

COMPARAÇÃO ENTRE ESTRATÉGIAS DE CONTROLE POR REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO E CONTROLE POR MAPEAMENTO EXPONENCIAL APLICADO A UM SISTEMA DE PÊNDBULO INVERTIDO

Kenedy Matiasso Portella
Deniel Desconzi Moraes
Lorenzo Quevedo Mantovani
Maria Luiza Cassão Gatelli e
Mateus Schmitz Venturini
Curso de Engenharia Aeroespacial
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Lucas Vizzotto Bellinaso
Grupo de Eletrônica
de Potência e Controle
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Pedro Paglione
Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Resumo—Neste trabalho é apresentada a modelagem e controle de um sistema de Pêndulo Invertido através de dois métodos com características distintas, sendo um linear e outro não linear. Foram projetados dois controladores, um controlador ótimo do tipo Regulador Linear Quadrático (LQR) e um controlador heurístico chamado de Controle por Mapeamento Exponencial (CME), que por natureza dispensa o conhecimento físico da planta a ser modelada. Ao final é apresentado um breve comparativo, destacando os pontos positivos e negativos de cada estratégia de controle, contribuindo para a validação de um método não linear ainda pouco conhecido como o CME frente a uma estratégia mais tradicional (LQR).

Palavras-chave – controle ótimo, heurístico, não-linear.

I. INTRODUÇÃO

O Pêndulo Invertido é um exemplo clássico de um sistema intrinsecamente instável. Sua dinâmica é fundamental para tarefas que envolvem a manutenção do equilíbrio, como a caminhada e o controle de propulsores de foguetes [1], dicitos [2] e aplicações de manipuladores de link paralelo também conhecidos como plataforma Stewart-Gough [3]. Dessa forma, justifica-se a popularidade do estudo desse tipo de sistema.

Por ser um *benchmark* bem estabelecido que fornece muitos problemas desafiadores para projetos de controle [4], o Pêndulo Invertido constitui uma ótima abordagem de ensino da teoria de controle clássico ou moderno de forma prática. Como dito por [5], seu estudo abrange modelagem matemática, projeto de controladores, simulações, além de necessitar desenvolver um projeto mecânico e eletrônico, hardware e software para a sua implementação.

O problema do Pêndulo Invertido já foi abordado de diversas maneiras ao longo dos anos. [4] propõe o controle de

estabilização e rastreo por meio de controladores Proporcional Integral e Derivativo (PID) que une as ações proporcional, integral e derivativa para controlar um processo baseando-se numa abordagem de erro e referência. [1] e [6] utilizam de uma técnica de controle não linear por redes neurais para controlar o balanço de um Pêndulo Invertido sobre um carrinho. Essa técnica trabalha com o aprendizado frente a um comportamento demonstrado, como o balanço do pêndulo, para então estabiliza-lo, sem conhecimento a priori da sua dinâmica. Outro tipo de abordagem é por meio de controle *fuzzy* que tem a vantagem de trabalhar com soluções não binárias, tornando mais fácil a mecanização de tarefas já realizadas por humanos com sucesso [7]. [8] implementa o método *fuzzy* para o controle de um Pêndulo Invertido em duas rodas, já [9] ilustra a utilização dessa técnica no controle de um Pêndulo Invertido sobre carrinho.

Nota-se que existem diversas estruturas de Pêndulo Invertido possíveis. O sistema tratado neste trabalho é composto por um carrinho que se desloca linearmente e uma haste que se desloca angularmente, ambos apresentados na Fig. 1. A estabilização do sistema pode ser atingida ao aplicar uma força na direção horizontal ao carrinho, fazendo a haste ficar na vertical. O sistema é não-linear e subatuado, portanto, a força aplicada para controlar a haste também afeta a posição do carrinho.

