l(x,u)| \leq K, \quad \forall \ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Tendo os funcionais γ, h, l e Υ e visto algumas de suas propriedades, estamos aptos a provar a condição (PS) para o funcional I. Para isto, seja $(u_k) \subset H^1(\Omega)$, tal que $(I(u_k))$ é limitada e $I'(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \| \cdot \|_c^*)$. Como $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$, seja $u_k = v_k + x_k$, onde $v_k \in \tilde{V}_j$ e $x_k \in \tilde{X}_j$. Ainda, por $\tilde{X}_j = H_0^1 \oplus_c \tilde{Y}_j$, $x_k = x_k^o + \overline{x}_k$, onde $x_k^o \in H_0^1(\Omega)$ e $\overline{x}_k \in \tilde{Y}_j$.

Como $I'(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \| \cdot \|_c^*)$ temos que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se

$k \geq n_0$

$$\sup_{\varphi \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|I'(u_k)\cdot\varphi|}{\|\varphi\|_c} < \epsilon. \tag{4.17}$$

Tomando $\varphi = x_k - v_k$, para k grande, $I'(u_k)\cdot(x_k - v_k) < \epsilon\|x_k - v_k\|_c$. Por x_k e v_k serem c-ortogonais em $H^1(\Omega)$ e pela definição dos funcionais h e l, obtemos da definição de I',

$$\begin{aligned}
I'(u_k)\cdot\varphi &= \int_\Omega [\nabla(v_k + x_k)\cdot\nabla(x_k - v_k) + c(x)(v_k + x_k)(x_k - v_k) - f(x,u_k)x_k]dx \\
&+ \int_\Omega f(x,u_k)v_k dx - \int_{\partial\Omega} g(x,u_k)x_k^o + g(x,u_k)\overline{x}_k - g(x,u_k)v_k d\sigma \\
&= \int_\Omega [|\nabla x_k|^2 - |\nabla v_k|^2]dx + \int_\Omega c(x)(x_k^2 - v_k^2)dx - \int_\Omega [l(x,u_k) + \Upsilon(x,u_k)u_k]x_k dx \\
&+ \int_\Omega [l(x,u_k) + \Upsilon(x,u_k)u_k]v_k dx - \int_{\partial\Omega} [h(x,u_k + \gamma(x,u_k)u_k]\overline{x}_k d\sigma \\
&+ \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)v_k d\sigma + \int_{\partial\Omega} \gamma(x,u_k)u_k v_k d\sigma \\
&= \|x_k\|_c^2 - \|v_k\|_c^2 - \int_\Omega l(x,u_k)x_k dx - \int_\Omega \Upsilon(x,u_k)(v_k + x_k)x_k dx + \int_\Omega l(x,u_k)v_k dx \\
&+ \int_\Omega \Upsilon(x,u_k)(v_k + x_k)v_k dx - \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)\overline{x}_k d\sigma - \int_{\partial\Omega} \gamma(x,u_k)(v_k + x_k)\overline{x}_k d\sigma \\
&+ \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)v_k d\sigma + \int_{\partial\Omega} \gamma(x,u_k)(v_k + x_k)v_k d\sigma \\
&= \|x_k\|_c^2 - \|v_k\|_c^2 - \int_\Omega [l(x,u_k)x_k dx + \Upsilon(x,u_k)x_k^2 - l(x,u_k)v_k - \Upsilon(x,u_k)v_k^2]dx \\
&- \int_{\partial\Omega} [h(x,u_k)\overline{x}_k - h(x,u_k)v_k - \gamma(x,u_k)v_k^2 + \gamma(x,u_k)\overline{x}_k^2]d\sigma
\end{aligned}$$

Agora de (4.17) $I'(u_k)(x_k - v_k) < \epsilon\|x_k - v_k\|_c$, supondo
$A = \|x_k\|_c^2 - \|v_k\|_c^2 - \int_\Omega \Upsilon(x,u_k)x_k^2 dx + \int_\Omega \Upsilon(x,u_k)v_k^2 dx - \int_{\partial\Omega} \gamma(x,u_k)\overline{x}_k^2 d\sigma + \int_{\partial\Omega} \gamma(x,u_k)v_k^2 d\sigma$
e
$B = \epsilon\|x_k - v_k\|_c + \int_\Omega l(x,u_k)x_k dx - \int_\Omega l(x,u_k)v_k dx + \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)\overline{x}_k d\sigma - \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)v_k d\sigma$
obtemos $A < B$. Com efeito, assumindo, sem perda de generalidade $\alpha < 0$, temos para $\epsilon > 0$,

$\alpha - \epsilon < 0$, por $x_k \in \tilde{X}_j$ e pelo Teorema 2.2

$$
\begin{aligned}
A &\geq \|x_k^o + \overline{x}_k\|_c^2 - \|v_k\|_c^2 + (\alpha-\epsilon)\int_\Omega v_k^2 dx + (a-\epsilon)\int_{\partial\Omega} v_k^2 d\sigma - (b+\epsilon)\int_{\partial\Omega} \overline{x}_k^2 d\sigma \\
&- (\beta+\epsilon)\int_\Omega x_k^2 dx \\
&\geq \|x_k^o\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2 - \|v_k\|_c^2 + (\alpha-\epsilon)\int_\Omega v_k^2 dx + (a-\epsilon)\int_{\partial\Omega} v_k^2 d\sigma - \frac{(\beta+\epsilon)}{\lambda_1}\|x_k^o\|_c^2 \\
&- \frac{(\beta+\epsilon)}{\lambda_1}\|\overline{x}_k\|_c^2 - (b+\epsilon)\int_{\partial\Omega} \overline{x}_k^2 d\sigma \\
&= \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)(\|x_k^o\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2) - (b+\epsilon)\|\overline{x}_k\|_{2,\partial}^2 - \|v_k\|_c^2 + (a-\epsilon)\|v_k\|_{2,\partial}^2 \\
&+ (\alpha-\epsilon)\|v_k\|_2^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)(\|x_k^o\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2) - (b+\epsilon)\|\overline{x}_k\|_{2,\partial}^2 + (a-\epsilon)\|v_k\|_{2,\partial}^2 + \left(\frac{(\alpha-\epsilon)}{\lambda_1}\right)\|v_k\|_c^2 \\
&- \|v_k\|_c^2. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela expressão (4.16), por $x_k \in \tilde{X}_j$, pelo Teorema A.1 e pela equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$,

$$
\begin{aligned}
B &= \epsilon\|x_k - v_k\|_c + \int_\Omega l(x,u_k)x_k dx - \int_\Omega l(x,u_k)v_k dx + \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)\overline{x}_k d\sigma \\
&- \int_{\partial\Omega} h(x,u_k)v_k d\sigma \\
&\leq \epsilon(\|x_k\|_c + \|v_k\|_c) + K\left[\int_\Omega x_k dx + \int_\Omega v_k dx + \int_{\partial\Omega} \overline{x}_k d\sigma + \int_{\partial\Omega} v_k d\sigma\right] \\
&= \epsilon(\|x_k\|_c + \|v_k\|_c) + K\left[\int_\Omega (x_k^o + \overline{x}_k) dx + \int_\Omega v_k dx + \int_{\partial\Omega} \overline{x}_k d\sigma + \int_{\partial\Omega} v_k d\sigma\right] \\
&\leq \epsilon(\|x_k\|_c + \|v_k\|_c) + K\int_\Omega (x_k^o + \overline{x}_k) dx + \tilde{k}_1\|v_k\|_{H^1} + \tilde{k}_2\|v_k\|_{H^1} + K\int_{\partial\Omega} \overline{x}_k d\sigma \\
&\leq \epsilon(\|x_k\|_c + \|v_k\|_c) + \tilde{K}[\|x_k^o\|_c + \|\overline{x}_k\|_c + \|v_k\|_c] \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

onde, $K, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 > 0$ e $\tilde{K} > 0$. Por (4.18) e (4.19) segue que

$$
\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)(\|x_k^o\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2) - (b+\epsilon)\|\overline{x}_k\|_{2,\partial}^2 - \|v_k\|_c^2 + (a-\epsilon)\|v_k\|_{2,\partial}^2 + \frac{(\alpha-\epsilon)}{\lambda_1}\|v_k\|_c^2
$$

$$
< \epsilon(\|x_k\|_c + \|v_k\|_c) + \tilde{K}[\|\overline{x}_k\|_c + \|x_k^o\|_c + \|v_k\|_c].
$$

Usando o fato de que $\|u\|_{2,\partial}^2 \leq \mu_{j+1}^{-1}\|u\|_c^2$, para todo $u \in \tilde{Y}_j$, $\|u\|_{2,\partial}^2 \geq \mu_j^{-1}\|u\|_c^2$, para todo

