SOBRE ALGUMAS FUNÇÕES COMO INSTRUMENTO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

por

Manoel Ignácio Xavier Filho

Monografia apresentada ao Curso de
Especialização do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Área de Concentração
em Ensino Aprendizagem, da Universidade Federal
de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito
parcial para obtenção do grau de **Especialista em Matemática.**

Santa Maria, RS, Brasil

2005

Monografia de Especialização

SOBRE ALGUMAS FUNÇÕES COMO INSTRUMENTO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Manoel Ignácio Xavier Filho

CEM

Santa Maria, RS, Brasil

2005

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Especialização em Matemática

A comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a
Monografia de Especialização

SOBRE ALGUMAS FUNÇÕES COMO INSTRUMENTO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

elaborada por

Manoel Ignácio Xavier Filho

Como requisito parcial para obtenção do grau de

Especialista em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Primo Manoel Brambilla
(Presidente/Orientador)

____

Atelmo Aloísio Bald

____

João Carlos Gilli Martins

Santa Maria, 22 de janeiro de 2005.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O MEC, através dos “Parâmetros Curriculares Nacionais”, sugere fortemente, a partir de estudos elaborados por especialistas em educação, que o ensino de matemática, nos níveis fundamental e médio, deve aproveitar a experiência informal do aluno e a partir de situações contextualizadas ir, progressivamente, formalizando seu conhecimento.

Diariamente, ao lermos um jornal ou uma revista, nos deparamos com gráficos, tabelas e ilustrações. Estes são instrumentos muito utilizados nos meios de comunicação. Um texto com ilustrações é muito mais interessante, chamativo, agradável e de fácil compreensão. Não é só nos jornais ou revistas que encontramos gráficos. Os gráficos são utilizados nos exames laboratoriais, nos rótulos de produtos alimentícios, nas informações de composição química de cosméticos, nas bulas de remédios, enfim em diversos lugares.

Ao relacionarmos espaço em função do tempo, número do sapato em função do tamanho dos pés, intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta ou pessoa em função da impressão digital, percebemos quão importante é a noção de função para compreendermos as relações entre os fenômenos físicos, biológicos, sociais...

Esta monografia tem por objetivo melhor compreender a noção de função, explorando seu uso em situações da vida diária que podem ser traduzidas em modelos matemáticos simples.

Esse trabalho atém-se às funções estudadas no 1º ano do Ensino Médio, a saber, funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas. Além da caracterização e das propriedades principais dessas funções serão destacadas algumas aplicações.

No apêndice são apresentados alguns trabalhos de alunos do Colégio São Pedro em Porto Alegre, onde se destacam situações que possibilitam a elaboração de gráficos, a relação entre duas grandezas e a necessidade da idéia de função.

SOBRE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

A noção de dependência funcional provavelmente surgiu da idéia de relacionar dois conjuntos de dados com alguma regra. A origem é incerta, mas desde tempos remotos, tabelas de correspondências obtidas da observação de fenômenos físicos, foram importantes na evolução do que hoje conhecemos por função.

As operações com funções já tinham atingido um relativo grau de perfeição na época das primeiras tentativas de formalizar a noção de função. O método analítico de se tratar funções revolucionou a matemática e assegurou para a definição de função um lugar de destaque nas ciências exatas.

IDADE MÉDIA:

O momento em que a noção de função começou a dar seus primeiros grandes passos pode ser situado no século 14. É nessa época que ocorre o ressurgimento da matemática como objeto de preocupação dos estudiosos.

A associação da matemática com os fenômenos naturais facilitou imensamente aos matemáticos o trabalho de construir a definição de função.

Embora seja a cinemática um ramo da mecânica mais claramente ligado à geometria, seu desenvolvimento não pode ser desconectado da discussão sobre as relações funcionais no mundo físico. Grande parte dessa discussão na idade média se baseia puramente na especulação e não era sustentada por nenhum tipo de investigação empírica. Desta forma, a falta de experiências práticas prejudicava a discussão nos seus aspectos matemáticos.

Como exemplo relevante desse período, Boyer se refere ao trabalho de Nicole de Oresme (por volta de 1360): " Segundo Oresme, tudo que é mensurável, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade x tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante, ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem sobre uma reta.”. A partir desse tipo de diagrama, Galileu, mais tarde, estabeleceu a “lei dos corpos que caem”.

SÉCULOS 16 E 17

No início da Idade Moderna, não existia uma noção única para o termo função, muitas vezes referiam-se a esse termo como uma “expressão analítica”, outras como aquilo que pudesse ser expresso por séries de potências, para citarmos duas das formulações mais usadas.

Alguns fatores, que tiveram lugar no século 16, foram responsáveis pelo desenvolvimento verificado no século 17. Alguns deles:

- O desenvolvimento de novos métodos computacionais, que muito facilitaram os cálculos feitos posteriormente;
- O grande avanço da trigonometria;

Os trabalhos do matemático Viéte, que desempenhou um papel importantíssimo nesta época, ao desenvolver, em 1591, a álgebra simbólica, que deu origem a toda simbologia matemática usada até hoje.

A descoberta dos logaritmos, cuja primeira tábua foi publicada em 1614 por Napier, onde os cálculos são feitos sem a definição de função, e são baseados apenas na clara observação de uma “relação funcional” específica.

A análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, e estas eram vistas apenas como uma materialização da relação entre x e y e não como o gráfico de uma função y = f(x).

Descartes, entre outros, restringia seu estudo sobre “funções” a um tratamento algébrico das curvas.

A proposta de se conceber o termo função como tudo aquilo que pudesse ser estendido em séries de potências foi a mais notável componente da nova matemática proposta por Newton e Leibniz. Um dos principais trabalhos de Newton chama-se "O Método dos Fluxos e Séries Infinitas".

Na época de Newton, as várias variáveis de uma curva não eram vistas como dependentes de uma única variável independente, tendo sido Newton a única exceção, pois para ele o tempo era a variável independente da qual todas as outras dependiam. Em termos físicos esta tese mostrou-se bastante frágil, uma vez que foi totalmente destruída pela teoria da inseparabilidade entre o espaço e tempo de Einstein (só que mais de 200 anos depois). Contudo, ela teve uma importância crucial no desenvolvimento do pensamento funcional, pois materializava as noções de variáveis independentes e dependentes.

SÉCULOS 18 E 19:

Johann Bernoulli, em um artigo de 1718 sugere a letra grega φ para caracterizar funções. Mas o argumento ainda era escrito sem os atuais parênteses: φ x. Neste mesmo artigo aparece a noção de função mais remota de que se tem notícia: Definição: chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer modo da variável e de constantes quaisquer.

Já estava bem claro que tal definição era necessária. É neste momento que entra em cena o matemático que pode ser considerado como o personagem principal: Leonhard Euler (1707-1783).

De acordo com o seu método de trabalho, Euler diagnosticou esta necessidade de uma formalização da definição de função, e elaborou definições bem detalhadas, como:

- Constante: quantidade definida que assume sempre um e apenas um valor;
- Variável; quantidade indeterminada, ou universal, que comporta em si mesma todos os valores determinados;
- Função: uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, por esta quantidade variável e números ou quantidades constantes.

Paralelamente ao trabalho de definir função, Euler também contribuiu decisivamente para que esta busca se tornasse um objetivo premente. A necessidade dessa definição ficou mais flagrante ainda quando o próprio Euler introduziu as funções de uma variável complexa. Estas, ao contrário das funções reais de uma variável real, não tinham os apelos geométricos imediato de curvas ou gráficos, e sem o apoio da visualização aumenta a necessidade da definição.

Muito embora Eüler, no vol. I do seu "Introductio in Analysin Infinitorum" formule o termo função para referir-se aquilo que se possa ser escrito como uma expressão analítica, no vol. 2 Eüler admite a existência de outros tipos de funções. Neste trabalho ele cita o que seria a idéia de continuidade. Para Euler, continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da equação que determina a relação funcional sobre todo o domínio de valores da variável independente, enquanto que descontinuidade significava uma alteração na lei analítica, a existência de pelo menos duas leis diferentes em dois intervalos de seu domínio.

