UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

William Silveira de Matos

ESTABILIDADE UNIFORME PARA UM MODELO EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Santa Maria, RS
2016

William Silveira de Matos

ESTABILIDADE UNIFORME PARA UM MODELO EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria(UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Profª Drª. Celene Buriol

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silveira de Matos, William
Estabilidade uniforme para um modelo em termoelasticidade hiperbólica / William Silveira de Matos.-2016.
50 f.; 30cm

Orientadora: Celene Buriol
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

1. Existência de Solução 2. Sistema Termoelástico 3. Decaimento Exponencial I. Buriol, Celene II. Título.

William Silveira de Matos

ESTABILIDADE UNIFORME PARA UM MODELO EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria(UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 29 de Fevereiro de 2016:

Celene Buriol, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Marcio Violante Ferreira, Dr. (UFSM)

Fabiana Travessini de Cezaro, Dra. (FURG)

Santa Maria, RS
2016

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer á Deus, por me dar a oportunidade chegar ao final desta etapa.

A minha mãe por ter me incentivado a seguir sempre estudando e não desistir nunca, independente das dificuldades que por vezes venham a aparecer. Ainda, por servir como um exemplo de superação para mim, pois tendo passado por diversos problemas de saúde, nunca deixou de ter esperança e acreditar na volta por cima.

Ao meu pai(Em Memória), mesmo não podendo me acompanhar durante o período de graduação e nem de pós-graduação, sei que de algum lugar, nas horas em que precisei de força para seguir, me enviou energias para seguir em frente.

A minha namorada Glece, a qual dividiu comigo todas as angustias, dificulades, momentos bons, durante estes dois anos, sendo ela minha principal fonte de inspiração principalmente nos momentos de dificuldade. Seu apoio foi fundamental para conseguir chegar no final desta etapa.

Aos meus irmãos, Felipe e Maicom, que desde cedo, sempre falavam para estudar, pois este era o melhor caminho a seguir. Hoje, posso comprovar que suas palavras são bem verdade, pois encontrei na matemática a diretriz de minha vida.

A minha orientadora Celene, por ser um exemplo de pessoa dedicada e comprometida com o faz, sempre me incentivando em fazer o melhor. Também, por me incentivar em seguir os estudos de pós-graduação e me fazer acreditar que fosse possível chegar lá. Enfim, por todo o aprendizado e experiência que me foi passado durante este período de orientação.

Ao professor Cicero Nacthigal, o qual me apoiou bastante durante o período de graduação, sendo para mim, um exemplo de profissional a ser seguido. Por também me incentivar em seguir os estudos de pós-graduação, e acreditar no meu potencial.

Ao professor Giovanni Nunes, também me apoiou bastante durante a graduação, principalmente na escolha de qual área seguir na pós-graduação, relatando diferenças entre uma área e outra.

Aos colegas de graduação, principalmente o Marcelo e a Samantha, por diversas horas de estudo, horas de dificuldades, mas também horas de alegria.

Aos colegas de pós-graduação, pelos momentos de estudos e lazer na sala do mestrado.

Aos professores da pós-graduação da UFSM, entre eles, os professores, Mauricio, Juliano e Marcio Violante, suas contribuições foram importantes para meu crescimento como matemático.

A professora Fabiana Travessini pelas suas contribuições na correção da dissertação.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuiram para que eu chegasse ao final desta etapa.

A CAPES, pelo apoio financeiro dado durante o curso.

RESUMO

ESTABILIDADE UNIFORME PARA UM MODELO EM TERMOELASTICIDADE HIPERBÓLICA

AUTOR: William Silveira de Matos
ORIENTADORA: Celene Buriol

Neste trabalho, consideramos um par de funções escalares $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ satisfazendo o sistema acoplado

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxt} + \delta\theta_{xt} & = & 0 \\ \tau\theta_{tt} - \rho\theta_{xx} + \theta_t + \delta u_{xt} & = & 0 \end{cases}$$

em $(0,L)\times(0,+\infty)$. Complementamos este sistema com condições de fronteira de Dirichlet

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \theta_t(x,0) = \theta_1(x).$$

Na primeira parte do trabalho, provaremos a existência de solução global para este modelo termoelástico. Na segunda parte, encontraremos uma taxa de decaimento exponencial para a energia do modelo descrito acima.

Palavras-Chave: Existência de Solução. Sistema Termoelástico. Decaimento Exponencial.

ABSTRACT

UNIFORM STABILITY FOR A MODEL IN HYPERBOLIC THERMOELASTICITY

AUTHOR: William Silveira de Matos
ADVISOR: Celene Buriol

In this work, we consider the scalar functions $u = u(x,t)$ and $\theta = \theta(x,t)$ satisfying the coupled system

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxt} + \delta\theta_{xt} & = & 0 \\ \tau\theta_{tt} - \rho\theta_{xx} + \theta_t + \delta u_{xt} & = & 0 \end{cases}$$

in $(0, L) \times (0, +\infty)$. We complement this system with Dirichlet boundary conditions

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0$$

and initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \theta_t(x,0) = \theta_1(x).$$

In the first part, we prove existence of a global solution for the thermoelastic model. In the second part, we find exponential decay rates to the model described above.

Keywords: Existence of Solution. Thermoelastic System. Exponential decay.

Sumário

Introdução

Neste trabalho consideramos um par de funções escalares $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ satisfazendo o sistema acoplado

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxt} + \delta\theta_{xt} & = & 0 \\ \tau\theta_{tt} - \rho\theta_{xx} + \theta_t + \delta u_{xt} & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

em $(0,L) \times (0,+\infty)$. Em (1), δ, τ e ρ são constantes positivas e $u = u(x,t)$ representa o deslocamento vertical de $x \in \Omega = (0,L)$ no tempo $t \geq 0$. A função $\theta = \theta(x,t)$ denota a temperatura (diferença de temperatura em relação a uma temperatura fixa) em $x \in \Omega = (0,L)$ no tempo $t \geq 0$.

As constantes positivas τ e ρ que estamos considerando em (1) aparecem na formulação da equação hiperbólica do calor e possuem importante conceituação física conforme pode ser visto em [9]. A constante $\delta > 0$ é uma constante de acoplamento para o modelo (1). Complementamos o sistema (1) com condições de fronteira de Dirichlet

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = \theta(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$u(L,t) = u_{xx}(L,t) = \theta(L,t) = 0 \tag{3}$$

e condições iniciais,

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \tag{4}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta_1(x). \tag{5}$$

O modelo (1) descreve deformações elásticas de uma equação de viga linear sobre a presença de efeitos térmicos modelado pela lei de Cattaneo (descreveremos a lei de

Cattaneo a seguir). Nosso principal resultado diz que a energia total E(t) associada ao modelo (1), dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\rho}{2}\int_0^L \theta_x^2 \,\mathrm{d}x \tag{6}$$

decai exponencialmente quando o tempo tende para $+\infty$. Mais precisamente, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno obteremos que $E(t) \leq 3E(0)exp(-\gamma t) \;\; \forall\, t \geq 0$, onde γ é uma constante positiva que depende de ε.

Durante muitos anos deformações de modelos elásticos sujeitos a efeitos térmicos formulados pela lei de Fourier causaram um certo "desconforto"e muitas discussões, porque a usual equação do calor (regida pela lei de Fourier) é de natureza parabólica e isso pressupõe velocidade infinita de propagação para a temperatura θ.

Há cerca de 60 anos atrás C. Cattaneo [7] sugeriu uma formulação alternativa para equação do calor. Segundo Cattaneo, a equação do calor regida pela lei de Fourier é substituida por uma nova equação dissipativa, porém com caráter hiperbólico .

A seguir vamos dar uma breve descrição da lei de Cattaneo: Considere $\theta = \theta(x,t)$ a temperatura em x no tempo t e $\overrightarrow{q}$ o vetor fluxo de calor, a relação

$$\theta_t + \beta div \overrightarrow{q} = 0 \tag{7}$$

é bem conhecida, onde $\beta > 0$. A Lei de Fourier da condução do calor diz que

$$\overrightarrow{q} + k\nabla\theta = 0 \tag{8}$$

para alguma constante positiva k. Substituindo (8) em (7) obtemos que

$$\theta_t - \beta k \Delta\theta = 0. \tag{9}$$

que é uma equação parabólica. A lei de Cattaneo propõe uma forma alternativa para (8): Seja $\tau > 0$ suficientemente pequeno, considere em vez de (8) a relação

$$\tau \overrightarrow{q_t} + \overrightarrow{q} + k\nabla\theta = 0. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (7) obtemos que

$$\tau\theta_{tt} + \theta_t - \beta k \Delta\theta = 0 \tag{11}$$

que é uma equação hiperbólica.

Observemos que ambas as equações, (9) e (11), possuem caráter dissipativo.

Modelos termoelásticos similares a (1), com a lei de Fourier modelando a equação do calor no lugar da lei de Cattaneo, foram estudados por um grande número de autores. Eles estudam existência, unicidade e regularidade de solução, bem como a estabilidade dos respectivos modelos considerando diferentes efeitos dissipativos internos ou de fronteira (ver, por exemplo, [3], [11], [12], [15]).

No caso de modelos termoelásticos hiperbólicos, podemos citar os trabalhos recentes de R.Racke [19], J.Rivera e Hugo D.F.Sare [20] e C.Buriol e G.P.Menzala [6].

Observemos que em [20] os autores consideraram o modelo

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho u_{tt} + \mu\Delta u_{tt} + \delta\Delta^2 u + \alpha\Delta\theta & = & 0 \;\; em \;\; \Omega \times (0, +\infty) \\ c\theta_t + k div \overrightarrow{q} - \alpha \Delta u_t & = & 0 \;\; em \;\; \Omega \times (0, +\infty) \\ \tau \overrightarrow{q_t} + k_0 \overrightarrow{q} + k\nabla\theta & = & 0 \;\; em \;\; \Omega \times (0, +\infty) \end{array}\right. \tag{12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira regular (classe C^2), $\rho, \mu, \delta, \alpha, c, k, \tau, k_0$ são constantes positivas.