Do ponto de vista de propostas de controle do Pêndulo Invertido, [4] divide-as em três aspectos: estabilização (colocar em uma posição de equilíbrio, 0° ou 180° no caso do pêndulo), balanço e rastreo (fazer com que o pêndulo atinja a posição linear e angular desejada). O objetivo deste trabalho é projetar e simular computacionalmente dois controladores

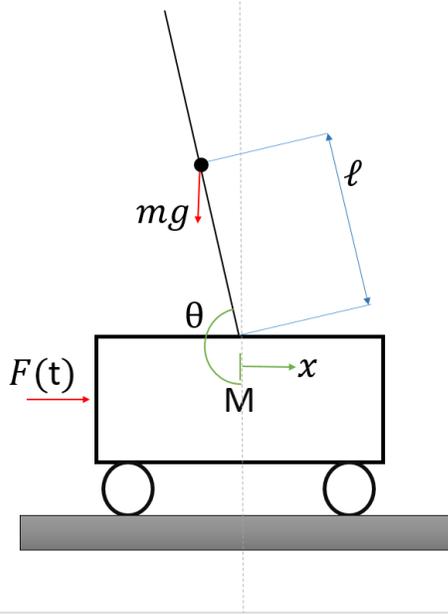


Fig. 1: Representação do sistema de controle de Pêndulo Invertido

capazes de atuar nesses três aspectos e compara-los quanto às suas características de execução (tempo para realizar a tarefa, sobressinal e ação de controle exigida). O primeiro, trata-se de um algoritmo Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês *Linear-Quadratic Regulator*) que é essencialmente uma maneira de encontrar um controlador ótimo de resposta de estado apropriado. O segundo controle é projetado em Controlador com Mapeamento Exponencial (CME), essa estratégia foi proposta por [10] em 2015 e unifica um método heurístico para abandonar a necessidade de um modelo e para definir seus parâmetros iniciais com um mapeamento exponencial unidimensional baseado em determinadas definições. A comparação dessas duas técnicas se justifica no fato do CME ser uma técnica recente que ainda demanda estudos comparando-a com controladores lineares para mensurar sua eficácia.

São tratados neste trabalho a descrição do Pêndulo Invertido, do CME e do LQR na seção II; o projeto dos controladores e estratégias de comparação na Seção III e; os resultados obtidos e conclusões nas seções IV e V, respectivamente.

II. DESCRIÇÃO DO SISTEMA

A. Pêndulo Invertido

O sistema de Pêndulo Invertido adotado neste trabalho possui dois graus de liberdade e, portanto, pode ser completamente descrito por duas coordenadas generalizadas. O deslocamento horizontal do carrinho, x , e o deslocamento angular do pêndulo, θ , são escolhidos a fim de facilitar os cálculos. Esses deslocamentos estão representados na Fig. 1

As expressões para a energia cinética e potencial do conjunto do pêndulo são dadas por (1) e (2), respectivamente.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l\cos(\theta)\dot{\theta}) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (1)$$

$$U = -mgl\cos\theta. \quad (2)$$

Onde g é o módulo do vetor campo gravitacional, m é a massa da haste, M é a massa do carrinho, I é o momento de inércia da haste, l é o comprimento da haste da fixação até o centro de massa, $\dot{\theta} = \omega$ é a velocidade angular e $\dot{x} = \vec{v}$ é a velocidade linear.

Assumindo que as rodas giram sem deslizar, a única força externa atuante no sistema é a força aplicada o carrinho. Essa força é descrita em (3) na direção x e (4) na direção θ .

$$Q_x^{ext} = F(t), \quad (3)$$

$$Q_\theta^{ext} = 0. \quad (4)$$

A partir das equações de Lagrange obtêm-se as equações que descrevem a dinâmica do pêndulo, descritas em (5).

$$\begin{cases} -(M+m)\ddot{x} - ml\cos(\theta)\ddot{\theta} + ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F(t) \\ -ml\ddot{x}\cos(\theta) + (ml^2 + I)\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

A fim de representar o sistema descrito no espaço de estados, faz-se

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \omega \ x \ \vec{v}]^T.$$

Isolam-se os termos \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ em (5), obtendo (6) e (7)

$$\ddot{x} = \frac{(ml)^2 g \sin(\theta) \cos(\theta) + (ml^2 + I)(ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - u)}{-(M+m)(ml^2 + I)}, \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)(mgl \sin(\theta))}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)} + \frac{(ml)^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - uml \cos(\theta)}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)}. \quad (7)$$

Define-se $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, $b_1(\mathbf{x})$, $b_2(\mathbf{x})$ como variáveis auxiliares dadas por (8), (10), (9) e (11), respectivamente.