A noção de continuidade de Eüler gerou uma grande polêmica e discussão envolvendo vários matemáticos. Em 1817, Bolzano define continuidade: "a função f(x) é contínua em um intervalo se, em qualquer x do intervalo, a diferença f(x + w) - f(x) pode se tornar tão pequena quanto se deseje" (cf. Boyer). Definição parecida foi anunciada por Cauchy em 1821. O grande passo dado por Bolzano e Cauchy foi ter dado à continuidade o seu caráter local, ao contrário do caráter global a ela atribuído por Euler.

Em 1734-35, Euler introduz a notação f(x) para a representação da função f da variável x. E em 1755 se vê obrigado a rever seu conceito de função, e propõe: "Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de modo que uma alteração nas segundas implique uma alteração nas primeiras, então as primeiras são chamadas de funções das segundas".

Em 1780, o conceito de funções mistas de Euler é questionado por J. Charles, que diz que algumas funções que pela definição de Euler seriam mistas podem ser representadas por uma equação apenas. Em 1844, Cauchy apresenta o exemplo que sepulta as funções mistas:

a função $f(x)=\begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ pelo conceito de Euler, é descontínua, mas se escrita como $f(x)=\sqrt{x^2}$, para todo x; ainda segundo Euler é uma função contínua.

Uma das principais conquistas matemáticas do século 19 foi à formalização daquela área da matemática que trata dos processos infinitos (e infinitesimais), ou seja, a separação entre análise e geometria. Este processo teve em Weierstrass um dos seus maiores expoentes, e na definição de limite de um função seu maior protagonista.

Com a definição de função já relativamente consolidado, a Teoria das Funções tornou-se uma área de grande interesse na matemática. O desenvolvimento da matemática traz sempre questionamentos sobre conceitos pré-estabelecidos, e as funções não fogem disso, pois a cada dia novas classes de funções são consideradas e os conceitos são permanentemente revistos. Não obstante, podemos dizer que o espírito da definição de Euler acerca da dependência entre quantidades parece ser inabalável.

Como outras noções matemáticas, a de função foi rejeitada por muitos anos ainda. Na virada do século os matemáticos praticamente se dividiam em duas correntes: os tradicionais, que estudavam funções enquanto expressões analíticas explícitas e os sintéticos, que seguiam as definições de Dirichlet e Bolzano.

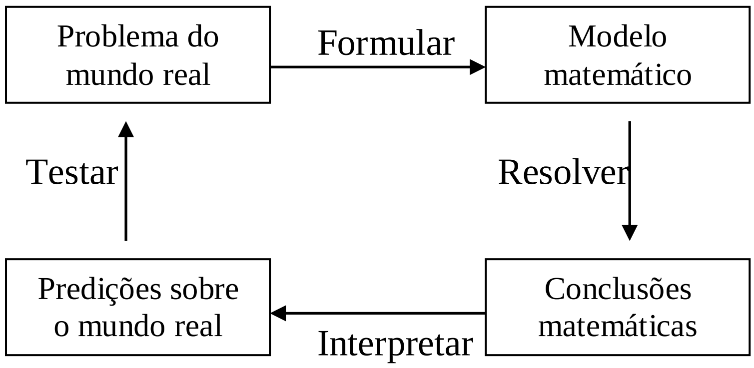
Atualmente, se aceita a seguinte definição:

“*Uma função y da variável x, y = f(x) é uma relação entre pares de elementos de dois conjuntos X e Y tal que a cada elemento x do conjunto X, um e apenas um elemento y do conjunto Y é associado.”*

1. Funções como Modelos Matemáticos

Um *modelo matemático* é uma descrição matemática (geralmente por meio de uma função ou por um sistema de equação) de um fenômeno do mundo real, assim como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução dos poluentes. O propósito do modelo é entender e talvez fazer predições sobre um comportamento futuro.

O processo de modelagem matemática funciona da seguinte forma:



Dado um problema do mundo real, a primeira etapa é formular um modelo matemático por meio de uma identificação e da abstração, especificando as variáveis dependentes e independentes e a leitura de hipóteses que tornem o problema matematicamente tratável. A seguir é necessário aplicar a matemática que sabemos (tal como cálculos a serem desenvolvidos) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar conclusões.

Então como terceira etapa interpretamos as conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos predições. A fase final é testar nossas predições com o que acontece de novo no mundo real. Se as predições não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo modelo e começar novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física: - é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções, as quais podem ser usadas para modelar relações observadas no mundo real. A seguir discutiremos algumas dessas funções, e serão dados exemplos de situações modeladas apropriadamente por tais funções.

2. Grandezas diretamente proporcionais: a função linear

A função linear definida pela expressão f(x) = ax, serve de modelo matemático para problemas de proporcionalidade direta.

O livro Aritmética Progressiva de Antonio Trajano (cf. [1]), editado pela primeira vez em 1883, e que ainda circulava na década de 60, ensinava assim:

"Duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas dizem-se diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais".

Substituindo as grandezas de Trajano por suas medidas, que são números reais, a tradução do que está dito acima na linguagem das funções é: "Uma proporcionalidade é uma função f: $\mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tal que, para quaisquer números reais positivos c e x tem-se f(cx) = cf(x) (proporcionalidade direta) ou f(cx) = $\frac{f(x)}{c}$, $c \neq 0$, (proporcionalidade inversa)".

Obs: fazendo x = 1 e chamando f(1) = a, temos que os modelos matemáticos para as proporcionalidades direta e inversa são respectivamente as funções f(x) = ax (função linear) e f(x) = $\frac{a}{x}$, x $\neq 0$. Ou de outra forma: as medidas y e x de duas grandezas dizem-se diretamente proporcionais se y = ax e inversamente proporcionais se y = $\frac{a}{x}$, x $\neq 0$.

Proposição 1: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

Se f: $\Re^+ \to \Re^+$ *é uma função crescente tal que f(nx) = nf(x) para todo x* $\in \Re^+$ *e todo n* $\in \mathrm{N}$*, então f(cx) = cf(x) para quaisquer x e c em* $\Re^+$.

Obs: 1) é mais simples mostrar que f(nx) = nf(x) para todo natural n do que verificar que f(cx) = cf(x) para todo c *em* $\Re^+$.

2) se f satisfaz as hipóteses do teorema, f é dita uma proporcionalidade.

3)se f é uma proporcionalidade, então para todo x >0, f(x) = ax, onde a = f(1) .
* Prova no apêndice.

APLICAÇÃO

<u>Exemplo 1</u>: Numa circunferência de raio r, seja f(x) a área do setor circular que subentende um arco de comprimento x. Verifica-se imediatamente que f é uma função crescente de x e que f(nx) = nf(x) para todo n natural. Logo existe uma constante a tal que f(x) = ax. Como ao arco de comprimento $2\pi r$ corresponde o setor de área πr^2, tem-se

$$\pi r^2 = f(2\pi r) = a2\pi r$$

Donde,

$$a = \frac{r}{2} \; e \; f(x) = \frac{r}{2}x$$

2.1.Grandeza proporcional a várias outras

Suponha que uma grandeza z está relacionada com outras grandezas x, y, u, v, w, de tal maneira que a cada escolha de valores para estas últimas é determinado um único valor para z. Então z chama-se uma função das variáveis x, y, u, v e w e escreve-se z = f(x,y,u,v,w).

Nessas condições, diz-se que:

z é diretamente proporcional a x quando:

(i) para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, x < x' implica f(x,y,u,v,w) < f(x',y,u,v,w).

(ii) para $n \in N$ e x,y,u,v,w quaisquer tem-se f(nx,y,u,v,w) = nf(x,y,u,v,w).

z é inversamente proporcional a x quando:

(i') para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, x < x' implica f(x,y,u,v,w) > f(x',y,u,v,w).

(ii') para $n \in N$ e x,y,u,v,w quaisquer tem-se f(nx,y,u,v,w) = $\frac{1}{n}$ f(x,y,u,v,w).

Do teorema fundamental da proporcionalidade, segue que se z = f(x,y,u,v,w) é diretamente proporcional a x e y e inversamente proporcional a u,v e w, então, fazendo a = f(1,1,1,1,1), tem-se

$$z = f(x,y,u,v,w) = a \cdot \frac{xy}{uvw}$$

APLICAÇÕES

<u>Exemplo 1</u>: Admita que 3 operários, trabalhando 8 horas ao dia, construam um muro de 36 metros em 5 dias.

a) Identifique as grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

<u>Grandezas</u>: número de operários, horas trabalhadas ao dia, metros de muro e dias.

