

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Francisco Xavier de Azeredo

**TERMODINÂMICA E TRANSIÇÕES DE FASE EXISTENTES NA
MATÉRIA DE QUARKS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL**

Santa Maria, RS
2023

Francisco Xavier de Azeredo

**TERMODINÂMICA E TRANSIÇÕES DE FASE EXISTENTES NA MATÉRIA DE
QUARKS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas clássicas da fenomenologia e suas aplicações, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**. Defesa realizada por videoconferência.

Orientadora: Prof.^a Dyana Cristine Duarte

Coorientador: Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias

Santa Maria, RS
2023

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Xavier de Azeredo, Francisco
TERMODINÂMICA E TRANSIÇÕES DE FASE EXISTENTES NA
MATÉRIA DE QUARKS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL / Francisco
Xavier de Azeredo.- 2023.
96 p.; 30 cm

Orientadora: Dyana Duarte
Coorientadora: Ricardo Farias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2023

1. Diagrama de fases 2. Modelos efetivos. 3.
Cromodinâmica Quântica 4. Regularização I. Duarte, Dyana
II. Farias, Ricardo III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, FRANCISCO XAVIER DE AZEREDO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade,

©2023

Todos os direitos autorais reservados a Francisco Xavier de Azeredo . A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: francisco.azeredo@acad.ufsm.br

Francisco Xavier de Azeredo

**TERMODINÂMICA E TRANSIÇÕES DE FASE EXISTENTES NA MATÉRIA DE
QUARKS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas clássicas da fenomenologia e suas aplicações, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Aprovado em 31 de julho de 2023:

Dyana Cristine Duarte, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr. (UFSM)
(Coorientador)

Eleonir João Calegari, Dr. (UFSM)

William Rafael Tavares, Dr. (UERJ)

Santa Maria, RS
2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que estiveram comigo e me apoiaram nessa jornada. Especialmente aos meus avós Joacir e Evonice, que criaram uma base familiar para me ajudar a alcançar meus objetivos. À minha tia, Sheila, sem seu apoio, conselhos e parceria, tudo isso não seria possível.

À professora Dyana pela orientação durante o mestrado, colaboração e paciência. Ao professor Ricardo pela co-orientação e a troca de ideias durante o desenvolvimento dessa dissertação.

À banca examinadora desta dissertação, composta pelos professores Eleonir e William, pela disposição;

À Capes pela concessão da bolsa e ao PGFISICA-UFSM pelo espaço e apoio financeiro para participação de congressos e escolas de verão.

Por fim, agradeço à minha namorada, Anna, por me apoiar, aconselhar e amar. Não conseguiria concluir esse mestrado sem a sua companhia diária e cumplicidade, obrigado por existir e fazer parte da minha história.

É uma verdade significativa e necessária que as coisas profundas na ciência não são encontradas porque são úteis; elas são encontradas porque foi possível encontrá-las!

(Julius Robert Oppenheimer)

RESUMO

TERMODINÂMICA E TRANSIÇÕES DE FASE EXISTENTES NA MATÉRIA DE QUARKS COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL

AUTOR: Francisco Xavier de Azeredo

Orientadora: Dyana Cristine Duarte

Coorientador: Ricardo Luciano Sonogo Farias

Nesta dissertação utilizamos modelos efetivos, tais como o de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) e o Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL), a fim de descrever e estudar o diagrama de fases da Cromodinâmica Quântica (QCD) com desbalanceamento quiral. Primeiramente estudamos e reproduzimos resultados já estabelecidos na literatura no contexto do modelo NJL, discutindo os efeitos deste desbalanceamento no parâmetro de ordem do modelo e posteriormente estendemos o mesmo estudo para o modelo PNJL. Além disso, para ambos os modelos, foram estudados os efeitos do desbalanceamento quiral nas quantidades termodinâmicas e por fim, nas transições de fases presentes nos diagramas de fases. Neste contexto, foram utilizados diferentes esquemas de regularizações, baseados na separação de efeitos de meio a partir das integrais divergentes, que aparecem no vácuo dos modelos NJL e PNJL, quando a temperatura e o desbalanceamento quiral são nulos. Por fim, fizemos um estudo mais aprofundado no modelo PNJL que leva em conta a propriedade do confinamento, além da quebra da simetria quiral. Mostramos que ao regularizar somente contribuição de vácuo e incluindo uma dependência com μ_5 no setor puro de glúons, obtemos uma descrição melhor e conseqüentemente mais próxima da transição quiral e de desconfinamento em comparação com os resultados de simulações da QCD na rede.

Palavras-chave: Diagrama de fases. Modelos efetivos. Cromodinâmica Quântica. Regularização.

ABSTRACT

THERMODYNAMICS AND PHASE TRANSITIONS OF QUARK MATTER WITH CHIRAL IMBALANCE

AUTHOR: Francisco Xavier de Azeredo

ADVISOR: Dyana Cristine Duarte

CO-ADVISOR: Ricardo Luciano Sonego Farias

In this dissertation, we have used effective models, such as the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) and the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) to describe and study the Quantum Chromodynamics (QCD) phase diagram with chiral imbalance. We first studied and reproduced results already established in the literature in the context of the NJL model, discussing the effects of this imbalance on the order parameters of the model, and then extended the same study to the PNJL model. In addition, for both models, we studied the effects of chiral imbalance on thermodynamic quantities and, finally, on the phase transitions of the phase diagrams. In this context, different regularization schemes were used, based on the separation of medium effects from the divergent integrals, which appear in the vacuum of the NJL and PNJL models, when the temperature and chiral imbalance are zero. Finally, we carried out a more in-depth study of the PNJL model, which considers the property of confinement together with the breaking of chiral symmetry. We showed that, by regularizing only the vacuum contribution and including a dependence on μ_5 in the pure gluon sector, we obtain a better and consequently closer description of the chiral transition and deconfinement compared to the lattice QCD simulations results.

Keywords: Phase Diagram. Effective models. Quantum Chromodynamics. Regularization

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Primeira versão do diagrama de fases da matéria composta por quarks e glúons: densidade bariônica (ρ_B) em função da temperatura (T). Nesse diagrama os quarks e os glúons estão confinados na fase I (fase hadrônica) e desconfinados na fase II. 16
- Figura 2 – Concepção artística frequente para o diagrama de fases da QCD. 17
- Figura 3 – Representação cartunesca do spin e direção do movimento de uma partícula de mão esquerda e outra de mão direita. As setas vermelhas representam o spin; as setas verdes representam o momento. 19
- Figura 4 – **Esquerda:** Efeito matemático da quiralidade de um férmion no plano complexo associado ao estado quântico. **Direita:** Efeito físico quiralidade em sua função de onda. 20
- Figura 5 – Equação autoconsistente diagramática, que envolve os propagadores de quark *dressed* (linha em negrito) e *bare* (linha fina) e um *loop* de autoenergia. Com p e k sendo os momentos. 24
- Figura 6 – **Esquerda:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T com potencial químico quiral nulo, comparando os diferentes métodos de regularização. **Direita:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T com potencial químico quiral finito, comparando os diferentes métodos de regularização. 30
- Figura 7 – **Esquerda:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T para diferentes valores de μ_5 e o esquema de regularização TRS. **Direita:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T para diferentes valores de μ_5 e o esquema de regularização MSS. 30
- Figura 8 – **Esquerda:** Pressão normalizada p_N em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularização e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Pressão normalizada p_N em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0,2$ GeV. 32
- Figura 9 – **Esquerda:** Densidade de entropia s em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularização e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Densidade de entropia s em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0,2$ GeV. 32
- Figura 10 – **Esquerda:** Densidade de energia ε em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Densidade de energia ε em função da temperatura sob diferentes esquemas da regula-

	rizações e a $\mu_5 = 0,2 \text{ GeV}$	33
Figura 11	– A temperatura crítica T_c , normalizada por $T_0 = T_c(\mu_5 = 0)$ em função de μ_5 . O ponto preto indica um ponto tricrítico (TP) no limite quiral, enquanto o quadrado indica o <i>Critical End-Point</i> (CEP), ambos no caso da regularização TRS.	34
Figura 12	– Esquerda: Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização do modelo. Direita: <i>Loop</i> de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização do modelo.	44
Figura 13	– Esquerda: Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS. Direita: <i>loop</i> de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS. . .	45
Figura 14	– Esquerda: Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização MSS. Direita: <i>loop</i> de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização MSS. . .	46
Figura 15	– Esquerda: Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS, Λ <i>in medium</i> . Direita: <i>Loop</i> de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS, Λ <i>in medium</i>	47
Figura 16	– Esquerda: Pressão normalizada (p_N) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularizações. Direita: Pressão normalizada (p_N) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularizações.	47
Figura 17	– Esquerda: Densidade de entropia (s) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ e diferentes esquemas de regularização. Direita: Densidade de entropia (s) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.	48
Figura 18	– Esquerda: Densidade de energia (ε) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ e diferentes esquemas de regularização. Direita : Densidade de energia (ε) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.	48
Figura 19	– Esquerda: Equação de estado (p_N/ε) em função da temperatura (T) para	

	$\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização. Direita: Equação de estado (p_N/ε) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.	49
Figura 20 –	Esquerda: Temperatura pseudocrítica (T_{pc}^c) normalizada pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ como função de μ_5 para diferentes esquemas de regularizações. Direita: Temperatura pseudocrítica (T_{pc}^d) normalizada pela temperatura pseudocrítica para a transição de desconfinamento em $\mu_5 = 0$ como função de μ_5 para diferentes esquemas de regularizações.	50
Figura 21 –	Temperatura pseudocrítica (T_{pc}) como função de μ_5 normalizadas pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ para o esquema de regularização MSS para as transições quiral e desconfinamento em comparação com os dados da QCD na rede (BRAGUTA et al., 2016).	52
Figura 22 –	Resultado da QCD na rede para a temperatura crítica $T_c(\mu_5)/T_c(0)$ contra o potencial químico quiral (μ_5).	53
Figura 23 –	Potencial de Polyakov dado em (3.41) como função de Φ para duas temperaturas diferentes.	54
Figura 24 –	Esquerda: Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T) para diferentes valores de potenciais químicos quirais (μ_5) no esquema de parametrização MSS com o <i>ansatz</i> Eq. (3.43). Direita: <i>Loop</i> de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T) para diferentes valores de potenciais químicos quirais (μ_5) no esquema de parametrização MSS com o <i>ansatz</i> Eq. (3.43). RESULTADO PRELIMINAR!	55
Figura 25 –	Temperatura pseudocrítica (T_{pc}) como função de μ_5 normalizadas pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ para o esquema de regularização MSS com o <i>ansatz</i> Eq. (3.43) para as transições quiral e desconfinamento em comparação com os dados da QCD na rede (BRAGUTA et al., 2016). RESULTADO PRELIMINAR!	56
Figura 26 –	Polos da Eq. E.3.	88
Figura 27 –	Contorno C sobre o plano complexo.	89

LISTA DE ABREVIATURAS

QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i>
NJL	<i>Nambu-Jona-Lasinio</i>
PNJL	<i>Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio</i>
LQCD	<i>Lattice Quantum Chromodynamics</i>
QGP	<i>Quark Gluon Plasma</i>
QFT	<i>Quantum Field Theory</i>
FTFT	<i>Finite Temperature Field Theory</i>
LHC	<i>Large Hadron Collider</i>
RHIC	<i>Relativistic Heavy Ion Collider</i>
MSS	<i>Medium Scheme Separation</i>
TRS	<i>Traditional Regularization Scheme</i>
EOS	<i>Equation of state</i>
CME	<i>Chiral Magnetic Effect</i>
CSC	<i>Color Superconducting Phase</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	12
1.2	O DIAGRAMA DE FASES DA QCD	15
1.3	O DESBALANCEAMENTO QUIRAL	18
2	DESCRIÇÃO DA QCD POR MODELOS EFETIVOS	21
2.1	MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO	21
2.2	MODELO NJL COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL	26
2.3	ESQUEMAS DE REGULARIZAÇÃO DO VÁCUO DO MODELO	27
2.4	QUANTIDADES TERMODINÂMICAS	28
2.5	RESULTADOS	29
3	CONFINAMENTO NA QCD	36
3.1	MODELO DE POLYAKOV-NAMBU-JONA-LASINIO	36
3.1.1	Laço de Polyakov e simetria de centro	36
3.1.2	Parametrização logarítmica do setor puro de glúons	40
3.2	MODELO DE PNJL COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL	41
3.3	QUANTIDADES TERMODINÂMICAS	43
3.4	RESULTADOS	44
3.4.1	Temperaturas pseudocríticas	50
3.4.2	Parametrização Polinomial do setor puro de glúons	53
3.5	RESULTADOS PRELIMINARES	55
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
	APÊNDICE A – NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES	67
	APÊNDICE B – UNIDADES NATURAIS	69
	APÊNDICE C – SIMETRIA QUIRAL	75
	APÊNDICE D – CÁLCULO DO POTENCIAL TERMODINÂMICO NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO	79
	APÊNDICE E – SOMA DE FREQUÊNCIAS MATSUBARA E FÓRMULAS RELACIONADAS	87
	APÊNDICE F – FORMALISMO DE TEMPO IMAGINÁRIO	92

1 INTRODUÇÃO

1.1 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

A ciência visa compreender a matéria e sua estrutura desde à Grécia antiga, inicialmente com a ideia do átomo, um objeto indivisível e elementar até aquela época. Com o desenvolvimento da física, descobriu-se que o átomo era composto por elétrons, prótons e nêutrons. Até então, acreditava-se também que os prótons e nêutrons eram partículas elementares, ou seja, não eram compostas por outras partículas. O modelo de quarks foi proposto inicialmente de forma independente em dois trabalhos, o de Gell-Mann (1964) e o de Zweig (1964), que introduzem a ideia que prótons e nêutrons são compostos por quarks. Mais tarde, em 1968, experimentos conhecidos como *Deep Inelastic Scattering* no *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) foram realizados e mostraram que o próton possuía sim pequenas estruturas no seu interior, que ficariam conhecidas como *quarks*, resultado publicado por Bloom et al. (1969). No entanto, isso era apenas o início e desde a descoberta dessas partículas muitas outras foram detectadas. Dessa maneira, através dos anos, diversas teorias foram desenvolvidas para explicar a matéria bariônica (composta por prótons e nêutrons) e suas interações. Atualmente, o Modelo Padrão da Física de Partículas (BUTTERWORTH, 2016; TANABASHI et al., 2018; GROUP et al., 2022), construído sob o formalismo da Teoria Quântica de Campos (QFT, do inglês *Quantum Field Theory*), é o que fornece a melhor descrição dos fenômenos do mundo microscópico. O setor do Modelo Padrão responsável por estudar e descrever as interações fortes é conhecido como Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), no qual as partículas mediadoras são conhecidas como glúons, responsáveis pela interação entre os quarks. A QCD possui três propriedades fundamentais: o confinamento de cor, a liberdade assintótica e a quebra espontânea de simetria quiral. O confinamento de cor, é a propriedade devida à qual os quarks estão confinados dentro dos prótons e nêutrons em razão da interação das cargas de cor (representadas por vermelha, azul, verde) que cada quark possui. A combinação dessas três cargas de cor no interior de um próton, por exemplo, resulta na matéria branca ou neutra de carga de cor. A segunda propriedade, a liberdade assintótica, ocorre quando a interação entre os quarks e glúons torna-se fraca conforme a escala de energia do sistema aumenta, como consequência, por exemplo, do aumento de quantidades como temperatura, pressão, e/ou densidade (GROSS; WILCZEK, 1973; GROSS, 2005). A liberdade assintótica foi descoberta em 1973 pelos físicos David Gross e Frank Wilczek, e de maneira independente por David Politzer. Os três venceram o prêmio Nobel de Física em 2004 por tal descoberta. Por fim, a quebra espontânea da simetria quiral é o mecanismo responsável por gerar grande parte da massa do universo

visível, composto por prótons e nêutrons. Este mecanismo foi elucidado pelos físicos Yoichi Nambu e Giovanni Jona Lasinio em seus trabalhos originais (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a) e (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b).

As teorias quânticas de campos não são fáceis de serem resolvidas de maneira exata, logo os físicos desenvolveram esquemas de aproximação. Dentro disso, foi desenvolvida a aproximação perturbativa a curtas distâncias devido à propriedade de liberdade assintótica da QCD (STERMAN et al., 1995). No entanto, quando o acoplamento da teoria torna-se alto e efeito como, por exemplo, o confinamento surge é necessária uma abordagem não perturbativa da teoria. Uma dessas abordagens é feita por meio de cálculos numéricos da QCD num espaço-tempo discreto de quatro dimensões (LQCD, do inglês *Lattice Quantum Chromodynamics*). Para uma revisão dos resultados da LQCD conferir os trabalhos de Fodor (2012) e Sharma (2013). Outro formalismo não perturbativo é o de Dyson-Schwinger, suas equações em teoria quântica de campos é o equivalente às equações de movimento de Lagrange e, entre seus muitos usos, são fundamentais para simplificar a prova geral de renormalização das teorias de campos de *gauge* (ROBERTS, 2015). As previsões da QCD no regime de acoplamento forte podem ser testadas em experiências da física das altas energias (BIEBEL, 2001; KLUTH, 2006).

A LQCD utiliza cálculos de primeiros princípios utilizando, por exemplo, o método de Monte Carlo, e possui um grande poder computacional. No entanto, por meio da introdução de um potencial químico bariônico finito μ_B nas simulações de LQCD, o determinante fermiônico que aparece na função de partição da QCD deixa de ser real (problema de sinal), e assim as simulações de Monte Carlo deixam de ser possíveis (DANZER et al., 2009). Neste sentido, os modelos efetivos surgem como uma alternativa para obter uma previsão da estrutura de fases da QCD. No momento em que o fenômeno estudado é definido por uma separação de escalas de energias, as quais dizem respeito a fase de hádrons/confinamento e a fase desconfiada, que serão discutidas a seguir, então as teorias efetivas tornam-se ferramentas poderosas (FERREIRA, 2015). Hoje em dia é conhecido que há duas fases distintas na matéria de quarks e glúons: a fase hadrônica, onde os quarks e glúons estão confinados nos prótons e nêutrons, e o chamado plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *Quark Gluon Plasma*) em que eles se encontram desconfiados como discutido, por exemplo, nos trabalhos de Collins e Perry (1975) e Buballa (2005). Provavelmente poucos instantes no universo primordial após o Big Bang, existiu uma fase QGP. E pode existir ainda no núcleo de objetos compactos como, por exemplo, estrelas de nêutrons.

O comportamento crítico presente na termodinâmica está geralmente relacionado com a quebra espontânea de alguma simetria global (SATZ, 2012). O parâmetro de ordem é a quantidade que determina o estado de uma simetria: ele some quando o sistema compartilha a simetria da lagrangiana, e torna-se diferente de zero quando a simetria é espontaneamente quebrada (FERREIRA, 2015).

O desconfinamento em uma teoria de *gauge* é referente à quebra espontânea da simetria de centro global, isto será discutido com mais detalhes no capítulo 3. O *loop* de Polyakov consiste no parâmetro de ordem para a simetria de centro: ele é zero se a simetria é realizada (fase confinada) e diferente de zero quando a simetria é quebrada (fase desconfiada) (RATTI; RÖSSNER; WEISE, 2007). A transição que acontece na fase desconfiada é basicamente a transição de fase da matéria dita neutra de carga de cor ou branca para estados não ligados com carga de cor, exemplo disso, dos hádrons para quarks e glúons fracamente ligados em um plasma de quarks e glúons. A existência da dinâmica dos quarks na QCD quebra explicitamente a simetria de centro. No entanto, o *loop* de Polyakov permanece pequeno até uma certa temperatura e depois aumenta rapidamente em um intervalo de temperatura pequeno, que corresponde ao rápido aumento de energia, indicando uma mudança súbita no número de graus de liberdade da matéria com carga de cor não ligada. Assim, parte do comportamento crítico, presente na teoria de *gauge* parece persistir mesmo na presença de quarks dinâmicos (SATZ, 2012; FUKUSHIMA, 2004a).

A simetria quiral é uma simetria da Lagrangiana da QCD para quarks sem massa. No vácuo da QCD a simetria quiral é espontaneamente quebrada, o que está relacionado à geração dinâmica da massa constituinte dos quarks. Então, a transição quiral é a transição de fases de um estado no qual a massa efetiva dos quarks é espontaneamente gerada para quarks sem massa. O condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é o parâmetro de ordem para a simetria quiral: ele difere de zero quando a simetria é espontaneamente quebrada, e zero quando a mesma é restaurada. Embora a presença da massa de corrente na Lagrangiana da QCD quebra explicitamente a simetria quiral, o condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é uma quantidade útil para estudar a restauração parcial ou total da simetria quiral.

A estrutura das fases da QCD em baixas e altas energias, possui uma variedade de fenômenos físicos. Sua descrição teórica é feita por meio de uma teoria quântica de campos, e com isso é construída uma densidade Lagrangiana dada por (WEINBERG, 1973; FRITZSCH; GELL-MANN; LEUTWYLER, 1973; HUANG, 1992)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{massa} + \mathcal{L}_{gluons} \\ &= \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_{c_f}) \psi_f - \frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Na Eq. (1.1) ψ_f representa os quarks, campos no espaço de Dirac, com três graus de liberdade de cores (verde, vermelha, azul) e seis sabores possíveis *up*, *down*, *strange* (u, d, s), representando o setor de quarks leves, e *charm*, *bottom*, *top* (c, b, t), representando o setor dos quarks pesados. O termo m_{c_f} é a massa de corrente dos quarks, que pode ser representada como uma matriz de massa $\hat{m}_c = \text{diag}_f(m_u, m_d, \dots)$, onde f representa o índice de sabor dos quarks. É relevante destacar a importância da derivada covariante nesta situação definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu, \quad (1.2)$$

o acoplamento dos campos de quarks e glúons é feito pela derivada covariante. A constante de acoplamento, g_s , é associada à interação forte. Os campos de glúons, são definidos como

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} t_a A_\mu^a = t_1 A_\mu^1 + t_2 A_\mu^2 + \dots + t_8 A_\mu^8, \quad (1.3)$$

no qual as matrizes de Gell-Mann são dadas por,

$$t_a = \frac{\lambda_a}{2}. \quad (1.4)$$

Os campos gluônicos representados por A_μ^a e λ_a são os geradores do grupo de *gauge* SU(3). Por fim, o tensor dado por

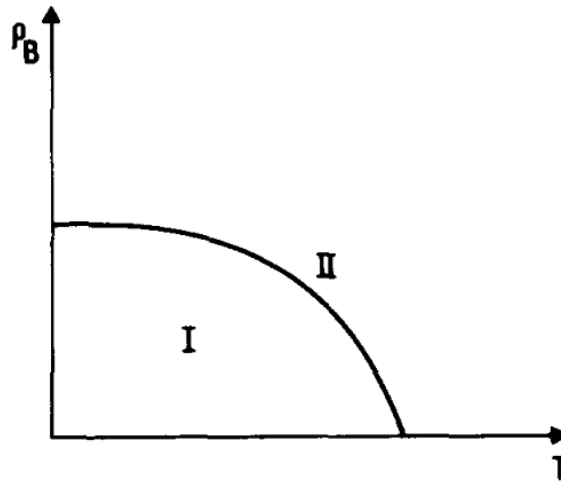
$$G^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}, \quad (1.5)$$

gera os campos gluônicos e com $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$. O termo \mathcal{L}_{gluons} introduz uma autointeração dos campos mediadores (glúons) intimamente relacionada ao confinamento de cores. A presença do termo de massa na Lagrangiana \mathcal{L}_{massa} é essencial para a dinâmica da QCD, pois ele é o termo que quebra explicitamente a simetria quiral. Isso pode ser visto melhor no Apêndice C.

1.2 O DIAGRAMA DE FASES DA QCD

O primeiro diagrama de fases para a matéria fortemente interagente foi apresentado por Cabibbo e Parisi (1975). Nesse diagrama, os autores apresentam de maneira esquemática a existência de apenas duas fases, a hadrônica (quarks e glúons confinados) e a fase onde os quarks e glúons estariam desconfinados, como visto na Fig. 1.