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{(M+m)mgl \sin(\theta) + (ml)^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)}, \quad (8)$$

$$b_1(\mathbf{x}) = \frac{-ml \cos(\theta)}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)}, \quad (9)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{(ml)^2 g \sin(\theta) \cos(\theta) + (ml^2 + I)ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)}, \quad (10)$$

$$b_2(\mathbf{x}) = \frac{-(ml^2 - I)}{(ml)^2 \cos(\theta)^2 - (M+m)(ml^2 + I)}. \quad (11)$$

Dessa forma, a representação em espaços de estados do sistema fica de acordo com (12)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ f_1(\mathbf{x}) \\ \dot{x} \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(\mathbf{x}) \\ 0 \\ b_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Para que seja possível a implementação de controladores lineares, como o LQR, é necessário que seja feita a linearização do sistema não linear a ser controlado, nesse caso o Pêndulo Invertido. Por essa razão, o sistema foi linearizado em torno do ponto de operação $\theta = \pi$. A linearização é feita expandindo as funções seno e cosseno em séries de Taylor e utilizando o primeiro termo da série, segue que

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &\approx -1, \\ \sin(\theta) &\approx -\theta, \end{aligned}$$

substituindo em (5), a dinâmica linearizada torna-se:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F(t) \\ (ml^2 + I)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Deve-se isolar os termos \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ para que seja possível obter a representação do sistema no espaço de estados, dada por (14)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}, \quad (14)$$

para A , B e C , dados por (15), (16) e (17), respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mgl}{d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(ml)^2}{d} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-ml}{d} & 0 & \frac{(I+ml^2)}{d} \end{bmatrix}^T, \quad (16)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

$$\text{Onde } d = (M+m)(I+ml^2) - (ml)^2.$$

B. Regulador Quadrático Linear (LQR)

O regulador linear quadrático (LQR, do inglês *Linear-Quadratic Regulator*) é um controlador ótimo baseado na retroação de estados (Fig. 2), onde os ganhos associados aos estados no projeto do controlador são determinados através da solução de uma equação algébrica de Riccati. De acordo com [11], o LQR pode ser considerado como uma solução intermediária para projeto de controladores quando comparado a simplicidade de um PID e a outros controladores mais complexos, como por exemplo os preditivos.

A presença de distúrbios no sistema, assim como variações paramétricas podem comprometer a atuação do LQR, uma vez que ele depende diretamente dos estados da planta, conforme comentário de [5].

A partir de um sistema genérico MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*), linear, invariante no tempo e controlável, tal que as equações de estado no tempo contínuo são:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (18)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (19)$$

O regulador ótimo deve encontrar o vetor $u(t)$, utilizando de um estado inicial genérico, que seja capaz de transferir um

estado para outra região do espaço de estados desejado. A lei de controle que estabiliza o sistema mostrado em (18) é tal que:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (20)$$

Assim, substituindo (20) em (18) em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t), \quad (21)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de realimentação de estados. A partir do valor dos autovalores $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ que se pode determinar a estabilidade do sistema para qualquer condição inicial $x(0)$. Para isso, os autovalores precisam estar alocados no semi-plano esquerdo do plano- s .

Para o projeto de servossistemas para compensador puro, são utilizadas as matrizes aumentadas da forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty), \quad (22)$$

onde as matrizes aumentadas \mathbf{A}_a e \mathbf{B}_a são:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

E, portanto, obtêm-se:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a\mathbf{K}_a)\mathbf{e}, \quad (25)$$

no qual o vetor de ganhos \mathbf{K}_a é dado por:

$$\mathbf{K}_a = [\mathbf{K}] - k_1]. \quad (26)$$

A matriz ótima \mathbf{K} pode ser encontrada a partir de:

$$\mathbf{K}_a = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_a^T\mathbf{P}, \quad (27)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz simétrica definida positiva e deve satisfazer a equação reduzida de Riccati (28)

$$\mathbf{A}_a^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_a - \mathbf{P}\mathbf{B}_a\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_a^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (28)$$

Sendo \mathbf{Q} e \mathbf{R} as matrizes de ponderação, matrizes hermitianas definidas positivas (semi-positiva, no caso de \mathbf{Q}) ou reais simétricas. A representação da ponderação dos estado é dada por \mathbf{Q} , enquanto que a das entradas é dada por \mathbf{R} . Ambas podem ser determinadas de forma arbitrária ou por meio de um algoritmo.