Grandezas inversamente proporcionais: * *número de operários – horas trabalhadas ao dia*

* *número de operários – dias*
* *horas ao dia – dias*

Grandezas diretamente proporcionais: * *número de operário – metros de muro*

* *horas ao dia – metros de muro*
* *metros de muro – dias*

b) De acordo com o item (a), exprima o número D de dias necessários à construção de um muro em função no número N de operários, do comprimento C do muro e do número H de horas trabalhadas por dia.

D = C/N.H

c) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas ao dia, construa um muro de 15 metros?

D = 15/5.6

D = 0,5 dias = 12 horas

Exemplo 2: Estudiosos da saúde definiram o índice de massa corpórea (IMC) como sendo o razão entre o peso (em kg) e a atura (em m) ao quadrado, ou seja, se p denota o peso e h a altura

$$IMC = \frac{p}{h^2}.$$

A tabela abaixo apresenta uma classificação para seres humanos relacionando peso e altura:

IMC	**Classificação**
< 18,5	abaixo do peso
18,5 - 24,9	normal
25 - 29,9	acima do peso
30 - 39,9	obeso
> 40	obeso mórbido

(i) Qual a sua classificação frente à tabela acima?

Acima do peso

(ii) De acordo com os dados da tabela, no mínimo, quantos quilos uma pessoa de 1,70 m e pesando 100 kg, deve emagrecer, para ser classificada como normal?

$$IMC = 100/(1,70)^2$$
$$IMC = 34,6 \text{ (obeso)}$$

Para que a pessoa possa ser classificada como normal, deve ter um IMC de no máximo 24,9.

$$IMC = 24,9$$
$$24,9 = p/(1,70)^2$$
$$p = 24,9.(1,70)^2 = 71,9kg$$

*Logo, essa pessoa deve emagrecer (*100 – 71,9 = 28,1kg) *28,1 kg para que seja classificada como normal.*

(iii) As grandezas IMC e peso são diretamente proporcionais?
Sim.

(iv) As grandezas IMC e quadrado da altura são inversamente proporcionais?
Sim.

3. Função afim

Uma função $f: \Re \rightarrow \Re$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais **a** e **b** tal que **f(x) = ax + b**, para todo $x \in \Re$.

Proposição 2: Seja *f:* $\Re \rightarrow \Re$ *uma função crescente ou decrescente. Se a diferença f(x+ h) – f(x) depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*
* Prova no apêndice.

Outra caracterização das funções afins pode ser dada em termos de progressões aritméticas. Se f é uma função afim, e se a seqüência x_n é uma P A então a seqüência $y_n = f(x_n)$ também é uma PA.

Por outro lado, vale a seguinte proposição:

Proposição 3: Seja *f:* $\Re \rightarrow \Re$ *uma função crescente ou decrescente que transforma qualquer P.A em outra P.A. Então f é uma função afim.*
* Prova no apêndice.

APLICAÇÕES

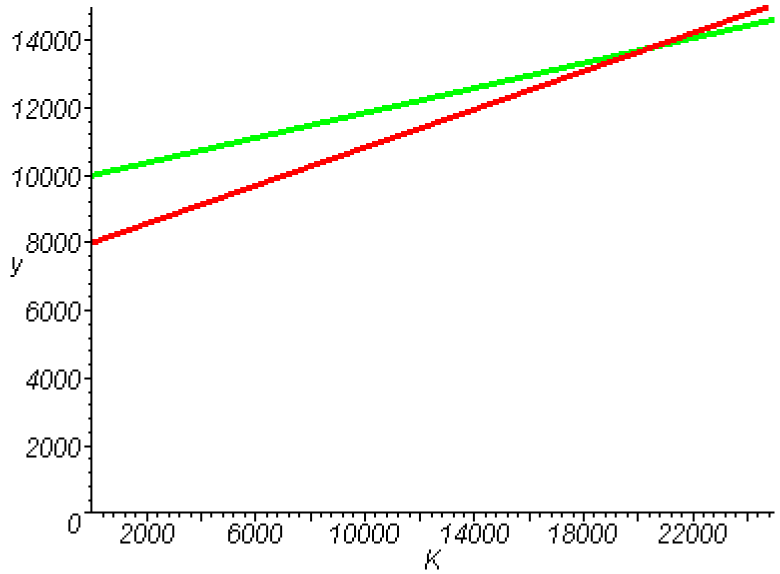
Exemplo 1: Uma loja de carros usados oferece dois deles: O carro A custa R$ 8000,00 e faz 8,5 km/litro de gasolina. O carro B custa R$ 10000,00, porém faz 13 km/litro de gasolina. O preço do litro de gasolina é estimado em R$ 2, 40. Ambos os carros estão em boas condições e assim, se espera que o custo com consertos seja desprezível em médio prazo. Quantos quilômetros o carro A pode rodar, antes que o carro B se torne a melhor opção de compra?

Carro A: *C = custo, K = quilômetros rodados*

$$C_A = 8000 + K.2{,}40/8{,}5$$

Carro B:

$$C_B = 10000 + K.2{,}40/13$$



$C_A < C_B$?

$$8000 + K.2{,}40/8{,}5 < 10000 + K.2{,}40/13$$
$$K.2{,}40/8{,}5 - K.2{,}40/13 < 10000 - 8000$$
$$(31{,}2K - 20{,}4K)/110{,}5 < 2000$$
$$10{,}8K < 2000.110{,}5$$
$$K < 20462{,}95 \text{ km}$$

O Carro A pode rodar 20462,95 km que ainda assim será mais em conta adquiri-lo do que o Carro B.

Exemplo 2: (UFSM-2003) Os dados da tabela progressiva para o cálculo anual do Imposto de Renda de pessoa físicas são apresentados na seguinte tabela:

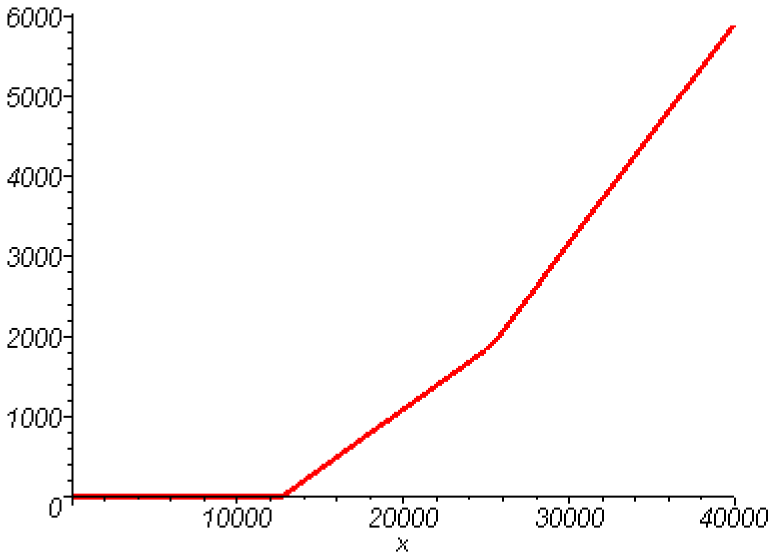
Base de cálculo anual em R$	**Alíquota %**	**Parcela a deduzir do imposto em R$**
Até 12696,00	-	-
De 12696,01 até 25380,00	15 %	1904,40
Acima de 25380,00	27,5%	5076,90

Fonte: Receita Federal – 2002

a) Encontre a função que representa o imposto a ser pago em função do rendimento x (base de cálculo).

$$I(R) = \begin{cases} 0, \text{ se } R \leq 12696{,}00 \\ 0{,}15.R - 1904{,}40, \text{ se } 12696{,}01 \leq R \leq 25380{,}00 \\ 0{,}275.R - 5076{,}90, \text{ se } R > 25380{,}00 \end{cases}$$

b) Esboce o gráfico da função encontrada em (a).



c) Qual deve ser o rendimento de uma pessoa que pagou R$ 5230,00 de imposto de renda?

IR = 5230,00

Pelo gráfico encontrado em (b), associa-se esta pessoa como portadora de uma renda superior a 25380,00 reais ao ano.