Juntamente a (12) foram acrescidas as condições de fronteira

$$u = \Delta u = \theta = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \tag{13}$$

e condições iniciais

$$u(.,0) = u_0; \; u_t(.,0) = u_1; \; \theta(.,0) = \theta_0; \; \overrightarrow{q}(.,0) = \overrightarrow{q_0} \;\; em \;\; \Omega. \tag{14}$$

Os autores provaram, que com condições adequadas aos dados iniciais, o modelo (12)-(14) possui solução regular.

Quanto a estabilidade, os autores provaram que o modelo (12)-(14) é exponencialmente estável se, e somente se, $\mu > 0$. No caso $\mu = 0$ o sistema é polinomialmente estável.

Observemos que a segunda e terceira equações de (12) são equivalentes á segunda equação do nosso sistema (1), ou seja, descrevem a equação do calor hiperbólica modelada pela lei de Cattaneo.

No modelo (1), consideramos um modelo “similar” a (12) unidimensional com $\mu = 0$ porém, nesse caso, para obter o decaimento exponencial, foi acrescido o termo dissipativo $-u_{xxt}$ á primeira equação.

O presente trabalho se divide em três capítulos. No primeiro capítulo, é expomos a teoria básica usada nos capítulos 2 e 3. No capítulo 2, utilizando a teoria clássica de semigrupos de operadores lineares, provamos a existência e unicidade de solução para o modelo (1)-(5). No capítulo 3, mostraremos que a energia total associada ao modelo (1), definida em (6), decai exponencialmente, para isto, utilizaremos um funcional de Lyapnunov adequado.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta parte iremos expor alguns resultados e definições que serão usados mais adiante no desenvolvimento do problema. No decorrer do capítulo, Ω representará um subconjunto do $\mathbb{R}^n$.

1.1 Noções Sobre Distribuições

Afim de generalizar a definição de derivada de ordens superiores, considere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ uma n-upla de números inteiros não negativos onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ é a ordem de α, então para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ definimos a derivada multi-índice por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ temos que $D^\alpha u = u$.

Definição 1 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u como sendo o fecho do conjunto de todos os $x \in \Omega$ tais que $u(x) \neq 0$. Usamos a notação $Supp(u)$ para o suporte de u, portanto,*

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \; tal \; que \; u(x) \neq 0\}}.$$

Definição 2 *Considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que u é infinitamente diferenciável. Caso o suporte de u seja compacto dizemos que u é uma função teste. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções testes cujo suporte está contido em Ω.*

Com as operações usuais de soma de funções e produto por escalar, temos que $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3 *Sejam $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que ϕ_n converge para ϕ se :*
(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $Supp(\phi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Para cada α fixado $D^\alpha\phi_n \to D^\alpha\phi$ uniformemente sobre $\mathbb{R}^n$.

Definição 4 *Dizemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência dada acima.*

Definição 5 *O espaço dos funcionais lineares e contínuos $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é chamado de espaço das distribuições e denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. A continuidade de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é definida por :*

$$Se\ \ \phi_n \to 0\ em\ \mathcal{D}(\Omega)\ \Rightarrow \big\langle T, \phi_n \big\rangle \to 0\ em\ \mathbb{R}.$$

Observação 1 *Usamos a notação $\big\langle T, \phi \big\rangle$ para indicar a ação da distribuição T na função teste ϕ.*

Definição 6 *Sejam T e $V \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dizemos que $T = V$ se $\big\langle T, \phi \big\rangle = \big\langle V, \phi \big\rangle \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 7 *Dizemos que a sequência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $\big\langle T_n, \phi \big\rangle \to \big\langle T, \phi \big\rangle\ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 8 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice. A derivada distribucional de ordem α de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por*

$$\big\langle D^\alpha T, \phi \big\rangle = (-1)^{|\alpha|}\big\langle T, D^\alpha\phi \big\rangle\ , \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert

Definição 9 *Seja X um espaço vetorial. Uma semi-norma em X é uma aplicação $p : X \to [0, +\infty[$ que satisfaz as seguintes propriedades:*
$(N1)$ $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall\, x \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
$(N2)$ $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

Se p satisfaz a propriedade adicional

$(N0)\ p(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$

p é dita uma norma em X e neste caso é comum escrever $||x||$ em vez de $p(x)$.

Dizemos então que um espaço é normado se ele for munido de uma norma.

Definição 10 *Um espaço normado X é chamado de Espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge.*

Definição 11 *Um espaço H é chamado de espaço de Hilbert se toda sequência de cauchy for convergente em relação a norma proveniente do produto interno.*

Segue imediatamente das definições anteriores que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach.

1.3 Espaços L^p

Definição 12 *Seja $1 \leqslant p < \infty$ dizemos que $L^p(\Omega)$é o espaço das funções mensuráveis á Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integravél em Ω no sentido de Lebesgue.*

Caso $p = \infty$ temos que $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções mensusaveis á Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é essencialmente limitada em Ω, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leqslant C \quad q.s\, em\, \Omega.$$

A norma em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$ é dada por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Já no caso $p = \infty$ temos que a norma é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C\ ;\ |u(x)| \leqslant C\ q.s\, em\, \Omega\}.$$

Definição 13 *Seja $1 < p < \infty$ dizemos que q é o expoente conjugado de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Lema 1 *Se $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ com $a, b \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, então*

$$a^{\theta} b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta) b.$$

Demonstração: Se $\theta = 0$ ou $\theta = 1$ a demonstração é imediata. Consideremos o caso $0 < \theta < 1$. Observe que podemos supor b diferente de 0. Definimos

$$f(x) := x^{\theta} - \theta x - (1-\theta),\ x > 0.$$

Então $f'(x) = \theta \left(x^{\theta-1} - 1\right) \Rightarrow f'(1) = 0$ que implica $x = 1$ ser ponto crítico de f. Além disso, $f''(x) = \theta(\theta-1)x^{\theta-2} \Rightarrow f''(1) = \theta(\theta-1) < 0$. Logo, $x = 1$ é ponto de máximo local da função f. Por outro lado f é crescente em $0 < x < 1$ e decrescente para $x > 1$, portanto, $x = 1$ é máximo global de f. Então $f(A) \leqslant f(1) = 0\ \forall A \geqslant 0$, ou seja,

$$A^{\theta} \leqslant \theta A + 1 - \theta.$$

Tomando $A = ab^{-1}$ vemos que

$$a^{\theta} b^{-\theta} \leqslant \theta \left(ab^{-1}\right) + 1 - \theta.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b segue que

$$a^{\theta} b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta)\, b$$

o que conclui a prova.

Teorema 1 (Desigualdade de Hölder) *Considere $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p com $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant ||f(x)||_{L^p}.||g(x)||_{L^q}.$$

Demonstração: Se $||f||_{L^p} = 0$ ou $||g||_{L^q} = 0$ então teremos $f = 0$ q.s ou $g = 0$ q.s respectivamente. Sendo assim, em qualquer um destes casos $fg = 0$ q.s e a desigualdade é valida. Assim, suponhamos que nenhuma dessas normas se anulam e, além disso, que $||f||_{L^p} = ||g||_{L^q} = 1$. Então precisamos verificar que $||fg||_{L^1} \leqslant 1$. Para tanto, aplicamos o lema anterior com $a = |f(x)|^p, b = |g(x)|^q$ e $\theta = 1/p$. Segue que $1 - \theta = 1/q$ e

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Daí, temos que

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_\Omega |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ou seja,

$$||fg||_{L^1} \leqslant 1.$$

Para o caso geral, considere $f/||f||_{L^p}$ e $g/||g||_{L^q}$, assim $\left|\left|\frac{f}{||f||_{L^p}}\right|\right|_{L^p} = \left|\left|\frac{g}{||g||_{L^q}}\right|\right|_{L^q} = 1$ logo, pelo caso anterior temos que

$$\left|\left|\frac{fg}{||f||_{L^p}||g||_{L^q}}\right|\right|_{L^1} \leqslant 1.$$

Ou seja,

$$||fg||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

o que prova o nosso teorema.

Teorema 2 (Desigualdade de Young) *Seja $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p. Se a e b são números reais não negativos então*

$$a.b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [5], [10] ou [16].