Define-se função custo em (29)

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}_a(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt. \quad (29)$$

Se, a partir dos valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} , os elementos da matriz \mathbf{K} forem determinados para obter o mínimo índice de desempenho J , pode-se dizer que esta lei de controle é ótima para qualquer estado inicial $x(0)$.

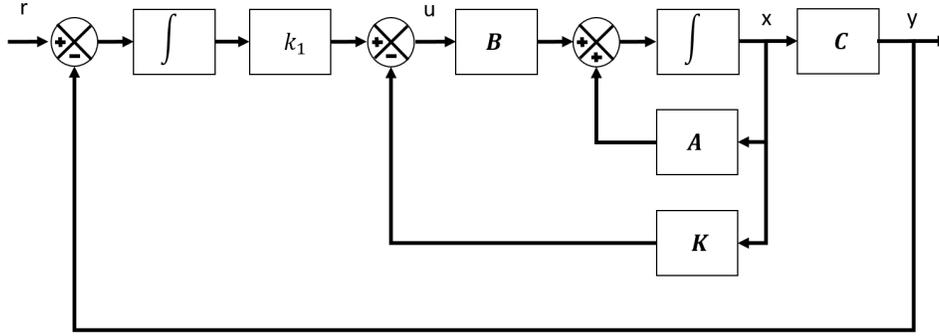


Fig. 2: Diagrama de blocos do controle por LQR

C. Controlador por Mapeamento Exponencial (CME)

Segundo o seu propositos ([12]), o Controlador por Mapeamento Exponencial (CME) unifica um método heurístico para abandonar a necessidade de um modelo e para definir seus parâmetros iniciais com um mapeamento exponencial unidimensional baseado na inferência da lógica nebulosa para lidar com uma classe de não-linearidades [12]. O método *bang-bang* e a solução de camada limite servem como base para a criação de um novo controlador que precisa de duas heurísticas que definirão os valores iniciais de seus dois parâmetros. A primeira heurística envolve aplicar uma entrada máxima de controle em uma planta estável e verificar a saída em regime permanente e o tempo necessário para alcançá-la, definindo assim um parâmetro de faixa de erro e_r . A segunda heurística avalia a forma da saída e então, define um segundo parâmetro, o formato da entrada de controle u_s , de uma forma direta.

Para implementar o CME, primeiramente calcula-se o erro de rastreamento e como

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r = [e \quad \dot{e}]^T, \quad (30)$$

onde $\mathbf{x}_r = [x_r \quad \dot{x}_r]^T$ é o vetor de estado de referência e \dot{e} é a derivada primeira do erro em relação ao tempo. Assim, o erro pode ser redefinido como

$$e = y - y_r, \quad (31)$$

no qual y_r é a saída de referência. Em seguida, computa-se uma linha de comutação s_{CME} :

$$s_{CME} = \frac{1}{e_r} \cdot e + \dot{e}, \quad (32)$$

em que $e_r \neq 0$ é heurísticamente definido como o erro aceitável antes de aplicar a entrada de controle total.

A s_{CME} é limitada a $-1 \leq s_{CME} \leq 1$ devido à faixa factível da função exponencial:

$$s_{CME} = \begin{cases} -1, & \text{se } s_{CME} \leq -1, \\ s_{CME}, & \text{se } -1 \geq s_{CME} \geq 1, \\ 1, & \text{se } s_{CME} > 1. \end{cases}$$

Uma função exponencial modificada é então computada:

$$u_e = \text{sign}(s_{CME}) \cdot \left((1 - |s_{CME}|)^{\frac{1}{2} u_s} - 1 \right), \quad (33)$$

onde $-10 \leq u_s \leq 10$. Finalmente, a ação de controle do controlador pode ser calculada:

$$u_{CME} = \frac{u_{max} - u_{min}}{2} \cdot (u_e - 1) + u_{max}, \quad (34)$$

u_{min} e u_{max} para a faixa de entrada do controlador são os valores mínimo e máximo do atuador, respectivamente.

