

Validação do SofEMN através da análise de malhas de um circuito elétrico.

1st Jéssica Emily de Moura Lisboa
 Curso de Engenharia Elétrica
 Campus Cachoeira do sul
 Universidade Federal de Santa Maria
 Cachoeira do Sul, Brasil
 jessicae.m.lisboa@gmail.com

2nd Aline Brum Loreto
 Coordenação Acadêmica
 Campus Cachoeira do sul
 Universidade Federal de Santa Maria
 Cachoeira do Sul, Brasil
 aline.loreto@ufsm.br

Abstract—A validação do SofEMN: *Software* de apoio ao Ensino de Métodos Numéricos ocorre através da resolução do problema onde é necessário calcular as correntes de um circuito elétrico através da análise de malhas. Para ratificar os resultados, resolve-se o problema pelo Octave com os métodos de Matriz Inversa, Eliminação de Gauss e Fatoração LU. No SofEMN a solução é obtida pelos métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Através do cálculo do erro absoluto verificam-se que os resultados obtidos pelo SofEMN são os mesmos obtidos pelo Octave (ao menos pelos arredondamentos), o que confirma que o SofEMN possui confiabilidade para ser utilizado em soluções de problemas que envolvem sistemas lineares.

Index Terms—Métodos numéricos, sistemas lineares, circuitos elétricos.

I. INTRODUÇÃO

A pirâmide de aprendizagem de William Glasser (1925-2013) um psiquiatra americano, possui duas formas de aprendizagem: a passiva e a ativa, ambas com métodos próprios. A aprendizagem ativa é considerada a mais eficaz por ter como base de seu funcionamento o aluno. Por exemplo, conversar, debater, reproduzir, praticar, exercitar e ensinar aos outros, são métodos de aprendizagem considerados ativos. A ferramenta para prática na matemática é a resolução de exercícios, assim o aluno é colocado frente a vários problemas diferentes e que inúmeras vezes dependem da mesma lógica de solução, fazendo assim com que ele pratique não só o uso de fórmulas, mas também a interpretação. Para isto o SofEMN (*Software* de apoio ao Ensino de Métodos Numéricos) foi criado, para auxiliar o aluno no aprendizado juntamente com exercícios, para que possa considerar todas as possibilidades naquele problema e verificar junto com o SofEMN se a sua solução está correta.

O SofEMN é uma ferramenta desenvolvida para auxiliar no ensino e aprendizagem de métodos numéricos, além de ser um apoio em soluções de exercícios.

Circuitos eletrônicos são vistos em basicamente tudo que é eletrônico, e uma das formas de analisar esses circuitos é utilizando a análise de malhas, a qual está baseada nas leis de Kirchhoff e Ohm, que são equações lineares, gerando assim um sistema linear para circuitos mais complexos e com mais variáveis [2]. Para solucionar os sistemas lineares existem

vários métodos, sendo que em alguns casos o número de variáveis pode limitar a aplicação de alguns, como o método de Cramer. O presente trabalho tem como objetivo validar o uso do *software* Livre SofEMN: Software de apoio ao Ensino de Métodos Numéricos através da resolução de problemas clássicos da Engenharia Elétrica, no caso, o problema onde é necessário calcular as correntes de um circuito elétrico.