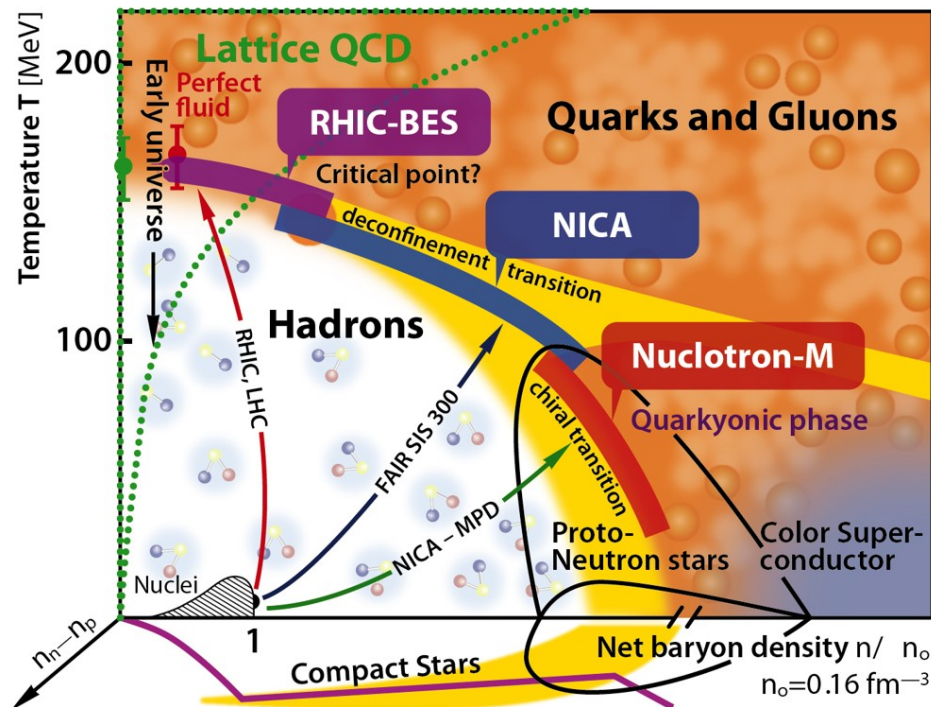
Figura 1 – Primeira versão do diagrama de fases da matéria composta por quarks e glúons: densidade bariônica (ρ_B) em função da temperatura (T). Nesse diagrama os quarks e os glúons estão confinados na fase I (fase hadrônica) e desconfinados na fase II.



Fonte: Figura retirada do trabalho de Cabibbo e Parisi (1975).

Atualmente, o diagrama de fases da matéria fortemente interagente mostra uma visão mais complexa em relação à proposta original na Fig. 1. A proposta mais recente está na Fig. 2.

Figura 2 – Concepção artística frequente para o diagrama de fases da QCD.



Fonte: Imagem retirada do site de Nuclotron-based Ion Collider fAcility (2023).

Uma das questões fundamentais que visamos responder é “quais são as fases da matéria sob a interação nuclear forte?” A QCD prevê que, no momento em que a matéria nuclear é comprimida além da densidade do núcleo atômico, um plasma de quarks e glúons QGP surge, e esse sistema é formado por quarks e glúons assintoticamente livres. A mesma transição de fases é também prevista pela QCD a temperaturas extremas, como as encontradas no universo primordial. Logo, sob condições extremas de densidade e/ou temperatura, a matéria hadrônica deve sofrer uma transição de fases, do estado hadrônico (ou nucleônico) para um estado de QGP.

Quando o potencial químico bariônico μ_B for elevado, é possível aplicar métodos não-perturbativos da QCD. Neste regime, o estado fundamental em baixas temperaturas deve consistir em fases supercondutoras de cor (CSC, do inglês *color superconducting*) (RAJAGOPAL; WILCZEK, 2000; ALFORD et al., 2008). Nesse estado, segundo estudos não-perturbativos da QCD, se formariam pares de Cooper, que no contexto da QCD são estruturas conhecidas como diquarks (DUARTE, 2018). Além disso, em um conjunto de baixas, ou pequenos valores de temperaturas, espera-se uma transição de fase de primeira ordem da matéria hadrônica para as fases CSC. Com base em várias abordagens que estudam o diagrama de fases a μ_B finito, é esperado que a transição suave, observada nas simu-

lações de LQCD a $\mu_B = 0$, se transforme numa transição descontínua em algum ponto crítico. Este ponto crítico final (CEP, do inglês *critical endpoint*), no qual a transição de fase quiral mudaria de natureza, é um marco fundamental do diagrama de fases da QCD, permanecendo a sua localização e mesmo a sua existência uma questão em aberto até os dias atuais (FERREIRA, 2015). Existem ainda estudos da QCD na presença de um potencial químico que mede o desbalanceamento quiral, μ_5 , onde o problema de sinal não existe, permitindo simulações de Monte Carlo na rede, contrário ao que ocorre em sistemas com potencial químico bariônico μ_B . Esta é uma abordagem um pouco menos explorada, mas que pode gerar interessantes resultados, uma vez que as simulações de rede com μ_5 (BRAGUTA et al., 2015) podem ser utilizadas para comparar diferentes modelos na literatura. Uma revisão da nossa compreensão atual da estrutura de fase da QCD pode ser encontrada no trabalho de Fukushima e Hatsuda (2010). Uma forma de explorar a região de baixa temperatura e elevado potencial químico (poucas vezes a densidade de saturação nuclear, $\rho_0 \approx 0,16 \text{ fm}^{-3}$) é feita por meio de observações astrofísicas. Em particular, a observação das propriedades das estrelas de nêutrons, tais como o seu raio e massa, nos permite impor restrições para a equação de estado (EOS) da matéria densa da QCD (COMMITTEE, 2008).

1.3 O DESBALANCEAMENTO QUIRAL

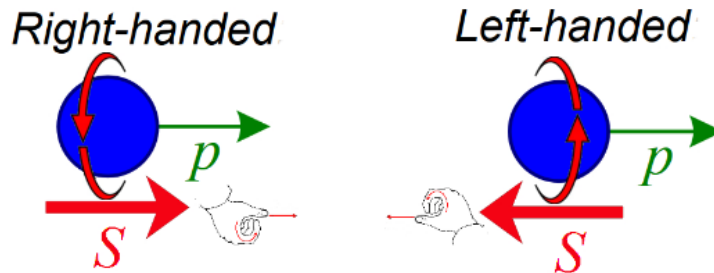
Na Mecânica Quântica há uma propriedade intrínseca às partículas fundamentais, conhecida como spin, que está relacionada ao momento angular da partícula. Para as partículas que não possuem massa, a orientação do seu spin definirá sua helicidade, de modo que se definem as partículas como sendo de mão direita ou de mão esquerda. Assim, a helicidade é basicamente a projeção do *spin* \vec{s} com relação à direção do momento linear \vec{p} , definida como:

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s} \cdot \vec{p}|}. \quad (1.6)$$

Na Fig. 3, é possível ver uma representação cartunesca de duas partículas aleatórias, o sentido do movimento dessas partículas é para a direita. O *spin* dessas partículas é representada pela seta vermelha, enquanto o momento linear por uma seta verde. No momento que, o spin da partícula possui sua orientação igual à de seu movimento, denomina-se que esta é uma partícula de mão direita (helicidade positiva), ao passo que, quando a orientação do *spin* é oposta ao seu movimento, essa é uma partícula de mão esquerda (helicidade negativa). Esta definição é embasada na regra da mão direita como pode ser visto na Fig. 3. Ao apontar o polegar na direção do movimento da partícula e os outros

dedos na direção que aponta o *spin* a partícula será de mão direita, enquanto quando o polegar apontar no sentido aposto do movimento, a partícula é de mão esquerda.

Figura 3 – Representação cartunesca do *spin* e direção do movimento de uma partícula de mão esquerda e outra de mão direita. As setas vermelhas representam o *spin*; as setas verdes representam o momento.

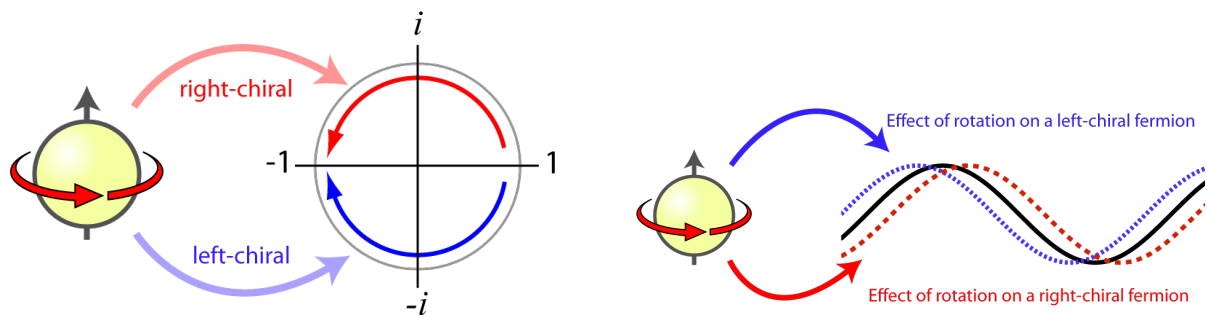


Fonte: Figura retirada do trabalho de Motta (2020).

Partículas como, por exemplo, os fótons que não possuem massa, movem-se à velocidade da luz, de maneira que não é possível definir um referencial onde estas partículas estejam em repouso. Note que, caso fosse invertido o sentido do seu movimento, a helicidade também mudaria. No entanto, partículas massivas se movem a velocidades menores, e assim é possível definir um referencial no qual as mesmas estariam em repouso com relação ao observador. Se o referencial em questão possuir uma velocidade maior do que a partícula, aparentemente a mesma iria se mover em direção oposta ao observador. Isto não iria causar absolutamente nada na orientação do *spin* da partícula, porém na sua helicidade com certeza. Desse jeito, se a partícula não é ou é massiva, diz se a helicidade é ou não uma propriedade intrínseca, visto que, ao mudar o referencial, é possível obter diferentes resultados para esta propriedade quando as partículas são massivas. Logo, é necessária uma propriedade que seja igual a helicidade para partículas não massivas, e, ao mesmo tempo, proporcione uma medida igual para todos os observadores, para uma mesma partícula, em qualquer referencial (DUARTE, 2018). Em vista disso, é mais adequado utilizar o conceito de quiralidade, apesar de um pouco mais complexo, sua definição é próxima à da helicidade, uma vez que as partículas que possuem quiralidade também são classificadas como de mão esquerda e mão direita. Infelizmente, a quiralidade é um pouco mais complicada de definir, como dito anteriormente. Já que é um fenômeno puramente quântico sem análogo clássico, mas inicialmente pense em um férmion, que possui *spin* 1/2. No momento que, este férmion é rotacionado em um ângulo de 360°, obtém-se o estado inicial com o sinal alterado (e não igual ao inicial), e este sinal trocado é relacionado à interferência quântica (DUARTE, 2018). A quiralidade de um férmion afirma como obter esse sinal menos ou trocado em termos de um número complexo, como visto no plano complexo da Fig. 4. No painel à esquerda nessa mesma figura é possível observar o

plano complexo à direita neste mesmo painel, que representa a fase complexa do estado quântico da partícula, a qual se move ao longo do círculo conforme a partícula rotaciona, e o significado físico desta fase complexa está relacionado à sua função de onda (DUARTE, 2018). Ao girar um férmion, o deslocamento da função de onda dessa partícula depende de sua quiralidade, esse efeito é visto no painel da direita da Fig. 4.

Figura 4 – **Esquerda:** Efeito matemático da quiralidade de um férmion no plano complexo associado ao estado quântico. **Direita:** Efeito físico quiralidade em sua função de onda.



Fonte: quantumdiaries.org (Domínio Público.)

O desbalanceamento quiral é a diferença entre o número de quarks de mão esquerda e de mão direita em um sistema físico, que está relacionada com a propriedade intrínseca chamada de quiralidade explicada anteriormente. Este fenômeno pode ser observado com certa regularidade nas colisões de íons pesados. Testes de correlação hadrônicas nestas colisões não-centrais mostram um sinal da separação das cargas elétricas previstas por Kharzeev (2006) como uma assinatura de flutuações, paridade e carga-paridade na matéria sujeita à interação intensa. Os estudos subsequentes aprimoraram a compreensão teórica sobre esse fenômeno, conhecido como *Chiral Magnetic Effect* (CME) em colisões periféricas de íons pesados (FUKUSHIMA; KHARZEEV; WARRINGA, 2008; KHARZEEV; MCLERRAN; WARRINGA, 2008). Um bom artigo de revisão para entender mais sobre o desbalanceamento quiral é o de Yang et al. (2020).

Os problemas da cromodinâmica quântica que envolvem o desbalanceamento quiral ainda não são muito explorados e podem gerar uma variedade de trabalhos no futuro. O potencial químico quiral, μ_5 , que mede o desbalanceamento entre os quarks de “mão esquerda” e de “mão direita”, está intimamente relacionado com a formação do condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Uma vez que o aumento de μ_5 caracteriza um aumento da massa dinâmica dos quarks, era esperado que a temperatura crítica T_c do sistema também crescesse com μ_5 . Os cálculos da QCD na rede já apresentavam este aumento (BRAGUTA et al., 2015), mas todos os modelos quirais muito bem estabelecidos nos estudos de quebra e restauração de simetria quiral, previam uma queda de T_c (FUKUSHIMA; KHARZEEV; WARRINGA, 2008; RUGGIERI, 2011; CHAO; CHU; HUANG, 2013) com μ_5 .

2 DESCRIÇÃO DA QCD POR MODELOS EFETIVOS

Uma forma de trabalhar com a Cromodinâmica Quântica na sua região não perturbativa é por meio de modelos efetivos. Esses modelos buscam reproduzir o máximo possível da fenomenologia da QCD como, por exemplo, suas simetrias. Dessa forma, nesta dissertação de mestrado foram estudados dois modelos específicos. O primeiro deles, o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), que possui somente a quebra da simetria quiral, e posteriormente, o modelo de Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL), que além de possuir a quebra da simetria quiral, inclui também o confinamento dos quarks.

2.1 MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

O modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) foi introduzido nos anos 60 em dois trabalhos originais (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a), (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b), e até os dias atuais é um dos modelos efetivos mais amplamente utilizados na literatura. Inicialmente, foi proposto para explicar o surgimento da massa dos núcleons (prótons e nêutrons), e mais tarde, com o advento da QCD, foi reinterpretado em termos de graus de liberdade de quarks. Além disso, para explicar o surgimento da massa dos núcleons, o NJL foi o primeiro modelo com a quebra dinâmica de simetria em teoria quântica de campos (MIRANSKY, 1994). Nos trabalhos citados anteriormente de Yoichiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio foi feita uma analogia entre o fenômeno de quebra da simetria quiral e o mecanismo BCS da supercondutividade (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957). Posteriormente o NJL foi desenvolvido para estudar a restauração dessa simetria em temperatura e densidade finita, isso pode ser consultado em um ótimo artigo de revisão de Buballa (2005).

No modelo NJL interpretamos os campos fermiônicos ψ , que aqui são bispinores de Dirac, e não tripletos (apenas possui quarks u e d), como graus de liberdade de quarks, de modo a demonstrar a troca de glúons entre quarks e antiquarks pelo surgimento de uma força atrativa, que é possível ser associada ao mecanismo que gera massa para os hádrons e quebra espontaneamente a simetria quiral (DENKE, 2015). É necessário mencionar que vários autores classificam a quebra da simetria quiral como uma quebra **dinâmica**. Não há problema em utilizar qualquer uma das duas classificações, uma vez que a quebra dinâmica é um caso particular da quebra espontânea de simetria (DUARTE, 2018).

O modelo NJL é uma teoria não renormalizável, com seus graus de liberdade sendo férmions e a interação original da QCD quark-glúon, é uma interação de 4 férmions em um ponto no NJL, feita na aproximação de campo médio, no entanto, podem ser utilizadas

outras aproximações. Geralmente não é possível resolver o modelo de maneira puramente analítica. Porém, algumas características, como a quebra de simetria no vácuo e a sua restauração no meio, fazem do modelo NJL mais simples na aproximação de campo médio. Isso pode ser visto com mais detalhes no Apêndice D.

No mesmo Apêndice D foi mostrada a obtenção do potencial termodinâmico partindo da densidade Lagrangiana do modelo, na versão com simetria SU(2) e utilizando o trabalho de Nambu e Jona-Lasinio (1961a),

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2], \quad (2.1)$$

em que m_c é a massa de corrente dos quarks e G a constante de acoplamento escalar. Temos ainda a matriz de Dirac γ_5 definida no Apêndice A, e τ são as matrizes de Pauli, definidas no espaço de isospin, necessários para descrição dos quarks leves. Com isso, a expressão final para o potencial termodinâmico será (BUBALLA, 2005):

$$\Omega(M, T, \mu) = \frac{(M - m_c)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ E_k + T \ln [1 + e^{-\beta E_k^-}] + T \ln [1 + e^{-\beta E_k^+}] \right\}, \quad (2.2)$$

na qual a relação de dispersão é dada por $E_k^\pm = \sqrt{k^2 + M^2} \pm \mu$, M é a massa efetiva dos quarks, T e μ a temperatura e o potencial químico do sistema, respectivamente. Além disso, $N_c = 3$ e $N_f = 2$, são os números de cor e de sabor dos quarks respectivamente. Foi utilizado a aproximação de isospin, ou seja, a massa de corrente dos quarks é a mesma $m_u = m_d \equiv m_c$. Essas definições foram usadas aqui no NJL e também valem para a seção 3.2 no contexto do PNJL. A integral do primeiro termo na Eq. (2.2) é divergente no regime do ultravioleta e necessita de regularização. A explicação para a divergência ultravioleta segue o seguinte raciocínio. Em física teórica, normalmente é possível separar os fenômenos físicos em escala de energia ou escala de distância. A teoria de grupo de renormalização é baseada neste paradigma e é a chave para entender a invariância de escala nos fenômenos críticos de equilíbrio e dinâmicos (BAUERSCHMIDT; BRYDGES; SLADE, 2019). A física do ultravioleta (UV) a curta distância não tem um impacto significativo nas características qualitativas da física do infravermelho (IR, sigla do inglês *infrared*) a longa distância, e vice-versa. Esta separação de escalas mantém-se na teoria quântica de campos como pode ser visto com mais detalhes no trabalho de Minwalla, Raamsdonk e Seiberg (2000). Na literatura, a forma mais usual de fazer isso é multiplicando o integrando por uma função *theta* de *heaviside* $\theta(k - \Lambda)$ (BUBALLA, 2005). Após fazer a transformação para coordenadas esféricas será obtido

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \theta(k - \Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} E_k, \quad (2.3)$$

que agora é uma integral finita, tornando-se possível resolvê-la de zero até um *cutoff* tridimensional Λ , que passa a ser um parâmetro do modelo.

Neste contexto, a regularização faz com que o modelo possua três parâmetros livres a serem definidos: a constante de acoplamento (G), a massa de corrente (m_c) e o valor do *cutoff* 3D (Λ). Esses parâmetros são ajustados conforme os valores de três observáveis obtidos experimentalmente ¹: a massa do pión m_π , a constante de decaimento do pión f_π e o valor esperado do condensado de quarks no vácuo $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (BUBALLA, 2005; KLEVANSKY, 1992). De maneira geral é preciso resolver as seguintes equações

$$\frac{m_c}{M} = 4GN_c N_f m_\pi^2 I_1(m_\pi^2), \quad (2.4)$$

$$f_\pi^2 = 2N_c N_f M^2 I_1(0), \quad (2.5)$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{M - m_c}{4G}, \quad (2.6)$$

com $I_1(q)$ sendo dado no espaço de Minkowski por

$$I_1(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)[(p+q)^2 - M^2]}. \quad (2.7)$$

Note que as equações anteriores são escritas em termos da massa efetiva dos quarks M , que é obtida a partir da equação de *gap*, ou seja, pelo processo de minimização do potencial termodinâmico no vácuo ($T = \mu = 0$), e dada pela seguinte expressão

$$M = m_c + 4GN_c N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (2.8)$$

As quantidades m_π , f_π e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, podem ainda ser associadas à massa de corrente dos quarks com base na relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GELL-MANN; OAKES; RENNER, 1968)

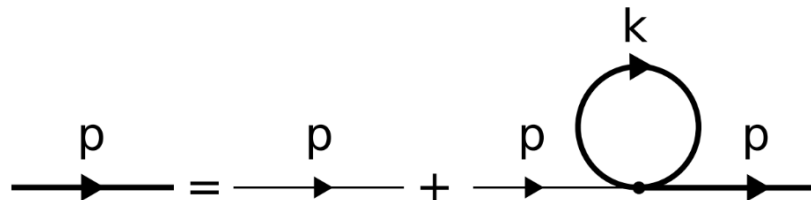
¹Os valores da massa do pión m_π e da constante de decaimento do pión f_π são obtidos experimentalmente (AAMODT et al., 2010). Já o condensado quiral é obtido por meio de regras de soma, modelos efetivos e teorias efetivas (DOSCH; NARISON, 1998).

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_c \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (2.9)$$

Para realizar o estudo no limite quiral, com $m_c = 0$, é necessário observar que a Eq. (2.4) irá se anular, de modo que teremos dois parâmetros e duas equações. Isto também ocorre porque o pión faz o papel do modo de Goldstone, permanecendo sem massa ao longo da fase com quebra de simetria quiral. Ou seja, a simetria quiral, que é uma simetria fundamental das interações fortes, tem o pión como pseudo-bóson de Goldstone relacionado à sua quebra espontânea.

É possível relacionar a massa efetiva com condensado quiral de quarks da seguinte forma $M = m_c - 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Primeiramente, é necessário derivar a massa efetiva na aproximação de campo médio. Será atribuído um único quark com massa de corrente m_c . Ao acoplar-se a si mesma através do canal escalar e pseudo-escalar (conforme acrescentado a densidade Lagrangiana), m_c ganha uma massa efetiva M , conhecida como massa constituinte dos quarks. Por uma técnica conhecida em teoria quântica de campos como diagramas de Feynman, amplamente utilizada em física nuclear e de partículas. Com isso, pela necessidade de uma equação autoconsistente é necessária a representação da Fig. 5

Figura 5 – Equação autoconsistente diagramática, que envolve os propagadores de quark *dressed* (linha em negrito) e *bare* (linha fina) e um *loop* de autoenergia. Com p e k sendo os momentos.



Fonte: Figura retirada do trabalho de revisão de Buballa (2005).

Considerando a Fig. 5, é possível escrever a equação autoconsistente,

$$iS(p) = iS_0(p) + iS_0(p)(-i\Sigma)iS(p). \quad (2.10)$$

O propagador de quark *bare* na Eq. 2.10, com massa de corrente m_c é dado por

$$iS_0(p) = i \frac{\not{p} + m_c}{p^2 - m_c^2 + i\epsilon}, \quad (2.11)$$

e o propagador para um quark *dressed* com massa constituinte ou efetiva M é definido

como

$$iS_0(p) = i \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (2.12)$$

Define-se a parte autoenergia de tal modo que Σ é real. A autoenergia pode ser expressa por $2iG$ vezes a soma de produtos externos de cada canal de interação (BUBALLA, 2005). Além disso, é feito uma integração sobre o momentum livre k no propagador de quark *dressed* do *loop*. O sinal negativo aparece devido ao *loop* de férmion. Logo, teremos:

$$-i\Sigma = -i2G \left\{ \mathbb{1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\mathbb{1}iS(k)] + i\gamma_5\tau_a \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5\tau_a iS(k)] \right\}. \quad (2.13)$$

No momento que é resolvido o traço, todos os termos que envolvem as matrizes de Pauli ou os números ímpares das matrizes gamma são eliminados. Assim, um fator $4N_cN_f$ ocorre devido à matriz identidade no espaço de Dirac de sabor e cor. Resultando no seguinte termo para a autoenergia (BUBALLA, 2005):

$$\Sigma = 2G4N_cN_fMi(M), \quad (2.14)$$

com a seguinte integral,

$$I(M) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (2.15)$$

Vale lembrar que tudo isso foi feito no vácuo, ou seja $T = \mu = 0$.