Assim:

$$5230,00 = 0,275.R - 5076,90$$
$$0,275.R = 5230,00 + 5076,90$$
$$R = 37479,64 \text{ reais}$$

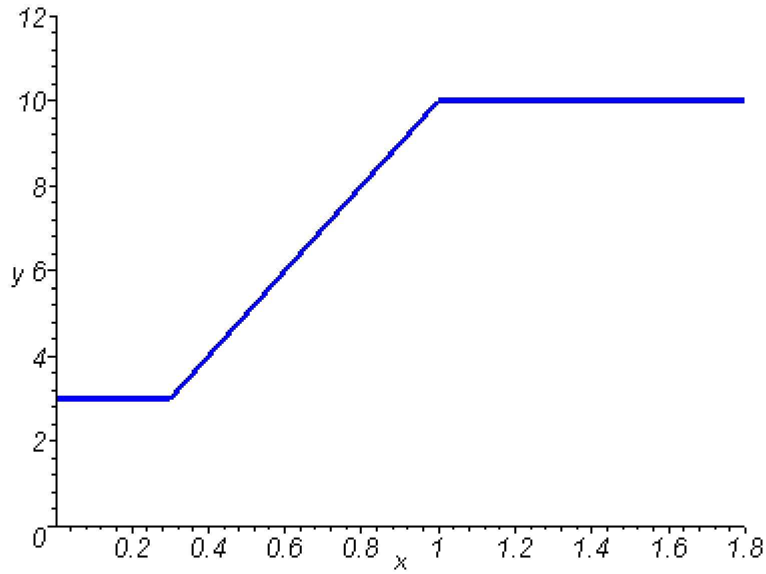
Exemplo 3: (Provão/99-Matemática) O dono de um restaurante resolveu mudar o tipo de cobrança, misturando o sistema a quilo com o de preço fixo. O sistema de preços ficou o seguinte;

Até 300 g	R$ 3,00 por refeição
Entre 300 g e 1 kg	R$ 10,00 o quilo
Acima de 1 kg	R$ 10,00 por refeição

a) Escreva a função preço a pagar em função da quantidade consumida e esboce seu gráfico

$$P(q) = \begin{cases} 3{,}00, \text{ se } 0{,}001kg \leq q \leq 0{,}300kg \\ 10{,}00.q, \text{ se } 0{,}301kg \leq q \leq 0{,}999kg \\ 10{,}00, \text{ se } q \geq 1{,}000kg \end{cases}$$

onde P é o preço a pagar, e q é a quantidade consumida.



b) Quanto deve pagar quem consumiu 750 g?

A pessoa que consumiu 750 g, enquadra-se na segunda lei da função, ou seja:

$$P = 10{,}00.q$$
$$P = 10{,}00.0{,}750$$

$$P = 7{,}50$$

c) Quantas gramas foram consumidas por quem pagou R$ 6,00?

A pessoa que pagou R$ 6,00 certamente está de acordo com a segunda lei da função, logo:

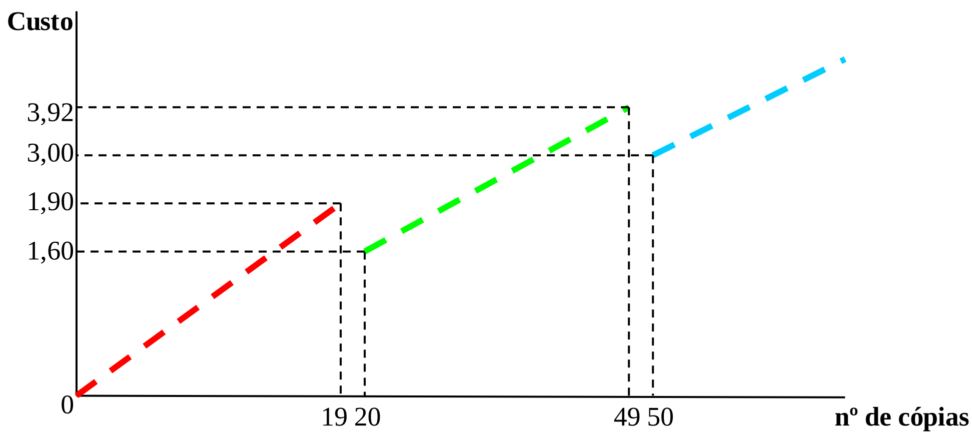
$$P = 10{,}00.q$$
$$6{,}00 = 10{,}00.q$$
$$q = 0{,}600\ kg$$

Exemplo 4 : Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços:

Número de cópias de um mesmo original	**Preço por cópia**
De 1 a 19	R$ 0,10
De 20 a 49	R$ 0,08
50 ou mais	R$ 0,06

a) Esboce o gráfico de uma função que associa a cada natural n o custo de n cópias de um mesmo original. Escreva a lei dessa função.

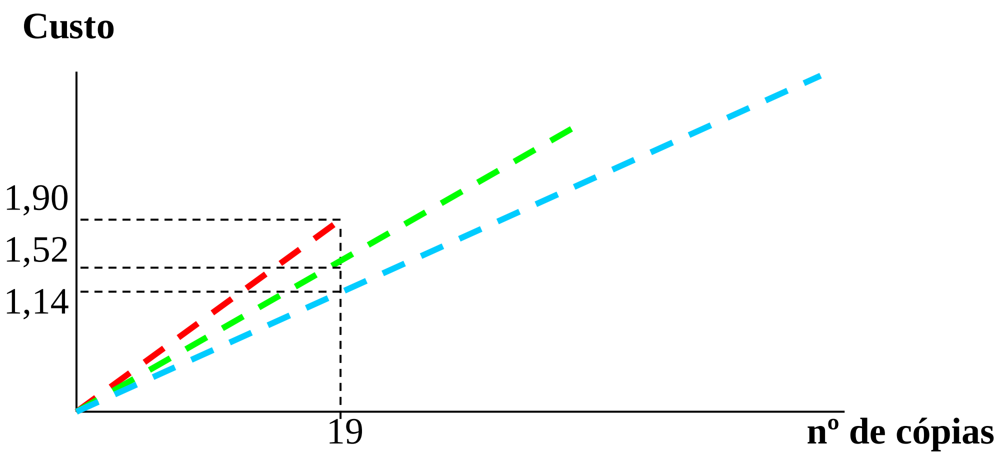
$$P(n) = \begin{cases} 0{,}10.n, \text{ se } 1 \le n \le 19 \\ 0{,}08.n, \text{ se } 20 \le n \le 49 \\ 0{,}06.n, \text{ se } n \ge 50 \end{cases}$$



Observe que as linhas são pontilhadas pelo motivo de estarmos trabalhando no conjunto dos números naturais.

b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável.

Número de cópias de um mesmo original	Preço por cópia
De 1 a 19	R$ 0,10
De 1 a 49	R$ 0,08
50 ou mais	R$ 0,06



4. A função quadrática

Uma função f chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b e c, a $\neq 0$, tais que f(x) = $ax^2 + bx + c$ para todo x.

Escrevendo a função quadrática em sua forma canônica

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, onde \Delta = b^2 - 4ac,$$

vemos que a função tem um máximo em x = $\frac{-b}{2a}$, caso a < 0 e tem um mínimo em x = $\frac{-b}{2a}$, caso a > 0. Em ambos os casos esse valor é f($\frac{-b}{2a}$) = $\frac{-\Delta}{4a}$. Prova-se em [1] que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola com vértice no ponto V = $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$.

Decorre da forma canônica que se f(x) = f(x') então

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Convém ainda lembrar que os coeficientes de uma função quadrática são determinados pelos valores da função em três números distintos.

4.1 Funções quadráticas e progressões

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma seqüência de números reais $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots$ tal que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_2$, $d_3 = y_4 - y_3$, ..., $d_n = y_{n+1} - y_n, \ldots$ formam uma progressão aritmética usual.

Uma caracterização da função quadrática é dada pela

Proposição 4: *Uma função contínua (*) $f: \Re \rightarrow \Re$ é quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada (*) $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ onde $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$, ...*

* Prova no apêndice.

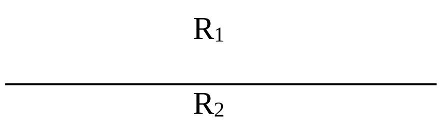
Observação: (*) Uma progressão aritmética de segunda ordem é não degenerada se não for uma progressão aritmética ordinária.

APLICAÇÕES

Exemplo 1: Dado um conjunto finito de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja R_n o número máximo de regiões no plano determinado por n retas na posição geral.