Teorema 3 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam u e $v \in L^p(\Omega)$ então*

$$||u + v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)},\ \textit{onde}\ 1 \leq p < \infty.$$

Demonstração: Faremos a demonstração do caso $1 < p < \infty$. O caso $p = 1$ é imediato. Notemos primeiramente que

$$|u(x)+v(x)| \leqslant |u(x)|+|v(x)| \leqslant 2\, max\big\{|u(x)|,|v(x)|\big\}$$

então,

$$|u(x)+v(x)|^p \leqslant \big(2\, max\big\{|u(x)|,|v(x)|\big\}\big)^p \leqslant 2^p\,(|u(x)|^p+|v(x)|^p)$$

com isto, concluímos que $u+v \in L^p(\Omega)$. Por outro lado,

$$|u(x)+v(x)|^p = |u(x)+v(x)||u(x)+v(x)|^{p-1} \leqslant |u(x)||u(x)+v(x)|^{p-1}+|v(x)||u(x)+v(x)|^{p-1}.$$

Tomando q como o expoente conjugado de p segue que

$$\int_\Omega |(u(x)+v(x)^{p-1}|^q\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |(u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |(u(x)+v(x)|^p\,\mathrm{d}x < \infty$$

portanto, $(u(x)+v(x))^{p-1} \in L^q$. Assim, podemos usar a desigualdade de Hölder e obter

$$\int_\Omega |u(x)||u(x)+v(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |(u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

$$\int_\Omega |v(x)||u(x)+v(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |(v(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |(u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

Logo,

$$||u(x)+v(x)||_{L^p}^p \leqslant ||u(x)||_{L^p}||(u(x)+v(x))^{p-1}||_{L^q}+||v(x)||_{L^p}||(u(x)+v(x))^{p-1}||_{L^q}.$$

Agora, observemos que

$$||\,(u(x)+v(x))^{p-1}\,||_{L^q} = \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{p/pq}$$

ou seja,

$$||\,(u(x)+v(x))^{p-1}\,||_{L^q} = ||u(x)+v(x)||_{L^p}^{p/q}$$

portanto,

$$||u(x)+v(x)||_{L^p}^p \leqslant ||u(x)+v(x)||_{L^p}^{p/q} \left(||u(x)||_{L^p} + ||v(x)||_{L^p}\right).$$

Podemos supor que $||u(x)+v(x)||_{L^p} > 0$ pois, caso contrário, o resultado é trivial. Assim,

$$||u(x)+v(x)||_{L^p}^{p-p/q} \leqslant \left(||u(x)||_{L^p} + ||v(x)||_{L^p}\right)$$

mas,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p} \Rightarrow q=\frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{p}{q}=p-1$$

então

$$p-\frac{p}{q}=p-(p-1)=1$$

com isto, podemos concluir que

$$||u(x)+v(x)||_{L^p} \leqslant ||u(x)||_{L^p} + ||v(x)||_{L^p}$$

o que finaliza a demonstração.

Teorema 4 *O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é de Banach.*

Demonstração: Ver [5], [10] ou [16].

Sejam u e v $\in L^2(\Omega)$ definimos o produto interno em $L^2(\Omega)$ por

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considerando este produto interno, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a seguinte norma

$$||u||_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega u(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Para a demonstração deste resultado basta usar o teorema 4 com $p=2$ e notar que neste caso a norma definida em $L^2(\Omega)$ coincide com a norma induzida pelo produto interno.

Definição 14 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é localmente integrável e denotamos por $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ se*

$$\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \ \forall\, K \subset \Omega$$

onde K é um conjunto compacto.

Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definindo o funcional $T = T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\big\langle T, \phi \big\rangle = \big\langle T_f, \phi \big\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

segue que $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Identificando o funcional T_f com f, dizemos então que $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e com isto podemos concluir que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Temos que (ver [4]) as seguintes inclusões densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 15 *Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N}$.Quando $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $\forall |\alpha| \leqslant m$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev, sendo que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. A notação usada é $W^{m,p}(\Omega)$.*

Simbolicamente temos que

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ , \forall\, |u| \leqslant m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos uma norma de u por:

$$\begin{aligned} ||u||_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_0^L |D^\alpha u|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}, \ \ 1 \leqslant p < \infty. \\ ||u||_{m,\infty} &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} sup\, ess |D^\alpha u(x)|,\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Teorema 5 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver [1] ou [10].

O caso $p = 2$ é bastante útil nas aplicações e neste caso o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. O espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por

$$< u, v >_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)}$$

para todo u e $v \in H^m(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Definição 16 *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$. *Quando* $p = 2$ *escreve-se* $H_0^m(\Omega)$ *em vez de* $W_0^{m,2}$.

Segue diretamente da definição que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 6 $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver [9].

Definição 17 *Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que E está imersamente contido em F, com imersão contínua se :*
$(i) E \subset F \qquad (ii) \exists\, c > 0$ *tal que* $||u||_F \leqslant c||u||_E \;\; \forall u \in E$.

A notação usada para dizer que E está imersamente contido em F é $E \hookrightarrow F$.

Teorema 7 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver [1], [9] ou [10].

Lema 2 *Seja* $I = (a, b)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$. *Então* $u \in H_0^1(I)$ *se e somente se* $u = 0$ *na fronteira de* I.

Demonstração: Ver [16].

Teorema 8 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* $I = (a, b)$. *Então se* $u \in H_0^1(I)$ *temos que*

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant c||u'||_{L^2(\Omega)} \quad onde\ c = c(|I|),\ c > 0.$$

Demonstração: Como $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_a^x u'(t)\,\mathrm{dt} = u(x) - u(a) = u(x)$$

então, da desigualdade de Hölder

$$|u(x)| \leqslant \int_a^x |u'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |u'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} . \left(\int_a^b |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

ou seja,

$$|u(x)|^2 \leqslant (b-a)\int_a^b |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Integrando de a até b obtemos que

$$\int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[(b-a)\int_a^b |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = (b-a)^2\int_a^b |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

daí segue que $||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant c||u'||_{L^2(\Omega)}$ onde $c = (b-a)^2$.

Definição 18 *Seja* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $1 < q \leqslant \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *definimos* $W^{-m,q}(\Omega)$ *como sendo o espaço das funções* $f : W_0^{m,p} \to \mathbb{R}$ *tais que* f *é linear e contínua.*

Quando $p = q = 2$ denotamos por $H^{-m}(\Omega)$ o espaço $W^{-m,2}(\Omega)$ das funções $f : H_0^m(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineares e contínuas.

Teorema 9 *A aplicação* $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *é isometria.*

Demonstração: Ver [9].

1.5 O Teorema de Lax-Milgram

Definição 19 *Seja* H *um espaço de Hilbert. Um funcional* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *é chamado uma forma bilinear se* $a(.,v)$ *é linear para cada* $v \in H$ *e* $a(u,.)$ *é linear para cada* $u \in H$.

Definição 20 *(i) Diz-se que uma forma bilinear* $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ *é contínua, se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|a(u,v)| \leqslant C||u||_H.||v||_H, \ \ \forall\, u, v \in H.$$

(ii) Uma forma bilinear $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ *é dita coerciva se existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$a(u,u) \geqslant K||u||_H^2 \ \ \forall u \in H.$$

Teorema 10 (Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, dada $f \in H'$(Espaço dual de H) existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = f(v) \ \ \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver [5].

1.6 Operadores elípticos

Definição 21 *Um operador diferencial de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$, da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \ x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \right| \geqslant C |\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 11 (Teorema de Regularidade Elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$, definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$ no sentido das distribuições com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [2].

1.7 Semigrupos de Operadores Lineares

Definição 22 *Seja X um espaço e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se: I)$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de X;*
II)$S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.
Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se
III)$\lim\limits_{t \to 0^+} ||(S(t) - I)x|| = 0 \ \forall \ x \in X$.

Definição 23 *Considere o conjunto*

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\}.$$

O operador $A : D(A) \subset X \to X$ *definido por*

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1 *Seja* S *um semigrupo de classe* C_0*, existem* $M \geqslant 1$ *e* $\omega \geqslant 0$ *tal que* $||S(t)|| \leqslant Me^{\omega t}$.

Demonstração: Ver [18].

Corolário 1 *Todo semigrupo de classe* C_0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$*, isto é, se* $t \in \mathbb{R}^+$ *então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

Proposição 2 *Seja* S *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *o gerador infinitesimal de* S*.*
(i)Se $x \in D(A)$*, então*

$$S(t)x \in D(A), \ \ \forall t \geqslant 0 \text{ e } \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(ii)Se $x \in D(A)$*, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau.$$

(iii) Se $x \in X$*, então*

$$\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A) \text{ e } S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)xd\tau.$$

Demonstração: Faremos a prova do item (i) pois este será usado no desenvolvimento do problema. A prova dos outros itens podem ser encontrada em [15]. Seja $x \in D(A)$

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)x = S(t)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x$$

daí,

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)x = \lim_{h\to 0^+} S(t)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x = S(t)\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) = S(t)Ax.$$

Portanto, $S(t)x \in D(A)$ e

$$AS(t)x = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)x = S(t)Ax$$

assim,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)x = S(t)Ax.$$

Por outro lado, se consideramos $t > 0$ e $0 < h < t$ temos que

$$\frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) = S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\right) + S(t-h)Ax.$$

Como S é um semigrupo de classe C_0 temos, pela Proposição (1), que existem $M \geqslant 1$ e $\omega \geqslant 0$ tal que

$$||S(t-h)|| \leqslant Me^{\omega(t-h)} \leqslant Me^{\omega t}.$$

Portanto, fazendo $h \to 0^+$ da equação acima concluímos que o primeiro membro do lado direito, converge para zero enquanto que o segundo membro, por continuidade, converge para S(t)Ax. Então,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = S(t)Ax.$$

Assim, podemos concluir que $\dfrac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x$.

Definição 24 *Seja X um espaço de Banach e $A : X \to X$ um operador linear. Considere* *o modelo*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= Au(t); t > 0 \\ u(0) &= x \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $x \in X$. *Uma solução do modelo acima é uma função* $u : \mathbb{R}^+ \to X$ *contínua para todo* $t \geqslant 0$, *continuamente derivável para* $t > 0$ *tal que* $u(t) \in D(A)$ *e* $u(t)$ *satifaz as condições do modelo acima.*

Teorema 12 *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0, *então para cada* $x \in D(A)$ *o modelo descrito acima tem uma única solução, continuamente diferenciável* $\forall t > 0$.

Demonstração: Existência:

Sendo A é gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0, então para cada $x \in D(A)$temos pela Proposição (2) item (i) que

$$S(t)x \in D(A)\ \forall t \geqslant 0 \text{ e } \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x.$$

Defina $u(t) = S(t)x$. Então

$$\lim_{s \to t} u(s) = \lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x = u(t),\ \forall t \geqslant 0$$

ou seja, $u(t)$ é contínua $\forall t \geqslant 0$. Ainda,

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u = \frac{d}{dt}S(t)U_0 = AS(t)x = S(t)Ax,\ t > 0$$

assim,

$$\lim_{s \to t} u'(s) = \lim_{s \to t} S(s)Ax = S(t)Ax = u'(t),\ t > 0$$

o que significa que $u'(t)$ é contínua para $t > 0$. Por último observemos que

$$u(0) = S(0)x = Ix = x.$$

Com isto temos que $u(t) = S(t)x$ é solução do modelo (1.1).