$u \in \tilde{V}_j$, $a - \epsilon > 0$ e $b + \epsilon > 0$, temos

$$\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|x_k^o\|_c^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\|\overline{x}_k\|_c^2 + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_j}\right)\|v_k\|_c^2$$

$$< \epsilon(\|\overline{x}_k\|_c + \|x_k^o\|_c) + (\epsilon + K)\|\overline{x}_k\|_c + K\|x_k^o\|_c.$$

Pondo $K_0 = \max\{2\epsilon + K, \epsilon, K\}$, obtemos

$$\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|x_k^o\|_c^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\|\overline{x}_k\|_c^2 + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_j}\right)\|v_k\|_c^2$$

$$< K_0(\|\overline{x}_k\|_c + \|x_k^o\|_c + \|v_k\|_c). \tag{4.20}$$

Agora, por hipótese, $1-\frac{\beta}{\lambda_1}-\frac{b}{\mu_{j+1}} > 0$ e $\frac{\alpha}{\lambda_1}+\frac{a}{u_j}-1 > 0$. Logo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, satisfazendo as condições anteriores, tal que $1+\frac{\epsilon}{\lambda_1}-\frac{\beta}{\lambda_1} > 0$, $1-\frac{\beta}{\lambda_1}-\frac{b}{\mu_{j+1}}-\frac{\epsilon}{\lambda_1}-\frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} > 0$ e $\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_j} > 0$, temos, ao tomarmos

$$\delta = \min\left\{1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}, 1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}, \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_j}\right\} > 0,$$

de (4.20),

$$\|x_k^o\|_c^2 + \|v_k\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2 < \frac{K_0}{\delta}(\|x_k^o\|_c + \|v_k\|_c + \|\overline{x}_k\|_c). \tag{4.21}$$

Por isto e por $u_k = x_k + v_k = x_k^o + \overline{x}_k + v_k$,

$$\|u_k\|_c^2 < \frac{K_0}{\delta}(\|x_k^o\|_c + \|v_{k_0}\|_c + \|\overline{x}_k\|_c) \leq \frac{cK_0}{\delta}\sqrt{\|x_k^o\|_c^2 + \|v_k\|_c^2 + \|\overline{x}_k\|_c^2} = \frac{cK_0}{\delta}c\sqrt{\|u_k\|_c^2} = \frac{cK_0}{\delta}\|u_k\|_c,$$

onde $c > 0$. E isto implica que (u_k) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$. Disto e a Proposição A.6 segue que (u_k) possui uma subsequência convergente em $H^1(\Omega)$. Logo, o funcional I satisfaz a condição (PS).

Portanto de acordo com Teorema A.23, o funcional I possui um ponto crítico $u \in H^1(\Omega)$, isto é, $I'(u) = 0$, ou seja,$u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (3.1). ■

4.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.3

Para a prova do Teorema 3.3, utilizaremos uma ideia similar à demonstração do Teorema 3.2, verificando as hipóteses do Teorema A.23, o qual garante a existência de um ponto crítico para o funcional I, e consequentemente, uma solução fraca para o problema (3.1).

Inicialmente, pela Seção 2.4 do Capítulo 2, observamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado,

$$L^2(\Omega) = E_j \oplus E_j^{\perp} \tag{4.22}$$

onde E_j é o subespaço de $L^2(\Omega)$ gerado por $F_j = \{u_1^1, ..., u_{\zeta_1}^1, ..., u_1^j, ..., u_{\zeta_j}^j\}$ e $E_j^{\perp} = \{u \in L^2(\Omega); \langle u, v \rangle_2 = 0, \ \forall \ v \in E_j\}$. Além disso, vimos que

$$H^1(\Omega) = E_j \oplus (E_j^{\perp} \cap H^1(\Omega)). \tag{4.23}$$

Agora, pela condição (C_6), existem constantes a, b, α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$a \leq \liminf_{|u| \to +\infty} \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \to +\infty} \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq b$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|u| \to +\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \to +\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \beta.$$

Disto e da continuidade de F e G, segue que dado $\epsilon > 0$, existe constante $\tilde{c} > 0$, tal que se $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$, então

$$(a - \epsilon)\frac{u^2}{2} - \tilde{c} \leq G(x,u) \leq \frac{(b + \epsilon)}{2}u^2 + \tilde{c}, \tag{4.24}$$

$$(\alpha - \epsilon)\frac{u^2}{2} - \tilde{c} \leq F(x,u) \leq \frac{(\beta + \epsilon)}{2}u^2 + \tilde{c}. \tag{4.25}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $a \leq 0$. Assim para todo $u \in E_j$, temos, pelas desigualdades (4.24) e (4.25), pelo Corolário 1.2, por (2.8) e para $\epsilon > 0$ adequado, existe

$K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\int_\Omega u^2dx - \frac{1}{2}(a-\epsilon)\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + K \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1}\right]\|u\|_c^2 - \frac{1}{2\lambda_j}(\alpha-\epsilon)\|u\|_c^2 + K \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|u\|_c^2 + K. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\lambda_j\mu_1 < \lambda_1 a + \mu_1\alpha$. Logo para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $1 - \frac{a}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\mu_1} < 0$. Desta forma, se $\|u\|_c \to +\infty$ então $I(u) \to -\infty$, ou seja, $-I$ é coercivo em E_j.

Por outro lado, ao assumirmos $b \geq 0$, temos, para todo $u \in E_j^\perp \cap H^1(\Omega)$, de acordo com o Corolário 1.2, as desigualdades (4.24)e (4.25) e a Observação 1.6, para $\epsilon > 0$ adequado, existe $K > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\beta+\epsilon)\int_\Omega u^2dx - \frac{1}{2}(b+\epsilon)\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + K \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|u\|_c^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\lambda_{j+1}} + \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}}\right)\|u\|_c^2 + K \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}}\right)\|u\|_c^2 + K. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Mas, por hipótese, $\lambda_{j+1}b + \mu_1\beta < \lambda_{j+1}\mu_1$. Deste modo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}} > 0$. Portanto, $I(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$, ou seja, I é coercivo em $E_j^\perp \cap H^1(\Omega)$.

Ainda vale resaltar que de (4.26), $I\,|_{E_j^\perp \cap H^1(\Omega)}$ é limitado inferiormente por $K > 0$.

Finalmente, com argumentos similares aos feitos na prova do Teorema 3.2, mostra-se que existe uma constante $R > 0$, tal que

$$\sup_{u\in\partial D} I(u) < \inf_{v\in E_j^\perp\cap H^1(\Omega)} I(v),$$

sendo $D = \{u \in E_j; \|u\|_c \leq R\}$ e que o funcional I satisfaz a condição (PS). Logo, através do Teorema A.23, concluimos que existe $u \in H^1(\Omega)$, que é uma solução fraca para o problema (3.1).

■

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observação 4.1 Se tivermos $f \equiv 0$, obtemos resultados comparando a não linearidade g com o primeiro autovalor de Steklov (Teorema 3.1), bem como, com os demais autovalores de Steklov (Teorema 3.2) .

Observação 4.2 Caso $c = 0$ temos que o primeiro autovalor de Steklov e de Neumann são ambos iguais a zero. Ao supormos que λ e μ sejam não positivos com $\mu + \lambda < 0$ no Teorema 3.1, a desigualdade $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \lambda_1\mu_1$ pode ser omitida.

Além disso, se impusermos $\alpha = \beta = 0$ no Teorema 3.2 e que $a = b = 0$ no Teorema 3.3, teremos que as seguintes desigualdades

$$\mu_j\lambda_1 < \lambda_1 a + \mu_j\alpha \quad \text{e} \quad \lambda_1 b + \mu_{j+1}\beta < \mu_{j+1}\lambda_1$$

$$\lambda_j\mu_1 < \lambda_j a + \mu_1\alpha \quad \text{e} \quad \lambda_{j+1} b + \mu_1\beta < \lambda_{j+1}\mu_1$$

dadas, respectivamente, nos Teoremas 3.2 e 3.3 serão omitidas.

Observação 4.3 Resaltamos que os Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 permanecerão válidos se considerarmos equações do tipo

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(x)u = f(x,u), \text{ se } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u = g(x,u), \quad \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\sigma \in L^\infty(\partial\Omega), \sigma(x) \geq 0$ em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial}{\partial\nu} := \nu \cdot A\nabla$ é a derivada *co*-normal exterior unitária. A matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ é simétrica, com $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, existe $\gamma > 0$, tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \gamma|\xi|^2 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Isto inclui as condições de fronteira de Robin. Neste caso, a não linearidade de reação f é comparada com o espectro da equação linear com uma condição de fronteira homogênea de Robin enquanto que a não linearidade de fronteira g é comparada com o espectro de Steklov.

CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi estudar a existência de soluções fraca do problema (3.1), no qual as não-linearidades interagem, em certo sentido, com os espectros de Steklov-Neumann, (problemas (1.1) e (2.1)). A teoria de autovalores foi a base essencial para obtermos os resultados de existência de soluções fraca para (3.1).

Uma próxima etapa possível, sería o estudo da multiplicidade de soluções fraca para o problema (3.1). Yao em um trabalho recente, [32], demonstra que, sob hipóteses similares a do problema (3.1), existem pelo menos duas soluções, não triviais para o mesmo.

Outra possibilidade de estudo é estender o problema (3.1) para o p-Laplaciano, o que é feito por De Godoi et al, em [11]. Ou ainda, para sistemas, que também é feito por De Godoi et al, em [12] ou por Fadlallah et al, em [16].

Portanto, este trabalho serve como base para estudos recentes associados ao problema (3.1), ou extensões do mesmo. Com isto, me sinto apta a buscar novos resultados a esses problemas. E isto será feito no doutorado.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A., FOURNIER, J.J.F.: **Sobolev spaces,** second ed., Academic Press, New York, 2003.

[2] AMBROSETTI, A., PRODI, G.: **A primer of nonlinear analysis.** Cambridge University Press, 1993.

[3] AMICK, C.J: **Some remarks on Rellich's theorem and the Poincaré inequality.** J. London Math. Soc., 18(2), p. 81-93, 1973.

[4] ANANE, A., CHAKRONE, O., KARLM, B., ZEROUALI, A.: **An asymmetric Steklov problem weights the singular case.** Bol. Soc. Paran. de Mat., v. 27, n.2, p.35-42, 2009.

[5] AUCHMUTY, G.: **Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems.** Numerical Functional Analysis and Optimization, v. 25, p. 321-348, 2004.

[6] AUCHMUTY, G.:**Spectral characterization of the trace spaces** $H^s(\partial\Omega)$**.** SIAM J. Math Analysis, v. 38 (3), p. 894-905, 2006.

[7] BARTLE, R. G.: **The elements of integration.** Wiley, New York, 1966.

[8] BINDING, P., DRÁBEK, P., HUANG, Y.X.: **On Neumann boundary value problems for some quasilinear ellipctic equations.** Electronic Journal of Differential Equations, v. 1942, n. 05, p. 1-11, 1997.

[9] BREZIS, H.: **Functional analysis, sobolev spaces and partial diferential equations.** Springer, New York, 2011.

[10] BROCK, F.: **An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem.** ZAMM Z. Angew. Math. Mech., v. 81, p. 69-71, 2001.

[11] DE GODOI, J. D. B., MIYAGAKI, O. H., RODRIGUES, R. S.: **On Steklo-Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations** Applied Mathematics Letters, v .45, p. 47-51, 2015.

[12] DE GODOI, J. D. B., MIYAGAKI, O. H., RODRIGUES, R. S.: **A class of nonlinear elliptic systems with Steklov-Neumann nonlinear boundary conditions** Rocky Mountain J. Math., 2015.

[13] ESCOBAR, J. F.: **A isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue.** Journal of Functional Analysis, v. 165, p. 101-116, 1999.

[14] ESCOBAR, J. F.: **A comparison theorem for the first Steklov eingenvalue.** Journal of Functional Analyzis, v. 178, p. 143-155, 2000.

[15] EVANS, L. C., GARIEPY, R.F.: **Measure Theory and Fine Properties of Functions.** CRC Press, Boca Raton, 1992.

[16] FADLALLAH, A., FORDJOUR, K. A., NKASHAMA, M. N.: **RGeneralized Spectrum of Steklov-Robin Type Problem for Elliptic Systems.** Applied Mathematics, v. 6, p. 421-429, 2015.

[17] FOLLAND, G.: **Real analysis.** New York: John Wiley and Sons, 1984.

[18] GRISVARD, P.: **Elliptic problems in nonsmooth domains.** Pitman, Boston, 1985.

[19] KAVIAN, O.: **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques.** Springer- Verlag, Paris, 1993.

[20] KESAVAN, S.: **Nonlinear functional analysis with applications.** Wilwy, New York, 1978.

[21] KREYSZIG, E.: **Introductory functional analysis with applications.** Wiley, New York, 1978.

[22] KUFNER, A., JOHN, O., FUCIK, S.: **Function spaces.** Academia, Praha e Noordhoff International Publishing, Lauden, 1977.

[23] LI, C., LI, S.: **Multiple solutions and sign-changing solutions of a class of nonlinear elliptic equations with Neumann boundary condition.** J. Math. Anal. Appl., v. 298, p. 14-32, 2004.

[24] LIMA, E.L.: **Análise no espaço $\mathbb{R}^n$.** Primeira Edição(terceira impressão), IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[25] MAVINGA, N., NKASHAMA, M.N.: **Steklov- Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boudary conditions.** J. Differential Equations, v. 248, p. 1212-1229, 2010.

[26] MCOWEN, R.C.: **Partial differential equations: Methods an Applications.** Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[27] RABINOWITZ, P.H.: **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.** Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[28] RUDIN, W.: **Principles of mathematical analysis.** McGraw-Hill, New York, 1976.

[29] SCHECHTER, M., ZOU, W.: **An infinite dimensional theorem and applications.** J. Differential Equations, v. 201, p. 325-350, 2004.

[30] TROUTMAN J.L.: **Variational calculus and control.** Springer, New York, 1995.

[31] WILLEM, M.: **Minimax theory.** Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhauser, 24, Boston, MA, 1996.

[32] YAO, Z.: **Multiple solutions for a class of semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions.**Applied Mathematics, v. 5, p. 90-95, 2014.

[33] ZHANG, J., LI, S., WANG, Y., XUE, X.: **Multiple solutions for semilinear elliptic equations with Neumann boundary condition and jumping nonlinearities.** J. Math. Anal. Appl., v. 371, p. 682-690, 2010.

Apêndice A

APÊNDICE

No que segue serão apresentados alguns resultados e definições que foram utilizados, nos capítulos anteriores deste trabalho. A justificativa para citá-los nesta etapa é para propiciar uma leitura mais objetiva, uma vez que durante todo texto, eles foram apenas referenciados. Os resultados não serão demonstrados.

A.1 OPERADORES TRAÇO E ESPAÇO FRACIONÁRIO $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

Os resultados enunciados nesta seção são encontrados em [1], [18] e [22].

Teorema A.1 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, com fronteira de classe $C^{0,1}$, $n \geq 2$ e $p \in [0, +\infty)$. Então existe um único operador denominado operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^q(\partial\Omega)$

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega),$$

contínuo desde que

(1) $p < n$ e $1 \leq q \leq \dfrac{(n-1)p}{n-p}$ ou

(2) $p \geq n$ e $q \in [1, +\infty)$.

E mais, caso $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{(n-1)p}{n-p}$ ou $p \geq n$ e $q \in [1, +\infty)$, o operador Γ é compacto.

Teorema A.2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, com fronteira de classe $C^{0,1}$, com $n \geq 2$. Então a inclusão $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ é linear e contínua.

Teorema A.3 Com as hipóteses do Teorema A.2, $dimH^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = +\infty$.

A.2 ALGUMAS DESIGUALDADES

Teorema A.4 Se $0 \leq p < +\infty$, $a > 0$ e $b > 0$, então existe uma constante positiva $K(p)$, tal que

$$(a+b)^p \leq K(p)(a^p + b^p).$$

Demonstração. Veja [1].

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder) Sejam f e g pertencentes a $L^p(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$ respectivamente, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder Generalizada) Sejam $f_1, ..., f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então, o produto $f = f_1 ... f_k \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} ... \|f_k\|_{p_k}$.

Demonstração. Veja [9].

A.3 ANÁLISE FUNCIONAL

Teorema A.7 (Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe $C^{0,1}$, $n \geq 2$. Se $p \in [1, +\infty)$, então o mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo, desde que

(1) $p < n$ e $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-kp}$ ou

(2) $p \geq n$ e $q \in [1, +\infty)$.

Além disso, caso $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{np}{n-kp}$ ou $p \geq n$ e $q \in [1, +\infty)$, o mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto.

Demonstração. Veja [22].

Teorema A.8 Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo, $K \subset E$ um subconjunto limitado, fechado e convexo. Então K é fracamente compacto em E, ou seja, K é compacto na topologia fraca de E.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.9 Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.10 Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e (x_k) uma sequência em E. Se $x_k \rightharpoonup x$, então (x_k) é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_k\|$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.11 Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe $C^{k,1}$. Assuma que $s \leq k+1$ e que $s - \dfrac{1}{p}$ não é inteiro. Ainda, seja $s - \dfrac{1}{p} = l + \theta$, $0 < \theta \leq 1$ e l um inteiro não negativo. Então $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ se, e só se, $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$\Gamma(u) = \Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = ... = \Gamma\left(\frac{\partial^l u}{\partial n^l}\right) = 0.$$

Demonstração. Veja [18].