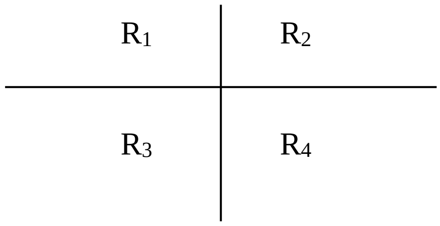
a) Quando se adiciona mais uma reta na posição geral a um conjunto de n retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

1 reta:
São determinadas 2 regiões.

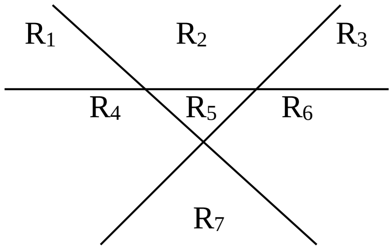


* *Uma função f: R → R é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Diz-se que f é contínua em R se for contínua em cada ponto de R.*

2 retas:
São determinadas 4 regiões.



3 retas:
São determinadas 7 regiões.



4 retas:
São determinadas 11 regiões.

5 retas:
São determinadas 16 regiões.

Assim, conclui-se que a cada reta adicionada é criado um número de regiões 1 unidade maior em relação à diferença entre o número de regiões criadas por (n – 1) retas e (n – 2) retas, onde n ≥ 3.

Logo, com 5 retas o número de regiões deve ser 4 unidades maior que a anterior, ou seja, deve possuir 16 regiões.

b) Deduza de (a) que R_n é uma função quadrática em n e obtenha a expressão de R_n.

De acordo com a proposição 4, temos uma progressão aritmética de razão 1 com relação a diferença entre o número de regiões formadas pelo número de retas consecutivas.

Conhecidos três pontos: (1, 2), (2, 4) e (3, 7) é possível determinar a expressão de $R_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} 2 = a.1^2 + b.1 + c \\ 4 = a.2^2 + b.2 + c \\ 7 = a.3^2 + b.3 + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se a seguinte expressão:

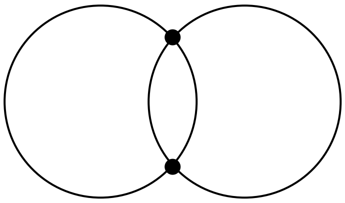
$$R_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

c) Calcule R_{30}.

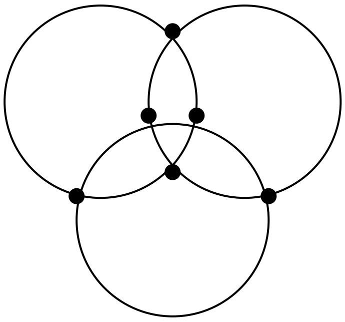
$$R_{30} = \frac{30^2}{2} + \frac{30}{2} + 1 = \frac{930}{2} + 1 = 466\,regiões$$

Exemplo2: No máximo quantos pontos de interseção existem quando são desenhadas n circunferências?

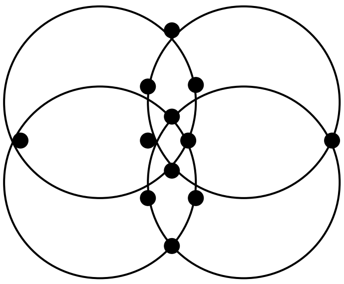
2 circunferências
2 pontos de intersecção.



3 circunferências
6 pontos de intersecção



4 circunferências
12 pontos de intersecção



5 circunferências
20 pontos de intersecção

6 circunferências
30 pontos de intersecção

Assim, conclui-se que a cada circunferência adicionada é criado um número de pontos 2 unidades maior em relação à diferença entre o número de pontos criadas por (n – 1) circunferências e (n – 2) circunferências.Por exemplo:

4 circunferências – 3 circunferências = 12 pontos – 6 pontos = 6 pontos

Logo, com 5 circunferências o número de pontos deve ser 8 unidades maior que a anterior, ou seja, deve possuir 20 pontos.

É possível verificar o número máximo de pontos de intersecção entre n circunferências a partir de uma função quadrática. De acordo com a proposição 4, temos uma progressão aritmética de razão 1 com relação a diferença entre o número de pontos formadas pelo número de circunferências consecutivas.

Conhecido três pontos: (2, 2), (3, 6) e (4, 12) é possível determinar a expressão de $R_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} 2 = a.2^2 + b.2 + c \\ 6 = a.3^2 + b.3 + c \\ 12 = a.4^2 + b.4 + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se a seguinte expressão:

$$R_n = n^2 - n$$

Exemplo 3: Um gravador de vídeo possui um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita, de 6 horas de duração, está parcialmente gravada. O contador indica 1750 ao final do trecho gravado e 1900 ao final da fita. Quanto tempo de gravação ainda está disponível no final da fita?

a) Explique porque não é razoável supor que o tempo de gravação seja diretamente proporcional ao número de voltas no contador.

Não é possível determinar o tempo restante pelo seguinte motivo: cada volta dada pelo carretel não é igual à volta anterior, pois à medida que o carretel vai acumulando fita o comprimento da circunferência formada por uma volta de fita no carretel apresenta um novo valor, pelo fato de o raio da nova volta ser diferente do raio da volta anterior.

Assim, não é admissível de que o tempo de gravação seja diretamente proporcional ao número de voltas no contador.

b) Considerando que a fita se enrola em cada carretel segundo círculos concêntricos igualmente espaçados, mostre que o tempo T(n) de gravação após n voltas é dado por uma função da forma $T(n) = an^2 + bn$.

Após a primeira volta temos a seguinte relação:

- *1ª volta: raio = r, comprimento da volta =* $2\pi.r$
- *2ª volta: raio = r +* Δr*, comprimento da volta =* $2\pi.r + 2\pi.\Delta r$
- *3ª volta: raio =* $r + \Delta r + \Delta r'$*, comprimento da volta =* $2\pi.r + 2\pi.\Delta r + 2\pi.\Delta r'$

Assim por diante, formando uma progressão aritmética. Logo se conclui que a função que relaciona o tempo da fita com o número de voltas é da seguinte forma:

$$T(n) = an^2 + bn + c$$

onde n é o número de voltas, e T é o tempo de fita já decorrente.

c) Medindo o tempo de gravação correspondente as primeiras 100, 200, 300 e 400 voltas, foram encontrados os dados abaixo. Estes valores são consistentes com o modelo acima?

Volta	**Tempo (s)**
100	555
200	1176
300	1863
400	2616

Utilizando três apontamentos da tabela anterior, é possível verificar qual a função correspondente para esta fita:

$$\begin{cases} 555 = a.100^2 + b.100 + c \\ 1176 = a.200^2 + b.200 + c \\ 1863 = a.300^2 + b.300 + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se a expressão:

$$T(n) = 0{,}0033.n^2 + 5{,}22.n$$

Para confirmar que a expressão está correta, usaremos o quarto valor da tabela que não foi utilizado para obter a expressão:

$$T(400) = 0{,}0033.400^2 + 5{,}22.400$$
$$T(400) = 0{,}0033.160000 + 2088$$
$$T(400) = 528 + 2088$$
$$T(400) = 2616 \text{ segundos}$$
confirmando o valor obtido na tabela.

d) Quanto tempo de gravação resta na fita?

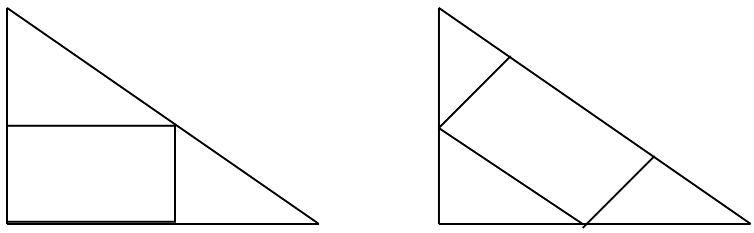
Sabe-se que foram gravadas 1750 voltas, ou seja:

$$T(1750) = 0{,}0033.1750^2 + 5{,}22.1750$$
$$T(1750) = 0{,}0033.3062500 + 9135$$
$$T(1750) = 10106{,}25 + 9135$$
$$T(1750) = 19241{,}25 \text{ segundos}$$

Sabendo também que a fita possui 6 horas de gravação (21600 segundos), subtraímos o valor total de gravação com o valor gravado e encontramos o tempo restante de fita:

$$21600 - 19241{,}25 = 2358{,}75 \text{ segundos}$$

Exemplo 4: Numa vidraçaria há um pedaço de espelho sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 1m. Quer-se a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.