Para ratificar os resultados obtidos pelo SofEMN, utiliza-se o *software* Octave e resolve-se o sistema linear pelos métodos numéricos diretos da Matriz Inversa, Eliminação de Gauss e Fatoração LU [3]. Os resultados obtidos coincidem com a solução conforme apresentado por Alexander em [2]. Através da análise do erro absoluto, verifica-se que todos os métodos retornaram o mesmo erro, considerando como resultado exato o obtido pelo Octave (conforme [2]) e o resultado aproximado obtido pelo SofEMN. Em trabalhos anteriores, Nascimento e Ramos (2018) [6] [7] usam Eliminação de Gauss, Fatoração LU e Método de Crout para solucionar problemas referentes a circuitos elétricos usando da análise nodal. Em [6] o objetivo é obter o fluxo de potência de um sistema elétrico utilizando de métodos numéricos implementados em linguagem C, buscando conhecer qual o método numérico retorna o resultado mais exato. Nascimento, em [7], através da análise nodal compara os valores obtidos pelos algoritmos dos autores com os de um *software* comercial, cujo objetivo é a validação dos resultados obtidos e verificar a precisão dos mesmos. No presente trabalho, utiliza-se o SofEMN para resolução de um problema com análise de malhas e o mesmo é resolvido com os métodos implementados Eliminação de Gauss e Fatoração LU, buscando obter uma solução computacional confiável, conforme pesquisas realizada por Nascimento e Ramos (2018) [6] [7]. A validação do SofEMN é necessária por ser implementado em Python, diferentemente do estado da arte que utiliza linguagem C e um *software* comercial, conforme [6] [7]. Contudo, as abordagens dos trabalhos, o presente e o estado da arte, são as mesmas: solução computacional confiável via resolução de problemas que necessitam solução de sistemas lineares.

II. CONSTRUÇÃO TEÓRICA

A presente seção descreve brevemente a fundamentação teórica utilizada para o desenvolvimento do presente trabalho: circuitos elétricos [2], métodos numéricos para resolução de sistemas lineares [3], breve descrição sobre sistemas lineares [4] e apresentação do *software* SofEMN [1] (principais funcionalidades e recursos).

A. Circuitos elétricos

Circuitos elétricos estão presentes no nosso cotidiano em diversos lugares, como por exemplo a iluminação, geradores elétricos, motores elétricos e aparelhos eletrônicos.

Segundo Alexander [2], a análise de malhas proporciona outra visão de verificar circuitos fechados, tendo as correntes como variáveis. Um laço é um caminho fechado, que não passa mais de uma vez pelo mesmo nó. Malha é um laço que não possui mais nenhum laço em seu interior.

Na Figura 1 é possível observar duas malhas fechadas. O caminho ‘abefa’ é uma malha, já o caminho ‘bcdeb’ é outra malha.

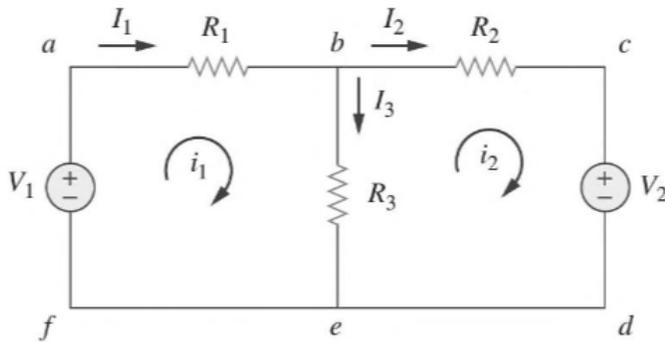


Fig. 1. Exemplo de um circuito elétrico contendo duas malhas

Após aplicar as leis de tensão de Kirchhoff e usar a lei de Ohm para expressar as tensões em termos de corrente, obtém-se uma equação matricial (eq. (1)), gerando sistemas de equações lineares.

$$[R] \cdot [I] = [V] \quad (1)$$

A eq. (1) mantém a relação linear da lei de Ohm entre os três elementos, porém com mais de uma incógnita, o que gera a necessidade do uso de métodos numéricos para solução de sistemas lineares.

B. Sistemas Lineares

Sistemas lineares são conjuntos de equações que descrevem a relação entre variáveis e seus coeficientes. São importantes nas áreas da matemática e engenharia. Na engenharia elétrica sistemas lineares são muito utilizados, pois as leis fundamentais que regem o comportamento dos componentes elétricos como resistores, capacitores e indutores são lineares. A lei de Ohm é um exemplo simples, onde descreve a relação entre tensão, corrente e resistência de um resistor [2].