Teorema A.12 Seja H um espaço de Hilbert e $V \subset H$ um subespaço fechado, então $H = V \oplus V^{\perp}$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.13 Seja M um subconjunto de um espaço com produto interno X. Então se X for completo e não existir $x \in X \backslash \{0\}$ que seja ortogonal a todo o elemento de M então M é total em X.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.14 Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo K, A e B subespaços vetoriais de E, tais que $E = A \oplus B$. Se X for um subespaço vetorial de E e A for um subespaço vetorial de X, então $X = A \oplus (B \cap X)$.

Demonstração. Veja [11].

Teorema A.15 Seja Ω um domínio limitado de Lipschitz (fronteira de clase $C^{0,1}$) em R^n, $n \geq 2$. Sejam, ainda, (u_k) uma sequência em $L^p(\partial\Omega)$ e $u \in L^p(\partial\Omega)$, tais que $u_k \to u$ em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. Então, existem (u_{k_j}) subsequência de (u_k) e $h \in L^p(\partial\Omega)$, tais que $u_{k_j}(x) \to u(x)$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $|u_{k_j}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. $x \in \partial\Omega$.

Demonstração. Veja [22].

Teorema A.16 (Teorema de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert, munido com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $f \in H^*$ então existe um único $y \in H$, tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in H$. Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.17 (Teorema da Aplicação Aberta) Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear, limitada e sobrejetiva. Então existe $r > 0$, tal que $\overline{T(B(0;1))} \supset B(0;r)$, onde $B(0;s) = \{x \in E; \|x\| < s\}$.

Demonstração. Veja [21].

Teorema A.18 Sejam (f_k) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_k - f\|_p \to 0$. Então existem uma subsequência (f_{k_j}) de (f_k) e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tais que

a) $f_{k_j}(x) \to f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$;

b) $|f_{k_j}(x)| \leq h(x)$, $\forall\, j$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.19 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(u_k) \subset L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < +\infty$. Se (u_k) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_k(x) \to u(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$, então $\lim_{k\to+\infty}(\|u_k\|_p^p - \|u_k - u\|_p^p) = \|u\|_p^p$.

Demonstração. Veja [9].

Teorema A.20 Seja $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ satisfazendo:

i) $u_k(x) \to u(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$ e

ii) $\|u_k\|_p \to \|u\|_p$, quando $k \to +\infty$.

Então $\|u_k - u\|_p \to 0$, quando $k \to +\infty$.

Demonstração. Veja [9].

A.4 CÁLCULO VARIACIONAL

Nesta seção veremos a ideia de diferenciabilidade sobre um espaço de Banach diferente do $\mathbb{R}^n$. As definições e resultados vistos aqui são encontrados em [19], [20], [21], [27] e [31].

Definição A.1 Sejam X um espaço de Banach, X^* seu dual, U um subconjunto aberto de X e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que φ é diferenciável à Gateaux se, para cada $u \in U$, existe $\varphi'(u) \in X^*$, tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+tv) - \varphi(u) - \varphi'(u)\cdot(tv)] = 0, \ \ \forall\, v \in X.$$

Definição A.2 Dizemos que o funcional $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável à Fréchet se, para cada $u \in U$, existe $\varphi'(u) \in X^*$, tal que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{\|v\|}[\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi'(u)\cdot v] = 0,$$

Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(U,\mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe para cada $u \in U$ e φ' é contínua.

Teorema A.21 Sejam X um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X. Se o funcional $\phi : U \to \mathbb{R}$ possui derivada de Gateaux contínua em U, então $\phi \in C^1(U,\mathbb{R})$.

Teorema A.22 (Multiplicadores de Lagrange) Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial de Banach e $F, G_1, G_2, ..., G_k$ funcionais em $C^1(E, \|\cdot\|)$. Se y_0 for um extremo de F restrito ao conjunto $F^{-1}(F(y_0)) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{k} G_i^{-1}(G_i(y_0))\right]$, então uma das duas alternativas ocorre:

(1) $\det A(v_1, v_2, ..., v_k) = 0$, para quaisquer $v_1, v_2, ..., v_k \in E$, onde

$$A(v_1, v_2, ... v_k) = \begin{pmatrix} F'(y_0)\cdot v_1 & F'(y_0)\cdot v_2 & \dots & F'(y_0)\cdot v_k \\ G_1'(y_0)\cdot v_1 & G_1'(y_0)\cdot v_2 & \dots & G_1'(y_0)\cdot v_k \\ G_2'(y_0)\cdot v_1 & G_2'(y_0)\cdot v_2 & \dots & G_2'(y_0)\cdot v_k \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ G_k'(y_0)\cdot v_1 & G_k'(y_0)\cdot v_2 & \dots & G_k'(y_0)\cdot v_k \end{pmatrix}.$$

(2) Existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., k$, tais que $F'(y_0)\cdot v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i'(y_0)\cdot v$, para todo $v \in E$.

A.5 RESULTADOS DA TEORIA DE MINIMAX

Os resultados vistos aqui são encontrados em [19], [20], [27] e [31].

Teorema A.23 (Teorema do Ponto de Sela) Sejam $W = V \oplus X$ um espaço de Banach, com $V \neq \{0\}$ e $\dim V < +\infty$. Se $I \in C^1(W, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) e D é uma vizinhança limitada de 0 em V, tal que $a = \sup\limits_{\partial D} I < \inf\limits_{X} I = b$, então $c = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in \overline{D}} I(h(u))$ é um valor crítico de I, com $c \geq b$, onde $\Gamma = \{h \in C(\overline{D}, V); h(u) = u, \ \forall \ u \in \partial D\}$.

Teorema A.24 Seja E um espaço de Banach real. Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente, então $c = \inf\limits_{E} I$ é um valor crítico para I.

A.6 RESULTADOS AUXILIARES

Lema A.1 Suponha que g satisfaça (C_2) e que existam constantes $p, q \geq 1$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tais que $|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{p}{q}}$, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então o operador Nemytskii $N : L^p(\partial\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$, definido por $N(u)(x) = g(x, u(x))$, para $u \in L^p(\partial\Omega)$ e $x \in \partial\Omega$, é contínuo.

Demonstração. Inicialmente, verifiquemos a boa definição do operador de Nemytskii. Seja $u \in L^p(\partial\Omega)$. Assim, u é σ-mensurável. Por isto e por $g \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(x, u)$ é σ-mensurável. Além disso, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |g(x, u(x))|^q d\sigma < +\infty$. Com efeito, por hipótese temos $|g(x, u(x))| \leq a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{p}{q}}$. Logo, pelo Teorema A.4, existe $a_3 > 0$, tal que

$$|g(x, u(x))|^q \leq (a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{p}{q}})^q \leq a_3 (a_1^q + a_2^q |u(x)|^p).$$

Tomando $K = \max\{a_3 a_1^q, a_2^q a_3\}$, $|g(x, u(x))|^q \leq K(1 + |u(x)|^p)$. Deste modo, devido a $| \partial\Omega |_\sigma < +\infty$ e $u \in L^p(\partial\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} |g(x, u(x))|^q d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} K(1 + |u(x)|^p) d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} K d\sigma + \int_{\partial\Omega} |u(x)|^p d\sigma < +\infty.$$

Consequentemente $g(x, u(x)) \in L^p(\partial\Omega)$, isto é, N está bem definido.

Para verificarmos a continuidade do operador N, consideremos u_k e u em $L^p(\partial\Omega)$, tais que $u_k \to u$ em $(L^p(\partial\Omega), \| \cdot \|_{p,\partial})$. Desta maneira, pelo Teorema A.15, existem uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k) em $L^p(\partial\Omega)$ e $h \in L^p(\partial\Omega)$, tais que

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, | \cdot |) \text{ e } |u_{k_j}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \tag{A.1}$$

Como $g \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(x, u_{k_j}(x)) \to g(x, u(x))$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, q.t.p. $x \in \partial\Omega$. Agora, por hipótese e por e (A.1)

$$|g(x, u_{k_j}(x))| \leq a_1 + a_2|u_{k_j}(x)|^{\frac{p}{q}} \leq a_1 + a_2(h(x))^{\frac{p}{q}}, \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega.$$

Ainda se $m(x) = a_1 + a_2|h(x)|^{\frac{p}{q}}$, $m(x) \in L^q(\partial\Omega)$, pois $h \in L^p(\partial\Omega)$. Deste modo, $g(x, u_{k_j}(x)) \to g(x, u(x))$ em $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$.