Unicidade:

Sabemos que $u(t) = S(t)x$ é solução de (1.1). Mostraremos agora que esta solução é única. Seja v qualquer outra solução do problema de valor inicial, então para $t > 0$, consideremos a função $w : [0,t] \to X$ dado por $w(s) = S(t-s)v(s)$, assim

$$\frac{d}{dt}w(s) = -AS(t-s)v(s) + S(t-s)\frac{d}{ds}v(s) = -S(t-s)Av(s) + S(t-s)Av(s) = 0$$

o que implica que w é constante, logo $w(t) = w(0)$, ou seja, $v(t) = S(t)x$ e, portanto, $v = u$.

Observação 2 *Nas condições do Teorema anterior temos que se u é a única solução do modelo (1.1) quando $x \in D(A)$ então*

$$u \in C\left([0,+\infty)\,;\; D(A)\right) \cap C^1\left((0,+\infty)\,;\; X\right).$$

Definição 25 *Seja X um espaço de Hilbert (Real ou Complexo) e $A : X \to X$ um operador linear.*

(i) Dizemos que A é dissipativo se

$$Re(Ax,x)_X \leqslant 0\; \forall x \in D(A).$$

(ii) Dizemos A é m-dissipativo se A for dissipativo e

$$Im[A - \lambda I] = X \text{ para algum } \lambda > 0.$$

Onde $Im[A - \lambda I]$ significa a imagem do operador $A - \lambda I$ e $(Ax,x)_X$ denota o produto interno de Ax por x em X .

Teorema 13 (Lumer-Phillips) *Seja $A : X \to X$ um operador linear. Então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 se e somente se A é m-dissipativo e $D(A)$ é denso em X.*

Demonstração: ver [15].

O Teorema 13 será extremamente importante, pois através dele provaremos a existência de solução para o nosso modelo.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Para Modelo (1)

Nessa seção vamos obter a existência e unicidade de solução para o problema (1). Para isto utilizaremos a teoria de semigrupos. Fazendo $v = u_t$ e $w = \theta_t$ temos de (1) que

$$v_t = u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xxt} - \delta\theta_{xt} \quad e \quad w_t = \theta_{tt} = \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} - \frac{1}{\tau}\theta_t - \frac{\delta}{\tau}u_{xt}$$

portanto,

$$v_t = -u_{xxxx} + v_{xx} - \delta w_x \quad e \quad w_t = \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} - \frac{1}{\tau}w - \frac{\delta}{\tau}v_x.$$

Segue daí que o sistema (1) pode ser escrito como um sistema de primeira ordem do tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\delta\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\delta}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial x} & \frac{\rho}{\tau}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Na matriz A os valores de 0 e 1 representam os operadores nulo e identidade respectivamente. Considere o espaço: $\mathcal{H} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Definimos o produto interno em $\mathcal{H}$ da seguinte forma:

Sejam $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$ em $\mathcal{H}$ então,

$$< U_1, U_2 >_{\mathcal{H}} = \int_0^L u_{1xx} u_{2xx}\, \mathrm{d}x + \int_0^L v_1 v_2\, \mathrm{d}x + \rho \int_0^L \theta_{1x}\theta_{2x}\, \mathrm{d}x + \tau \int_0^L w_1 w_2\, \mathrm{d}x.$$

A norma de U é dada por

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 = ||u_{xx}||_{L^2}^2 + ||v||_{L^2}^2 + \rho||\theta_x||_{L^2}^2 + \tau||w||_{L^2}^2.$$

Consideramos o operador A: $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ onde o domínio de A é definido como segue:

$\mathcal{D}(A) = \{(u, v, \theta, w) \in \mathcal{H}$ tal que $v, \theta, u_{xx} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\, ,\, w \in H_0^1(\Omega)\}$.

Vamos mostrar que o operador A acima é densamente definido e que é m-dissipativo. Daí usando o Teorema de Lumer-phillips podemos garantir que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Teorema 14 *Seja A o operador definido acima. Então A é densamente definido e m-dissipativo.*

Demonstração: Notemos primeiramente que A é densamente definido, ou seja, que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. Como $((\mathcal{D}(\Omega))^4 \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$, segue da densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^4$ em $\mathcal{H}$ a densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{H}$. Mostraremos agora que o operador A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

Considere $U = (u, v, \theta, w) \in \mathcal{D}(A)$. Daí,

$$\begin{aligned} < AU, U >_{\mathcal{H}} &= \int_0^L v_{xx} u_{xx}\, \mathrm{d}x + \int_0^L (-u_{xxxx} + v_{xx} - \delta w_x) v\, \mathrm{d}x + \rho \int_0^L w_x \theta_x\, \mathrm{d}x + \\ &+ \tau \int_0^L (-\frac{\delta}{\tau} v_x + \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} - \frac{1}{\tau} w) w\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L v_{xx} u_{xx}\, \mathrm{d}x - \int_0^L u_{xxxx} v\, \mathrm{d}x + \int_0^L v_{xx} v\, \mathrm{d}x - \delta \int_0^L w_x v\, \mathrm{d}x + \\ &+ \rho \int_0^L w_x \theta_x\, \mathrm{d}x - \delta \int_0^L v_x w\, \mathrm{d}x + \rho \int_0^L \theta_{xx} w\, \mathrm{d}x - \int_0^L w^2\, \mathrm{d}x. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Agora note que

$$(u_{xxx}v)_x = u_{xxxx}v + u_{xxx}v_x \Rightarrow \int_0^L u_{xxxx}v \,\mathrm{d}x = \int_0^L (u_{xxx}v)_x \,\mathrm{d}x - \int_0^L u_{xxx}v_x \,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_0^L u_{xxxx}v \,\mathrm{d}x = -\int_0^L u_{xxx}v_x \,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Mas,

$$(u_{xx}v_x)_x = u_{xxx}v_x + u_{xx}v_{xx} \Rightarrow -\int_0^L u_{xxx}v_x \,\mathrm{d}x = -\int_0^L (u_{xx}v_x)_x \,\mathrm{d}x + \int_0^L u_{xx}v_{xx} \,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3) e usando o fato de que $u_{xx} \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\int_0^L u_{xxxx}v \,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx}v_{xx} \,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Consideremos agora $\int_0^L v_{xx}v \,\mathrm{d}x$. Observemos que

$$(v_x v)_x = v_{xx}v + v_x^2 \Rightarrow \int_0^L v_{xx}v \,\mathrm{d}x = \int_0^L (v_x v)_x \,\mathrm{d}x - \int_0^L v_x^2 \,\mathrm{d}x$$

logo

$$\int_0^L v_{xx}v \,\mathrm{d}x = -\int_0^L v_x^2 \,\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Analisemos agora $\int_0^L w_x v \,\mathrm{d}x$. Da identidade

$$\int_0^L w_x v \,\mathrm{d}x = \int_0^L (wv)_x \,\mathrm{d}x - \int_0^L w v_x \,\mathrm{d}x$$

segue que

$$-\delta \int_0^L w_x v \,\mathrm{d}x = \delta \int_0^L w v_x \,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Analogamente, obtemos

$$\int_0^L w_x \theta_x \,\mathrm{d}x = -\int_0^L w \theta_{xx} \,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Assim, substituindo (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) em (2.2) obtemos que

$$< AU, U >_{\mathcal{H}} = -\int_0^L v_x^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^L w^2 \, \mathrm{d}x \leq 0$$

portanto A é dissipativo.

Vamos agora provar que A é m-dissipativo. Para isto, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ devemos encontrar $U \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(I - A)U = F$, ou seja, $U - AU = F$. Daí temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u - v = f_1 \\ \theta - w = f_3 \\ w + \frac{\delta}{\tau} v_x - \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} + \frac{w}{\tau} = f_4 \\ v + u_{xxxx} - v_{xx} + \delta w_x = f_2 \end{cases}.$$

Das duas primeiras equações temos que $v = u - f_1$ e $w = \theta - f_3$. Substituindo v e w nas outras duas equações obtemos

$$\begin{cases} \theta - f_3 + \frac{\delta}{\tau} u_x - \frac{\delta}{\tau} f_{1x} - \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} + \frac{\theta}{\tau} - \frac{f_3}{\tau} & = & f_4 \\ u - f_1 + u_{xxxx} - u_{xx} + f_{1xx} + \delta\theta_x - \delta f_{3x} & = & f_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\theta}{\tau}(1+\tau) + \frac{\delta}{\tau} u_x - \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} & = & \frac{(1+\tau)}{\tau} f_3 + f_4 + \frac{\delta}{\tau} f_{1x} \\ u + u_{xxxx} - u_{xx} + \delta\theta_x & = & f_1 + f_2 - f_{1xx} + \delta f_{3x} \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} (1+\tau)\theta + \delta u_x - \rho\theta_{xx} & = & (1+\tau) f_3 + \tau f_4 + \delta f_{1x} \\ u + u_{xxxx} - u_{xx} + \delta\theta_x & = & f_1 + f_2 - f_{1xx} + \delta f_{3x}. \end{cases}$$

Considere agora a forma bilinear $\mathcal{A} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) &= < g_1, h_1 > - < g_{1xx}, h_1 > + < g_{1xx}, h_{1xx} > + \delta < g_{2x}, h_1 > + \\ &+ \ (1+\tau) < g_2, h_2 > + \rho < g_{2x}, h_{2x} > + \delta < g_{1x}, h_2 > \end{aligned}$$

onde $\mathcal{Z} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e todos os produtos internos considerados acima estão em $L^2(\Omega)$. A norma considerada em $\mathcal{Z}$ é $||\,.\,||_{\mathcal{Z}}^2 = ||\cdot||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)}^2 + ||\cdot||_{H_0^1(\Omega)}^2$