Sistemas matriciais possuem um modo geral de serem representados [3]. Uma matriz é uma tabela retangular de elementos, possuindo um conjunto de elementos na horizontal, que é chamado linha e um conjunto na vertical chamado coluna. A identificação do elemento da matriz é realizado pela notação a_{ij} , onde primeiro índice i representa a linha onde o elemento está e o segundo índice j designa a coluna [4]. Por exemplo o elemento a_{32} está localizado na terceira linha e segunda coluna da matriz, conforme equação abaixo (eq. (2)).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

A equação matricial, eq. (2), pode ser reescrita conforme a equação (3), onde A é a matriz dos coeficientes do sistema linear, x é a matriz coluna das variáveis e b é a matriz coluna dos termos independentes do sistema linear.

$$A \cdot x = b \quad (3)$$

A seguir, descreve-se brevemente os métodos numéricos para solução de sistemas lineares implementados no SofEMN.

C. Métodos Numéricos para Sistemas Lineares

Sistemas lineares são resolvidos através de métodos numéricos diretos e iterativos [3], como:

- Eliminação de Gauss, Fatoração LU, Cramer, Matriz Inversa (direto);
- Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel (iterativo).

Os métodos citados são alguns que podem ser utilizados para resolver sistemas lineares, e neste presente trabalho serão adotados os métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU (pelo SofEMN), além da Matriz Inversa (pelo Octave).

D. Fatoração LU

Fatoração LU, também conhecida como decomposição LU, consiste em fatorar a matriz A na forma $A = LU$. A matriz A é transformada no produto de duas matrizes, L (Lower) e U (Upper). Sendo L uma matriz triangular inferior e U matriz triangular superior [3].

Uma matriz A é dita triangular superior, se os elementos que estão abaixo da diagonal são nulos.

Uma matriz A é dita triangular inferior se seus elementos que estão acima da diagonal principal são nulos. A solução do sistema linear é obtida através da execução de duas etapas, conforme as equações (4) e (5):

$$L \cdot y = b \quad (4)$$

Onde L é a matriz triangular inferior, y vetor auxiliar e b matriz coluna dos termos independente do sistema linear. Conforme a equação (5), a matriz coluna x é a solução do sistema linear:

$$U \cdot x = y \quad (5)$$

Onde U é a matriz triangular superior e y é o vetor inicial obtido na equação (4).

E. Eliminação de Gauss

O método direto de Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema original em um sistema equivalente, ou seja, através de operações elementares, realizam-se eliminações nas equações do sistema até obter um sistema triangular inferior. Após, através da retrosubstituição calculam-se as variáveis que são as soluções do sistema linear [3].

Nas operações elementares define-se o multiplicador, que será o termo que auxiliará na eliminação do elemento abaixo da diagonal principal.

F. SofEMN: Software de apoio ao Ensino de Métodos Numéricos

O SofEMN foi idealizado para auxiliar no processo de ensino e aprendizado do aluno perante a disciplina de Métodos Numéricos [1]. A Figura 2 apresenta a tela inicial do software, contendo o menu com os métodos numéricos implementados.

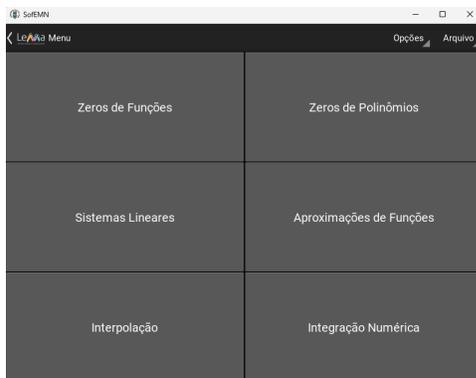


Fig. 2. Menu do software SofEMN.

As unidades de ensino dos métodos numéricos implementados são:

- Zeros de Funções;
- Zeros de Polinômios;
- Sistemas Lineares;
- Aproximações de Funções;
- Interpolação;
- Integração Numérica.