Para concluirmos a demonstração, devemos mostrar que $g(x, u_k(x)) \to g(x, u(x))$ em $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$. Suponhamos que isto não ocorra, ou seja, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência (u_{k_l}) de (u_k), tais que

$$\|g(x, u_{k_l}(x)) - g(x, u(x))\|_{q,\partial} \geq \epsilon, \ \ \forall \ l \in \mathbb{N}. \tag{A.2}$$

Mas pela hipótese inicial, $u_k \to u$ em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. Logo, $u_{k_l} \to u$ em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. Utilizando o Teorema A.15 e os mesmos argumentos feitos acima, existe $(u_{k_{l_j}}) \subset (u_{k_l})$, tal que

$$g(x, u_{k_{l_j}}(x)) \to g(x, u(x)) \text{ em } (L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial}), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega,$$

o que gera uma contradição com (A.2). Daí, $g(x, u_k(x)) \to g(x, u(x))$ em $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$, ou seja, o operador N é contínuo. ■

Observação A.1 Se as condições (C_2) e (C_3) forem válidas, ao aplicarmos o Lema A.1 com $p = s+1$ e $q = \frac{s+1}{s}$ o operador $N : L^{s+1}(\partial\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$ é contínuo.

O próximo Lema tem demonstração análoga à do Lema A.1, por isto a omitiremos.

Lema A.2 Suponha que f satisfaça a condição (C_2) e que existam constantes $p, q \geq 1$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que $|f(x, \xi)| \leq b_1 + b_2|\xi|^{\frac{p}{q}}$, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então o operador de Nemytskii $M : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é contínuo.

Observação A.2 Se as condições (C_2) e (C_3') forem válidas, segue do Lema A.2 que o operador $M : L^{t+1}(\Omega) \to L^{\frac{t+1}{t}}(\Omega)$, é contínuo.

O funcional $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao problema (3.1) é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx - \int_\Omega F(x, u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u)d\sigma,$$

onde $F(x, u) = \displaystyle\int_0^u f(x, \xi)d\xi$ e $G(x, u) = \displaystyle\int_0^u g(x, \xi)d\xi$.

Proposição A.1 Se valem as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e (C_3'), então $I(u) \in \mathbb{R}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Pela validade de **(A)** e (C_1), temos

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx\right| = \left|\frac{1}{2}\langle u, u\rangle_c\right| \leq \frac{1}{2}\|u\|_c\|u\|_c < +\infty.$$

Agora, por (C_2), $G \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Assim, dados $x \in \partial\Omega$ e $u \in \mathbb{R}$, pelo teorema Fundamental do Cálculo, $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s G_s(x,\xi)d\xi + G(x,0)$, onde $G_s(x,\xi) = \dfrac{\partial G}{\partial s}(x,\xi) = g(x,\xi)$. Logo,

$$|G(x,u)| \leq \int_0^u |g(x,\xi)|d\xi + |G(x,0)|.$$

Por isto e por (C_3), ao tomarmos $e_1 = \max\{a_1, a_2\} > 0$. Daí,

$$|G(x,u)| \;\leq\; e_1\int_0^u (1+|\xi|^s)d\xi + |G(x,0)|, \;\text{ com }\; 0 \leq s < \frac{n}{n-2}.$$

Por outro lado, por $\overline{\Omega}\times\{0\}$ ser compacto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e G ser contínuo sobre $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|G(x,0)| \leq |G(x_0,0)| = \tilde{x},\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
|G(x,u)| &\leq e_1\int_0^u d\xi + e_1\int_0^u |\xi|^s d\xi + |G(x_0,0)| \\
&= e_1|u| + e_1\frac{|u|^{s+1}}{s+1} + \tilde{x} \\
&\leq e_2(|u| + |u|^{s+1} + 1), \;\text{ com }\; 0 \leq s < \frac{n}{n-2}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde $e_2 = \max\{e_1, \dfrac{e_1}{s+1}, \tilde{x}\}$. Considerando $\psi(u) = |u| + |u|^{s+1} + 1$, tem-se $|G(x,u)| \leq e_2\psi(u)$, com $1 \leq s+1 < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$. Ainda pelo Teorema A.1, existem constantes $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 > 0$, tais que $\|w\|_{1,\partial} \leq \tilde{a}_1\|w\|_{H^1} < +\infty$ e $\|w\|_{s+1,\partial} \leq \tilde{a}_2\|w\|_{H^1} < +\infty$, para todo $w \in H^1(\Omega)$. Disto e da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |\psi(u)|d\sigma &= \int_{\partial\Omega} [||u| + |u|^{s+1} + 1|]d\sigma \\
&\leq \int_{\partial\Omega} |u|d\sigma + \int_{\partial\Omega} |u|^{s+1}d\sigma + \int_{\partial\Omega} |1|d\sigma \\
&= \|u\|_{1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^{s+1} + |\partial\Omega|_\sigma < +\infty,\ \ \forall\ u \in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, ao utilizarmos (A.3), concluimos que

$$\int_{\partial\Omega} |G(x,u)|dx \leq e_2 \int_{\partial\Omega} |\psi(u)|dx < +\infty, \ \forall \ u \in H^1(\Omega).$$

De maneira análoga, prova-se que $\displaystyle\int_\Omega \mid F(x,u) \mid dx < +\infty$. Portanto,

$$0 \leq |I(u)| \leq \frac{1}{2}\|u\|_c^2 + \left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| + \left|\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma\right| < +\infty,$$

isto é $I(u) \in \mathbb{R}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

$\blacksquare$

Proposição A.2 Suponhamos válidas as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e $(C_3^{'})$. Então, para cada $u \in H^1(\Omega)$, arbitrário, porém fixado, o funcional $T_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$T_u(v) = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv]dx - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma, \ \forall \ v \in H^1(\Omega)$$

está bem definido, é linear e contínuo, ou seja, $T_u \in H^1(\Omega)^*$.

Demonstração. Inicialmente, vamos demonstrar que o funcional T_u está bem definido, isto é, $T_u(v) \in \mathbb{R}$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Para tal, seja $v \in H^1(\Omega)$. Como $(\mathbf{A})$ e (C_1) são válidas,

$$T_u(v) = \langle u, v\rangle_c - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma, \ \forall \ v \in H^1(\Omega),$$

onde $\langle u, v\rangle_c < +\infty$.
Para mostrarmos a boa definição de T_u, basta verificarmos que $\left|\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma\right| < +\infty$ e $\left|\displaystyle\int_\Omega f(x,u)vdx\right| < +\infty$, pois $|T_u(v)| \leq |\langle u, v\rangle_c| + \left|\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma\right| + \left|\displaystyle\int_\Omega f(x,u)vdx\right| < +\infty$.

Ora, $\left|\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma\right| < +\infty$. Com efeito, de (C_3), da desigualdade de Hölder e do Teorema A.1, temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} g(x,u)v d\sigma \right| &\leq K_1 \int_{\partial\Omega} [|v| + |u|^s |v|] d\sigma \\
&= K_1 \|v\|_{1,\partial} + K_1 \int_{\partial\Omega} |u|^s |v| d\sigma \\
&\leq K_1 \|v\|_{1,\partial} + K_1 \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{s \cdot \frac{s+1}{s}} d\sigma \right)^{\frac{s}{s+1}} \cdot \left(\int_{\partial\Omega} |v|^{s+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&= K_1 \|v\|_{1,\partial} + K_1 \|u\|_{s+1,\partial}^s \|v\|_{s+1,\partial} \\
&\leq \tilde{a}_1 K_1 \|v\|_{H^1} + K_1 \tilde{a}_2^{s+1} \|u\|_{H^1}^s \|v\|_{H^1} \\
&\leq K_2 (\|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^s \|v\|_{H^1}) < +\infty, \qquad (A.4)
\end{aligned}
$$

onde $K_1 = \max\{a_1, a_2\} > 0$, $K_2 = \max\{\tilde{a}_1 K_1, \tilde{a}_2^{s+1} K_1\}$ e $1 \leq s+1 < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$.
Com a argumentos análogo podemos mostrar que existe $K_3 > 0$ tal que

$$
\left| \int_{\Omega} f(x,u) v dx \right| \leq K_3 (\|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^t \|v\|_{H^1}) < +\infty. \qquad (A.5)
$$

A linearidade do funcional T_u segue, pois os funcionais P_1, P_2 e $P_3 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidos por $P_1(v) = \langle u, v \rangle_c$, $P_2(v) = \displaystyle\int_{\Omega} f(x,u) v dx$ e $P_3(v) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u) v d\sigma$ são lineares.