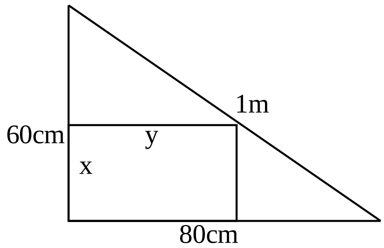


As posições sugeridas são as da figura acima.

a) Em cada caso, determine o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

1º caso: Calculando a área do retângulo de tal modo que ela seja máxima:

A = x.y = máxima



Tem-se uma relação de proporção entre triângulo retângulo a partir da figura ao lado:

$$\frac{y}{80} = \frac{60 - x}{60}$$

Obtendo assim a seguinte analogia:

$$y = 80 - \frac{4x}{3}$$

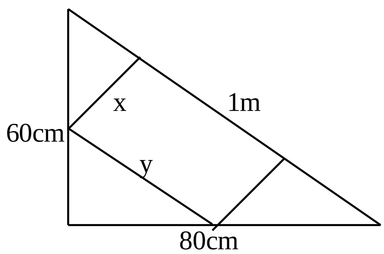
Substituindo na área tem-se:

$$A = x.y = x.\left(80 - \frac{4x}{3}\right) = 80.x - \frac{4x^2}{3}$$

Usando conhecimentos gráficos sobre funções quadráticas, sabe-se que está função apresentará um valor máximo que determinará o valor máximo da área do retângulo que estamos procurando:

$$A_{máxima} = y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(80^2)}{4.\left(\frac{-4}{3}\right)} = \frac{-6400}{\frac{-16}{3}} = 1200\,cm^2$$

2º caso: Calculando a área do retângulo de tal modo que ela seja máxima:



A = x.y = máxima

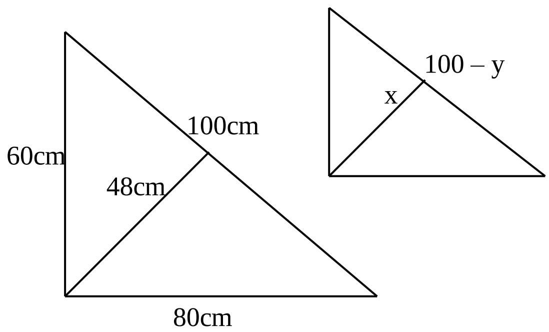
Sabe-se que a área do triângulo maior é igual a 2400 cm^2. Assim pode-se afirmar que a altura relativa à hipotenusa é dada por 48cm. Comparando-se os seguintes triângulos obtém-se a conseqüente relação:

$$\frac{48}{x} = \frac{100}{100 - y}$$

Obtendo assim a semelhança:

$$y = \frac{1200 - 25.x}{12}$$

Substituindo na área tem-se:



$$A = x.y = x.\left(\frac{1200 - 25.x}{12}\right) = 100.x - \frac{25.x^2}{12}$$

Usando conhecimentos gráficos sobre funções quadráticas, sabe-se que está função apresentará um valor máximo que determinará o valor máximo da área do retângulo que estamos procurando:

$$A_{máxima} = y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100^2)}{4.\left(\frac{-25}{12}\right)} = 1200\,cm^2$$

Os resultados obtidos foram iguais, concluindo assim que não importa a maneira com que for cortado o retângulo a partir do triângulo, pois a área máxima encontrada é de 1200 cm^2.

5. Funções do tipo exponencial

Definição: *Uma função* $g: \Re \to \Re$ *é de tipo exponencial quando se tem g(x) = ba*^{x} *para todo x real, onde a e b são constantes reais positivas. Se a > 1, g é crescente. Se 0 < a < 1, g é decrescente.*

Observação: Se g é uma função do tipo exponencial então, para quaisquer x e h reais, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = a^h - 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Vale também a recíproca.

Caracterização de funções de tipo exponencial:

Se g(x) = b.a^x , o quociente $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ = a^h e portanto não depende de x, para quaisquer valores de x e h. Assim g(x+h) = a(h)g(x), onde o coeficiente a(h) é o mesmo para qualquer valor de x. A recíproca vale e caracteriza as funções de tipo exponencial.

Proposição 5: *Seja* $g: \Re \to \Re^{+}$ *uma função crescente ou decrescente tal que, para x, h, reais quaisquer, o quociente* $\dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ *depende apenas de h, mas não de x. Então,* $g(x) = b.a^{x}$ *para todo x real, isto é, a função g é do tipo exponencial.*
* Prova no apêndice.

APLICAÇÃO:

1. O problema do reservatório.

A água de um reservatório evapora-se a uma taxa de 10% ao mês. Supondo que não haja chuva, nem outra entrada de água, pede-se:

a) o volume de água resultante ao final de 12 meses (cálculo mensal);
b) o volume de água resultante ao final de 365 dias (cálculo diário);
c) o volume resultante ao final de 8760 horas (cálculo a cada hora);
d) o volume de água resultante ao final de t meses (cálculo a cada instante);
e) o volume de água resultante ao final de 1 ano.

Antes de resolver este problema, considere a taxa de evaporação constante e igual a q por cento ao mês e faça $k = \dfrac{q}{100}$. *Tome como* V_0 *o volume inicial de água no reservatório.*

a) Ao fim do 1º mês, o volume será reduzido a $V(1) = (1 - k).V_0$.
Ao fim do 2º mês, o volume será reduzido a $V(2) = (1 - k)^2.V_0$.
Prosseguindo o raciocínio, ao fim de m meses, o volume de água será $V(m) = (1 - k)^m.V_0$.

b) A monitoração diária do volume do reservatório é calculada do seguinte modo:
Ao fim do 1º dia, o volume será igual a $V(1) = \left(1 - \dfrac{k}{30}\right).V_0$.

Ao fim do 2º dia, o volume será igual a V(2) = $\left(1-\frac{k}{30}\right)^{2}.V_0$.

Ao fim de m dias, o volume de água restante será de V(m) = $\left(1-\frac{k}{30}\right)^{m}.V_0$

c) *Se houvesse possibilidade de monitoração horária do volume do reservatório, seria:*

Ao fim da 1ª hora, o volume seria igual a V(1) = $\left(1-\frac{k}{720}\right).V_0$.

Ao fim da 2ª hora, o volume será igual a V(2) = $\left(1-\frac{k}{720}\right)^{2}.V_0$.

Ao fim de m horas, o volume de água restante no reservatório seria apenas de V(m) = $\left(1-\frac{k}{720}\right)^{m}.V_0$.

d) *Fazendo k = 0,1 e calculando o volume de água resultante após um ano, considerando respectivamente, as medidas tomadas em meses, horas e dias, obteríamos as seguintes respostas:*

$V(12) = 0{,}2824295.V_0$, $V(365) = 0{,}2956145.V_0$, $V(8760) = 0{,}2961908.V_0$.

Isso mostra que os períodos de tempo no qual são feitas as medidas, interferem no resultado, o que é bastante razoável, pois podemos supor a evaporação um processo contínuo. Como obter o resultado verdadeiro?

A idéia é a seguinte: Considere um tempo de t meses (t número real). Divida esse tempo em n períodos de tempo de duração $\frac{t}{n}$ *mês. Assim:*

Ao fim do 1º período, o volume de água restante será $V\left(\frac{t}{n}\right)=V_0.\left(1-\frac{kt}{n}\right)$.

Ao fim do 2º período, o volume de água restante será $V\left(\frac{2t}{n}\right)=V_0.\left(1-\frac{kt}{n}\right)^{2}$.

Ao final de nº período, (t meses) o volume de água restante no reservatório será

$$V(t) = V\left(\frac{nt}{n}\right) = V_0 . \left(1 - \frac{kt}{n}\right)^n$$

Fazendo n tender ao infinito (os intervalos de tempo devem ser cada vez menores) e lembrando que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{kt}{n}\right)^n = e^{-kt}$*, tem-se que a função exponencial*

$$V(t) = V_0 . e^{-kt}$$

mede o volume de água no reservatório decorridos t meses.

e) Voltando ao problema inicial, teremos, ao final de um ano, um volume de água restante no reservatório igual a

$$V(12) = V_0 . e^{-12.0,1} = 0,3011942 V_0$$

Proposição 6: *Seja g:* $\Re \rightarrow \Re^+$ *uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$*, numa progressão geométrica* $y_1 = f(x_1)$*,* $y_2 = f(x_2)$ *, ...,* $y_n = f(x_n)$*,... Se pusermos b = f(0) e a = f(1)/f(0) então f(x) = b.*a^x *para todo x real.*
* Prova no apêndice.