Agora é possível definir o condensado quiral ou condensado de quarks, que surge da interação escalar na densidade Lagrangiana, dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} S(k), \quad (2.16)$$

que aqui comparando com a Eq. 2.13 se relaciona com a massa efetiva M da seguinte forma:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{M - m_c}{2G}. \quad (2.17)$$

2.2 MODELO NJL COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL

No trabalho de Fukushima, Kharzeev e Warringa (2008), foi introduzido um potencial químico quiral (ou axial) μ_5 , o qual é o conjugado para a densidade de carga quiral. Este potencial químico foi introduzido como um artifício matemático para estudar o efeito magnético quiral. À medida que a temperatura aumenta, a matéria de interação forte passará por uma fase de desconfinamento, que seria a transição de matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons (MEYER-ORTMANN, 1996). Como as configurações do campo de *gauge* não trivial interagem com os férmions e invertem suas helicidades, a carga quiral Q_5 pode ser gerada durante a transição de fase. Alguns estudos mostram que, em colisões de íons pesados, a densidade de carga quiral atinge o equilíbrio termodinâmico logo após a colisão e mantém esse equilíbrio por um tempo comparativamente longo (RUGGIERI; PENG; CHERNODUB, 2016; RUGGIERI; PENG, 2016; RUGGIERI; CHERNODUB; LU, 2020).

Portanto, para entender melhor a transição de fase em colisões de íons pesados, é necessário estudar os efeitos do desbalanceamento quiral na estrutura de fase QCD. Como mencionado antes, é possível introduzir o potencial químico quiral μ_5 para simular o desequilíbrio quiral entre quarks de mão esquerda e os de mão direita. Em termos da densidade Lagrangiana efetiva, os seguintes termos devem ser adicionados a \mathcal{L}_{NJL} dada pela Eq. (2.1)²:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{NJL} + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_{\mu_5}, \quad (2.18)$$

em que os dois termos adicionais na Eq. (2.18) são dados por,

$$\mathcal{L}_\mu = \bar{\psi} \mu \gamma^0 \psi, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_{\mu_5} = \bar{\psi} \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 \psi. \quad (2.20)$$

Assim é construída a densidade Lagrangiana efetiva com os potenciais químicos μ e quiral μ_5 incluídos,

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_c + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 + \mu \gamma^0) \psi + G [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma_5 \tau \psi)^2], \quad (2.21)$$

cujas definições são as mesmas de Eq. (2.1). A partir da densidade lagrangiana efetiva

²Denomina-se lagrangiana efetiva porque a densidade Lagrangiana é dada de forma padrão, ou seja, a diferença da energia cinética e da energia potencial.

do modelo é possível obter o potencial termodinâmico na aproximação de campo médio, definido como no trabalho de Farias et al. (2016). A obtenção do potencial termodinâmico foi feita para o caso do sistema possuindo apenas temperatura T e potencial químico μ no Apêndice D conforme feito, por exemplo, por Buballa (2005). No entanto, no futuro será realizado esse mesmo cálculo com μ_5 utilizando o formalismo conhecido como Nambu-Gorkov, abordagem que pode ser consultada com maior detalhe na tese de doutorado de Duarte (2018). Portanto, considerando esses pontos, o potencial termodinâmico com desbalanceamento quiral, no contexto do NJL, é dado por:

$$\begin{aligned} \Omega_{NJL}(M, T, \mu_5, \mu) = & \frac{(M - m_c)^2}{4G} + \Omega_V - 2N_f N_c T \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln[1 + e^{-(\omega_s(k)+\mu)/T}] \right. \\ & \left. + \ln[1 + e^{-(\omega_s(k)-\mu)/T}] \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que Ω_V será definido na seção a seguir, segundo o esquema de regularização utilizado, e as definições de Eq. (2.22), sendo as mesmas da Eq. (2.2). No entanto, a relação de dispersão agora é dada por $\omega_s(k) = \sqrt{(k + s\mu_5)^2 + M^2}$, e os autovalores do operador de Dirac tem helicidade $s = \pm 1$, como feito por Fukushima, Kharzeev e Warringa (2008). Para obtenção da massa efetiva M dos quarks é necessário minimizar o potencial termodinâmico dado pela Eq.(2.22), e resolver a equação de gap definida como

$$\frac{\partial \Omega(M, T, \mu_5, \mu)}{\partial M} = 0. \quad (2.23)$$

2.3 ESQUEMAS DE REGULARIZAÇÃO DO VÁCUO DO MODELO

No *Traditional Regularization Scheme* (TRS), regularizamos as integrais de momento k com um *cutoff* 3D, Λ . Então a contribuição do vácuo do potencial termodinâmico neste esquema de regularização tem a seguinte forma,

$$\Omega_V^{TRS} = -N_f N_c \sum_{s=\pm 1} \int_0^\Lambda \frac{k^2}{(2\pi^2)} \omega_s(k) dk. \quad (2.24)$$

O *Medium Separation Scheme* (MSS) é baseado na ideia de que todas as divergências no modelo estão no vácuo como visto no trabalho de Farias et al. (2016). Assim, a contribuição do vácuo neste esquema de regularização é

$$\begin{aligned} \Omega_V^{MSS} = & -2N_c N_f \left\{ \frac{M^2}{2} I_{quad} + \left[\mu_5^2 M^2 - \frac{M^4}{4} + \frac{M^2 M_0^2}{2} \right] \frac{I_{log}}{2} \right. \\ & \left. - \frac{3M^4}{64\pi^2} + \frac{M^2 M_0^2}{16\pi^2} + \frac{M^2}{8\pi^2} \left[\frac{M^2}{4} - \mu_5^2 \right] \ln \left(\frac{M^2}{M_0^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sendo M_0 a massa dos quarks no regime de $T = \mu = \mu_5 = 0$. As definições restantes são:

$$I_{quad}(k, M_0) = \int_0^\Lambda \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + M_0^2}}, \quad (2.26)$$

$$I_{log}(k, M_0) = \int_0^\Lambda \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{dk}{(k^2 + M_0^2)^{3/2}}. \quad (2.27)$$

Foi utilizado o trabalho de (FARIAS et al., 2016) para definir os parâmetros do modelo como $m_c = 5,37$ MeV, $G = 4,75$ GeV⁻², $\Lambda = 660$ MeV, reproduzindo as entradas experimentais $f_\pi = 92,3$ MeV, $m_\pi = 140$ MeV e $|\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle|^{1/3} = -250$ MeV.

2.4 QUANTIDADES TERMODINÂMICAS

A partir do potencial termodinâmico dado pela Eq. (2.22) é possível obter as quantidades termodinâmicas que analisaremos, tais como a pressão normalizada,

$$p_N(M, T, \mu, \mu_5) = -[\Omega(M, T, \mu, \mu_5) - \Omega(\tilde{M}_0, 0, \mu, \mu_5)], \quad (2.28)$$

aqui \tilde{M}_0 é feita em $T = 0$, ainda assim, dependendo de μ e μ_5 . As outras definições são a densidade de entropia,

$$s(M, T, \mu, \mu_5) = - \left[\frac{\partial \Omega(M, T, \mu, \mu_5)}{\partial T} \right]_{\mu, \mu_5}, \quad (2.29)$$

a densidade de energia,

$$\varepsilon(M, T, \mu, \mu_5) = T s(M, T, \mu, \mu_5) - p_N(M, T, \mu, \mu_5) + \mu_5 n_5(M, T, \mu, \mu_5), \quad (2.30)$$

e ainda a densidade quiral,

$$n_5(M, T, \mu, \mu_5) = \frac{\partial p_N(M, T, \mu, \mu_5)}{\partial \mu_5}. \quad (2.31)$$

Em altas temperaturas espera-se que o sistema convirja para o limite de Stefan-Boltzmann (SB) (COSTA et al., 2010). Neste limite, cada quantidade termodinâmica possui uma dependência funcional diferente com a temperatura, definida em $\mu = \mu_5 = 0$. Abaixo estão dados estes limites para a pressão, densidade de entropia e densidade de energia, respectivamente.

$$p_{SB} = N_c N_f T^4 \frac{7\pi^2}{180} \quad (2.32)$$

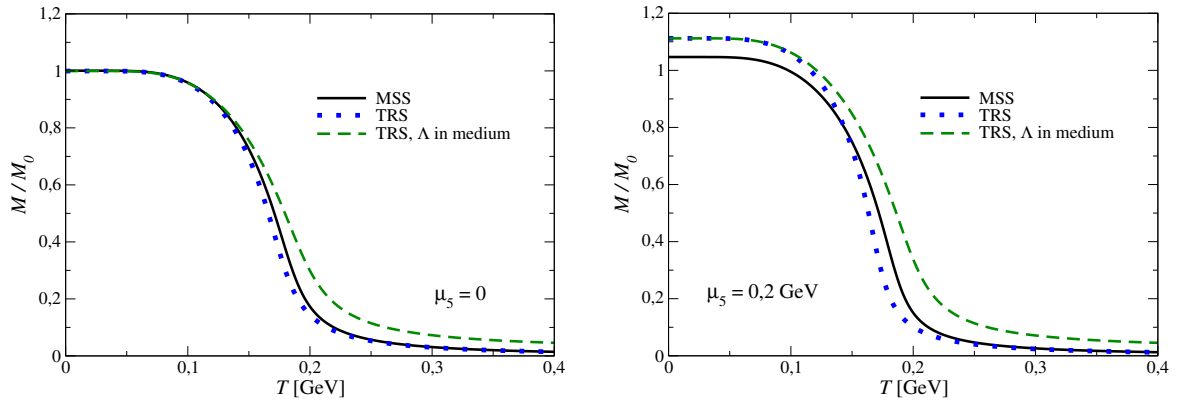
$$s_{SB} = N_c N_f T^3 \frac{7\pi^2}{180} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{SB} = N_c N_f T^4 \frac{7\pi^2}{180}. \quad (2.34)$$

2.5 RESULTADOS

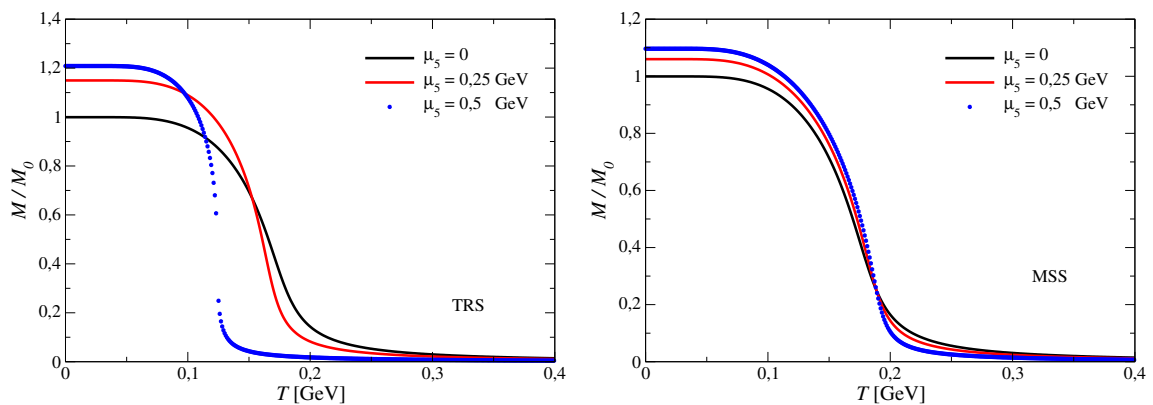
Os resultados obtidos aqui foram reproduzidos pelo autor seguindo o trabalho de Farias et al. (2016). Além disso, para o TRS, além de fazer apenas a regularização usual nos termos divergentes, utilizamos o mesmo *cutoff* 3D também as integrais térmicas, a fim de verificar os efeitos de se regularizar termos de meio, e comparamos os resultados dos dois casos com os do MSS. Os resultados a seguir são todos no contexto de $\mu = 0$.

Figura 6 – **Esquerda:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T com potencial químico quiral nulo, comparando os diferentes métodos de regularização. **Direita:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T com potencial químico quiral finito, comparando os diferentes métodos de regularização.



Fonte: Próprio autor.

Figura 7 – **Esquerda:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T para diferentes valores de μ_5 e o esquema de regularização TRS. **Direita:** Massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T para diferentes valores de μ_5 e o esquema de regularização MSS.



Fonte: Próprio autor.

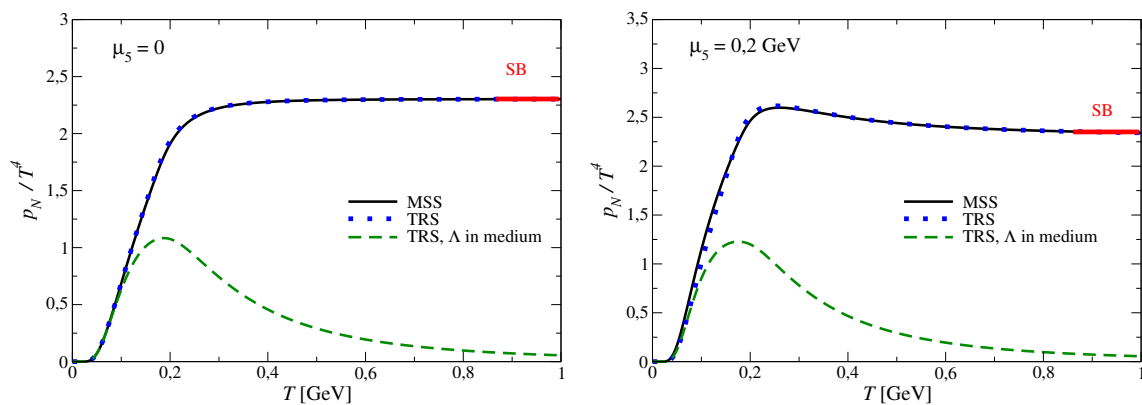
Os resultados da Fig. 6 mostram o comportamento da massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T , com os diferentes métodos de regularização analisados neste estudo. Além disso, analisamos os valores dessas quantidades à potencial químico quiral nulo ($\mu_5 = 0$) e o seu valor finito ($\mu_5 = 0,2$ GeV), respectivamente. Para ambos os painéis o comportamento da massa efetiva com relação à temperatura é decrescente. Como foi discutido em seções anteriores, o modelo NJL

apresenta quebra da simetria quiral, e isso, é o que observamos tanto na Fig. 6 quanto na Fig. 7. Cabe lembrar aqui que o verdadeiro parâmetro de ordem é o condensado quiral, que se relaciona com a massa efetiva por $M = m_c - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$. O condensado quiral é um exemplo de um condensado fermiônico, que surge na teoria de férmions não massivos com a quebra da simetria quiral, mecanismo responsável pela geração de grande parte da massa do universo visível. No entanto, utilizamos neste projeto, a massa efetiva dos quarks, que está relacionada com o condensado quiral, como parâmetro de ordem. Os quarks possuem uma certa massa no vácuo (M_0), que utilizando os parâmetros de Farias et al. (2016), é em torno de $M_0 = 0,302$ GeV. Ao aquecer nosso sistema, essa massa começa a diminuir e converge para a massa de corrente, em torno de $m_c = 5,37$ MeV. Além disso, comparamos na Fig. 6 os diferentes esquemas de regularização do modelo para potencial químico quiral nulo, e ambos TRS e MSS apresentaram comportamentos muito próximos. Outro tratamento possível é cortar as integrais térmicas com o mesmo *cutoff* 3D Λ usado nas integrais divergentes no método TRS. Posteriormente discutiremos melhor o efeito deste tratamento nas quantidades termodinâmicas. Por enquanto, podemos notar que ao utilizar esse tratamento para ambos os casos $\mu_5 = 0$ e $\mu_5 = 0,2$ GeV a restauração da simetria quiral ocorre para um valor maior de temperatura com relação aos esquemas MSS e TRS. Por fim, no caso $\mu_5 = 0,2$ GeV notamos que para cada um dos métodos, MSS, TRS e TRS, Λ *in medium* as curvas começam no vácuo com valores respectivos de Massas efetivas, sendo $M_0 = 0,316$ GeV para o MSS, $M_0 = 0,335$ GeV para o TRS sem Λ e com Λ no meio.

Na Fig. 7 é possível ver para cada esquema de regularização à **esquerda** TRS e à **direita** MSS, a relação da massa efetiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura T para diferentes potenciais químicos quirais μ_5 . No caso do TRS, conforme a temperatura e o potencial químico quiral aumentam, mais especificamente em torno de $\mu_5 = 0,5$ GeV (curva em azul no gráfico da esquerda), há um decrescimento da massa como esperado. Porém, ao atingir uma determinada temperatura em torno de $T_{pc} = 0,124$ GeV, há um “salto” o que denota uma transição do tipo primeira ordem. Além disso, iremos nomear aqui como temperatura pseudo-crítica T_{pc} , por depender de μ_5 sendo efetuada no limite físico, ou seja, $m_c \neq 0$. No entanto, segundo os resultados de QCD na rede da literatura (observe o trabalho de Braguta et al. (2015)), não há evidências de primeira ordem a temperatura e potencial químico quiral, mas sim um comportamento do tipo *crossover*. Isso mostra uma certa dificuldade do modelo NJL com o esquema TRS de descrever tal comportamento, o que também é observado em outros modelos quirais, como o sigma linear. Este comportamento foi corrigido utilizando outro método de regularização, conhecido como MSS, feito por Farias et al. (2016), e reproduzido aqui. Os autores mostraram que se regularizarmos os termos de meio da teoria de maneira correta como está disposto em Eq. (2.25), elimina-se a transição de primeira ordem que não existe comparando com outras abordagens como, por exemplo, a QCD na rede. Esse resultado

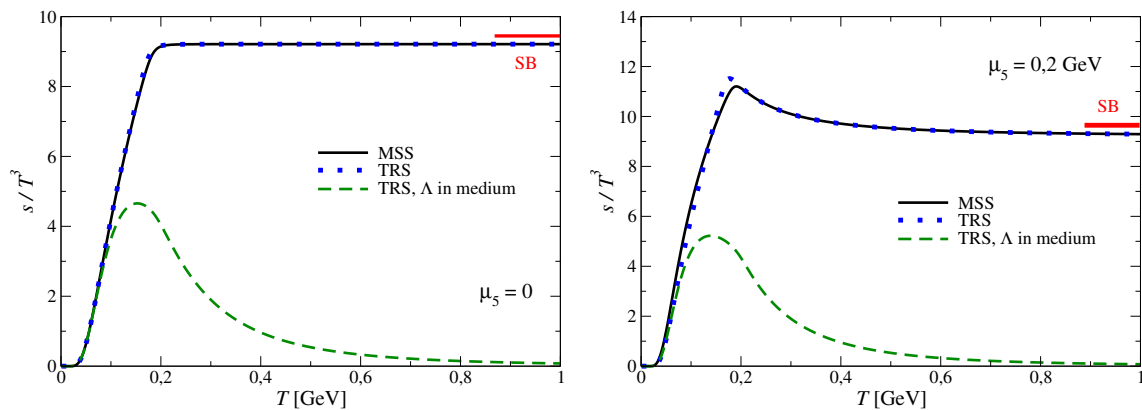
pode ser visualizado no gráfico da **direita** na Fig. 7. Além disso, é possível notar que no caso do MSS que comportamento de M/M_0 em função de T na região da restauração da simetria quiral conforme aumenta μ_5 no sistema é que as curvas ficam mais próximas uma das outras. Diferente do que o ocorre no TRS curvas mais afastadas uma das outras nessa mesma região. Vale ressaltar que a utilização do esquema TRS, Λ *in medium* viola a causalidade, como bem discutido por Pasqualotto et al. (2023).

Figura 8 – **Esquerda:** Pressão normalizada p_N em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularização e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Pressão normalizada p_N em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0,2$ GeV.



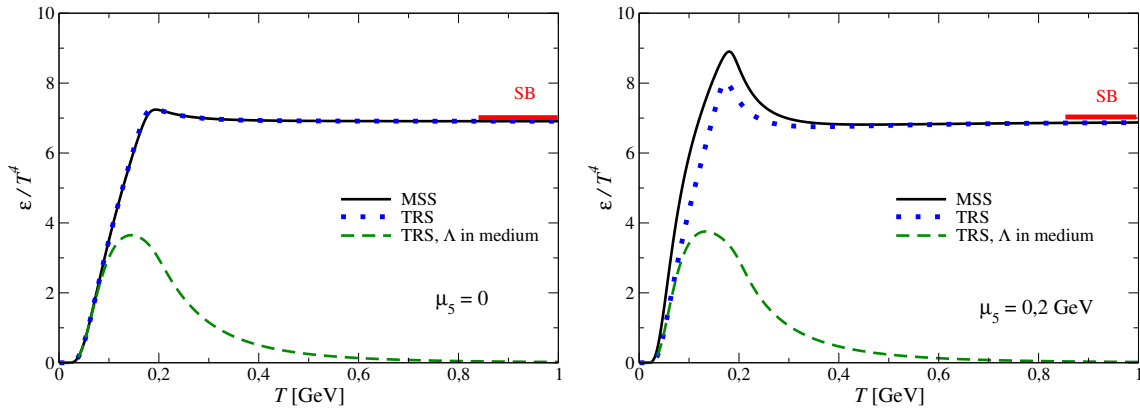
Fonte: Próprio autor.

Figura 9 – **Esquerda:** Densidade de entropia s em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularização e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Densidade de entropia s em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0,2$ GeV.



Fonte: Próprio autor.

Figura 10 – **Esquerda:** Densidade de energia ε em função da temperatura sob diferentes esquemas de regularizações e a $\mu_5 = 0$. **Direita:** Densidade de energia ε em função da temperatura sob diferentes esquemas da regularizações e a $\mu_5 = 0,2$ GeV.

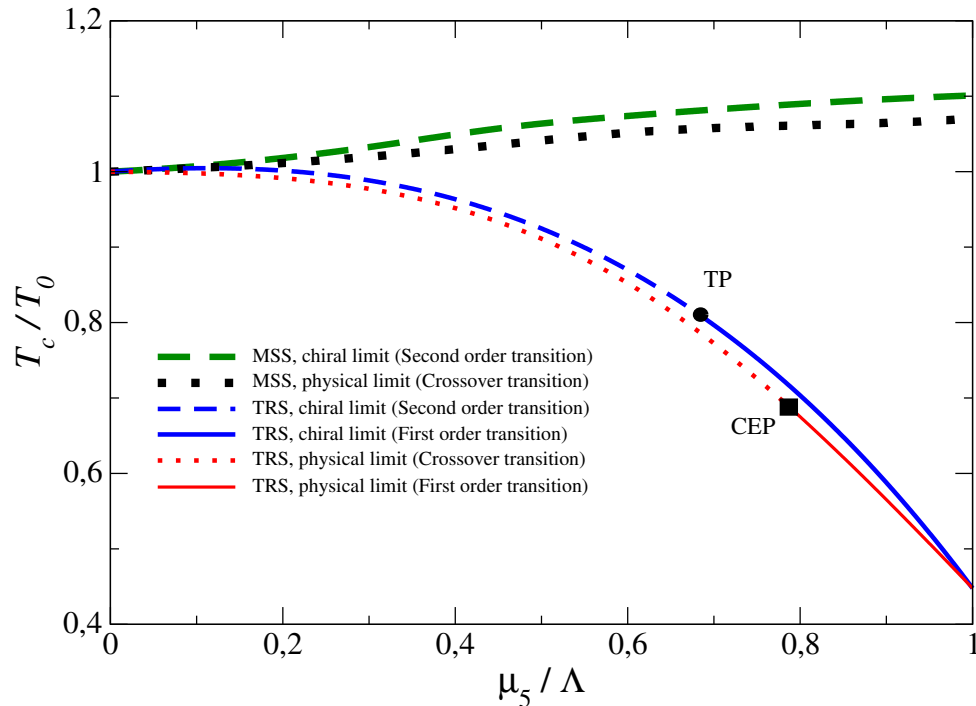


Fonte: Próprio autor.

Quantidades termodinâmicas obtidas a partir das equações para a pressão normalizada, Eq. (2.28), densidade de entropia, Eq. (2.29), densidade de energia, Eq. (2.30), em função da temperatura T , estão dispostas nos gráficos das Fig. 8, Fig. 9 e Fig. 10, respectivamente.