Finalmente, mostraremos que T_u é contínuo. Para tanto, basta mostrar a continuidade de T_u em $0 \in H^1(\Omega)$. Seja (v_k) uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que $v_k \to 0$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_c)$, pela equivalência das normas $\| \cdot \|_c$ e $\| \cdot \|_{H^1}$, $v_k \to 0$ em $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$.
Utilizando (A.4) e (A.5) obtemos

$$
\begin{aligned}
|T_u(v_k)| &\leq \|u\|_c \|v_k\|_c + \left| \int_{\Omega} f(x,u) v_k dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g(x,u) v_k d\sigma \right| \\
&\leq \|u\|_c \|v_k\|_c + K_3 (\|v_k\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^t \|v_k\|_{H^1}) + K_2 (\|v_k\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^s \|v_k\|_{H^1}) \to 0.
\end{aligned}
$$

Logo, T_u é contínua.

■

Proposição A.3 Suponhamos válidas as condições $(C_1), (C_2), (C_2), (C_3)$ e (C_3'). Então o funcional I é diferenciável a Fréchet, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$,$I'(u) = T_u$.

Demonstração. Primeiramente, observamos se $J_1, J_2, J_3 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são definidas por $J_1(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u^2| dx + \int_{\Omega} c(x) u^2 dx$, $J_2(u) = \displaystyle\int_{\Omega} F(x,u) dx$ e $J_3(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,u) d\sigma$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, então $I = J_1 - J_2 - J_3$. Com isto, se mostrarmos que J_1, J_2 e J_3 são diferenciáveis a Fréchet em $H^1(\Omega)$ então I também será difenciável a Fréchet em $H^1(\Omega)$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, $I'(u) = J_1'(u) - J_2'(u) - J_3'(u)$.

No que segue, provaremos que isto vale e que $T_u = J_1'(u) - J_2'(u) - J_3'(u)$.

Afirmação 1. J_1 é diferenciável a Fréchet, com derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$,

$$J_1'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x) uv dx, \ \forall \ v \in H^1(\Omega).$$

Com efeito, $J_1(u) = \frac{1}{2}\mathcal{D}_c(u)$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.2, $\mathcal{D}_c$ é diferenciável a Fréchet, com derivada de Fréchet dado por $\mathcal{D}_c'(u) \cdot v = 2\langle u, v\rangle_c$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Logo J_1 é diferenciável a Fréchet com $J_1'(u) \cdot v = \langle u, v\rangle_c$ para quaisquer $u, v \in H^1(\Omega)$.

Afirmação 2. J_3 é diferenciável a Fréchet, com derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$,

$$J_3'(u) \cdot v = \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma, \ \forall \ v \in H^1(\Omega).$$

De fato, para tal vamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$, tal que se $v \in H^1(\Omega)$ e $\|v\|_c < \delta$ então $\left| J_3(u+v) - J_3(u) - \displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u)v \right| \leq \epsilon \|v\|_c$, ou seja, J_3 é direnciável a Fréchet, com $J_3'(u) \cdot v = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \psi d\sigma$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Para isso, notamos que se $\psi \equiv |G(x, u+v) - G(x, u) - g(x, u)v|$, então

$$\left| J_3(u+v) - J_3(u) - \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} \psi d\sigma.$$

Ainda, se definirmos, para $\tilde{\varphi}, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^+$ arbitrários e $u, v \in H^1(\Omega)$, $R_1 = \{x \in \partial\Omega : |u(x)| \geq \tilde{\varphi}\}$, $R_2 = \{x \in \partial\Omega : |v(x)| \geq \tilde{\xi}\}$, e $R_3 = \{x \in \partial\Omega : |u(x)| \leq \tilde{\varphi}$ e $|v(x)| \leq \tilde{\xi}\}$, então $\partial\Omega \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Por isto,

$$\int_{\partial\Omega} \psi d\sigma \leq \sum_{i=1}^{3} \int_{R_i} \psi d\sigma. \tag{A.6}$$

Agora como $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $G_u(x, u) = g(x, u)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $G(x, \xi + \eta) - G(x, \xi) = g(x, \xi + \theta\eta) \cdot \eta$, para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Disto, de (A.6) e de (C_3)

$$\begin{aligned} \int_{R_1} |G(x, u+v) - G(x, u)| d\sigma &= \int_{R_1} |g(x, u+\theta v)| \cdot |v| d\sigma \\ &\leq \int_{R_1} [a_1 + a_2 |u + \theta v|^s] \cdot |v| d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.4, existe constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que $|u+\theta v|^s \leq \tilde{K}_1(|u|^s + |\theta\cdot v|^s)$. Como $\theta\in(0,1)$, $|u+\theta v|^s \leq \tilde{K}_1(|u|^s+|v|^s)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{R_1}|G(x,u+v)-G(x,u)|d\sigma &\leq \int_{R_1}[a_1 + a_2\tilde{K}_1|u|^s + a_2\tilde{K}_1|v|^s]|v|d\sigma \\ &\leq \int_{R_1}[a_1|v| + \tilde{K}_2|u|^s\cdot|v| + \tilde{K}_2|v|^s\cdot|v|]d\sigma, \qquad (A.7)\end{aligned}$$

onde $\tilde{K}_2 = a_2\tilde{K}_1$. Visto que $0 \leq s < \dfrac{n}{n-2}$, então $\dfrac{s}{s+1} + \dfrac{n-2}{2n-2} < 1$. Deste modo, existe $\alpha > 1$, tal que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{s}{s+1} + \dfrac{n-2}{2n-2} = 1$. Em razão de $1 \leq s+1 < \dfrac{2n-2}{n-2}$, o Teorema A.1 nos garante a continuidade dos operadores traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ e de $H^1(\Omega)$ sobre $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$. Por conseguinte, existem $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2\in\mathbb{R}$, tais que $\|u\|_{s+1,\partial} \leq \tilde{b}_1\|u\|_{H^1}$ e $\|u\|_{\frac{2n-2}{n-2},\partial} \leq \tilde{b}_2\|u\|_{H^1}$. Em virtude disto, ao utilizarmos a desigualdade de Hölder generalizada em (A.7) para $p=\frac{2n-2}{n-2}$, $q=\frac{s+1}{s}$ e α, e notarmos que $R_1\subset\partial\Omega$, obtemos

$$\int_{R_1}|G(x,u+v)-G(x,u)|d\sigma \leq \|v\|_{\frac{2n-2}{n-2}\partial}\left[a_1|R_1|_\sigma^{\frac{n}{2n-2}} + \tilde{K}_2|R_1|_\sigma^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|u\|^s_{s+1,\partial} + \|v\|^s_{s+1,\partial}\right)\right].$$

Devido a isto, ao Teorema A.1 e à equivalência entre as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$, existe constante $\tilde{K}_3 > 0$, tal que

$$\int_{R_1}|G(x,u+v)-G(x,u)|d\sigma \leq \tilde{K}_3\|v\|_c[|R_1|_\sigma^{\frac{n}{2n-2}} + |R_1|_\sigma^{\frac{1}{\alpha}}(\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)]. \qquad (A.8)$$

Por outro lado, pela continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, pela equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ e pela definição de R_1 existe constante positiva $\overline{K}_1$, tal que $\|u\|_c \geq \overline{K}_1\tilde{\varphi}\left(\displaystyle\int_{R_1}1d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{K}_1\tilde{\varphi}|R_1|_\sigma^{\frac{1}{2}}$, isto é,

$$|R_1|_\sigma^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{\|u\|_c}{\overline{K}_1\tilde{\varphi}}\right)^{\frac{2}{\alpha}} := M_1(\tilde{\varphi}) \text{ e } |R_1|_\sigma^{\frac{n}{2n-2}} \leq \left(\frac{\|u\|_c}{\overline{K}_1\tilde{\varphi}}\right)^{\frac{n}{n-1}} := M_2(\tilde{\varphi}).$$

Logo de (A.8),

$$\int_{R_1}|G(x,u+v)-G(x,u)|d\sigma \leq \tilde{K}_3\|v\|_c[M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi})(\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)].$$

De maneira análoga, podemos mostrar que existe constante $\tilde{K}_4 > 0$, tal que

$$\int_{R_1}|g(x,u)v|d\sigma \leq \tilde{K}_4\|v\|_c[M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi})(\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)].$$

Deste modo, se $\tilde{K}_5 = \tilde{K}_3 + \tilde{K}_4$, então

$$\int_{R_1} \psi d\sigma \leq \tilde{K}_5 \|v\|_c [M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi})(\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)].$$

Agora, seja $v \in H^1(\Omega)$, com $\|v\|_c < \delta$, para $0 < \delta < 1$. Como $u \in H^1(\Omega)$ é arbitrário, porém fixado, $M_1(\tilde{\varphi}) \to 0$ e $M_2(\tilde{\varphi}) \to 0$, quando $\tilde{\varphi} \to +\infty$. Por isto, $M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi})(\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \to 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\varphi > 0$ tal que se $\tilde{\varphi} > \varphi$, então

$$\int_{R_1} \psi d\sigma \leq \tilde{K}_5 \|v\|_c \cdot \frac{\epsilon}{3 \cdot \tilde{K}_5} = \frac{\epsilon \|v\|_c}{3}, \ \forall \ v \in H^1(\Omega) \text{ com } \ \|v\|_c \leq \delta < 1. \tag{A.9}$$