O que faremos daqui para frente é mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é contínuo e coercivo, daí, com estas hipóteses e mais a bilinearidade de tal operador, poderemos usar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 10). De fato, como $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ então,

$$\forall\ \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ ,\ \exists\, c > 0\ tal\ que\ ||\phi||_{H_0^1(\Omega)} \leq c||\phi||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)}.$$

Como g_1 e h_1 pertencem a $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ temos que existem constantes $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ tais que

$$||g_1||_{H_0^1(\Omega)} \leq a_1||g_1||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)}\ e\ ||h_1||_{H_0^1(\Omega)} \leq a_2||h_1||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)\right|^2 &\leq (\int_0^L |g_1 h_1|\ \mathrm{d}x + \int_0^L |g_{1xx} h_1|\ \mathrm{d}x + \int_0^L |g_{1xx} h_{1xx}|\ \mathrm{d}x + \\
&+ \delta\int_0^L |g_{2x} h_1|\ \mathrm{d}x + (1+\tau)\int_0^L |g_2 h_2|\ \mathrm{d}x + \rho\int_0^L |g_{2x} h_{2x}|\ \mathrm{d}x + \\
&+ \delta\int_0^L |g_{1x} h_2|\ \mathrm{d}x)^2 \\
&\leq (||g_1||.||h_1|| + ||g_{1xx}||.||h_1|| + ||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + \delta||g_{2x}||.||h_1|| + \\
&+ (1+\tau)||g_2||.||h_2|| + \rho||g_{2x}||.||h_{2x}|| + \delta||g_{1x}||.||h_2||)^2 \\
&\leq (c_1||g_{1x}||.||h_{1x}|| + c_2||g_{1xx}||.||h_{1x}|| + ||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + \\
&+ \delta c_3||g_{2x}||.||h_{1x}|| + (1+\tau)c_4||g_{2x}||.||h_{2x}|| + \rho||g_{2x}||.||h_{2x}|| + \\
&+ \delta c_5||g_{1xx}||.||h_{2x}||)^2 \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 são constantes positivas e $||\,.\,||$ significa $||\,.\,||_{L^2(\Omega)}$.

Sendo $||g_{1x}|| \leq a_1||g_{1xx}||$ e $||h_{1x}|| \leq a_2||h_{1xx}||$ segue em (2.9) que

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)\right|^2 &\leq (a_1a_2c_1||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + a_2c_2||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + ||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + \\
&+a_2c_3\delta||g_{2x}||.||h_{1xx}|| + (1+\tau)c_3||g_{2x}||.||h_{2x}|| + \rho||g_{2x}||.||h_{2x}|| + c_5\delta||g_{1xx}||.||h_{2x}||)^2 \\
&= (k_1||g_{1xx}||.||h_{1xx}|| + k_2||g_{1xx}||.||h_{2x}|| + k_3||g_{2x}||.||h_{2x}|| + k_4||g_{2x}||.||h_{1xx}||)^2 \\
&= k_1^2||g_{1xx}||^2.||h_{1xx}||^2 + k_1k_2||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{1xx}||.||h_{2x}|| \\
&+ k_1k_3||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| + k_1k_4||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| \\
&+ k_1k_2||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{1xx}||.||h_{2x}|| + k_2^2||g_{1xx}||^2.||h_{2x}||^2 \\
&+ k_2k_3||g_{1xx}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| + k_2k_4||g_{1xx}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| \\
&+ k_1k_3||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| + k_2k_3||g_{1xx}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| \\
&+ k_3^2||g_{2x}||^2.||h_{2x}||^2 + k_3k_4||g_{2x}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| \\
&+ k_1k_4||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| + k_2k_4||g_{1xx}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| \\
&+ k_3k_4||g_{2x}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| + k_4^2||g_{2x}||^2.||h_{1xx}||^2 \\
&= k_1^2||g_{1xx}||^2.||h_{1xx}||^2 + 2k_1k_2||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{1xx}||.||h_{2x}|| \\
&+ (2k_1k_3 + 2k_2k_4)||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| + 2k_1k_4||g_{1xx}||.||h_{1xx}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| \\
&+ k_2^2||g_{1xx}||^2.||h_{2x}||^2 + 2k_2k_3||g_{1xx}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{2x}|| \\
&+ k_3^2||g_{2x}||^2.||h_{2x}||^2 + 2k_3k_4||g_{2x}||.||h_{2x}||.||g_{2x}||.||h_{1xx}|| + k_4^2||g_{2x}||.||h_{1xx}||^2 \\
&\leq m_1||g_{1xx}||^2.||h_{1xx}||^2 + m_2||g_{1xx}||^2.||h_{2x}||^2 + m_3||g_{2x}||^2.||h_{2x}||^2 + m_4||g_{2x}||^2.||h_{1xx}||^2
\end{aligned}
$$

onde $m_1 = k_1^2 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_4 + k_1k_4$, $m_2 = k_1k_2 + k_2^2 + k_2k_3$, $m_3 = k_1k_3 + k_2k_4 + k_2k_3 + k_3^2 + k_3k_4$ e $m_4 = k_1k_4 + k_3k_4 + k_4^2$. Sendo que $k_1 = a_1a_2c_1 + a_2c_2 + 1$, $k_2 = c_5\delta$, $k_3 = (1+\tau)c_3 + \rho$, $k_4 = a_2c_3\delta$.

Portanto, tomando $m =$máx $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)\right|^2 &\leq m(||g_{1xx}||^2.||h_{1xx}||^2 + ||g_{1xx}||^2.||h_{2x}||^2 + ||g_{2x}||^2.||h_{2x}||^2 \\
&+ ||g_{2x}||^2.||h_{1xx}||^2) \\
&= m\left\|\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{Z}}^2 \left\|\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{Z}}^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto $\mathcal{A}$ é contínua. Mostraremos agora que $\mathcal{A}$ é coerciva. De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right) &= ||g_1||^2 + ||g_{1x}||^2 + ||g_{1xx}||^2 + (1+\tau)||g_2||^2 + \rho||g_{2x}||^2 \\
&\geq ||g_{1xx}||^2 + \rho||g_{2x}||^2 \geq c\left\|\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{Z}}^2 .
\end{aligned}
$$

Onde $c = \min\{1, \rho\}$. Portanto $\mathcal{A}$ é coerciva. Seja agora $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \int_0^L f_1 h_1 \, \mathrm{d}x + \int_0^L f_2 h_1 \, \mathrm{d}x - \int_0^L f_{1xx} h_1 \, \mathrm{d}x + \delta \int_0^L f_{3x} h_1 \, \mathrm{d}x + \\
&+ \int_0^L (1+\tau) f_3 h_2 \, \mathrm{d}x + \int_0^L \tau f_4 h_2 \, \mathrm{d}x + \int_0^L \delta f_{1x} h_2 \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{F}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|^2 &\leq (||f_1||.||h_1|| + ||f_2||.||h_1|| + ||f_{1xx}||.||h_1|| + \delta||f_{3x}||.||h_1|| + \\
&+ (1+\tau)||f_3||.||h_2|| + \tau||f_4||.||h_2|| + \delta||f_{1x}||.||h_2||)^2 \\
&= (((||f_1|| + ||f_2|| + ||f_{1xx}||).||h_1|| + \delta||f_{3x}||.||h_1|| + ((1+\tau)||f_3|| + \tau||f_4|| + \\
&+ \delta||f_{1x}||).||h_2||)^2 \\
&\leq (c_p(||f_1|| + ||f_2|| + ||f_{1xx}||).||h_{1x}|| + \delta c_p||f_{3x}||.||h_{1x}|| + c_p((1+\tau)||f_3|| + \\
&+ \tau||f_4|| + \delta||f_{1x}||).||h_{2x}||)^2
\end{aligned}
$$

onde c_p é constante de Poincaré específica. Usando o fato de que
$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ então, existe $n_1 > 0$ tal que $||h_{1x}|| \leq n_1||h_{1xx}||$ portanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{F}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|^2 &\leq (\sigma_1||h_{1xx}|| + \sigma_2||h_{2x}||)^2 = \sigma_1^2||h_{1xx}||^2 + 2\sigma_1\sigma_2||h_{1xx}||.||h_{2x}|| + \sigma_2^2||h_{2x}||^2 \\
&\leq \sigma_1^2||h_{1xx}||^2 + \sigma_1\sigma_2||h_{1xx}||^2 + \sigma_1\sigma_2||h_{2x}||^2 + \sigma_2^2||h_{2x}||^2 \\
&\leq 2c(||h_{1xx}||^2 + ||h_{2x}||^2) = 2c\left\|\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{Z}}^2
\end{aligned}
$$

onde $c = \text{máx}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2\}$ sendo $\sigma_1 = n_1 c_p(||f_1|| + ||f_2|| + ||f_{1xx}||) + c_p n_1 \delta||f_{3x}||$ e

$\sigma_2 = c_p((1+\rho)||f_3|| + \tau||f_4|| + \delta||f_{1x}||)$.