Como o foco do trabalho é a solução de sistemas lineares - métodos diretos, restringe-se a escolha desta opção no menu. Ao selecionar o botão de sistemas lineares uma nova janela irá aparecer, onde é possível gerar uma matriz visual para preencher, considerando o número de variáveis que o problema exige. Também mostra todos os métodos disponíveis para uso: Eliminação de Gauss, Fatoração LU, Fatoração Choleski, Cramer, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, Figura 3. É possível visualizar melhor na Figura 4, no qual já se encontra preenchido todos os campos da matriz 4x4 que será usada para validar o uso do software.

O programa possui recursos mais específicos que auxiliam no aprendizado como:

- Gerar gráficos;
- Gerar um passo a passo.

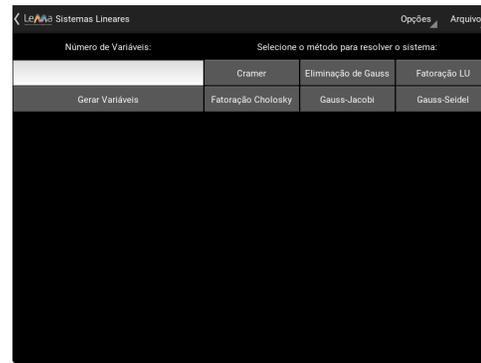


Fig. 3. Tela dos métodos para solução de sistemas lineares.

Insira os coeficientes do sistema:				
a00	a01	a02	a03	b0
4000	-3000	-1000	0	12
a10	a11	a12	a13	b1
-3000	7000	0	0	-12
a20	a21	a22	a23	b2
-1000	0	15000	-6000	-24
a30	a31	a32	a33	b3
0	0	-6000	16000	-24

Fig. 4. Matriz 4x4 no SofEMN.

As Figuras 5 e 6 apresentam os recursos disponíveis Opções e Arquivos



Fig. 5. Opções: Gerar gráfico e passo a passo.



Fig. 6. Arquivo: Salvar e Carregar.

No recurso Arquivo (Figura 6) é possível salvar os dados do exercícios em solução e depois acessá-lo através da opção carregar.

III. PROCEDIMENTO

Primeiro é necessário resolver a análise de malhas do circuito escolhido, Figura 7, utilizando as leis de Kirchoff e lei de Ohm, após obtém-se um sistema linear em formato matricial que segue o sistema da equação. Tem-se que o produto entre as matrizes dos resistores e das correntes são iguais a matriz das tensões, no qual as incógnitas são as correntes (equação (6)).

Como a malha I4 passa por uma fonte de corrente, seu valor já está definido como $-3mA$, ou seja, tem-se uma matriz com 4 incógnitas. A Figura 7 apresenta o circuito usado para o procedimento e a seguir a representação da resolução da análise de malhas em formato matricial, equação (6).

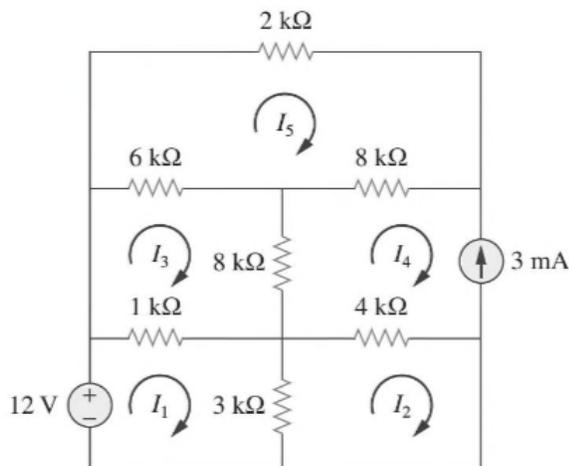


Fig. 7. Circuito com 5 malhas, sendo uma das malhas com uma fonte de corrente.

$$\begin{bmatrix} 4K & -3K & -1K & 0 \\ -3K & 7K & 0 & 0 \\ -1K & 0 & 15K & -6K \\ 0 & 0 & -6K & 16K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A partir da equação matricial, eq. (6), resolve-se o sistema linear, primeiramente, através do *software* Octave com os métodos da Matriz Inversa, Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Os resultados encontram-se na Tabela I.