Em primeiro lugar, os gráficos da **esquerda** nas Fig. 8, Fig. 9 e Fig. 10, são todos para potencial químico quiral nulo. Esses resultados mostram que ao utilizar os esquemas de regularização MSS e TRS (curvas pretas e azuis), conforme a temperatura aumenta no sistema, há um aumento de cada quantidade como, por exemplo, pressão normalizada, densidade de entropia e densidade de energia. Os valores dessas quantidades são semelhantes para ambos MSS e TRS. Cada uma dessas quantidades cresce até chegar em uma determinada temperatura na qual seu valor passa a ser constante. Nessa região define-se o limite termodinâmico de Stefan-Boltzmann (SB), para o qual todas as quantidades termodinâmicas convergem em escalas de altas energias, veja a discussão e definições na seção 2.4. O cenário oposto é observado quando regularizamos as integrais térmicas com o valor do *cutoff* 3D, Λ (curvas tracejadas verdes). Nesse caso, as quantidades termodinâmicas crescem até um determinado valor, depois decrescem rapidamente, violando o limite de Stefan-Boltzmann. Por fim, os painéis da **direita** mostram a mesma análise, porém, para potencial químico quiral finito no caso $\mu_5 = 0,2$ GeV. Novamente, temos a violação do limite do Stefan-Boltzmann para as curvas tracejadas verdes (TRS, Λ in medium). Para o MSS e TRS (curvas pretas e azuis) em μ_5 finito, as quantidades termodinâmicas nos *plots* inicialmente excedem o limite de SB, mas em regimes de temperaturas altas, esse limite é recuperado.

Figura 11 – A temperatura crítica T_c , normalizada por $T_0 = T_c(\mu_5 = 0)$ em função de μ_5 . O ponto preto indica um ponto tricrítico (TP) no limite quiral, enquanto o quadrado indica o *Critical End-Point* (CEP), ambos no caso da regularização TRS.



Fonte: Próprio autor.

Na Fig. 11 é possível ver o resultado para a temperatura crítica de restauração da simetria quiral T_c em função de μ_5 para as duas formas de tratar as integrais divergentes. Esses resultados já são conhecidos na literatura. No TRS, encontramos no limite físico ($m_c \neq 0$, curva vermelha) um CEP que separa uma linha de *crossover* de uma transição de primeira ordem. Já no caso do limite quiral ($m_c = 0$, curva azul) encontramos um ponto tricrítico (TP), que separa uma linha de transição de fase de segunda de uma de primeira ordem. No entanto, para regularização MSS tanto a TP como o CEP estão ausentes. A transição nesse esquema de regularização no limite físico (curva preta) é um *crossover* (nota-se que neste caso T_c na Fig. 11 indica a temperatura pseudocrítica, no limite físico, com $m_c \neq 0$), enquanto, no limite quiral, ou seja, $m_c = 0$ (curva verde) a transição é de segunda ordem. Conforme o comportamento da Fig. 7, devido ao efeito do potencial químico quiral na restauração da simetria quiral, T_c decresce no TRS. Entretanto, no esquema MSS, podemos notar que T_c cresce em função de μ_5 concordando com Braguta et al. (2015), Braguta et al. (2016) e também com os mais sofisticados tratamentos não perturbativos, como feito por

Wang et al. (2015) e Xu et al. (2015). No que diz respeito a ausência de TP (no limite quiral) ou um CEP no esquema de regularização MSS, isto também se verifica em resultados anteriores obtidos pela QCD na rede, como visto por Yamamoto (2011).

Os resultados da QCD na rede, como os de Braguta et al. (2015) e Braguta et al. (2016), temos que tomar certo cuidado. Esses resultados foram obtidos para um valor alto para a massa do pión, $m_\pi = 418$ MeV, enquanto no trabalho que foram reproduzidos esses resultados (FARIAS et al., 2016), foi usado seu valor físico de $m_\pi = 140$ MeV. Sabe-se que algumas quantidades, por exemplo, o condensado de quarks sob influência de um campo magnético externo, podem depender fortemente da massa do pión. Desse modo, não podemos excluir uma possível existência de um CEP, nos resultados de QCD na rede, que poderia ser um artifício para altos valores de m_π utilizadas nesses estudos numéricos. Os valores para as temperaturas críticas obtidas durante esse trabalho estão na tabela abaixo:

Tabela 1 – As temperaturas críticas para os esquemas de regularização TRS e MSS no contexto do MSS.

	T_c <i>Chiral</i> (GeV)	T_{pc} <i>physical</i> (GeV)
TRS	0,165	0,177
MSS	0,169	0,183

O valor de T_c é obtido a partir da posição do pico da derivada do condensado com relação à temperatura;

$$\frac{\partial \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{\partial T}, \quad (2.35)$$

ou mais especificamente, da solução da derivada segunda do condensado quiral com relação à temperatura,

$$T_{pc} = \frac{\partial^2 \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{\partial T^2} = 0. \quad (2.36)$$

3 CONFINAMENTO NA QCD

3.1 MODELO DE POLYAKOV-NAMBU-JONA-LASINIO

Os modelos efetivos teóricos procuram descrever o máximo possível a teoria formal da QCD, ou seja, suas simetrias e fenomenologia. Alguns destes modelos são, por exemplo, o MIT *bag model* (CHODOS et al., 1974a; CHODOS et al., 1974b; DEGRAND et al., 1975), o modelo sigma linear (primeiramente utilizado para a interação entre mésons e núcleons) (GELL-MANN; LEVY, 1960) e o próprio modelo NJL apresentado em sua versão SU(2) na seção anterior. Os modelos NJL e sigma linear não possuem uma característica importante da interação forte, ou seja, a previsão de um possível desconfinamento dos quarks em distâncias muito curtas, ou de maneira mais específica, uma liberdade assintótica. Já no caso do modelo do MIT, por exemplo, os quarks estão confinados como se estivessem presos em uma “sacola”, com um termo constante na equação da pressão simulando tal efeito. No modelo sigma linear, os quarks são considerados “vestidos” pelas interações simuladas pela troca de mésons, e apenas a transição quiral é estudada. Da mesma forma, o modelo NJL também só pode tratar efetivamente a transição quiral. A fim de buscar aproximar ainda mais os modelos efetivos da teoria formal da QCD, é necessário considerar a possibilidade do confinamento dos quarks. Tal propriedade pode ser adicionada de forma fundamentalmente fenomenológica nos modelos a partir da inclusão do chamado laço (*loop*) de Polyakov. O PNJL possui o condensado quiral e o *loop* de Polyakov como parâmetros de ordem. Em teoria quântica de campos, o *loop* de Polyakov é o análogo termal para o *loop* de Wilson, servindo como um parâmetro de ordem para o confinamento e desconfinamento em teorias puras de *gauge* em temperaturas diferentes de zero.

3.1.1 Laço de Polyakov e simetria de centro

O modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio foi proposto por Fukushima (2004b), e essencialmente é uma extensão do modelo NJL, que envolve a introdução de efeitos do confinamento dos quarks. Além disso, o PNJL já foi explorado em diferentes contextos (RATTI; THALER; WEISE, 2006; RATTI; RÖSSNER; WEISE, 2007). Inicialmente será discutido sobre o chamado laço de Polyakov, definido como Laço de Wilson no espaço euclidiano (WILSON, 1974). O laço de Wilson fornece uma transformação de *gauge* entre dois pontos, definido por;

$$W(x, y) = \mathcal{P} \exp \left[\int_x^y dx^\mu A_\mu \right], \quad (3.1)$$

onde A_μ é um campo gluônico estático. No espaço euclidiano a integral na Eq. (3.1) pode alcançar uma mesma posição espacial \vec{x} em tempos euclidianos $\tau = 0$ e $\tau = \beta$. O laço de Polyakov é um *loop* fechado e o operador \hat{L} , é definido como uma linha de Wilson no espaço euclidiano;

$$\hat{L}(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right] = e^{i\beta A_4(\vec{x}, \tau)}, \quad (3.2)$$

e o complexo conjugado,

$$\hat{L}^\dagger(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[-ig \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right] = e^{-i\beta A_4(\vec{x}, \tau)}, \quad (3.3)$$

com \mathcal{P} representando o produto ordenado, e $A_4 = iA_0$ é a componente temporal euclidiana do campo A^μ . É interessante ressaltar aqui o formalismo de tempo imaginário, construído por meio da rotação de Wick (GREINER; REINHARDT, 1996b) $t \rightarrow -it_E$ e que produz as versões euclidianas das integrais funcionais, utilizadas no tratamento de uma teoria quântica de campos em temperatura finita (KAPUSTA; GALE, 2011; BELLAC, 2011). As associações entre mecânica quântica, mecânica estatística e teoria de campos à temperatura nula é efetuada através da prescrição $\beta \rightarrow it$. Uma vez que \hat{L} é calculado em um mesmo ponto do espaço, ele é compreendido como uma trajetória circular que conecta os pontos 0 e β em instantes diferentes.

O traço do laço de Polyakov é normalizado pelo número de cores ($N_c = 3$), como visto em (FERREIRA, 2015), sendo definido como:

$$\Phi \equiv \langle \Phi \rangle = \left\langle \frac{1}{N_c} \text{Tr}[L] \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\exp \left(i \int_0^\beta d\tau A_4 \right) \right] \right\rangle, \quad (3.4)$$

e seu complexo conjugado,

$$\Phi^\dagger \equiv \langle \Phi \rangle^\dagger = \left\langle \frac{1}{N_c} \text{Tr}[L^\dagger] \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\exp \left(-i \int_0^\beta d\tau A_4 \right) \right] \right\rangle. \quad (3.5)$$

Na prática, Φ é considerado um parâmetro de ordem do modelo na transição de confinamento e desconfinamento. Essa quantidade está intimamente relacionada com a simetria de centro $Z(N_c)$ visto em (WEISS, 1982; HOLLAND; WIESE, 2000). Discutiremos

posteriormente como Φ se relaciona com a simetria de centro.

Considere um sistema invariante de *gauge* descrito apenas por campos bosônicos. Os próximos passos foram feitos como na tese de doutorado de Filho (2011). Por exemplo, será abordada a QCD possuindo apenas glúons estáticos, ou seja, sua descrição será apenas pelo campo A_μ . Tais campos obedecem a seguinte transformação;

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(A_\mu + i\partial_\mu)U^\dagger, \quad (3.6)$$

com U sendo uma transformação local de *gauge*. Em teoria de campos à temperatura finita, tanto A_μ como A'_μ têm que satisfazer a condição de periodicidade (KAPUSTA; GALE, 2011), ou seja, devemos observar que;

$$A_\mu(0) = A_\mu(\beta), \quad (3.7)$$

$$A'_\mu(0) = A'_\mu(\beta). \quad (3.8)$$

Uma maneira de investigar a condição de periodicidade na Eq. (3.8) é assumir que U também obedeça à condição de periodicidade dada por $U(0) = U(\beta)$, com isso será obtido o seguinte;

$$A'_\mu(0) = U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) = A'_\mu(\beta). \quad (3.9)$$

Outra forma de preservar a Eq. (3.8), é adotar que U satisfaça à

$$U(0) = zU(\beta), \quad (3.10)$$

com $z = e^{2\pi ik/N_c}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Diante desta transformação e utilizando a Eq. (3.6), será obtido

$$\begin{aligned} A'_\mu(0) &= U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = zU(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)z^*U^\dagger(\beta) \\ &= e^{2\pi ik/N_c} e^{-2\pi ik/N_c} U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\ &= U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\ &= A'_\mu(\beta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os sistemas que mantêm a simetria de centro são aqueles nos quais os campos, sub-

metidos a transformações de *gauge* que obedecem à Eq. (3.10), mantêm-se conforme as condições de contorno periódicas ou antiperiódicas, sejam eles bosônicos ou fermiônicos respectivamente. Em relação ao exemplo anterior, tratamos A'_μ apenas como um campo bosônico de glúons. Percebemos que o valor esperado de Φ deixa de ser uma quantidade invariável, uma vez que ela se transforma por meio de:

$$\Phi = z\bar{\Phi}. \quad (3.12)$$

Não sendo invariante sobre uma simetria de centro global, é possível utilizar o valor esperado de Φ como parâmetro de ordem para a quebra espontânea desta simetria:

$$\Phi \implies \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{simetria restaurada (fase confinada)} \\ \neq 0 \rightarrow \text{simetria espontaneamente quebrada (fase desconfinada)}. \end{cases} \quad (3.13)$$

O valor de Φ pode ser escrito e definido como feito por McLerran e Svetitsky (1981), temos que

$$\Phi = e^{-F_q/T}, \quad (3.14)$$

com F_q sendo a energia livre de uma teoria pura de *gauge*, que contem quarks estáticos e isolados (SATZ, 2012). Na fase confinada, há uma quantidade infinita de energia livre, ou seja, $F_q \rightarrow \infty$, necessária para adicionar um quark isolado no sistema, logo $\Phi = 0$ e a fase de quarks é o confinamento. No momento que o valor da energia livre é finito, temos que $\Phi \neq 0$ ou seja, a fase de quarks é desconfinada e a simetria de centro é quebrada. Além disso, no limite de altas temperaturas (liberdade assintótica), espera-se um desconfinamento total dos quarks, ou seja, $\Phi = 1$.

Agora, quando o sistema possui quarks, existem campos fermiônicos que se transformam da seguinte forma;

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (3.15)$$

e ψ deve satisfazer as relações de antiperiodicidade (KAPUSTA; GALE, 2011) dadas por

$$\psi(0) = -\psi(\beta), \quad (3.16)$$

$$\psi'(0) = -\psi'(\beta). \quad (3.17)$$

Com isso, usando uma transformação de *gauge* que satisfaça a relação dada na Eq. (3.10), obtemos o seguinte resultado:

$$\psi'(0) = U(0)\psi(0) = -zU(\beta)\psi(\beta) = -z\psi'(\beta) \neq -\psi'(\beta). \quad (3.18)$$

Dessa maneira, o resultado acima, indica que os campos fermiônicos quebram explicitamente a simetria de centro e têm sempre $\Phi \neq 0$. O mesmo fenômeno ocorre com o parâmetro de ordem conhecido como o condensado de quarks, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Quando os férmions descritos pela teoria possuem sua massa igual a zero, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é considerado um parâmetro de ordem exato da transição de fases:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \implies \begin{cases} \neq 0 \rightarrow \text{simetria quiral quebrada} \\ = 0 \rightarrow \text{simetria quiral restaurada.} \end{cases} \quad (3.19)$$

No caso em que os férmions têm massa, a densidade Lagrangiana possuirá um termo $\bar{\psi}m_c\psi$, que quebra explicitamente a simetria quiral. Portanto, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é considerado um parâmetro de ordem aproximado.

Nas próximas seções será apresentada a termodinâmica do PNJL e como ela trata desses dois efeitos simultaneamente, considerando dois parâmetros de ordem na descrição das transições confinamento/desconfinamento e simetria quiral quebrada/restaurada.

3.1.2 Parametrização logarítmica do setor puro de glúons

O comportamento dinâmico de Φ e de seu complexo conjugado, Φ^\dagger dados pelas Eq. (3.4) e Eq. (3.5), é determinado por meio da descrição do setor puro de glúons (SPG) em temperatura finita. Isto é, Φ e Φ^\dagger devem ser tais que as equações de estado para um gás efetivo de glúons reproduzam resultados já estabelecidos desse setor, como os obtidos via cálculos de QCD na rede.

O grande potencial termodinâmico que descreve o SPG é obtido construindo um *fit* dos dados de rede. Foi utilizada a parametrização logarítmica nessa seção, dada pela seguinte equação (RUGGIERI, 2011):

$$\mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T) = T^4 \left\{ -\frac{a(T)}{2} \Phi^\dagger \Phi + b(T) \log \left[1 - 6\Phi^\dagger \Phi + 4(\Phi^{\dagger 3} + \Phi^3) - 3(\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] \right\}, \quad (3.20)$$

com duas funções que dependem de T , definidas como,

$$a(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2, \quad (3.21)$$

$$b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3. \quad (3.22)$$

O parâmetro T_0 na Eq. (3.20) estabelecem a escala de desconfinamento na teoria pura de *gauge*. Os valores dos parâmetros são dados abaixo (COSTA et al., 2010):

Tabela 2 – Dados para o potencial $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T)$ com a parametrização logarítmica.

a_0	a_1	a_2	b_3	T_0
3,51	-2,47	15,2	-1,75	190

3.2 MODELO DE PNJL COM DESBALANCEAMENTO QUIRAL

O modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), além de possuir quebra de simetria quiral, também possui confinamento. Dessa forma, a dinâmica dos glúons é feita por meio da substituição da derivada covariante do NJL pelo termo $D^\mu \equiv \partial^\mu + iA^\mu$, com A^μ sendo o campo de glúons estático. A densidade Lagrangiana do modelo na versão de simetria SU(2), que possui dois sabores de quarks (u e d) é dada pela mesma forma que no trabalho de Ratti, Thaler e Weise (2006)

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi[A], \Phi^\dagger[A], T), \quad (3.23)$$

onde m_c é a massa de corrente dos quarks, ψ e $\bar{\psi}$ são os campos quark e anti-quark respectivamente no espaço de Dirac, G é a constante de acoplamento, τ são as matrizes de Pauli, $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$ é a derivada covariante e A^μ é o campo de glúons estático.

Para incluir os efeitos de densidade bariônica (μ) e desbalanceamento quiral (μ_5), pode-se escrever uma Lagrangiana Efetiva (RATTI; THALER; WEISE, 2006), dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_c + \mu_5\gamma^0\gamma^5 + \mu\gamma^0)\psi \\ &+ G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi[A], \Phi^\dagger[A], T).\end{aligned}\quad (3.24)$$

A termodinâmica do modelo é dada por meio da construção da função de,

$$\Omega_{PNJL} = -\frac{T}{V} \ln(\mathcal{Z}_{PNJL}), \quad (3.25)$$

com \mathcal{Z}_{PNJL} sendo a função de partição do modelo. A obtenção de \mathcal{Z}_{PNJL} é feita por meio da Teoria de Campos a temperatura. As linhas gerais essa obtenção é mostrada no Apêndice F, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T) + \frac{(M - m_c)^2}{4G} + \Omega_V \\ &- \frac{N_f}{\beta} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\log(F_+^s F_-^s)],\end{aligned}\quad (3.26)$$

com $\beta = T^{-1}$ e duas funções térmicas definidas como

$$F_-^s = 1 + 3\Phi e^{-\beta(\omega_s - \mu)} + 3\Phi^\dagger e^{-2\beta(\omega_s - \mu)} + e^{-3\beta(\omega_s - \mu)}, \quad (3.27)$$

$$F_+^s = 1 + 3\Phi^\dagger e^{-\beta(\omega_s + \mu)} + 3\Phi e^{-2\beta(\omega_s + \mu)} + e^{-3\beta(\omega_s + \mu)}, \quad (3.28)$$

dado $\omega_s(k) = \sqrt{(k + s\mu_5)^2 + M^2}$. Note que os esquemas de regularização do vácuo são definidos da mesma forma que nas Eqs. (2.24) e (2.25) no termo Ω_V da Eq. (3.26).

Minimizando o potencial termodinâmico (3.26) com relação a M , Φ , e Φ^\dagger , serão obtidas as três equações de gap necessárias para esse trabalho, usando (2.25) e (2.24) para a escolha do esquema de regularização:

$$\frac{\partial\Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5)}{\partial M} = \frac{\partial\Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5)}{\partial\Phi} = \frac{\partial\Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5)}{\partial\Phi^\dagger} = 0. \quad (3.29)$$

3.3 QUANTIDADES TERMODINÂMICAS

Todas as quantidades termodinâmicas dependem agora de Φ e Φ^\dagger . A pressão normalizada é dada por:

$$p_N(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) = - \left[\Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) - \Omega(\tilde{M}_0, 0, 0, 0, \mu, \mu_5) \right], \quad (3.30)$$

a densidade de entropia por

$$s(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) = - \left[\frac{\partial \Omega(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5)}{\partial T} \right]_{\mu, \mu_5}, \quad (3.31)$$

a densidade de energia por

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) &= T s(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) - p_N(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) \\ &+ \mu_5 n_5(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) \end{aligned} \quad (3.32)$$

e a densidade quiral por

$$n_5(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5) = \frac{\partial p_N(M, \Phi, \Phi^\dagger, T, \mu, \mu_5)}{\partial \mu_5}, \quad (3.33)$$

de acordo com Costa et al. (2010)

É esperado que, em condições de altas temperaturas, o sistema atinja o limite de Stefan-Boltzmann, o qual é demonstrado de acordo com Costa et al. (2010). Os limites de Stefan-Boltzmann, obtidos em $\mu = \mu_5 = 0$, agora possuem também uma contribuição devida ao termo de glúons, além das já mencionadas contribuições do setor de quarks. Os limites para cada quantidade termodinâmica são dados abaixo. Primeiro para a pressão temos,

$$p_{\text{SB}_{\text{qg}}} = T^4 (p_{\text{SB}_{\text{g}}} + p_{\text{SB}_{\text{q}}}), \quad (3.34)$$

com o termo correspondente à contribuição gluônica dado por

$$p_{\text{SB}_{\text{g}}} = (N_c^2 - 1) \frac{\pi^2}{45}, \quad (3.35)$$

e o correspondente à contribuição dos quarks:

$$p_{\text{SB}_{\text{q}}} = N_c N_f \frac{7\pi^2}{180}. \quad (3.36)$$

Para a densidade de entropia e energia vale a mesma lógica, porém cada uma delas tem a seguinte forma,

$$s_{\text{SB}_{\text{d}g}} = T^3 (s_{\text{SB}_g} + s_{\text{SB}_q}), \quad (3.37)$$

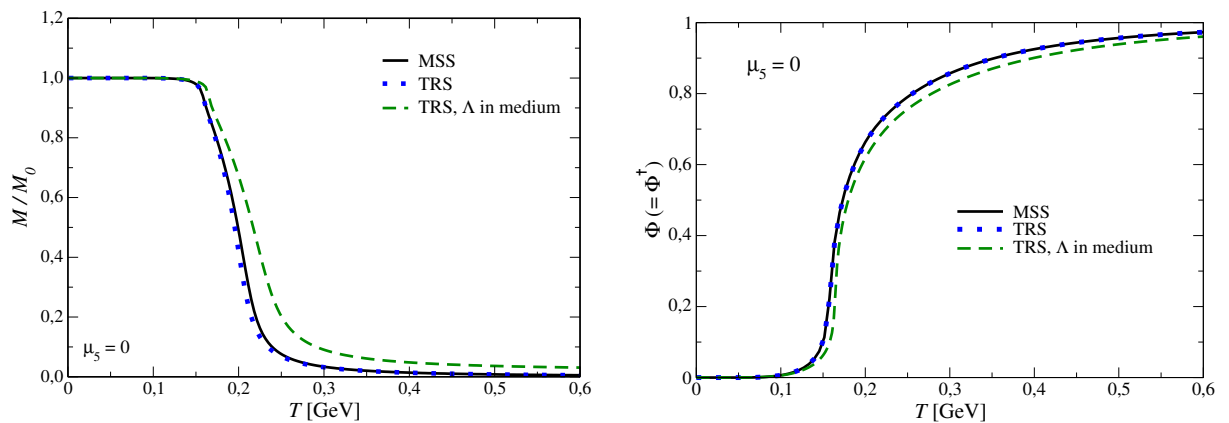
$$\varepsilon_{\text{SB}_{\text{d}g}} = T^4 (\varepsilon_{\text{SB}_g} + \varepsilon_{\text{SB}_q}), \quad (3.38)$$

Para o modelo PNJL, os parâmetros utilizados aqui foram os mesmos de Costa et al. (2010), sendo adotado os seguintes valores para $\Lambda = 651 \text{ MeV}$, $G = 5,04 \text{ GeV}^2$, $m_c = 5,5 \text{ MeV}$. Esses parâmetros são os que reproduzem os *inputs* $f_\pi = 92,3 \text{ MeV}$, $m_\pi = 139,3 \text{ MeV}$ e $|\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle|^{1/3} = 251 \text{ MeV}$.

3.4 RESULTADOS

Os resultados a seguir foram obtidos como uma sequência natural do trabalho no contexto do NJL, feito por Farias et al. (2016), buscando incluir os efeitos de confinamento além da simetria quiral. Além disso, foi verificado se a correta regularização das divergências da teoria aponta na direção das simulações de rede (BRAGUTA et al., 2015; BRAGUTA et al., 2016). Vale lembrar que os resultados aqui são todos no contexto de $\mu = 0$.

Figura 12 – **Esquerda:** Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização do modelo. **Direita:** *Loop* de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização do modelo.