Passemos à analise da integral de ψ ao longo de R_2. De maneira similar ao que foi feito até então, prova-se que existe constante $d_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{R_2} \psi d\sigma &\leq \int_{R_2} |G(x, u+v) - G(x,u)| d\sigma + \int_{R_2} |g(x,u)v| d\sigma \\ &\leq d_1 \int_{R_2} [|v| + |u|^s |v| + |v|^s |v|] d\sigma. \end{aligned}$$

Por isto, pelo Teorema A.1, pela normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes, pela desigualdade de Hölder, para $p = \frac{s+1}{s}$ e $q = s+1$ e por $R_2 \subset \partial\Omega$,

$$\int_{R_2} \psi d\sigma \leq d_2 \left[|R_2|_\sigma^{\frac{s}{s+1}} \|v\|_{s+1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^s \|v\|_{s+1,\partial} + \|v\|_{s+1,\partial}^s \|v\|_{s+1,\partial} \right],$$

onde $d_2 > 0$. Utilizando novamente o teorema A.1 e a equivalências das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ existe constante $d_2 > 0$ tal que

$$\int_{R_2} \psi d\sigma \leq d_2 (1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \left[\int_{R_2} \|v\|^{s+1} d\sigma \right]^{\frac{1}{s+1}}. \tag{A.10}$$

Agora, se $x \in R_2$, então $|v(x)| \geq \tilde{\gamma}$. Assim, se $m = \frac{2n-2}{n-2}$, temos

$$\left(\int_{R_2} |v|^{s+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{s+1}} = \left(\int_{R_2} |v|^{s+1} \left(\frac{|v|}{|v|} \right)^{m-(s+1)} d\sigma \right)^{\frac{1}{s+1}},$$

onde $\frac{m}{s+1}$ e $\frac{m}{m-(s+1)}$ são expoentes conjugados. Segue da desigualdade Hölder e do fato que

$|v(x)| \geq \tilde{\gamma}$,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{R_2} |v|^{s+1} d\sigma\right)^{\frac{1}{s+1}} &\leq \left[\left(\int_{R_2} |v|^m d\sigma\right)^{\frac{s+1}{m}} \cdot \left(\int_{R_2} |v|^m d\sigma\right)^{\frac{m-s+1}{m}}\right]^{\frac{1}{s+1}} \cdot \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\frac{m-(s+1)}{s+1}}} \\
&= \|v\|_{m,\partial} \cdot \|v\|_{m,\partial}^{\frac{m-s+1}{s+1}} \cdot \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}}.
\end{aligned}
$$

Como $m > s+1$, segue do Teorema A.1 e das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes, que existe uma constante $d_3 > 0$, tal que

$$
\left(\int_{R_2} |v|^{s+1} d\sigma\right)^{\frac{1}{s+1}} \leq d_3 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|v\|_c \cdot \|v\|_c^{\frac{m-s+1}{s+1}}.
$$

Disto e de (A.10), concluimos que, se $d_4 = d_2 d_3$,

$$
\int_{R_2} \psi d\sigma \leq d_4 \gamma^{\frac{s+\tilde{1}-m}{s+1}} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \cdot \|v\|_c^{\frac{m}{s+1}}. \tag{A.11}
$$

Faremos agora a estimativa da integral de ψ ao longo de R_3. Como $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $G_u = g$, dados $\hat{\epsilon}$, $\hat{v} > 0$ existe $\hat{k}_1 = \hat{k}_1(\hat{\epsilon}, \hat{v}) > 0$, tal que se $x \in \partial\Omega$, $|u(x)| \leq \hat{v}$ e $|v(x)| \leq \hat{k}$ então

$$
|G(x, u+v) - G(x,u) - g(x,u)v| \leq \hat{\epsilon}|v|. \tag{A.12}
$$

Assim para $\hat{\epsilon} > 0$ arbitrário e $\hat{v} = \tilde{\varphi} > 0$, garantimos a existência de $\hat{k}_1 = \hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\epsilon}, \tilde{\varphi}) > 0$ tais que se $x \in \partial\Omega$, $|u(x)| \leq \tilde{\varphi}$ e $|v(x)| \leq \tilde{\gamma}$, (A.12) vale. Consequentemente pelo Teorema A.1 e pelas normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes

$$
\int_{R_3} \psi d\sigma \leq \hat{\epsilon} \int_{R_3} |v(x)| d\sigma \leq \hat{\epsilon} \hat{K} \|v\|_c.
$$

Se escolhermos $\hat{\epsilon} > 0$, tal que $\hat{\epsilon} \cdot \hat{K} < \frac{\epsilon}{3}$, segue que

$$
\int_{R_3} \psi d\sigma \leq \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c. \tag{A.13}
$$

Ao combinarmos as desigualdades (A.9), (A.11) e (A.13), obtemos

$$
\int_{\partial\Omega} \psi d\sigma \leq \frac{2\epsilon}{3} \|v\|_c + d_4 \gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \|v\|_c^{\frac{m}{s+1}}
$$

desde que $v \in H^1(\Omega)$ e $\|v\|_c < \delta$. Assim tomando $\delta > 0$, com $0 < \delta < 1$, tal que

$$d_4 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \delta^{\frac{m-(s+1)}{s+1}} < \frac{\epsilon}{3},$$

tem-se

$$\int_{\partial\Omega} \psi d\sigma \leq \frac{2\epsilon}{3} \|v\|_c + \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c = \epsilon \|v\|_c,$$

o que conclui a demonstração do Teorema.

■

Proposição A.4 Se as condições C_1, C_2, C_3 e C_3' valerem, então $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Para mostrarmos que $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, basta mostrarmos que J_1, J_2 e J_3 estão em $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, uma vez que $I = J_1 - J_2 - J_3$.

Inicialmente, recordamos que $J_1 = \frac{1}{2}\mathcal{D}_c$. Logo pelo Teorema 1.2, $\mathcal{D}_c \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Consequentemente $J_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Desta maneira para concluirmos a demonstração da Proposição, vamos mostrar que J_2, $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Mostraremos, a seguir, que $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. A prova de que $J_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ é análoga.

Na Afirmação 2 da Proposição A.3 mostramos que J_3 é diferenciável a Fréchet e sua derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ é dada por $J_3'(u)(v) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x,u) v d\sigma$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Deste modo, para mostrarmos que $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, basta verificarmos que o operador $J_3' : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ é contínuo. Para tal, sejam $u \in H^1(\Omega)$ e (u_k) uma sequência em $H^1(\Omega)$, tais que $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Pela equivalência das normas em $H^1(\Omega)$, $u_k \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Por outro lado, pelo Teorema A.1, o operador traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^l(\partial\Omega)$, para $l \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, é contínuo. Logo,

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad (L^l(\partial\Omega), \|\cdot\|_l), \;\; \forall \; l, \;\; \text{com} \;\; 1 \leq l \leq \frac{2(n-1)}{n-2}. \tag{A.14}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder para $1 \leq s+1 < \frac{2(n-1)}{n-2}$, o Teorema A.1 e a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$, obtemos constantes $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ e $\tilde{K}_3 > 0$, tais que

$$\begin{aligned}
\|J_3'(u_k) - J_3'(u)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c \leq 1} |[J_3'(u_k) - J_3'(u)](v)| \\
&\leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \int_{\partial\Omega} |g(x,u_k) - g(x,u)||v| d\sigma \\
&\leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \tilde{K}_1 \|g(x,u_k) - g(x,u)\|_{\frac{s+1}{s},\partial} \|v\|_{H^1} \\
&\leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \tilde{K}_2 \|g(x,u_k) - g(x,u)\|_{\frac{s+1}{s},\partial} \|v\|_c \\
&\leq \tilde{K}_3 \|g(x,u_k) - g(x,u)\|_{\frac{s+1}{s},\partial}. \qquad (A.15)
\end{aligned}$$

Ainda, pela Observação A.1, o operador $N : L^{s+1}(\partial\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$, definido por $N(u) = g(\cdot, u(\cdot))$ é contínuo. E, devido a $1 \leq s+1 < \frac{2(n-1)}{n-2}$ e (A.14) ser válida, temos, quando $l = s+1$ que $u_k \to u$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{s+1}{s},\partial})$. Consequentemente,

$$g(x, u_k(x)) \to g(x, u(x)) \text{ em } (L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{s+1}{s},\partial}).$$

Finalmente ao fazermos $k \to +\infty$ em (A.15), obtemos

$$\|J_3'(u_k) - J_3'(u)\|_c^* \leq \tilde{K}_3 \|g(x,u_k) - g(x,u)\|_{\frac{s+1}{s},\partial} \to 0.$$

Portanto, $J_3'(u_k) \to J_3'(u)$ em $(H^1(\partial\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$ e assim o operador J_3' é contínuo e J_3 está em $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, o que finda a prova da Proposição em questão. ■

Proposição A.5 Suponhamos válidas as condições $(C_1), (C_2), (C_2)$ e (C_3'). Então os funcionais $J_i : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, para $i = 2, 3$, são fracamente contínuos e além disso, os operadores J_2' e J_3' são compactos.