Assim, da desigualdade acima segue que $\mathcal{F}$ é contínua e como claramente $\mathcal{F}$ é linear então $\mathcal{F}$ pertence ao dual de $\mathcal{Z}$. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram existe $(u,\theta) \in \mathcal{Z}$ tal que

$$\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}. \tag{2.10}$$

Fazendo $h_1 = 0$ em (2.10) obtemos

$$\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$(1+\tau) < \theta, h_2 > +\rho < \theta_x, h_{2x} > +\delta < u_x, h_2 >=< (1+\tau)f_3 + \tau f_4 + \delta f_{1x}, h_2 > .$$

Segue daí que

$$\delta u_x + (1+\tau)\theta - \rho\theta_{xx} = (1+\tau)f_3 + \tau f_4 + \delta f_{1x}$$

onde a igualdade ocorre no sentido das distribuições. Como $u_x, \theta, f_3, f_4, f_{1x}$ pertencem a $L^2(\Omega)$ temos do teorema 11 que $\theta \in H^2(\Omega)$. Logo $\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Fazendo agora $h_2 = 0$ em (2.10) obtemos

$$\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$< u - u_{xx}, h_1 > + < u_{xx}, h_{1xx} > +\delta < \theta_x, h_1 >=< f_1 + f_2 - f_{1xx}, h_1 > + < \delta f_{3x}, h_1 > .$$

Logo,

$$u - u_{xx} + u_{xxxx} + \delta\theta_x = f_1 + f_2 - f_{1xx} + \delta f_{3x}.$$

Com a igualdade no sentido das distribuições. Como $u, u_{xx}, \theta_x, f_1, f_2, f_{1xx}, f_{3x}$ pertecem a $L^2(\Omega)$, segue do Teorema 11 que $u_{xx} \in H^2(\Omega)$, logo $u_{xxxx} \in L^2(\Omega)$. Daí como -$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é isometria, em particular é bijetora, segue que, estando u_{xxxx} em $L^2(\Omega)$ existe um único elemento em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que a aplicação -$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ aplicada a este elemento resulta em u_{xxxx} e neste caso o tal elemento é u_{xx}, portanto $u_{xx} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Assim, concluímos que $v = u - f_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $w = \theta - f_3 \in H_0^1(\Omega)$. Então, $(u, v, \theta, w) \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\begin{cases} (1+\tau)\theta + \delta u_x - \rho\theta_x &= (1+\tau)f_3 + \tau f_4 + \delta f_{1x} \\ u + u_{xxxx} - u_{xx} + \delta\theta_x &= f_1 + f_2 - f_{1xx} + \delta f_{3x}. \end{cases}$$

Isto significa que existe $U = (u, v, \theta, w) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $U - AU = F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, e que o operador A é m-dissipativo e isto conclui a demonstração.

Como o operador A é densamente definido e m-dissipativo segue do teorema de Lumer-Phillips que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 e assim, do Teorema 12 podemos concluir o seguinte teorema:

Teorema 15 *Consideremos o modelo (1)-(5). Dada a condição inicial* $U_0 = (u_0, u_1, \theta_0, \theta_1) \in \mathcal{D}(A)$ *existe uma única função* $U(t) = (u(t), u_t(t), \theta(t), \theta_t(t))$ *tal que* $U \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1((0, +\infty); \mathcal{H})$ *e* $U(t)$ *satisfaz (1)-(5).*

Capítulo 3

Taxa de decaimento uniforme

Vamos primeiramente definir a energia do problema. Seguidamente mostraremos que esta energia tenderá a zero quando $t \to +\infty$. Multiplicando a equação 1 de (1) por u_t e a equação 2 de (1) por θ_t e integrando sobre $(0, L)$ obtemos respectivamente

$$\int_0^L u_{tt}u_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L u_{xxxx}u_t \,\mathrm{d}x - \int_0^L u_{xxt}u_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L \delta\theta_{xt}u_t \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.1}$$

$$\int_0^L \tau\theta_{tt}\theta_t \,\mathrm{d}x - \int_0^L \rho\theta_{xx}\theta_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \delta u_{xt}\theta_t \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.2}$$

Note que,

$$(\theta_t u_t)_x = \theta_t u_{tx} + \theta_{xt}u_t \Rightarrow \theta_{xt}u_t = (\theta_t u_t)_x - \theta_t u_{tx}$$

logo,

$$\begin{aligned}\delta \int_0^L \theta_{xt}u_t \,\mathrm{d}x &= \delta \int_0^L (\theta_t u_t)_x \,\mathrm{d}x - \delta \int_0^L \theta_t u_{tx} \,\mathrm{d}x \\ &= \delta\theta_t(L,t)u_t(L,t) - \delta\theta_t(0,t)u_t(0,t) - \delta \int_0^L \theta_t u_{tx} \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ou seja

$$\delta \int_0^L \theta_{xt}u_t \,\mathrm{d}x = -\delta \int_0^L \theta_t u_{tx} \,\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Agora,

$$(u_{xxx}u_t)_x = u_{xxxx}u_t + u_{xxx}u_{xt} \Rightarrow u_{xxxx}u_t = (u_{xxx}u_t)_x - u_{xxx}u_{xt}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^L u_{xxxx}u_t\,\mathrm{d}x &= \int_0^L (u_{xxx}u_t)_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L u_{xxx}u_{xt}\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_0^L u_{xxxx}u_t\,\mathrm{d}x &= -\int_0^L u_{xxx}u_{xt}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mas,

$$(u_{xx}u_{xt})_x = u_{xxx}u_{xt} + u_{xx}u_{xxt} \Rightarrow -\int_0^L u_{xxx}u_{xt}\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx}u_{xxt}\,\mathrm{d}x.$$

Com isto conclui-se que

$$\int_0^L u_{xxxx}u_t\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx}u_{xxt}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u_{xx}^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Ainda,

$$(u_{xt}u_t)_x = u_{xxt}u_t + u_{xt}^2 \Rightarrow -\int_0^L u_{xxt}u_t\,\mathrm{d}x = \int_0^L (u_{xt})^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Da identidade

$$\theta_{xx}\theta_t = (\theta_x\theta_t)_x - \theta_x\theta_{xt}$$

obtém-se

$$-\rho\int_0^L \theta_{xx}\theta_t\,\mathrm{d}x = \frac{\rho}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}\theta_x^2\,\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

Substituindo (3.3), (3.4), (3.5) em (3.1) e (3.6) em (3.2) obtemos, após somar as expressões resultantes, que

$$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x + \frac{\tau}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}\theta_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{\rho}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}\theta_x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x = 0$$

ou seja ,

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.7}$$

Onde, definimos,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\rho}{2}\int_0^L \theta_x^2 \,\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

como sendo a energia total do problema (1). Segue de (3.7) que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L u_{xt}^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

Lema 3 *Seja $(u, u_t, \theta, \theta_t)$ a solução do modelo (1)-(5) obtida no teorema 15 e consideremos o funcional $J(t)=\int_0^L u u_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta\theta_t \,\mathrm{d}x$. Então existem constantes positivas A_1 e A_2 tal que*

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x - \frac{\rho}{2\tau}\int_0^L \theta_x^2 \,\mathrm{d}x + A_1\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x + A_2\int_0^L u_{xt}^2 \,\mathrm{d}x$$

Demonstração:

Derivando J(t) temos que

$$\frac{d}{dt}J(t) = \int_0^L u u_{tt} \,\mathrm{d}x + \int_0^L u_t^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \theta\theta_{tt} \,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Vamos apartir de agora calcular as integrais do lado direito da equação (3.10). Notemos primeiramente que, da equação 1 do modelo 1

$$u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xxt} - \delta\theta_{xt}.$$

Multiplicando por u e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L u u_{tt} \,\mathrm{d}x &= \int_0^L u(-u_{xxxx} + u_{xxt} - \delta\theta_{xt}) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L u u_{xxxx} \,\mathrm{d}x + \int_0^L u u_{xxt} \,\mathrm{d}x - \delta\int_0^L u\theta_{xt} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^L u u_{tt} \,\mathrm{d}x = -\int_0^L u u_{xxxx} \,\mathrm{d}x + \int_0^L u u_{xxt} \,\mathrm{d}x - \delta\int_0^L u\theta_{xt} \,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Apartir de (3.11) vamos alterar os integrandos do lado direito de modo conveniente. Primeiramente, observemos que

$$uu_{xxxx} = (uu_{xxx})_x - u_x u_{xxx}$$

segue daí, integrando em $(0, L)$, que

$$\begin{aligned} -\int_0^L uu_{xxxx}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^L (uu_{xxx})_x\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_x u_{xxx}\,\mathrm{d}x \\ &= -uu_{xxx}|_0^L + \int_0^L u_x u_{xxx}\,\mathrm{d}x \\ &= -u(L,t)u_{xxx}(L,t) + u(0,t)u_{xxx}(0,t) + \int_0^L u_x u_{xxx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L u_x u_{xxx}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

No entanto, $(u_x u_{xx})_x = u_{xx}^2 + u_x u_{xxx}$, então

$$\begin{aligned} \int_0^L u_x u_{xxx}\,\mathrm{d}x &= \int_0^L (u_x u_{xx})_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x \\ &= (u_x u_{xx})|_0^L - \int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo (3.13) em (3.12) obtemos que

$$\int_0^L uu_{xxxx}\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

De maneira análoga ao que foi feito acima podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^L uu_{xxt}\,\mathrm{d}x &= \int_0^L (uu_{xt})_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L u_x u_{xt}\,\mathrm{d}x \\ &= uu_{xt}|_0^L - \int_0^L u_x u_{xt}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L u_x u_{xt}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Mas $u_x u_{xt} = (u_x u_t)_x - u_{xx} u_t$ logo,

$$\begin{aligned}\int_0^L u_x u_{xt}\,\mathrm{d}x &= \int_0^L (u_x u_t)_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L u_{xx} u_t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L u_{xx} u_t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L u_{xx} u_t\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.15) obtemos que

$$\int_0^L u u_{xxt}\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx} u_t\,\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

De forma análoga, utilizando a identidade $u\theta_{xt} = (u\theta_t)_x - u_x\theta_t$ concluímos que

$$\int_0^L u\theta_{xt}\,\mathrm{d}x = -\int_0^L u_x\theta_t\,\mathrm{d}x. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.14), (3.17) e (3.18) em (3.11) obtemos

$$\int_0^L u u_{tt}\,\mathrm{d}x = -\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_{xx} u_t\,\mathrm{d}x + \delta\int_0^L u_x\theta_t\,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