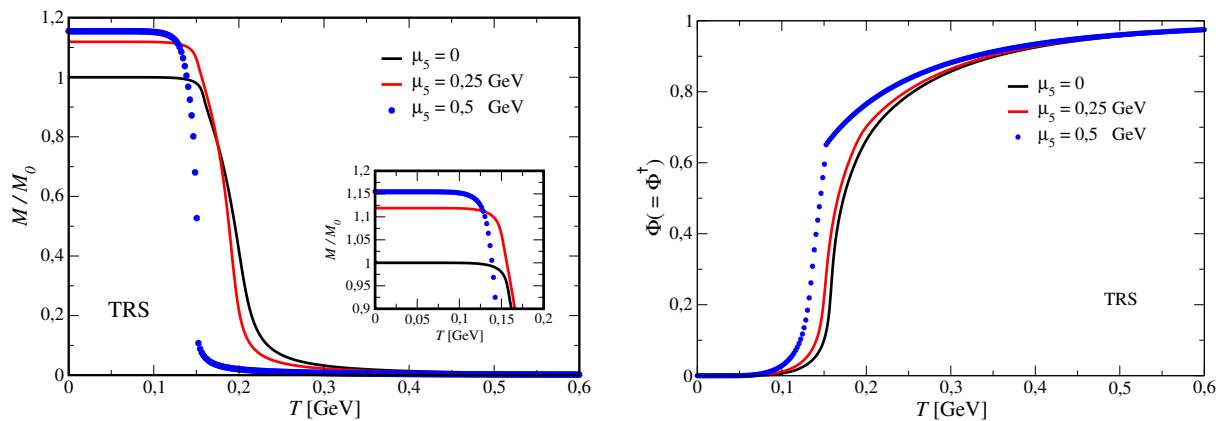


Fonte: Próprio autor.

O resultado da Fig. 12, primeiramente no painel da **esquerda**, mostra a massa efe-

tiva M normalizada pela massa efetiva no vácuo M_0 em função da temperatura (T) para diferentes esquemas de regularização do modelo para $\mu_5 = 0$. Assim como no NJL, o comportamento da massa efetiva em função de T no PNJL é semelhante. A massa no vácuo possui um valor de $M_0 = 325$ MeV. Dessa forma, conforme a temperatura aumenta no sistema, a restauração da simetria quiral ocorre quando a massa efetiva converge para a massa de corrente $m_c = 5,5$ MeV. Esse comportamento será observado nas Figs 13, 14 e 15 à **esquerda**. Para $\mu_5 = 0$, na Fig. 12, tanto MSS (curva preta) quanto TRS (curva verde) possuem o mesmo comportamento. Já no caso de regularizar as integrais térmicas com Λ no esquema TRS, procedimento que temos chamado de “ Λ in medium”, a restauração da simetria quiral ocorre para um valor maior de temperatura. O painel da **direita** da Fig. 12 mostra a relação do *loop* de Polyakov (Φ), sendo o parâmetro de ordem para a transição de desconfinamento como função da temperatura (T) para diferentes esquemas de regularizações e $\mu_5 = 0$. No caso estudado aqui, para potencial químico nulo, ($\mu = 0$), isso implica que ($\Phi = \Phi^\dagger$). O comportamento de Φ inicialmente é constante, até que o sistema atinja uma temperatura crítica, a partir da qual os valores de Φ começam a crescer até estabilizar próximo de 1, onde o sistema estaria desconfinado.

Figura 13 – **Esquerda:** Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS. **Direita:** *loop* de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS.

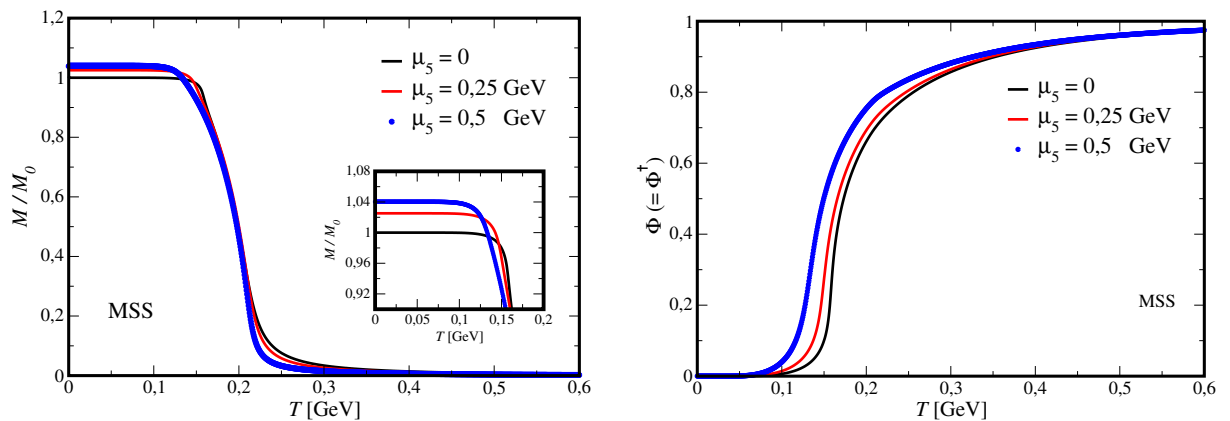


Fonte: Próprio autor.

Conforme o potencial químico quiral μ_5 começa a aumentar no sistema, para o procedimento TRS a massa efetiva no vácuo também torna-se maior com relação a $\mu_5 = 0$, o que pode ser observado na Fig 13. Além disso, é possível perceber que a restauração da simetria quiral ocorre para temperaturas críticas menores em comparação com $\mu_5 = 0$, no caso de $\mu_5 = 0,25$ GeV (curva vermelha) e $\mu_5 = 0,5$ GeV (curva azul). Especialmente para $\mu_5 = 0,5$ GeV, possuímos novamente, como no NJL, uma transição de primeira or-

dem. O mesmo comportamento está presente em outro parâmetro de ordem do modelo que é o *loop* de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T). Observamos que também há um salto no valor de Φ contra T para $\mu_5 = 0,5$ GeV (curva azul) no gráfico da **direita** na Fig 13.

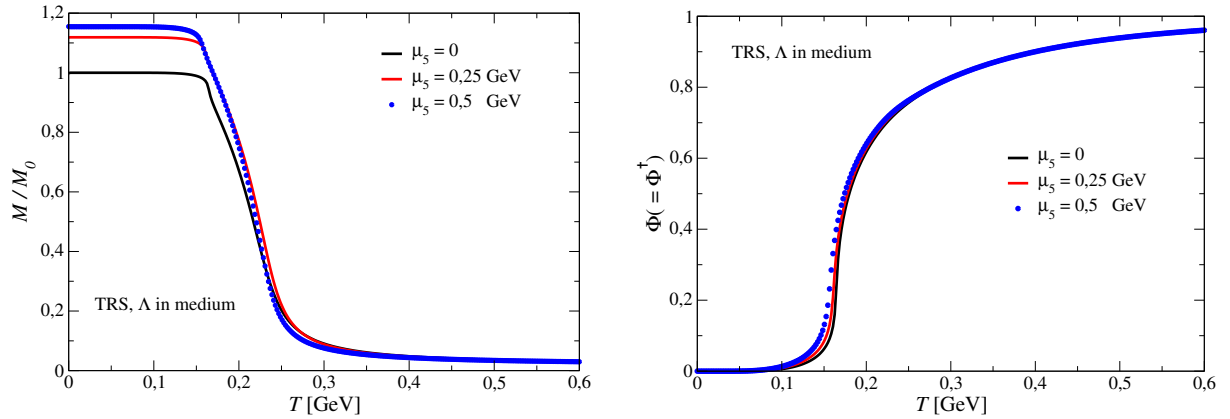
Figura 14 – **Esquerda:** Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização MSS. **Direita:** *loop* de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização MSS.



Fonte: Próprio autor.

Já no caso do procedimento MSS não observamos uma transição de primeira ordem para nenhum dos parâmetros de ordem, tanto à **esquerda** para massa efetiva quanto à **direita** para o *loop* de Polyakov: as transições são todas do tipo *crossover*, o que pode ser visualizado na Fig. 14. Porém, no vácuo, ou seja, em $T = 0$ a massa efetiva ainda é maior quanto maior for o potencial químico quiral μ_5 , da mesma forma que no TRS. Este fenômeno é similar ao da catálise magnética, que ocorre quando há um campo magnético externo aplicado no sistema (MENEZES et al., 2009) mesmo em $T = 0$. Além disso, na transição quiral, os valores para a M/M_0 como função de T para diferentes potenciais químicos μ_5 são mais próximos no esquema MSS.

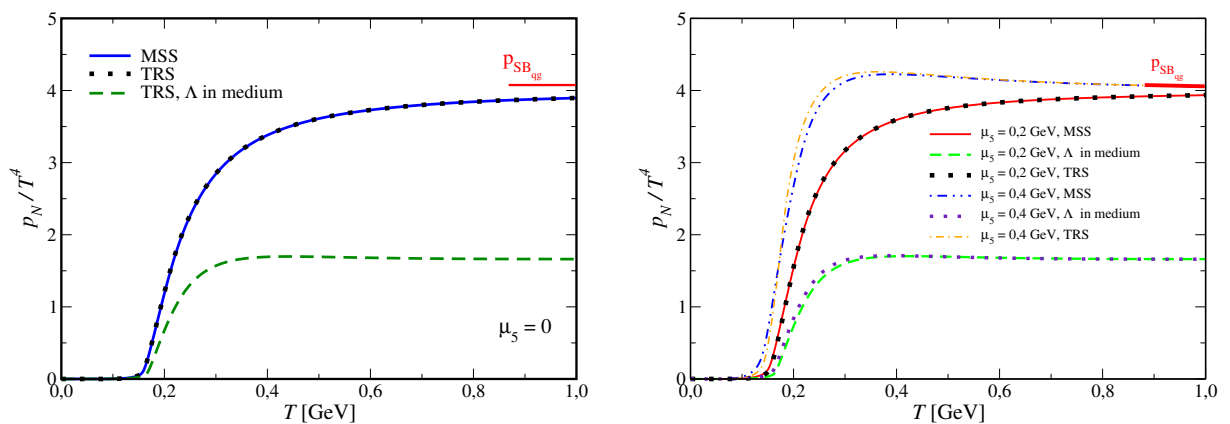
Figura 15 – **Esquerda:** Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS, Λ in medium. **Direita:** Loop de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T), com diferentes valores de potenciais químicos quirais μ_5 para o esquema de regularização TRS, Λ in medium.



Fonte: Próprio autor.

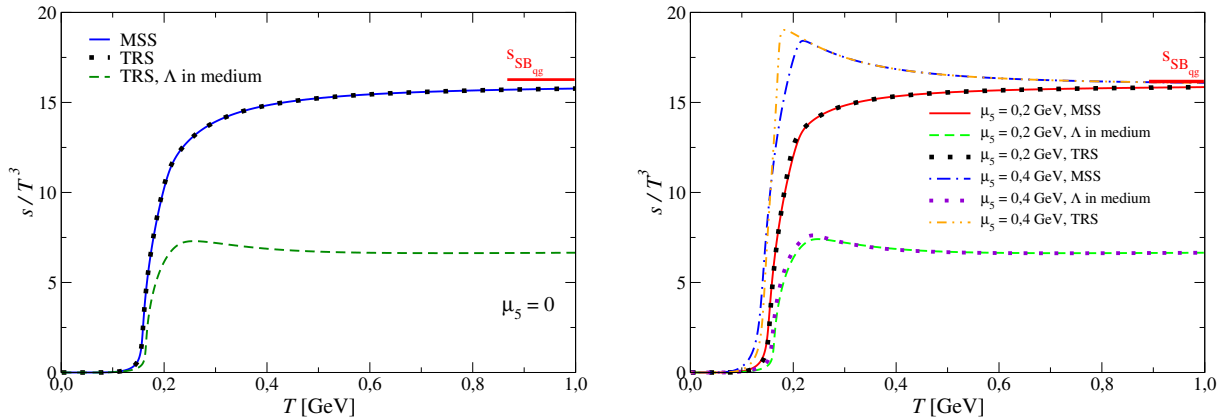
Quando regularizamos o meio, ou seja, as integrais térmicas, com o *cutoff* 3D Λ no contexto do método TRS, como feito na Fig. 15, podemos notar que tanto M quanto Φ não possuem uma primeira ordem, mas apenas um *crossover*, o que indicaria um bom candidato para o estudo do diagrama de fases com desbalanceamento quiral assim como o MSS. Porém, em resultados que mostraremos mais adiante, essa opção será descartada.

Figura 16 – **Esquerda:** Pressão normalizada (p_N) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularizações. **Direita:** Pressão normalizada (p_N) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularizações.



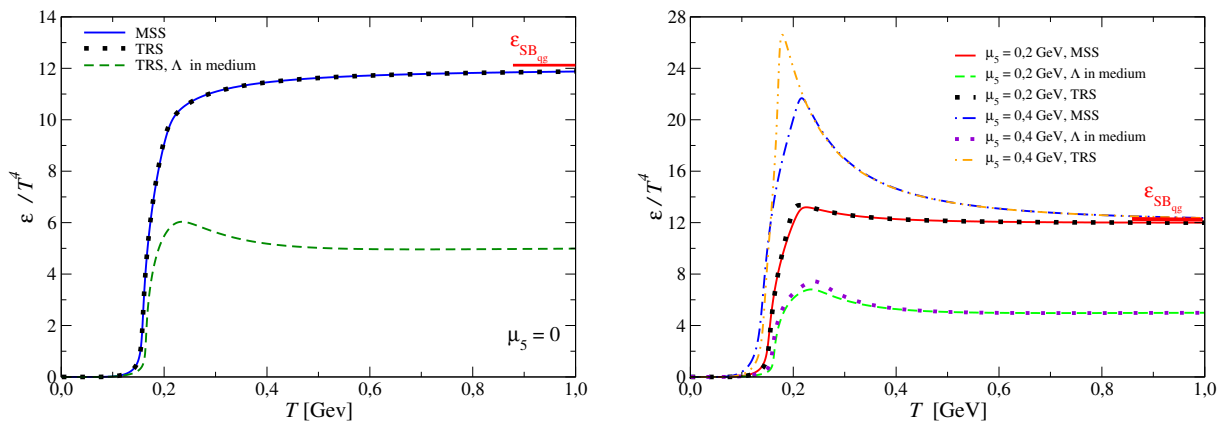
Fonte: Próprio autor.

Figura 17 – **Esquerda:** Densidade de entropia (s) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ e diferentes esquemas de regularização. **Direita:** Densidade de entropia (s) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.



Fonte: Próprio autor.

Figura 18 – **Esquerda:** Densidade de energia (ε) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ e diferentes esquemas de regularização. **Direita :** Densidade de energia (ε) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.



Fonte: Próprio autor.

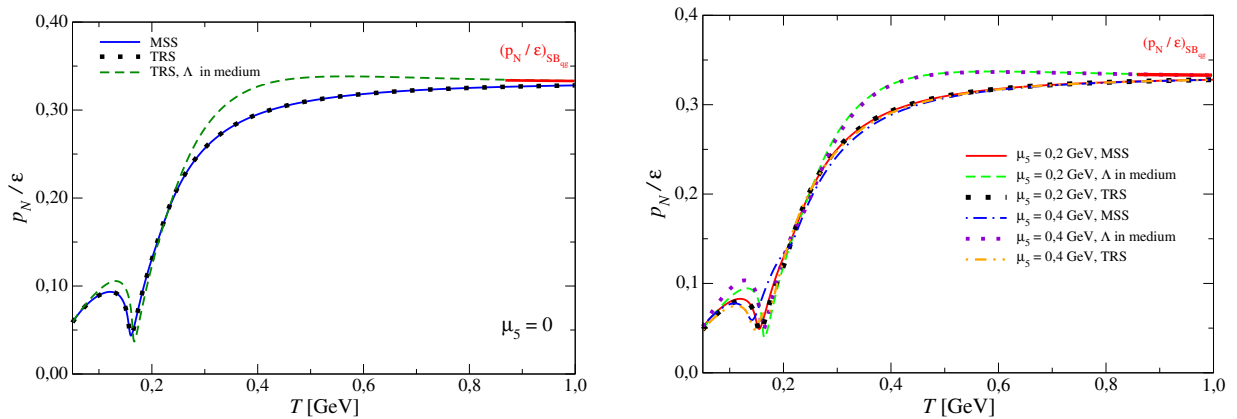
A Fig. 16, mostra a pressão normalizada (p_N/T^4) dada pela Eq. (3.30) como função da temperatura T no contexto de diferentes esquemas de regularizações e potencial químico quiral nulo à **esquerda** e finito à **direita**. Em ambos os gráficos, para os esquemas MSS e TRS, a pressão possui um comportamento semelhante. Conforme a temperatura começa a crescer no sistema, a pressão também começa crescer, até que o sistema atinge uma temperatura onde a pressão estabiliza seu valor, não ultrapassando o limite termodinâmico de Stefan-Boltzmann. Esse comportamento ocorre também para μ_5 finito, o que pode ser

visto no painel à direita na Fig. 16, para os esquemas MSS e TRS. O mesmo não ocorre quando regularizamos as integrais térmicas com Λ , pois o limite de Stefan-Boltzmann é violado.

A densidade de entropia (s/T^3) em função da temperatura (T) para diferentes μ_5 e esquemas de regularizações, pode ser vista na Fig. 17. Da mesma forma que na pressão, notamos o mesmo comportamento na densidade de entropia, um crescimento conforme T aumenta no sistema. Para ambos os casos $\mu_5 = 0$ e μ_5 finito, s/T^3 estabiliza no limite de Stefan-Boltzmann para MSS e TRS. Já no caso de TRS, Λ *in medium*, este limite é violado.

A densidade de energia (ε/T^4) em função da temperatura (T) para diferentes μ_5 e esquemas de regularizações, pode ser vista na Fig. 18. Equivalentemente às duas últimas quantidades termodinâmicas discutidas aqui, a pressão normalizada e a densidade de entropia, a densidade de energia cresce até estabilizar no limite de Stefan-Boltzmann. No entanto, para μ_5 finito, ε/T^4 aumenta e ultrapassa esse limite, antes de atingir a temperatura que estabiliza seu valor no limite de Stefan-Boltzmann para os ambos esquemas, MSS e TRS. Novamente, para o caso de Λ *in medium*, o limite não é atingido.

Figura 19 – **Esquerda:** Equação de estado (p_N/ε) em função da temperatura (T) para $\mu_5 = 0$ para diferentes esquemas de regularização. **Direita:** Equação de estado (p_N/ε) em função da temperatura (T) para μ_5 finito e diferentes esquemas de regularização.



Fonte: Próprio autor.

Os gráficos da Fig. 19 mostram a relação da equação de estado p_N/ε , a qual é definida dessa forma de acordo com Kneur, Pinto e Ramos (2010), em função da temperatura (T) para diferentes μ_5 e métodos de regularizações do modelo. A equação de estado cresce inicialmente; próxima da região da transição entre $T \sim 0,150 - 0,200$ GeV, ela decai até atingir a temperatura crítica e essa quantidade cresce até estabilizar no limite de Stefan-Boltzmann para ambos os métodos de regularizações, para os valores de μ_5 considerados.

3.4.1 Temperaturas pseudocríticas

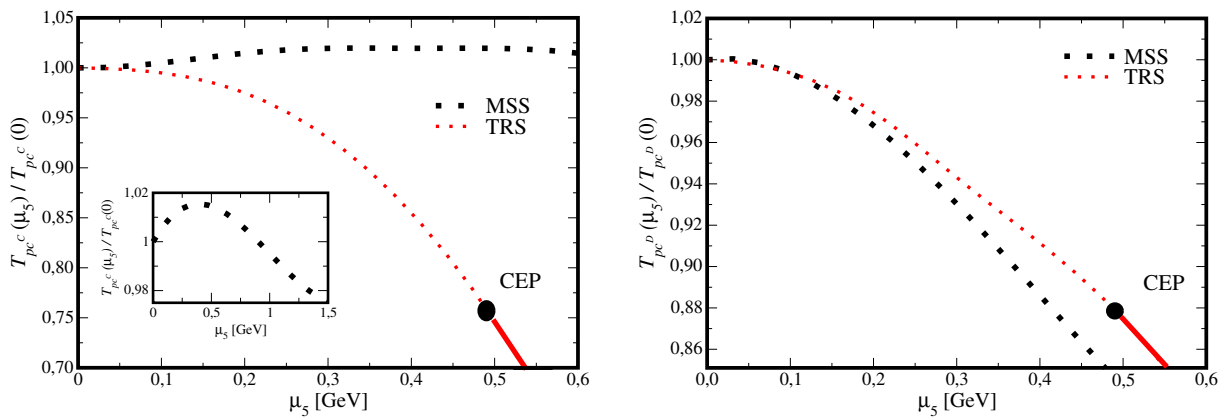
No modelo PNJL temos duas diferentes temperaturas (pseudo)críticas, relacionadas às transições quiral (T_{pc}^c) e de desconfinamento (T_{pc}^d). Os valores de T_{pc} devem ser obtidos a partir das posições dos picos nas derivadas do condensado quiral e do *loop* de Polyakov com relação com a temperatura:

$$\frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial T} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \quad (3.39)$$

Assim, temos que as temperaturas pseudo críticas para as transições quiral e de desconfinamento serão obtidas como as soluções das seguintes equações:

$$T_{pc}^c = \frac{\partial^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial T^2} = 0 \quad \text{e} \quad T_{pc}^d = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} = 0. \quad (3.40)$$

Figura 20 – **Esquerda:** Temperatura pseudocrítica (T_{pc}^c) normalizada pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ como função de μ_5 para diferentes esquemas de regularizações. **Direita:** Temperatura pseudocrítica (T_{pc}^d) normalizada pela temperatura pseudocrítica para a transição de desconfinamento em $\mu_5 = 0$ como função de μ_5 para diferentes esquemas de regularizações.



Fonte: Próprio autor.

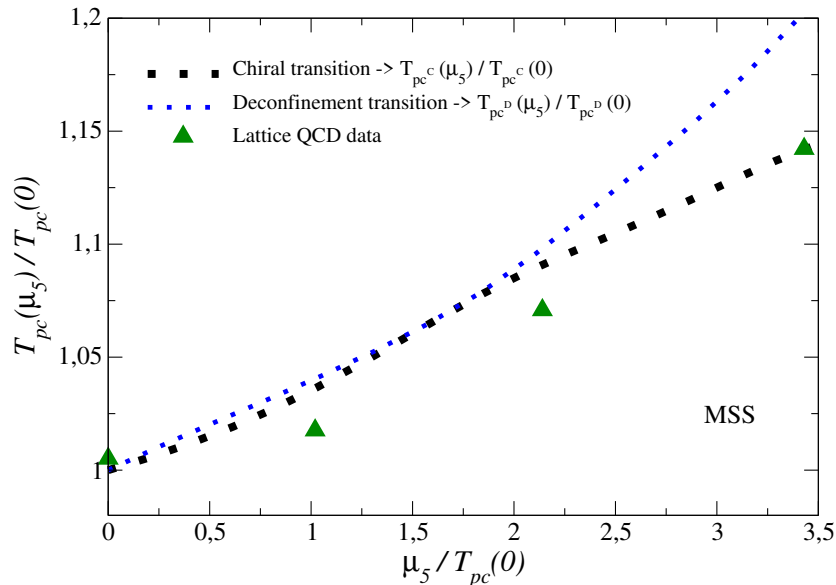
Os diagramas de fases, que mostram a relação entre $T_{pc}/T_{pc}(0)$ em função do potencial químico quiral μ_5 , podem ser vistos na Fig. 20. Vale salientar que tanto para os diagramas de fases quanto para os resultados anteriores no contexto do PNJL, fizemos o estudo para o limite físico ($m_c \neq 0$), diferente do NJL na seção anterior, onde foi analisado também o limite quiral $m_c = 0$ (veja, por exemplo, o diagrama de fases na Fig. 11.) Dito isso, começaremos discutindo o resultado da **esquerda** na Fig. 20.