TABLE I
RESULTADOS OBTIDOS PELO OCTAVE

Correntes			
I	Matriz inversa	Eliminação de Gauss	Fatoração LU
1	1.6196mA	1.6196mA	1.6196mA
2	-1.0202mA	-1.0202mA	-1.0202mA
3	-2.4612mA	-2.4612mA	-2.4612mA
5	-2.4230mA	-2.4230mA	-2.4230mA

Na sequência, resolve-se o sistema linear, no SofEMN através dos métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Na Tabela II encontram-se os resultados do sistema linear.

TABLE II
RESULTADOS OBTIDOS PELO SOFEMN

Correntes		
I	Fatoração LU	Eliminação de Gauss
1	1.6195537mA	1.6195537mA
2	-1.0201913mA	-1.0201913mA
3	-2.4612115mA	-2.4612115mA
5	-2.4229543mA	-2.4229543mA

Com o objetivo de verificar a exatidão dos resultados obtidos pelo SofEMN, calculam-se os erros absolutos dos valores das correntes considerando como valores exatos, e conforme apresentado em [2], os obtidos pelo Octave.

Na Tabela III, é possível visualizar que o erro absoluto é muito pequeno, sendo que tanto os métodos implementados

no SofEMN e os implementados no Octave retornaram os mesmos valores para as correntes.

TABLE III
COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM ERRO ABSOLUTO

Diferença entre correntes			
I	Octave	SofEMN	Erro Absoluto
1	1.6196mA	1.6195537mA	46.3μ A
2	-1.0202mA	-1.0201913mA	-8.7μ A
3	-2.4612mA	-2.4612115mA	11.7μ A
5	-2.4230mA	-2.4229543mA	-45.7μ A

TABLE IV
COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM ERRO PERCENTUAL

Diferença entre correntes			
I	Octave	SofEMN	Erro percentual
1	1.6196mA	1.6195537mA	2,85%
2	-1.0202mA	-1.0201913mA	0,85%
3	-2.4612mA	-2.4612115mA	0,47%
5	-2.4230mA	-2.4229543mA	1,88%

A. Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo validar o uso do *software* SofEMN na solução de sistemas lineares. O problema adotado foi a solução das correntes de um circuito elétrico, com análise em malhas. Para comparação e ratificar os resultados obtidos pelo SofEMN, calculou-se os valores das correntes no Octave com os métodos de Matriz Inversa, Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Pelo SofEMN os métodos utilizados foram Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Os resultados obtidos possuem diferença, ou erro, muito pequenos verificados através do cálculo do erro absoluto, onde considerou-se como valor exato o obtido pelo Octave (de acordo com [2]) e valor aproximado os calculados pelo SofEMN.

Com os resultados obtidos pode-se afirmar que o SofEMN apresenta confiabilidade de utilização, em se tratando de solução de sistemas lineares. Deseja-se realizar vários testes com soluções de vários problemas clássicos de diferentes áreas das engenharias.

REFERENCES

- [1] A. C. Andrade, A. L. Soubhia, A. B. Loreto, Software livre de métodos numéricos para ensino e pesquisa, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.
- [2] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, Fundamentos de Circuitos Elétricos. 5ª edição, AMGH, Porto Alegre, 2013.
- [3] S. C. Chapra e R. P. Canale, Métodos numéricos para engenharia, 3ª edição., AMGH, São Paulo, 2016.
- [4] F. L. Santana, "Matrizes, Sistemas Lineares e Fatoração LU, Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/25982>. Acessado em 20/09/2023.
- [5] C. R. Ramos e B. P. Nascimento, Métodos numéricos diretos na análise nodal de circuito. Anais 8º MCSul / VIII SEMENGO, Rio Grande, 2018.
- [6] C. R. Ramos e B. P. Nascimento, Resolução de análise nodal com auxílio de métodos numéricos, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.
- [7] C. R. Ramos e B. P. Nascimento, Fluxo de potência: análise por métodos numéricos, 33ª Jornada Acadêmica Integrada - JAI, Santa Maria, 2018.