Da equação 2 do modelo (1) temos que

$$\theta_{tt} = \frac{\rho}{\tau}\theta_{xx} - \frac{1}{\tau}\theta_t - \frac{\delta}{\tau}u_{xt}.$$

Multiplicando por θ e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L \theta\theta_{tt}\,\mathrm{d}x = \frac{\rho}{\tau}\int_0^L \theta\theta_{xx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau}\int_0^L \theta\theta_t\,\mathrm{d}x - \frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta u_{xt}\,\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

Observemos que

$$\theta\theta_{xx} = (\theta\theta_x)_x - \theta_x^2$$

assim,

$$\int_0^L \theta\theta_{xx}\,\mathrm{d}x = \int_0^L (\theta\theta_x)_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

Segue de (3.21) que

$$\frac{\rho}{\tau}\int_0^L \theta\theta_{xx}\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{\rho}{\tau}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x \tag{3.22}$$

Por último, notemos que $\theta u_{xt} = (\theta u_t)_x - \theta_x u_t$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^L \theta u_{xt}\,\mathrm{d}x &= \int_0^L (\theta u_t)_x\,\mathrm{d}x - \int_0^L \theta_x u_t\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^L \theta_x u_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta u_{xt}\;\mathrm{d}x = +\frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta_x u_t\;\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.20) obtemos

$$\int_0^L \theta\theta_{tt}\,\mathrm{d}x = -\frac{\rho}{\tau}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau}\int_0^L \theta\theta_t\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta_x u_t\;\mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

Segue das identidades (3.19), (3.24) e (3.10) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &= -\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x + \delta\int_0^L u_x\theta_t\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x +\\ &+ \int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{\rho}{\tau}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau}\int_0^L \theta\theta_t\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta_x u_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Notemos que no lado direito da igualdade acima, temos integrais cujos integrandos não envolvem quadrados .Vamos a partir de agora, fazer com que apareçam tais quadrados. Como $\theta \in H_0^1(\Omega)$ então existe $C_p > 0$ tal que $||\theta|| \leq C_p||\theta_x||$, onde C_p é a constante de Poincaré. Ainda, do fato de $u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, existe $c > 0$ tal que $||u_x||_{L^2} \leq c||u_{xx}||_{L^2}$, então $||u_x||_{L^2}^2 \leq c^2||u_{xx}||_{L^2}^2$. Assim, $||u_x||_{L^2}^2 \leq k||u_{xx}||_{L^2}^2$, onde $k = c^2$.

Tome $\varepsilon_0 = \frac{1}{k\delta+1}, \varepsilon_1 = \frac{\rho}{2\delta}$ e $\varepsilon_2 = \frac{\rho}{2C_p}$ e observemos que para $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ positivos temos que

$$\int_0^L u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x = \int_0^L (\sqrt{\varepsilon_0}u_{xx})(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}u_t)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^L \left|(\sqrt{\varepsilon_0}u_{xx})(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}u_t)\right|\,\mathrm{d}x$$

mas usando o fato de que $|a.b| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ temos que,

$$\left|(\sqrt{\varepsilon_0}u_{xx})(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}u_t)\right| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}u_{xx}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0}u_t^2$$

logo

$$\int_0^L \left|(\sqrt{\varepsilon_0}u_{xx})(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}u_t)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^L u_t^2 \,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_0^L u_{xx}u_t \,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^L u_t^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

De forma análoga, temos que

$$\delta\int_0^L u_x\theta_t \,\mathrm{d}x = \delta\int_0^L (\sqrt{\varepsilon_0}u_x)(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\theta_t) \,\mathrm{d}x \leq \delta\int_0^L \frac{\varepsilon_0}{2}u_x^2 \,\mathrm{d}x + \delta\int_0^L \frac{1}{2\varepsilon_0}\theta_t^2 \,\mathrm{d}x.$$

Assim, usando o fato de que $||u_x||_{L^2}^2 \leq k||u_{xx}||_{L^2}^2$ segue que

$$\frac{\delta\varepsilon_0}{2}\int_0^L u_x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{\delta\varepsilon_0 k}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x.$$

Com isto, conclui-se que

$$\delta\int_0^L u_x\theta_t \,\mathrm{d}x \leq \frac{\delta\varepsilon_0 k}{2}\int_0^L u_{xx}^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\int_0^L \theta_t^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Ainda,

$$\int_0^L \theta_x u_t \,\mathrm{d}x = \int_0^L (\sqrt{\varepsilon_1}\theta_x)(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}u_t) \,\mathrm{d}x \leq \int_0^L \frac{\varepsilon_1}{2}\theta_x^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{1}{2\varepsilon_1}u_t^2 \,\mathrm{d}x$$

então,

$$\frac{\delta}{\tau}\int_0^L \theta_x u_t \,\mathrm{d}x \leq \frac{\delta}{\tau}\int_0^L \frac{\varepsilon_1}{2}\theta_x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{\tau}\int_0^L \frac{1}{2\varepsilon_1}u_t^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

De forma análoga temos que

$$-\frac{1}{\tau}\int_0^L \theta\theta_t \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\tau}\int_0^L \frac{1}{2\varepsilon_2}\theta_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\tau}\int_0^L \frac{\varepsilon_2}{2}\theta^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.29}$$

Portanto, substituindo as desigualdades (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) em (3.25) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t) &\leq \int_0^L\left(\frac{\varepsilon_0(k\delta+1)}{2}-1\right)u_{xx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}+1\right)u_t^2\,\mathrm{d}x+\delta\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_0}\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\\
&- \frac{\rho}{\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\tau}\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_2}\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\tau}\int_0^L\frac{\varepsilon_2}{2}\theta^2\,\mathrm{d}x+\frac{\delta}{\tau}\int_0^L\frac{\varepsilon_1}{2}\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\\
&+ \frac{\delta}{\tau}\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_1}u_t^2\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^L\left(\frac{\varepsilon_0(k\delta+1)}{2}-1\right)u_{xx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}+1\right)u_t^2\,\mathrm{d}x+\delta\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_0}\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\\
&- \frac{\rho}{\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\tau}\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_2}\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\tau}\int_0^L\frac{C_p\varepsilon_2}{2}\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\frac{\delta}{\tau}\int_0^L\frac{\varepsilon_1}{2}\theta_x^2\,\mathrm{d}x\\
&+ \frac{\delta}{\tau}\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_1}u_t^2\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^L\left(\frac{\varepsilon_0(k\delta+1)}{2}-1\right)u_{xx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}+1\right)u_t^2\,\mathrm{d}x+\\
&+ \int_0^L\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_2\tau}+\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\right)\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(C_p\frac{\varepsilon_2}{2\tau}+\frac{\varepsilon_1\delta}{2\tau}-\frac{\rho}{\tau}\right)\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\frac{\delta}{\tau}\int_0^L\frac{1}{2\varepsilon_1}u_t^2\,\mathrm{d}x.\\
&= \int_0^L\left(\frac{\varepsilon_0(k\delta+1)}{2}-1\right)u_{xx}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}+1+\frac{\delta}{2\tau\varepsilon_1}\right)u_t^2\,\mathrm{d}x+\\
&+ \int_0^L\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_2\tau}+\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\right)\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L\left(C_p\frac{\varepsilon_2}{2\tau}+\frac{\varepsilon_1\delta}{2\tau}-\frac{\rho}{\tau}\right)\theta_x^2\,\mathrm{d}x. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_0=\frac{1}{k\delta+1},\varepsilon_1=\frac{\rho}{2\delta},\varepsilon_2=\frac{\rho}{2C_p}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L\left(\frac{\varepsilon_0(k\delta+1)}{2}-1\right)u_{xx}^2\,\mathrm{d}x &= -\int_0^L\frac{1}{2}u_{xx}^2\,\mathrm{d}x\\
\int_0^L\left(C_p\frac{\varepsilon_2}{2\tau}+\frac{\varepsilon_1\delta}{2\tau}-\frac{\rho}{\tau}\right)\theta_x^2\,\mathrm{d}x &= -\int_0^L\frac{\rho}{2\tau}\theta_x^2\,\mathrm{d}x\\
\int_0^L\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}+1+\frac{\delta}{2\tau\varepsilon_1}\right)u_t^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^L\left(\frac{k\delta+1}{2}+1+\frac{\delta^2}{\tau\rho}\right)u_t^2\,\mathrm{d}x\\
\int_0^L\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_2\tau}+\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\right)\theta_t^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^L\left(1+\frac{\delta(k\delta+1)}{2}+\frac{C_p}{\rho\tau}\right)\theta_t^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Segue daí e de (3.30) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t) &\leq -\frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x+\left(\frac{k\delta+1}{2}+1+\frac{\delta^2}{\tau\rho}\right)\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x+\left(1+\frac{\delta(k\delta+1)}{2}+\frac{C_p}{\rho\tau}\right)\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x\\
&- \frac{\rho}{2\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Observemos agora que vale a desigualdade de Poincaré para u_t, assim

$$\left(\frac{k\delta+1}{2}+1+\frac{\delta^2}{\tau\rho}\right)\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x \quad\le\quad C_p\left(\frac{k\delta+1}{2}+1+\frac{\delta^2}{\tau\rho}\right)\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

onde C_p é constante de Poincaré.

Fazendo $A_1=\left(1+\frac{\delta(k\delta+1)}{2}+\frac{C_p}{\rho\tau}\right)$ e $A_2=C_p\left(\dfrac{k\delta+1}{2}+1+\dfrac{\delta^2}{\tau\rho}\right)$ tem-se de (3.31) e (3.32) que

$$\frac{d}{dt}J(t)\quad\le\quad -\frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x-\frac{\rho}{2\tau}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x+A_1\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x+A_2\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x.$$

Provando o lema 3.