Demonstração. Mostraremos que J_3 é fracamente contínuo e que J_3' é compacto, para J_2 e J_2', a demonstração é análoga.

Afirmação 1. J_3 é fracamente contínuo.

Com efeito, sejam (u_k) uma sequência em $H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, tais que $u_k \rightharpoonup u$ em $(H^1(\partial\Omega), \|\cdot\|_c)$. Utilizando o Teorema A.10, existe uma constante $K_1 > 0$ tal que $\|u_k\|_c \leq K_1$. Pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ serem equivalentes, existe constante $K > 0$ tal que $\|u_k\|_{H^1} \leq K$. Logo, pelo Teorema A.9, existe $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot,\cdot\|_{H^1})$. Por valer (C_3), com $0 \leq s < \frac{n}{n-2}$, segue que $1 \leq s+1 < \frac{2(n-1)}{n-2}$. Deste modo, pelo Teorema A.1, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\partial\Omega)$ é compacta. Consequentemente,

$$u_k \to u \quad \text{em } (L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial}).$$

Agora pela Proposição A.4, vimos que $J_3 \in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$ e pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$, tal que

$$J_3(w) - J_3(u) = J_3^{'}(\theta w + (1-\theta)u)(w-u).$$

Deste modo, se $\Gamma_k(u) = \theta u_k + (1-\theta)u$, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|J_3(u_k) - J_3(u)| &\leq \int_{\partial\Omega} |g(x,\theta u_k + (1-\theta)u)\cdot(u_k - u)|d\sigma \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} |g(x,\theta u_k + (1-\theta)u)|^{\frac{s+1}{s}} d\sigma\right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_{\partial\Omega} |u_k - u|^{s+1} d\sigma\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq \|g(x,\Gamma_k(u))\|_{\frac{s+1}{s},\partial}\|u_k - u\|_{s+1,\partial}.
\end{aligned}$$

Pela validade da Observação A.1, o operador $N : L^{s+1}(\partial\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$, definido por $N(u) = g(\cdot,u(\cdot))$ é contínuo. Desta forma, pela definição de Γ_k

$\Gamma_k(u) \to u$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega),\|\cdot\|_{s+1,\partial})$. Logo, $g(x,\Gamma_k(u)) \to g(x,u)$ em $(L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega),\|\cdot\|_{\frac{s+1}{s},\partial})$. Consequentemente, $(\|g(x,\Gamma_k(u))\|_{\frac{s+1}{s},\partial})$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Portanto,

$$|J_3(u_k) - J_3(u)| \leq \|g(x,\Gamma_k(u))\|_{\frac{s+1}{s},\partial}\|u_k - u\|_{s+1,\partial} \to 0,$$

ou seja, J_3 é fracamente contínuo.

Afirmação 2 $J_3^{'}$ é compacto.

De fato, seja (u_k) uma sequência limitada em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$. Como $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo, existem $u \in H^1(\Omega)$ e $(u_{k_j}) \subset (u_k)$, tais que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $(H^1(\Omega),\|\cdot\|_c)$. Daí, pela Afirmação 1, $g(x,u_{k_j}(x)) \to g(x,u(x))$ em $(L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega),\|\cdot\|_{\frac{s+1}{s},\partial})$ e $J_3(u_{k_j}) \to J_3(u)$ em $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Por outro lado, pela Proposição A.4, $J_3 \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$. Com isto, quando $k \to +\infty$

$$\|J_3^{'}(u_{k_j}) - J_3^{'}(u)\|_c^* \leq \tilde{K}_3\|g(x,u_{k_j}(x)) - g(x,u(x))\|_{\frac{s+1}{s},\partial} \to 0,$$

isto é, $J_3^{'}(u_{k_j}) \to J_3^{'}(u)$ em $(H^1(\Omega)^*,\|\cdot\|_c^*)$ e o operador $J_3^{'}$ é compacto.

■

Definição A.3 Sejam $(E,\|\cdot\|)$ um espaço de Banach e J um funcional em $C^1(E,\mathbb{R})$. Dizemos que J satisfaz a condição **Palais Smale** (PS), se toda sequência (u_k) em E, tal que

i) $(J(u_k))$ é limitada e

ii) $J^{'}(u_k) \to 0$ em $(E^*,\|\cdot\|^*)$,
admite subsequência convergente em E.

Proposição A.6 Suponhamos válidas as condições $(C_1), (C_2), (C_3)$ e (C_3'). Se (u_k) for uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, tal que $I'(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$, então (u_k) admite subsequência convergente em $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência limitada em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Como este é reflexivo, temos que existem $u \in H^1(\Omega)$ e (u_{k_j}) subsequência de (u_k), tais que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Ainda na Proposição A.4, mostramos que J_2' e J_3' são funcionais compactos. Assim,

$$J_2'(u_{k_j}) \to J_2'(u) \quad \text{e} \quad J_3'(u_{k_j}) \to J_3'(u) \ \text{ em } \ (H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*). \tag{A.16}$$

Consideremos, agora, o operador $T : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$, definido por

$$T(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)uvdx = \langle u, v\rangle_c, \ \ \forall \ v \in H^1(\Omega).$$

Tal operador é linear, bijetor sobre a imagem e contínuo. Com efeito, a linearidade de T segue, pois $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ é um produto interno em $H^1(\Omega)$. Para a bijetividade de T vamos verificar sua injetividade e sobrejetividade. Primeiramente mostremos que T é injetor. Como $\text{Ker}T = \{u \in H^1(\Omega); T(u)(v) = 0\}$, temos que se $u \in \text{Ker}T$ então que $\langle u, v\rangle_c = 0$, para todo $v \in H^1(\Omega)$. Em particular, quando $u = v$, $\langle u, u\rangle_c = 0$. Logo $u = 0$ em $H^1(\Omega)$. Consequentemente, $\text{Ker}T = \{0\}$ e portanto T é injetor.

Ainda, dado que $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço de Hilbert, pelo Teorema A.16, T é um operador sobrejetor.

Para finalizarmos, seja (u_k) uma sequência em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$, tal que $u_k \to 0$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \|T(u_k)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c \le 1} |T(u_k)(v)| \\ &= \sup_{\|v\|_c \le 1} |\langle u_k, v\rangle_c| \\ &\le \sup_{\|v\|_c \le 1} \|u_k\|_c \|v\|_c \le \|u_k\|_c \to 0, \ \text{ quando } \ k \to +\infty. \end{aligned}$$

Por conseguinte, $T(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$ e isto mostra a continuidade do operador T.

Sendo T um operador linear contínuo e bijetor, temos, pelo Teorema A.17, que T é uma aplicação aberta. Desta forma, $T^{-1} : (H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*) \to (H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um operador linear e contínuo.

Também, como $I^{'} = J_1^{'} - J_2^{'} - J_3^{'}$ e $J_1^{'} = T$,

$$T^{-1}(I^{'}(u)) = u - T^{-1}(J_2^{'}(u)) - T^{-1}(J_3^{'}(u)).\ \forall\ u \in H^1(\Omega).$$

Em particular,

$$u_{k_j} = T^{-1}(I^{'}(u_{k_j})) + T^{-1}(J_2^{'}(u_{k_j})) + T^{-1}(J_3^{'}(u_{k_j})),\ \forall\ j \in \mathbb{N}. \tag{A.17}$$

Finalmente, por hipótese, temos que $I^{'}(u_k) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Por conseguinte $I^{'}(u_{k_j}) \to 0$ em $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_c)$. Devido a isto, à linearidade e à continuidade de T^{-1}, a $J_2^{'}$ e $J_3^{'}$ serem compactos e à validade de (A.16), obtemos $T^{-1}(I^{'}(u_{k_j})) \to T^{-1}(0) = 0$, $T^{-1}(J_2^{'}(u_{k_j})) \to T^{-1}(J_2^{'}(u))$ e $T^{-1}(J_3^{'}(u_{k_j})) \to T^{-1}(J_3^{'}(u))$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Por isto e por (A.17), concluimos que

$$u_{k_j} \to T^{-1}(J_2^{'}(u)) + T^{-1}(J_3^{'}(u)) \text{ em } (H^1(\Omega), \|\cdot\|_c),$$

isto é, a sequência (u_k) possui uma subsequência (u_{k_j}) convergente em $H^1(\Omega)$.

■