III. PROJETO DAS TÉCNICAS DE CONTROLE

A. Critérios de Comparação

A fim de realizar a comparação das duas estratégias de otimização apresentadas é necessário definir uma função custo para o projeto de otimização. Essa função p deve ser padrão para ambos os controladores, além de ponderar todos os critérios utilizados. A partir da minimização da função custo p é possível obter os parâmetros de otimização Q e R da estratégia LQR e os demais parâmetros do CME [13].

- Critério: O teste deve ser realizado em condições não-nulas verificando o tempo para atingir 2% em relação à excursão do carrinho ($\pm 1,8 \text{ cm}$) e o sobressinal gerado, tal que:
 - O ângulo inicial seja de $\theta_0 = 170^\circ$;
 - A posição inicial em $x_0 = 0.5m$;
 - Velocidades angular e linear iniciais nulas;
 - O ângulo final seja de $\theta_f = 180^\circ$;
 - A posição inicial em $x_f = 0.5m$.
- Restrições:
 - Não deve haver saturação do atuador relacionado com o torque;
 - Deve-se respeitar a batente do deslocamento;
 - Não deve haver saturação na velocidade angular do motor.

Dessa forma, o problema de otimização a ser resolvido é dado por:

$$\begin{aligned} & \underset{p}{\text{minimize}} && ITAE_p(p) \\ & \text{sujeito a} && x(p) \leq |0.9| \text{ m} \\ & && \tau(p) \leq |1.5| \text{ N.m} \\ & && \theta(p) \leq |15|^\circ \end{aligned}$$

$ITAE_p$ (do termo em inglês *Integral of the time weighted absolute error*) é a integral do tempo ponderada pelo erro absoluto de posição, conforme:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt. \quad (35)$$

Os termos são função de p , a saber, para o LQR P são os cinco termos da diagonal principal da matriz \mathbf{Q} aumentada, e, para o CME são os termos u_s e e_r .

B. Projeto do LQR

Os termos de ponderação foram escolhidos de modo a minimizar o índice ITAE. Os ganhos foram determinados utilizando rotinas de otimização. Para tal, a matriz \mathbf{R} foi mantida com valor unitário, e variou-se os termos da diagonal principal da matriz \mathbf{Q} . A otimização do LQR foi realizada em duas etapas: Inicialmente, foi utilizado a função nativa do *MATLAB*, *patternsearch*, de modo a encontrar matrizes de ponderação capazes de satisfazer as exigências citadas. Em seguida foi utilizada a função *fminsearch* que faz uso da técnica do gradiente, para refinar a minimização.

C. Projeto do CME

Para minimização do termo ITAE com uso da técnica de CME, foi necessário apenas o uso da função *fminsearch*. Nesse caso, os termos u_s e e_r são alterados heurísticamente até que a resposta esteja de acordo com o desejado.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a simulação, foram adotados os parâmetros de uma planta de Pêndulo Invertido localizada no NUPEDDEE da UFSM, os parâmetros obtidos em [14] e, são dados por: $M = 6 \text{ Kg}$, $m = 0,17 \text{ Kg}$, $l = 0,43 \text{ m}$, $I = 0,0409 \text{ Kg.m}^4$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. A força é aplicada através de uma rosca infinita e portanto a ação de controle é na verdade o torque, dado pela relação $\tau = 0,0057 \text{ F}$. Para a reutilização de rotinas pré-concebidas, nesse primeiro instante foram desprezados os coeficientes de atrito.

A partir disso, foram estabelecidas rotinas em *MATLAB*, implementando cada um dos métodos de controle. Como descrito a seguir.

A. Resultados do LQR

Para a implementação do LQR foram utilizadas as equações linearizadas, além das matrizes aumentadas do sistema, onde o quinto estado da matriz \mathbf{Q} é referente a integral do erro de posição linear. A partir disso, as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} encontradas foram:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4089.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 142.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 186.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{R} = [1] \quad (37)$$

Para tal resultado, os valores da matriz \mathbf{K} , ficaram

$$\mathbf{K}_a = [-64.3502 \quad -81.6540 \quad 557.9671 \quad 222.0553 \quad 0.3162]$$

sendo o ultimo elemento do vetor \mathbf{K}_a o ganho do integrador.