O gráfico mostra o diagrama de fases para a transição quiral, que está relacionada com a primeira Eq. (3.39). Nessa transição temos primeiramente uma transição do tipo *crosso-*

ver para o esquema de regularização TRS (curva vermelha), que vai até $\mu_5 \approx 0,5$ GeV, depois passa a ser uma transição do tipo primeira ordem. Isso também foi observado nos parâmetros de ordem, por exemplo, a massa efetiva e *loop* de Polyakov na Fig. 13, há uma transição desse tipo presente. Logo, no limite físico o que separa a transição *crossover* de uma transição de fases do tipo primeira ordem é um *Critical End Point*. No esquema TRS, além do que já mencionamos, podemos perceber que o valor de T_{pc} decresce conforme μ_5 aumenta, denotando um comportamento oposto ao obtido em QCD na rede, que pode ser visto no trabalho de Braguta et al. (2016). Já no caso do MSS o comportamento da temperatura pseudocrítica com relação ao potencial químico quiral é sempre uma transição do tipo *crossover*. Além disso, a temperatura possui um comportamento crescente e depois decrescente no MSS. Esse comportamento é mostrado em um *zoom* (T_{pc}^c caiu com μ_5 no MSS para $\mu_5 = 0,5$ GeV) no canto inferior esquerdo do plot à **esquerda** da Fig. 20, onde variamos μ_5 entre $0 - 1,5$ GeV.

Já no gráfico à **direita** da Fig. 20, mostramos o diagrama de fases para a transição de desconfinamento. A curva vermelha, que representa o TRS, possui as mesmas características da transição quiral, primeiramente um *crossover*, um CEP em $T_{pc}(\mu_5) \sim 0,150$ GeV ou normalizado $T_{pc}(\mu_5)/T_{pc}(0) \sim 0,75$, e após isso uma transição de primeira ordem. Além disso, ambos os esquemas TRS e MSS possuem um comportamento decrescente. Para o MSS (curva preta), vemos um *crossover*, cuja curva tem comportamento decrescente. Esse comportamento de T_{pc} decrescente com μ_5 é totalmente o oposto dos dados de rede, que estão mostrados na Fig. 22.

Figura 21 – Temperatura pseudocrítica (T_{pc}) como função de μ_5 normalizadas pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ para o esquema de regularização MSS para as transições quiral e desconfinamento em comparação com os dados da QCD na rede (BRAGUTA et al., 2016).



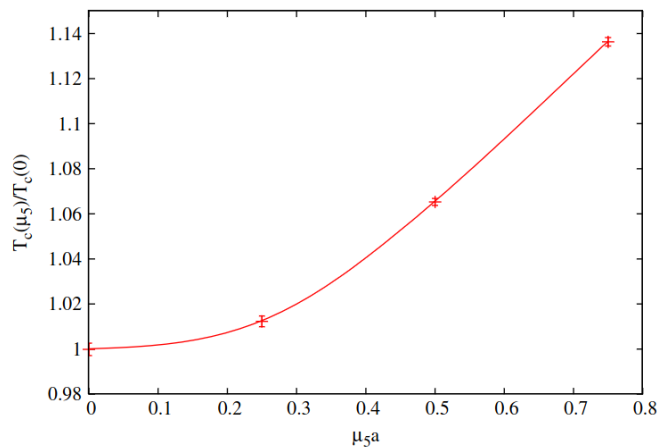
Fonte: Próprio autor.

Nessa perspectiva, notamos que somente a teoria usual do PNJL (3.23), utilizando essa parametrização logarítmica para o setor puro de glúons Eq. (3.20) não é suficiente para descrever a matéria de quarks primeiramente confinada, depois desconfinada e com desbalanceamento quiral. Exemplo disso pode ser visualizado no resultado da Fig. 21, onde utilizamos os dados de rede do trabalho de Braguta et al. (2016) e o método MSS, que não possui primeira ordem. No entanto, ainda assim, somente esse procedimento de regularização não se mostra satisfatório, quando comparado com os resultados de QCD na Rede. Esses dados mostram que o comportamento de T_{pc} crescente com relação a μ_5 e as temperaturas da transição quiral e de desconfinamento são iguais, isso tudo pode ser observado na Fig. 22. Com a utilização do modelo PNJL, a parametrização logarítmica e MSS é obtido e uma diferença entre as temperaturas pseudocríticas para a transição quiral e desconfinamento de 46 MeV. Portanto, tendo em vista essa observação, será proposto uma forma de aproximar mais dos dados da QCD na rede e as temperaturas entre si, que foi o objetivo maior desse estudo e está discutido a seguir.

3.4.2 Parametrização Polinomial do setor puro de glúons

Os resultados na literatura mostram que as temperaturas pseudocríticas crescem conforme o desbalanceamento quiral aumenta no sistema. Além disso, as temperaturas das transições quiral e de desconfinamento coincidem, como foi estudado por Braguta et al. (2016) e mostrado na Fig. 22,

Figura 22 – Resultado da QCD na rede para a temperatura crítica $T_c(\mu_5)/T_c(0)$ contra o potencial químico quiral (μ_5).



Fonte: Gráfico retirado de (BRAGUTA et al., 2016).

Visando aproximarmos nossos resultados da QCD na rede, optamos nesse trabalho por usar a versão do potencial $\Omega_{SPG} = \mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T)$ na sua versão polinomial. Essa abordagem também é feita em alguns trabalhos na literatura (RATTI; THALER; WEISE, 2006; HANSEN, 2009), já que utilizando esta parametrização a diferença das temperaturas pseudocríticas diminuem para 6 MeV. Nessa seção já está sendo utilizada a aproximação de quando $\mu = 0$ os valores dos *loops* de Polyakov são $\Phi = \Phi^\dagger$. Portanto, o potencial $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^\dagger, T)$, é escrito como;

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{b_3}{3}[(\Phi^\dagger)^3 + \Phi^3] + \frac{b_4}{4}(\Phi\Phi^\dagger)^2, \quad (3.41)$$

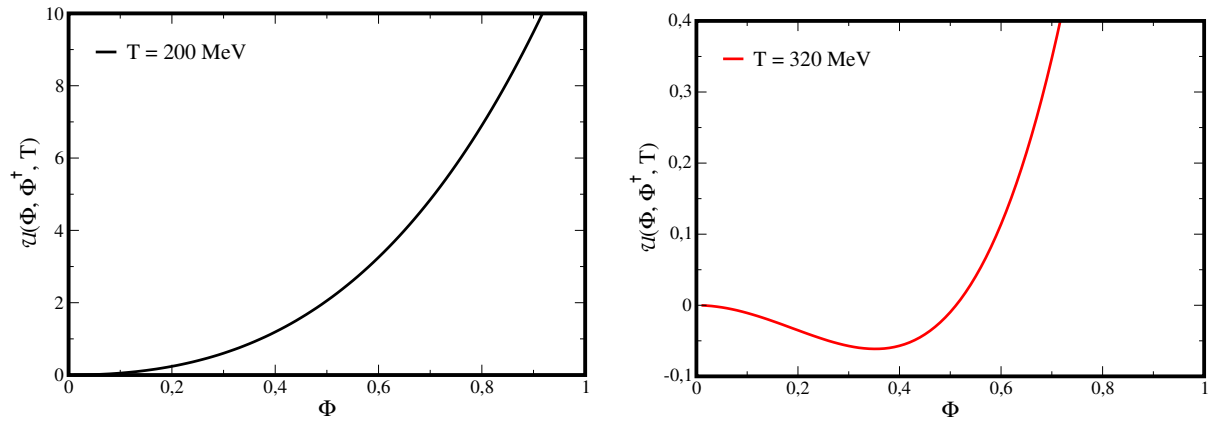
com função $b_2(T)$ dada por,

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3, \quad (3.42)$$

sendo a_0, a_1, a_2, a_3, b_3 e b_4 constantes adimensionais e $T_0 = 270$ MeV, a temperatura

fixada para o SPG, conforme os resultados da QCD na rede (RATTI; RÖSSNER; WEISE, 2007).

Figura 23 – Potencial de Polyakov dado em (3.41) como função de Φ para duas temperaturas diferentes.



Fonte: Próprio autor.

Na Fig. 23 foram mostradas as soluções que minimizam o potencial do SPG. Os parâmetros adimensionais usados em $\mathcal{U}(\Phi, T)$, na sua forma polinomial, são dados por:

Tabela 3 – Parâmetros para Eq. (3.41) ou seja, para o potencial $\mathcal{U}(\Phi, T)$ na parametrização polinomial.

a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4	$T_0(\text{MeV})$
6,75	-1,95	2,625	-7,44	0,75	7,5	270

Fonte: Dados utilizados da seguinte referência (RATTI; THALER; WEISE, 2006).

No modelo PNJL usual, obtemos as temperaturas pseudocríticas como funções decrescentes de μ_5 . A nossa tentativa de resolver este problema e obter um comportamento semelhante ao das simulações de QCD na rede, consiste em incluir uma dependência do potencial do *loop* do Polyakov, Eq. (3.41) com o potencial químico quiral usando a seguinte prescrição;

$$\mathcal{U}(\Phi, T) \rightarrow \mathcal{U}(\Phi, T, \mu_5) = T^4 \left[-\frac{\bar{b}_2(T, \mu_5)}{2} \Phi^2 - \frac{b_3}{3} \Phi^3 + \frac{b_4}{4} \Phi^4 \right], \quad (3.43)$$

em que

$$\bar{b}_2(T, \mu_5) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3 + k_1 \left(\frac{\mu_5}{T}\right) + k_2 \left(\frac{\mu_5}{T}\right)^2 + k_3 \left(\frac{\mu_5}{T}\right)^3. \quad (3.44)$$

os valores dos parâmetros utilizados nesse trabalho estão na tabela abaixo;

Tabela 4 – Parâmetros para Eq. (3.43).

k_1	k_2	k_3
-0,53	-0,54	-0,55

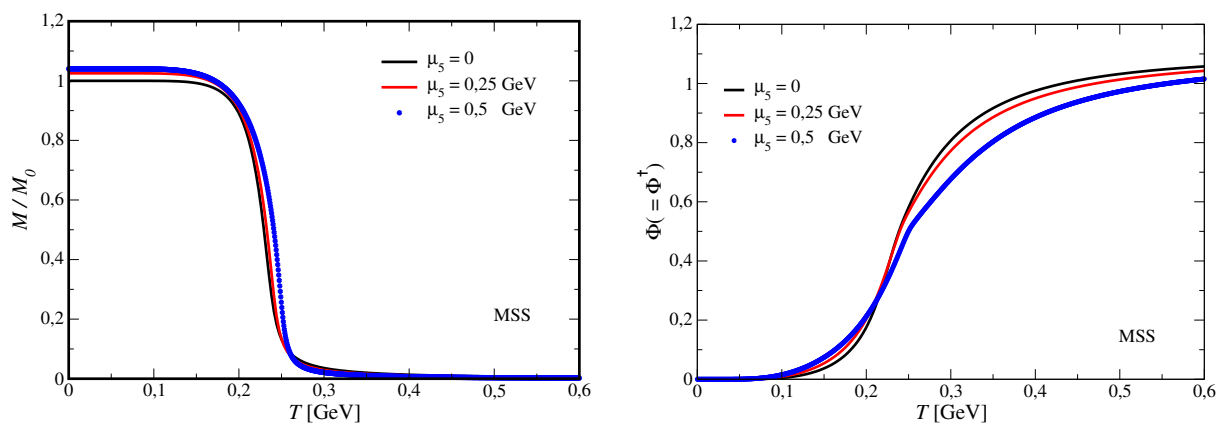
Fonte: Dados utilizados aqui são preliminares e pertencem a um artigo em elaboração por Francisco X.

Azeredo, Ricardo. L. S. Farias, Dyana C. Duarte, Gastão Krein and Rudnei O. Ramos.

3.5 RESULTADOS PRELIMINARES

Os resultados a seguir são preliminares e mostram boas perspectivas para o futuro. Lembrando que os resultados aqui são todos no contexto de $\mu = 0$.

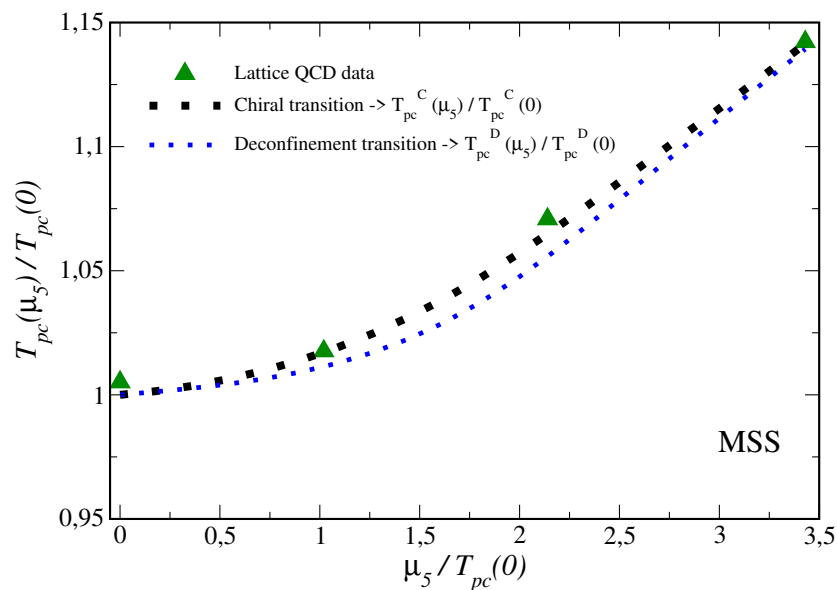
Figura 24 – **Esquerda:** Massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) em função da temperatura (T) para diferentes valores de potenciais químicos quirais (μ_5) no esquema de parametrização MSS com o *ansatz* Eq. (3.43). **Direita:** *Loop* de Polyakov (Φ) em função da temperatura (T) para diferentes valores de potenciais químicos quirais (μ_5) no esquema de parametrização MSS com o *ansatz* Eq. (3.43). RESULTADO PRELIMINAR!



Fonte: Próprio autor.

Na Fig. 24 temos novamente à **esquerda**: a relação da massa efetiva (M) normalizada pela massa efetiva no vácuo (M_0) e à **direita**: o *loop* de Polyakov, ambas quantidades como função da temperatura (T). Os dois gráficos são feitos para diferentes valores de μ_5 e no contexto do MSS. Como observamos na seção 3.4, o esquema MSS, que corrigiu a primeira ordem, também converge para o limite termodinâmico de Stefan-Boltzmann, como visto nas quantidades termodinâmicas. Primeiramente, podemos notar que ao utilizar o *ansatz* dado na Eq (3.43) em comparação com a Fig. 14, a restauração da simetria quiral torna-se mais tardia conforme a potencial químico quiral cresce no sistema (gráfico da **esquerda**). Já no caso do *loop* de Polyakov, ao aumentar o potencial químico quiral no sistema, o desconfinamento irá ocorrer para valores maiores de temperatura. Dessa forma, esses efeitos também serão relevantes no próximo resultado.

Figura 25 – Temperatura pseudocrítica (T_{pc}) como função de μ_5 normalizadas pela temperatura pseudocrítica para a transição quiral em $\mu_5 = 0$ para o esquema de regularização MSS com o *ansatz* Eq. (3.43) para as transições quiral e desconfinamento em comparação com os dados da QCD na rede (BRAGUTA et al., 2016). RESULTADO PRELIMINAR!



Fonte: Próprio autor.

Na Fig. 25 temos o diagrama de fases para o esquema MSS, com a parametrização polinomial e utilizando a Eq. (3.43). O uso de todos os ingredientes citados anteriormente não só resultou em ambas as temperaturas serem crescentes em função de μ_5 , mas também deixou as curvas de restauração quiral e desconfinamento (sólida e tracejada, respecti-

vamente), mais próximas. A diferença entre os valores das temperaturas pseudocríticas, que antes era de 46 MeV, é de apenas 6 MeV, quando $\mu_5 = 0$. Esse resultado mostra-se promissor, considerando que estamos trabalhando e comparando um modelo efetivo dado na Eq. (3.23) com a QCD na rede, que utiliza uma abordagem de primeiros princípios para lidar com a Lagrangiana dada na Eq. (1.1), no regime estudado de temperatura, desbalanceamento quiral e potencial químico nulo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta dissertação foi proposto um estudo do diagrama de fases da QCD com temperatura e potencial químico quiral, considerando quebra de simetria quiral, confinamento e desconfinamento. De maneira ampla, foi observado que tanto para o modelo NJL quanto para o modelo PNJL, a separação das divergências da teoria é crucial para uma correta descrição das transições de fases e também para a construção do diagrama de fases. Todas as divergências dos modelos NJL e PNJL estudados encontram-se no vácuo, dessa forma, a inclusão de efeitos de meio como temperatura e potencial químico quiral não geram novas divergências. Por isso, um método através do qual é possível extrair toda a contribuição de meio das integrais divergentes sem que haja a necessidade de cortar estas contribuições em um *cutoff*, torna-se muito importante para descrevermos corretamente a estrutura de fases do sistema. Nos dois modelos em que foi dedicado o estudo desse projeto, foi observado que o comportamento do sistema muda drasticamente ao utilizar os esquemas que separam as divergências. No problema com desbalanceamento quiral, a simples utilização do *cutoff* tridimensional faz com que apareça um ponto crítico final no sistema, ligando uma linha de *crossover* e uma de primeira ordem, enquanto cálculos de rede prevêm somente um *crossover* e nenhum ponto crítico no limite físico. Dessa forma, utilizando o *Medium Scheme Separation*, a transição de fase no limite físico tornou-se um *crossover*, conforme os dados de QCD na rede. Notamos também que cortar as integrais térmicas, tanto do NJL quanto do PNJL com um *cutoff* 3D Λ , não é uma abordagem a ser considerada, visto que ao fazer isso, violamos o limite termodinâmico de Stefan-Boltzmann.

É conhecido na literatura que em qualquer modelo efetivo renormalizável os contra-termos necessários para a renormalização da teoria são os mesmos do vácuo, ou seja, a inclusão de contribuições de meio como temperatura, potenciais químicos ou campo magnético não podem gerar novas divergências (DUARTE; FARIAS; RAMOS, 2011). Ao longo desse trabalho desenvolvido até o momento o mesmo princípio permanece válido ao se trabalhar com um modelo não-renormalizável, de forma que, modificando somente os termos de meio ou a aproximação utilizada em cada artigo, não acrescentamos novas divergências à teoria (RUGGIERI; PENG; CHERNODUB, 2016). Neste sentido, tendo em mente o grande número de resultados na literatura que utilizam somente o TRS como método de regularização das integrais, existem várias continuações naturais de nosso trabalho, utilizando o MSS.

O estudo feito nesse trabalho, principalmente no contexto do PNJL, utilizando o MSS e com desbalanceamento quiral, é novo na literatura. Mostramos até o momento que uma descrição da matéria de quarks confinada e desconfinada feita por meio de modelos efetivos e regulando o vácuo por meio do esquema MSS seria uma alternativa confiável, dado que os resultados do diagrama de fases que obtemos até o momento mostram que as tem-

peraturas de transição quiral e desconfinamento possuem o mesmo comportamento com relação aos dados de QCD na rede. Este resultado foi obtido descrevendo o setor puro de glúons do modelo mediante uma descrição polinomial, dependente do desbalanceamento quiral μ_5 e por meio de um *ansatz* dado na Eq. 3.43. Isso fez com que o comportamento de T_{pc} em função de μ_5 fosse crescente para as transições quiral e de desconfinamento, além de diminuir a diferença entre as temperaturas pseudocríticas e corrigir o comportamento decrescente para a transição desconfinamento presente utilizando apenas o modelo PNJL com setor puro de glúons independente de μ_5 como foi mostrado na subseção 3.1.2.

Os próximos passos que serão feitos no futuro envolvem, publicar esse trabalho realizado aqui no contexto do PNJL construindo uma expressão que iguala ou aproxima mais as temperaturas pseudocríticas da transição quiral e de desconfinamento com os dados de QCD na rede. Espera-se publicar essa produção científica em periódicos internacionais relevantes na área de Física Nuclear e de Partículas Elementares. Além disso, pretende-se continuar um estudo do modelo NJL com campo magnético (eB), densidade finita e/ou potencial químico μ finito e temperatura nula (AVANCINI et al., 2021). Esse estudo será feito para os métodos de regularizações do modelo com campo magnético conhecidos como *Magnetic Field Independent Regularization* (MFIR) e o *Vacuum Magnetic Regularization* (VMR) que possuem o mesmo efeito do MSS: separar as contribuições de meio dos termos divergentes a serem regularizados. Pretende-se também iniciar um estudo no doutorado da fase conhecida na literatura como fase supercondutora de cor (CSC), motivados por estudos feitos nesse contexto como exemplo Fayazbakhsh e Sadooghi (2011) e Noronha e Shovkovy (2007). Dessa forma, é planejado utilizar esses esquemas de regularizações mencionados anteriormente como, por exemplo, MSS, MFIR e VMR no contexto da matéria de quarks supercondutora de cor por meio do modelo efetivo de NJL. Com isso espera-se corrigir possíveis efeitos não físicos que aparecem no sistema quando se inclui campos magnéticos e não se regulariza corretamente o vácuo da teoria. Além de tudo isso também será iniciado um estudo da fase conhecida na literatura como quarkyônica (MCLERRAN; REDLICH; SASAKI, 2009; DUARTE et al., 2021), a fim de construir uma equação de estado em densidade e campo magnético finitos, verificando qual será o efeito na relação massa-raio do sistema.

REFERÊNCIAS

- AAMODT, K. et al. Transverse momentum spectra of charged particles in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 900\sim\text{GeV}$ with ALICE at the LHC. **Phys. Lett. B**, v. 693, p. 53–68, 2010.
- ALFORD, M. G. et al. Color superconductivity in dense quark matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 80, p. 1455–1515, Nov 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1455>>.
- AVANCINI, S. S. et al. Regularizing thermo and magnetic contributions within nonrenormalizable theories. **Phys. Rev. D**, v. 103, n. 5, p. 056009, 2021.
- BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Microscopic theory of superconductivity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 106, p. 162–164, Apr 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.162>>.
- BAUERSCHMIDT, R.; BRYDGES, D. C.; SLADE, G. **Introduction to a Renormalization Group Method**. Springer Singapore, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2F978-981-32-9593-3>>.
- BELLAC, M. L. **Thermal Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-88506-8, 978-0-521-65477-7.
- BIEBEL, O. Experimental tests of the strong interaction and its energy dependence in electronpositron annihilation. **Physics Reports**, v. 340, n. 3, p. 165–289, 2001. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300000727>>.
- BLOOM, E. D. et al. High-energy inelastic $e - p$ scattering at 6° and 10° . **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 23, p. 930–934, Oct 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.930>>.
- BRAGUTA, V. V. et al. Two-Color QCD with Non-zero Chiral Chemical Potential. **JHEP**, v. 06, p. 094, 2015.
- _____. Study of the qcd phase diagram with a nonzero chiral chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 034509, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.034509>>.
- BUBALLA, M. Njl-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, v. 407, n. 4, p. 205–376, 2005. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730400506X>>.
- BUTTERWORTH, J. The Standard Model: How far can it go and how can we tell? **Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A**, v. 374, n. 2075, p. 20150260, 2016.
- CABIBBO, N.; PARISI, G. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation. **Phys. Lett. B**, v. 59, p. 67–69, 1975.

CHAO, J.; CHU, P.; HUANG, M. Inverse magnetic catalysis induced by sphalerons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 88, p. 054009, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.054009>>.

CHODOS, A. et al. Baryon structure in the bag theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 2599–2604, Oct 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2599>>.

_____. New extended model of hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 3471–3495, Jun 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3471>>.

COLLINS, J. C.; PERRY, M. J. Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 34, p. 1353–1356, May 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1353>>.

COMMITTEE, T. D. N. S. A. **The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range Plan**. 2008.

COSTA, P. et al. How parameters and regularization affect the polyakov–nambu–jonas-lasinio model phase diagram and thermodynamic quantities. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 016007, Jan 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.016007>>.

DANZER, J. et al. A study of the sign problem for lattice qcd with chemical potential. **Physics Letters B**, v. 682, n. 2, p. 240–245, 2009. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309013239>>.

DAS, A. K. **Finite Temperature Field Theory**. New York: World Scientific, 1997. ISBN 978-981-02-2856-9, 978-981-4498-23-4.

DEGRAND, T. et al. Masses and other parameters of the light hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 12, p. 2060–2076, Oct 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.2060>>.