Lema 4 *Seja (u,u_t,θ,θ_t) a solução do modelo (1)-(5) obtida no teorema 15. Definindo o funcional $H(t)=E(t)+\varepsilon J(t)$ onde ε é suficientemente pequeno, existe uma constante positiva c tal que*

$$\frac{d}{dt}H(t)\le -c\varepsilon E(t).$$

Demonstração: Derivando o funcional H em relação a t e usando o lema 3 temos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t)\quad &=\quad \frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}J(t)\le-\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x-\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x-\\ &-\quad \frac{\varepsilon\rho}{2\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon A_1\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon A_2\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x\\ &\le\quad -\frac{1}{2}\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon\rho}{2\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mas,

$$\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x\le C_p\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{2C_p}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x\ge-\frac{1}{2}\int_0^L u_{xt}^2\,\mathrm{d}x$$

onde C_1 é constante de Poincaré usada na prova do lema anterior. Logo,

$$\frac{d}{dt}H(t)\quad\le\quad-\frac{1}{2C_p}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x-\frac{\tau}{2\tau}\int_0^L\theta_t^2\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon\rho}{2\tau}\int_0^L\theta_x^2\,\mathrm{d}x.$$

Considerando $\varepsilon < 1$, segue que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2C_p}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon\rho}{2\tau}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x.$$

Daí, tomando $c \leq min\{1, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{C_p}\}$ temos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t) &\leq -\frac{\varepsilon c}{2}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{c\varepsilon\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{c\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon c\rho}{2}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -c\varepsilon\left(\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \frac{\rho}{2}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -c\varepsilon E(t)$$

concluindo a prova do lema 4.

Lema 5 *Seja $(u, u_t, \theta, \theta_t)$ a solução do modelo (1)-(5) obtida no teorema 15 e seja o funcional H definido no lema 4. Então*

$$\frac{1}{2}E(t) \leq H(t) \leq \frac{3}{2}E(t).$$

Demonstração: Considerando o funcional $J(t)$ definido no lema 3 temos que

$$\begin{aligned}|\varepsilon J(t)| &\leq \varepsilon\int_0^L |uu_t|\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^L |\theta\theta_t|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon\int_0^L \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^L \frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^L \frac{\theta^2}{2}\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^L \frac{\theta_t^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\varepsilon m}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon C_p\rho}{2\rho}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon\tau}{2\tau}\int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Notemos que anteriormente foi usado $||u||_2^2 \leq m\,||u_{xx}||_2^2\, e\, ||\theta||_2^2 \leq C_p\,||\theta_x||_2^2$ onde C_p é constante de poincaré. Agora, tomando $M =$máx$\{1, m, \frac{C_p}{\rho}, \frac{1}{\tau}\}$ temos que,

$$\begin{aligned}|\varepsilon J(t)| &\leq \frac{M\varepsilon}{2}\int_0^L u_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \frac{M\varepsilon}{2}\int_0^L u_t^2\,\mathrm{d}x + \frac{M\varepsilon\rho}{2}\int_0^L \theta_x^2\,\mathrm{d}x + \frac{M\varepsilon\tau}{2}\int_0^L \theta_t^2\,\mathrm{d}x \\ &= M\varepsilon E(t).\end{aligned}$$

Segue daí que $-M\varepsilon E(t) + E(t) \leq \varepsilon J(t) + E(t) \leq M\varepsilon E(t) + E(t)$ isto é,

$(1 - M\varepsilon)E(t) \leq H(t) \leq (1 + M\varepsilon)E(t)$. Considerando $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2M}$ tem-se que

$$\frac{1}{2}E(t) \leq H(t) \leq \frac{3}{2}E(t),$$

provando assim, o lema 5.

Teorema 16 *Sejam* $(u_0, u_1, \theta_0, \theta_1) \in \mathcal{D}(A)$ *e* $(u, u_t, \theta, \theta_t)$ *a solução do modelo (1)-(5) obtida no teorema 15. Considere* $E(t)$ *a energia total do modelo (1)-(5) definida em (6). Então*

$$E(t) \leq 3E(0)exp(-\gamma t)$$

para todo $t \geq 0$ *onde* γ *é uma constante positiva que independe do dado inicial.*

Demonstração: Dos lemas (4) e (5) tem-se que

$$-\frac{c\varepsilon}{2}E(t) \geq -c\varepsilon H(t) \geq -\frac{3c\varepsilon}{2}E(t) \geq \frac{3}{2}H'(t),$$

logo

$$\frac{3}{2}H'(t) \leq -c\varepsilon H(t)$$

ou seja

$$H'(t) + \frac{2c\varepsilon}{3}H(t) \leq 0.$$

Multiplicando a última desigualdade por $exp(\dfrac{2c\varepsilon t}{3})$ obtemos

$$H'(t)\exp(\frac{2}{3}c\varepsilon t) + \frac{2}{3}c\varepsilon H(t)\exp(\frac{2}{3}c\varepsilon t) \leq 0$$

isto é

$$\frac{d}{dt}\left(H(t)\exp(\frac{2}{3}c\varepsilon t)\right) \leq 0.$$

Integrando em (0, t) segue que

$$H(t) \leq H(0)\exp(-\frac{2}{3}c\varepsilon t).$$

Assim, novamente do lema 5, obtemos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq H(t) \leq \frac{3}{2}E(0)\exp(-\frac{2}{3}c\varepsilon t),$$

ou seja

$$E(t) \leq 3E(0)exp(-\frac{2}{3}c\varepsilon t).$$

A última desigualdade prova o teorema 16 com $\gamma = -\dfrac{2c\varepsilon}{3}$.

Capítulo 4

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho mostramos a existência e unicidade de solução para um sistema termoelástico de vigas linear com a equação do calor modelada pela lei de Cattaneo. Usando a teoria de semigrupos lineares foi provado a existência e unicidade de solução forte para o modelo. O principal resultado foi a prova do decaimento exponencial uniforme para a energia total do sistema descrito acima. Para isso foi utilizado o método da perturbação da energia por um funcional de Liapunov adequado.

Alguns trabalhos de pesquisa futuros:

- Considerar o modelo (1) excluíndo o termo $-u_{xxt}$ da primeira equação. Nesse caso em termos de existência de solução não devemos ter modificações significativas. Nesse caso é esperado decaimento polinomial para a energia total do sistema (1).

- Considerar o modelo (1) acrescentando uma não linearidade, por exemplo, $-\int_0^L u_x^2 \, dx$ na primeira equação do modelo (1). Aqui em termos de existência de solução não devemos ter modificações significativas. Ainda, é esperado decaimento exponencial para a energia total do sistema (1).

- Considerar o modelo (1) com diferentes condições de fronteira.

- Considerar o modelo (1)com as funções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ definidas em $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$. Portanto, em termos de existência de solução não devemos ter modificações significativas. Nesse caso é esperado decaimento polinomial para a energia total do sistema (1).

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A. **Sobolev Spaces.** Academic Press, New York, 1975, 275p.

[2] AGMON,S.; DOUGLIS, H.; NIRENBERG, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. **Comm. Pure App. Math.** v. 17, p. 35-92, 1964.

[3] AVALOS, G.; LASIECKA, I. Exponential estality of a thermoelastic system with free boundary conditions without mechanical dissipation. **J. Math. Anal.** v. 29, p. 155-182, 1998.

[4] BARTLE, R.G. **The Elements of Integration.** John Wiley, New York, 1966, 136p.

[5] BREZIS, H.**Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer, New York, 2011, 614p.

[6] BURIOL, C.; MENZALA, G.P. Uniform Stabilization of a quasilinear plate model in Hyperbolic Thermoelasticity, **Math. Meth. App. Sciences**, DOI: 101002/mma3630, J.Wiley and Sons, 2015.

[7] CATTANEO, C. Sulla conduzione del calore. **Atti. Sem. Mat.Fis.** v. 3, p. 83-101, 1948.

[8] CHANDRASEKHARAIAH, D. S. Hyperbolic thermoelasticity: A review of recente literature. **Appl. Mech. Rev.** v. 51, p. 705-729, 1998.

[9] DAUTRAY, R.; LIONS, J.L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tecnology.** Vol 3. Spring-Verlag, 1983,

[10] DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; CALVACANTI, M.M., Indrodução a teoria das distribuições e aos espaços de sobolev. 1ed. **Maringá: EDUEM**, 2009.

[11] GIORGI, C.; NASO, M.G.; PATA, V.; POTOMKIN, M. Global attractors for the extensible thermoelastic beam system. **J. Differential Equations.** v. 246, p. 3496-3517,(2009).

[12] GUO, B. Z.; GUO, W. Adaptative stabilization for a Kirchhoff-type nonlinear beam under boundary output feedback control. **Nonlinear Analysis.** v. 66, p. 427-441, 2007.

[13] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.** Spring-Verlag, Berlim, 1983, 440p.

[14] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições.** 12 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1979, 164p.

[15] KOUÉMOU , S. On a global solution an asymptotica behavior for the generalized damped extensible beam equation. **J. Differential Equations.** v. 135, p. 299-314, 1997.

[16] MEDEIROS, L.A.; MIRANDA, M. **Espaços de sobolev iniciação aos problemas elíticos não homogêneos.** IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000, 164p.

[17] MENZALA, G.P.; ZUAZUA, E. Timoshenko's plate equation as a singular limit of the dynamical von Kármán system. **J. Math. Pure Appl.** v. 79, p. 75-94, 2000.

[18] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, 1983, 285p.

[19] RACKE, R. Asymptotic behaviour of solutions in linear 2-or 3-d thermoelasticity with second sound. **Quart. Appl. Math.** v. 61, p. 315-328, 2003.

[20] SARE, H.D.F.; RIVERA, J. Optimal rates of decay in 2-d thermoelaticity with second sound. **Journal of Mathematical Physics**. v.53 , 2012.