B. Resultados do CME

O CME possui algumas vantagens notáveis em relação ao LQR. A primeira é visível logo na modelagem do controle, onde se estipula quais são as ações de controle máximas reais aplicáveis. Dessa maneira, o próprio método se encarrega de cumprir um dos objetivos pré estabelecidos.

Como descrito, o método CME está bem mais atrelado à resposta do sistema do que do sistema físico. Porém como em primeiro momento não foi aplicado em uma planta real utilizou-se um modelo matemático para simular os resultados. De forma geral não é necessário conhecer a dinâmica do sistema, sendo aplicável a sistemas lineares e não lineares.

A metodologia para adequar o controle aos requisitos desejados utiliza a resposta do sistema como critério de avaliação para modificar as constantes que definem a ação de controle. O processo pode ser de forma manual (aumentando a ação de controle quando se mostrar fraca ou lenta, ou reduzi-la quando estiver muito agressiva) ou com algoritmos de otimização e minimização. Para o CME utilizado, também foi utilizado um algoritmo de otimização como descrito anteriormente. Por fim, os valores dos parâmetros de ajuste da curva exponencial de ação de controle em função do erro de posição, foram: $u_s = -1.3967$ e $e_r = 1.4978$.

C. Comparativos

Após a determinação das constantes dos controles, pode-se realizar uma análise comparativa entre as respostas obtidas por ambos os métodos. Para tal, simula-se uma condição onde o carrinho parte da posição $-0,5 \text{ m}$ com a haste do pêndulo inclinada em 170° e busca-se posiciona-la de forma estável em $x = 0 \text{ m}$. Para a análise, os seguintes parâmetros são considerados:

- Tempo para atingir regime permanente de posição angular e linear - parâmetro mais importante, pois representa a capacidade do controle de atingir o regime permanente e erro zero;
- Sobressinal de posição linear e angular e ação de controle - devem apenas respeitar os limites de operação pré-estabelecidos.

A partir das simulações obteve-se as respostas de posição em função do tempo, posição angular em função do tempo e ação de controle em função do tempo representadas em (3), (4) e (5), respectivamente.

Ambos os controladores são capazes de estabilizar o sistema sem violar as condições físicas impostas e em tempo praticável. Para a posição linear, o controlador com LQR obteve tempo de acomodação de 1.97 segundos com o pico do sobressinal em 0.89 metros. Para a posição angular, o tempo de acomodação foi de 2.95 segundos e o pico do sobressinal de 189.5 graus. Para o torque de controle exigido do motor, o pico de sinal foi de 0.628 $N.m$. Já a simulação utilizando

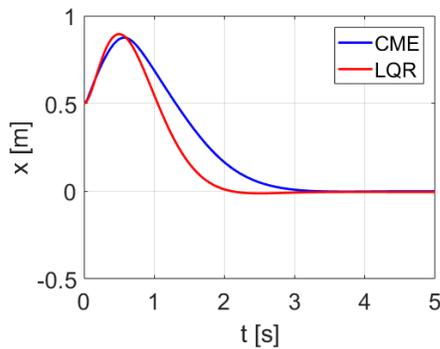


Fig. 3: Resposta de posição linear.

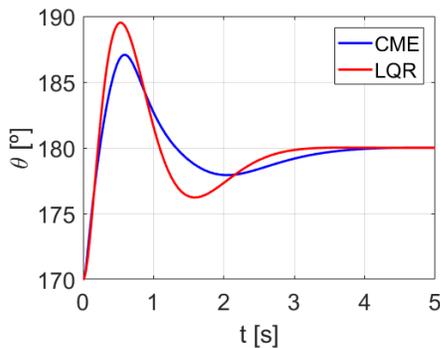


Fig. 4: Resposta de posição angular.