DENKE, R. Z. **Transições de fase na matéria de quarks magnetizada com repulsão vetorial**. 2015. 240 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2015.

DOSCH, H. G.; NARISON, S. Direct extraction of the chiral quark condensate and bounds on the light quark masses. **Phys. Lett. B**, v. 417, p. 173–176, 1998.

DUARTE, D. C. **Estrutura de fases da matéria de quarks quente, densa e magnetizada no modelo de Nambu–Jona-Lasinio**. 2018. Tese (Doutorado) — Santa Maria U., Brazil, 2018.

DUARTE, D. C.; FARIAS, R. L. S.; RAMOS, R. O. Optimized perturbation theory for charged scalar fields at finite temperature and in an external magnetic field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 083525, Oct 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.083525>>.

DUARTE, D. C. et al. Quarkyonic effective field theory, quark-nucleon duality, and ghosts. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 104, p. L091901, Nov 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.L091901>>.

FARIAS, R. L. S. et al. Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 074011, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074011>>.

FAYAZBAKHS, S.; SADOOGHI, N. Phase diagram of hot magnetized two-flavor color-superconducting quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 025026, Jan 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.025026>>.

FERREIRA, M. **QCD phase diagram under an external magnetic field**. 2015. 125 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade de Coimbra, Portugal, 2015.

FILHO, O. **DIAGRAMAS DE FASE PARA A MATÉRIA NUCLEAR E DE QUARKS**. 2011. 132 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2011.

FODOR, Z. Selected results in lattice quantum chromodynamics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2012, n. 1, 11 2012. ISSN 2050-3911. 01A108. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/ptep/pts033>>.

FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet gluon picture. **Physics Letters B**, v. 47, n. 4, p. 365–368, 1973. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269373906254>>.

FUKUSHIMA, K. Chiral effective model with the Polyakov loop. **Phys. Lett. B**, v. 591, p. 277–284, 2004.

_____. Chiral effective model with the polyakov loop. **Physics Letters B**, v. 591, n. 3, p. 277–284, 2004. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304006203>>.

FUKUSHIMA, K.; HATSUDA, T. The phase diagram of dense qcd. **Reports on Progress in Physics**, v. 74, n. 1, p. 014001, dec 2010. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/1/014001>>.

FUKUSHIMA, K.; KHARZEEV, D. E.; WARRINGA, H. J. Chiral magnetic effect. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 074033, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.074033>>.

GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. **Physics Letters**, v. 8, n. 3, p. 214–215, 1964. ISSN 0031-9163. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031916364920013>>.

GELL-MANN, M.; LEVY, M. The axial vector current in beta decay. **Nuovo Cim.**, v. 16, p. 705, 1960.

GELL-MANN, M.; OAKES, R. J.; RENNER, B. Behavior of current divergences under $su_3 \times su_3$. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 175, p. 2195–2199, Nov 1968. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.2195>>.

GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. [S.l.: s.n.], 1996.

_____. Quantization of the photon field. In: _____. **Field Quantization**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996. p. 171–210. ISBN 978-3-642-61485-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9_7>.

GROSS, D. J. Nobel lecture: The discovery of asymptotic freedom and the emergence of qcd. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 77, n. 3, p. 837, 2005.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.

GROUP, P. D. et al. Review of Particle Physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2022, n. 8, p. 083C01, 08 2022. ISSN 2050-3911. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>>.

HANSEN, H. QCD Critical Behavior in the PNJL Model. **eCONF**, C0906083, p. 05, 2009.

HOLLAND, K.; WIESE, U.-J. The Center symmetry and its spontaneous breakdown at high temperatures. p. 1909–1944, 11 2000.

HUANG, K. **Quarks, Leptons and Gauge Fields**. 2nd. ed. WORLD SCIENTIFIC, 1992. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/1409>>.

KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite-temperature field theory: Principles and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-17322-3, 978-0-521-82082-0, 978-0-511-22280-1.

KHARZEEV, D. Parity violation in hot qcd: Why it can happen, and how to look for it. **Physics Letters B**, v. 633, n. 2, p. 260–264, 2006. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305017430>>.

KHARZEEV, D. E.; MCLERRAN, L. D.; WARRINGA, H. J. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: event by event p and cp violation. **Nuclear Physics A**, v. 803, n. 3, p. 227–253, 2008. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037594740800078X>>.

KLEVANSKY, S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 64, p. 649–708, 1992.

KLUTH, S. Tests of quantum chromo dynamics at e+e colliders. **Reports on Progress in Physics**, v. 69, n. 6, p. R04, jun 2006. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/69/6/R04>>.

KNEUR, J.-L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Thermodynamics and phase structure of the two-flavor nambu–jona-lasinio model beyond large N_c . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 81, p. 065205, Jun 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.065205>>.

MCLERRAN, L.; REDLICH, K.; SASAKI, C. Quarkyonic matter and chiral symmetry breaking. **Nuclear Physics A**, v. 824, n. 1, p. 86–100, 2009. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947409002036>>.

MCLERRAN, L. D.; SVETITSKY, B. Quark liberation at high temperature: A monte carlo study of $su(2)$ gauge theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 24, p. 450–460, Jul 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.450>>.

MENEZES, D. P. et al. Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu-Jona-Lasinio Model. **Phys. Rev. C**, v. 79, p. 035807, 2009.

MEYER-ORTMANN, H. Phase transitions in quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 68, p. 473–598, Apr 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.473>>.

MINWALLA, S.; RAAMSDONK, M. V.; SEIBERG, N. Noncommutative perturbative dynamics. **JHEP**, v. 02, p. 020, 2000.

MIRANSKY, V. A. **Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories**. WORLD SCIENTIFIC, 1994. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2170>>.

MOTTA, H. da. Chirality and neutrinos, a student first approach. **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 1558, n. 1, p. 012014, 2020.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 345–358, Apr 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>>.

_____. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 124, p. 246–254, Oct 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>>.

NORONHA, J. L.; SHOVKOVY, I. A. Color-flavor locked superconductor in a magnetic field. **Phys. Rev. D**, v. 76, p. 105030, 2007. [Erratum: *Phys.Rev.D* 86, 049901 (2012)].

Nuclotron-based Ion Collider Facility. **Phase Diagram**. 2023. Acessado em 16 jul 2023. Disponível em: <<https://nica.jinr.ru/physics.php>>.

PASQUALOTTO, A. E. B. et al. Causality violation and the speed of sound of hot and dense quark matter in the Nambu–Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. D**, v. 107, n. 9, p. 096017, 2023.

RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. The Condensed matter physics of QCD. In: _____. **At the frontier of particle physics. Handbook of QCD. Vol. 1-3**. [S.l.: s.n.], 2000. p. 2061–2151.

RATTI, C.; RÖSSNER, S.; WEISE, W. Quark number susceptibilities: Lattice qcd versus pnjl model. **Physics Letters B**, v. 649, n. 1, p. 57–60, 2007. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026930700370X>>.

RATTI, C.; THALER, M. A.; WEISE, W. Phases of qcd: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 73, p. 014019, Jan 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.014019>>.

ROBERTS, C. D. Strong QCD and Dyson-Schwinger Equations. **IRMA Lect. Math. Theor. Phys.**, v. 21, p. 355–458, 2015.

RUGGIERI, M. Critical end point of quantum chromodynamics detected by chirally imbalanced quark matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 014011, Jul 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.014011>>.

RUGGIERI, M.; CHERNODUB, M. N.; LU, Z.-Y. Topological susceptibility, divergent chiral density, and phase diagram of chirally imbalanced qcd medium at finite temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 102, p. 014031, Jul 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.014031>>.

RUGGIERI, M.; PENG, G. X. Quark matter in a parallel electric and magnetic field background: Chiral phase transition and equilibration of chiral density. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 094021, May 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.094021>>.

RUGGIERI, M.; PENG, G. X.; CHERNODUB, M. Chiral relaxation time at the crossover of quantum chromodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 054011, Sep 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.054011>>.

SATZ, H. **Extreme states of matter in strong interaction physics. An introduction.** New York: Springer Verlag, 2012. v. 841. ISBN 978-3-642-23907-6.

SHARMA, S. QCD thermodynamics on the lattice. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 2013, p. 1–26, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155%2F2013%2F452978>>.

STERMAN, G. et al. Handbook of perturbative qcd. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 67, n. 1, p. 157, 1995.

TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 030001, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>>.

WANG, B. et al. Effect of the chiral chemical potential on the position of the critical endpoint. **Phys. Rev. D**, v. 91, n. 3, p. 034017, 2015.

WEINBERG, S. Non-abelian gauge theories of the strong interactions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 31, p. 494–497, Aug 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.494>>.

WEISS, N. Wilson line in finite-temperature gauge theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 25, p. 2667–2672, May 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.25.2667>>.

WILCZEK, F. **Fundamental Constants.** 8 2007.

WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 2445–2459, Oct 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>>.

XU, S.-S. et al. Chiral phase transition with a chiral chemical potential in the framework of Dyson-Schwinger equations. **Phys. Rev. D**, v. 91, n. 5, p. 056003, 2015.

YAMAMOTO, A. Chiral magnetic effect in lattice QCD with a chiral chemical potential. **Phys. Rev. Lett.**, v. 107, p. 031601, 2011.

YANG, L.-K. et al. A brief review of chiral chemical potential and its physical effects. **Symmetry**, MDPI, v. 12, n. 12, p. 2095, 2020.

ZWEIG, G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. In: _____. **DEVELOPMENTS IN THE QUARK THEORY OF HADRONS. VOL. 1. 1964 - 1978.** [S.l.: s.n.], 1964. p. 22–101.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES

A.1 – AS MATRIZES GAMMA

As matrizes γ de Dirac são definidas como:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

sendo $\mathbb{1}_{2 \times 2}$ a matriz identidade de ordem 2 e as matrizes σ_i , sendo as matrizes sigma de Pauli definidas como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Dessa forma, podemos escrever as matrizes γ na base de Dirac em 4 dimensões da seguinte forma explícita;

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Assim define-se o vetor $\vec{\tau}$,

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

APÊNDICE B – UNIDADES NATURAIS

Na física temos uma quantidade particular de certa grandeza física utilizada para eventuais comparações, e a isso damos o nome de unidade de medida. O sistema padrão na física utilizado para medição de grandezas físicas é conhecido como sistema internacional de medidas (SI) ou sistema MKS, que usa o metro, quilograma e o segundo como unidades básicas de medida. Temos 4 grandezas básicas¹

$$[L] = \text{m} \rightarrow \text{comprimento}, \quad (\text{B.1})$$

$$[M] = \text{kg} \rightarrow \text{massa}, \quad (\text{B.2})$$

$$[t] = \text{s} \rightarrow \text{tempo}, \quad (\text{B.3})$$

$$[T] = \text{K} \rightarrow \text{temperatura}. \quad (\text{B.4})$$

As unidades de medidas são convenções usadas para descrever dimensões. Essas quantidades físicas que serão utilizadas aqui são definidas em termos das constantes naturais, tais como, a velocidade da luz, constante de Planck reduzida, constante de Boltzmann, constante gravitacional e a constante de força de Coulomb, onde elas se tornam

$$c = \hbar = K_B = G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1. \quad (\text{B.5})$$

Esse conjunto de grandezas físicas em específico na Eq. B.5 são as unidades naturais de Planck. As unidades de Planck são medidas independente da carga elementar, que se medida em termos das unidades de Planck chegamos na raiz da constante da estrutura fina;

$$e = \sqrt{\alpha}, \quad (\text{B.6})$$

¹<https://www.nist.gov/pml/weights-and-measures/metric-si/si-units>

cujo valor é

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c(4\pi\epsilon_0)} \approx \frac{1}{137}. \quad (\text{B.7})$$

Fazendo a análise dimensional de algumas dessas constantes

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{B.8})$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J.Hz}^{-1}}{2\pi} = 1,054571817 \times 10^{-34} \text{ J.s}, \quad (\text{B.9})$$

$$G = 6,67430 \times 10^{-11} \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}, \quad (\text{B.10})$$

$$K_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987742438 \times 10^9 \text{ C}^{-2} \text{ N m}^2. \quad (\text{B.12})$$

Assim,

$$[c] = \text{m s}^{-1} \quad (\text{B.13})$$

$$[\hbar] = \text{J.s} = \text{N m s} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}, \quad (\text{B.14})$$

$$[G] = \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m}^2}{\text{kg}^2} = \text{kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad (\text{B.15})$$

$$[K_B] = \text{J K}^{-1} = \text{N m K}^{-1} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m K}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \text{C}^{-2}\text{N m}^2 = \text{C}^{-2}\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\text{m}^2 = \text{C}^{-2}\frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^2}. \quad (\text{B.17})$$

Na próxima seção B.1 será trabalhado em cima da constante da velocidade da luz c e mostraremos o que implica ao utilizarmos $c = 1$ unidade.

B.1 – RELATIVIDADE

Em unidades naturais, com $c = 1$ temos a primeira consideração: as dimensões de tempo são iguais às dimensões de comprimento. Denotamos unidades de tempo como $[t]$ e unidades de comprimento como $[l]$ (do inglês *length*):

$$\begin{aligned} c &= \frac{L}{t}, \\ t &= L. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Com isso tempo e espaço possuem a mesma unidade de medida,

$$[t] = [L]. \quad (\text{B.19})$$

Além disso, implicará que

$$\begin{aligned} c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s} = 1 \\ \Rightarrow & 2.99792458 \times 10^8 \text{m} = \text{s}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Por esse fato anterior é possível concluir que:

$$E = M c^2, \quad (\text{B.21})$$

$$[E] = [M], \quad (\text{B.22})$$

dessa forma, em unidades naturais a energia e massa possuem a mesma dimensão. Será analisado agora a relação energia-momento ou relação de dispersão relativística

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (\text{B.23})$$

$$[E]^2 = [M]^2 \frac{[L]^2}{[t]^2} + [M]^2 = [M]^2 + [M]^2, \quad (\text{B.24})$$

$$p = m v, \quad (\text{B.25})$$

$$[p] = [M]. \quad (\text{B.26})$$

Um adendo: a unidade de medida Elétron-volt (eV) de energia, pode se relacionar com a massa a partir da Eq. B.21,

$$\frac{eV}{c^2} = m. \quad (\text{B.27})$$

Como $c = 1$

$$m = 1 \text{ eV}. \quad (\text{B.28})$$

Alguns múltiplos de elétron-volt utilizados na física de partículas e nuclear:

$$\text{KeV} = 10^3 \text{ eV}, \quad (\text{B.29})$$

$$\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}, \quad (\text{B.30})$$

$$\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}, \quad (\text{B.31})$$

$$\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}. \quad (\text{B.32})$$

O elétron-volt é de grande importância aqui nesta seção e nas próximas duas seções, seção B.2 e seção B.3

B.2 – MECÂNICA QUÂNTICA

A constante de grande importância na mecânica quântica é a constante de Planck

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.06 \times 10^{-34} \text{ J.s} = 1, \quad (\text{B.33})$$

$$1.06 \times 10^{-34} \text{J} = 1 \text{s}^{-1}. \quad (\text{B.34})$$

Dessa maneira, energia pode ser medida em unidades de t^{-1} ou também em L^{-1} , já que

$$[t]^{-1} = [L]^{-1}. \quad (\text{B.35})$$

No entanto, sabe-se que a energia pode ser expressa em unidades de eV, vamos então transformar o \hbar também em termos do elétron-volt

$$\hbar = 6.58211871 \times 10^{-16} \text{eV.s}. \quad (\text{B.36})$$

Alguns fatores de conversão que são úteis, tais como

$$\hbar = 6.58211871 \times 10^{-22} \text{MeV.s}, \quad (\text{B.37})$$

$$\hbar c = 197.327053 \text{MeV fm}, \quad (\text{B.38})$$

são obtidos ao impormos que $\hbar c = 1$

$$\begin{aligned} \left(299792458 \times 10^{15} \frac{\text{fm}}{\text{s}} \right) \left(6.58211871 \times 10^{-16} \text{eV.s} \right) &= 1 \\ 197.32698044 \text{MeV} &= \frac{1}{\text{fm}} \\ \text{MeV} &\approx \frac{1}{197 \text{fm}}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Nesta seção, foi visto que é possível relacionar energia em Joules com o elétron-volt. Isso será de grande importância para a próxima seção B.3.

B.3 – TERMODINÂMICA

Em termodinâmica e mecânica estatística a constante de Boltzmann tem grande importância, ao fazer o elo entre a energia e a temperatura do sistema;

$$E = K_B T. \quad (\text{B.40})$$

Como foi definido também $K_B = 1$, dessa forma

$$[E] = [T], \quad (\text{B.41})$$

$$K_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.617333262 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} = 1, \quad (\text{B.42})$$

$$8.617333262 \times 10^{-5} \text{ eV} = \text{K}. \quad (\text{B.43})$$

Então, será possível efetuar a temperatura também em unidades de energia e vice-versa. Aqui temos algumas relações de energia em Elétron-volt com temperatura em Kelvin

- 1 eV = $1.1605 \times 10^4 \text{ K}$
- 1 KeV = $1.1605 \times 10^7 \text{ K}$
- 1 MeV = $1.1605 \times 10^{10} \text{ K}$
- 1 GeV = $1.1605 \times 10^{13} \text{ K}$
- 1 TeV = $1.1605 \times 10^{16} \text{ K}$

De forma geral, as quantidades físicas possuem uma proporcionalidade dimensional, então podemos relacioná-las através do seguinte sistema (WILCZEK, 2007)

$$m^a l^b t^c \propto c^\alpha \hbar^\beta E^\gamma. \quad (\text{B.44})$$

Obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \alpha = b - 2a \\ \beta = b + c \\ \gamma = a - b - c. \end{cases}$$

Fazendo uma análise dimensional de maneira mais rápida;

- $m^1 l^0 t^0 = c^{-2} \hbar^0 E^1 \Rightarrow [M] = \text{eV } c^{-2}$
- $m^0 l^0 t^1 = c^0 \hbar^1 E^{-1} \Rightarrow [t] = \text{eV}^{-1} \hbar$
- $m^0 l^1 t^0 = c^1 \hbar^1 E^{-1} \Rightarrow [l] = \text{eV}^{-1} \hbar c$
- $m^1 l^1 t^{-1} = c^{-1} \hbar^0 E^1 \Rightarrow [p] = \text{eV } c^{-1}$
- $m^1 l^{-1} t^{-2} = c^{-3} \hbar^{-3} E^4 \Rightarrow [P] = \text{eV}^4 c^{-3} \hbar^{-3}$

APÊNDICE C – SIMETRIA QUIRAL

A cromodinâmica quântica (QCD), possui por construção o mecanismo da quebra espontânea da simetria quiral no vácuo. Dessa forma, este mecanismo é responsável pela geração de grande parte da massa do universo composto por prótons e nêutrons. Para estudar tal simetria, inicialmente partimos da densidade Lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi, \quad (C.1)$$

no qual ψ é um campo fermiônico espinorial no espaço de Dirac, que possui 4 componentes. Além disso, o termo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, é definido como o produto de uma matriz γ . O termo da massa m , i é a unidade imaginária e a derivada parcial $\rlap{-}\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ é contraída com as matrizes gamma de Dirac, que estão definidas no Apêndice A. Com isso, será resolvida a equação de Euler-Lagrange e assim obter a equação de Dirac:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}, \\ \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu) &= -m\bar{\psi}, \\ \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu) + m\bar{\psi} &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 + m\psi^\dagger \gamma^0 &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 + m\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 &= 0\gamma^0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger + m\psi^\dagger &= 0. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Toma-se o transposto conjugado, indicado pelo símbolo \dagger , dos dois lados da Eq. (C.2),

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger + m\psi^\dagger)^\dagger &= (0)^\dagger, \\ -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0, \end{aligned} \quad (C.3)$$

obtendo assim a equação de Dirac,

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (C.4)$$

Reescrevendo a Eq. (C.4) da forma explicita matricial, da seguinte forma;

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

dessa forma então,

$$i \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 \\ \partial_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \partial_i \\ -\sigma^i \partial_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$i \begin{pmatrix} \partial_0 \psi_L \\ \partial_0 \psi_R \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sigma^i \partial_i \psi_L \\ -\sigma^i \partial_i \psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Assim obtendo um sistema de equações;

$$\begin{cases} i\partial_0 \psi_R - i\sigma^i \partial_i \psi_R - m\psi_L = 0 \\ i\partial_0 \psi_L + i\sigma^i \partial_i \psi_L - m\psi_R = 0. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Por meio das relações canônicas, $i\partial_0 \rightarrow p_0$ e $i\partial_i \rightarrow p_i$, é possível reescrever o sistema de equações C.8 da seguinte forma;

$$\begin{cases} p_0 \psi_R - \sigma^i p_i \psi_R - m\psi_L = 0 \\ p_0 \psi_L + \sigma^i p_i \psi_L - m\psi_R = 0. \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Além disso, o operador helicidade é definido como;

$$\hat{p} \equiv \frac{\vec{p}}{p_0}, \quad (\text{C.10})$$

e quando a massa for nula, podemos notar que;

$$\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_R = \psi_R \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_L = -\psi_L. \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Dessa forma diferencia-se os férmions de mão direita ψ_R dos férmions de mão esquerda ψ_L , pois aplicando o operador helicidade o espinor pode trocar de sinal ou se manter inalterado. Em mecânica quântica, é possível escrever o espinor de Dirac com duas componentes e desta maneira definir projetores nas bases de mão direita e de mão

esquerda:

$$P_R\psi = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi = \psi_R, \quad (\text{C.12})$$

$$P_L\psi = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi = \psi_L, \quad (\text{C.13})$$

com algumas propriedades:

$$P_R + P_L = 1, \quad (\text{C.14})$$

$$P_R P_L = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$P_R P_R = P_R, \quad (\text{C.16})$$

$$P_L P_L = P_L, \quad (\text{C.17})$$

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad (\text{C.18})$$

$$\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu. \quad (\text{C.19})$$

Reescrevendo $\bar{\psi}$, então

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \\ &= (1 \times \psi)^\dagger \gamma^0 \\ &= ((P_R + P_L) \times \psi)^\dagger \gamma^0 \\ &= (\psi_L + \psi_R)^\dagger \gamma^0 \\ &= (\psi_L^\dagger + \psi_R^\dagger) \gamma^0 \\ &= \psi_L^\dagger \gamma^0 + \psi_R^\dagger \gamma^0 \\ &= \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Assim, escreve-se a Lagrangiana de Dirac como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Dirac} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(i\cancel{\partial} - m)(\psi_L + \psi_R) \\
&= \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} - m)(\psi_L + \psi_R) + \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} - m)(\psi_L + \psi_R) \\
&= \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} - m)\psi_L + \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} - m)\psi_R \\
&+ \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} - m)\psi_L + \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} - m)\psi_R \\
&= \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} - m)\psi_L + \bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_R - m\bar{\psi}_L\psi_R \\
&+ \bar{\psi}_R i\cancel{\partial}\psi_L - m\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} - m)\psi_R.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Os termos $\bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_R$ e $\bar{\psi}_R i\cancel{\partial}\psi_L$ são nulos, pois;

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_R &= \psi_L^\dagger i\gamma^0 \cancel{\partial} P_R \psi \\
&= (P_L \psi)^\dagger i\gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi \\
&= \psi \gamma^0 P_R P_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

Com isso a Lagrangiana de Dirac escrita em termos dos campos fermiônicos de mão esquerda e direita é

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} - m)\psi_L + \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} - m)\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \tag{C.23}$$

Note que a lagrangiana é simétrica frente as transformações:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha_L} \psi_L, \tag{C.24}$$

$$\psi_R \rightarrow e^{i\alpha_R} \psi_R, \tag{C.25}$$

se e somente se $m = 0$, dessa maneira a simetria do tipo $U(1)_L \otimes U(1)_R$ é denominada simetria quiral, onde o termo de massa quebra explicitamente a simetria quiral.