6. Função Logarítmica

Se a > 0 e a ≠ 1, a função f(x) = a^x é injetora e portanto possui uma inversa que é função g(x) = $\log_a x$, chamada função logarítmica na base a. Assim vale a importante propriedade:

y = a^x se e somente se x = $\log_a x$

A base mais importante em termos práticos é a base *e*, conhecida como a base natural dos logaritmos. Nesta base usa-se a notação ln x = $\log_e x$.

Para resolver a equação a^x = b, b > 0, aplica-se a função logarítmica natural (ou na base 10) em ambos os lados da equação e recai-se na solução.

$$x = \frac{\ln b}{\ln a} \text{ ou } x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

6.1 Juros contínuos

Um capital c, empregado a uma taxa de k por cento ao ano, rende, no fim de um ano, juros no valor de kc/100. Ponhamos α = k/100. Então c renderá, no fim de um ano, juros no valor de αc. Decorrido um ano, o capital torna-se igual a $c(1+\alpha)$. Passados dois anos, o novo capital $c_1 = c(1+\alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se á igual a $c(1+\alpha)^2$. Ao fim de m anos teremos $c(1+\alpha)^m$.

Se tomarmos uma fração 1/n do ano, o capital c, empregado à mesma taxa de juros, deverá render $\alpha c/n$ de juros, de modo que, decorrida a fração 1/n de ano, o capital c transforma-se em $c_1 = c(1+\alpha/n)$. Empregando este novo capital c_1 e esperando mais 1/n de ano, obtemos o capital $c(1+\alpha/n)^2$. Prosseguindo dessa maneira, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de 1/n de ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente `a mesma taxa, quando chegar ao fim do ano, em vez de $c(1+\alpha)$, obteremos um capital maior, ou seja, possuiremos $c(1+\alpha/n)^n$.

Se os juros forem capitalizados (juntados ao capital) a cada instante, ao final de um ano, o capital acumulado será de $\lim_{n\to\infty} c(1+\alpha/n)^n = c.e^{\alpha}$. Esse tipo de aplicação em que os juros são capitalizados continuamente, é o que se chama de juros contínuos. Por exemplo, o capital de R$ 1,00 empregado a juros contínuos a uma taxa de 100% ao ano, ao final de um ano será transformado em “e” reais.

Se a taxa de juros é referida a anos, (k% ao ano, $\alpha = k/100)$, então um capital c empregado a essa taxa será transformado depois de t anos, em

$$c(t) = \lim_{n\to\infty} c(1 + \alpha t/n)^n = c.e^{\alpha t}$$

APLICAÇÕES

1. Determine quanto tempo é necessário para dobrar o valor de um investimento com taxa de juros anual de 10% computada

a) anualmente ;
b) mensalmente ;
c) diariamente ;
d) continuamente.

a) juros computados anualmente

$$c(1) = 2c = c.(1+0,1)^t$$
$$log\,2 = t.log\,1,1$$
$$t = \frac{log\,2}{log\,1,1}$$
$$t = 7,27 \text{ anos}$$

b) juros computados mensalmente

$$c\left(\frac{1}{12}\right) = 2c = c.\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12.t}$$
$$log\,2 = 12.t.log\,1,0083$$
$$t = \frac{log\,2}{12.log\,1,0083}$$
$$t = 6,96 \text{ anos}$$

c) juros computados diariamente

$$c\left(\frac{1}{365}\right) = 2c = c.\left(1+\frac{0,1}{365}\right)^{365.t}$$
$$log\,2 = 365.t.log\,1,00027$$
$$t = \frac{log\,2}{365.log\,1,00027}$$
$$t = 6,9324 \text{ anos}$$

d) juros computados continuamente

$$c(t) = 2c = \lim_{n\to\infty} c(1 + \alpha t/n)^n = c.e^{0,1.t}$$
$$ln\,2 = 0,1.t.ln\,e$$
$$t = \frac{ln\,2}{0,1.ln\,e}$$
$$t = 6,9315 \text{ anos}$$

2. A que taxa de juros contínuos devo investir meu capital a fim de que ele dobre no final de 5 anos?

O capital C(t) é expresso pela função exponencial $c(t) = c.e^{\alpha.t}$*. Assim*

$$2c = c.e^{\alpha.5}$$
$$ln\,2 = \alpha.5$$
$$\alpha = \frac{ln\,2}{5}$$
$$\alpha = 0,1386 \text{ ao ano}$$

3. Quanto devo investir agora, a 12% ao ano (capitalizados continuamente), para reobter dentro de 20 anos um milhão de reais?

Fazendo $c(t) = c.e^{0,12.t}$, *segue*

$$1.000.000,00 = c.e^{0,12.20}$$

$$c = \frac{1.000.000,00}{11,0231764}$$

c = 90717,95 reais.

6.2 A desintegração Radioativa

Os átomos de uma substância radioativa (como o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo e é determinada experimentalmente. Pode-se provar que a massa M(t) do corpo após t segundos é dada pela expressão $M(t) = M_0.e^{-\alpha.t}$, onde M_0 é a massa do corpo no instante t = 0.

APLICAÇÕES

1. A meia vida de uma substância radioativa é 1 ano. Quanto tempo levará para que em um corpo puro de 10 gramas desse material reste apenas 1 grama de substância?

Meia vida é o tempo necessário para que a massa de uma substância radioativa atinja metade de seu valor inicial.Ou ainda; Meia vida é o tempo necessário para que certa grandeza atinja metade de seu valor inicial.

De $M(t) = M_0.e^{-\alpha.t}$, *segue*

$$\frac{M_0}{2} = M_0.e^{-\alpha.1}$$

de onde segue

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{2} \text{ ou } \alpha = \ln 2 \cong 0,6931471805 .$$

Assim

$$M(t) = M_0.e^{-0,6931471805.t}$$

Com os dados do problema, segue

$$1 = 10.e^{-0,6931471805t}$$

$$ln\frac{1}{10} = -0,6931471805t.ln\,e$$

de onde

$$t \simeq 3,3 \text{ anos.}$$

2. O estrôncio 90 é uma substância radioativa que resulta de explosões nucleares na atmosfera. Sua meia vida é de 28 anos. Suponha que uma área cultivada esteja contaminada pelo estrôncio 90 em nível 4 vezes maior do que aquele suportável pelo corpo humano. Quanto tempo deve passar até que essa área possa ser utilizada para o plantio de alimentos?

Da meia vida da substância segue

$$\frac{M_0}{2} = M_0.e^{-28.\alpha}$$

de onde

$$\alpha = \frac{1}{28}.ln\,2 \cong 0,0247552564.$$

Assim

$$\frac{M_0}{2} = M_0.e^{-0,0247552564t}$$

das hipóteses

$$\frac{M_0}{4} = M_0.e^{-0,0247552564t}$$

de onde

$$t \simeq 56 \text{ anos.}$$

CONCLUSÃO

A realização do presente trabalho possibilitou uma melhor compreensão da dificuldade na aprendizagem da definição de função e suas aplicações. A reelaboração desta idéia ao longo da história, por matemáticos importantes, mostra que sua assimilação requer alta capacidade de abstração e manejo formal da linguagem matemática.

Nesse sentido a introdução ao seu ensino nos níveis fundamental e médio deve ser apoiada fortemente em situações vivenciadas pelo aluno, explorando sempre a variação (dependência) entre duas grandezas. Alguns problemas geométricos relacionados a cálculos de áreas e ou volumes também são apropriados para introduzir a noção de função.

Um erro apontado por Elon L. Lima na RPM nº 41 a respeito da tentativa de reforma de ensino, ocorrida nos anos 70 do século passado, com a implantação da "matemática moderna", foi o excesso de formalismo em detrimento da experiência trazida pelos alunos. Até hoje alguns livros didáticos apresentam de modo excessivamente formal o conceito de função como um subconjunto de pares ordenados, retirando-lhe toda a potencialidade de instrumento matemático e dificultando sua compreensão.