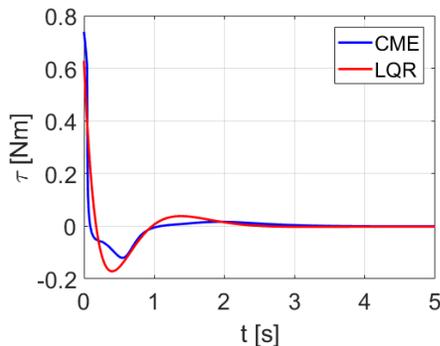


Fig. 5: Ação de controle exigida.

o controlador CME apresentou tempo de acomodação de 2.82 segundos e pico de sobressinal de 0.875 metros para a posição linear. A posição angular obteve tempo de acomodação de 3.699 segundos e pico de sobressinal de 187.06 graus. O torque de controle atingiu um pico de 0.738 $N.m$. Comparando os resultados obtidos, a simulação do sistema com um controlador LQR obteve os menores tempos de acomodação com a menor ação de controle, entretanto apresentou os maiores picos de sobressinal.

V. CONCLUSÕES

O modelo do Pêndulo Invertido pode ser assumido como a simplificação de diversos sistemas. Suas aplicações vão desde

o controle de atitude de satélites e comportamento de foguetes e mísseis ao controle do equilíbrio e postura de robôs bípedes. Não obstante, sua aplicação didática no ensino das teorias de controle é conhecida, sendo uma ótima plataforma para estudo de controle linear e não-linear. Nesse trabalho, buscou-se analisar comparativamente algumas características de duas estratégias de controle distintas (LQR e CME). Ambos os métodos atuaram em uma região de posição angular próxima a condição de equilíbrio e foram capazes de estabilizar o sistema em tempo finito, respeitando os limites físicos pré-estabelecidos. O controle por CME apresentou tempos de acomodação 43.14% e 25.38% maiores para as posições linear e angular respectivamente, quando comparado ao LQR. O pico da ação de controle foi 17.5% maior quando comparada a do LQR. Entretanto apresentou os menores picos de sobressinal quando comparado ao LQR, sendo 1.6% e 1.2% menores para as posições lineares e angulares. Assim, o LQR se mostra vantajoso em relação ao CME no caso estudado no sentido de exigir um atuador menor e mais leve além de entregar um tempo de resposta menor, sendo a diferença entre os picos de sobressinal de inferior a 2%. Já a vantagem do CME se deve ao fato de não ser necessária a modelagem do sistema de interesse para o projeto, tornando-o candidato para solucionar sistemas que apresentem dinâmica complexa ou variação de parâmetros frequente.

REFERÊNCIAS

- [1] C. W. Anderson, "Learning to control an inverted pendulum using neural networks," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 9, no. 3, pp. 31–37, 1989.
- [2] D. Jin, "Development of a stable control system for a segway," 2013.
- [3] K. S. Grewal, R. Dixon, and J. Pearson, "Lqg controller design applied to a pneumatic stewart-gough platform," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 9, no. 1, pp. 45–53, 1989.
- [4] J.-J. Wang, "Simulation studies of inverted pendulum based on pid controllers," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 19, no. 1, pp. 440–449, 2011.
- [5] C. M. Gasparetto, "Projeto e implementação de um regulador linear quadrático aplicado a um pêndulo invertido," Santa Maria, p. 82, 2015.
- [6] V. MLADENOV, G. TSENOV, L. EKONOMOU, NICHOLASHARKIO-LAKIS, and P. KARAMELAS, "Neural network control of an inverted pendulum on a cart," 2009.
- [7] W. PEDRYCZ, "Fuzzy control and fuzzy systems," *Research Studies Press*, 1993.
- [8] C.-H. Huang and W.-J. W. Fellow, "Design and implementation of fuzzy control on a two-wheel inverted pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 7, pp. 2988–3001, 2011.
- [9] C.-H. Huang, wen June Wang, and C.-H. Chiu, "S an approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.
- [10] H. de Castro, P. Paglione, and C. Ribeiro, "Exponential mapping function for nonlinear control," *Studies in Informatics ans Control*, vol. 24, no. 4, 2015.
- [11] F. Dalatore, "Controle multivariável em redes de trocadores de calor com bypasses," Doutorado em engenharia de sistemas, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo, 2011.
- [12] H. F. de Castro Filho, "Modified exponential mapping function for streamlined control of nonlinear dynamics systems," Doutorado em Ciências Aeronáuticas e Engenharia Mecânica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Santa Maria, 2015.
- [13] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [14] L. T. Martins, "Projeto e implementação de um controlador por modos deslizantes aplicado a um pêndulo invertido," Santa Maria, p. 88, 2015.