APÊNDICE D – CÁLCULO DO POTENCIAL TERMODINÂMICO NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

A obtenção do potencial termodinâmico do modelo, que nos trará toda a informação termodinâmica da matéria de quarks, começa a partir da densidade lagrangiana (BUBALLA, 2005)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_c)\psi + G_s[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2]. \quad (D.1)$$

Encontramos a função de partição por meio da aproximação de campo médio, onde substituímos o condensado de quark, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, pelo seu valor esperado somado a uma flutuação pequena, tal que $\delta^2 \approx 0$.

$$(\bar{\psi}\psi) \approx \langle\bar{\psi}\psi\rangle + \delta, \quad (D.2)$$

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\delta, \quad (D.3)$$

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle((\bar{\psi}\psi) - \langle\bar{\psi}\psi\rangle), \quad (D.4)$$

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx -\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2(\bar{\psi}\psi)\langle\bar{\psi}\psi\rangle. \quad (D.5)$$

Utilizando o seguinte *ansatz* :

$$(\bar{\psi}i\gamma^5\tau\psi) \approx \langle\bar{\psi}i\gamma^5\tau\psi\rangle = 0. \quad (D.6)$$

Substituindo as equações (D.5) e (D.6) na equação (D.1). Dessa maneira, obtém-se a lagrangiana efetiva a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi + G[-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2(\bar{\psi}\psi)\langle\bar{\psi}\psi\rangle] \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_c)\psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + 2G(\bar{\psi}\psi)\langle\bar{\psi}\psi\rangle \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_c + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle)\psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - (m_c - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle))\psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 \\ &= \bar{\psi}((i\cancel{\partial} - M)\psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2). \end{aligned} \quad (D.7)$$

defini-se o termo $m_c - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \equiv M$ e nomeamos M como a massa efetiva. Para simplificar a notação, escrevemos $\sigma = -\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, como um campo auxiliar constante nas coordenadas do espaço-tempo. Dessa forma, é possível reescrever a lagrangiana efetiva;

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - G\sigma^2, \quad (\text{D.8})$$

em na aproximação de campo médio. Desse modo, com a Lagrangiana efetiva podemos construir o potencial termodinâmico. Utilizando como uma base o livro do Kapusta e Gale (2011) e seus métodos para uma teoria quântica de campos à temperatura finita, logo temos que;

$$\Omega = -\frac{1}{\beta V} \ln \mathcal{Z}, \quad (\text{D.9})$$

com \mathcal{Z} sendo a função de partição do *ensemble* gran canônico;

$$\mathcal{Z} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\int d^4x [\bar{\psi}\mathcal{L}_{eff}\psi + \hat{\mu}N] \right], \quad (\text{D.10})$$

Por meio do formalismo de Matsubara, usado em livros como, por exemplo, Das (1997) trocamos a integral no tempo por uma em β , reescrevemos (D.10)

$$\mathcal{Z} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}\mathcal{L}_{eff}\psi + \hat{\mu}N] \right]. \quad (\text{D.11})$$

sendo N uma quantidade conservada, $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ e a matriz dos potenciais químicos no espaço dos sabores

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \mu_u & 0 \\ 0 & \mu_d \end{pmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Para a matéria simétrica, ou seja, $\mu_u = \mu_d = \mu$ temos que:

$$\hat{u} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.13})$$

Reescrevemos o lado direito da equação (D.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} + \bar{\psi}\gamma^0\psi &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - G\sigma^2 + \bar{\psi}\gamma^0\hat{\mu}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M + \gamma^0\hat{\mu})\psi - G\sigma^2,\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

isso irá nos possibilitar separar a função de partição em duas partes, uma para o campo auxiliar \mathcal{Z}_{const} e uma para campos fermiônicos \mathcal{Z}_{quark} :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M + \gamma^0\hat{\mu})\psi - G\sigma^2] \right] \\ &= \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (-G\sigma^2) \right] \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \times \\ &\quad \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M + \gamma^0\hat{\mu})\psi] \right] \\ &= \mathcal{Z}_{const} \mathcal{Z}_{quark}.\end{aligned}\quad (\text{D.15})$$

Assim, inicialmente resolvendo a função de partição do campo auxiliar obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x G\sigma^2 \right] \mathcal{Z}_{quark} \\ &= \exp[-\beta V G\sigma^2] \mathcal{Z}_{quark}.\end{aligned}\quad (\text{D.16})$$

Além disso, no Apêndice F possuímos uma breve discussão sobre o formalismo de tempo imaginário.

D.1 – A FUNÇÃO DE PARTIÇÃO PARA CAMPOS FERMIÔNICOS

Resolvendo a função de partição da parte que depende dos campos fermiônicos:

$$\mathcal{Z}_{quark} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M + \gamma^0\hat{\mu})\psi] \right], \quad (\text{D.17})$$

por meio da série de Fourier, será reescrito os campos e utilizando o formalismo de Matsubara, que relaciona a temperatura com a componente temporal da integral. Como resultado da utilização do formalismo usado em (D.17), a frequência $\omega_n = \frac{\pi}{\beta}(2n + 1)$:

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, n} e^{i(\omega_n \tau + \vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n}; \quad (\text{D.18})$$

$$\bar{\psi}(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, n} e^{-i(\omega_n \tau + \vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n}^*. \quad (\text{D.19})$$

Substitui a (D.18) e (D.19) na seguinte expressão;

$$\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(i\not{\partial} - M + \gamma^0 \hat{\mu})\psi, \quad (\text{D.20})$$

com isso, obtém-se a seguinte expressão

$$\mathcal{Z}_{quark} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\sum_{\vec{k}, n} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{V} \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n}^* (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n} \right]. \quad (\text{D.21})$$

Por meio da convenção de Einstein para a soma de índices repetidos e gregos e latinos $i = 1, 2, 3$ teremos:

$$\begin{aligned} \not{k} &= k_\mu \gamma^\mu = k_0 \gamma^0 - k_i \gamma^i, \\ &= i\omega_n \gamma^0 - k_i \gamma^i. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

A integral em d^3x é equivalente a um fator de volume após a transformada de Fourier, e pode ser simplificada com o fator $\frac{1}{V}$. Além disso, a integral em τ resulta em um fator β , e com isso temos;

$$\mathcal{Z}_{quark} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\sum_{\vec{k}, n} \beta \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n}^* (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k}, \omega_n} \right]. \quad (\text{D.23})$$

Manipulando a equação (D.23) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{quark} &= \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\sum_{\vec{k},n} \beta \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} \right] \\
&= \int [d\bar{\psi}][d\psi] \prod_{\vec{k},n} \exp \left[\beta \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} \right] \\
&= \prod_{\vec{k},n} \int [d\bar{\psi}_{\vec{k},\omega_n}][d\tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n}] \exp \left[\beta \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} \right]. \tag{D.24}
\end{aligned}$$

Tomando o logaritmo em ambos os lados de (D.24)

$$\ln \mathcal{Z}_{quark} = \sum_{\vec{k},n} \ln \int [d\bar{\psi}_{\vec{k},\omega_n}][d\tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n}] \exp \left[\beta \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu}) \tilde{\psi}_{\vec{k},\omega_n} \right]. \tag{D.25}$$

Essas integrais são conhecidas na literatura como integrais de variáveis de Grassmann, que obedecem à álgebra de Grassmann (KAPUSTA; GALE, 2011). Definindo a matriz $A = (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu})$ e utilizando a propriedade:

$$\int [d\tilde{\psi}][d\tilde{\psi}] \exp [\tilde{\psi} A \tilde{\psi}] = \det A, \tag{D.26}$$

em (D.24) temos que

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z}_{quark} &= \sum_{\vec{k},n} \ln [\det \beta (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu})] \\
&= \sum_{\vec{k},n} \ln [\det \beta (\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \hat{\mu})]. \tag{D.27}
\end{aligned}$$

Já que $\beta (\not{k} - M + \gamma^0 \hat{\mu})$ é uma matriz no espaço composto pelos espaços de cor, sabor e de Dirac cuja forma explícita é normalmente omitida, temos:

$$\ln \det [I_{cor} \otimes I_{sabor} \otimes (\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \hat{\mu})]. \tag{D.28}$$

Manipulando (D.28)

$$\begin{aligned}
\det [I_{cor} \otimes I_{sabor} \otimes (\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \hat{\mu})] &= \det [(I_{cor} \otimes I_{sabor} \otimes (\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \hat{\mu}))] \\
&= \det [(\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \hat{\mu})]^{N_c N_f}. \tag{D.29}
\end{aligned}$$

Com I_{cor} e I_{sabor} sendo as matrizes de cor e sabor e tomando o logaritmo de ambos os lados da equação, obteremos:

$$\ln \det[(\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \mu)]^{N_c N_f} = N_c N_f \ln \det[(\gamma^\mu k_\mu - M + \gamma^0 \mu)]. \quad (D.30)$$

Assim, o último determinante na equação (D.28) é apenas devido ao espaço de Dirac

$$\begin{aligned} N_c N_f \sum_{\vec{k}, n} \ln[\det \beta(\gamma^\mu k_\mu - +\gamma^0 \hat{\mu})] &= N_c N_f \sum_{\vec{k}, n} \ln[\beta^4((k_0 + \mu)^2 - \vec{k}^2 - M^2)^2] \\ &= 2N_c N_f \sum_{\vec{k}} \sum_n \ln[\beta^2((k_0 + \mu)^2 \\ &\quad - \vec{k}^2 - M^2)]. \end{aligned} \quad (D.31)$$

No limite contínuo podemos escrever:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (D.32)$$

Definindo $E_k = \sqrt{M^2 + K^2}$, então obtemos a função de partição para os quarks:

$$\ln \mathcal{Z}_{quark} = 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left\{ \beta^2 \left[(k_0 + \mu)^2 - E_k^2 \right] \right\}. \quad (D.33)$$

Para obter o potencial termodinâmico em função de T e μ precisaremos somar as frequências de Matsubara, vistas a seguir.

D.2 – SOMANDO AS FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA

Em Teoria de campos à temperatura finita, o somatório de frequências de Matsubara (nomeado em homenagem a Takeo Matsubara) é o somatório sobre frequências imaginárias discretas (DAS, 1997). Tem a seguinte forma

$$S_\eta = \frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} g(i\omega_n), \quad (D.34)$$

e para o caso específico aqui, ou seja, considere os campos fermiônicos, as frequências possuem a seguinte forma

$$k_0 = i\omega_n = \frac{i\pi}{\beta}(2n + 1). \quad (\text{D.35})$$

Do ponto de vista analítico é muito mais prático, fazer essa operação sobre a derivada de $\ln \mathcal{Z}$ com relação a energia E_k ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial E_k} &= 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{\partial}{\partial E_k} \ln \left\{ \beta^2 \left[(k_0 + \mu)^2 - E_k^2 \right] \right\} \\ &= 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{-2E_k}{\beta^2 [(k_0 + \mu)^2 - E_k^2]} \\ &= -2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{k_0 + \mu - E_k} - \frac{1}{k_0 + \mu + E_k} \right) \\ &= 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{k_0 + \mu + E_k} - \frac{1}{k_0 + \mu - E_k} \right) \\ &= 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta^2} \left(\sum_n \frac{1}{k_0 + \mu + E_k} - \sum_n \frac{1}{k_0 + \mu - E_k} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

De forma mais explícita usando D.35

$$\sum_n \frac{1}{k_0 + \mu + E_k} = \beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n + 1) - \beta(-E_k - \mu)}, \quad (\text{D.37})$$

$$\sum_n \frac{1}{k_0 + \mu - E_k} = -\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n + 1) - \beta(-E_k + \mu)}, \quad (\text{D.38})$$

com $n \in \mathbb{Z}$, notamos que ao mudarmos $n \rightarrow -n' - 2$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n + 1) - x} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n' + 1) + x}. \quad (\text{D.39})$$

Assim podemos reescrever o somatório do lado direito da equação (D.38), os somatórios são equivalentes, pois $2n' + 1$ percorre todos os valores ímpares também. Por fim temos então somatórios demonstrados no apêndice D como;

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n + 1) - x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-x} + 1}, \quad (\text{D.40})$$

$$\sum_n \frac{1}{i\pi(2n+1) - \beta(-E_k - \mu)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta(E_k + \mu)} + 1}, \quad (\text{D.41})$$

$$\sum_n \frac{1}{i\pi(2n+1) - \beta(-E_k + \mu)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1}. \quad (\text{D.42})$$

Substituindo essas duas últimas equações em (D.36), chegaremos em;

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{quark}}{\partial E_k} = 2V N_c N_f \beta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_k + \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \right], \quad (\text{D.43})$$

e integrando o lado direito da equação (D.43) em relação a E_k , obtemos a função de partição para os quarks

$$\ln \mathcal{Z}_{quark} = 2V N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \beta E_k + \ln[1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}] + \ln[1 + e^{-\beta(E_k + \mu)}] \right\}. \quad (\text{D.44})$$

D.3 – POTENCIAL TERMODINÂMICO TOTAL

Finalmente obtemos o potencial termodinâmico ou densidade do Grande Potencial termodinâmico, ou a densidade do potencial termodinâmico do *Ensemble* Gran Canônico. Nesse caso, para a matéria SU(2) de quarks na aproximação de campo médio é potencial termodinâmico é dado por:

$$\begin{aligned} \Omega(M, T, \mu) &= -\frac{1}{\beta V} \ln \mathcal{Z} \\ &= \frac{1}{\beta V} (\ln \mathcal{Z}_{const} + \ln \mathcal{Z}_{quark}), \\ &= \frac{(M - m_c)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ E_k \right. \\ &\quad \left. + T \ln[1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}] + T \ln[1 + e^{-\beta(E_k + \mu)}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

o mesmo que foi colocado na Seção 2.1, mas especificadamente Eq. 2.2.

APÊNDICE E – SOMA DE FREQUÊNCIAS MATSUBARA E FÓRMULAS RELACIONADAS

Como observamos no apêndice anterior, a soma das frequências de Matsubara é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1) - x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-x} + 1}. \quad (\text{E.1})$$

O somatório pode ser avaliado por meio de uma integral conveniente no plano complexo. Antes de realizá-la vamos observar as propriedades da função $\tanh(x)$:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \tanh(ix) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= i \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= i \tan(x). \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

A função $\tan(x)$ é uma função periódica de $[\pi/2, \pi/2]$ e que possui polos singulares com:

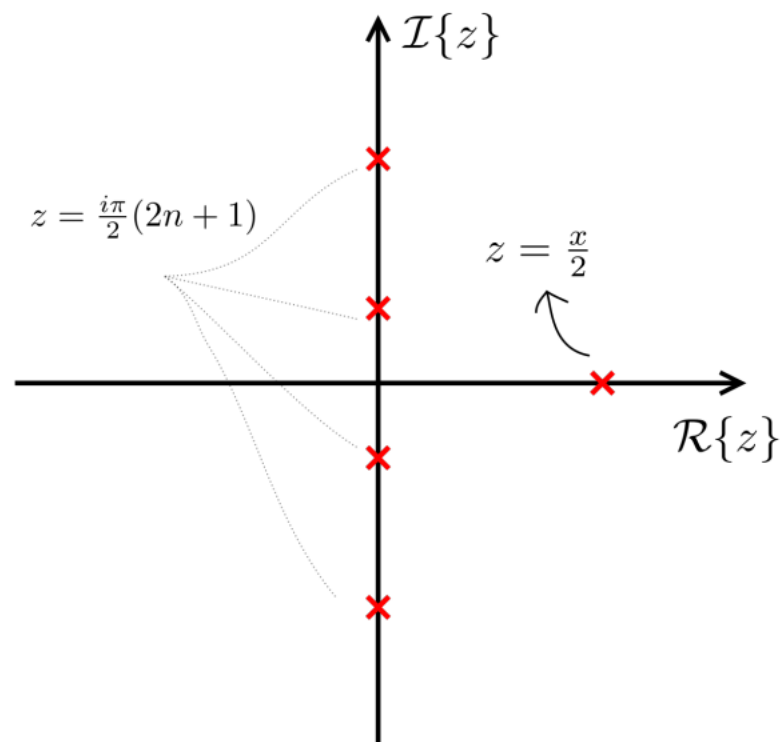
$$\text{Res}_{x \rightarrow x_n} \tan(x) = 1. \quad (\text{E.4})$$

com $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Com isso definiremos convenientemente uma função

$$f(z) = \frac{1}{2z - x} \tanh(z), \quad (\text{E.5})$$

que possui os seguintes polos:

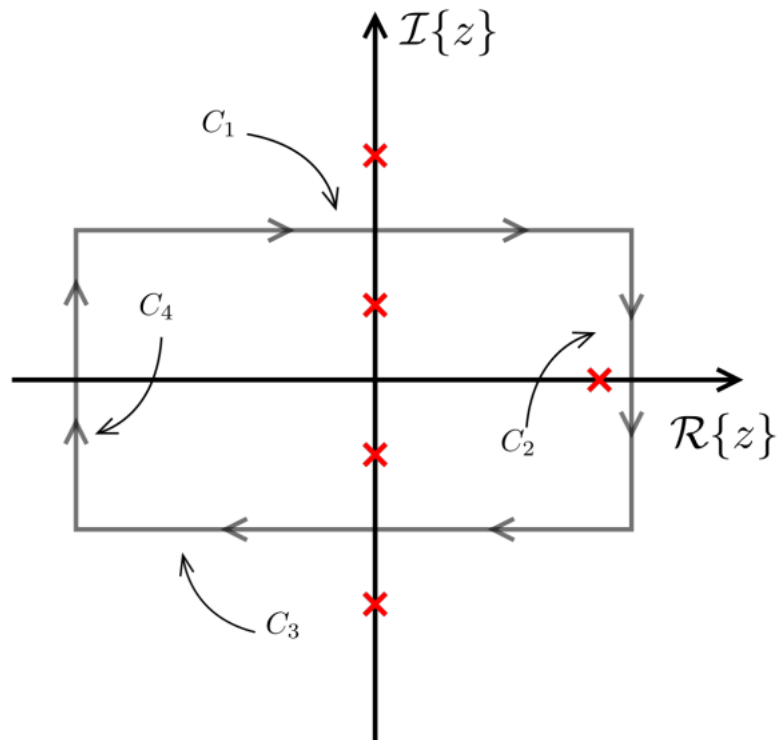
Figura 26 – Polos da Eq. E.3.



Fonte: Próprio autor.

Em um certo contorno, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, no plano complexo tal que:

Figura 27 – Contorno C sobre o plano complexo.



Fonte: Próprio autor.

E utilizando o teorema dos resíduos sabemos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_i \text{Res}_i[f(z)], \quad (\text{E.6})$$

onde integramos sobre o contorno do nosso plano complexo. Sabendo que $f(z) \rightarrow 0$ se $z \rightarrow \pm\infty$, podemos tomar o limite onde C_4 e C_2 são contornos paralelos ao eixo dos polos (eixo y, imaginário) vão, respectivamente, para $-\infty$ e $+\infty$, então:

$$\oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_4} f(z) dz = 0. \quad (\text{E.7})$$

Os outros dois contornos, C_1 e C_3 , são tomados respectivamente nos intervalos $[-\infty + i\pi N, +\infty + i\pi N]$ e $[+\infty - i\pi N, -\infty - i\pi N]$ com $N \in \mathbb{Z}$. Note que

$$\tanh(a + i\pi N) = \tanh(a), \quad (\text{E.8})$$

$$\tanh(a + i\pi N) = \frac{e^{a+i\pi N} - e^{-a-i\pi N}}{e^{a+i\pi N} + e^{-a-i\pi N}} = \frac{e^{i\pi N} e^a - e^{-i\pi N} e^{-a}}{e^{i\pi N} e^a + e^{-i\pi N} e^{-a}}. \quad (\text{E.9})$$

Como $N \in \mathbb{Z}$:

$$e^{i\pi N} = e^{-i\pi N} = (-1)^N, \quad (\text{E.10})$$

$$\tanh(a + i\pi N) = \frac{(-1)^N e^a - (-1)^N e^{-a}}{(-1)^N e^a + (-1)^N e^{-a}} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \tanh(a), \quad (\text{E.11})$$

como sabemos que $-1 < \tanh(a + i\pi N) < 1 \forall x \in \mathbb{R}$ e também $\forall N \in \mathbb{Z}$, e com o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(z) = 0. \quad (\text{E.12})$$

Notamos então que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_1} f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_3} f(z) dz = 0. \quad (\text{E.13})$$

Logo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = 0 = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_i \text{Res}_i[f(z)], \quad (\text{E.14})$$

com o somatório em i indica um somatório sobre todos os resíduos do espaço. O que nos informa que:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Res}_{z \rightarrow z_n} [f(z)] = -\text{Res}_{z \rightarrow \frac{x}{2}} f(z), \quad (\text{E.15})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1) - x} = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right), \quad (\text{E.16})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1) - x} = \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{x}{2}\right). \quad (\text{E.17})$$

Da forma que $z_n = \frac{i\pi}{2}(2n+1)$. No entanto, a tangente hiperbólica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tanh(x) &= \frac{1}{2} \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{1}{2} \frac{e^a (e^a - e^{-a})}{e^a (e^a + e^{-a})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2a} - 1 + 0}{e^{2a} + 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{2a} - 1 + 1 - 1}{e^{2a} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2a} + 1 - 2}{e^{2a} + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2a} + 1}{e^{2a} + 1} - \frac{2}{e^{2a} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2a} + 1}. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Logo reescrevemos como,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1) - x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-x} + 1}. \quad (\text{E.19})$$

APÊNDICE F – FORMALISMO DE TEMPO IMAGINÁRIO

A Teoria Quântica de Campos (QFT, sigla do inglês para *Quantum Field Theory*), nos mostra que a amplitude de probabilidade de um estado caracterizado por um campo cuja configuração é $\phi_i(x)$ em $t = t_i$ efetua uma transição para um estado cuja configuração é dada pelo campo $\phi_f(x)$ em $t = t_f$, com $t_f > t_i$, é possível ser escrita em termos da seguinte integral funcional (GREINER; REINHARDT, 1996a):

$$\begin{aligned} \langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle &= \langle \phi_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} | \phi_i \rangle \\ &= \int D\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right] \\ &= \int D\phi e^{iS(\phi)}, \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

com $S(\phi)$ é a ação e \hat{H} o hamiltoniano do sistema.

O procedimento da Teoria Quântica de Campos a temperatura finita (FTFT, sigla do inglês para *Finite Temperature Field Theory*) é feito com base na conexão desta teoria com a Mecânica Quântica. Para ser feita tal relação diretamente, é necessário primeiramente escrever a amplitude de probabilidade, dada na Eq. (F.1), no espaço euclidiano. Para esse fim, reescreveremos a densidade Lagrangiana com um índice M expressa no espaço de Minkowski dada por;

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (\text{F.2})$$

com $V(\phi)$ reproduzindo os termos de interação. A fim de escrever \mathcal{L}_M no espaço euclidiano, usamos a rotação de Wick dada por $t = -it_E$. Dessa forma temos que $dt = -idt_E$ é por consequência:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \partial_t \phi \partial^t \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial^{t_E} \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial^{t_E} \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \right) \\ &\equiv -\mathcal{L}_E. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Assim, reescrevemos a Eq.(F.1) como;

$$\begin{aligned}
\langle \phi_f, t | \phi_i, 0 \rangle &= \langle \phi_f | e^{-it\hat{H}} | \phi_i \rangle \\
&= \int D\phi \exp \left[- \int_0^{it} dt_E \int d^3x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \\
&= \int D\phi e^{-S_E(\phi)},
\end{aligned} \tag{F.4}$$

agora com $S_E(\phi)$ sendo a ação euclidiana e, para o caso especial em que $t_i = 0$ e $t_f = t$. Possuindo a amplitude de probabilidade na versão euclidiana, é possível agora fazer a conexão com a Mecânica Estatística observando que a função de partição quântica é definida como;

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta\hat{H}} | n \rangle, \tag{F.5}$$

com $\beta = 1/T$, podemos representar a Eq. F.5 por uma integral funcional, uma vez que sua comparação com a expressão (F.4) junto as seguintes definições $\beta = it$ e $|\phi_f\rangle = |\phi_i\rangle = |n\rangle$, levam à

$$\mathcal{Z} = \int D\phi \exp \left[- \int_0^\beta \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right], \tag{F.6}$$

no qual devido à operação do traço, devem ser observadas as condições de periodicidade, $\phi(0) = \phi(\beta)$, ou antiperiodicidade, $\psi(0) = -\psi(\beta)$, para campos bosônicos ou fermiônicos respectivamente. Apesar do tratamento aqui ser feito a partir de um exemplo específico e para o caso particular onde $t_i = 0$ e $t_f = t$, a conexão entre as teorias é válida para todo e qualquer sistema.