As situações – problema permitem ao aluno perceber a variação das grandezas envolvidas, trabalhar com unidades de medida, desenvolvendo a noção de estimativa de ordem de grandeza, permitindo assim comparações.

APÊNDICE

A seguir são apresentadas as demonstrações das proposições enunciadas no texto.

Proposição 1: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

Se f: $\Re^+ \to \Re^+$ *é uma função crescente tal que f(nx) = nf(x) para todo x* $\in \Re^+$ *e todo n* $\in \mathrm{N}$*, então f(cx) = cf(x) para quaisquer x e c em* $\Re^+$.

Demonstração: Provemos inicialmente que, para todo número racional r = m/n *, a hipótese acarreta que f(rx) = rf(x), seja qual for x* $\in \Re$*. Com efeito, tem-se*

$$n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n}.f(x) = r.f(x)$$

Seja a = f(1). Como f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0, a monotonicidade de f nos dá a = f(1) > f(0) = 0. Assim, a é positivo. Além disso, temos f(r) = f(r.1) = r.f(1) = r.a = ar para todo r $\in$ *Q.*

Mostremos agora que se tem f(x) = ax para todo x $\in \Re$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que f(x) ≠ ax. Para fixar idéias admitamos f(x) < ax. (O caso f(x) > ax seria tratado de modo análogo.) Temos

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então f(x) < ar < ax, ou seja, f(x) < f(r) < ax. Mas isto é absurdo pois f é crescente logo, como r < x, deveríamos ter f(r) < f(x). Esta contradição completa a prova.

Proposição 2: Seja *f:* $\Re \to \Re$ *uma função crescente ou decrescente. Se a diferença f(x+ h) – f(x) depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração: A demonstração desta proposição é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para fixar idéias, suporemos que a função f seja crescente, com $\varphi(0) = 0$*. Além disso, para quaisquer h, k* $\in \Re$ *temos*

$$\begin{aligned}\varphi(h + k) &= f(x + h + k) – f(x) = \\ &= f((x + k) + h) – f(x + k) + f(x + k) – f(x) \\ &= \varphi(h) + \varphi(k)\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$*, tem-se* $\varphi(h) = a.h$ *para todo h* $\in \Re$*. Isto quer dizer que f(x + h) – f(x) = a.h. Chamando f(0) de b, resulta f(h) = ah + b, ou seja, f(x) = ax + b para todo x* $\in \Re$*.*

Proposição 3: Seja *f:* $\Re \to \Re$ *uma função crescente ou decrescente que transforma qualquer P.A em outra P.A. Então f é uma função afim.*

Demonstração: Com efeito, neste caso a nova função g: $\Re \to \Re$*, definida por g(x) = f(x) – f(0), transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética, e agora tem a propriedade g(0) = 0. Mostremos que g é linear.*

Para todo x $\in \Re$*, os números –x, 0, x formam uma progressão aritmética, logo o mesmo ocorre com os números g(-x), 0, g(x). Por conseguinte, g(-x) = -g(x).*

Em seguida, consideremos x $\in \Re$ *e n* $\in$ *N. Então os números 0, x, 2x, ..., nx formam uma progressão aritmética, o mesmo se dando com suas imagens por g: 0, g(x), g(2x), ..., g(nx). A razão desta progressão pode ser obtida tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é g(x). Segue-se então que g(nx) = n.g(x). Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos –n* $\in$ *N logo g(nx) = -g(-nx) = -(-n.g(x)) = n.g(x). Assim, vale g(nx) = ng(x) para todo n* $\in$ *Z e todo x* $\in \Re$*. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue-se que g é linear: g(x) = ax, portanto, pondo f(0) = b, temos*

$$f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$$

para todo $x \in \Re$, como queríamos demonstrar.

Proposição 4: *Uma função contínua $f: \Re \rightarrow \Re$ é quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética não constante x_1, x_2 , x_3 ,..........., x_n, ... numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada (*) y_1, y_2, y_3 ,...., y_n ,.... onde $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$, ...*

Demonstração: A necessidade já foi demonstrada acima. Para provar a suficiência, seja $f: \Re \rightarrow \Re$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A. não-constante numa P.A. de segunda ordem não-degenerada. Substituindo f(x) por g(x) = f(x) – f(0), vemos que g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade adicional de que g(0) = 0.

Considerando a progressão aritmética 1, 2, 3, 4, 5, ..., vemos que os valores g(1), g(2), ..., g(n)... formam uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes $a \neq 0$ e b tais que

$$g(n) = an^2 + bn$$

para todo $n \in N$. (Deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$ porém g(0) = 0.)

Em seguida, fixemos arbitrariamente um número $p \in N$ e consideremos a progressão aritmética

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \frac{n}{p}, \ldots.$$

De modo análogo, concluímos que existem $a' \neq 0$ e b' tais que

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a' n^2 + b' n$$

Para todo $n \in N$. Assim, para todo $n \in N$, temos:

$$\begin{aligned} an^2 + bn &= g(n) = \\ &= g\left(\frac{np}{p}\right) = \\ &= a'(np)^2 + b'(np) = \\ &= (a'p^2)n^2 + (b'p)n. \end{aligned}$$

Portanto as funções quadráticas

$$ax^2 + bx \qquad e \qquad (a'p^2)x^2 + (b'p)x$$

coincidem para todo $x = n \in N$. *Como vimos no início deste capítulo, isto obriga a* $a = a'p^2$ *e* $b = b'p$, *ou seja,* $a' = a/p^2$, $b' = b/p$. *Logo, para quaisquer números naturais n e p vale:*

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n =$$

$$= \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n =$$

$$= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ *e* $ax^2 + bx$ *são tais que* $g(r) = ar^2 + br$ *para todo número racional positivo* $r = n/p$. *Segue-se que* $g(x) = ax^2 + bx$ *para todo número real positivo x. De modo análogo, considerando a P.A. -1, -2, -3, ..., concluiríamos que* $g(x) = ax^2 + bx$ *para todo* $x \leq 0$. *Logo, pondo* $f(0) = c$, *temos* $f(x) = g(x) + c$, *ou seja*

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

Para todo $x \in \Re$.

Proposição 5: *Seja* $g: \Re \to \Re^+$ *uma função crescente ou decrescente tal que, para x, h, reais quaisquer, o quociente* $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ *depende apenas de h, mas não de x. Então,* $g(x) = b.a^x$ *para todo x real, isto é, a função g é do tipo exponencial.*

Demonstração: Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = g(x + h)/g(x)$ *independe de x. Substituindo, se necessário,* $g(x)$ *por* $f(x) = g(x)/b$, *onde* $b = g(0)$, *f continua monótona injetiva, com* $f(x + h)/f(x)$ *independente de x e, agora, com* $f(0) = 1$. *Então, pondo* $x = 0$ *na relação* $\varphi(h) = f(x + h)/f(x)$, *obtemos* $\varphi(h) = f(h)$ *para todo* $h \in \Re$. *Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre* $f(x+h) = f(x).f(h)$, *ou seja* $f(x + y) = f(x).f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \Re$.

Segue-se então que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.

Proposição 6: *Seja $g: \Re \to \Re^+$ uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, numa progressão geométrica $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$ Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ então $f(x) = b.a^x$ para todo x real.*

Demonstração: Seja $b = f(0)$. A função $g: \Re \to \Re^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \Re$ qualquer, a seqüência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se que $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in N$ e $x \in \Re$. A seqüência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n + 1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in Z$ e $x \in \Re$. Segue-se da proposição acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \Re$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LIMA, E. L. Et all. *A Matemática do Ensino Médio* vol 1, Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2000.

[2] LIMA, E. L. *Logaritmos*. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2001. Rio de Janeiro.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher. 1996. São Paulo.

[4] EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Editora da UNICAMP. 1995. Campinas. SP.

[5] GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto, GIOVANNI JR., José Ruy. *Matemática Fundamental : Uma nova Abordagem*. Ensino Médio, vol. único. São Paulo. Ed. FTD, 2002.

[6] ELON, L. *A Matemática do Ensino Médio,* vol I, SBM, 1990.

[7] *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* – MEC

[8] *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental* – MEC

[9] *Revista do Professor de Matemática* – SBM

[10] *Revista de Educação Matemática* - SBEM

[11] Página da internet *: www.mat.ufpr.br/historia.html*